

CUNG VÀ DÂY CỦA MỘT CUNG

A. KIẾN THỨC

1. Dây và đường kính của đường tròn

+ Đoạn thẳng nối hai điểm tùy ý của một đường tròn gọi là một dây (hay dây cung) của đường tròn

+ Mỗi dây đi qua tâm là một đường kính của đường tròn. Dễ thấy đường kính của đường tròn bán kính R có độ dài bằng $2R$

* **Lưu ý:** Trong một đường tròn, đường kính là dây cung lớn nhất.

2. Góc ở tâm, cung và số đo của một cung

* Góc ở tâm là góc có đỉnh trùng với tâm của đường tròn

+ Khi góc AOB không bẹt thì cung nằm trong góc AOB gọi là cung nhỏ. Khi đó cung AmB còn có thể ký hiệu là cung AB . Cung còn lại AnB gọi là cung lớn. Khi AOB bẹt thì mỗi cung AB gọi là nửa đường tròn.

+ Ta còn nói góc AOB chắn cung AB hay cung AB bị chắn bởi góc AOB .

+ Số đo của một cung được xác định như sau

- Số đo của nửa đường tròn bằng 180°

- Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó

- Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa 360° và số đo của cung nhỏ có chung hai mút.

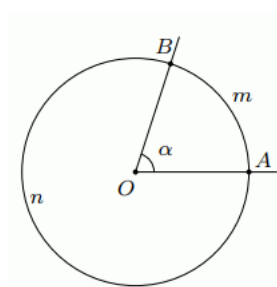
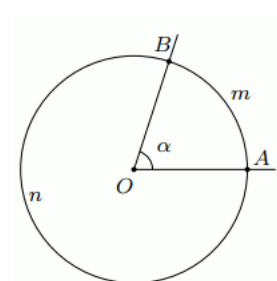
+ Số đo của cung AB được kí hiệu là số AB . Trên hình vẽ ta có:

$$\text{sđ } AmB = \text{sđ } AOB = \alpha; \text{sđ } AnB = 360^\circ - \alpha$$

+ Cung có số đo n° còn gọi là cung n° . Cả đường tròn được coi là cung 360° . Đôi khi ta cũng coi điểm là cung n°

+ Hai cung trên một đường tròn gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng số đo.

* **Nhận xét:** Nếu A là một điểm thuộc cung BAC thì số $BAC = \text{sđ } BA + \text{sđ } AC$

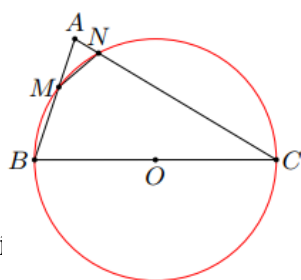


B. Các dạng toán

Dạng 1: So sánh hai đoạn thẳng

Bài 1: Cho tam giác nhọn ABC . Đường tròn tâm O đường kính BC cắt các cạnh AB và AC lần lượt tại M và N . Chứng minh rằng $MN < BC$

Lời giải



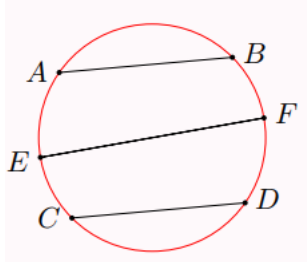
Xét (O) có BC là dây đường kính

Suy ra BC là dây lớn nhất của đường tròn

Suy ra $MN < BC$.

Bài 2: Bạn Mai căng ba đoạn chỉ AB , CD , FE có độ dài lần lượt là 16cm, 14cm và 20cm trên một khung thêu hình tròn bán kính 10cm. Trong ba dây trên, dây nào đi qua tâm của đường tròn.

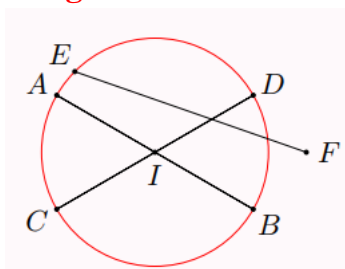
Lời giải



Do $AB < EF$, $CD < EF$, $EF = 2R$ nên trong 3 dây trên, dây đi qua tâm của đường tròn là dây EF

Bài 3: Cho đường tròn (O) có các dây AB , CD , FE . Cho biết AB và CD đi qua tâm I , FE không đi qua I . Hãy so sánh độ dài AB , CD , FE .

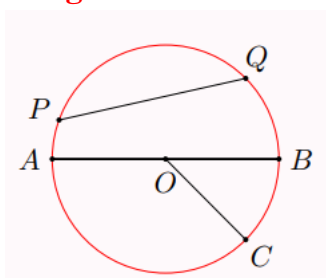
Lời giải



Ta có AB là đường kính, CD là đường kính, FE là dây cung
Nên $AB = CD > EF$

Bài 4: Trong hình vẽ, so sánh độ dài các đoạn thẳng OC , PQ với AB .

Lời giải

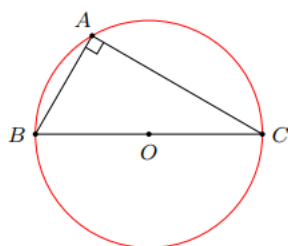


Trong đường tròn (O) , AB là đường kính, OC là bán kính, PQ là dây cung không đi qua O

Suy ra $OC = \frac{AB}{2}$ và $PQ < AB$

Bài 5: Cho đường tròn đường kính BC . Chứng minh rằng với điểm A bất kì (khác B và C) nằm trên đường tròn, ta đều có $BC < AB + AC < 2BC$.

Lời giải



Áp dụng BĐT hình học cho $\triangle ABC$ ta luôn có $BC < AB + AC$ (1)

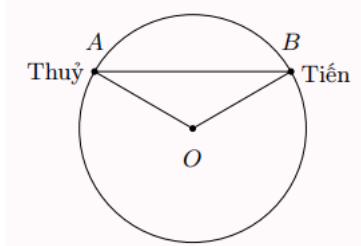
Vì BC là đường kính của đường tròn nên $AB < BC$

$$AC < BC \Rightarrow AB + AC < 2BC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $BC < AB + AC < 2BC$.

Bài 6: Trong một trò chơi, hai bạn Thủy và Tiến cùng chạy trên một đường tròn tâm O có bán kính 20m. Có thời điểm nào dây AB nối vị trí của hai bạn đó có độ dài bằng 41m không? Vì sao?

Lời giải



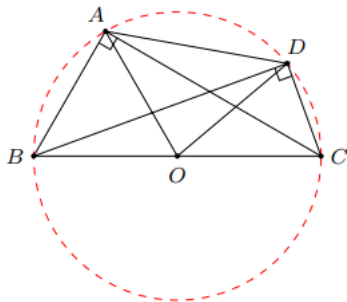
Đường tròn tâm O có đường kính $2 \cdot 20 = 40\text{m}$

Vì độ dài dây AB không vượt quá độ dài đường kính của đường tròn nên $AB \leq 40$

Vậy không có thời điểm nào dây AB nối vị trí của hai bạn đó có độ dài bằng 41m

Bài 7: Tứ giác lồi $ABCD$ có $BAC = BDC = 90^\circ$. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn và $AD < BC$

Lời giải



Gọi O là trung điểm của đoạn BC

Tam giác ABC vuông tại A ($BAC = 90^\circ$) nên đường trung tuyến AO bằng nửa cạnh huyền

$$\text{Nghĩa là } OA = OB = OC = \frac{BC}{2}$$

Do đó điểm A nằm trên đường tròn (O) đường kính BC .

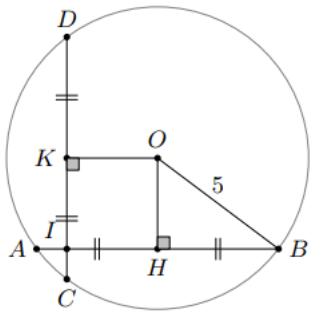
Tương tự, bằng cách xét tam giác BCD ta cũng suy ra điểm D thuộc đường tròn (O).

Vậy AD là một dây (không qua tâm) của đường tròn (O).

Áp dụng định lý trên ta có $AD < BC$.

Bài 8: Cho đường tròn tâm O bán kính $R = 5\text{cm}$, dây $AB = 8\text{cm}$. Gọi I là điểm trên dây AB sao cho $AI = 1\text{cm}$. Kẻ dây CD qua điểm I và vuông góc với dây AB . Chứng minh rằng $AB = CD$

Lời giải



Vẽ $OH \perp AB$, $OK \perp CD$. Suy ra $HA = HB = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4\text{cm}$

Ta có $IH = AH - AI = 4 - 1 = 3\text{cm}$

Áp dụng định lí pythagore vào tam giác vuông BOH , ta có:

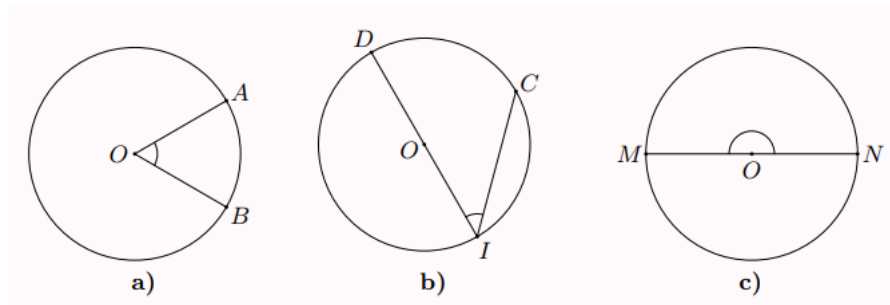
$$OH^2 = OB^2 - HB^2 = 5^2 - 4^2 = 9$$

$$\Rightarrow OH = 3\text{cm}$$

Suy ra tứ giác $OHKI$ là hình vuông. Do đó $OM = OK (= 3\text{cm}) \Rightarrow AB = CD$

Bài 9: Trong các góc AOB, CID, MON ở hình sau, góc nào là góc ở tâm, góc nào không là góc ở tâm.

Lời giải



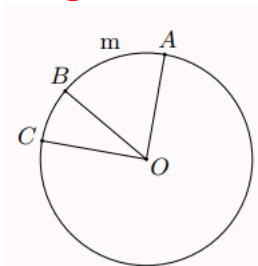
Hia góc AOB và MON là góc ở tâm vì có đỉnh trùng với tâm đường tròn.

CID không là góc ở tâm vì có đỉnh không trùng với tâm đường tròn.

Bài 10: Trong hình bên, hãy cho biết:

- Cung AmB bị chắn bởi góc ở tâm nào?
- Góc ở tâm AOC chắn cung nào?

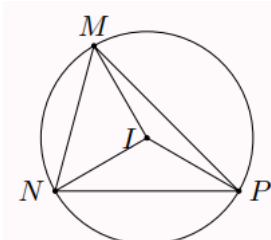
Lời giải



- Cung AmB bị chắn bởi góc ở tâm AOB .
- Góc ở tâm AOC chắn cung ABC .

Bài 11: Cho tam giác MNP có ba đỉnh nằm trên đường tròn (I) . Xác định các góc ở tâm của đường tròn.

Lời giải



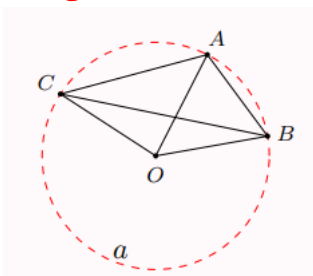
Trong hình, đường tròn (I) có các góc ở tâm là:

MIN, NIP, PIM

Bài 12: Cho ba điểm A, B và C thuộc đường tròn (O) như hình bên

- Tìm các góc ở tâm có hai cạnh đi qua hai trong ba điểm A, B, C
- Tìm các cung có hai mút là hai trong ba điểm A, B, C .

Lời giải



- Các góc ở tâm cần tìm là AOB, BOC và COA
- Các cung có hai mút A, B là AB và ACB
 + Các cung có hai mút A, C là AC và ABC
 + Các cung có hai mút B, C là BAC và BaC .

Dạng 2: Tính số đo góc ở tâm, số đo cung tròn.

Bài 1: Tính số đo góc ở tâm được tạo thành khi kim giờ quay

- Từ 7 giờ đến 9 giờ.
- Từ 9 giờ đến 12 giờ.

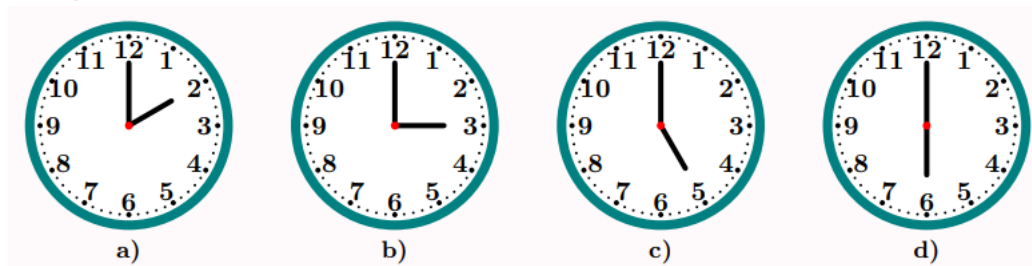
Lời giải

Cứ mỗi giờ, kim giờ quay được một góc là $360^\circ : 12 = 30^\circ$

- Từ 7 giờ đến 9 giờ, kim giờ quay được một góc $30^\circ \cdot 2 = 60^\circ$
- Từ 9 giờ đến 12 giờ, kim giờ quay được một góc $30^\circ \cdot 3 = 90^\circ$

Bài 2: Trong hình vẽ sau, coi mỗi khung đồng hồ là một đường tròn, kim giờ, kim phút là các tia số. Số đo góc ở tâm trong mỗi hình a, b, c, d là bao nhiêu?

Lời giải



- Hình a): Góc ở tâm tạo bởi kim giờ và kim phút tạo thành góc có số đo 60°
- Hình b): Góc ở tâm tạo bởi kim giờ và kim phút tạo thành góc có số đo 90°
- Hình c): Góc ở tâm tạo bởi kim giờ và kim phút tạo thành góc có số đo 150°