

CHUYÊN ĐỀ: TAM THỨC BẬC HAI. ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Bài 1: Điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$

A. Kiến thức cần nhớ

*) Biện luận nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$

+ Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac > 0$

+ Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 0$

+ Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac < 0$

B. Bài tập

Bài 1:

Cho phương trình $x^2 - 2(m+3)x + m^2 + 3 = 0$

a) Giải phương trình với $m = -1$

b) Tìm m để phương trình có 1 nghiệm $x = 4$

c) Tìm m để phương trình có nghiệm kép, có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải

b) Vì $x = 4$ là nghiệm của phương trình nên ta có $16 - 2(m+3) \cdot 4 + m^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m - 5 = 0$

$$\Delta_m = 64 + 20 = 84 > 0 \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{8 - \sqrt{84}}{2} \\ m = \frac{8 + \sqrt{84}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 - \sqrt{21} \\ m = 4 + \sqrt{21} \end{cases}$$

c) Ta có $\Delta = 4(m+3)^2 - 4(m^2 + 3) = 24(m+1)$

+ Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow m = -1$

+ Phương trình có nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m > -1$

Bài 2:

Cho phương trình $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$. Biện luận theo tham số m số nghiệm của phương trình.

Lời giải

+ Với $m = -1 \Rightarrow 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$

+ Với $m \neq -1 \Rightarrow \Delta' = (m-1)^2 - (m+1)(m-2) = -m + 3$

Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow -m + 3 < 0 \Leftrightarrow m > 3$, khi đó phương trình vô nghiệm

Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow -m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3$, khi đó $x = \frac{-b'}{a} = \frac{m-1}{m+1} = \frac{1}{2}$

Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow -m + 3 > 0 \Leftrightarrow m < 3$, khi đó phương trình có 2 nghiệm $\begin{cases} x = \frac{m-1-\sqrt{m+3}}{m+1} \\ x = \frac{m-1+\sqrt{m+3}}{m+1} \end{cases}$

Bài 3:

Chứng minh rằng phương trình $(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$ luôn có nghiệm với mọi a, b, c

Lời giải

Phương trình $x^2 - (a+b)x + ab + x^2 - (b+c)x + bc + x^2 + (c+a)x + ac = 0$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2(a+b+c)x + (ab+bc+ca) = 0$$

$$\Delta' = (a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + ca - 3(ab+bc+ca)$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0 \Rightarrow \Delta' \geq 0, \forall a, b, c \text{ (đpcm)}$$

Bài 4:

Cho phương trình $x^2 - ax + a = 0$. Tìm a nguyên để phương trình có nghiệm nguyên.

Lời giải

Ta có $\Delta = a^2 - 4a = a(a-4) \geq 0$

$$+ \begin{cases} a \geq 0 \\ a-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \geq 4$$

$$+ \begin{cases} a \leq 0 \\ a-4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \leq 0$$

Với a nguyên thì phương trình có nghiệm nguyên khi Δ là số chính phương

$$\text{Đặt } \Delta = k^2, (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow a^2 - 4a = k^2 \Leftrightarrow (a-2)^2 - k^2 = 0 \Leftrightarrow (a-2-k)(a-2+k) = 4$$

$$\text{Mà } \begin{cases} a-2-k \leq a-2+k \\ 4 = (-4) \cdot (-1) = 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2 = (-2) \cdot (-2) \end{cases}$$

Có $a-2-k \in \mathbb{Z}; a-2+k \in \mathbb{Z}$

$$+ \text{TH1: } \begin{cases} a-2-k = -4 \\ a-2+k = -1 \end{cases} \Rightarrow 2k = 3 \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}$$

$$+ \text{TH2: } \begin{cases} a-2-k=-2 \\ a-2+k=-2 \end{cases} \Rightarrow k=0 \Rightarrow a=0 \text{ (thỏa mãn)}$$

Các trường hợp khác tương tự.

Bài 5:

Cho phương trình $x^2 - ax + a = 0$. Tìm a để phương trình:

- a) Có nghiệm kép
- b) Có nghiệm
- c) Vô nghiệm

Lời giải

Ta có $\Delta = a^2 - 4a = a(4 - a)$

a) Để phương trình có nghiệm kép thì $\Delta = a(4 - a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 4 \end{cases}$

b) Để phương trình có nghiệm thì $\Delta = a(4 - a) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 4 \\ a \leq 0 \end{cases}$

c) Để phương trình vô nghiệm thì $\Delta = a(4 - a) < 0 \Leftrightarrow 0 < a < 4$

Bài 6:

Cho phương trình $(m-1)x^2 + 2x - 3 = 0$ (m là tham số)

- a) Tìm m để phương trình trên có nghiệm
- b) Tìm m để phương trình trên có nghiệm duy nhất. Tìm nghiệm duy nhất đó
- c) Tìm m để phương trình trên có một nghiệm bằng 2. Khi đó hãy tìm nghiệm còn lại (nếu có)

Lời giải

a) Với $m=1$, thay vào phương trình ta có $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

Với $m \neq 1$, ta có $\Delta' = 1^2 + 3(m-1) = 3m - 2$

Khi đó để phương trình có nghiệm thì $\Delta' = 3m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{2}{3}$

Vậy với $m \geq \frac{2}{3}$ thì phương trình có nghiệm.

b) Với $m=1$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{3}{2}$

Với $m \neq 1$, để phương trình có nghiệm duy nhất thì $\Delta' = 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$

Khi đó nghiệm duy nhất của phương trình là $x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a} = -\frac{1}{m-1} = -\frac{1}{\frac{2}{3}-1} = 3$

Vậy với $m = 1$ hoặc $m = \frac{2}{3}$ thì phương trình có nghiệm duy nhất.

c) Để phương trình có một nghiệm bằng 2 thì $(m-1).2^2 + 2.2 - 3 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{4}$

Thay $m = \frac{3}{4}$ vào phương trình ta được $\left(\frac{3}{4}-1\right)x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 6 \end{cases}$

Vậy $m = \frac{3}{4}$ và nghiệm còn lại là $x_2 = 6$.

Bài 7:

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị bé nhất của hàm số $y = \frac{4x-3}{x^2+1}$. Từ đó giải bài toán tìm x bất kỳ sao cho y nguyên.

Lời giải

Hàm số xác định với mọi x nên ta có $y = \frac{4x-3}{x^2+1} \Leftrightarrow yx^2 - 4x + y + 3 = 0$

Xét $y = 0$ thì $x = \frac{3}{4}$

Xét $y \neq 0$, vì phương trình bậc hai có nghiệm x nên

$\Delta' = (-2)^2 - y(y+3) \geq 0 \Leftrightarrow y^2 + 3y - 4 \leq 0 \Leftrightarrow (y-1)(y+4) \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq y \leq 1$

Vậy $y_{\max} = 1$ tại $x = 2$, $y_{\min} = -4$ tại $x = \frac{-1}{2}$.

Bài 8:

Cho biểu thức $P = \frac{x-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} + \frac{1+2x-2\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}}$

Tìm tất cả các giá trị của x sao cho giá trị của P là một số nguyên.

Lời giải

Điều kiện $x > 0; x \neq 1$. Khi đó ta có $P = \frac{x-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} + \frac{1+2x-2\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}}$

$$= \frac{x-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{1+2x-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{(x-2\sqrt{x})\sqrt{x} + (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) + 1+2x-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{x\sqrt{x}-2x+x-1+1+2x-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$$

$$\frac{x+x\sqrt{x}-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}$$

Ta có $P = \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow Px + (P-1)\sqrt{x} + P - 2 = 0$, ta coi đây là phương trình bậc hai của \sqrt{x}

Nếu $P=0 \Rightarrow -\sqrt{x}-2=0$ (vô lí)

Suy ra $P \neq 0$ nên để tồn tại x thì phương trình trên ta có $\Delta = (P-1)^2 - 4P(P-2) \geq 0 \Leftrightarrow -3P^2 + 6P + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (P-1)^2 \leq \frac{4}{3}$

Do P nguyên nên $(P-1)^2$ bằng 0 hoặc 1.

+ Nếu $(P-1)^2 = 0 \Leftrightarrow P=1 \Leftrightarrow x=1$ (không thỏa mãn điều kiện xác định)

+ Nếu $(P-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} P=2 \\ P=2 \end{cases} \Rightarrow P=2 \Leftrightarrow 2x+\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0$ (không thỏa mãn)

Vậy không có giá trị nào của x thỏa mãn đề bài.

Bài 9:

Cho phương trình $x^2 - 2ax - (a+3) = 0$. Tìm a nguyên để phương trình trên có nghiệm nguyên.

Lời giải

Phương trình $x^2 - 2ax - (a+3) = 0$ có $\Delta' = a^2 + a + 3$

Vì hệ số theo x^2 là 1, hệ số của x là $-2a \in \mathbb{Z}$ nên phương trình có nghiệm nguyên

$\Leftrightarrow \Delta'$ là số chính phương

$$\Leftrightarrow a^2 + a + 3 = k^2 \quad (0 \leq k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow 4a^2 + 4a + 43 = 4k^2 \Leftrightarrow (2a+1)^2 + 11 = (2k)^2$$

$$\Leftrightarrow (2a-2k+1)(2a+2k+1) = -11 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-2k+1 = -1 \\ 2a+2k+1 = 11 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 2a-2k+1 = -11 \\ 2a+2k+1 = 1 \end{cases}$$