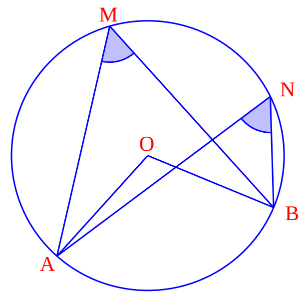
CHUYÊN ĐỀ 2: TỨ GIÁC NỘI TIẾP

Bài 1: Số đo cung. Góc ở tâm. Góc nội tiếp

A. Kiến thức



1. Góc ở tâm: $AOB =$ sđ AB

2. Góc nội tiếp: $AMB = \frac{1}{2} AOB$

Hệ quả: $AMB = ANB;\ AMB = \frac{1}{2}$ sđ AB

B. Bài tập

Bài 1:

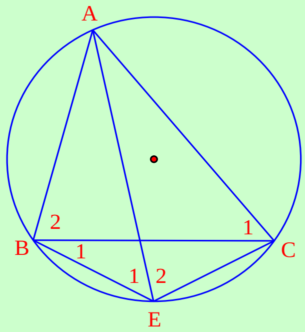
Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). Tia phân giác của góc A cắt BC tại F, cắt đường tròn (O) tại E. Chứng minh rằng:

a) ΔBEC cân

b) $BEC = ABC + ACB$

c) $AB.AC = AF.AE$

d) $AF^2 = AB.AC - BF.CE$



Lời giải

a) Ta có $\begin{cases} BAE = BCE \\ CBE = EAC \end{cases}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung)

Vì AE là phân giác của $ABC \Rightarrow BAE = EAC \Rightarrow EBC = ECB \Rightarrow \Delta BEC$ cân tại E

b) Ta có $E_1 = C_1;\ E_2 = B_2$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung)

$\Rightarrow E_1 + E_2 = C_1 + B_2$ (đpcm)

c) Xét ΔABF và ΔAEC có $BAF = EAC$ (AE là phân giác) và $ABF = AEC$

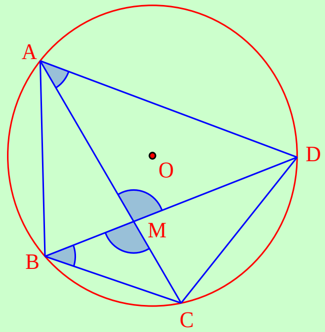
$\Rightarrow \Delta ABF \backsim \Delta AEC\,(gg) \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow AB.AC = AE.AF$

d) Xét ΔAFB và ΔCEF có: $B_2 = E_2;\ BAE = FCE \Rightarrow \Delta AFB \backsim \Delta CFE\ (gg)$

$\Rightarrow BF.CE = AF.FE$

Bài 2:

Nếu hai đường thẳng chứa dây AC, BD của một đường tròn cắt nhau tại một điểm M (nằm trong hoặc nằm ngoài đường tròn) thì $MA.MC = MB.MD$



Lời giải

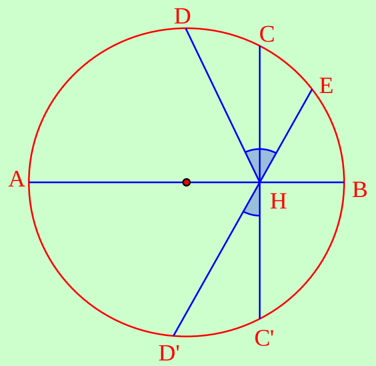
Ta có $DBC = CAD$ (2 góc nội tiếp chắn 1 cung)

Xét ΔMBC và ΔMAD có $BMC = AMD$; $DBC = DAC$

$\Rightarrow \Delta MBC \backsim \Delta MAD \Rightarrow \dfrac{MB}{MA} = \dfrac{MC}{MD} \Rightarrow MA.MC = MB.MD$

Bài 3:

Áp dụng bài 2: Cho điểm C thuộc nửa đường tròn đường kính AB, H là hình chiếu của C trên AB. Các điểm D và E thuộc nửa đường tròn đó sao cho HC là tia phân giác của DHE. Chứng minh rằng $HC^2 = HD.HE$



Lời giải

Kéo dài CH cắt đường tròn đường kính AB tại $C' \Rightarrow H$ là trung điểm của CC'

$\Rightarrow HC^2 = HC.HC'$

Lấy D' là đối xứng của D qua AB

Suy ra D' thuộc đường tròn đường kính AB

Vì D', C' lần lượt là hai điểm đối xứng của D và C qua AB

Mà $H \in AB \Rightarrow DHC = D'HC' \Rightarrow D'HC' = CHE$

Mà hai góc ở vị trí đối đỉnh nên H, D', E thẳng hàng

Áp dụng bài 2 ta có: $HC^2 = HC.HC' = HD'.HE = HD.HE$ (đpcm)

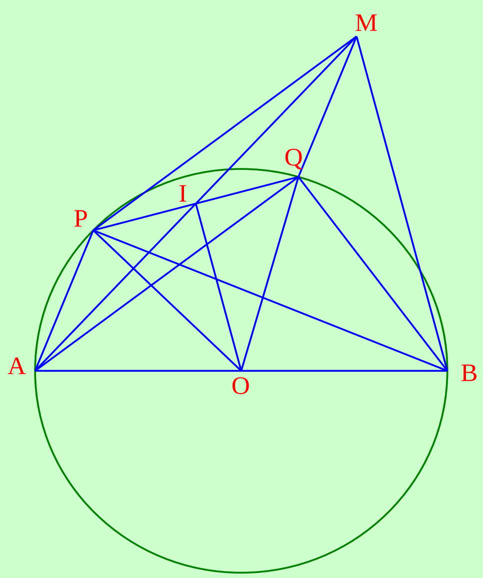
Bài 4:

Cho đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$. Gọi PQ là một dây thay đổi của đường tròn (O) sao cho $PQ = R$. Vẽ hình bình hành $PAQM$

a) Chứng minh rằng Q là trực tâm ΔMPB

b) Tính theo R khoảng cách từ tâm O đến PQ

c) Khi dây PQ thay đổi thì điểm M di động trên đường nào?



Lời giải

a) Ta có $\widehat{APB} = \widehat{AQB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow AP \perp BP; AQ \perp BQ$

Mặt khác $AP//MQ; AQ//PM \Rightarrow BP \perp MQ; BQ \perp MP$

Vậy Q là trực tâm của ΔMBP

b) Dễ thấy ΔPQO đều cạnh R

Gọi I là hình chiếu của O lên PQ, suy ra I là trung điểm của PQ

Xét ΔOIP có $\widehat{OIP} = 90^0$

Áp dụng định lí Pitago ta có: $OI = \sqrt{OP^2 - IP^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

c) Nối AM. Khi đó I là trung điểm của PQ và AM

Xét tam giác ABM có I, O là trung điểm của hai cạnh AM và AM

Từ đó suy ra OI là đường trung bình của ΔABM

$\Rightarrow OI = \frac{1}{2}BM \Rightarrow BM = 2OI = R\sqrt{3}$ (không đổi)

Vậy tập hợp điểm M nằm trên đường tròn tâm B bán kính $R\sqrt{3}$.

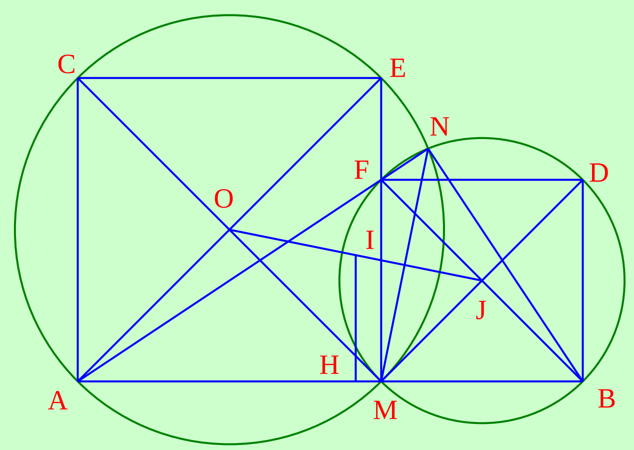
Bài 5:

Điểm M tùy ý trên đoạn AB cố định. Trên AM và MB dựng về một phía đối với AB hai hình vuông. Các đường tròn ngoại tiếp các hình vuông cắt nhau tại điểm thứ hai N

a) Chứng minh rằng đường thẳng AN đi qua một đỉnh của hình vuông thứ hai

b) Tìm quỹ tích của điểm N khi điểm M di động trên AB

c) Tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn thẳng nối hai tâm hình vuông



Lời giải

a) Vì $AEMC$ và $BMFD$ là các hình vuông suy ra hai đường chéo vuông góc với nhau

$\Rightarrow \widehat{ANM} = \frac{1}{2}\widehat{AOM} = 45^0; \widehat{MNB} = \frac{1}{2}\widehat{BJM} = 45^0$

Ta có $\widehat{ANB} = \widehat{ANM} + \widehat{MNB} = 45^0 + 45^0 = 90^0$

Mặt khác, $\widehat{FNB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Từ đó suy ra $AN \perp BN, FN \perp BN \Rightarrow A, N, F$ thẳng hàng

b) Vì $\widehat{ANB} = 90^0$ và AB cố định nên tập hợp điểm M là đường tròn đường kính AB
Giới hạn: Trong nửa đường tròn
c) Từ hai tâm hạ hai đường vuông góc

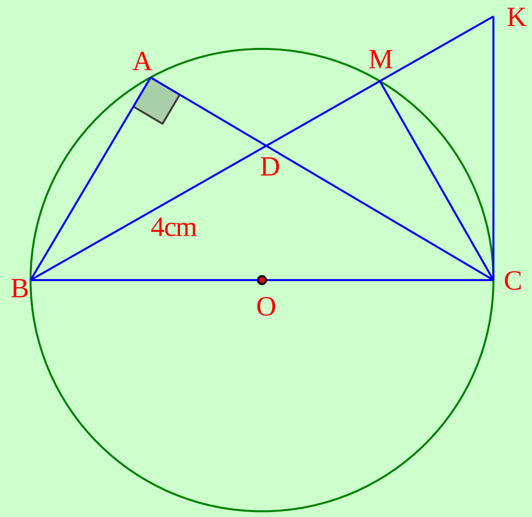
Khi đó IH là đường trung bình của hình thang vuông có tổng đáy bé và đáy lớn là $\frac{AB}{2}$

Khoảng cách từ I đến AB bằng $\frac{AB}{4}$

Giới hạn: Khi M trùng A, M trùng B là đoạn PQ (P, Q cũng chính là giao điểm của đường thẳng cách AB một đoạn $\frac{AB}{4}$ cắt AE và BD).

Bài 6:

Cho ΔABC vuông tại A, nội tiếp đường tròn (O) đường kính $4\sqrt{2}(cm)$. Tiếp tuyến tại C của đường tròn cắt tia phân giác góc B tại K. Tính độ dài BK biết BK cắt AC tại D và $BD = 4cm$



Lời giải

Gọi BK giao với (O) tại điểm thứ hai là M

Vì BK là phân giác của góc B của tam giác ABC nên dễ dàng chứng minh được $AM = MC$

Từ đó suy ra CM là phân giác $\widehat{ACK}$

Mà $CM \perp DK\left(\widehat{BMC} = 90^0\right)$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra ΔCDK cân ở C

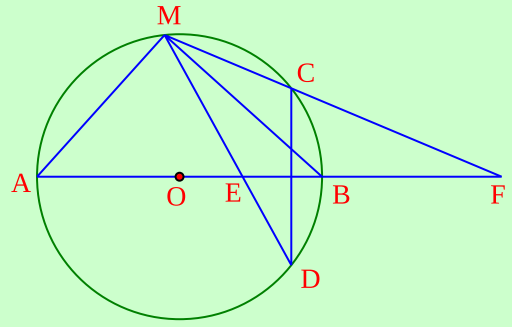
Đặt $DM = MK = x\,(x > 0)$

Từ hệ thức $BC^2 = BM.BK \Rightarrow \left(4\sqrt{2}\right)^2 = (4 + x)(4 + 2x)$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x - 8 = 0 \Rightarrow x = -3 + \sqrt{17} \Rightarrow BK = 4 + 2\left(-3 + \sqrt{17}\right) = 2\sqrt{17} - 2\ (cm)$

Bài 7:

Cho đường tròn tâm O, đường kính AB có dây CD vuông góc với AB. Gọi M là một điểm bất kì thuộc đường tròn (MC không song song với AB), E là giao điểm của MD và AB, F là giao điểm của MC và AB. Chứng minh $\frac{EA}{EB} = \frac{FA}{FB}$



Lời giải

TH1: M thuộc cung CD lớn

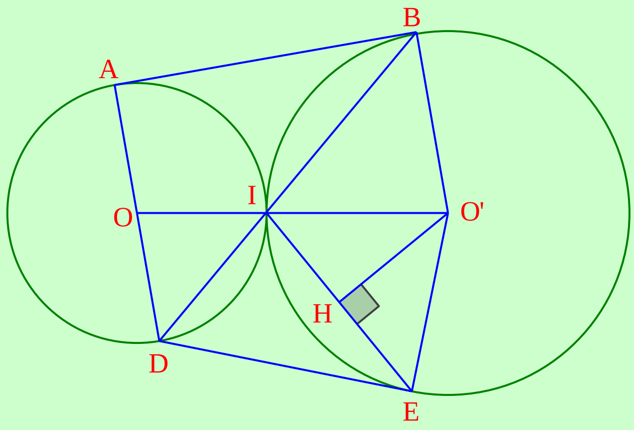
Ta có $AB \perp CD \Rightarrow CB = DB \Rightarrow DMB = CMB \Rightarrow MB$ Là phân giác trong của ΔMEF

Mà $AMB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow MA \perp MB \Rightarrow MA$ là tia phân giác góc ngoài của tam giác EMF. Áp dụng tính chất đường phân giác trong và ngoài của tam giác ta có điều phải chứng minh.

TH2: M thuộc cung CD nhỏ (chứng minh tương tự)

Bài 8:

Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại I, AB là tiếp tuyến chung. Kẻ đường kính AOD, từ D kẻ tiếp tuyến DE với đường tròn (O'). Chứng minh ΔAED cân



Lời giải

Ta có $AID = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Mặt khác $ABI = \frac{1}{2} BO'I;\ BAI = \frac{1}{2} AOI$

Mà $BO'I + AOI = 180^0\ (AO // BO')$

Từ đó suy ra $ABI + BAI = 90^0 \Rightarrow AIB = 90^0 \Rightarrow AID + AIB = 180^0$

Suy ra B, I, D thẳng hàng

Gọi H là hình chiếu của O' trên IE

Ta có $DEI + HEO' = 90^0$ (1)

$O'EH + HO'E = 90^0$ (2)