

Dạng 4: Viết phương trình đường thẳng

A. Kiến thức cần nhớ

1. Phương trình của chùm đường thẳng đi qua một điểm

Dạng tổng quát: $y = k(x - x_0) + y_0$ ($k \neq 0$)

2. Phương trình của đường thẳng đi qua 1 điểm $M(x_0; y_0)$ và song

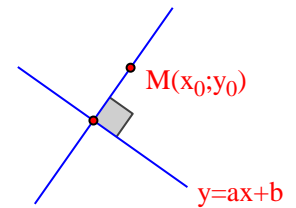
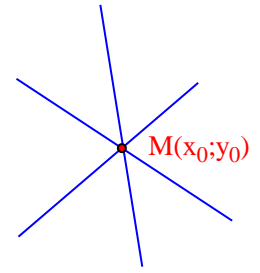
song với đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là $y = a(x - x_0) + y_0$

3. Phương trình đường thẳng đi qua $M(x_0; y_0)$ và vuông góc với

đường thẳng $y = ax + b$ là $y = -\frac{1}{a}(x - x_0) + y_0$

4. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt $M_1(x_1; y_1)$ và

$M(x_2; y_2)$



$$\text{Giả sử } y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \\ b = y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot x_1 \end{cases} \Rightarrow \text{phương trình } \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Bài 1:

Chứng tỏ rằng ba điểm $A(1; -1), B(3; 5), C(9; 23)$

Lời giải

Phương trình của đường thẳng AB là: $\frac{x-1}{3-1} = \frac{y+1}{5+1} \Leftrightarrow y = 3x - 4$

Nhận thấy điểm C cũng thuộc đường thẳng AB do: $23 = 3 \cdot 9 - 4$

Vậy ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Bài 2:

Trên hệ trục tọa độ cho $A(2; 2)$ và $B(6; 4)$. Hãy tìm trên trục hoành sao cho $\triangle ABC$ cân tại C . Viết phương trình đường cao từ đỉnh C của $\triangle ABC$.

Lời giải

*) **Nhắc lại:** $M(x_M; y_M)$ và $N(x_N; y_N) \Rightarrow MN = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2}$

$$\text{Nếu } I \text{ là trung điểm của } MN \text{ thì } \begin{cases} x_I = \frac{x_M + x_N}{2} \\ y_I = \frac{y_M + y_N}{2} \end{cases}$$

Giả sử $C(x_C; 0)$, do $CA = CB$ nên $\sqrt{(x_C - 2)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{(x_C - 6)^2 + (0 - 4)^2}$

$$\Leftrightarrow 8x_C = 44 \Leftrightarrow x_C = \frac{11}{2} \Rightarrow C\left(\frac{11}{2}; 0\right)$$

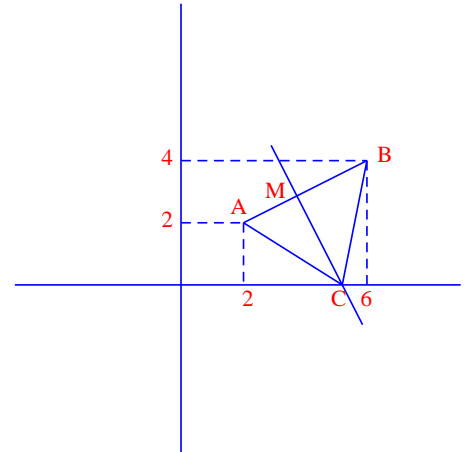
Cách 1: Viết (AB) : $\frac{x-2}{6-2} = \frac{y-2}{4-2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$

Phương trình của đường cao hạ từ C : $y = -2(x - x_C) + y_C$

Cách 2: Tìm tọa độ điểm $M(4; 3)$

Viết phương trình đường thẳng đi qua M và $C\left(\frac{11}{2}; 0\right)$

Tìm được: $y = -2x + 11$.



Bài 3:

Cho $(d_1): y = x + 1$ và $(d_2): y = -2x + 10$. Hãy viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(2; 1)$ và cắt $(d_1), (d_2)$ lần lượt tại A và B sao cho M là trung điểm của AB .

Lời giải

Giả sử đường thẳng đi qua $M(2; 1)$ là: $y = k(x - 2) + 1$ (d_3)

Với điều kiện $k \neq 0$

d_3 không song song $d_1 \Rightarrow k \neq 1$

d_3 không song song $d_2 \Rightarrow k \neq -2$

$A(x_A; y_A)$ là giao điểm của (d_1) và (d_3)

$$\begin{cases} y_A = x_A + 1 \\ y_A = k(x_A - 2) + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = \frac{2k}{k-1} \\ y_A = \frac{3k-1}{k-1} \end{cases}$$

$$\text{Tương tự } B \text{ là giao điểm của } (d_2) \text{ và } (d_3) \Rightarrow \begin{cases} x_B = \frac{9+2k}{k+2} \\ y_B = \frac{6k+2}{k+2} \end{cases}$$

$$M \text{ là trung điểm của } AB \text{ nên } \begin{cases} x_A + x_B = 2x_M \\ y_A + y_B = 2y_M \end{cases} \Rightarrow k = \frac{1}{7}$$

$$y = \frac{1}{7}(x - 2) + 1 = \frac{1}{7}x + \frac{5}{7}$$

Bài 4:

Cho ba điểm $A(-1;6), B(-4;4), C(1;1)$. Tìm tọa độ đỉnh D của hình bình hành $ABCD$.

Lời giải

Viết phương trình đường thẳng $AB: y = \frac{2}{3}x + \frac{20}{3}$

Đường thẳng CD đi qua C và song song với AB là: $CD: y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

Điểm D thuộc đường thẳng CD và $CD = AB$.

Gọi $D(x_0; y_0)$, theo như nhận xét trên ta có:

$$\begin{cases} y_0 = \frac{2}{3}x_0 + \frac{1}{3} \\ \sqrt{(x_0 - 1)^2 + (y_0 - 1)^2} = \sqrt{(-4 + 1)^2 + (4 - 6)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = \frac{2}{3}x_0 + \frac{1}{3} \\ (x_0 - 1)^2 + \left(\frac{2}{3}x_0 - \frac{2}{3}\right)^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 4 \\ y_0 = 3 \\ x_0 = -2 \\ y_0 = -1 \end{cases}$$

Vậy ta tìm được hai điểm D thỏa mãn bài toán.

Bài 5: Học sinh giỏi Tỉnh Hưng Yên, năm học 2016 - 2017

Cho hàm số $y = ax + b (a \neq 0)$ có đồ thị là (d) . Lập phương trình đường thẳng (d) , biết (d)

Đi qua điểm $A(1;2)$ và cắt trục hoành tại điểm B có hoành độ dương, cắt trục tung tại điểm C có tung độ dương và thỏa mãn $OB + OC$ nhỏ nhất (O là gốc tọa độ).

Lời giải

Do (d) đi qua $A(1;2)$ thay giá trị x, y vào ta được $a + b = 2$

Do (d) cắt trục hoành tại điểm B có hoành độ dương khi đó ta có $y = 0 \Rightarrow OB = \frac{-b}{a} > 0$

Do (d) cắt trục tung tại điểm C có tung độ dương khi đó ta có $x = 0 \Rightarrow OC = b > 0$

Vì $b > 0$ và $\frac{-b}{a} > 0$ nên $a < 0$

$$\text{Ta có } OB + OC = \frac{-b}{a} + b = -\frac{2-a}{a} + 2 - a = \frac{3a - a^2 - 2}{a} = 3 + \left(-a + \frac{2}{-a}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có: $-a + \frac{2}{-a} \geq 2\sqrt{-a \cdot \frac{2}{-a}} = 2\sqrt{2}$

Nên $3 - \frac{2}{a} - a \geq 3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow OB + OC \geq 3 + 2\sqrt{2}$

Theo bài dấu “=” xảy ra nên $a = \frac{2}{a} \Leftrightarrow a^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow a = -\sqrt{2} (a < 0)$

$$\Rightarrow a = -\sqrt{2} \Rightarrow b = 2 + \sqrt{2}$$

Vậy phương trình đường thẳng (d): $y = -\sqrt{2}x + 2 + \sqrt{2}$

Bài 6: Học sinh giỏi Tỉnh Đắk Lắk, năm học 2015 - 2016

Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(1;2)$ và cắt hai tia Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A và B khác gốc tọa độ O và thỏa mãn $OA + OB = 6$

Lời giải

Gọi phương trình đường thẳng cần tìm là $y = ax + b$

Do đường thẳng đi qua điểm $M(1;2)$ nên ta có $a + b = 2$

Do đường thẳng cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B nên ta có

Khi $x = 0 \Rightarrow y = b \Rightarrow B(0;b)$

Khi $y = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a} \Rightarrow A\left(\frac{-b}{a}; 0\right)$

Mà ta có $OA + OB = 6 \Leftrightarrow |b| + \left|\frac{-b}{a}\right| = 6$

Chú ý rằng đường thẳng cắt tia Ox, Oy nên ta có $b > 0; \frac{-b}{a} > 0$ do đó ta có $b > 0$ và $a < 0$

Từ đó ta có
$$\begin{cases} a + b = 2 \\ b - \frac{b}{a} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - a \\ (2 - a) + \frac{a - 2}{a} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - a \\ a^2 + 3a + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1; b = 3 \\ a = -2; b = 4 \end{cases}$$

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn bài toán là $y = -x + 3$ và $y = -2x + 4$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ DẠNG TOÁN

Bài 1:

a) Cho bốn điểm $A(0; -5), B(1; -2), C(2; 1), D(2,5; 2,5)$. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng.

b) Tìm x sao cho ba điểm $A(x; 14), B(-5; 20), C(7; -16)$ thẳng hàng.

Lời giải

a) Viết được phương trình đường thẳng $AB: y = 3x - 5$

Nhận thấy điểm C và điểm D đều thuộc đường thẳng AB

Vậy 4 điểm A, B, C, D thẳng hàng.

b) Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm B, C . Tìm x sao cho A thuộc đường thẳng BC

Phương trình đường thẳng $BC: y = -3x + 5$

Điểm A thuộc đường thẳng BC thì tọa độ của điểm A phải thỏa mãn phương trình đường thẳng BC hay $14 = -3x + 5 \Leftrightarrow x = -3$

Vậy $A(-3; 14)$.

Bài 2:

Cho ba điểm $A(-1; 6), B(-4; 4), C(1; 1)$. Tìm tọa độ đỉnh D của hình bình hành $ABCD$

Lời giải

Viết phương trình đường thẳng $AB: y = \frac{2}{3}x + \frac{20}{3}$

Đường thẳng CD đi qua C và song song với AB là $CD: y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

Điểm D thuộc đường thẳng CD và $CD = AB$

Gọi $D(x_0; y_0)$, theo nhận xét trên ta có
$$\begin{cases} y_0 = \frac{2}{3}x_0 + \frac{1}{3} \\ \sqrt{(x_0 - 1)^2 + (y_0 - 1)^2} = \sqrt{(-4 + 1)^2 + (4 - 6)^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = \frac{2}{3}x_0 + \frac{1}{3} \\ (x_0 - 1)^2 + \left(\frac{2}{3}x_0 - \frac{2}{3}\right)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 4 \\ y_0 = 3 \\ x_0 = -2 \\ y_0 = -1 \end{cases}$$

Vậy ta tìm được hai điểm D thỏa mãn bài toán.

Bài 3:

Cho đường thẳng $d: y = (m - 2)x + 3 (m \neq 2)$ và đường thẳng $d': y = -m^2x + 1 (m \neq 0)$

a) Tìm m để $d // d'$

b) Tìm m để d cắt Ox tại A , cắt Oy tại B mà góc BAO bằng 60° .

Lời giải

a) $d // d' \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 = -m^2 \\ 3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$