CHUYÊN ĐỀ: PHƯƠNG TRÌNH

BÀI 1: PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VÀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. Kiến thức cần nhớ

1. Giải phương trình: $ax+b=0(1)$

- Nếu $a=0 \Rightarrow (1)$ trở thành $b=0$

+ Nếu $b=0 \Rightarrow (1)$ có vô số nghiệm

+ Nếu $b\neq 0 \Rightarrow (1)$ vô nghiệm

- Nếu $a\neq 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow ax=-b \Leftrightarrow x=\frac{-b}{a}$ trở thành $b=0$

2. Giải phương trình: $ax^2+bx+c=0(2)$

- Nếu $a=0 \Rightarrow (2)$ trở thành $bx+c=0 \Rightarrow$ quay trở về dạng 1

- Nếu $a\neq 0 \Rightarrow (2)$ là phương trình bậc hai

Tính $\Delta=b^2-4ac$ hoặc $\Delta=b'^2-ac$ rồi tìm nghiệm của bài toán.

3. Định lí Vi-ét

Giả sử phương trình $ax^2+bx+c=0(2)$ có nghiệm x_1,x_2 thì $\begin{cases} x_1+x_2=\frac{-b}{a} \\ x_1x_2=\frac{c}{a} \end{cases}$

4. Vi-ét đảo

Nếu x_1,x_2 thỏa mãn: $\begin{cases} x_1+x_2=S \\ x_1x_2=P \end{cases}$ thì x_1,x_2 là nghiệm của phương trình: $x^2-Sx+P=0$

Bài 1:

Giải và biện luận phương trình: $(m^2+2m-3)x+m-1=0(1)$, với m là tham số

Lời giải

Phương trình $(1) \Leftrightarrow (m-1)(m+3)x+m-1=0$

- Nếu $m=1$, phương trình (1) trở thành $0x=1-1=0 \Leftrightarrow 0x=0 \Rightarrow$ phương trình (1) có vô số nghiệm

- Nếu $m=-3$, phương trình (1) trở thành $0x+4=0$ (vô lý) $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

- Nếu $m\neq 1, m\neq -3 \Rightarrow$ phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x=\frac{1-m}{(m-1)(m+3)}=\frac{-1}{m+3}$

Bài 2:

Cho số thực dương a thỏa mãn: $a^3=6(a+1)$. Chứng minh rằng phương trình sau vô nghiệm $x^2+ax+a^2-6=0 (1)$

Lời giải

Ta có: $\Delta=a^2-4(a^2-6)=24-3a^2=3(8-a^2)$

Theo giả thiết: $a^3=6(a+1)\Leftrightarrow a^3-6a-6=0\Leftrightarrow a(a^2-6)=6 (2)$

Giả sử $\Delta\ge 0\Leftrightarrow 8-a^2\ge 0\Leftrightarrow a^2\le 8\Rightarrow 0<a\le 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a^2-6\le 8-6=2 \\ 0<a\le 2\sqrt{2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow a(a^2-6)\le 4\sqrt{2}<6\Rightarrow$ mẫu thuẫn với (2)

Vậy $\Delta<0\Rightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm

Bài 3:

Giả sử a,b là hai nghiệm của phương trình $x^2+px+1=0$ và c,d là hai nghiệm của phương trình $x^2+qx+1=0$. Chứng minh $(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)=q^2-p^2$

Lời giải

Áp dụng định lí ta có: $\begin{cases} a+b=-p \\ ab=1\end{cases};\begin{cases} c+d=-q \\ cd=1\end{cases}$

Ta có:

$(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)=(a-c)(b+d)(b-c)(a+d)=(ad+ad-bc-ad)(ab+cd-ca-bd)$

$=(ad-bc)(bd-ac)=abd^2-a^2cd=b^2cd+c^2ab=d^2-a^2-b^2+c^2$

$=(c^2+d^2)-(a^2+b^2)=(c+d)^2-(a+b)^2=q^2-p^2$ (đpcm)

Bài 4: Chuyên Toán Vĩnh Phúc, năm học 2017

Cho phương trình $x^2-2(m-1)x+2m^2-3m+1=0 \qquad (1)$

a) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm

b) Giả sử phương trình (1) có 2 nghiệm x_1,x_2. Chứng minh rằng $P=|x_1+x_2+x_1x_2|\le\dfrac{9}{8}$

Lời giải

a) Để phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'\ge 0\Leftrightarrow (m-1)^2-(2m^2-3m+1)\ge 0$

$\Leftrightarrow m - m^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 1$

Theo định lí Viét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1x_2 = 2m^2 - 3m + 1 \end{cases}$

$\Rightarrow P = |2m^2 - m - 1| = \left| \underbrace{(m-1)}_{\leq 0} \underbrace{(2m+1)}_{\geq 0} \right| = 1 + m - 2m^2$

Ta chứng minh $P \leq \frac{9}{8} \Leftrightarrow -2m^2 + m + 1 \leq \frac{9}{8} \Leftrightarrow 2m^2 - m + \frac{1}{8} \geq 0 \Leftrightarrow \left(m - \frac{1}{4}\right)^2 \geq 0$ (luôn đúng)

$\Rightarrow P \leq \frac{9}{8}$.

Bài 5:

Giả sử x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - 4x + 1 = 0$. Chứng minh rằng $x_1^{10} + x_2^{10}$ là một số nguyên

Lời giải

Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n \, (n \in N, n \geq 1)$

Theo định lí Viét ta có $S_1 = 4; S_2 = 14$

Vì x_1, x_2 là hai nghiệm khác 0 của phương trình $x^2 - 4x + 1 = 0$ nên:

$x_1^2 = 4x_1 - 1 \Rightarrow x_1^{n+2} = 4x_1^n - x_1^n$ (nhân với x_1^n)

$x_2^2 = 4x_2 - 1 \Rightarrow x_2^{n+2} = 4x_2^{n+1} - x_2^n$ (nhân với x_2^n)

$\Rightarrow S_{n+2} = 4S_{n+1} - S_n$ (với $\forall n \geq 1$)

Nếu S_n là số nguyên, S_{n+1} là số nguyên $\Rightarrow S_{n+2}$ là số nguyên

$\Rightarrow S_1$ là số nguyên, S_2 là số nguyên $\Rightarrow S_{10}$ là số nguyên.

Bài 6: Chuyên Lê Hồng Phong TP HCM, năm học 2003

Chứng minh rằng nếu $a + b \geq 2$ thì ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm

$x^2 + 2ax + b = 0$ và $x^2 + 2bx + a = 0$

Lời giải

Ta sử dụng phương pháp phản chứng

Giải sử cả hai phương trình đã cho đều vô nghiệm. Khi đó: $\Delta_1' = a^2 - b < 0$ và $\Delta_2' = b^2 - a < 0$

$\Rightarrow \Delta_1' + \Delta_2' = a^2 + b^2 - (a+b) < 0 \qquad (1)$

Mặt khác dễ chứng minh được: $2(a^2+b^2) \ge (a+b)^2$ và $(a+b)^2 \ge 2(a+b)$ do $a+b \ge 2$

Vậy $2(a^2+b^2) \ge 2(a+b) \Leftrightarrow a^2+b^2 \ge a+b \Leftrightarrow a^2+b^2-(a+b) > 0 \qquad (2)$

Từ (1) và (2) ta thấy mâu thuẫn, nên điều giả sử là sai

Vậy ít nhất 1 trong 2 phương trình đã cho có nghiệm.

Bài 7: NK Trần Đại Nghĩa TP HCM, năm học 2001

Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0\ (a \ne 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 = x_2^2$. Chứng minh $b^3 + a^2c + ac^2 = 3abc$

Lời giải

Theo hệ thức Viét ta có: $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$ và do $x_1 = x_2^2$ nên $x_2 = \sqrt[3]{\dfrac{c}{a}}$ là nghiệm của phương trình đã cho. Thay $x_2 = \sqrt[3]{\dfrac{c}{a}}$ vào phương trình ta được: $b + \sqrt[3]{a^2c} + \sqrt[3]{c^2a} = 0$

**) Lưu ý:* $(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)(y+z)(z+x)$ với mọi x, y, z

Nếu $x + y + z = 0 \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

Áp dụng cho $x = b, y = \sqrt[3]{a^2c}, z = \sqrt[3]{c^2a}$ ta có điều phải chứng minh.

Bài 8: NK Trần Đại Nghĩa TP HCM, năm học 2001

Giả sử các phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ và $cy^2 + dx + a = 0$ ($a \ne 0, c \ne 0$) có các nghiệm tương ứng là x_1, x_2 và y_1, y_2. Chứng minh rằng $x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 \ge 4$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có: $x_1^2 + x_2^2 \ge |x_1|^2 + |x_2|^2 \ge 2|x_1||x_2| = 2|x_1x_2|$

$y_1^2 + y_2^2 \ge |y_1|^2 + |y_2|^2 \ge 2|y_1||y_2| = 2|y_1y_2|$

Theo định lí Viét ta có: $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$ và $y_1y_2=\dfrac{a}{c}$

Vậy $x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2\ge 2|x_1x_2|+2|y_1y_2|=2\left|\dfrac{c}{a}\right|+\left|\dfrac{a}{c}\right|\ge 2.2\sqrt{\left|\dfrac{c}{a}\right|.\left|\dfrac{a}{c}\right|}=4$ (đpcm)

Bài 9:

Chứng minh rằng nếu $a+b+5c=0$ thì phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0\,(a\ne 0)$ có hai nghiệm phân biệt

Lời giải

Ta có $a+b+5c=0\Rightarrow b=-a-5c$

$\Delta=b^2-4ac=(a+5c)^2-4ac=a^2+6ac+25c^2=(a+3c)^2+16c^2\ge 0$

Giả sử $\Delta=0\Rightarrow\begin{cases}a+3c=0\\c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\c=0\end{cases}$ mâu thuẫn với giả thiết $a\ne 0$

Vậy $\Delta>0$ nê phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài 10: ĐHKHTN HN, năm học 2015

Giả sử a,b là hai số thực phân biệt thỏa mãn $a^2+3a=b^2+3b=2$

a) Chứng minh rằng $a+b=-3$

b) Chứng minh rằng $a^3+b^3=-45$

Lời giải

a) Nhận thấy a,b là hai nghiệm phân biệt của phương trình ẩn x sau:

$x^2+3x=2\Leftrightarrow x^2+3x-2=0$

Theo định lí Viét ta có $a+b=-3$

b) Theo Viét ta cũng có $ab=-2$

Có $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=(-3)^3-3(-2)(-3)=-45$