Dạng 3: Phân tích thành các tổng không âm

- Cơ sở của phương pháp này thường sử dụng với các phương trình có các biểu thức chứa ẩn viết được dưới dạng tổng các bình phương

- Biến đổi phương trình về dạng một vế là một tổng bình phương của các biểu thức chứa ẩn, vế còn lại là tổng bình phương của các số nguyên (số số hạng của hai vế là bằng nhau)

Chẳng hạn: $A^2+B^2=m^2+n^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}A^2=m^2\\B^2=n^2\end{cases}\\ \begin{cases}A^2=n^2\\B^2=m^2\end{cases}\end{array}\right.$, giải các phương trình tương ứng và kết luận nghiệm của phương trình.

Bài 1:

Giải phương trình nghiệm nguyên $4x^2-12x+4y^2-12y+20=0$

Lời giải

Ta có $4x^2-12x+4y^2-12y+20=0 \Leftrightarrow \left(4x^2-12x+9\right)+\left(4y^2-12y+9\right)+2=0$

$\Leftrightarrow \underbrace{(2x-3)^2}_{\geq 0}+\underbrace{(2y-3)^2}_{\geq 0}+2=0$ (phương trình vô nghiệm)

Bài 2:

Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2-3x+y^2-6y+10=0$

Lời giải

Ta có $x^2-3x+y^2-6y+10=0 \Leftrightarrow 4x^2-12x+4y^2-24y+40=0$

$\Leftrightarrow \left(4x^2-12x+9\right)+\left(4y^2-24x+36\right)=5$

$\Leftrightarrow (2x-3)^2+(2y-6)^2=5=1^2+2^2=(-1)^2+(-2)^2$ (có 4 trường hợp)

+ TH1: $\begin{cases}2x-3=1\\2y-6=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}$ (thỏa mãn)

Các trường hợp còn lại tương tự.

Bài 3:

Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2+2y^2+z^2-2xy+2x-4y-4z+5=0$

Lời giải

Phân tích: $x^2-2xy+y^2$ không ổn

Dùng $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$(a-b+c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$

$(x-y+1)^2=x^2+y^2+1-2y-2xy+2x$

Ta có phương trình $\Leftrightarrow\left(x^2+y^2+1-2xy-2y+2x\right)+\left(y^2-2y+1\right)+\left(z^2-4z+4\right)=1$

$\Leftrightarrow(x-y+1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=1=(\pm1)^2+0^2+0^2$

Ta xét 6 trường hợp:

+ TH1: $\begin{cases}x-y+1=1\\y-1=0\\z-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\\z=2\end{cases}$ (thỏa mãn)

Các trường hợp còn lại làm tương tự.

Bài 4:

Tìm số tự nhiên có 4 chữ số, biết rằng số đó bằng tổng bình phương của số tạo bởi hai chữ số đầu và hai chữ số cuối. Biết rằng hai chữ số cuối giống nhau.

Lời giải

Gọi số có bốn chữ số là $\overline{abcc}$ ($a\neq0$; a,b,c là các chữ số)

Từ giả thiết $\overline{abcc}=\overline{ab}^2+\overline{cc}^2\Leftrightarrow\overline{ab00}+\overline{cc}=\overline{ab}^2+\overline{cc}^2\Leftrightarrow100x+y=x^2+y^2$ $\left(\overline{ab}^2=x;\overline{cc}^2=y\right)$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-100x-y=0\Leftrightarrow\left(4x^2-400x+100^2\right)+\left(4y^2-4y+1\right)=100^2+1$

$\Leftrightarrow(2x-100)^2+(2y-1)^2=100^2+1\Rightarrow(2y-1)^2\le100^2+1\Rightarrow2y-1\le100\Rightarrow y\le50$

Vì $y=\overline{cc}\Rightarrow y\in\{0;11;22;33;44\}$

+ $y=0\Rightarrow(2x-100)^2=100^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-100=100\\2x-100=-100\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0=\overline{ab}\\x=100=\overline{ab}\end{array}\right.$ (loại)

+ $y=33\Rightarrow(2x-100)^2=76^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-100=76\\2x-100=-76\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=88\\x=12\end{array}\right.$ (loại)

Bài 5:

Giải phương trình nghiệm nguyên không âm của $x^3y^3-4xy^3+y^2+x^2-2y-3=0$

Lời giải

Phân tích: $y^2-2y+1=(y-1)^2$; $x^3y^3-4xy^3=xy^3\left(x^2-4\right)$

Phương trình $x^3y^3-4xy^3+y^2+x^2-2y-3=0 \Leftrightarrow xy^3\left(x^2-4\right)+\left(y^2-2y+1\right)+x^2-4=0$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-4\right)\underbrace{\left(xy^3+1\right)}_{>0}+\underbrace{\left(y-1\right)^2}_{\geq 0}=0 \quad (*)$$

Vì $\begin{cases} xy^3+1>0 \\ (y-1)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x^2-4 \leq 0 \Leftrightarrow |x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$

Vì $x \in \quad \Rightarrow x \in \{0;1;2\}$

+ Với $x=0 \Rightarrow (*):(y-1)^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=3 \ \ (TM) \\ y=-1\ (KTM) \end{array}\right.$

Thay vào phương trình ban đầu ta thấy thỏa mãn

+ Với $x=1 \Rightarrow -3y^3+y^2-2y-2=0 \Leftrightarrow 3y^3-y^2+2y+2=0 \Leftrightarrow y^2(3y-1)+2y+2=0$

Nếu $y=0 \Rightarrow 2=0$ (vô nghiệm)

Nếu $y>0 \Rightarrow y \geq 1 \Rightarrow 3y-1>0 \Rightarrow VT>VP$ (không thỏa mãn)

+ $x=2 \Rightarrow y=1$ (thỏa mãn)

Vậy $(x;y)=(0;3);(x;y)=(2;1)$.

Bài 6:

Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $x^2+y^2-x-y=8 \qquad (1)$

Lời giải

Ta có $x^2+y^2-x-y=8 \Leftrightarrow 4x^2+4y^2-4x-4y=32$

$$\Leftrightarrow \left(4x^2+4x+1\right)+\left(4y^2+4y+1\right)=34$$

$$\Leftrightarrow |2x-1|^2+|2y-1|^2=3^2+5^2$$

Bằng phương pháp thử chọn ta thấy 34 chỉ có duy nhất một dạng phân tích thành tổng của hai số chính phương $3^2, 5^2$. Do đó phương trình thỏa mãn chỉ trong hai khả năng:

$\begin{cases} |2x-1|=3 \\ |2y-1|=5 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} |2x-1|=5 \\ |2y-1|=3 \end{cases}$

Giả các hệ trên suy ra phương trình (1) có bốn nghiệm nguyên là

$(2;3),(2;-2),(-1;-3),(-1;-2),(3;2),(3;-1),(-2;2),(-2;-1)$

Bài 7:

Giải phương trình nghiệm nguyên

a) $x^2+5y^2-4xy-4y+4=0$

b) $(x+y+1)^2=3(x^2+y^2+1)$

Lời giải

a) Ta đưa được về dạng $(x-2y)^2+(y-2)^2=0$

b) Đưa được về dạng $(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2=0$

Bài 8:

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $3x^2+2y^2+z^2+4xy+2yz=26-2xz$

Lời giải

Ta có $3x^2+2y^2+z^2+4xy+2yz=26-2xz$

$\Leftrightarrow (x+y+z)^2+(x+y)^2+x^2=26$

Bài 9:

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $2x^2+2y^2+z^2+2yz=36-2xz$

Lời giải

Phương trình $2x^2+2y^2+z^2+2yz=36-2xz$

$\Leftrightarrow (x+y+z)^2+(x-y)^2=36$

Bài 10:

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $x^2+y^2+z^2+yz=19-xz$

Lời giải

Nhân 2 vào cả hai vế của phương trình ta được:

$(x+y+z)^2+(x-y)^2+z^2=38$

Bài 11:

Tìm nghiệm nguyên không âm của phương trình $x^2+y^3-3y^2=66-3y$

Lời giải

Ta có $x^2+y^3-3y^2=66-3y \Leftrightarrow x^2+(y-1)^3=65$

Xét trường hợp $y=0$ hoặc 1 không thỏa mãn, $y=2 \Rightarrow x=8$

Với $y>2$ thì ta có 2 tổng không âm.

Bài 12: Chuyên Sư phạm HN năm học 2007 - 2008

Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn $2(x+y)+xy=x^2+y^2$

Lời giải

Cách 1: Ta có $2(x+y)+xy=x^2+y^2$

$\Leftrightarrow (x-y)^2+(x-2)^2+(y-2)^2=8$

Cách 2: Nhận xét được $(x-2)(y-2)\le 4$

Cách 3: $x^2-(y+2)x+y^2-2y=0$

Bài 13:

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $y^2z^2+(y^3-2xy)z+x(x-y)+y^2z^2(y-1)=0$

Lời giải

Phương trình $\Leftrightarrow (y^2z^2-2yz+x^2)+(y^2z-xy)=-y^3z+y^2z+(1-y)y^2z^2$

$\Leftrightarrow (yz-x)^2+y(yz-x)=y^2z(1-y)+y^2z^2(1-y)$

$$\Leftrightarrow \left(yz-x+\frac{y}{2}\right)^2=y^2z(1-y)(1+z)+\frac{y^2}{4}\Leftrightarrow \frac{y^2}{4}=y^2z(z+1)(y-1)+\left(yz-x+\frac{y}{2}\right)^2 \qquad (*)$$

Từ phương trình (*) ta suy ra $\frac{y^2}{4}\ge y^2z(z+1)(y-1)$ (**)

Do y, z là các số nguyên dương nên (**) ta suy ra $y=1$

Vì nếu $y\ge 2$ và do $z\ge 1$ nên $z(z+1)(y-1)\ge 2\Rightarrow y^2z(z+1)(y-1)>\frac{y^2}{4}$, mẫu thuẫn với (**)

Thay $y=1$ vào (*) ta có $\left(z-x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z-x=0 \\ z-x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=z \\ x=z+1 \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $(t;1;t),(t+;1;t)$ với $t\in {}^{+}$.

Bài 14:

Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2+y^2-6x+4y+13=0\ (1)$

Lời giải

Ta có: $x^2+y^2-6x+4y+13=0\Leftrightarrow (x^2-6x+9)+(y^2+4y+4)=0\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+2)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$