Bài 89. Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến AMN đến đường tròn (O). Gọi E là trung điểm của MN. Đường thẳng CE cắt đường tròn (O) tại I.

a) Chứng minh năm điểm A, B, C, O, E cùng thuộc đường tròn có tâm S.

b) Chứng minh $AOC = BIC$.

c) Chứng minh $BI // MN$.

d) Xác định vị trí của cát tuyến AMN sao cho tổng AM+AN đạt giá trị lớn nhất.

Bài 90. Cho đường tròn $(O;R)$ đường thẳng d không đi qua O và cắt đường tròn tại hai điểm A và B. Từ một điểm C trên đường thẳng d (C nằm ngoài đường tròn (O)) kẻ tiếp tuyến CM và CN (M, N là tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của AB, đường thẳng OH cắt tia CN tại K.

a) Chứng minh bốn điểm C, O, H, N cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh KN.KC=KH.KO.

c) Đoạn thẳng CO cắt đường tròn (O) tại I. Chứng minh I cách đều CM, CN, MN.

d) Một đường thẳng đi qua O và song song với MN cắt các tia CM, CN lần lượt tại E, F. Xác định vị trí của C trên d sao cho diện tích của tam giác CEF là nhỏ nhất.

(đề tuyển sinh vào THPT-Tp. Hà Nội năm học 2003-2004)

Bài 91. Cho AB, AC là hai tiếp tuyến của đường tròn (O), (B, C là hai tiếp điểm). Vẽ CH vuông góc với AB tại H, CH cắt đường tròn (O) tại E và cắt OA tại D.

a) Chứng minh CO=CD.

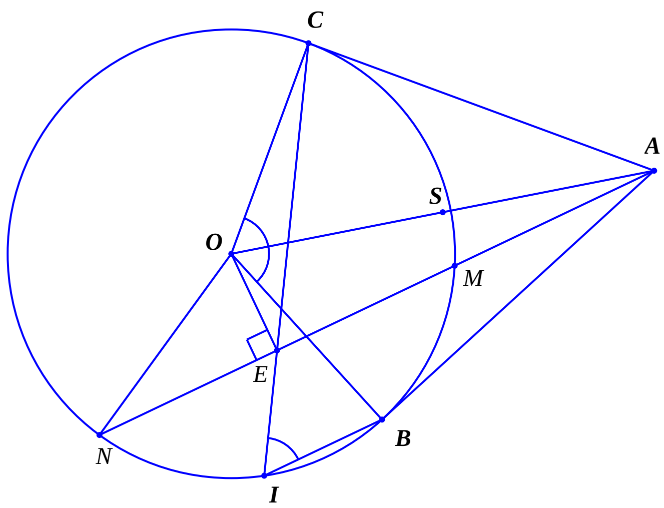
b) Chứng minh tứ giác OBCD là hình thoi.

c) Gọi M là trung điểm của CE, BM cắt OH tại I. Chứng minh I là trung điểm của OH.

d) Tiếp tuyến tại E của đường tròn (O) cắt AC tại K. Chứng minh rằng ba điểm O, M, K thẳng hàng.

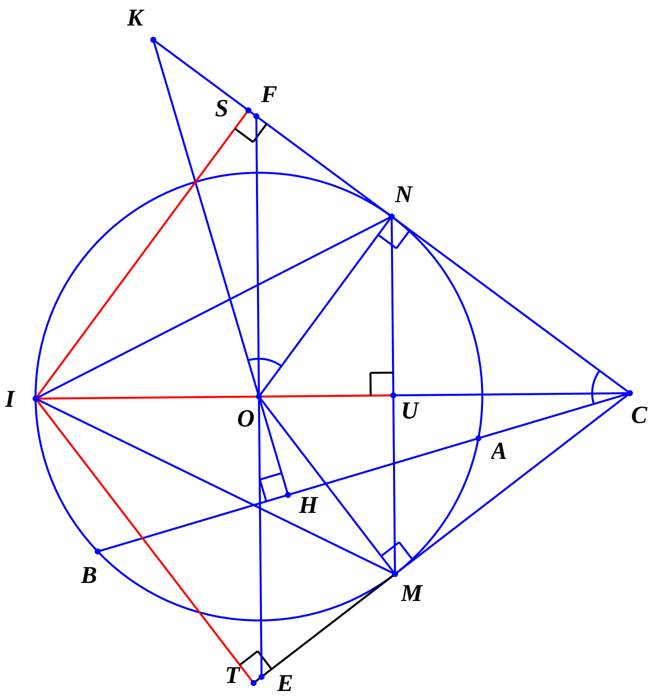
Bài giải

Bài 89.



a) Từ tính chất tiếp tuyến đường tròn ta có:
$AB \perp OB$
$AC \perp OC$
$\Rightarrow ABOC$ tứ giác nội tiếp đường tròn hay A, B, O, C cùng thuộc đường tròn. (1)
Dây cung MN của đường tròn (O) có E là trung điểm của MN
$\Rightarrow OE \perp MN$ (tính chất đường kính và dây cung)
$\Rightarrow ACO, AEO$ cùng nhìn dây AO dưới một góc 90^0
$\Rightarrow ACEO$ tứ giác nội tiếp đường tròn hay A, C, E, O cùng thuộc đường tròn. (2)
Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $\mathrm{A}, \mathrm{B}, C, O, E$ cùng thuộc một đường tròn tâm S là trung điểm của AO.
b) xét (O) ta có:
sđ $CMB = COM = 2.COA$ (góc ở tâm ,tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau của (O))
mà: sđ $CMB = 2.CIB$
$\Rightarrow COA = CIB$ (đpcm). (3)
c) Theo chứng minh câu a tao có tứ giác $ACOE$ nội tiếp đường tròn với tâm S là trung điểm AO
$\Rightarrow CEA = COA$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC) (4)
Từ (3) và (4) $\Rightarrow CEA = CIB$
Ta lại có hai góc này đồng vị
$\Rightarrow MN // BI$ (đpcm).
d) Ta có: $OE \perp AN$ (vì $OE \perp MN$)
ta thấy cát tuyến AMN duy chuyển thì
$AE \le AO$
$NE \le NO = R$
AO cố định
$\Rightarrow MN = NE + AE \le AO + R$
Vậy để MN lớn nhất là $MN = AO + R$ thì $E \equiv O$ hay cát tuyên AMN qua (O).

Bài 90.



a) xét tứ giác $CHON$ có:

$CNO = 90^0$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

$COH = 90^0$ (đường kính vuông góc với dây cung AB)

$\Rightarrow CNO + COH = 180^0$ (tổng hai góc đối trong tứ giác)

$\Rightarrow CHON$ là tứ giác nội tiếp đường tròn hay C, O, H, N cùng thuộc một đường tròn.

b) tứ giác $CHON$ nội tiếp đường tròn

$\Rightarrow\ KON = KCH$ (1)

Mà $KNO = KHC = 90^0$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta KHC \sim \Delta KNO\ (g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{KH}{KN} = \dfrac{KC}{KO} \Leftrightarrow KH.KO = KN.KC$ (đpcm).

c) Ta có CM, CN là tiếp tuyến nên CO là phân giác của góc NCM. Mà $I \in$ tia kéo dài CO.

$\Rightarrow I$ cách đều CM, CN.

Từ I hạ vuông góc xuống CN, CM chân đường vuông góc lần lượt là S, T

$\Rightarrow IS = IT$ (*)

$MN \perp CI$ tại U và IC là trung trực của MN $\Rightarrow IN = IM$

$\Rightarrow$ sđ IN =sđ IM (3)

Ta có : $KNI = \dfrac{1}{2}$ sđ IN (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung) (4)

$INU = INM = \dfrac{1}{2}$ sđ IM (góc nội tiếp) (5)

Từ (3); (4) và (5) $\Rightarrow KNI = INU = SNI$ (6)

Ta lại có IC chung và $ISN = IUN = 90^0$ (7)

Từ (6) và (7) $\Rightarrow$ $\Delta ISN = \Delta IUN$ (cạnh huyền-góc nhọn)

$\Rightarrow IS = IU$ (2*)

Từ (*) và (2*)$\Rightarrow IS = IU = IT$ hay I cách đều CN, CM, NM .

d) $S_{\Delta CEF} = 2.S_{\Delta COF} = OC.OF$

mà ΔCOF vuông tại O $\Rightarrow OC.OF = ON.FC$

$\Rightarrow S_{\Delta CEF} = ON.FC = R.FC = R(FN + NC)$ (3*)

Để ΔCEF có diện tích nhỏ nhất thì $FN + NC$ ngắn nhất

Áp dụng BĐT cô si ta có: $FN + NC \geq 2\sqrt{FN.NC} = 2\sqrt{(ON)^2} = 2.ON = 2R$ (4*)

$FN + NC = 2R$ ngắn nhất khi dấu "=" xảy ra: $FN = NC$

$\Rightarrow N$ là trung điểm của FC

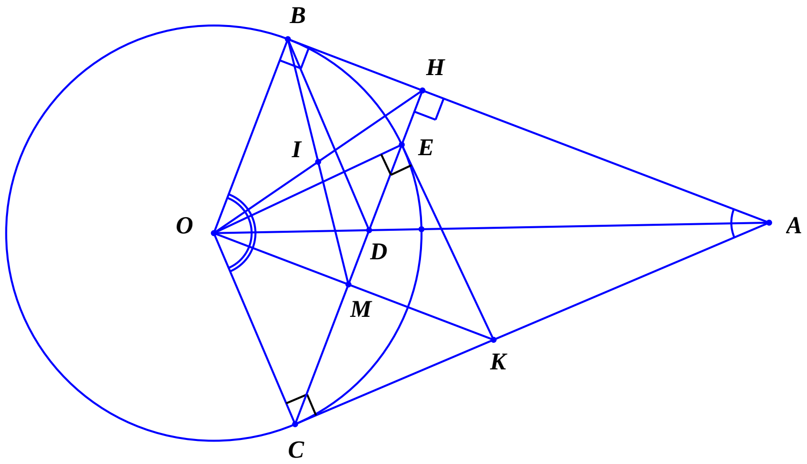
$\Rightarrow OC^2 = NC.FC = 2.ON^2 = 2.R^2$

$\Leftrightarrow OC = R\sqrt{2}$

Từ (3*) và (4*)$\Rightarrow$ diện tích ΔCEF nhỏ nhất: $S_{\Delta CEF} = 2R^2$

Vậy vị trí của C cần tìm là C cách O một khoảng : $OC = R\sqrt{2}$.

Bài 91.



a) $CD // OB$ (cùng vuông góc với AB)

$\Rightarrow BOD = ODC$ (sole trong) (1)

Mà $BOD = DOC$ (tính chất hai đường tiếp tuyến cắt nhau) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow DOC = ODC$

$\Rightarrow \Delta OCD$ cân tại C

$\Rightarrow CO = CD$ (đpcm)

b) AB, AC là hai tiếp tuyến với các tiếp điểm B, C

$\Rightarrow OA$ là trung trực của BC

$\Rightarrow DB = DC$ (3)

Mà $DC = OC = OB = R$ (chứng minh câu a) (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ $DC = OC = OB = DB = R$

$\Rightarrow OBDC$ là hình thoi (đpcm)

c) $OM \perp CE$ (tính chất đường kính và dây cung)

$\Rightarrow OBH = BHM = HMO = 90^0$

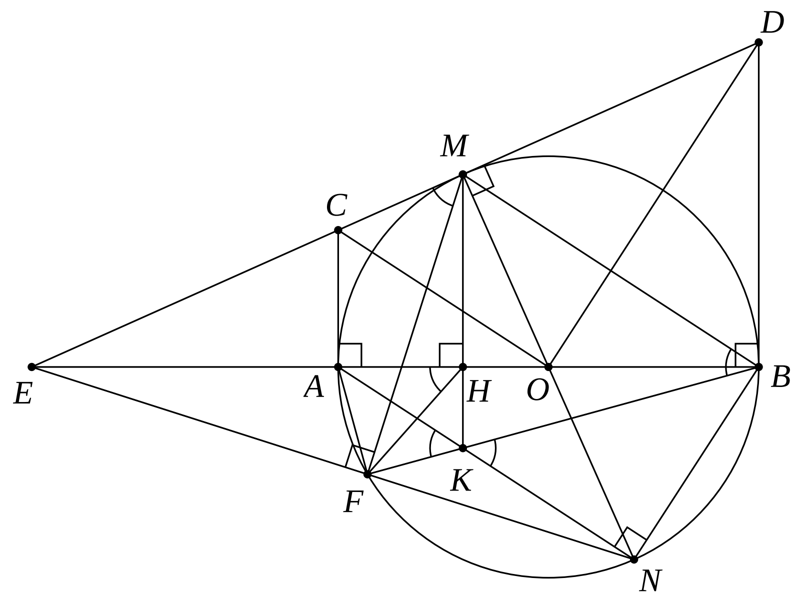
$\Rightarrow BOM = 90^0$

$\Rightarrow OBHM$ là hình chữ nhật (định nghĩa hình chữ nhật)
$\Rightarrow BM, OH$ là hai đường chéo hình chữ nhật $OBHM$
$\Rightarrow I$ là trung điểm của BM (đpcm)
d) EK, AC là hai tiếp tuyến của (O)
$\Rightarrow EKC$ cân tại K
M là trung điểm của CE (gt)
$MK \perp CE$ (trong tam giác cân trung tuyến đồng thời là đường cao hay có thể dùng tc hai tiếp tuyến cắt nhau)
$\Rightarrow EMK = 90^0$ (5)
$EMO = 90^0$ (dựa theo chứng minh câu c) (6)
Từ (5) và (6) $\Rightarrow OMK = EMO + EMK = 180^0$ là góc bẹt
$\Rightarrow O, M, K$ thẳng hàng (đpcm)

Bài 92. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Trên tia đối của tia AB lấy điểm E. Từ E vẽ tiếp tuyến EM với (O) (M là tiếp điểm). EM cắt các tiếp tuyến của (O) tại A, B lần lượt tại C, D.

a) Chứng minh: $AC + BD = CD$ và $COD = 90^0$
b) Chứng minh: $AC.DB = R^2$
c) Vẽ MH vuông góc với AB. Vẽ đường kính MON của (O). EN cắt (O) tại F (F khác N). Chứng minh tứ giác $MHFE$ nội tiếp.
d) AN cắt BF tại K. Tính $AK.AN + BK.BF$ theo R.

Giải:



a) Ta có: CA, CM là tiếp tuyến của (O) (gt)

$\Rightarrow CA = CM$ và $AOC = COM = \dfrac{1}{2} AOM$ (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau)

Ta có: DB, DM là tiếp tuyến của (O) (gt)