

DẠNG 3: RÚT GỌN BIỂU THỨC VÀ GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH

A. Kiến thức cần nhớ

1. Xét bài toán: Cho biểu thức $P(x)$

a) Rút gọn $P(x)$

b) Tìm giá trị của x sao cho $P(x) > m$ (m là hằng số) hoặc $P(x) > Q(x)$

2. Giải bài toán

a) Rút gọn

- Đặt điều kiện để $P(x)$ có nghĩa

- Thực hiện rút gọn $P(x)$

b) Tìm x : Giải bất phương trình

- Kiểm tra điều kiện và kết luận

B. Bài tập

Bài 1:

Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{x-3}{x+2\sqrt{x}+4} - \frac{7\sqrt{x}+10}{x\sqrt{x}-8} \right) : \frac{\sqrt{x}+7}{x+2\sqrt{x}+4}$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm x sao cho $A < 2$

Lời giải

a) Điều kiện $x \geq 0$ và $x \neq 4$

Đặt $A = B : C$

$$B = \frac{\sqrt{x}(x+2\sqrt{x}+4) - (x-3)(\sqrt{x}-2) - (7\sqrt{x}+10)}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)} = \frac{x\sqrt{x}+2x+4\sqrt{x} - x\sqrt{x}+2x+3\sqrt{x}-6-7\sqrt{x}-10}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)}$$

$$B = \frac{4x-16}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)} = \frac{4(\sqrt{x}+2)}{x+2\sqrt{x}+4}$$

$$\Rightarrow A = B : C = \frac{4(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+7}$$

$$b) A < 2 \Leftrightarrow \frac{4(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+7} < 2 \Leftrightarrow 4(\sqrt{x}+2) < 2(\sqrt{x}+7) \Leftrightarrow 2(\sqrt{x}+2) < \sqrt{x}+7 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x < 9. \text{ Vậy } \begin{cases} 0 \leq x < 9 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

Bài 2:

Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} + \frac{3}{\sqrt{x}-2} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \right)$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm m để có x thỏa mãn $(1+\sqrt{x}).P > \sqrt{x}+m$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } P = \left(\frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} + \frac{3}{\sqrt{x}-2} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \right) = \frac{4(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} : \frac{-4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

$$P = \frac{4(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} : \frac{-4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = 1 - \sqrt{x}$$

$$b) (1 + \sqrt{x}) \cdot P = (1 + \sqrt{x}) \cdot (1 - \sqrt{x}) = 1 - x$$

Theo đầu bài $1 - x > \sqrt{x} + m \Leftrightarrow x + \sqrt{x} < 1 - m$

Nhận thấy $x > 0 \Rightarrow x + \sqrt{x} > 0 \Rightarrow 1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1$

$$\text{Ngược lại với } m < 1 \text{ thì } x + \sqrt{x} < 1 - m \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2} \right)^2 < \frac{5}{4} - m \Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{2} < \sqrt{\frac{5}{4} - m} \Leftrightarrow \sqrt{x} < \sqrt{\frac{5}{4} - m} - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < \left(\sqrt{\frac{5}{4} - m} - \frac{1}{2} \right)^2$$

Vậy $m < 1$ là các giá trị cần tìm

Bài 3: Học sinh giỏi huyện Triệu Phong, năm học 2019 - 2020

Cho biểu thức
$$B = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}} \cdot \left(\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y} \right)$$

a) Rút gọn biểu thức B

b) So sánh B và \sqrt{B}

Lời giải

a) Điều kiện $x, y > 0; x \neq y$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } B &= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y)} \cdot \left[\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + \sqrt{xy} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \right] \\ &= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - \sqrt{xy} + y} \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{y} - \frac{x + \sqrt{xy} + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - \sqrt{xy} + y} \cdot \frac{x + 2\sqrt{xy} + y - x - \sqrt{xy} - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\ &= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - \sqrt{xy} + y} \cdot \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{xy}}{x - \sqrt{xy} + y} \end{aligned}$$

$$b) \text{ Vì } x, y > 0 \Rightarrow \sqrt{xy} > 0 \text{ và } x - \sqrt{xy} + y = \left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{y}}{2} \right)^2 + \frac{3y}{4} > 0, \forall x, y > 0$$

nên $B > 0$ với mọi x, y thỏa mãn điều kiện đã cho

$$\text{Lại có: } (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0 \Leftrightarrow x + y - \sqrt{xy} \geq \sqrt{xy} \Rightarrow \frac{1}{x + y - \sqrt{xy}} \leq \frac{1}{\sqrt{xy}} \Rightarrow \frac{\sqrt{xy}}{x + y - \sqrt{xy}} \leq \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} = 1$$

Dấu “=” không xảy ra vì $x \neq y$

$$\text{Vậy } 0 < B < 1 \Rightarrow \sqrt{B} > B$$

Bài 4: Học sinh giỏi huyện Thường Tín, năm học 2019 - 2020

Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right)$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Chứng minh $P > 1$

Lời giải

a) Điều kiện P có nghĩa $x > 0; x \neq 1$

$$\text{Ta có } P = \left(\frac{2\sqrt{x}-1}{(1-\sqrt{x})\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x}+x)} \right)$$

$$P = \left(\frac{2\sqrt{x}-1}{(1-\sqrt{x})\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2\sqrt{x}-1}{1-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)}{1-\sqrt{x}+x} \right) = \frac{2\sqrt{x}-1}{(1-\sqrt{x})\sqrt{x}} : \frac{2\sqrt{x}-1}{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt{x}+x)} = \frac{1-\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}$$

b) $P = \frac{1-\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} - 1 \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x}} - 1 = 1$ (bất đẳng thức Côsi)

Vì đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = 1$ (không thỏa mãn điều kiện)

Vậy $P > 1$

Bài 5: Học sinh giỏi huyện Ba Vì, năm học 2019 - 2020

Cho biểu thức $P = 1 + \frac{x+3}{x^2+5x+6} : \left(\frac{8x^2}{4x^3-8x^2} - \frac{3x}{3x^2-12} - \frac{1}{x+2} \right)$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm các giá trị của x để $P = 0; P = 1$

c) Tìm các giá trị của x để $P > 0$

Lời giải

a) Điều kiện: $x \neq -2; x \neq -3; x \neq 0; x \neq 2$

Rút gọn được $P = \frac{x+4}{6}$

b) $P = 0 \Leftrightarrow x = -4$ (thỏa mãn)

$P = 1 \Leftrightarrow x = 2$ (không thỏa mãn điều kiện)

c) $P > 0 \Leftrightarrow x+4 > 0 \Leftrightarrow x > -4$ và $x \neq -2; x \neq -3; x \neq 0; x \neq 2$

Bài 6: Học sinh giỏi huyện Ba Thước, năm học 2019 - 2020

Cho biểu thức $P = \left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \right) \left(x - \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \right) (x > 4; x \neq 0)$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm các giá trị của x để $P\sqrt{x-1} < 0$

Lời giải

a) Ta có

$$P = \left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \right) \left(x - \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \right) = \left[\frac{2x+1}{(\sqrt{x}-1)(x-\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \right] \left(\frac{x\sqrt{x}-2x-x+4}{\sqrt{x}-2} \right)$$

$$P = \left[\frac{2x+1-\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x-\sqrt{x}+1)} \right] \left[\frac{x(\sqrt{x}-2)-(x-4)}{\sqrt{x}-2} \right]$$

$$P = \left[\frac{x-\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x-\sqrt{x}+1)} \right] \left[\frac{x(\sqrt{x}-2)-(x-4)}{\sqrt{x}-2} \right]$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)(x-\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-2} = \sqrt{x}-2$$

$$b) \text{ Ta có } P\sqrt{x-1} < 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)\sqrt{x-1} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-2 < 0 \\ \sqrt{x-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > 1 \end{cases}$$

Vậy không có giá trị nào của x thỏa mãn bài toán.

Bài 7: Chuyên Cao Bằng vòng 2, năm học 2019 - 2020

Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1} \right) : \left(1 - \frac{2\sqrt{x}}{x+1} \right)$, với $x \geq 0; x \neq 1$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $P \geq 1$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1} = \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x+1-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}; 1 - \frac{2\sqrt{x}}{x+1} = \frac{x+1-2\sqrt{x}}{x+1}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$b) P \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \geq 0$$

$$\text{- TH1: } \begin{cases} 2-\sqrt{x} \geq 0 \\ \sqrt{x}-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \leq 2 \\ \sqrt{x} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leq 4$$

$$\text{- TH2: } \begin{cases} 2-\sqrt{x} \leq 0 \\ \sqrt{x}-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \geq 2 \\ \sqrt{x} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x < 1 \end{cases} \text{ (vô lý)}$$

Vậy các giá trị x cần tìm là $1 < x \leq 4$

Bài 8: Chuyên Toán Ninh Bình, năm học 2019 - 2020

Với $x > 0$, xét hai biểu thức $A = \frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x} + 9}{x + 3\sqrt{x}}$. Tìm tất cả các giá trị của x để

$$\frac{A}{B} > \frac{5}{3}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có } B = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x} + 9}{x + 3\sqrt{x}} = \frac{x - 9 + 2\sqrt{x} + 9}{\sqrt{x}(x + 3\sqrt{x})} = \frac{x + 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 3)} = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 3}$$

$$\text{Với } x > 0, \text{ ta có } \frac{A}{B} > \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 3} > \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x}} > \frac{5}{3} \Leftrightarrow 3\sqrt{x} + 9 > 5\sqrt{x} \text{ (vì } 3\sqrt{x} > 0, \forall x > 0)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} < 9 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{81}{4}.$$

Bài 9: HSG Tỉnh Yên Bái, năm học 2020 - 2021

Cho biểu thức $B = \frac{\sqrt{x}(1-x)^2}{1+x} : \left[\left(\frac{1-\sqrt{x^3}}{1-\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{x^3}}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) \right]$. Với $x \geq 0; x \neq 1$. Chứng minh rằng

$$M = x \cdot \left(B - \frac{1}{2} \right) \leq 0$$

Lời giải

2) Với $x \geq 0; x \neq 1$, ta có:

$$B = \frac{\sqrt{x}(1-x)^2}{1+x} : \left[\left(\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x}+x)}{1-\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) \cdot \left(\frac{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x}-x)}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) \right]$$

$$B = \frac{\sqrt{x}(1-x)^2}{1+x} : \left[(1+\sqrt{x}+x+\sqrt{x}) \cdot (1-\sqrt{x}+x-\sqrt{x}) \right]$$

$$B = \frac{\sqrt{x}(1-x)^2}{1+x} : \left[(1+\sqrt{x})^2 \cdot (1-\sqrt{x})^2 \right]$$

$$B = \frac{\sqrt{x}(1-x)^2}{1+x} : (1-x)^2$$

$$B = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$$

* Chứng minh rằng $M = x \cdot \left(B - \frac{1}{2} \right) \leq 0$ (Với $x \geq 0; x \neq 1$)

$$\text{Ta có: } M = x \cdot \left(B - \frac{1}{2} \right) \Rightarrow M = x \cdot \left(\frac{\sqrt{x}}{1+x} - \frac{1}{2} \right) \Rightarrow M = x \cdot \frac{2\sqrt{x} - 1 - x}{2(1+x)} \Rightarrow M = \frac{-x(\sqrt{x} - 1)^2}{2(1+x)}$$

$$\text{Với } x \geq 0, x \neq 1 \text{ ta có: } \begin{cases} -x \leq 0 \\ (\sqrt{x} - 1)^2 > 0 \\ 2(x+1) > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{-x(\sqrt{x} - 1)^2}{2(1+x)} \leq 0 \Rightarrow M \leq 0$$