ÔN THI
MÔN TOÁN THPT QG
CHUYÊN ĐỀ: NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

CHUYÊN ĐỀ 3 NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

BÀI 2: TÍCH PHÂN

Mục tiêu

- **Kiến thức**
  - \+ Nắm được định nghĩa và các tính chất của tích phân.
  - \+ Nắm vững các phương pháp tính nguyên hàm và bảng nguyên hàm cơ bản để áp dụng tính tích phân.
  - \+ Nắm vững các tính chất tích phân của các hàm số chẵn, hàm số lẻ và các quy tắc đạo hàm của hàm số hợp.
  - \+ Nắm vững các ý nghĩa vật lí của đạo hàm, từ đó giải quyết các bài toán thực tế sử dụng tích phân.
- **Kĩ năng**
  - \+ Hiểu rõ định nghĩa và tính chất của tích phân để vận dụng vào việc tính tích phân.
  - \+ Sử dụng thành thạo bảng nguyên hàm và các phương pháp tính tích phân.
  - \+ Vận dụng tích phân vào các bài toán thực tế.

I. LÍ THUYẾT TRỌNG TÂM

I. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

1. Định nghĩa tích phân

Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, với $a<b$.

Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ thì giá trị $F(b)-F(a)$ được gọi là tích phân của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

Kí hiệu $\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)}$ (1)

Công thức (1) còn được gọi là công thức Newton – Leibnitz; *a* và *b* được gọi là cận dưới và cận trên của tích phân.

Chẳng hạn: *$F(x)=x^3+C$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2$ nên tích phân*

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = F(x)\Big|_0^1 = F(1)-F(0)$$

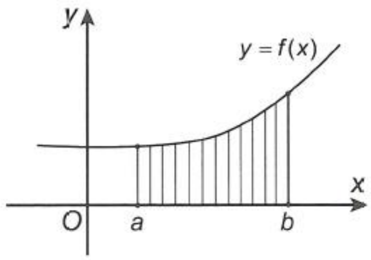
$$=(1^3+C)-(0^3+C)=1.$$

Lưu ý: *Giá trị của tích phân không phụ thuộc vào hằng số C.*

Trong tính toán, ta thường chọn $C=0$.

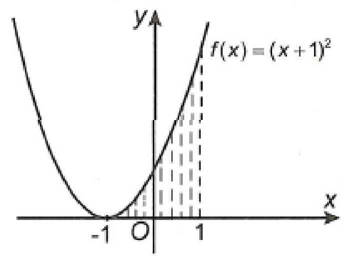
Ý nghĩa hình học của tích phân

Giả sử hàm số $y=f(x)$ là hàm số liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, tích phân $\int\limits_a^b f(x)dx$ chính là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=f(x)$, trục hoành *Ox* và hai đường thẳng $x=a, x=b,$ với $a<b.$



$$\boxed{S=\int\limits_a^b f(x)dx}$$

Chẳng hạn: *Hàm số $f(x)=x^2+2x+1$ có đồ thị (C) và $f(x)=(x+1)^2 \ge 0$, với $\forall x \in \mathbb{R}$.*



Diện tích "tam giác cong" giới hạn bởi (C), trục Ox và hai đường thẳng $x=-1$ và $x=1$ là $S=\int\limits_{-1}^1 f(x)dx=\int\limits_{-1}^1 (x^2+2x+1)dx$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+x^2+x\right)\Big|_{-1}^1=\frac{8}{3}.$$

Lưu ý: *Ta còn gọi hình phẳng trên là "hình thang cong".*

2. Tính chất cơ bản của tích phân

Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên khoảng *K*, trong đó *K* có thể là khoảng, nửa khoảng hoặc đoạn và $a,b,c \in K$, khi đó:

a. Nếu $b = a$ thì $\boxed{\int\limits_a^a f(x)dx = 0}$

b. Nếu $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì ta có:

$$\boxed{\int\limits_a^b f'(x)dx = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a)}$$

Chẳng hạn: *Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên đoạn $[-1;2]$ thỏa mãn $f(-1) = 8$ và $f(2) = -1$.*

Khi đó

$$\int\limits_{-1}^{2} f'(x)dx = f(x)\Big|_{-1}^{2} = f(2) - f(-1) = -9$$

Lưu ý: *Từ đó ta cũng có*

$$\boxed{f(b) = f(a) + \int\limits_a^b f'(x)dx}$$

và $\boxed{f(a) = f(b) - \int\limits_a^b f'(x)dx}$

c. Tính chất tuyến tính

$$\boxed{\int\limits_a^b \left[k.f(x) + h.g(x)\right]dx = k\int\limits_a^b f(x)dx + h.\int\limits_a^b g(x)dx}$$

Với mọi $k,h \in \mathbb{R}$.

d. Tính chất trung cận

$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx}$, với $c \in (a;b)$

e. Đảo cận tích phân

$$\boxed{\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx}$$

f. Nếu $f(x) \ge 0,\ \ \forall x \in [a;b]$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx \ge 0$ và $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$ khi $f(x) = 0$.

g. Nếu $f(x) \ge g(x), \forall x \in [a;b]$ thì

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx \ge \int\limits_a^b g(x)dx}$$

h. Nếu $m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$ và $M = \max\limits_{[a;b]} f(x)$ thì

$$\boxed{m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)}$$

i. Tích phân không phụ thuộc vào biến, tức là ta luôn có

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(y)\,dy = \ldots}$$

II. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

1. Phương pháp đổi biến số

Đổi biến dạng 1

Bài toán: Giả sử ta cần tính tích phân $I = \int_a^b f(x)\,dx$, trong đó ta có thể phân tích $f(x) = g(u(x))u'(x)$ thì ta thực hiện phép đổi biến số.

Phương pháp:

+ Đặt $u = u(x)$, suy ra $du = u'(x)\,dx$.

+ Đổi cận:

x	a	b
u	$u(a)$	$u(b)$

+ Khi đó $\boxed{I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)\,du = G(u)\Big|_{u(a)}^{u(b)}}$, với $G(u)$ là nguyên hàm của $g(u)$.

Lưu ý: *Phương pháp đổi biến số trong tích phân cơ bản giống như đổi biến số trong nguyên hàm, ở đây chỉ thêm bước* ***đổi cận.***

Đổi biến dạng 2

Dấu hiệu	***Cách đặt***
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = \lvert a\rvert \sin t; t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = \frac{\lvert a\rvert}{\sin t};\ t \in \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = \lvert a\rvert \tan t; t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$	$x = a.\cos 2t; t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$
$\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	$x = a.\cos 2t; t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$

$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	$x=a+(b-a)\sin^2 t; t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

2. Phương pháp tích phân từng phần

Bài toán: Tính tích phân $\boxed{I=\int\limits_a^b u(x).v'(x)dx}$

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases} u=u(x) \\ dv=v'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=u'(x)dx \\ v=v(x) \end{cases}$

Khi đó $\boxed{I=(u.v)\Big|_a^b-\int\limits_a^b v.du}$ (công thức tích phân từng phần)

Chú ý: *Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân* $\int\limits_a^b vdu$ *dễ tính hơn* $\int\limits_a^b udv$.

III. TÍCH PHÂN CÁC HÀM SỐ ĐẶC BIỆT

1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-a;a]$. Khi đó

Đặc biệt $\boxed{\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx=\int\limits_0^a\left[f(x)+f(-x)\right]dx}$ (1)

\+ Nếu $f(x)$ là hàm số lẻ thì ta có $\boxed{\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx=0}$ (1.1)

\+ Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn thì ta có $\boxed{\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx=2\int\limits_0^a f(x)dx}$ (1.2)

và $\boxed{\int\limits_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+b^x}dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^a f(x)dx}$ $(0<b\neq 1)$ (1.3)

2. Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì $\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^b f(a+b-x)dx}$

Hệ quả: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$, khi đó: $\boxed{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx}$

3. Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a+b-x)=f(x)$ thì $\boxed{\int\limits_a^b xf(x)dx=\frac{a+b}{2}\int\limits_a^b f(x)dx}$

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA

Định nghĩa

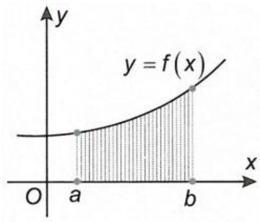
Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, với $a<b$. Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ thì giá trị $F(b)-F(a)$ được gọi là tích phân của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

Kí hiệu $\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)}$

Ý nghĩa hình học của tích phân

Giả sử hàm số $y=-f(x)$ là hàm số liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, tích phân $\int_a^b f(x)dx$ chính là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b(a<b)$.

$\boxed{S=\int_a^b f(x)dx}$



Tính chất cơ bản của tích phân

Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên khoảng *K*, trong đó *K* có thể là khoảng, nửa khoảng hoặc đoạn và $a,b,c\in K$, khi đó ta có các tính chất sau

$\boxed{\int_a^b f(x)dx=0}$; $\boxed{\int_a^b f'(x)dx = f(x)\Big|_a^b = f(b)-f(a)}$;

$\boxed{\int_a^b [k.f(x)+h.g(x)]dx = k\int_a^b f(x)dx + h.\int_a^b g(x)dx}$, với $\forall k,h\in\mathbb{R}$

$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$, với $c\in(a;b)$; $\boxed{\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx}$;

$\boxed{f(x)\ge 0, \forall x\in[a;b] \Rightarrow \begin{cases} \int_a^b f(x)dx \ge 0 \\ \int_a^b f(x)dx = 0 \Leftrightarrow f(x)=0 \end{cases}}$; $\boxed{f(x)\ge g(x), \forall x\in[a;b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx}$

$\boxed{\left.\begin{matrix} m=\min\limits_{[a;b]} f(x) \\ M=\max\limits_{[a;b]} f(x) \end{matrix}\right\} \Rightarrow m(b-a)\le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)}$; $\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(y)dy = ...}$

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Tính tích phân bằng cách sử dụng định nghĩa, tính chất

Phương pháp giải

Sử dụng các tính chất của tích phân.

Sử dụng bảng nguyên hàm và định nghĩa tích phân để tính tích phân.

Ví dụ: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm trên đoạn $\left[1;2\right]$, $f\left(1\right)=1$ và $f\left(2\right)=2$. Tích phân $I=\int\limits_1^2 f'\left(x\right)dx$ bằng

A. 3. **B.** 2.

C. 1. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

$I=\int\limits_1^2 f'\left(x\right)dx=f\left(x\right)\Big|_1^2=f\left(2\right)-f\left(1\right)=2-1=1.$

Chọn C.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Giá trị của $\int\limits_0^3 dx$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Ta có $\int\limits_0^3 dx=x\Big|_0^3=3-0=3.$

Chọn A.

Ví dụ 2: Giá trị của $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** -1. **D.** $\frac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$

Chọn B.

Ví dụ 3: Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3$ có một nguyên hàm là $F\left(x\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $F\left(2\right)-F\left(0\right)=16.$ **B.** $F\left(2\right)-F\left(0\right)=1.$ **C.** $F\left(2\right)-F\left(0\right)=8.$ **D.** $F\left(2\right)-F\left(0\right)=4.$

Hướng dẫn giải

Ta có $\int\limits_0^2 x^3dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2 = 4 = F(2) - F(0)$

Chọn D.

Ví dụ 4: Giá trị của $I = \int\limits_1^2 \frac{1}{2x-1}dx$ là

A. $I = \ln 3 - 1.$ **B.** $I = \ln\sqrt{3}.$ **C.** $I = \ln 2 + 1.$ **D.** $I = \ln 2 - 1.$

Hướng dẫn giải

$I = \int\limits_1^2 \frac{1}{2x-1}dx = \left.\frac{1}{2}\ln|2x-1|\right|_1^2$

$= \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 3 = \ln\sqrt{3}.$

Chọn B.

Ví dụ 5: Cho $\int\limits_0^1 f(x)dx = 2$ và $\int\limits_0^1 g(x)dx = 5$. Giá trị của $I = \int\limits_0^1 [f(x) + 2g(x)]dx$ là

A. 5. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 12.

Hướng dẫn giải

$I = \int\limits_0^1 f(x)dx + 2\int\limits_0^1 g(x)dx = 12$.

Chọn D.

Ví dụ 6: Cho $\int\limits_1^2 f(x)dx = 3$ và $\int\limits_5^2 f(x)dx = 1$. Giá trị của $I = \int\limits_1^5 f(x)dx$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** -2.

Hướng dẫn giải

$I = \int\limits_1^5 f(x)dx = \int\limits_1^2 f(x)dx + \int\limits_2^5 f(x)dx$

$= 3 + (-1) = 2.$

Chọn A.

Ví dụ 7: Cho $\int\limits_{-1}^2 f(x)dx = 2$, $\int\limits_{-1}^2 g(x)dx = -1$. Khi đó $I = \int\limits_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)]dx$ bằng

A. $I = 17.$ **B.** $I = \frac{17}{2}.$ **C.** $I = \frac{15}{2}.$ **D.** $I = \frac{1}{2}.$

Hướng dẫn giải

Ta có $I = \int\limits_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)]dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^2 + 2\int\limits_{-1}^2 f(x)dx - 3\int\limits_{-1}^2 g(x)dx$

$=\frac{3}{2}+2.2-3\left(-1\right)=\frac{17}{2}.$

Chọn B.

Ví dụ 8: Cho $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)dx=5$. Giá trị của $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left[f\left(x\right)+2\sin x\right]dx$ là bao nhiêu?

A. $I=3.$ **B.** $I=5.$ **C.** $I=6.$ **D.** $I=7.$

Hướng dẫn giải

$I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left[f\left(x\right)+2\sin x\right]dx=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)dx+2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=5-2\cos x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=7.$

Chọn D.

Ví dụ 9: Cho $F\left(x\right)$ là nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\frac{\ln x}{x}$. Giá trị của $F\left(e\right)-F\left(1\right)$ bằng

A. $I=0.$ **B.** $I=-\frac{1}{2}.$ **C.** $I=\frac{3}{2}.$ **D.** $I=\frac{1}{2}.$

Hướng dẫn giải

Ta có $F\left(e\right)-F\left(1\right)=\int\limits_{1}^{e}\frac{\ln x}{x}dx=\int\limits_{1}^{e}\ln xd\left(\ln x\right)=\frac{\ln^2 x}{2}\Big|_{1}^{e}=\frac{1}{2}.$

Chọn D.

Ví dụ 10: Tích phân $I=\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{x^2+3x+2}dx$ bằng

A. $I=\ln\frac{4}{3}.$ **B.** $I=\ln\frac{3}{2}.$ **C.** $I=\ln\frac{1}{2}.$ **D.** $I=\ln\frac{3}{4}.$

Hướng dẫn giải

Ta có $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{\left(x+2\right)-\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)\left(x+2\right)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$

Suy ra $I=\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{x+1}dx-\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{x+2}dx=\left(\ln\left|x+1\right|-\ln\left|x+2\right|\right)\Big|_{0}^{1}=2\ln 2-\ln 3.$

Chọn A.

Ví dụ 11: Tích phân $I=\int\limits_{0}^{\pi}\cos^3 x\sin xdx$ bằng

A. $I=1.$ **B.** $I=0.$ **C.** $I=3.$ **D.** $I=-1.$

Hướng dẫn giải

Ta có $I=-\int\limits_{0}^{\pi}\cos^3 xd\left(\cos x\right)=-\left(\frac{1}{4}\cos^4 x\right)\Big|_{0}^{\pi}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=0.$

Chọn B.