TÀI LIỆU BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI

MÔN TOÁN 9

Câu 1: *(4 điểm)* Cho biểu thức:

$$P = \sqrt{x} - \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x^3} - x}{\sqrt{x} - 1}$$

a. Tìm điều kiện xác định và rút gọn P.

b. Tìm giá trị của x khi P = 1.

Câu 2: *(4,0 điểm)*. Cho biểu thức: $A = 1 - \left(\frac{2}{1+2\sqrt{x}} - \frac{5\sqrt{x}}{4x-1} - \frac{1}{1-2\sqrt{x}}\right) : \frac{\sqrt{x}-1}{4x+4\sqrt{x}+1}$

a) Rút gọn A;

b) Tìm giá trị nguyên của x để A đạt giá trị nguyên;

c) Tính giá trị của A với $x = -7\sqrt[3]{49(5+4\sqrt{2})(3+2\sqrt{1+2\sqrt{2}})(3-2\sqrt{1+2\sqrt{2}})}$.

Bài 3: (4,0 điểm)

Cho biểu thức: $P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$.

a. Rút gọn P.

b. Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

c. Xét biểu thức: $Q = \frac{2\sqrt{x}}{P}$, chứng tỏ 0 < Q < 2.

Bài 4: (4,0 điểm) Cho $A = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}} (x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9)$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị của x để $A = -\frac{1}{2}$.

Câu 5: *(4,0 điểm)*. Cho biểu thức: $A = 1 - \left(\frac{2}{1+2\sqrt{x}} - \frac{5\sqrt{x}}{4x-1} - \frac{1}{1-2\sqrt{x}}\right) : \frac{\sqrt{x}-1}{4x+4\sqrt{x}+1}$

a) Rút gọn A;

b) Tìm giá trị nguyên của x để A đạt giá trị nguyên;

c) Tính giá trị của A với $x = -7\sqrt[3]{49(5+4\sqrt{2})(3+2\sqrt{1+2\sqrt{2}})(3-2\sqrt{1+2\sqrt{2}})}$.

Bài 6: *(4,0 điểm).*

Cho biểu thức $A = 1 + \left(\frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x} - \frac{2x\sqrt{x}-\sqrt{x}+x}{1-x\sqrt{x}}\right) . \frac{x-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}$.

a) Tìm các giá trị của *x* để $A = \frac{6-\sqrt{6}}{5}$.

b) Chứng minh rằng $A > \frac{2}{3}$ với mọi x thoả mãn $x \geq 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{4}$.

Bài 7: *(4,0 điểm).*Cho biểu thức :

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{8\sqrt{x}+8}{x+2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{x+\sqrt{x}+3}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$

a) Tìm x để P có nghĩa và chứng minh rằng $P \leq 1$.

b) Tìm x thoả mãn : $(\sqrt{x}+1).P = 1$

Bài 8: *(4,0 điểm).*Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{3+\sqrt{x}} - \frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6} \right) : \left(1 - \frac{3\sqrt{x}-9}{x-9} \right)$$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm các giá trị nguyên của x để P nguyên.

Bài 9: *(4,0 điểm).*

Cho biểu thức: $A = \left(\frac{6x+4}{3\sqrt{3x^3}-8} - \frac{\sqrt{3x}}{3x+2\sqrt{3x}+4} \right) \left(\frac{1+3\sqrt{3x^3}}{1+\sqrt{3x}} - \sqrt{3x} \right)$

1. Rút gọn biểu thức A.
2. Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Bài 10: *(4,0 điểm).*

Cho biểu thức: A = $\left(1 - \frac{2\sqrt{a}}{a+1} \right) : \left(\frac{1}{1+\sqrt{a}} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+\sqrt{a}+a+1} \right)$

a.Rút gọn biểu thức A.

b.Tính giá trị biểu thức A khi $a = 2011 - 2\sqrt{2010}$.

Bài 11: *(4 điểm)* Cho biểu thức: $A = \left(\frac{6x+4}{3\sqrt{3x^3}-8} - \frac{\sqrt{3x}}{3x+2\sqrt{3x}+4} \right) \left(\frac{1+3\sqrt{3x^3}}{1+\sqrt{3x}} - \sqrt{3x} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Bài 12: *(4 điểm)*Cho biểu thức:

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} + \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{1-\sqrt{xy}} + 1 \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} \right)$$

a. Rút gọn biểu thức.

b. Cho $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 6$ Tìm Max A.

Bài 13. Cho biểu thức :

$$A = \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1} \right).$$

a.Rút gọn A.

b.Tính A biết $x = 4 + 2\sqrt{3}.$

c.Tìm x để A > 1.

Bài 14. Cho biểu thức : $P = \frac{3m + \sqrt{9m} - 3}{m + \sqrt{m} - 2} - \frac{\sqrt{m} - 2}{\sqrt{m} - 1} + \frac{1}{\sqrt{m} - 1} - 1.$

a.Rút gọn P.

b.Tìm m để $|P| = 2.$

c.Tìm m $\in$ N để P $\in$ N.

Bài15. Cho biểu thức : P = $\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3}{x\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x - \sqrt{x} + 1}$

a.Rút gọn P

b.Chứng minh $0 \le P \le 1$.

Bài 16. Cho biểu thức: M = $\left[\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}-1} - \left(\sqrt{x}+2\right)\right]\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{2}$

a.Tìm điều kiện của x để M có nghĩa.

b.Rút gọn M.

c.Chứng minh M $\le \frac{1}{4}$

Bài 17. Cho biểu thức : D =$\left(\frac{2+x}{2-x} - \frac{4x^2}{x^2-4} - \frac{2-x}{2+x} \right) : \frac{x^2-3x}{2x^2-x^3}$

a) Rút gọn biểu thức D.

b) Tính giá trị của D khi $|x-5| = 2$.

Bài 18. Cho biểu thức : A = $\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} + 4\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right).$

a.Rút gọn A.

b.Tính A với : a = $\left(4+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)$

Bài 19. Cho : A = $\frac{2\sqrt{a}-9}{a-5\sqrt{a}+6} - \frac{\sqrt{a}+3}{\sqrt{a}-2} - \frac{2\sqrt{a}+1}{3-\sqrt{a}}.$

a.Rút gọn A.

b.Tìm a để A < 1.

b.Tìm a để A $\in$ Z.

Bài 20. Cho : $$A = \left(\frac{a-\sqrt{a}+7}{a-4}+\frac{1}{\sqrt{a}-2}\right):\left(\frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-2}-\frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}+2}-\frac{2\sqrt{a}}{a-2}\right).$$

a.Rút gọn A.

b.So sánh : A với $\frac{1}{A}$.

Bài 21. Cho : $$A = \frac{x}{\sqrt{xy}-2y}-\frac{2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2\sqrt{xy}-2\sqrt{y}}.\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}.$$

Tính A biết : $2x^2 + y^2 - 4x - 2xy + 4 = 0$

Bài 22. Cho : $$A = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right).\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right]:\frac{\sqrt{x^3}+y\sqrt{x}+x\sqrt{y}+\sqrt{y^3}}{\sqrt{xy^3}+\sqrt{x^3y}}.$$

a.Rút gọn A.

b.Cho xy = 16. Tìm minA.

23: Cho biểu thức : $$N = \frac{a}{\sqrt{ab}+b}+\frac{b}{\sqrt{ab}-a}-\frac{a+b}{\sqrt{ab}}$$

a, Rút gọn biểu thức N.

b, Tính N khi a = $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$, b = $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$

c, CMR nếu $\frac{a}{b}=\frac{a+1}{b+5}$ Thì N có giá trị không đổi.

24: Cho biểu thức : $$M = \left(\frac{a}{a+b}+\frac{a^2}{b^2-a^2}\right):\left(\frac{a^2}{a+b}-\frac{a^3}{a^2+b^2+2ab}\right)$$

a, Rút gọn biểu thức M.

b, Tính M khi a = $1+\sqrt{2}$ và b = $1-\sqrt{2}$

c, Tìm a, b trong trường hợp $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$ thì M = 1.

25: Cho biểu thức : $$H = \frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x^3}-x}{\sqrt{x}-1}$$

a, Rút gọn biểu thức H.

b, Tính H khi x = $\frac{53}{9-2\sqrt{7}}$.

c, Tìm x khi H = 16.

HƯỚNG DẪN

1	a	Điều kiện để P xác định và rút gọn $\begin{cases} x \ge 0 \\ x-1 \ge 0 \\ \sqrt{x}-1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x \ge 1 \\ x \ne 1 \end{cases} \Rightarrow \quad x > 1$ $P = \sqrt{x} - \sqrt{x-1} + \dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}{x-1-x} + \dfrac{x\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}-1}$ $= \sqrt{x} - \sqrt{x-1} - \sqrt{x-1} - \sqrt{x} + \dfrac{x\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}-1}$ $= -2\sqrt{x-1} + x$	0,5 0.5 0.5 0.5
	b	Với x > 1, P = 1 $\Leftrightarrow -2\sqrt{x-1} + x = 1$ $\Leftrightarrow (x-1) - 2\sqrt{x-1} = 0$ Đặt $\sqrt{x-1} = t$ $(t \ge 0)$, ta có : $t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow t(t-2) = 0$, tính được $t_1 = 0$, $t_2 = 2$. * Với $t = \sqrt{x-1} = 0 \Rightarrow x = 1$ (bị loại vì $x > 1$) * Với $t = \sqrt{x-1} = 2 \Rightarrow x - 1 = 4 \Rightarrow x = 5$.	0.5 0.5 0.5 0.5 0.5

Câu 2		**4,0 đ**
a. **(2,0đ)**	ĐK: $x \ge 0; x \ne \dfrac{1}{4}; x \ne 1$ $A = 1 - \left(\dfrac{2}{2\sqrt{x}+1} - \dfrac{5\sqrt{x}}{\left(2\sqrt{x}+1\right)(2\sqrt{x}-1)} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}-1}\right) : \dfrac{\sqrt{x}-1}{\left(2\sqrt{x}+1\right)^2}$ $A = 1 - \dfrac{4\sqrt{x}-2-5\sqrt{x}+2\sqrt{x}+1}{(2\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)} \cdot \dfrac{(2\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}-1}$ $A = 1 - \dfrac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-1} \cdot \dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = 1 - \dfrac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-1} = \dfrac{2}{1-2\sqrt{x}}$	0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ
b. **(1,0đ)**	$A \in Z \Leftrightarrow \dfrac{2}{1-2\sqrt{x}} \in Z$ Do $\dfrac{2}{1-2\sqrt{x}} \in Z$ nên $1-2\sqrt{x}$ là số hữu tỉ. Suy ra x là số chính phương, do đó $1-2\sqrt{x} \in Z$ => $1-2\sqrt{x} \in$ Ư(2) Do $x \ge 0; x \ne 1; x \in Z$ và $1-2\sqrt{x} \in$ Ư(2) => x = 0	0,25 đ 0,25 đ

	Vậy x = 0 thì A có giá trị nguyên.	0,5 đ
c. (1,0đ)	Với x = $-7\sqrt[3]{49(5+4\sqrt{2})(3+2\sqrt{1+2\sqrt{2}})(3-2\sqrt{1+2\sqrt{2}})}$ x = - 7 $\sqrt[3]{49(5+4\sqrt{2})(5-8\sqrt{2})}=\sqrt[3]{7^5(39+20\sqrt{2})}$ $\Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt[6]{7^5.(39+20\sqrt{5})}$. Vậy $A=\dfrac{2}{1-2\sqrt[6]{7^5.(39+20\sqrt{5})}}$	0,5 đ 0,5 đ
3	a.(2,0đ) Đk : $x>0;x\neq 1.$ $P=\dfrac{\sqrt{x}\left(x\sqrt{x}-1\right)}{x+\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}}+\dfrac{2\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}-1}$ $=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)-\left(2\sqrt{x}+1\right)+2\left(\sqrt{x}+1\right)$ $=x-\sqrt{x}+1$ Vậy $P=x-\sqrt{x}+1$, với $x>0;x\neq 1.$	0,25 0,5 0,5 0,5 0,25
	b. (1,0đ) $P=x-\sqrt{x}+1=\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\geq\dfrac{3}{4}$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}$ (thỏa mãn) Vậy GTNN của P là $\dfrac{3}{4}$ khi $x=\dfrac{1}{4}$.	0,5 0,25 0,25
	c. (1,0đ).Với $x>0;x\neq 1$ thì Q = $\dfrac{2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$ > 0. (1) Xét $2-\dfrac{2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}=\dfrac{2\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{x-\sqrt{x}+1}\geq 0$ Dấu bằng không xảy ra vì điều kiện $x\neq 1$. Nên Q < 2.(2) Từ (1) và (2) suy ra 0 < Q < 2.	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
4	a(2,0đ) $A=\dfrac{2\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)}+\dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}$ $=\dfrac{2\sqrt{x}-9+(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)-(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)}$ $=\dfrac{2\sqrt{x}-9+2x-4\sqrt{x}+\sqrt{x}-2-x+9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)}=\dfrac{x-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)}$ $=\dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)}=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ Vậy $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ với $(x\geq 0,x\neq 4,x\neq 9)$.	0,5 0,5 0,5 0,5

	b(2,0đ) Với $(x \ge 0, x \ne 4, x \ne 9)$ Ta có:	
	$A = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x}+2 = -\sqrt{x}+3$	0,5
	$\Leftrightarrow 3\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}(t/m)$	1,0
	Vậy $A = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$.	0,5

Câu 5		**4,0 đ**
a. $A \in Z \Leftrightarrow \frac{2}{1-2\sqrt{x}} \in Z$ **(2,0đ)**	ĐK: $x \ge 0; x \ne \frac{1}{4}; x \ne 1$ $A = 1 - \left(\frac{2}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}}{(2\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)} + \frac{1}{2\sqrt{x}-1}\right) : \frac{\sqrt{x}-1}{(2\sqrt{x}+1)^2}$ $A = 1 - \frac{4\sqrt{x}-2-5\sqrt{x}+2\sqrt{x}+1}{(2\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)} . \frac{(2\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}-1}$ $A = 1 - \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-1} . \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = 1 - \frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-1} = \frac{2}{1-2\sqrt{x}}$	0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ
b. (1,0đ)	Do $\frac{2}{1-2\sqrt{x}} \in Z$ nên $1-2\sqrt{x}$ là số hữu tỉ. Suy ra x là số chính phương, do đó $1-2\sqrt{x} \in Z$ =>$1-2\sqrt{x} \in Ư(2)$ Do $x \ge 0; x \ne 1; x \in Z$ và $1-2\sqrt{x} \in Ư(2)$ => x = 0 Vậy x = 0 thì A có giá trị nguyên.	0,25 đ 0,25 đ 0,5 đ
c. (1,0đ)	Với $x = -7\sqrt[3]{49(5+4\sqrt{2})(3+2\sqrt{1+2\sqrt{2}})(3-2\sqrt{1+2\sqrt{2}})}$ $x = -7\sqrt[3]{49(5+4\sqrt{2})(5-8\sqrt{2})} = \sqrt[3]{7^5(39+20\sqrt{2})}$ $\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt[6]{7^5.(39+20\sqrt{5})}$. Vậy $A = \frac{2}{1-2\sqrt[6]{7^5.(39+20\sqrt{5})}}$	0,5 đ 0,5 đ

Câu 6.a)

$$A=1+\left(\frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x}-\frac{2x\sqrt{x}-\sqrt{x}+x}{1-x\sqrt{x}}\right).\frac{x-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}=1+\left[\frac{(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(1-\sqrt{x})\left(1+\sqrt{x}\right)}-\frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(1-\sqrt{x})(x+\sqrt{x}+1)}\right].\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}-1}$$

$$=1-\left[1-\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}+1}\right].\sqrt{x}=1-\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}=\frac{x+1}{x+\sqrt{x}+1}$$

Ta có $A=\frac{6-\sqrt{6}}{5}\Leftrightarrow\frac{x+1}{x+\sqrt{x}+1}=\frac{6-\sqrt{6}}{5}\Leftrightarrow x-\sqrt{6}.\sqrt{x}+1=0$. Từ đó giải được $x=2+\sqrt{3};x=2-\sqrt{3}$

b)Ta có: $A>\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{x+1}{x+\sqrt{x}+1}>\frac{2}{3}\Leftrightarrow x-2\sqrt{x}+1>0\Leftrightarrow(\sqrt{x}-1)^2>0$

Do $x\neq 1$ nên $\sqrt{x}-1\neq 0\Rightarrow(\sqrt{x}-1)^2>0$. Vậy $A>\frac{2}{3}$

Câu 7. a) Điều kiện x>0 Ta có : $P=\frac{(\sqrt{x})^2+(8\sqrt{x}+8)-(\sqrt{x}+2)^2}{\sqrt{x}.(\sqrt{x}+2)}:\frac{(x+\sqrt{x}+3)+(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}.(\sqrt{x}+2)}$

P=$\frac{4\sqrt{x}+4}{x+2\sqrt{x}+5}$ $\Rightarrow$ P-1=$\frac{4\sqrt{x}+4}{x+2\sqrt{x}+5}-1=\frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}+1)^2+4}\leq 0$ Vậy $P\leq 1$

b) $(\sqrt{x}+1).P=1\Leftrightarrow 4\left(\sqrt{x}+1\right)^2=x+2\sqrt{x}+5\Leftrightarrow 3x+6\sqrt{x}-1=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\sqrt{x}=\frac{-3-2\sqrt{3}}{3} & \text{(loại)}\\ \sqrt{x}=\frac{-3+2\sqrt{3}}{3} & \text{(thỏa}\end{array}\right.$ $\Leftrightarrow x=\frac{7-4\sqrt{3}}{3}$ (thoã mãn điều kiện x>0) .

Câu 8.a) Điều kiện để P có nghĩa: $\begin{cases}x\geq 0\\ \sqrt{x}\neq 2\\ x\neq 9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ x\neq 4\\ x\neq 9\end{cases}$. Ta có:

$$P=\frac{\frac{(x-9)+(4-x)}{(2-\sqrt{x})(\sqrt{x}+3)}-\frac{9-x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)}}{\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}}$$

$$\Leftrightarrow P=\frac{(x-9)+(4-x)+(9-x)}{(2-\sqrt{x})(\sqrt{x}+3)}.\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow P=\frac{4-x}{(2-\sqrt{x})\sqrt{x}}=\frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$$

b).Theo câu a ta có: $P=\frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1+\frac{2}{\sqrt{x}}$. Do đó để $P\in Z$ thì ta cần $\frac{2}{\sqrt{x}}\in Z\Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=1\\ \sqrt{x}=2\text{ (loại)}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow$ x = 1.Vậy với x = 1 thì P có giá trị nguyên.

Bài 9: . a)Ta có: $3x+2\sqrt{3x}+4=\left(\sqrt{3x}+1\right)^2+3>0;1+\sqrt{3x}>0,\forall x\geq 0$, nên điều kiện để A có nghĩa là $\left(\sqrt{3x}\right)^3-8=\left(\sqrt{3x}-2\right)\left(3x+2\sqrt{3x}+4\right)\neq 0,x\geq 0\Leftrightarrow\sqrt{3x}\neq 2\Leftrightarrow 0\leq x\neq\frac{4}{3}$

$A=\left(\frac{6x+4}{\left(\sqrt{3x}\right)^3-2^3}-\frac{\sqrt{3x}}{3x+2\sqrt{3x}+4}\right)\left(\frac{1+\left(\sqrt{3x}\right)^3}{1+\sqrt{3x}}-\sqrt{3x}\right)$. $A=\left(\frac{6x+4-\left(\sqrt{3x}-2\right)\sqrt{3x}}{\left(\sqrt{3x}-2\right)\left(3x+2\sqrt{3x}+4\right)}\right)\left(3x-\sqrt{3x}+1-\sqrt{3x}\right)$

$A=\left(\frac{3x+4+2\sqrt{3x}}{\left(\sqrt{3x}-2\right)\left(3x+2\sqrt{3x}+4\right)}\right)\left(3x-2\sqrt{3x}+1\right)$. $A=\frac{\left(\sqrt{3x}-1\right)^2}{\sqrt{3x}-2}$ $(0\le x\ne\frac{4}{3})$

$$A=\frac{\left(\sqrt{3x}-1\right)^2}{\sqrt{3x}-2}=\frac{\left(\sqrt{3x}-2\right)^2+2\left(\sqrt{3x}-2\right)+1}{\sqrt{3x}-2}=\sqrt{3x}+\frac{1}{\sqrt{3x}-2}$$

b).Với x là số nguyên không âm, để A là số nguyên thì

$\sqrt{3x}-2=\pm1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{3x}=3\\ \sqrt{3x}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x=9\\ 3x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow x=3$ (vì $x\in\mathbb{Z}$ và $x\ge0$). Khi đó: $A=4$

<u>Bài 10</u>: 1. Điều kiện: $a\ge0$. A =

$\left(1-\frac{2\sqrt{a}}{a+1}\right):\left(\frac{1}{1+\sqrt{a}}-\frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+\sqrt{a}+a+1}\right)=\frac{a-2\sqrt{a}+1}{a+1}:\left(\frac{1}{1+\sqrt{a}}-\frac{2\sqrt{a}}{(a+1)(1+\sqrt{a})}\right)$

$=\frac{(\sqrt{a}-1)^2}{a+1}:\frac{a+1-2\sqrt{a}}{(1+\sqrt{a})(a+1)}$ $=\frac{(\sqrt{a}-1)^2(1+\sqrt{a})(a+1)}{(a+1)(\sqrt{a}-1)^2}$ $=1+\sqrt{a}$

<u>Bài11</u>.a) Ta có: $3x+2\sqrt{3x}+4=\left(\sqrt{3x}+1\right)^2+3>0;1+\sqrt{3x}>0,\forall x\ge0$, nên điều kiện để A có nghĩa là $\left(\sqrt{3x}\right)^3-8=\left(\sqrt{3x}-2\right)\left(3x+2\sqrt{3x}+4\right)\ne0,x\ge0\Leftrightarrow\sqrt{3x}\ne2\Leftrightarrow0\le x\ne\frac{4}{3}$

$$A=\left(\frac{6x+4}{\left(\sqrt{3x}\right)^3-2^3}-\frac{\sqrt{3x}}{3x+2\sqrt{3x}+4}\right)\left(\frac{1+\left(\sqrt{3x}\right)^3}{1+\sqrt{3x}}-\sqrt{3x}\right).$$

$$A=\left(\frac{6x+4-\left(\sqrt{3x}-2\right)\sqrt{3x}}{\left(\sqrt{3x}-2\right)\left(3x+2\sqrt{3x}+4\right)}\right)\left(3x-\sqrt{3x}+1-\sqrt{3x}\right)$$

$A=\left(\frac{3x+4+2\sqrt{3x}}{\left(\sqrt{3x}-2\right)\left(3x+2\sqrt{3x}+4\right)}\right)\left(3x-2\sqrt{3x}+1\right)$ $A=\frac{\left(\sqrt{3x}-1\right)^2}{\sqrt{3x}-2}$ $(0\le x\ne\frac{4}{3})$

b) $A=\frac{\left(\sqrt{3x}-1\right)^2}{\sqrt{3x}-2}=\frac{\left(\sqrt{3x}-2\right)^2+2\left(\sqrt{3x}-2\right)+1}{\sqrt{3x}-2}=\sqrt{3x}+\frac{1}{\sqrt{3x}-2}$

Với $x\ge0$, để A là số nguyên thì $\sqrt{3x}-2=\pm1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{3x}=3\\ \sqrt{3x}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x=9\\ 3x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow x=3$ (vì $x\in\mathbb{Z}$ và $x\ge0$).Khi đó: $A=4$

<u>Bài 12</u>: . a) Đk : x ≥ 0; y ≥ 0; x.y ≠ 1.

Quy đồng rút gọn ta được: A $=\frac{1}{\sqrt{x.y}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}=6\Rightarrow A=\frac{1}{\sqrt{x}}.\frac{1}{\sqrt{y}}\le9\Rightarrow$ Max A = 9 $\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{y}}=3\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{9}$

<u>Bài 13.</u>a. - Cần chỉ rõ ĐKXĐ của A là : $x\ge0;x\ne\pm1$.

- Rút gọn A từng phần ta được kết quả :

$$A=\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}.$$

b.Biến đổi : $x=4+2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}+1\right)^2.$

- Thay vào và rút gọn A ta có : $A=2\sqrt{3}+3.$

c.Xét hiệu : $A-1=\frac{x+2}{\sqrt{x}-1}.$

Để A > 1 tức : A - 1 > 0 mà : $x\ge 0$ buộc : $\sqrt{x}-1>0\Leftrightarrow x>1.$

<u>Bài 14.</u>a. ĐK : $m\ge 0; m\ne 1.$

- Biến đổi rút gọn : $P=\frac{\sqrt{m}+1}{\sqrt{m}-1}.$

b. $|P|=2.$ Ta có :

$$\left|\sqrt{m}+1\right|=2\left|\sqrt{m}-1\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=9\\ m=\frac{1}{9}\end{array}\right.$$

c. Viết P dưới dạng : $P=1+\frac{2}{\sqrt{m}-1}.$

Suy ra : $\sqrt{m}-1$ là ước của 2. Từ đó tìm ra m = 4 hoặc 9.

<u>Bài 15.</u> Điều kiện x $\ge$ 0.

Rút gọn P = $\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$

b.Chứng tỏ : P $\ge$ 0 và 1-P $\ge$ 0

<u>Bài 16.</u>

a.Biểu thức có nghĩa khi và chỉ khi:

x $\ge$ 0 và x $\ne$ 1

b.Rút gọn : M = $\sqrt{x}-x$

c.Ta có : M = $\sqrt{x}-x=\frac{1}{4}-\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{4}$

<u>Bài 17.</u>

a.Học sinh có thể rút gọn từng phần hoặc cả bài cùng lúc.

- Điều kiện : $x\ne\pm 2; x\ne 0; x\ne 3.$

- Rút gọn biểu thức bị chia ta có :

$$\frac{2+x}{2-x}-\frac{4x^2}{x^2-4}-\frac{2-x}{2+x}=\frac{(2+x)^2+4x^2-(2-x)^2}{4-x^2}=\frac{4x(2+x)}{(2+x)(2-x)}=\frac{4x}{2-x}.$$

Vậy :

$$D=\frac{4x}{2-x}:\frac{x^2-3x}{2x^2-x^3}=\frac{4x.x^2(2-x)}{(2-x).x.(x-3)}=\frac{4x^2}{x-3}.$$

b) $$|x-5|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-5=2 \\ x-5=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7 \\ x=3 \end{array}\right. .$$

- Với x = 7 tính được D = 49.
- Với x = 3 thì D không xác định.

Bài 18.

a.Rút gọn ta dược kết quả : A = 4a.

b.Biến đổi a như sau :

$$a=\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\sqrt{\left(4+\sqrt{15}\right)^2\left(4-\sqrt{15}\right)}=\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\sqrt{4+\sqrt{15}}$$

$$=\sqrt{2}\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2\left(4+\sqrt{15}\right)}=2\sqrt{\left(4+\sqrt{15}\right)\left(4-\sqrt{15}\right)}=2.$$

Vậy : A = 8.

Bài 19. a.Rút gọn : $A=\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-3}.$

b.Xét hiệu : A - 1 = $\frac{4}{\sqrt{a}-3}.$

Để A < 1 buộc A - 1 < 0 $\Rightarrow \sqrt{a}-3<0 \Rightarrow 0\le a<9, a\ne 2.$

c.Ta có : A = 1 + $\frac{4}{\sqrt{a}-3} \Rightarrow$ $\sqrt{a}-3$ là ước của 4.

Các ước của 4 là : $\pm1;\pm2;\pm4.$

Xét các trường hợp ta có các giá trị sau của a thoã mãn :

16 ; 4 ; 25 ; 1 ; 49.

Bài 20. a.Rút gọn A ta có : A = $\frac{a+9}{6\sqrt{a}}.$

b.Xét hiệu : $A-\frac{1}{A}=\frac{(a-9)^2}{a\sqrt{a}(a+9)}\ge 0 \Rightarrow A>\frac{1}{A}.$

Bài 21. - Trước tiên cần rút gọn A trước.

-Ta có : $2x^2 + y^2 - 4x - 2xy + 4 = (x - y)^2 + (x - 2)^2 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=2 \Rightarrow A=\sqrt{\frac{2}{2}}=1.$

Bài 22. a.Rút gọn A = $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}$.

b. $xy=16 \Rightarrow x=\frac{16}{y} \Rightarrow A=\frac{x+4}{4\sqrt{x}}.$

Đặt : $\sqrt{x}$ = t $\geq$ 0 ta có : A = $\frac{t^2+4}{4t} \Leftrightarrow t^2-4At+4=0.$ (1)

Phương trình (1) phải có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'=4A^2-4\geq 0 \Leftrightarrow A^2\geq 1 \Rightarrow \min A=1$

Khi đó t = 2 tức là x = 4 ; y = 4.

Bài 23. *a, Rút gọn biểu thức N.* N = $\frac{a}{\sqrt{ab}+b}+\frac{b}{\sqrt{ab}-a}-\frac{a+b}{\sqrt{ab}}=$

$$\frac{a.(\sqrt{ab}-a)+b(\sqrt{ab}+b)}{(\sqrt{ab}+b)(\sqrt{ab}-a)}-\frac{a+b}{\sqrt{ab}}$$

$$=\frac{(a+b)\sqrt{ab}+b^2-a^2}{ab+b\sqrt{ab}-a\sqrt{ab}-ab}-\frac{a+b}{\sqrt{ab}}=\frac{(a+b)\sqrt{ab}+(b-a)(b+a)}{\sqrt{ab}(b-a)}-\frac{a+b}{\sqrt{ab}}$$

$$=\frac{(a+b)(\sqrt{ab}+b-a)}{\sqrt{ab}(b-a)}-\frac{a+b}{\sqrt{ab}}=\frac{(a+b)(\sqrt{ab}+b-a)-(b^2-a^2)}{\sqrt{ab}(b-a)}$$

$$=\frac{(a+b)\sqrt{ab}+b^2-a^2-b^2+a^2}{\sqrt{ab}(b-a)}=\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}(b-a)}=\frac{a+b}{b-a}$$

b, Tính N : Ta có a = $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}=\sqrt{3}+1$, b = $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{3}-1$

N = $\frac{a+b}{b-a}=\frac{\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1-\sqrt{3}-1}=\frac{2\sqrt{3}}{-2}=-\sqrt{3}$

c, áp dụng dãy tỷ số bằng nhau ta có: $\frac{a}{b}=\frac{a+1}{b+5}=\frac{a+1-a}{b+5-b}=\frac{1}{5} \Rightarrow b=5a$ Thay $b=5a$ vào N = $\frac{a+b}{b-a}$ ta được N = $\frac{a+b}{b-a}=\frac{a+5a}{5a-a}=\frac{6a}{4a}=\frac{3}{2}$.Vậy N không đổi là N = $\frac{3}{2}$ khi $\frac{a}{b}=\frac{a+1}{b+5}$

Bài 24. a, Rút gọn biểu thức M. Điều kiện: a $\neq 0; a\neq \pm b$

$$M=\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a^2}{b^2-a^2}\right):\left(\frac{a^2}{a+b}-\frac{a^3}{a^2+b^2+2ab}\right)=\left(\frac{a.(b-a)+a^2}{b^2-a^2}\right):\left(\frac{a^2(a+b)-a^3}{(a+b)^2}\right)$$

$$=\frac{ab}{(b-a)(b+a)}.\frac{(a+b)^2}{a^2b}=\frac{a+b}{a.(b-a)}$$

b, Tính M khi a = $1+\sqrt{2}$ và b = $1-\sqrt{2}$

$$M=\frac{a+b}{a.(b-a)}=\frac{1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2}).(1-\sqrt{2}-\sqrt{2}-1)}=\frac{2}{-2.(1+\sqrt{2})}=\frac{1-\sqrt{2}}{2-1}=1-\sqrt{2}$$

c, Tìm a, b trong trường hợp $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$ thì M = 1.

Ta giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \frac{a}{b}=\frac{1}{2} & (1) \\ \frac{a+b}{a.(b-a)}=1 & (2) \end{cases}$

Từ phương trình (1) rút ra b = 2a thay vào phương trình (2) của hệ ta được: $\frac{a+2a}{a.(2a-a)}=1$

$\Rightarrow \frac{3a}{a^2}=1 \Rightarrow a^2=3a \Leftrightarrow a(a-3)=0 \Leftrightarrow a=3$ (TMĐK)và a= 0 (Loại)

a=3 $\Rightarrow$ b = 6 . Vậy a=3 , b=6 thì M = 1

Bài 25. *a, Rút gọn biểu thức H.* Điều kiện: x >1

$$H = \frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x^3}-x}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x}).(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})}+\frac{x(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1}=\frac{2\sqrt{x-1}}{x-1-x}+x=x-2\sqrt{x-1}$$

b, Tính H; ta có: $x = \frac{53}{9-2\sqrt{7}} = \frac{53.(9+2\sqrt{7})}{9^2-(2\sqrt{7})^2}=\frac{53.(9+2\sqrt{7})}{53}=9+2\sqrt{7}$

$H = x - 2\sqrt{x-1} = 9+2\sqrt{7}-2\sqrt{9+2\sqrt{7}-1}=9+2\sqrt{7}-2\sqrt{(1+\sqrt{7})^2}=7$

c, Tìm x khi H = 16.

$H = 16 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x-1} = 16 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x-1} - 16 = 0 \Leftrightarrow (x-1) - 2\sqrt{x-1} - 15 = 0$

Đặt: $\sqrt{x-1}=a$; $a \geq 0$

$a^2 - 2a - 15 = 0$

$\Delta'_a = 1+15=16=4^2$

$a_{1/2} = 1 \pm 4 \Leftrightarrow a_1 = 5$ và $a_2 = -3$ (loại)

$a_1 = 5 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 5 \Leftrightarrow x-1 = 25 \Leftrightarrow x = 26$

DẠNG II : ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Đề bài 1: Cho hàm số bậc nhất : y = (2m – 5)x + 3 với $m \neq \frac{5}{2}$ có đồ thị là đường thẳng d .Tìm giá trị của m để

a. Góc tạo bởi (d) và và trục Ox là góc nhọn, góc tù (hoặc hàm số đồng biến, nghịch biến)

b. (d) đi qua điểm (2 ; -1)

c. (d) song song với đường thẳng y = 3x – 4

d. (d) song song với đường thẳng 3x + 2y = 1

e. (d) luôn cắt đường thẳng 2x – 4y – 3 = 0

f. (d) cắt đường thẳng 2x + y = -3 tại điểm có hoành độ là -2

g. (d) cắt trục hoành tại điểm ở bên trái trục tung (có hoành độ âm)

h. (d) cắt đường thẳng y = 3x + 1 tại điểm có hoành độ âm (hoặc ở bên trái trục tung)

i. (d) cắt đường thẳng y = 5x – 3 tại điểm có tung độ dương (hoặc ở trên trục hoành)

j. Chứng tỏ (d) luôn đi qua một điểm cố định trên trục tung

Giải : Hàm số có a = 2m – 5 ; b = 3

a. Góc tạo bởi đường thẳng d và và trục Ox là góc nhọn, góc tù

Góc tạo bởi đường thẳng d và và trục Ox là góc nhọn khi đường thẳng d có hệ số a > 0

$\Leftrightarrow 2m - 5 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{5}{2}$ (thỏa mãn)

Góc tạo bởi đường thẳng d và và trục Ox là góc tù khi đường thẳng d có hệ số a < 0

$\Leftrightarrow 2m - 5 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{5}{2}$ (thỏa mãn)

Vậy góc tạo bởi đường thẳng d và và trục Ox là góc nhọn khi $m > \frac{5}{2}$

góc tạo bởi đường thẳng d và và trục Ox là góc tù khi $m < \frac{5}{2}$

b. (d) đi qua điểm (2 ; -1)

Thay x = 2 ; y = -1 vào phương trình đường thẳng d ta có

$-1 = 2.(2m - 5) + 3 \Leftrightarrow 4m - 10 + 3 = -1 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$ (thỏa mãn)

Vậy với $m = \frac{3}{2}$ thì (d) đi qua điểm (2 ; -1)

Chú ý : *Phải viết là "Thay x = 2 ; y = -1 vào phương trình đường thẳng d ", không được viết là "Thay x = 2 ; y = -1 vào đường thẳng d "*

c. (d) song song với đường thẳng y = 3x - 4

(d) song song với đường thẳng y = 3x - 4 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 5 = 3 \\ 3 \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ 3 \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4$ (thỏa mãn)

Vậy m = 4 là giá trị cần tìm

d. (d) song song với đường thẳng 3x + 2y = 1

Ta có 3x + 2y = 1 $\Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

(d) song song với đường thẳng 3x + 2y = 1 $\Leftrightarrow$ (d) song song với đường thẳng $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m-5=-\dfrac{3}{2} \\ 3 \neq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\dfrac{7}{4} \\ 3 \neq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m=\dfrac{7}{4}$ (thỏa mãn) . Vậy $m=\dfrac{7}{4}$ là giá trị cần tìm

e. (d) luôn cắt đường thẳng 2x - 4y - 3 = 0

Ta có 2x - 4y - 3 = 0 $\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{4}$

(d) luôn cắt đường thẳng 2x - 4y - 3 = 0 $\Leftrightarrow$ (d) luôn cắt đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{4}$

$\Leftrightarrow 2m-5 \neq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m \neq \dfrac{11}{4}$. Kết hợp với điều kiên ta có m $\neq \dfrac{5}{2}$ và $m \neq \dfrac{11}{4}$ là giá trị cần tìm.

f. (d) cắt đường thẳng 2x + y = -3 tại điểm có hoành độ là -2

Thay x = -2 vào phương trình đường thẳng 2x + y = -3 ta được 2. (-2) + y = -3 $\Leftrightarrow$ y = 1

⇨ (d) cắt đường thẳng 2x + y = -3 tại điểm (-2 ; 1). Thay x = -2 ; y = 1 vào phương trình đường thẳng d ta có 1 = (2m – 5). (-2) + 3 $\Leftrightarrow$ -4m + 10 +3 = 1 $\Leftrightarrow$ m = 3 (thỏa mãn).

Vậy m = 3 là giá trị cần tìm.

g. (d) cắt trục hoành tại điểm ở bên trái trục tung (có hoành độ âm)

Thay y = 0 vào phương trình đường thẳng d ta có 0 = (2m - 5)x + 3 $\Leftrightarrow$ x = $\dfrac{-3}{2m-5}$

(d) cắt trục hoành tại điểm ở bên trái trục tung $\Leftrightarrow \dfrac{-3}{2m-5}<0 \Leftrightarrow 2m-5>0 \Leftrightarrow m>\dfrac{5}{2}$(thỏa mãn).

Vậy $m>\dfrac{5}{2}$ là giá trị cần tìm.

h. (d) cắt đường thẳng y = 3x + 1 tại điểm có hoành độ âm (hoặc ở bên trái trục tung)

(d) cắt đường thẳng y = 3x + 1 $\Leftrightarrow$ 2m – 5 $\neq$ 3 $\Leftrightarrow$ m $\neq$ 4

Hoành độ giao điểm của (d) và đường thẳng y = 3x + 1 là nghiệm của phương trình ẩn x sau :

(2m – 5)x + 3 = 3x + 1 $\Leftrightarrow$ (2m - 8)x = -2 $\Leftrightarrow x=\dfrac{-2}{2m-8}$ (vì m $\neq$ 4)

(d) cắt đường thẳng y = 3x + 1 tại điểm có hoành độ âm

$\Leftrightarrow \dfrac{-2}{2m-8}<0 \Leftrightarrow 2m-8>0 \Leftrightarrow m>4$ (thỏa mãn các điều kiện m $\neq \dfrac{5}{2}$ và m $\neq$ 4)

Vậy m > 4 là giá trị cần tìm.

i. (d) cắt đường thẳng y = 5x - 3 tại điểm có tung độ dương (hoặc ở trên trục hoành)

* (d) cắt đường thẳng y = 5x - 3 $\Leftrightarrow$ 2m – 5 $\neq$ 5 $\Leftrightarrow$ m $\neq$ 5

* Hoành độ giao điểm của (d) và đường thẳng y = 5x - 3 là nghiệm của phương trình ẩn x sau :

(2m – 5)x + 3 = 5x - 3 $\Leftrightarrow$ (2m - 10)x = -6 $\Leftrightarrow x=\dfrac{-6}{2m-10}=\dfrac{-3}{m-5}$ (vì m $\neq$ 5)

Thay $x = \frac{-3}{m-5}$ vào phương trình đường thẳng y = 5x - 3 ta có y = $5.\frac{-3}{m-5} - 3 = \frac{-15-3m+15}{m-5} = \frac{-3m}{m-5}$

(d) cắt đường thẳng y = 5x - 3 tại điểm có tung độ dương

$\Leftrightarrow \frac{-3m}{m-5} > 0 \Leftrightarrow -3m(m-5) > 0 \Leftrightarrow m(m-5) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 5$

Kết hợp với các điều kiện ta có 0 < m < 5 và $m \neq \frac{5}{2}$ là giá trị cần tìm

j. Chứng tỏ (d) luôn đi qua một điểm cố định trên trục tung

Giả sử (d) luôn đi qua điểm cố định có tọa độ (x_0 ; y_0). Khi đó :

$y_0 = (2m - 5)x_0 + 3$ với mọi m $\Leftrightarrow 2x_0m - 5x_0 - y_0 + 3 = 0$ với mọi m

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 = 0 \\ -5x_0 - y_0 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 3 \end{cases}$

Vậy (d) luôn đi qua một điểm cố định trên trục tung có tọa độ là (0 ; 3)

<u>Chú ý đề bài 1:</u>

**** Ta luôn so sánh m tìm được với điều kiện của đề bài là $m \neq \frac{5}{2}$ (điều này rất rất hay quên)***

**** Nếu đề bài chỉ "Cho phương trình bậc nhất" mà không cho điều kiện ta vẫn phải đặt điều kiện để phương trình là phương trình bậc nhất (tức là phải có a ≠ 0 và lấy điều kiện đó để so sánh trước khi kết luận)***

<u>Đề bài 2:</u>

Cho đường thẳng d có phương trình y = (m + 1)x – 3n + 6 . Tìm m và n để :

a. (d) song song với đường thẳng y = -2x + 5 và đi qua điểm (2 ; -1)

b, (d) song song với đường thẳng y = 3x + 1 và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là -1

c, (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là $\frac{3}{2}$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ là 1

d, (d) song song với đường thẳng y = 2x + 3 và cắt đường thẳng y= 3x + 2 tại điểm có hoành độ là 1

e, (d) đi qua diểm (-3 ; -3) và cắt trục tung tại điểm có tung độ là 3

f, (d) đi qua (2 ; -5) và có tung độ gốc là -3

g, (d) đi qua hai điểm (-1 ; 3) và (-3 ; 1)

<u>Giải :</u>

a. (d) song song với đường thẳng y = -2x + 5 và đi qua điểm (2 ; -1)

- (d) song song với đường thẳng y = -2x + 5 $\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 = -2 \\ -3n+6 \neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ n \neq \frac{1}{3} \end{cases}$
- (d) đi qua điểm (2 ; -1) $\Leftrightarrow$ -1 = (m + 1).2 – 3n +6 $\Leftrightarrow$ 2m - 3n = -9

Thay m = -3 vào ta có 2. (-3) – 3n = -9 $\Leftrightarrow$ n = 1 (thỏa mãn)

Vậy m = -3 , n = 1

b. (d) song song với đường thẳng y = 3x + 1 và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là -1

- (d) song song với đường thẳng y = 3x + 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} m+1=3 \\ -3n+6\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ n\neq \dfrac{5}{3} \end{cases}$
- (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là -1 $\Leftrightarrow$ 0 = (m + 1). (-1) – 3n + 6 $\Leftrightarrow$ m + 3n = 5

Thay m = 2 vào ta được 2 + 3n = 5 $\Leftrightarrow$ n = 1 (thỏa mãn) .Vậy m = 2 , n = 1

c. (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là $\frac{3}{2}$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ là 1

* (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là $\frac{3}{2}$ $\Leftrightarrow$ 0 = (m + 1). $\frac{3}{2}$ – 3n + 6 $\Leftrightarrow$ m - 2n = -5

- (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ là 1 $\Leftrightarrow$ 1 = -3n + 6 $\Leftrightarrow$ n = $\frac{5}{3}$.

Thay vào phương trình m - 2n = -5 ta có m - 2. $\frac{5}{3}$ = -5 $\Leftrightarrow$ m = -$\frac{5}{3}$.Vậy n = $\frac{5}{3}$, m = -$\frac{5}{3}$

d. (d) song song với đường thẳng y = 2x + 3 và cắt đường thẳng y= 3x + 2 tại điểm có hoành độ là 1

- (d) song song với đường thẳng y = 2x + 3 $\Leftrightarrow \begin{cases} m+1=2 \\ -3n+6\neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ n\neq 1 \end{cases}$
- (d) cắt đường thẳng y= 3x + 2 tại điểm có hoành độ là 1 $\Leftrightarrow (m+1).1-3n+6=3.1+2 \Leftrightarrow m-3n=-2$.

Thay m = 1 vào ta có 1 – 3n = - 2 $\Leftrightarrow$ n = 1(không thỏa mãn)

Vậy không có giá trị nào của m và n thỏa mãn điều kiện đề bài.

__Chú ý :__ ***Ta thường quên so sánh với điều kiện*** $n\neq 1$ ***nên dẫn đến kết luận sai***

e. (d) đi qua diểm (-3 ; -3) và cắt trục tung tại điểm có tung độ là 3

- (d) đi qua diểm (-3 ; -3) $\Leftrightarrow -3=(m+1).(-3)-3n+6 \Leftrightarrow m+n=2$
- (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ là 3 $\Leftrightarrow 3=-3n+6 \Leftrightarrow n=1$

Thay vào phương trình m + n = 2 ta được m + 1 = 2 $\Leftrightarrow$ m = 1

Vậy m = 1 , n = 1

f. (d) đi qua (2 ; -5) và có tung độ gốc là -3

- (d) đi qua diểm (2 ; -5) $\Leftrightarrow -5=(m+1).2-3n+6 \Leftrightarrow 2m-3n=-13$
- (d) có tung độ gốc là -3 $\Leftrightarrow -3=-3n+6 \Leftrightarrow n=3$

Thay vào phương trình 2m - 3n = -13 ta được 2m – 3.3 = -13 $\Leftrightarrow$ m = -2

Vậy m = -2 , n = 3

g. (d) đi qua hai điểm (-1 ; 3) và (-3 ; 1)

(d) đi qua hai điểm (-1 ; 3) và (-3 ; 1)

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3=(m+1).(-1)-3n+6 \\ 1=(m+1).(-3)-3n+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+3n=2 \\ 3m+3n=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m=0 \\ 3m+3n=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ n=\dfrac{2}{3} \end{cases}$ Vậy m = 0 , m = $\dfrac{2}{3}$

Đề bài 3:

Cho hai hàm số bậc nhất y = (m + 3)x + 2m + 1 và y = 2mx - 3m - 4 có đồ thị tương ứng là (d_1) và (d_2). Tìm m để :

a. (d_1) và (d_2) song song với nhau , cắt nhau , trùng nhau

b. (d_1) và (d_2) cắt nhau tại một điểm nằm trên trục tung

c. (d_1) cắt (d_2) tại một điểm trên trục hoành

d. (d_1) cắt (d_2) tại một điểm nằm bên phải trục tung

e. (d_1) cắt (d_2) tại một điểm nằm bên dưới trục hoành

f. (d_1) cắt (d_2) tại điểm (1 ; -2)

g. Chứng tỏ khi m thay đổi thì đường thẳng (d_1) luôn đi qua một điểm cố định , đường thẳng (d_2) luôn đi qua một điểm cố định.

Giải : Để các hàm số đã cho là các hàm số bậc nhất ta phải có : $\begin{cases} m+3\neq 0 \\ 2m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq -3 \\ m\neq 0 \end{cases}$

Chú ý : ***Điều kiện trên luôn được dùng so sánh trước khi đưa ra một kết luận về m***

a. (d_1) và (d_2) song song với nhau , cắt nhau , trùng nhau

(d_1) và (d_2) song song với nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} m+3=2m \\ 2m+1\neq -3m-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=3 \\ m\neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m=3$

(d_1) và (d_2) cắt nhau $\Leftrightarrow m+3\neq 2m \Leftrightarrow m\neq 3$

(d_1) và (d_2) trùng nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} m+3=2m \\ 2m+1=-3m-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=3 \\ m=-1 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Kết hợp với các điều kiện ta có:

Với m = 3 thì (d_1) và (d_2) song song với nhau

$m\neq -3$, $m\neq 0$, $m\neq 3$ thì (d_1) và (d_2) cắt nhau

Không có giá trị nào của m để (d_1) và (d_2) trùng nhau

b. (d_1) và (d_2) cắt nhau tại một điểm nằm trên trục tung

- (d_1) và (d_2) cắt nhau $\Leftrightarrow m+3\neq 2m \Leftrightarrow m\neq 3$
- (d_1) và (d_2) cắt nhau tại một điểm nằm trên trục tung khi 2m + 1 = - 3m - 4 $\Leftrightarrow m=-1$

Kết hợp với các điều kiện ta có với m = -1 thì (d_1) và (d_2) cắt nhau tại một điểm nằm trên trục tung.

Chú ý : ***Giao điểm của (d_1) và (d_2) với trục tung lần lượt là (0 ; 2m + 1) và (0 ; -3m -4) nên chúng cắt nhau tại 1 điểm trên trục tung khi hai điểm đó trùng nhau, tức là 2m+1 = -3m – 4. Do đó lời giải trên nhanh mà không phải làm tắt.***

c. (d_1) cắt (d_2) tại một điểm trên trục hoành

- (d_1) và (d_2) cắt nhau $\Leftrightarrow m+3\neq 2m \Leftrightarrow m\neq 3$
- Thay y = 0 vào phương trình đường thẳng (d_1) và (d_2) ta có

$\begin{cases} (m+3)x+2m+1=0 \\ 2mx-3m-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2m+1}{m+3} \\ x=\dfrac{3m+4}{2m} \end{cases}$ (Vì $m\neq -3$, $m\neq 0$)

→ Giao điểm của (d_1) và (d_2) với trục hoành lần lượt là $\left(\frac{2m+1}{m+3};0\right)$ và $\left(\frac{3m+4}{2m};0\right)$

- (d_1) cắt (d_2) tại một điểm trên trục hoành khi

$$\frac{2m+1}{m+3}=\frac{3m+4}{2m}\Rightarrow 2m(2m+1)=(m+3)(3m+4)\Leftrightarrow 4m^2+2m=3m^2+13m+12\Leftrightarrow m^2-11m-12=0$$

Phương trình trên là phương trình bậc hai có a - b + c = 0 nên có hai nghiệm m_1 = -1 ; m_2 = 12

Kết hợp với các điều kiện ta có m = -1 hoặc m = 12 thì d_1) cắt (d_2) tại một điểm trên trục hoành

__Chú ý :__ ***Phải kết hợp với cả ba điều kiện là*** $m\neq -3$, $m\neq 0$, $m\neq 3$ ***rồi mới kết luận***.

d. (d_1) cắt (d_2) tại một điểm nằm bên phải trục tung

- (d_1) và (d_2) cắt nhau $\Leftrightarrow m+3\neq 2m\Leftrightarrow m\neq 3$
- Hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là nghiệm của phương trình ẩn x sau :

$$(m+3)x+2m+1=2mx-3m-4\Leftrightarrow (m-3)x=5m+5\Leftrightarrow x=\frac{5m+5}{m-3}\ (\text{ vì } m\neq 3\ )$$

- (d_1) cắt (d_2) tại một điểm nằm bên phải trục tung khi hoành độ giao điểm dương

$$\Leftrightarrow \frac{5m+5}{m-3}>0\Leftrightarrow (5m+5)(m-3)>0\Leftrightarrow m<-1 \text{ hoặc } m>3$$

Kết hợp với các điều kiện ta có $m\neq -3, m<-1$ hoặc $m>3$

e. (d_1) cắt (d_2) tại một điểm nằm bên dưới trục hoành

- (d_1) và (d_2) cắt nhau $\Leftrightarrow m+3\neq 2m\Leftrightarrow m\neq 3$
- Hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là nghiệm của phương trình ẩn x sau :

$$(m+3)x+2m+1=2mx-3m-4\Leftrightarrow (m-3)x=5m+5\Leftrightarrow x=\frac{5m+5}{m-3}\ (\text{ vì } m\neq 3\ )$$

Thay $x=\frac{5m+5}{m-3}$ vào phương trình đường thẳng (d_1) ta có

$$y=(m+3).\frac{5m+5}{m-3}+2m+1=\frac{5m^2+20m+15+2m^2-5m-3}{m-3}=\frac{7m^2+15m+12}{m-3}$$

* (d_1) cắt (d_2) tại điểm nằm bên dưới trục hoành khi tung độ giao điểm âm

$$\Leftrightarrow \frac{7m^2+15m+12}{m-3}<0\ (*)$$

Ta có $7m^2+15m+12=6m^2+12m+6+m^2+3m+\frac{9}{4}+\frac{15}{4}=6(m+1)^2+\left(m+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0$

Nên (*) tương đương với m-3<0 $\Leftrightarrow m<3$

Kết hợp với các điều kiện ta có : $m<3, m\neq -3, m\neq 0$ là giá trị cần tìm

f. (d_1) cắt (d_2) tại điểm (1 ; -2)

- (d_1) và (d_2) cắt nhau $\Leftrightarrow m+3\neq 2m\Leftrightarrow m\neq 3$
- (d_1) cắt (d_2) tại điểm (1 ; -2) $\Leftrightarrow \begin{cases}-2=(m+3)+2m+1\\-2=2m-3m-4\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m=-2\\m=-2\end{cases}\Leftrightarrow m=-2$

Kết hợp với các điều kiện ta có m = -2 là giá trị cần tìm.

g. Chứng tỏ khi m thay đổi thì đường thẳng (d_1) luôn đi qua một điểm cố định , đường thẳng (d_2) luôn đi qua một điểm cố định.

Giả sử khi m thay đổi các đường thẳng (d_1) luôn đi qua điểm (x_0 ; y_0) , tức là :

$y_0 = (m+3)x_0 + 2m + 1$ với mọi m $\Leftrightarrow (x_0+2)m + 3x_0 - y_0 + 1 = 0$ với mọi m

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 2 = 0 \\ 3x_0 - y_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = -5 \end{cases}$$

Vậy khi ma thay đổi thì các đường thẳng (d_1) luôn đi qua điểm (-2 ; -5) cố định

__Chú ý :__ ***Với đường thẳng (d_2) ta làm tương tự , điểm cố định là*** $\left(\frac{3}{2}; -4\right)$

__**Đề bài**__ Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt có phương trình y = -2x + 4 và y = 2x - 2

a. Tìm tọa độ giao điểm A của hai đường thẳng trên.

b. Vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ các đường thẳng d_1 và d_2

c. Gọi B và C lần lượt là giao điểm của d_1 và d_2 với trục hoành; D và E lần lượt là giao điểm của d_1 và d_2 với trục tung.Tính diện tích các tam giác ABC , ADE , ABE.

d. Tính các góc tạo bởi đường thẳng d_1 và d_2 với trục hoành.

__**Giải :**__**a, Tìm tọa độ giao điểm A của hai đường thẳng trên.**

Giao điểm của hai đường thẳng là nghiệm của hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} y = -2x + 4 \\ y = 2x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4-y}{2} \\ 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4-1}{2} = \dfrac{3}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy giao điểm A của hai đường thẳng là $A\left(\frac{3}{2}; 1\right)$

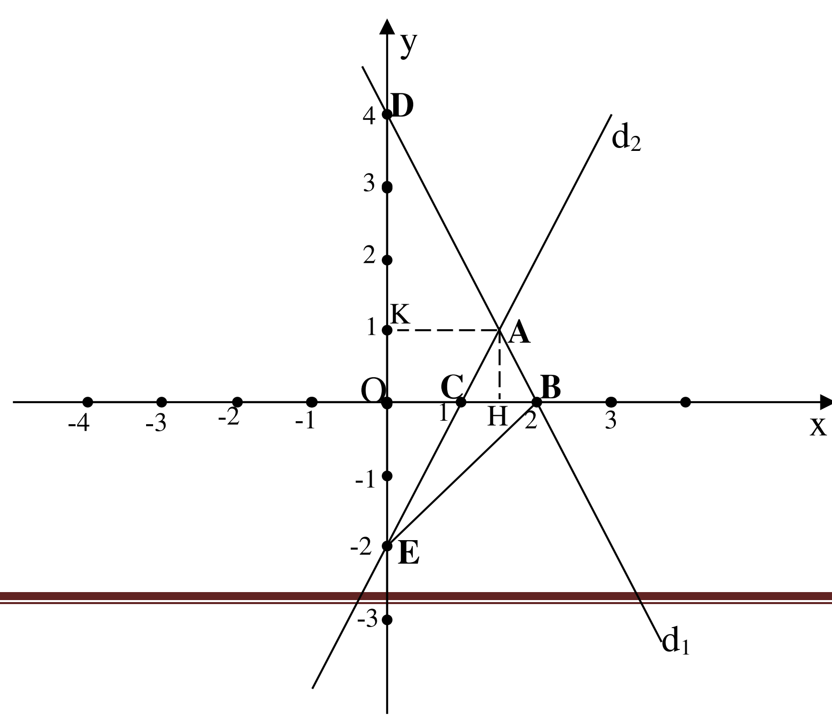
b, Vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ các đường thẳng d_1 và d_2

- Xét đường thẳng (d_1) : y = -2x + 4

Với x = 0 $\Rightarrow$ y = 4 ; y = 0 $\Rightarrow$ x = 2. Đường thẳng (d_1) đi qua hai điểm (0 ; 4) và (2 ; 0)

- Xét đường thẳng (d_2) : y = 2x - 2

Với x = 0 $\Rightarrow$ y = -2 ; y = 0 $\Rightarrow$ x = 1. Đường thẳng (d_1) đi qua hai điểm (0 ; -2) và (1 ; 0)



e. Gọi B và C lần lượt là giao điểm của d_1 và d_2 với trục hoành; D và E lần lượt là giao điểm của d_1 và d_2 với trục tung.Tính diện tích các tam giác ABC , ADE , ABE.

Ta có : $A\left(\frac{3}{2};1\right)$, B(2 ; 0) , C (1 ; 0) , D(0 ; 4) và E(0 ; -2)

Do đó : BC = | 2 – 1| = 1 , DE = | 4 - (-2)| = 6 , BO = | 2 – 0 | = 2

Gọi AH là đường cao của ΔABC , AK là đường cao của ΔADE $\Rightarrow$ AH = 1 , AK = $\frac{3}{2}$

Gọi S_{ABC} , S_{ADE} , S_{BDE} , S_{ABE} lần lượt là diện tích của các tam giác ABC , ADE , BDE , ABE.

Ta có :

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{1}{2}.1.1 = \frac{1}{2}$ (đơn vị diện tích)

$S_{ADE} = \frac{1}{2}AK.DE = \frac{1}{2}.\frac{3}{2}.6 = \frac{9}{2}$ (đơn vị diện tích)

$S_{BDE} = \frac{1}{2}BO.DE = \frac{1}{2}.2.6 = 6$ (đơn vị diện tích)

$S_{ABE} = S_{BDE} - S_{ADE} = 6 - \frac{9}{2} = \frac{3}{2}$ (đơn vị diện tích)

f. Tính các góc tạo bởi đường thẳng d_1 và d_2 với trục hoành.

Góc tạo bởi đường thẳng d_1 và d_2 với trục hoành lần lượt là $\widehat{DBx}$ và $\widehat{ACx}$

Tam giác OBD vuông tại O có : $Tg\widehat{OBD} = \frac{OD}{OB} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow \widehat{OBD} \approx 63,4^0$

$\Rightarrow \widehat{BDx} = 180^0 - 63,4^0 = 116,6^0$

Tam giác OCE vuông tại O có : $Tg\widehat{OCE} = \frac{OE}{OC} = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow \widehat{OCE} = 63,4^0$

$\Rightarrow \widehat{ACx} = 63,4^0$

Vậy góc tạo bởi đường thẳng d_1 và d_2 với trục hoành cùng là $63,4^0$.

II. CHÚ Ý : ***Khi đề bài không cho điều kiện của tham số m mà nói là cho hàm số bậc nhất thì khi làm bài ta vẫn phải tìm điều kiện để có phương trình bậc nhất và dùng điều kiện này để so sánh trước khi kết luận***

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: *(3,0 điểm).*

Cho đường thẳng (m – 2)x + (m – 1)y = 1 (d).

a) Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của m.

b) Tính giá trị của m để khoảng cách từ gốc toạ độ O đến đường thẳng (d) là lớn nhất.

Bài 2 (1,5 điểm)

Tìm hai số thực dương a , b sao điểm M có toạ độ (a ;b^2 +3) và điểm N Có toạ độ ($\sqrt{ab}$; 2) cùng thuộc đồ thị của hàm số : $y = x^2$.

Bài 3 (2,5 điểm)

Trong mặt phẳng toạ độ 0xy cho parabol (P): $y = x^2$ và điểm D(0;1).

1. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm D(0;1) v à có hệ số góc k.
2. Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phận biệt G và H với mọi k.
3. Gọi hoành độ của hai điểm G và H lần lượt là x_1 và x_2. Chứng minh rằng: $x_1.x_2 = -1$, từ đó suy ra tam giác GOH là tam giác vuông.

Câu 4 (1 điểm)

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường thẳng (d): $y = (m^2 - 3m)x + m$ và đường thẳng (d'): $y = 4x + 4$. Tìm m để đường thẳng (d) song song với đường thẳng (d').

Bài 5 (2.0 điểm)

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho parabol (P): $y = x^2$ và các điểm C, D thuộc parabol (P) với $x_c = -1$, $x_D = 2$

1.Tìm toà độ các điểm C, D và viết phương trình đường thẳng CD.

2.Tìm p để đường thẳng (d): $y = (2p^2-p)x+p+1$(với p là tham số) song song với đường thẳng CD.

<u>Câu 6:</u> Cho hàm số : $y = ax + b$ *(1)*

a) Xác định giá trị của a và b để đồ thị của hàm số *(1)*đi qua điểm A(1;5) và B(-2:-1)

b) Chứng tỏ rằng các đường thẳng AB và các đường thẳng $y = x + 5$, $y = 3x + 1$ đồng quy.

<u>Câu 7:</u> Cho Parabol (P) : $y = 1/4\ x^2$ và đường thẳng (d) : $y = 1/2\ x + 2$.

a) Vẽ (P) và (d) trên cùng hệ trục tọa độ Oxy.

b) Gọi A, B là giao điểm của (P) và (d). Tìm điểm M trên cung AB của (P) sao cho diện tích tam giác MAB lớn nhất.

c) Tìm điểm N trên trục hoành sao cho NA + NB ngắn nhất.

<u>Câu 8:</u> (2 điểm)

1.Cho hàm số: $y = x - 2m - 1$; với m tham số.

a) Tính theo m tọa độ các giao điểm A; B của đồ thị hàm số với các trục Ox; Oy. H là hình chiếu của O trên AB. Xác định giá trị của m để $OH = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) Tìm quỹ tích (tập hợp) trung điểm I của đoạn thẳng AB.

<u>Câu 9</u>: (2điểm)Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng(d): $y = mx + 1$ và parabol(P): $y = 2x^2$.

1) Tìm m để (d) đi qua A(1;3)
2) Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$. Hãy tính giá trị của $T = x_1x_2 + y_1y_2$

Câu 10 (2 điểm): Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d) : y = x + n – 1 và parabol (P) : $y = x^2$

1. Tìm n để (d) đi qua điểm B(0;2)
2. Tìm n để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 thỏa mãn: $4\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)-x_1x_2+3=0$

HƯỚNG DẪN

Câu 1		3,0 đ
a. (1,5đ)	Điều kiện cần và đủ để đường thẳng (m – 2)x + (m – 1)y = 1 (d) đi qua điểm cố định $N(x_o,y_o)$ là: $(m-2)x_o + (m-1)y_o = 1$, với mọi m $\Leftrightarrow mx_o - 2x_o + my_o - y_o - 1 = 0$, với mọi m $\Leftrightarrow (x_o + y_o)m - (2x_o + y_o + 1) = 0$ với mọi m $\Leftrightarrow \begin{cases} x_o + y_o = 0 \\ 2x_o + y_o + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = -1 \\ y_o = 1 \end{cases}$ Vậy các đường thẳng (d) luôn đi qua điểm cố định N (-1; 1).	0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ
b. (1,5đ)	+ Với m = 2, ta có đường thẳng y = 1 do đó khoảng cách từ O đến (d) là 1 (1) + Với m = 1, ta có đường thẳng x = -1 do đó khoảng cách từ O đến (d) là 1 (2) + Với $m \neq 1$ và $m \neq 2$ Gọi A là giao điểm của đường thẳng (d) với trục tung. Ta có: $x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{m-1}$, do đó OA = $\frac{1}{\lvert m-1\rvert}$. Gọi B là giao điểm của đường thẳng (d) với trục hoành. Ta có: $y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{m-2}$, do đó OB = $\frac{1}{\lvert m-2\rvert}$ Gọi h là khoảng cách Từ O đến đường thẳng (d). Ta có: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = (m-1)^2 + (m-2)^2 = 2m^2 - 6m + 5 = 2(m-\frac{3}{2})^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$. Suy ra $h^2 \leq 2$, max h = $\sqrt{2}$ khi và chỉ khi m = $\frac{3}{2}$. (3) Từ (1), (2) và (3) suy ra Max h = $\sqrt{2}$ khi và chỉ khi m = $\frac{3}{2}$.	0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ

8	**1. a**	Tìm được tọa độ giao điểm A của đồ thị hàm số với trục Ox: $A(2m+1;0)$	0,25	**2,0**

		Giao điểm B của đồ thị hàm số với trục Oy: B$(0;-2m-1)$		
		Ta có: Δ AOB vuông tại O và có OH là đường cao nên: $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}$ Hay $2=\frac{1}{x_A^2}+\frac{1}{y_B^2}\Leftrightarrow 2=\frac{2}{(2m+1)^2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-1 \end{array}\right.$	0,5	
	1. b	Hoành độ trung điểm I của AB: $x_I=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2m+1}{2}$ Tung độ trung điểm I của AB: $y_I=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-(2m+1)}{2}$ Ta có: $y_I=-x_I\Rightarrow$ Quỹ tích trung điểm I của đoạn thẳng AB là đường thẳng $y=-x$	0,25 0,25	
	2	Hệ luôn có nghiệm duy nhất Vì từ (2) $\Rightarrow y=-m^2+mx+2$ Thay vào (1) ta được: (m+1)x + m(- m^2 +mx + 2) = 2m -1 $\Leftrightarrow$ (m^2 + m + 1)x = m^3 - 1 Mà m^2 + m + 1 = $(m+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0\forall m$ Hệ có nghiệm duy nhất là: $\begin{cases} x=m-1 \\ y=-m+2 \end{cases}$ Ta có P = xy = (m -1)(2- m) = - m^2 + 2m + m - 2 $=-(m^2-3m+\frac{9}{4})+\frac{1}{4}$ $=-(m-\frac{3}{2})^2+\frac{1}{4}\le\frac{1}{4}$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m-\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow m=\frac{3}{2}$ Vậy giá trị lớn nhất của P là MaxP =$\frac{1}{4}\Leftrightarrow m=\frac{3}{2}$	0,25 0,25 0,25	

Câu 9

1) Thay x =1; y = 3 vào (d) ta được: m.1 +1 = 3 suy ra m = 2
2) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P): 2x^2 = mx + 1 $\Leftrightarrow$ 2x^2 – mx - 1 = 0

Ta có a = 2, b = -m, c = -1$\Leftrightarrow$ $\Delta=b^2-4ac=(-m)^2-4.2.(-1)=m^2+8>0\forall m$ $\Leftrightarrow$ phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m nên (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phâ biệt A(x_1;y_1) và B(x_2;y_2) với mọi m. Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{m}{2} \\ x_1.x_2 = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$

Ta có T = $x_1.x_2 + y_1y_2$ Mà $y_1 = 2x_1^2$ và $y_2 = 2x_2^2$ nên T = $x_1x_2 + 2x^2.2x_2^2$ =

$\frac{-1}{2} + 4(-\frac{1}{2})^2 = \frac{-1}{2} + 4.\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Câu 10

1. Thay x = 0; y = 2 vào phương trình đường thẳng (d) ta được: n = 3
2. Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là: $x^2 - x - (n - 1) = 0$ (*)

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình (*) phải có 2 nghiệm phân biệt x_1; x_2

$\Leftrightarrow \Delta = 4n - 3 \succ 0 \Leftrightarrow n \succ \frac{3}{4}$.

Khi đó theo định lý Vi ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1x_2 = -(n-1) \end{cases}$

Theo đề bài: $4\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) - x_1x_2 + 3 = 0 \Leftrightarrow 4\left(\frac{x_1 + x_2}{x_1x_2}\right) - x_1x_2 + 3 = 0$

$\Rightarrow \frac{4}{-n+1} + n + 2 = 0$

$\Leftrightarrow n^2 + n - 6 = 0 (DK: n \neq 1)$

$\Rightarrow n_1 = 2(TM); n_2 = 3(L)$

Vậy n = 2 là giá trị cần tìm.

DẠNG III: PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VÀ ĐỊNH LÍ VIÉT

I. VÍ DỤ

Đề bài 1: Cho phương trình $x^2 - (2m-1)x + m - 1 = 0$

a. Giải phương trình với $m = \frac{5}{3}$

b. Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt

c. Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu

d. Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng dấu

e. Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng dương

f. Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng âm

g. Tìm m để phương trình có nghiệm dương

h. Tìm m để phương trình có hai nghiệm là hai số nghịch đảo của nhau

i. Tìm m để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn $2x_1 + 5x_2 = -1$

j. Tìm m để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 1$

k. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm x_1 và x_2 của phương trình

l. Tìm GTNN của $|x_1 - x_2|$

m. Tìm GTLN của $x_1^2\left(1-x_2^2\right)+x_2^2\left(1-4x_1^2\right)$

n. Khi phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 , chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào m

$$B=\frac{x_1-1}{x_1x_2^2}+\frac{x_2-1}{x_2x_1^2}$$

Giải :

a. Giải phương trình với $m=\frac{5}{3}$

Với $m=\frac{5}{3}$ ta có phương trình : $x^2-\frac{7}{3}x+\frac{2}{3}=0\Leftrightarrow 3x^2-7x+2=0$

$\Delta=\left(-7\right)^2-4.3.2=49-24=25>0;\sqrt{\Delta}=5$ phương trình có hai nghiệm phân biệt :

$x_1=\frac{7-5}{6}=\frac{1}{3};\ x_2=\frac{7+5}{6}=2$

Vậy với $m=\frac{5}{3}$ phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là $\frac{1}{3}$ và 2

b. Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt

Phương trình đã cho là phương trình bậc hai có a = 1 ; b = 2m - 1 ; c = m - 1

$\Delta=\left(2m-1\right)^2-4.1.\left(m-1\right)=4m^2-4m+1-4m+4=4m^2-8m+4+1=\left(2m-2\right)^2+1$

Vì $\left(2m-1\right)^2\ge 0$ với mọi m $\Rightarrow \Delta=\left(2m-1\right)^2+1\ge 1>0$ với mọi m nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

c. Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu

Phương trình đã cho là phương trình bậc hai có a = 1 ; b = 2m - 1 ; c = m - 1

Phương trình có hai nghiệm trái dấu khi $ac<0\Leftrightarrow 1.\left(m-1\right)<0\Leftrightarrow m-1<0\Leftrightarrow m<1$

Vậy với m<1 thì phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu.

d. Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng dấu

Phương trình đã cho là phương trình bậc hai có a = 1 ; b = 2m - 1 ; c = m - 1

Phương trình có hai nghiệm cùng dấu khi

$$\begin{cases}\Delta\ge 0\\ ac>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(2m-2\right)^2+1\ge 0\ (\text{luôn đúng})\\ m-1>0\end{cases}\Leftrightarrow m-1>0\Leftrightarrow m>1$$

Vậy với m > 1 thì phương trình đã cho có hai nghiệm cùng dấu.

e. Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng dương

Phương trình đã cho là phương trình bậc hai có a = 1 ; b = 2m - 1 ; c = m - 1

Phương trình có hai nghiệm cùng dương khi

$$\begin{cases}\Delta\ge 0\\ ac>0\\ \frac{-b}{a}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(2m-2\right)^2+1\ge 0\\ m-1>0\\ 2m-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>1\\ 2m>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>1\\ m>\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow m>1$$

Vậy với m > 1 thì phương trình đã cho có hai nghiệm cùng dương.

f. Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng âm

Phương trình đã cho là phương trình bậc hai có a = 1 ; b = 2m - 1 ; c = m - 1

Phương trình có hai nghiệm cùng âm khi

$$\begin{cases} \Delta \ge 0 \\ ac > 0 \\ \dfrac{-b}{a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m-2)^2 + 1 \ge 0 \\ m - 1 > 0 \\ 2m - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ 2m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < \dfrac{1}{2} \end{cases} (\text{vô nghiệm})$$

Vậy không có giá trị nào của m để phương trình đã cho có hai nghiệm cùng âm.

g. Tìm m để phương trình có nghiệm dương

Phương trình đã cho là phương trình bậc hai có a = 1 ; b = 2m - 1 ; c = m - 1

Để phương trình có nghiệm dương ta có các trường hợp sau :

- Phương trình có một nghiệm dương và một nghiệm bằng 0

Thay x = 0 vào phương trình ta có m - 1 = 0 hay m = 1. Thay m = 1 vào phương trình ta được

$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$ (thỏa mãn)

- Phương trình có hai nghiệm cùng dương, điều kiện là :

$$\begin{cases} \Delta \ge 0 \\ ac > 0 \\ \dfrac{-b}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m-2)^2 + 1 \ge 0 \\ m - 1 > 0 \\ 2m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ 2m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m > \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$$

- Phương trình có hai nghiệm trái dấu, điều kiện là :

$ac < 0 \Leftrightarrow 1.(m-1) < 0 \Leftrightarrow m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$

Kết hợp cả ba trường hợp ta có với mọi m thì phương trình đã cho có nghiệm dương

h. Tìm m để phương trình có hai nghiệm là hai số nghịch đảo của nhau

Phương trình đã cho là phương trình bậc hai có a = 1 ; b = 2m - 1 ; c = m - 1

$\Delta = (2m-1)^2 - 4.1.(m-1) = 4m^2 - 4m + 1 - 4m + 4 = 4m^2 - 8m + 4 + 1 = (2m-2)^2 + 1$

Vì $(2m-1)^2 \ge 0$ với mọi $m \Rightarrow \Delta = (2m-1)^2 + 1 \ge 1 > 0$ với mọi m nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 với mọi m

Theo định lí Viet ta có $x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} = m - 1$

Phương trình có hai nghiệm là hai số nghịch đảo của nhau khi $x_1.x_2 = 1 \Leftrightarrow m - 1 = 1 \Leftrightarrow m = 2$

Vậy với m = 2 thì phương trình đã cho có hai nghiệm là hai số nghịch đảo của nhau.

i. Tìm m để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn $2x_1 + 5x_2 = -1$

Phương trình đã cho là phương trình bậc hai có a = 1 ; b = 2m - 1 ; c = m - 1

$\Delta = (2m-1)^2 - 4.1.(m-1) = 4m^2 - 4m + 1 - 4m + 4 = 4m^2 - 8m + 4 + 1 = (2m-2)^2 + 1$

Vì $(2m-1)^2 \ge 0$ với mọi $m \Rightarrow \Delta = (2m-1)^2 + 1 \ge 1 > 0$ với mọi m nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 với mọi m

Theo định lí Viet và đề bài ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 1 & (1) \\ x_1.x_2 = m - 1 & (2) \\ 2x_1 + 5x_2 = -1 & (3) \end{cases}$

Nhân hai vế của (1) với 5 sau đó trừ các vế tương ứng cho (3) ta được :

$5x_1 + 5x_2 - 2x_1 - 5x_2 = 10m - 5 + 1 \Leftrightarrow 3x_1 = 10m - 4 \Leftrightarrow x_1 = \frac{10m-4}{3}$ (4)

Thay (4) vào (1) ta có : $\frac{10m-4}{3} + x_2 = 2m - 1 \Leftrightarrow x_2 = 2m - 1 - \frac{10m-4}{3} = \frac{6m-3-10m+4}{3} = \frac{1-4m}{3}$ (5)

Thay (4) và (5) vào (2) ta được phương trình :

$\frac{10m-4}{3}.\frac{1-4m}{3} = m - 1 \Leftrightarrow (10m-4).(1-4m) = 9(m-1) \Leftrightarrow 10m - 40m^2 - 4 + 16m = 9m - 9$

$\Leftrightarrow 40m^2 - 17m - 5 = 0$

$\Delta = (-17)^2 - 4.40.(-5) = 1089 > 0; \sqrt{\Delta} = 33$

$\Rightarrow m_1 = \frac{17-33}{80} = \frac{1}{5}; \ m_2 = \frac{17+33}{80} = \frac{5}{8}$

Vậy với $m = \frac{1}{5}$ hoặc $m = \frac{5}{8}$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm thỏa mãn điều kiện đề bài.

j. Tìm m để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 1$

Phương trình đã cho là phương trình bậc hai có a = 1 ; b = 2m - 1 ; c = m - 1

$\Delta = (2m-1)^2 - 4.1.(m-1) = 4m^2 - 4m + 1 - 4m + 4 = 4m^2 - 8m + 4 + 1 = (2m-2)^2 + 1$

Vì $(2m-1)^2 \geq 0$ với mọi $m \Rightarrow \Delta = (2m-1)^2 + 1 \geq 1 > 0$ với mọi m nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 với mọi m

Theo định lí Viet ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 1 & (1) \\ x_1.x_2 = m - 1 & (2) \end{cases}$

Theo đề bài : $x_1^2 + x_2^2 = 1 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 1$ (3)

Thay (1) và (2) vào (3) ta có $(2m - 1)^2 - 2(m - 1) = 1$

$(2m - 1)^2 - 2(m - 1) = 1 \Leftrightarrow 4m^2 - 4m + 1 - 2m + 2 = 1 \Leftrightarrow 4m^2 - 6m + 2 = 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 3m + 1 = 0$

Phương trình có dạng a + b + c = 0 nên có hai nghiệm là $m_1 = 1$; $m_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$

Vậy với $m = 1$ hoặc $m = \frac{1}{2}$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm thỏa mãn điều kiện đề bài.

k. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm x_1 và x_2 của phương trình

Phương trình đã cho là phương trình bậc hai có a = 1 ; b = 2m - 1 ; c = m - 1

$\Delta = (2m-1)^2 - 4.1.(m-1) = 4m^2 - 4m + 1 - 4m + 4 = 4m^2 - 8m + 4 + 1 = (2m-2)^2 + 1$

Vì $(2m-1)^2 \geq 0$ với mọi $m \Rightarrow \Delta = (2m-1)^2 + 1 \geq 1 > 0$ với mọi m nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 với mọi m. Theo định lí Viet ta có :

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 1 \\ x_1.x_2 = m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{x_1 + x_2 + 1}{2} \\ m = x_1.x_2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x_1 + x_2 + 1}{2} = x_1.x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 2x_1.x_2 = 1$

Vậy hệ thức cần tìm là $x_1 + x_2 - 2x_1.x_2 = 1$

l. Tìm GTNN của $\left|x_1 - x_2\right|$

Phương trình đã cho là phương trình bậc hai có a = 1 ; b = 2m - 1 ; c = m - 1

$\Delta = \left(2m-1\right)^2 - 4.1.\left(m-1\right) = 4m^2 - 4m + 1 - 4m + 4 = 4m^2 - 8m + 4 + 1 = \left(2m-2\right)^2 + 1$

Vì $\left(2m-1\right)^2 \geq 0$ với mọi $m \Rightarrow \Delta = \left(2m-1\right)^2 + 1 \geq 1 > 0$ với mọi m nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 với mọi m

Theo định lí Viet ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 1 & (1) \\ x_1.x_2 = m - 1 & (2) \end{cases}$

Đặt A = $\left|x_1 - x_2\right| \geq 0 \Rightarrow A^2 = \left|x_1 - x_2\right|^2 = \left(x_1 - x_2\right)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1x_2$

Thay (1) và (2) vào ta có

$A^2 = \left(2m-1\right)^2 - 4\left(m-1\right) = 4m^2 - 4m + 1 - 4m + 4 = 4m^2 - 8m + 4 + 1 = \left(2m-2\right)^2 + 1 \geq 1$ với mọi m (3)

Mà $A \geq 0$ nên từ (3) $\Rightarrow A \geq 1$ với mọi m

Dấu bằng xảy ra khi $(2m - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Vậy GTNN của $A = \left|x_1 - x_2\right|$ là 1 xảy ra khi m = 1

m. Tìm GTLN của $x_1^2\left(1 - x_2^2\right) + x_2^2\left(1 - 4x_1^2\right)$

Phương trình đã cho là phương trình bậc hai có a = 1 ; b = 2m - 1 ; c = m - 1

$\Delta = \left(2m-1\right)^2 - 4.1.\left(m-1\right) = 4m^2 - 4m + 1 - 4m + 4 = 4m^2 - 8m + 4 + 1 = \left(2m-2\right)^2 + 1$

Vì $\left(2m-1\right)^2 \geq 0$ với mọi $m \Rightarrow \Delta = \left(2m-1\right)^2 + 1 \geq 1 > 0$ với mọi m nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 với mọi m

Theo định lí Viet ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 1 & (1) \\ x_1.x_2 = m - 1 & (2) \end{cases}$

Ta có $A = x_1^2\left(1 - x_2^2\right) + x_2^2\left(1 - 4x_1^2\right) = x_1^2 + x_2^2 - 5x_1^2x_2^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 - 5\left(x_1x_2\right)^2$ (3)

Thay (1) và (2) vào (3) ta được :

$$A = \left(2m-1\right)^2 - 5\left(m-1\right)^2 - 2\left(m-1\right) = 4m^2 - 4m + 1 - 5m^2 + 10m - 5 - 2m + 2 = -m^2 + 4m - 2$$
$$= 2 - \left(m^2 - 4m + 4\right) = 2 - \left(m-2\right)^2$$

Vì $\left(m-2\right)^2 \geq 0$ với mọi $m \Rightarrow A = 2 - \left(m-2\right)^2 \leq 2$ với mọi m

Dấu bằng xảy ra khi $(m – 2)^2 = 0$ hay m = 2

Vậy GTLN của $A = x_1^2\left(1 - x_2^2\right) + x_2^2\left(1 - 4x_1^2\right)$ là 2 khi m = 2

n. Khi phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 ,

chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào m : $B = \dfrac{x_1 - 1}{x_1x_2^2} + \dfrac{x_2 - 1}{x_2x_1^2}$

Phương trình đã cho là phương trình bậc hai có a = 1 ; b = 2m - 1 ; c = m - 1

$\Delta = \left(2m-1\right)^2 - 4.1.\left(m-1\right) = 4m^2 - 4m + 1 - 4m + 4 = 4m^2 - 8m + 4 + 1 = \left(2m-2\right)^2 + 1$

Vì $\left(2m-1\right)^2 \geq 0$ với mọi $m \Rightarrow \Delta = \left(2m-1\right)^2 + 1 \geq 1 > 0$ với mọi m nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 với mọi m. Theo định lí Viet ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 1 & (1) \\ x_1.x_2 = m - 1 & (2) \end{cases}$

Ta có: $\mathbf{B}=\frac{x_1-1}{x_1x_2^2}+\frac{x_2-1}{x_2x_1^2}=\frac{(x_1-1).x_1+(x_2-1).x_2}{x_1^2x_2^2}=\frac{(x_1^2+x_2^2)-(x_1+x_2)}{x_1^2x_2^2}$

$$=\frac{(x_1+x_2)^2-(x_1+x_2)-2x_1x_2}{x_1^2x_2^2}=\frac{(2m-1)^2-(2m-1)-2(m-1)}{(m-1)^2}$$

$$=\frac{4m^2-4m+1-2m+1-2m+2}{(m-1)^2}=\frac{4m^2-8m+4}{(m-1)^2}=\frac{4(m-1)^2}{(m-1)^2}=4$$

Vậy biểu thức B không phụ thuộc vào giá trị của m.

Đề bài 2. Cho phương trình $(m+1)x^2 - 2(m+2)x + m + 5 = 0$

a. Giải phương trình với m = -5
b. Tìm m để phương trình có nghiệm
c. Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất
d. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt
e. Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu
f. *Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng dương
g. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1 , x_2 thỏa mãn $x_1 + 3x_2 = 4$
h. Tìm m để phương trình có hai nghiệm mà tích của chúng bằng -1
i. Khi phương trình có hai nghiệm x_1 , x_2 .Tính theo m giá trị của $A=x_1^2+x_2^2$
j. Tìm m để A = 6
k. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1 , x_2 trong đó có một nghiệm là $\frac{1}{2}$.

Khi đó hãy lập phương trình có hai nghiệm là $\frac{6x_1+1}{3x_2}$ và $\frac{6x_2+1}{3x_1}$

Giải :

a. Giải phương trình với m = -5

Thay m = -5 vào phương trình ta có : $-4x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow -2x(2x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2x=0\\2x-3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=\frac{3}{2}\end{array}\right.$

Vậy với m = -5 , phương trình có hai nghiệm là 0 và $\frac{3}{2}$

b. Tìm m để phương trình có nghiệm

- Với m = -1 phương trình trở thành $-2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x=2$. Phương trình có một nghiệm x = 2
- Với m $\neq$ -1 phương trình là phương trình bậc hai có a = m+1 , b = -2(m+2) , c = m+5

$$\Delta'=(m+2)^2-(m+1)(m+5)=m^2+4m+4-m^2-6m-5=-2m-1$$

Phương trình có nghiệm khi $-2m-1\geq 0 \Leftrightarrow m\leq\frac{-1}{2}$

Tóm lại phương trình có nghiệm khi $m\leq\frac{-1}{2}$

c. Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất

- Với m = -1 phương trình trở thành -2x + 4 = 0 $\Leftrightarrow x = 2$. P.trình có một nghiệm duy nhất x = 2
- Với m $\neq$ -1 phương trình là phương trình bậc hai có a = m+1 , b = -2(m+2) , c = m+5

$\Delta' = (m+2)^2 - (m+1)(m+5) = m^2 + 4m + 4 - m^2 - 6m - 5 = -2m - 1$

Phương trình có nghiệm duy nhất khi $-2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-1}{2}$ (thỏa mãn)

Tóm lại phương trình có nghiệm duy nhất khi $m = -1$ hoặc $m = \frac{-1}{2}$

<u>Chú ý :</u> Trường hợp phương trình bậc hai có $\Delta = 0$ cũng được coi là có nghiệm duy nhất

d. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt

- Với m = -1 phương trình trở thành -2x + 4 = 0 $\Leftrightarrow x = 2$. P.trình có một nghiệm duy nhất x = 2
- Với m $\neq$ -1 phương trình là phương trình bậc hai có a = m+1 , b = -2(m+2) , c = m+5

$\Delta' = (m+2)^2 - (m+1)(m+5) = m^2 + 4m + 4 - m^2 - 6m - 5 = -2m - 1$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $-2m - 1 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{-1}{2}$

Tóm lại phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $m < \frac{-1}{2}$ và $m \neq -1$

e. Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu

- Với m = -1 phương trình trở thành -2x + 4 = 0 $\Leftrightarrow x = 2$. P.trình có một nghiệm duy nhất x = 2
- Với m $\neq$ -1 phương trình là phương trình bậc hai có a = m+1 , b = -2(m+2) , c = m+5

Phương trình có hai nghiệm trái dấu khi ac < 0

$$\Leftrightarrow (m+1)(m+5) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m+1>0 \\ m+5<0 \end{cases} \\ \begin{cases} m+1<0 \\ m+5>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m>-1 \\ m<-5 \end{cases} \text{(vô nghiệm)} \\ \begin{cases} m<-1 \\ m>-5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow -5 < m < -1$$

Vậy với -5 < m < -1 thì phương trình có hai nghiệm trái dấu

<u>Chú ý :</u>

Giải BPT (m + 1)(m + 5) < 0 (1) có cách nhanh hơn như sau :

Để (1) xảy ra thì m + 1 và m + 5 là hai số trái dấu. Ta luôn có m + 1 < m + 5 nên (1) xảy ra khi $\begin{cases} m+1<0 \\ m+5>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<-1 \\ m>-5 \end{cases} \Leftrightarrow -5 < m < -1$

Trường hợp chỉ cần biết kết quả của các BPT dạng như (1), hãy học thuộc từ "<u>ngoài cùng</u> <u>trong khác</u>" và dịch như sau : <u>ngoài khoảng hai nghiệm</u> thì vế trái <u>cùng dấu với hệ số a</u>, <u>trong khoảng hai nghiệm</u> thì vế trái <u>khác dấu với hệ số a</u> (hệ số a là

hệ số lũy thừa bậc hai của vế trái khi khai triển, nghiệm ở đây là nghiệm của đa thức vế trái)

Ví dụ với BPT (1) thì vế trái có hai nghiệm là -1 và -5 , dạng khai triển là $m^2 + 6m + 5$ nên hệ số a là 1 >0. BPT cần vế trái < 0 tức là khác dấu với hệ số a nên m phải trong khoảng hai nghiệm, tức là -5 < m < -1. Còn BPT (m + 1)(m + 5) > 0 (2) sẽ cần m ngoài khoảng hai nghiệm (cùng dấu với hệ số a), tức là m < -5 hoặc m > -1

Một số ví dụ minh họa :

$(m-3)(m+7)>0 \Leftrightarrow m<-7 \text{ hoặc } m>3;$ $\quad$ $(2m-4)(3m+9)<0 \Leftrightarrow -3<m<2$

$(2m-6)(1-m)\ge 0 \Leftrightarrow 1\le m\le 3;$ $\quad$ $(5-m)(2m-8)\le 0 \Leftrightarrow m\le 4 \text{ hoặc } m\ge 5$

f. *Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng dương

- Với m = -1 phương trình trở thành -2x + 4 = 0 $\Leftrightarrow x=2$. P.trình có một nghiệm duy nhất x = 2
- Với m $\neq$ -1 phương trình là phương trình bậc hai có a = m+1 , b = -2(m+2) , c = m+5

$$\Delta' = (m+2)^2 - (m+1)(m+5) = m^2+4m+4-m^2-6m-5 = -2m-1$$

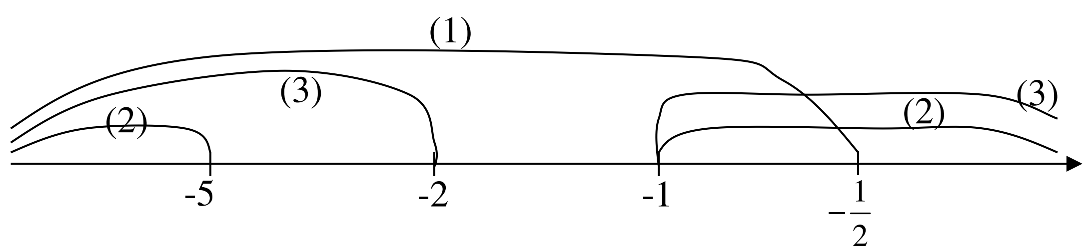
Phương trình có hai nghiệm cùng dương khi

$$\begin{cases}\Delta \ge 0\\ ac>0\\ \dfrac{-b}{a}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2m-1\ge 0\\ (m+1)(m+5)>0\\ \dfrac{2(m+2)}{m+1}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\le \dfrac{-1}{2}\\ (m+1)(m+5)>0\\ (m+2)(m+1)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\le \dfrac{-1}{2} & (1)\\ m<-5 \text{ hoặc } m>-1 & (2)\\ m<-2 \text{ hoặc } m>-1 & (3)\end{cases} \quad (I)$$

$$\Leftrightarrow m<-5 \text{ hoặc } -1<m<-\frac{1}{2}$$

<u>Chú ý :</u>

Để tìm nghiệm của hệ bất phương trình (I) ta lấy nháp vẽ một trục số, điền các số mốc lên đó và lấy các vùng nghiệm. Sau đó quan sát để tìm ra vùng nghiệm chung và kết luận. Việc làm đó diễn tả như sau :



ở hình trên các đường (1) ; (2) ; (3) lần lượt là các đường lấy nghiệm của các bất phương trình (1) ; (2) ; (3) trên trục số. Qua đó ta thấy m<-5 hoặc -1 < m < $-\frac{1}{2}$ là các giá trị chung thỏa mãn cả ba bất phương trình (1) ; (2) ; (3) nên đó là tập nghiệm của hệ bất phương trình (I)

g. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1 , x_2 thỏa mãn $x_1 + 3x_2 = 4$

- Với m = -1 phương trình trở thành -2x + 4 = 0 $\Leftrightarrow x = 2$. P.trình có một nghiệm duy nhất x = 2
- Với m $\neq$ -1 phương trình là phương trình bậc hai có a = m+1 , b = -2(m+2) , c = m+5

$$\Delta' = (m+2)^2 - (m+1)(m+5) = m^2 + 4m + 4 - m^2 - 6m - 5 = -2m - 1$$

Phương trình có hai nghiệm x_1 , x_2 khi nó là phương trình bậc hai có $\Delta \geq 0$

Tức là $\begin{cases} m \neq 1 \\ -2m - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \leq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Khi đó theo đề bài và định lí Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{2(m+2)}{m+1} & (1) \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{m+5}{m+1} & (2) \\ x_1 + 3x_2 = 4 & (3) \end{cases}$

Từ (1) và (3) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2m+4}{m+1} \\ x_1 + 3x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2m+4}{m+1} \\ 2x_2 = 4 - \dfrac{2m+4}{m+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{2m+4}{m+1} - x_2 \\ x_2 = \dfrac{m}{m+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{2m+4}{m+1} - \dfrac{m}{m+1} = \dfrac{m+4}{m+1} \\ x_2 = \dfrac{m}{m+1} \end{cases}$$

Thay vào (2) ta có phương trình :

$$\frac{m+4}{m+1}.\frac{m}{m+1} = \frac{m+5}{m+1} \Leftrightarrow (m+4).m = (m+5)(m+1) \ (\text{do } m \neq -1)$$
$$\Leftrightarrow m^2 + 4m = m^2 + 5m + m + 5 \Leftrightarrow 2m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{5}{2} \ (\text{thỏa mãn})$$

Vậy $m = -\dfrac{5}{2}$ là giá trị cần tìm.

h. Tìm m để phương trình có hai nghiệm mà tích của chúng bằng -1

- Với m = -1 phương trình trở thành -2x + 4 = 0 $\Leftrightarrow x = 2$. P.trình có một nghiệm duy nhất x = 2
- Với m $\neq$ -1 phương trình là phương trình bậc hai có a = m+1 , b = -2(m+2) , c = m+5

$$\Delta' = (m+2)^2 - (m+1)(m+5) = m^2 + 4m + 4 - m^2 - 6m - 5 = -2m - 1$$

Phương trình có hai nghiệm x_1 , x_2 khi nó là phương trình bậc hai có $\Delta \geq 0$

Tức là $\begin{cases} m \neq 1 \\ -2m - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \leq -\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad (1)$

Khi đó theo định lí Viet ta có $x_1.x_2 = \frac{m+5}{m+1}$

Vậy để phương trình đã cho có hai nghiệm thỏa mãn tích hai nghiệm bằng -1 thì m phải thỏa mãn điều kiện (1) và $\frac{m+5}{m+1} = -1 \Rightarrow m+5 = -m-1 \Leftrightarrow m = -3(\text{thỏa mãn})$

Vậy m = -3 là giá trị cần tìm.

i. Khi phương trình có hai nghiệm x_1 , x_2 .Tính theo m giá trị của $A = x_1^2 + x_2^2$

- Với m = -1 phương trình trở thành -2x + 4 = 0 $\Leftrightarrow x = 2$. P.trình có một nghiệm duy nhất x = 2
- Với m $\neq$ -1 phương trình là phương trình bậc hai có a = m+1 , b = -2(m+2) , c = m+5

$$\Delta' = (m+2)^2 - (m+1)(m+5) = m^2 + 4m + 4 - m^2 - 6m - 5 = -2m - 1$$

Phương trình có hai nghiệm x_1 , x_2 khi nó là phương trình bậc hai có $\Delta \geq 0$

Tức là $\begin{cases} m \neq 1 \\ -2m - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$ (1) Khi đó theo định lí Viet : $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{2(m+2)}{m+1} & (1) \\ x_1.x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m+5}{m+1} & (2) \end{cases}$

$$\text{Ta có } A = x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{2m+4}{m+1}\right)^2 - \frac{2(m+5)}{m+1}$$

$$= \frac{(2m+4)^2 - 2(m+5)(m+1)}{(m+1)^2} = \frac{4m^2 + 16m + 16 - 2m^2 - 12m - 10}{(m+1)^2} = \frac{2m^2 + 4m + 6}{(m+1)^2}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{2m^2 + 4m + 6}{(m+1)^2} \left(\text{với } m \neq -1 \text{ và } m \leq -\frac{1}{2}\right)$$

j. Tìm m để A = 6

$$\text{Ta có } A = \frac{2m^2 + 4m + 6}{(m+1)^2} \left(\text{với } m \neq -1 \text{ và } m \leq -\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Với } m \neq -1 \text{ và } m \leq -\frac{1}{2} \text{ ta có } A = 6 \Leftrightarrow \frac{2m^2 + 4m + 6}{(m+1)^2} = 6 \Leftrightarrow 2m^2 + 4m + 6 = 6(m+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 + 4m + 6 = 6m^2 + 12m + 6 \Leftrightarrow 4m^2 + 8m = 0 \Leftrightarrow 4m(m+2) = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ hoặc } m = -2$$

Kết hợp với điều kiện ta có m = -2 là giá trị cần tìm.

k. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1 , x_2 trong đó có một nghiệm là $\frac{1}{2}$. Khi đó hãy lập phương trình có hai nghiệm là $\frac{6x_1 + 1}{3x_2}$ và $\frac{6x_2 + 1}{3x_1}$

- Với m = -1 phương trình trở thành -2x + 4 = 0 $\Leftrightarrow x = 2$. P.trình có một nghiệm duy nhất x = 2
- Với m $\neq$ -1 phương trình là phương trình bậc hai có a = m+1 , b = -2(m+2) , c = m+5

$$\Delta' = (m+2)^2 - (m+1)(m+5) = m^2 + 4m + 4 - m^2 - 6m - 5 = -2m - 1$$

Phương trình có hai nghiệm x_1 , x_2 khi nó là phương trình bậc hai có $\Delta \ge 0$

Tức là $\begin{cases} m \ne 1 \\ -2m - 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ne 1 \\ m \le -\frac{1}{2} \end{cases}$ (1)

Thay x = $\frac{1}{2}$ vào phương trình đã cho ta có

(m+1).($\frac{1}{2}$)^2 - 2(m+2). $\frac{1}{2}$ + m + 5 = 0 $\Leftrightarrow$ m+1 - 4m - 8 + 4m + 20 = 0 $\Leftrightarrow$ m = -13 (thỏa mãn (1))

Vậy với m = -13 thì phương trình có hai nghiệm x_1 , x_2 trong đó có một nghiệm là $\frac{1}{2}$.

Thay m = -13 phương trình trở thành $-12x^2 + 22x - 8 = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 11x + 4 = 0$

Theo định lí Viet : $x_1 + x_2 = \frac{11}{6}$: $x_1x_2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Khi đó :

$$\frac{6x_1+1}{3x_2} + \frac{6x_2+1}{3x_1} = \frac{6x_1^2 + x_1 + 6x_2^2 + x_2}{3x_1x_2} = \frac{6\left(x_1+x_2\right)^2 - 12x_1x_2 + \left(x_1+x_2\right)}{3x_1x_2} = \frac{6.\left(\frac{11}{6}\right)^2 - 12.\frac{2}{3} + \frac{11}{6}}{3.\frac{2}{3}} = \frac{14}{2} = 7$$

$$\frac{6x_1+1}{3x_2} . \frac{6x_2+1}{3x_1} = \frac{36x_1x_2 + 6\left(x_1+x_2\right) + 1}{9x_1x_2} = \frac{36.\frac{2}{3} + 6.\frac{11}{6} + 1}{9.\frac{2}{3}} = \frac{36}{6} = 6$$

Do đó phương trình cần tìm có dạng $y^2 - 7y + 6 = 0$ (2)

Chú ý :

Phương trình (2) không nên lấy ẩn là x vì dễ gây nhầm lẫn với phương trình của đề bài

II. CHÚ Ý :

Khi gặp phương trình có tham số (thường là m) ở hệ số a (hệ số của lũy thừa bậc hai)ta cần xét riêng trường hợp hệ số a = 0 để kết luận trường hợp này có thỏa mãn yêu cầu của đề bài hay không. Sau đó xét trường hợp a khác 0, khẳng định đó là phương trình bậc hai rồi mới được tính Δ.

II : BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1 :(3.0 điểm) Gi¶i ph-¬ng tr×nh

$$(4x-1)\sqrt{x^2+1} = 2x^2 + 2x + 1$$

Bµi 2:

Cho ph-¬ng tr×nh $x^2 + (2m - 1)x - m = 0$ cã 2 nghiÖm x_1, x_2.

T×m m ®Ó $x_1^2 + x_2^2 - 6 x_1 x_2$ ®¹t gi¸ trÞ nhá nhÊt.

Bài 3: *(5,0 điểm).*Giải các phương trình.

a) $\frac{1}{x^2+4x+3} + \frac{1}{x^2+8x+15} + \frac{1}{x^2+12x+35} + \frac{1}{x^2+16x+63} = \frac{1}{5}$

b) $\sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+11-6\sqrt{x+2}} = 1$

Bài 4: *(5,0 điểm).*

~~Cho phương trình :~~ $\frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{x}}}+\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{x}}}=\sqrt{2}$.

a) Tìm điều kiện của x để phương trình có nghĩa .

b) Giải phương trình .

Câu 5: *(6,0 điểm)*.

1) Cho phương trình : $\frac{3a+1}{a+x}-\frac{a-1}{a-x}=\frac{2a(a^2-1)}{x^2-a^2}$ (a là tham số)

a) Giải phương trình trên.

b) Tìm các giá trị nguyên dương của a để phương trình có nghiệm x là số nguyên tố.

Câu 6 :(*5,0 điểm*).

1.Cho phương trình $x^2+2(m-2)x+m^2-2m+4=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{2}{x_1^2+x_2^2}-\frac{1}{x_1x_2}=\frac{1}{15m}$.

Cõu 7 :(Cho phương trình: $\mathbf{x^2 - 2(m - 1)\, x - 3 - m = 0}$

a, Chứng tỏ rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

b, Tìm m sao cho nghiệm x_1 ; x_2 thoả mãn điều kiện: $x_1^2 + x_2^2 \geq 10$.

Cõu 8 :Cho phương trình: $\mathbf{x^2 - 2m\, x + 2m - 1 = 0}$

a, Chứng tỏ rằng phương trình luôn có nghiệm x_1 ; x_2 với mọi m.

b, Đặt $A = 2(x_1^2 + x_2^2) - 5x_1x_2$

- Chứng minh : $A = 8m^2 - 18m + 9$

- Tìm m sao cho A = 27

c, Tìm m sao cho phương trình có nghiệm này bằng hai lần nghiệm kia .

Cõu 9 :. Cho phương trình: $\mathbf{(m-1)x^2 - 2(m-1)\, x - m = 0}$

a, Xác định m để phương trình có nghiệm kép, tìm nghiệm kép đó.

b, Tìm m sao cho phương trình có 2 nghiệm phân biệt đều âm.

Cõu 10 :. Cho phương trình: $\mathbf{x^2 - (2m - 3)\, x + m^2 + 3m = 0}$

a, Chứng minh rằng phương trình luôn luôn có hai nghiệm khi m thay đổi.

b, Tìm m sao cho nghiệm x_1 ; x_2 thoả mãn điều kiện: $1 < x_1 < x_2 < 6$.

Cõu 11 :. Cho phương trình: $\mathbf{(m+2)x^2 - (2m - 1)\, x - 3 + m = 0}$

a, Chứng minh rằng phương trình có nghiệm với mọi giá trị của m.

b, Tìm m sao cho phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 ; x_2 và khi đó hãy tìm giá trị của m để nghiệm này gấp hai lần nghiệm kia.

Cõu 12 :. . Cho phương trình: $\mathbf{x^2 - 4\, x + m + 1 = 0}$

a, Xác định m để phương trình luôn có nghiệm.

b, Tìm m sao cho phương trình có 2 nghiệm thoả mãn $x_1^2 + x_2^2 = 10$

Câu 13 :. Cho phương trình : $(m-1)x^2-2mx+m-4=0$ có 2 nghiệm $x_1;x_2$. Lập hệ thức liên hệ giữa $x_1;x_2$ sao cho chúng không phụ thuộc vào m.

Câu 14 :. : Gọi $x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình : $(m-1)x^2-2mx+m-4=0$. Chứng minh rằng biểu thức $A=3(x_1+x_2)+2x_1x_2-8$ không phụ thuộc giá trị của *m*.

Câu 15: ***(2.0 điểm)***

Cho phương trình ẩn x : $x^4-2(2m+1)x^2+4m^2=0$ (1)

1) Giải phương trình (1) khi m = 2.

2) Tìm điều kiện của m để phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3,x_4 thoả mãn $x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=17$.

Câu 16: *(2.0 điểm)*

1) Giải phương trình : $10\left(\frac{2-x}{x+1}\right)^2+\left(\frac{2+x}{1-x}\right)^2=\frac{11x^2-44}{x^2-1}$

2) Cho $x_1;x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2-6x+1=0$.

Đặt $S_n=x_1^n+x_2^n$. Tìm số dư khi chia S_{2009} cho 5.

Bài 17: Cho phương trình : $x^2-(2m+1)x+m^2+m-1=0$

1.Chứng minh phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

2.Chứng minh có một hệ thức giữa hai nghiệm số không phụ thuộc vào m.

HƯỚNG DẪN

Bài 3 (3.0 đ)	Phương trình đã cho tương đương với phương trình: $(4x-1)\sqrt{x^2+1}=2(x^2+1)+2x-1$ (1) Đặt $t=\sqrt{x^2+1}$ (đk t >1), phương trình (1) trở thành: (4x-1)t=2t²+2x-1 $\Leftrightarrow$ 2t²-(4x-1)t+2x-1=0 (2) Coi (2) là phương trình bậc hai ẩn t, khi đó phương trình (2) có: $\Delta=(4x-1)^2-8(2x-1)=(4x-3)^2\geq 0,\forall x\in R$ Phương trình (2) ẩn t có các nghiệm là: $t_1=2x-1$ và $t_2=\frac{1}{2}$ (loại) Với $t_1=2x-1$, ta có: $\sqrt{x^2+1}=2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases}2x-1\geq 0\\ x^2+1=(2x-1)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq \frac{1}{2}\\ 3x^2-4x=0\end{cases}$	0,5đ 0,5đ 1,0đ 0,75 đ

	$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{4}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3}$ Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: $x = \dfrac{4}{3}$	0,25 đ
Bài 3 (3.0 đ)	Phương trình đã cho tương đương với phương trình: $(4x-1)\sqrt{x^2+1} = 2(x^2+1) + 2x - 1 \quad (1)$ Đặt $t = \sqrt{x^2+1}$ (đk t >1), phương trình (1) trở thành: $(4x-1)t=2t^2+2x-1 \Leftrightarrow 2t^2-(4x-1)t+2x-1=0$ (2) Coi (2) là phương trình bậc hai ẩn t, khi đó phương trình (2) có: $\Delta = (4x-1)^2 - 8(2x-1) = (4x-3)^2 \geq 0, \forall x \in R$ Phương trình (2) ẩn t có các nghiệm là: $t_1=2x-1$ và $t_2=\dfrac{1}{2}$ (loại) Với $t_1=2x-1$, ta có: $\sqrt{x^2+1} = 2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x^2+1 = (2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ 3x^2 - 4x = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{4}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3}$ Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: $x = \dfrac{4}{3}$	0,5đ 0,5đ 1,0đ 0,75 đ 0,25 đ

Bài 2:		
Ta có $x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 8x_1x_2$ $= (1-2m)^2 + 8m$ $= 4m^2 + 4m + 1$ $= (2m+1)^2 \geq 0$ khi đó $x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất là 0 khi m=-1/2		

<u>Câu 3</u>:. a) $x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3)$

$x^2 + 8x + 15 = (x+3)(x+5)$

$x^2 + 12x + 35 = (x+5)(x+7)$

$x^2 + 16x + 63 = (x+7)(x+9)$

$\Rightarrow$ ĐKXĐ : $x \neq -1; x \neq -3; x \neq -5; x \neq -7; x \neq -9$

pt $\Leftrightarrow \frac{1}{(x+1)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+5)}+\frac{1}{(x+5)(x+7)}+\frac{1}{(x+7)(x+9)}=\frac{1}{5}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+7}+\frac{1}{x+7}-\frac{1}{x+9})=\frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+9})=\frac{1}{5}$

$\Rightarrow 5(x+9-x-1)=2(x+1)(x+9) \Leftrightarrow 2x^2+20x+18-40=0 \Leftrightarrow x^2+10x-11=0$

Phương trình có dạng $a+b+c=0 \Rightarrow x_1=1; x_2=-11$ $x_1; x_2$ thỏa mãn ĐKXĐ.

Vậy tập nghiệm của phương trình là : $S=\{-11;1\}$

b) ĐKXĐ: $x \geq -2$. (0,5 điểm)

Pt $\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x+2}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x+2}-3)^2}=1 \Leftrightarrow |\sqrt{x+2}-2|+|\sqrt{x+2}-3|=1$

$\Leftrightarrow |\sqrt{x+2}-2|+|3-\sqrt{x+2}|=1$

áp dụng BĐT $|A|+|B| \geq |A+B|$ ta có : $|\sqrt{x+2}-2|+|3-\sqrt{x+2}| \geq 1$

Dấu "=" xảy ra khi : $(\sqrt{x+2}-2)(3-\sqrt{x+2}) \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq \sqrt{x+2} \leq 3 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 7$

Vậy tập nghiệm của phương trình là : $S=\{x/2 \leq x \leq 7\}$

<u>Câu 4:.</u> a) điều kiện : $0<x\leq 4$

b) $\frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{x}}}+\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{x}}}=\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{4+2\sqrt{x}}}+\frac{2-\sqrt{x}}{2-\sqrt{4-2\sqrt{x}}}=2$ (1)

Đặt $\sqrt{4+2\sqrt{x}}=a$; $\sqrt{4-2\sqrt{x}}=b$ (a ; b $\geq$ 0) .

Ta có : $\begin{cases} a^2+b^2=8 \\ \frac{a^2}{2+a}+\frac{b^2}{2-b}=2 \end{cases}$

$\begin{cases} a^2+b^2=8 \\ 2(a^2+b^2)-ab(a-b)=8+4(a-b)-2ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=8 \\ (a-b)(ab+4)-2(ab+4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=8 \\ (a-b-2)(ab+4)=0 \end{cases}$ (I)

Vì ab + 4 > 0 nên :

$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)^2+2ab=8 \\ a-b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=2 \\ a-b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{2}{a} \\ a-\frac{2}{a}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{2}{a} \\ a^2-2a-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{2}{a} \\ \left[\begin{array}{l} a=1+\sqrt{3} \\ a=1-\sqrt{3} \text{ (loai vì a < 0)} \end{array}\right. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\sqrt{3}+1 \\ b=\sqrt{3}-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4+2\sqrt{x}}=\sqrt{3}+1 \\ \sqrt{4-2\sqrt{x}}=\sqrt{3}-1 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$

Câu 5		**4,0 đ**
a. (2,0đ)	Để $x=\frac{a(a+1)}{2}$ là nghiệm của phương trình (1) thì : $\frac{a(a+1)}{2} \neq a$ (2) và $\frac{a(a+1)}{2} \neq -a$ (3) Giải(2) ta được $a \neq 1, a \neq 0$ Giải (3) ta có: $a \neq 0$, $a \neq -3$ Vậy : a = 0 phương trình có vô số nghiệm $x \neq 0$ a = - 3 ; a= 1 phương trình vô nghiệm. $a \neq 1$; $a \neq -3$ và $a \neq 0$ phương trình có nghiệm duy nhất	0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ

	$x = \dfrac{a(a+1)}{2}$	0,5 đ
b. **(2,0đ)**	Theo câu a: Với a = 0 thì phương trình có vô số nghiệm $x \neq 0$ (loại do a >0) Với $a \neq 1$; $a \neq -3$ và $a \neq 0$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{a(a+1)}{2}$ Vì a là số nguyên dương và $a \neq 1$nên: Nếu a = 2 thì x = 3 , là số nguyên tố (thỏa mãn) Nếu a > 2 thì a = 2k hoặc a = 2k + 1 với $k \in N$, k > 1 Xét a = 2k thì x = k(2k + 1) là tích của hai số tự nhiên lớn hơn 1 nên x là hợp số. (loại) Xét a = 2k +1 thì x = (2k +1)(k+1) là tích của hai số tự nhiên lớn hơn 1 nên x là hợp số. (loại) Vậy a =2 thì nghiệm của phương trình x = 3 là số nguyên tố.	0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ

6 (5,0đ)	1 (2,5đ)	PT đã cho có hai nghiệm phân biệt có điều kiện: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 - (m^2 - 2m + 4) > 0 \Leftrightarrow m < 0$ (*)	0,50
		Với $m < 0$ theo Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 - 2m \\ x_1.x_2 = m^2 - 2m + 4 \end{cases}$.	0,25
		Ta có $\dfrac{2}{x_1^2 + x_2^2} - \dfrac{1}{x_1x_2} = \dfrac{1}{15m} \Leftrightarrow \dfrac{2}{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2} - \dfrac{1}{x_1x_2} = \dfrac{1}{15m}$ (1)	0,50
		$\Leftrightarrow \dfrac{1}{m^2 - 6m + 4} - \dfrac{1}{m^2 - 2m + 4} = \dfrac{1}{15m}$	0,50
		$\Leftrightarrow \dfrac{1}{m + \dfrac{4}{m} - 6} - \dfrac{1}{m + \dfrac{4}{m} - 2} = \dfrac{1}{15}$. Đặt $m + \dfrac{4}{m} = t$ do $m < 0 \Rightarrow t < 0$	0,50

<u>Cõu 7</u>:Giải:

a, Chứng tỏ rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

Ta có: $x^2 - 2(m - 1)x - (3 + m) = 0$

Có biệt số : $\Delta' = (m - 1)^2 + (m + 3) \Rightarrow \Delta' = \left(m - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{15}{4} \Rightarrow \Delta' \geq \dfrac{15}{4}$

$\Rightarrow \Delta' > 0$ với mọi giá trị m $\Rightarrow$ P. trình luôn có hai nghiệm với mọi m.

b, Tìm m sao cho nghiệm x_1 ; x_2 thoả mãn điều kiện: $x_1^2 + x_2^2 \geq 10$.

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 \geq 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \geq 10$

$\Leftrightarrow$ 4 (m - 1)^2 + 2(m + 3) $\geq$ 10 $\quad\quad$ $\Leftrightarrow$ 4m^2 -6m $\geq$ 0

$\Leftrightarrow$ m^2 - $\frac{3}{2}$m + $\frac{9}{16}$ $\geq$ $\frac{9}{16}$ $\quad\quad$ $\Leftrightarrow$ $\left(m-\frac{3}{4}\right)^2 \geq \frac{9}{16}$

$\Leftrightarrow \left|m-\frac{3}{4}\right| \geq \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-\frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \\ m-\frac{3}{4} \leq -\frac{3}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq \frac{3}{2} \\ m \leq 0 \end{array}\right.$

<u>Cõu 8</u>:Giải:

a, Ta có: $\Delta' = m^2 - (2m - 1) = (m - 1)^2 \Rightarrow \Delta' \geq 0$ với mọi m $\Rightarrow$ Phương trình luôn có nghiệm x_1 ; x_2 với mọi m.

b, ***Đặt*** $A = 2(x_1^2 + x_2^2) - 5x_1x_2$

áp dụng định lý Vi ét: $x_1 + x_2 = 2m$; $x_1x_2 = 2m-1$

- *Chứng minh :* $A = 8m^2 - 18m + 9$

$A = 2(x_1^2 + x_2^2) - 5x_1x_2 = 2(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 - 5x_1x_2 = 2(x_1 + x_2)^2 - 9x_1x_2$

$= 2(2m)^2 - 9(2m - 1) = 8m^2 - 18m + 9$

- *Tìm m sao cho A = 27*

A= 27 $\Rightarrow$ 8m^2 -18m +9 = 27 $\Rightarrow$ 8m^2 -18m -18 = 0 $\Rightarrow$ 4m^2 -9m - 9 = 0

$\Delta_m = 9^9 + 4.4.9 = 225 = 15^2$

$m_{1/2} = \frac{9 \pm 15}{8} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m_1 = 3 \\ m_2 = -\frac{3}{4} \end{array}\right.$

c, Tìm m sao cho phương trình có nghiệm này bằng hai lần nghiệm kia .

Giả sử: $x_1 = 2x_2 \Rightarrow 3x_2 = 2m$ $\quad$ (1)

$2x_2^2 = 2m - 1$ $\quad$ (2)

Lấy (2) Trừ đi (1) ta có $2x_2^2 - 3x_2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

Với $x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 2 \Rightarrow m = \frac{3}{2}$

Với $x_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = 1 \Rightarrow m = \frac{3}{4}$

<u>Cõu 9</u>:Giải:

a, Xác định m để phương trình có nghiệm kép, tìm nghiệm kép đó.

P.trình có nghiệm kép nếu: $\begin{cases}(m-1) \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 + m(m-1) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (m-1)(2m-1) = 0\end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$

Vậy: m = $\frac{1}{2}$ thì phương trình có nghiệm kép:

$x_1 = x_2 = (-\frac{b}{2a}) = -\frac{2(m-1)}{2(m-1)} = -1$

b, Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt đều âm thì.

$$\begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)(2m-1) > 0 \\ x_1.x_2 = -\dfrac{m}{m-1} > 0 \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{2(m-1)}{m-1<0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ 0 < m < 1 \end{cases} \qquad \text{Vậy: } 0 < m < 1$$

<u>Cõu 10</u>:Giải:

a, Chứng minh rằng phương trình luôn luôn có hai nghiệm khi m thay đổi.

Xét: $\Delta = (2m+3)^2 - 4(m^2 - 3m) = 9 > 0$

$\Rightarrow$ Phương trình luôn luôn có hai nghiệm phân biệt.

$x_{1/2} = \dfrac{2m-3\pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = m - 3$ và $x_2 = m$

b, Tìm m sao cho nghiệm x_1 ; x_2 thoả mãn điều kiện: $1 < x_1 < x_2 < 6$.

Với mọi m ta đều có: $m - 3 < m$ ta chỉ cần xác định m để :

$1 < m - 3 < m < 6 \Leftrightarrow 4 < m < 6$

Vậy với $4 < m < 6$ thì phương trình có hai nghiệm x_1 ; x_2 thoả mãn điều kiện:
$1 < x_1 < x_2 < 6$.

<u>Cõu 11</u> :. Giải:

a, Xét 2 trường hợp.

*Trương hợp 1: $m+2=0 \Rightarrow m = -2 \Rightarrow$ Phương trình trở thành $5x = 5 \Rightarrow x = 1$ là nghiệm

*Trương hợp 1: $m+2 \neq 0 \Rightarrow m \neq -2 \Rightarrow$ Ta có phương trình bậc hai:

$\Delta = (2m-1)^2 - 4(m+2)(m-3) = 1 = 25 = 5^2 \Rightarrow$ Phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

b, Khi $m \neq -2$ Phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $x_1 = \dfrac{m-3}{m+2}; x_2 = 1$. Cần tìm m để cho $x_1 = 2x_2$ hoặc $x_2 = 2x_1$.

*$x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow \dfrac{m-3}{m+2} = 2 \Leftrightarrow m - 3 = 2(m+2) \Leftrightarrow m = -7$

$x_2 = 2x_1 \Leftrightarrow \dfrac{2(m-3)}{m+2} = 1 \Leftrightarrow 2(m-3) = m + 2 \Leftrightarrow m = 8$

<u>Cõu 12</u> :. Giải:

a, Xét $\Delta' = 2^2 - (m+1) = 3 - m$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 3 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 3$

b, Ta có khi $m \leq 3$ thì phương trình có 2 nghiệm thoả mãn $x_1 + x_2 = 4$ và $x_1.x_2 = m+1$

Ta cần xác định m để: $\begin{cases} m \leq 3 \\ (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 3 \\ 4^2 - 2(m+1) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 3 \\ 2m = 4 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$

<u>Câu 13</u> :. Để phương trình trên có 2 nghiệm x_1 và x_2 th ì :

$$\begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m^2 - (m-1)(m-4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 5m - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \geq \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

Theo hệ th ức VI- ÉT ta có :

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2m}{m-1} \\ x_1.x_2=\dfrac{m-4}{m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=2+\dfrac{2}{m-1}(1) \\ x_1.x_2=1-\dfrac{3}{m-1}(2) \end{cases}$$

Rút m từ (1) ta có :

$$\frac{2}{m-1}=x_1+x_2-2 \Leftrightarrow m-1=\frac{2}{x_1+x_2-2} \qquad (3)$$

Rút m từ (2) ta có :

$$\frac{3}{m-1}=1-x_1x_2 \Leftrightarrow m-1=\frac{3}{1-x_1x_2} \qquad (4)$$

Đồng nhất các vế của (3) và (4) ta có:

$$\frac{2}{x_1+x_2-2}=\frac{3}{1-x_1x_2} \Leftrightarrow 2\left(1-x_1x_2\right)=3\left(x_1+x_2-2\right) \Leftrightarrow 3\left(x_1+x_2\right)+2x_1x_2-8=0$$

<u>Câu 14</u> :. Để phương trình trên có 2 nghiệm x_1 và x_2 th ì :

$$\begin{cases} m-1\neq 0 \\ \Delta'\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ m^2-(m-1)(m-4)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ 5m-4\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ m\geq \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

Theo hệ thức VI- ÉT ta c ó :

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2m}{m-1} \\ x_1.x_2=\dfrac{m-4}{m-1} \end{cases} \quad \text{thay vào A ta có:}$$

$$A=3\left(x_1+x_2\right)+2x_1x_2-8=3.\frac{2m}{m-1}+2.\frac{m-4}{m-1}-8=\frac{6m+2m-8-8(m-1)}{m-1}=\frac{0}{m-1}=0$$

Vậy A = 0 với mọi $m\neq 1$ và $m\geq \dfrac{4}{5}$. Do đó biểu thức A không phụ thuộc vào m

câu 15 **2 điểm**	1) 1,0điểm	Với m = 2 phương trình (1) có dạng: $x^4-10x^2+16=0$ (2) Đặt $y=x^2$ $\left(y\geq 0\right)$ thì pt (2) có dạng $y^2-10y+16=0$ (3)	0.25
		Giải pt (3) ta được $y_1=2; y_2=8$ (thoả mãn)	0.25
		$\left[\begin{array}{l} y_1=2 \\ y_2=8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=2 \\ x^2=8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{2} \\ x=\pm 2\sqrt{2} \end{array}\right.$	0.25
		Phương trình đã cho có bốn nghiệm $x_1=\sqrt{2}; x_2=-\sqrt{2}; x_3=2\sqrt{2}; x_4=-2\sqrt{2}$	0.25
	2) 1,0điểm	Đặt $y=x^2\left(y\geq 0\right)$ thì pt (1) trở thành $y^2-2(2m+1)y+4m^2=0$ (4) có $\Delta'=\left(2m+1\right)^2-4m^2=4m+1$	0.25

		Để phương trình (1) có bốn nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 phân biệt thì pt (4) phải có hai nghiệm dương y_1, y_2 phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ \dfrac{c}{a} > 0 \\ -\dfrac{b}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m+1>0 \\ 4m^2>0 \\ 2(2m+1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{4} \\ m \neq 0 \end{cases}$ (*)	0.25
		Giả sử $x_1^2 = x_2^2 = y_1;\ x_3^2 = x_4^2 = y_2 \Rightarrow x_1^4 = x_2^4 = y_1^2;\ x_3^4 = x_4^4 = y_2^2$ Do đó : $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 17 \Leftrightarrow 2\left(y_1^2 + y_2^2\right) = 17$	0.25
		$\Leftrightarrow 2\left[4(2m+1)^2 - 8m^2\right] = 17 \Leftrightarrow 16m^2 + 32m - 9 = 0$ $\Leftrightarrow m = -\dfrac{9}{4}$ hoặc $m = \dfrac{1}{4}$ kết hợp với ĐK (*) ta được $m = \dfrac{1}{4}$	0.25
câu 16 **2 điểm**	1) 1,0điểm	$10\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2 + \left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2 - 11\left(\dfrac{x^2-4}{x^2-1}\right) = 0$ ĐK : $x \neq 1;\ x \neq 2$. Đặt $a = \dfrac{x-2}{x+1}; b = \dfrac{x+2}{x-1}$ ta có phương trình: $10a^2 + b^2 - 11ab = 0 \Leftrightarrow (10a - b)(a - b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ b = 10a \end{array}\right.$ +) Với a = b ta có $\dfrac{x-2}{x+1} = \dfrac{x+2}{x-1} \Rightarrow x = 0$ (thoả mãn ĐK) +) Với b = 10a ta có $\dfrac{x+2}{x-1} = 10.\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right) \Rightarrow 3x^2 - 11x + 6 = 0$ Giải phương trình ta được : $x_1 = 3;\ x_2 = \dfrac{2}{3}$ (Đều thoả mãn ĐK) Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm $x_1 = 3;\ x_2 = \dfrac{2}{3};\ x_3 = 0$	1.0
	2) 1,0điểm	Ta tính được $S_{n+2} = x_1^{n+2} + x_2^{n+2} = \left(x_1^{n+1} + x_2^{n+1}\right)(x_1 + x_2) - \left(x_1^n + x_2^n\right)x_1x_2 = 6S_{n+1} - S_n$ Chứng minh tương tự ta có $S_{n+3} = 6S_{n+2} - S_{n+1}$. Do đó : $S_{n+3} = 6(6S_{n+1} - S_n) - S_{n+1} = 35S_{n+1} - 6S_n$ $\Rightarrow S_{n+6}$ và S_n cùng số dư khi chia cho 5 $\Rightarrow S_{2009}$ và S_5 cùng số dư khi chia cho 5 mà $S_2 = 30S_3 + 5S_3 - 6S_2$ $\Rightarrow S_5$ và $5S_3 - 6S_2$ cùng số dư khi chia cho 5 mà $5S_3 - 6S_2 = 786$ vì vậy $\Rightarrow S_{2009}$ khi chia cho 5 có số dư là 1	1.0

Bài 17:Giải:

1. Ta có : $\Delta = (2m+1)^2 - 4.(m^2 + m - 1) = 5 > 0$
suy ra phương trình luôn có nghiệm với mọi m

2.Theo vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 1(1) \\ x_1.x_2 = m^2 + m - 1(2) \end{cases}$

Từ (1) suy ra: $m = \dfrac{x_1 + x_2 - 1}{2}$ thay vào (2) ta có:

$x_1.x_2 = \left(\dfrac{x_1 + x_2 - 1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{x_1 + x_2 - 1}{2}\right) - 1 \Rightarrow x_1.x_2 - \left(\dfrac{x_1 + x_2 - 1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{x_1 + x_2 - 1}{2}\right) = 1$.

Ta có đpcm.

DẠNG IV: HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Đề bài 1: Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} 5x - 2y = -9 \\ 4x + 3y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x^2 + 2y^2 - 2xy = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^3 + 7x = y^3 + 7y \\ x^2 + y^2 = x + y + 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{2-y} = 2 \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{2-y} = 1 \end{cases}$ (Đặt ẩn phụ) e) $\begin{cases} x + y + xy = -7 \\ x^2 + y^2 - 3x - 3y = 16 \end{cases}$ (đối xứng loại 1)

f) $\begin{cases} 2x^2 + y = 3y^2 - 2 \\ 2y^2 + x = 3x^2 - 2 \end{cases}$ (đối xứng loại 2) g) $\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11 \\ x^2 + 2xy + 5y^2 = 25 \end{cases}$ (đẳng cấp bậc hai)

Giải :

a) $\begin{cases} 5x - 2y = -9 \\ 4x + 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15x - 6y = -27 \\ 8x + 6y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 23x = -23 \\ 4x + 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 4(-1) + 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \dfrac{2+4}{3} = 2 \end{cases}$

Vậy hệ có một nghiệm là : (x ; y) = (-1 ; 2)

b) $\begin{cases}x+2y=5\\x^2+2y^2-2xy=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5-2y\\(5-2y)^2+2y^2-2(5-2y)y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5-2y\\25-20y+4y^2+2y^2-10y+4y^2=5\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=5-2y\\10y^2-30y+20=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5-2y & (1)\\y^2-3y+2=0 & (2)\end{cases}$

Phương trình (2) là phương trình bậc hai có a + b + c = 0 nên có hai nghiệm là $y_1=1;\ y_2=\frac{c}{a}=2$

Với $y = y_1 = 1$ thay vào (1) ta có x = 5 — 2.1 = 3

Với $y = y_2 = 2$ thay vào (1) ta có x = 5 — 2.2 = 1

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm (x ; y) là (3 ; 1) và (1 ; 2)

c) $\begin{cases}x^3+7x=y^3+7y\\x^2+y^2=x+y+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-y^3+7x-7y=0\\x^2+y^2=x+y+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-y)(x^2+xy+y^2)+7(x-y)=0\\x^2+y^2=x+y+2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-y)(x^2+xy+y^2+7)=0 & (1)\\x^2+y^2=x+y+2 & (2)\end{cases}$

Từ (1) => x - y = 0 hoặc $x^2 + xy + y^2 + 7 = 0$

- Nếu x — y = 0 ⇔ x = y thay vào (2) ta có : $x^2+x^2=x+x+2\Leftrightarrow x^2-x-1=0$

$\Delta=(-1)^2-4.1.(-1)=5>0$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt : $x_1=\frac{1-\sqrt5}{2};\ x_2=\frac{1+\sqrt5}{2}$

⇨ Hệ có nghiệm $x=y=\frac{1-\sqrt5}{2}$ và $x=y=\frac{1+\sqrt5}{2}$

- Nếu $x^2 + xy + y^2 + 7 = 0$ kết hợp với (2 ta có hệ :

$\begin{cases}x^2+y^2+xy+7=0\\x^2+y^2=x+y+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+2+xy+7=0\\x^2+y^2=x+y+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+xy+9=0\\(x+y)^2-2xy=x+y+2\end{cases}$

Đặt x+y = S , xy = P ta có hệ $\begin{cases}S+P+9=0\\S^2-2P=S+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P=-S-9\\S^2-2(-S-9)=S+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P=-S-9\\S^2+S+16=0\ (*)\end{cases}$

Phương trình (*) là phương trình bậc hai có $\Delta=1^2-4.1.16=-63<0$ nên (*) vô nghiệm. Hệ vô nghiệm

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=y=\frac{1-\sqrt5}{2}$ và $x=y=\frac{1+\sqrt5}{2}$

d) $\begin{cases}\frac{1}{x}-\frac{3}{2-y}=2\\\frac{2}{x}-\frac{1}{2-y}=1\end{cases}$. Điều kiện $x\neq0, y\neq2$

Đặt $\frac{1}{x}=a,\frac{1}{2-y}=b$ ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases}a-3b=2\\2a-b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-3b=2\\6a-3b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5a=1\\2a-b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{5}\\b=2a-1=2.\frac{1}{5}-1=-\frac{3}{5}\end{cases}$$

Do đó $\begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{1}{5}\\\frac{1}{2-y}=-\frac{3}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=2+\frac{5}{3}=\frac{11}{3}\end{cases}$ (thỏa mãn các điều kiện)

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=\left(5;\frac{11}{3}\right)$

e) $\begin{cases}x+y+xy=-7\\x^2+y^2-3x-3y=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+xy=-7\\(x+y)^2-2xy-3(x+y)=16\end{cases}$

Đặt x+y = S , xy = P ta có hệ $\begin{cases}S+P=-7\\S^2-2P-3S=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P=-7-S\\S^2-2(-7-S)-3S=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P=-7-S\\S^2-S-2=0\end{cases}$

Phương trình $S^2 — S — 2 = 0$ có dạng a - b + c = 0 nên có hai nghiệm là $S_1 = -1$, $S_2 = 2$

- ❖ Với $S = S_1 = -1$ ta có P = -7 + 1 = -6 $\Rightarrow\begin{cases}x+y=-1\\xy=-6\end{cases}$.

x và y là nghiệm của phương trình bậc hai sau : $A^2 + A - 6 = 0$

$\Delta=1^2-4.1.(-6)=25>0\Rightarrow\sqrt{\Delta}=5$. Phương trình có hai nghiệm :

$A_1=\frac{-1+5}{2}=2$; $A_2=\frac{-1-5}{2}=-3$ => Hệ phương trình có nghiệm (2 ; -3) và (-3 ; 2)

- ❖ Với $S = S_2 = 2$ ta có P = -7 - 2 = -9 . => Tự làm tiếp.

Kết luận : Hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm là :

(2 ; -3) , (-3 ; 2) , $\left(1-\sqrt{10};1+\sqrt{10}\right)$, $\left(1+\sqrt{10};1-\sqrt{10}\right)$

f) $\begin{cases}2x^2+y=3y^2-2 & (1)\\2y^2+x=3x^2-2 & (2)\end{cases}$

Trừ từng vế hai phương trình của hệ ta có :

$2(x^2-y^2)-(x-y)=3(y^2-x^2)\Leftrightarrow 2(x-y)(x+y)-(x-y)+3(x-y)(x+y)=0$

$\Leftrightarrow(x-y)(2x+2y-1+3x+3y)=0\Leftrightarrow(x-y)(5x+5y-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-y=0\\5x+5y-1=0\end{array}\right.$

- ❖ Nếu x - y = 0 ⇔ x = y thay vào (1) ta có $2x^2 + x = 3x^2 - 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

Phương trình có dạng a — b + c = 0 nên có hai nghiệm là $x_1 = -1$, $x_2 = 2$

- ⇨ Hệ phương trình có hai nghiệm x = y = -1 và x = y = 2
- ❖ Nếu 5x + 5y — 1 = 0 $\Rightarrow y=\frac{1-5x}{5}$ thay vào (1) ta có :

$$2x^2+\frac{1-5x}{5}=3.\left(\frac{1-5x}{5}\right)^2-2\Leftrightarrow 50x^2+5-25x=3\left(1-10x+25x^2\right)-50\Leftrightarrow 25x^2-5x-52=0$$

$\Delta=5^2-4.25.(-52)=5225>0$

Phương trình có hai nghiệm $x_1=\frac{5-\sqrt{5225}}{50}=\frac{1-\sqrt{209}}{10}$; $x_2=\frac{5+\sqrt{5225}}{50}=\frac{1+\sqrt{209}}{10}$

Với x = x_1 = $\frac{1-\sqrt{209}}{10}$ ta có y = (1 — 5.$\frac{1-\sqrt{209}}{10}$) : 5 = $\frac{1+\sqrt{209}}{10}$

Với x = x_2 = $\frac{1+\sqrt{209}}{10}$ ta có y = (1 — 5.$\frac{1+\sqrt{209}}{10}$) : 5 = $\frac{1-\sqrt{209}}{10}$

Kết luận : Hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm (x ; y) là :

$(-1;-1)$, $(2;2)$, $\left(\frac{1-\sqrt{209}}{10};\frac{1+\sqrt{209}}{10}\right)$, $\left(\frac{1+\sqrt{209}}{10};\frac{1-\sqrt{209}}{10}\right)$

Chú ý : ***Nếu hệ đối xứng bậc 3 thì cách làm vẫn thế nhưng lời giải dài và khó hơn rất nhiều cần quan sát kĩ xem ở bước thứ hai có cách nào đơn giản không***

g) $\begin{cases}3x^2+2xy+y^2=11 & (1)\\ x^2+2xy+5y^2=25 & (2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}25.\left(3x^2+2xy+y^2\right)=25.11\\ 11.\left(x^2+2xy+5y^2\right)=11.25\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}75x^2+50xy+25y^2=275\\ 11x^2+22xy+55y^2=275\end{cases}$

$\Rightarrow 75x^2+50xy+25y^2=11x^2+22xy+55y^2 \Leftrightarrow 64x^2+28xy-30y^2=0 \Leftrightarrow 32x^2+14xy-15y^2=0 \quad (*)$

Với y = 0 thay vào hệ phương trình ta có : $\begin{cases}3x^2=11\\ x^2=25\end{cases}$ (hệ vô nghiệm)

Với y $\neq 0$ chia hai vế của (*) cho y^2 ta được phương trình :

$\frac{32x^2}{y^2}+\frac{14x}{y}-15=0 \Leftrightarrow 32.\left(\frac{x}{y}\right)^2+14.\frac{x}{y}-15=0$

Đặt t = $\frac{x}{y}$ ta có phương trình : $32t^2 + 14t — 15 = 0$

Phương trình trên có $\Delta' = 7^2-32.(-15)=529>0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'}=23$

Phương trình có hai nghiệm : $t_1=\frac{-7-23}{32}=-\frac{15}{16}$; $t_2=\frac{-7+23}{32}=\frac{1}{2}$

❖ Với t = t_1 = $-\frac{15}{16}$ $\Rightarrow \frac{x}{y}=-\frac{15}{16} \Rightarrow x=-\frac{15}{16}y$. Thay vào phương trình (2) ta có :

$\left(-\frac{15}{16}y\right)^2+2.\left(-\frac{15}{16}y\right)y+5y^2=25 \Leftrightarrow 225y^2-480y^2+1280y^2=6400$

$\Leftrightarrow 1025y^2=6400 \Leftrightarrow y^2=\frac{256}{41} \Leftrightarrow y=\frac{16}{\sqrt{41}}$ hoặc $y=-\frac{16}{\sqrt{41}}$

Với $y=\frac{16}{\sqrt{41}} \Rightarrow x=-\frac{15}{16}.\frac{16}{\sqrt{41}}=-\frac{15}{\sqrt{41}}$

Với $y=-\frac{16}{\sqrt{41}} \Rightarrow x=-\frac{15}{16}.\left(-\frac{16}{\sqrt{41}}\right)=\frac{15}{\sqrt{41}}$

❖ Với t = t_2 = $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{2}y$. Thay vào phương trình (2) ta có :

$\left(\frac{1}{2}y\right)^2+2.\left(\frac{1}{2}y\right)y+5y^2=25 \Leftrightarrow y^2+4y^2+20y^2=100 \Leftrightarrow 25y^2=100 \Leftrightarrow y^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=2\\ y=-2\end{array}\right.$

Với y = 2 $\Rightarrow x=\frac{1}{2}.2=1$

Với y = -2 $\Rightarrow x = \frac{1}{2}.(-2) = -1$

Tóm lai hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm (x ; y) là :

$\left(-\frac{15}{\sqrt{41}};\frac{16}{\sqrt{41}}\right)$, $\left(\frac{15}{\sqrt{41}};-\frac{16}{\sqrt{41}}\right)$, $(1;2)$, $(-1;-2)$

Chú ý : ***Nếu trong hệ có các biểu thức cần điều kiện thì trước khi giải ta phải tìm điều kiện của biến trước, sau đó dùng điều kiện này để so sánh trước khi kết luận về nghiệm của hệ***

Đề bài 2: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 3x + (m-1)y = 12 \\ (m-1)x + 12y = 24 \end{cases}$

a. Giải hệ phương trình với m = 2
b. Giải và biện luận hệ phương trình.
c. Tìm m để hệ phương trình có một nghiệm duy nhất (x ; y) sao cho x < y.
d. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất âm.
e. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất thoả mãn x + y > 1
f. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất thỏa mãn x + y = -1.
g. Tìm m nguyên để hệ có nghiệm duy nhất là nghiệm nguyên
h. Với (x ; y) là nghiệm duy nhất của hệ .Tìm đẳng thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào m.

Giải :

a. Giải hệ phương trình với m = 2 **(tự làm)**

b. Giải và biện luận hệ phương trình.

$$\begin{cases} 3x + (m-1)y = 12 & (1) \\ (m-1)x + 12y = 24 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36x + 12(m-1)y = 144 \\ (m-1)^2x + 12(m-1)y = 24(m-1) \end{cases}$$

Trừ từng vế của hai phương trình trên ta có :

$$(m-1)^2x - 36x = 24(m-1) - 144 \Leftrightarrow \left[(m-1)^2 - 36\right]x = 24m - 24 - 144$$
$$\Leftrightarrow (m-7)(m+5)x = 24m - 168 \ (3)$$

❖ Nếu m = 7 thay vào hệ phương trình ban đầu ta có :

$$\begin{cases} 3x + 6y = 12 \\ 6x + 12y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x + 2y = 4 \Leftrightarrow x = 4 - 2y$$

Hệ vô số nghiệm dạng (4 — 2t ; t) với $t \in R$

❖ Nếu m = -5 thay vào hệ phương trình ban đầu ta có :

$$\begin{cases} 3x - 6y = 12 \\ -6x + 12y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 4 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$$ Hệ vô nghiệm

❖ Nếu $m \neq -5$ và $m \neq 7$ từ (3) ta có : $x = \frac{24m - 168}{(m-7)(m+5)} = \frac{24(m-7)}{(m-7)(m+5)} = \frac{24}{m+5}$

Thay vào (2) ta có:

$$(m-1).\left(\frac{24}{m+5}\right) + 12y = 24 \Leftrightarrow 12y = 24 - \frac{24(m-1)}{m+5} \Leftrightarrow y = 2 - \frac{2(m-1)}{m+5} \Leftrightarrow y = \frac{12}{m+5}$$

Tóm lại :

- ✓ Nếu m = -5 hệ phương trình đã cho vô nghiệm
- ✓ Nếu m = -7 hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm x = 4 — 2t , y = t với t $\in$R
- ✓ Nếu $m \neq -5$ và $m \neq 7$ hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất:

$x = \frac{24}{m+5}$, $y = \frac{12}{m+5}$

Chú ý : ***Khi tìm được*** $x = \frac{24}{m+5}$ ***ta không nên thay vào (1) để tìm y vì khi đó hệ số của y vẫn còn m và ta lại phải xét các trường hợp hệ só đó bằng và khác 0 để tìm y***

c. Tìm m để hệ phương trình có một nghiệm duy nhất (x ; y) sao cho x < y.

❖ Theo câu trên, phương trình có một nghiệm duy nhất khi $m \neq -5$ và $m \neq 7$.

❖ Khi đó nghiệm của hệ là : $x = \frac{24}{m+5}$, $y = \frac{12}{m+5}$

$$x < y \Leftrightarrow \frac{24}{m+5} < \frac{12}{m+5} \qquad (1)$$

Với $m \neq -5$ và $m \neq 7$ ta có $(x + 5)^2 > 0$. Nhân hai vế của (1) với $(x + 5)^2 > 0$ ta được bất phương trình

$$24(m+5) < 12(m+5) \Leftrightarrow 24m + 120 < 12m + 60 \Leftrightarrow 12m < -60 \Leftrightarrow m < -5$$

Kết hợp với các điều kiện ta có m < -5 là giá trị cần tìm

Chú ý :

- ***Khi nhân cả hai vế của một bất phương trình với cùng một biểu thức ta phải chú ý xem biểu thức đó dương hay âm để đổi chiều hay không đổi chiều bất đẳng thức***
- ***Nếu đề bài cho làm câu c (hoặc d, e, f, g) mà không cho câu b thì khi làm, bước 1 ta phải tìm điều kiện để hệ có nghiệm duy nhất, khi đó ta trình bày như***

$\Leftrightarrow m \neq -5$ và $m \neq 7$

d. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất âm.

- ❖ Theo câu trên, phương trình có một nghiệm duy nhất khi $m \neq -5$ và $m \neq 7$.
- ❖ Khi đó nghiệm của hệ là : $x = \dfrac{24}{m+5}$, $y = \dfrac{12}{m+5}$

Hệ có một nghiệm duy nhất âm khi $\begin{cases} \dfrac{24}{m+5} < 0 \\ \dfrac{12}{m+5} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+5<0 \\ m+5<0 \end{cases} \Leftrightarrow m+5<0 \Leftrightarrow m<-5$

Kết hợp với các điều kiện ta có m < -5 là giá trị cần tìm

Chú ý : ***Nghiệm (x ; y) của hệ được gọi là âm nếu x < 0 và y < 0. Nghiệm dương, không âm, không dương của hệ cũng tương tự.***

e. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất thoả mãn x + y > 1

- ❖ Theo câu trên, phương trình có một nghiệm duy nhất khi $m \neq -5$ và $m \neq 7$.
- ❖ Khi đó nghiệm của hệ là : $x = \dfrac{24}{m+5}$, $y = \dfrac{12}{m+5}$

Hệ có nghiệm duy nhất thoả mãn x + y > 1

$$\Leftrightarrow \frac{24}{m+5} + \frac{12}{m+5} > 1 \Leftrightarrow \frac{36-m-5}{m+5} > 0 \Leftrightarrow \frac{31-m}{m+5} > 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 31-m>0 \\ m+5>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 31-m<0 \\ m+5<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m<31 \\ m>-5 \end{cases} \\ \begin{cases} m>31 \\ m<-5 \end{cases} \text{(vô nghiệm)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} m<31 \\ m>-5 \end{cases} \Leftrightarrow -5<m<31$$

Kết hợp với các điều kiện ta có $-5 < m < 31$ và $m \neq 7$ là giá trị cần tìm

f. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất thỏa mãn x + y = -1.

- ❖ Theo câu trên, phương trình có một nghiệm duy nhất khi $m \neq -5$ và $m \neq 7$.
- ❖ Khi đó nghiệm của hệ là : $x = \dfrac{24}{m+5}$, $y = \dfrac{12}{m+5}$

Hệ có nghiệm duy nhất thoả mãn x + y = -1

$$\Leftrightarrow \frac{24}{m+5} + \frac{12}{m+5} = -2 \Leftrightarrow \frac{36+2m+10}{m+5} = 0 \Leftrightarrow \frac{46+2m}{m+5} = 0 \Leftrightarrow 46+2m=0 \ (\text{do}\, m \neq -5) \Leftrightarrow m=-23$$

Kết hợp các điều kiện ta có m = - 23 là giá trị cần tìm

g. Tìm m nguyên để hệ có nghiêm duy nhất là nghiệm nguyên

❖ Theo câu trên, phương trình có một nghiệm duy nhất khi $m \neq -5$ và $m \neq 7$.

❖ Khi đó nghiệm của hệ là : $x = \dfrac{24}{m+5}$, $y = \dfrac{12}{m+5}$

Hệ có nghiêm duy nhất là nghiệm nguyên khi $\dfrac{24}{m+5}$ và $\dfrac{12}{m+5}$ là các số nguyên

Vì m nguyên nên m + 5 là ước của 24 và 12

$\Leftrightarrow m+5 \in \{-12;-6;-4;-3;-2;-1;1;2;3;4;6;12\}$

$\Leftrightarrow m \in \{-17;-11;-9;-8;-7;-6;-4;-3;-2;-1;1;7\}$

Kết hợp điều kiện ta có $m \in \{-17;-11;-9;-8;-7;-6;-4;-3;-2;-1;1\}$ là các giá trị cần tìm

h. Với (x ; y) là nghiệm duy nhất của hệ. Tìm đẳng thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào m.

Ta có $\begin{cases} 3x+(m-1)y=12 \\ (m-1)x+12y=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+my-y=12 \\ mx-x+12y=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} my=y-3x+12 \\ mx-x+12y=24 \end{cases} (\mathrm{I})$

Thay y = 0 vào hệ ta có : $\begin{cases} 3x=12 \\ (m-1)x=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ m=7 \end{cases}$

Thay m = 7 vào hệ ta được $\begin{cases} 3x+6y=12 \\ 6x+12y=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=4 \\ x+2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow x+2y=4$ (hệ vô số nghiệm)

Do đó nếu hệ có nghiệm duy nhất (x ; y) thì $y \neq 0$

$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} m=\dfrac{y-3x+12}{y} \\ mx-x+12=24 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{y-3x+12}{y}.x-x+12=24$

$\Leftrightarrow xy-3x^2+12x-xy+12y=24y \Leftrightarrow -3x^2+12x-12y=0 \Leftrightarrow x^2-4x+4y=0$

Vậy biểu thức cần tìm là $x^2 - 4x + 4y = 0$

<u>Bài tập tư làm</u>

<u>Bụi 1</u> Giải các hệ phương trình sau :

1) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=4 \\ xy+x+y=2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y+xy=-7 \\ x^2+y^2-3x-3y=16 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy+x+y=11 \\ x^2y+xy^2=30 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ 3(x+y)+2xy+9=0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2y+xy^2=30 \\ x^3+y^3=35 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6 \\ x^2y+xy^2=20 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=4 \\ x+y-\sqrt{xy}=4 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x^4+y^4=34 \\ x+y=2 \end{cases}$

<u>Đáp án</u>

1) (0;2); (2;0) 2) $(2;-3),(-3;2),(1+\sqrt{10};1-\sqrt{10}),(1-\sqrt{10};1+\sqrt{10})$ 3) $(1;5),(5;1),(2;3),(3;2)$

4) $(3;-2),(-2;3),(-2+\frac{\sqrt{10}}{2};-2-\frac{\sqrt{10}}{2}),(-2-\frac{\sqrt{10}}{2};-2+\frac{\sqrt{10}}{2})$ 5) $(2;3);(3;2)$ 6) $(1;4),(4;1)$

Bài 2 Giaỷi caực heọ phửụng trỡnh sau (đẳng cấp bậc hai):

1) $\begin{cases}3x^2+2xy+y^2=11\\x^2+2xy+5y^2=25\end{cases}$ 2) $\begin{cases}6x^2-xy-2y^2=56\\5x^2-xy-y^2=49\end{cases}$ 3) $\begin{cases}2x^3+3x^2y=5\\y^3+6xy^2=7\end{cases}$

Bài 3. Cho hệ phương trình:

$\begin{cases}x-2y=3-m\\2x+y=3(m+2)\end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi thay m = -1.

b) Gọi nghiệm của hệ phương trình là (x, y). Tìm m để x^2+y^2 đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 4. Cho hệ phương trình $\begin{cases}(a+1)x+y=4\\ax+y=2a\end{cases}$ (a là tham số).

a) Giải hệ khi a = 1.

b) Chứng minh rằng với mọi a hệ luôn có nghiệm duy nhất (x ; y) thoả mãn $x + y \ge 2$.

Bài 5 Tìm các giá trị của m và n để các hệ phương trình

a) $\begin{cases}2(m+1)x-7(n-2)y=6\\\frac{m+1}{6}x+\frac{n-2}{6}y=2\end{cases}$ có nghiệm (x ; y) = (1 ; 2)

b) $\begin{cases}(4m+1)x+8(n+2)y=11\\(3m+2)x+5(n+1)y=4\end{cases}$ có nghiệm (x ; y) = $(-1;3)$

Bài 6 Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases}\frac{2}{x-2}+\frac{2}{y-1}=2\\\frac{2}{x-2}-\frac{3}{y-1}=1\end{cases}$ b) $\begin{cases}3x^2+y^2=5\\x^2-3y^2=1\end{cases}$ c) $\begin{cases}\frac{3}{y-1}-\frac{1}{x+2}=\frac{3}{4}\\\frac{5}{y-1}+\frac{3}{x+2}=\frac{29}{12}\end{cases}$ d) $\begin{cases}\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}=\frac{2}{3}\\\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}=\frac{1}{3}\end{cases}$

e) $\begin{cases}x-y=-1\\y-z=-1\\z+x=8\end{cases}$ f) $\begin{cases}x+y=3\\y+z=6\\z+x=1\end{cases}$ g) $\begin{cases}(x-1)^2-(x+2)^2=9y\\(y-3)^2-(y+2)^2=5x\end{cases}$ h) $\begin{cases}(7+u)^2-(5+u)^2=6v\\(2-v)^2-(6-v)^2=4u\end{cases}$

Câu 7: ***(2.0 điểm)***

Cho hệ phương trình :

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{9-y}=m\\ \sqrt{y+1}+\sqrt{9-x}=m\end{cases}$$ (với m là tham số)

1) Giải hệ phương trình khi $m=2\sqrt{5}$.

2) Tìm m để hệ trên có nghiệm duy nhất.

câu III **2 điểm**	1) 1,0điểm	Thay $m=2\sqrt{5}$ ta được hệ pt : $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{9-y}=2\sqrt{5}\ (1)\\ \sqrt{y+1}+\sqrt{9-x}=2\sqrt{5}\ (2)\end{cases}$ Điều kiện : $-1\le x\le 9; -1\le y\le 9$. Giả sử hệ pt có nghiệm (x; y) Từ hệ pt trên $\Rightarrow\ \sqrt{x+1}+\sqrt{9-y}=\sqrt{y+1}+\sqrt{9-x}$ (3)	0.25
		Giả sử $x>y$ ta có $\sqrt{x+1}>\sqrt{y+1}$ và $\sqrt{9-y}>\sqrt{9-x}$ suy ra $\sqrt{x+1}+\sqrt{9-y}>\sqrt{y+1}+\sqrt{9-x}$ mâu thuẫn với (3) Tương tự x < y cũng suy ra mâu thuẫn . Vậy x = y	0.25
		Thay x = y vào pt (1) ta có : $\sqrt{x+1}+\sqrt{9-x}=2\sqrt{5}$ bình phương hai vế ta được $10+2\sqrt{(x+1)(9-x)}=20\Leftrightarrow\sqrt{(x+1)(9-x)}=5$	0.25
		$\Leftrightarrow x^2-8x+16=0\Leftrightarrow x=4$. Do đó x = y = 4. Hệ phương trình có một nghiệm : (x; y) = (4; 4)	0.25
	2) 1,0điểm	Theo cách chứng minh tương tự như trên ta chứng minh được : nếu hệ có nghiệm (x; y) thì x = y. Khi đó hệ phương trình đã cho $\Leftrightarrow$ (II)$\begin{cases}y=x\\ \sqrt{x+1}+\sqrt{9-x}=m\ (4)\end{cases}$	0.25
		Giả sử x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình (4) $\Rightarrow$ $\sqrt{x_0+1}+\sqrt{9-x_0}=m\Leftrightarrow\sqrt{(8-x_0)+1}+\sqrt{9-(8-x_0)}=m\Rightarrow 8-x_0$ cũng là nghiệm của pt (4) do tính duy nhất $\Rightarrow 8-x_0=x_0\Rightarrow x_0=4\Rightarrow m=2\sqrt{5}$	0.25
		Khi $m=2\sqrt{5}$ thay vào hệ (II) ta có $\begin{cases}y=x\\ \sqrt{x+1}+\sqrt{9-x}=2\sqrt{5}\end{cases}$	0.25
		Giải hệ phương trình trên ta được nghiệm duy nhất (x; y) = (4; 4). Vậy với $m=2\sqrt{5}$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.	0.25

III. GIẢI VÀ BIỆN LUẬN HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. Giải và biện luận hệ phương trình

Phương pháp giải:

Cách 1: Từ một phương trình của hệ tìm y theo x rồi thế vào phương trình thứ hai để được phương trình bậc nhất đối với x

- Giả sử phương trình bậc nhất đối với x có dạng: ax = b (1)
- Biện luận phương trình (1) ta sẽ có sự biện luận của hệ

i) Nếu a=0: (1) trở thành 0x = b

- Nếu b = 0 thì hệ có vô số nghiệm

- Nếu b $\neq$ 0 thì hệ vô nghiệm

ii) Nếu a $\neq 0$ thì (1) $\Rightarrow$ x = $\frac{b}{a}$, Thay vào biểu thức của x ta tìm y, lúc đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Cách 2: Dùng định thức để giải và biện luận hpt

Ví dụ 1: Giải và biện luận hệ phương trình: $\begin{cases} mx - y = 2m (1) \\ 4x - my = m + 6 (2) \end{cases}$

Từ (1) $\Rightarrow$ y = mx – 2m, thay vào (2) ta được:

4x – m(mx – 2m) = m + 6 $\Leftrightarrow$ (m^2 – 4)x = (2m + 3)(m – 2) (3)

Nếu m^2 – 4 $\neq$ 0 hay m $\neq \pm 2$ thì x = $\frac{(2m+3)(m-2)}{m^2-4} = \frac{2m+3}{m+2}$

Khi đó y = - $\frac{m}{m+2}$. Hệ có nghiệm duy nhất: ($\frac{2m+3}{m+2}$;-$\frac{m}{m+2}$)

ii) Nếu m = 2 thì (3) thỏa mãn với mọi x, khi đó y = mx -2m = 2x – 4

Hệ có vô số nghiệm (x, 2x-4) với mọi x $\in$ R

iii) Nếu m = -2 thì (3) trở thành 0x = 4 . Hệ vô nghiệm

Vậy: - Nếu m $\neq \pm 2$ thì hệ có nghiệm duy nhất: (x,y) = ($\frac{2m+3}{m+2}$;-$\frac{m}{m+2}$)

- Nếu m = 2 thì hệ có vô số nghiệm (x, 2x-4) với mọi x $\in$ R

- Nếu m = -2 thì hệ vô nghiệm

Bài tập: Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

1) $\begin{cases} mx + y = 3m - 1 \\ x + my = m + 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} mx + 4y = 10 - m \\ x + my = 4 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} (m-1)x - my = 3m - 1 \\ 2x - y = m + 5 \end{cases}$

2. Xác định giá trị của tham số để hệ có nghiệm thỏa mãn điều kiện cho trước

Phương pháp giải:

- Giải hệ phương trình theo tham số
- Viết x, y của hệ về dạng: n + $\frac{k}{f(m)}$ với n, k nguyên
- Tìm m nguyên để f(m) là ước của k

Ví dụ 1: Định m nguyên để hệ có nghiệm duy nhất là nghiệm nguyên:

$$\begin{cases} mx + 2y = m + 1 \\ 2x + my = 2m - 1 \end{cases}$$

HD Giải:

$\begin{cases} mx + 2y = m + 1 \\ 2x + my = 2m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2mx + 4y = 2m + 2 \\ 2mx + m^2 y = 2m^2 - m \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 - 4)y = 2m^2 - 3m - 2 = (m-2)(2m+1) \\ 2x + my = 2m - 1 \end{cases}$

để hệ có nghiệm duy nhất thì m^2 – 4 $\neq 0$ hay m $\neq \pm 2$

Vậy với m $\neq \pm 2$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} y = \dfrac{(m-2)(2m+1)}{m^2-4} = \dfrac{2m+1}{m+2} = 2 - \dfrac{3}{m+2} \\ x = \dfrac{m-1}{m+2} = 1 - \dfrac{3}{m+2} \end{cases}$$

Để x, y là những số nguyên thì m + 2 $\in$ Ư(3) = $\{1;-1;3;-3\}$

Vậy: m + 2 = ± 1, ± 3 => m = -1; -3; 1; -5

<u>VD 2:</u> Định m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x;y) thỏa mãn hệ thức cho trước

Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx + 4y = 9 \\ x + my = 8 \end{cases}$

Với giá trị nào của m để hệ có nghiệm (x ; y) thỏa mãn hệ thức:

$$2x + y + \frac{38}{m^2-4} = 3$$

<u>HD Giải:</u>

- Điều kiện để hệ phương trình có nghiệm duy nhất: m $\neq \pm 2$
- Giải hệ phương trình theo m

$$\begin{cases} mx + 4y = 9 \\ x + my = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx + 4y = 9 \\ mx + m^2 y = 8m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2-4)y = 8m - 9 \\ x + my = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{8m-9}{m^2-4} \\ x = \dfrac{9m-32}{m^2-4} \end{cases}$$

- Thay x = $\dfrac{9m-32}{m^2-4}$; y = $\dfrac{8m-9}{m^2-4}$ vào hệ thức đã cho ta được:

$$\mathbf{2.}\frac{9m-32}{m^2-4} + \frac{8m-9}{m^2-4} + \frac{38}{m^2-4} = 3$$

=> 18m – 64 +8m – 9 + 38 = 3m^2 – 12

$\Leftrightarrow$ 3m^2 – 26m + 23 = 0

$\Leftrightarrow$ $m_1 = 1$; $m_2 = \dfrac{23}{3}$ (cả hai giá trị của m đều thỏa mãn điều kiện)

Vậy m = 1 ; m = $\dfrac{23}{3}$

IV. BÀI TẬP VỀ NHÀ (Bài tập tổng hợp)

Bài 1:

Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + 4y = 10 - m \\ x + my = 4 \end{cases}$ (m là tham số)

a) Giải hệ phương trình khi m = $\sqrt{2}$

b) Giải và biện luận hệ phương trình theo m

c) Xác định các giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm duy nhất (x;y) sao cho x> 0, y > 0

d) Với giá trị nào của m thì hệ có nghiệm (x;y) với x, y là các số nguyên dương

Bài 2:

Cho hệ phương trình : $\begin{cases} (m-1)x - my = 3m - 1 \\ 2x - y = m + 5 \end{cases}$

a) Giải và biện luận hệ phương trình theo m

b) Với giá trị nguyên nào của m để hai đường thẳng của hệ cắt nhau tại một điểm nằm trong góc phần tư thứ IV của hệ tọa độ Oxy

c) Định m để hệ có nghiệm duy nhất (x ; y) sao cho $P = x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 3:

Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x - y = m \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi m = 5

b) Tìm m nguyên sao cho hệ có nghiệm (x; y) với x < 1, y < 1

c) Với giá trị nào của m thì ba đường thẳng

3x + 2y = 4; 2x – y = m; x + 2y = 3 đồng quy

Bài 4:

Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx + 4y = 9 \\ x + my = 8 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi m = 1

b) Với giá trị nào của m để hệ có nghiệm (-1 ; 3)

c) Với giá trị nào của m thì hệ có nghiệm duy nhất, vô nghiệm

Bài 5:

Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + my = 9 \\ mx - 3y = 4 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi m = 3

b) Với giá trị nào của m để hệ có nghiệm (-1 ; 3)

c) Chứng tỏ rằng hệ phương trình luôn luôn có nghiệm duy nhất với mọi m

d) Với giá trị nào của m để hệ có nghiệm (x ; y) thỏa mãn hệ thức:

$$x - 3y = \frac{28}{m^2 + 3} - 3$$

Bài 6:

Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \mathrm{mx} - \mathrm{y} = 2 \\ 3\mathrm{x} + \mathrm{my} = 5 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi $m = \sqrt{2}$.

b) Tìm giá trị của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm (x; y) thỏa mãn hệ thức $x + y = 1 - \frac{m^2}{m^2 + 3}$.

Bài 7:

Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x - my = -9 \\ mx + 2y = 16 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi m = 5

b) Chứng tỏ rằng hệ phương trình luôn luôn có nghiệm duy nhất với mọi m

c) Định m để hệ có nghiệm (x ; y) = (1,4 ; 6,6)

d) Tìm giá trị nguyên của m để hai đường thẳng của hệ cắt nhau tại một điểm nằm trong góc phần tư thứ IV trên mặt phẳng tọa độ Oxy

DẠNG V: PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

1. Phương pháp 1**: Sử dụng công thức của định nghĩa căn bậc hai số học**

$\sqrt{a} = x \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = a \end{cases}$

Ví dụ 1: **Giải phương trình** $\sqrt{3x+4} = x$

Giải

Ta có : $\sqrt{3x+4} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 3x+4 \end{cases}$

Giải x^2=3x+4 ta được x=-1 ; x=4. Đối chiếu với điều kiện $x \geq 0$ **thì nghiệm của phương trình là x=4**

2. Phương pháp 2: **Sử dụng hằng đẳng thức** $\sqrt{A^2} = |A|$ **để đưa phương trình vô tỷ về phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối .**

Ví dụ 2: **Giải phương trình :** $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}} = 4$ **(2)**

Giải :

Với điều kiện : $x \geq 4$ **ta có :**

(2) $\Leftrightarrow \sqrt{x-4+4\sqrt{x-4}+4} + \sqrt{x-4-4\sqrt{x-4}+4} = 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x-4}+2\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x-4}-2\right)^2} = 4$

$\Leftrightarrow \left|\sqrt{x-4}+2\right| + \left|\sqrt{x-4}-2\right| = 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-4}+2+\left|\sqrt{x-4}-2\right| = 4$ **vì** $\sqrt{x-4}+2 > 0 \ \forall x \geq 4$

* **Nếu** $\sqrt{x-4}-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 8$ **thì ta có :** $2\sqrt{x-4} = 4 \Leftrightarrow x = 8$ **(thoã mãn)**

* **Nếu** $\sqrt{x-4}-2 < 0 \Leftrightarrow x < 8$ **thì ta có :** $\sqrt{x-4}+2+2-\sqrt{x-4} = 4 \Leftrightarrow 4 = 4$**. Vậy phương trình có vô số nghiệm x thoã mãn** $4 \leq x \leq 8$

Chú ý: HS có thể sai lầm khi kết luận nghiệm

3. Phương pháp 3: **Bình phương hai vế của phương trình vô tỷ đã cho để có phương trình hữu tỷ .**

Ví dụ 3: **Giải phương trình :** $\sqrt{2x+5} - \sqrt{3x-5} = 2$ **(3)**

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} 2x+5 \geq 0 \\ 3x-5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{5}{2} \\ x \geq \dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \dfrac{5}{3}$

Ta có (3) <=> $\sqrt{2x+5} = \sqrt{3x-5}+2$ **(3')**

Hai vế của (3') không âm, bình phương hai vế của (3') ta được:

2x+5 =3x-5 + $4\sqrt{3x-5}+4$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{3x-5} = 6-x$ **(3'')**

Với ĐK: $6-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 6$**. Hai vế của(3'') không âm nên ta bình phương hai vế của (3'') ta được: 16(3x-5) =36+x^2 -12x**

$\Leftrightarrow x^2 - 60x+116=0 \Leftrightarrow$ x=2 ; x=58.

Đối chiếu với các điều kiện $x \geq \frac{5}{3}$ **và** $x \leq 6$ **thì nghiệm của phương trình là : x=2**

Chú ý: **ở cách giải này nếu không đặt điều kiện cho hai vế của phương trình đều không âm thì sẽ dễ mắc sai lầm, bởi có sự xuất hiện của nghiệm ngoại lai. Thật vậy ở trong ví dụ này nếu cho điều kiện** $x \geq \frac{5}{3}$ **rồi bình phương hai vế của (3) thì ta sẽ được 2x+5 +3x-5-**

2 $\sqrt{(2x+5)(3x-5)} = 4 \quad \Leftrightarrow 2\sqrt{(2x+5)(3x-5)} = 5x-4$ **(3''')**

Bình phương hai vế của phương trình (3''') ta được : x^2 - 60x+116 =0 <=> x=2 ; x=58.

Đối chiếu với các điều kiện $x \geq \frac{5}{3}$ **thì phương trình có hai nghiệm x=2 ; x=58.Mà khi thử lại ta thấy x=2 là nghiệm.**

<u>Bài toán 7:</u> Giải phương trình: $\sqrt{x(x-2)} + \sqrt{x(x-5)} = \sqrt{x(x+3)}$ (1)

Điều kiện để phương trình có nghĩa là : $-3 < x < 0 \quad ; 0 < x < 5$. Bình phương hai vế của phương trình (1) ta được: $x(x-2) + x(x-5) + 2\sqrt{x^2(x-2)(x-5)} = x(x+3)$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2(x-2)(x-5)} = 10x - x^2 \Leftrightarrow 4x^2(x-2)(x-5) = (10x-x^2)^2$

$\Leftrightarrow 4x^2(x-2)(x-5) = 100x^2 - 20x^3 + x^4 \Leftrightarrow 4x^2(x^2-7x+10) = 100x^2 - 20x^3 + x \Leftrightarrow 3x^4 - 8x^3 - 60x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(3x^2-8x-60) = 0$. Giải phương trình này được $x \in \left\{-\frac{10}{3}; 0; 6\right\}$. Thử lai chỉ có hai nghiệm x = 0; x = 6 thoả mãn đề cho.

4. Phương pháp 4: **Phân tích thành nhân tử để xuất hiện những phương trình vô tỷ đơn giản hơn.**

Ví dụ 4: **Giải phương trình :** $\sqrt{(x+1)(x-3)} + \sqrt{x+2} = \sqrt{(x+1)(x+2)} + \sqrt{x-3}$ **(4)**

<u>Giải</u>

Ta có (4) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x-3} + \sqrt{x+2} = \sqrt{x^2+3x+2} + \sqrt{x-3}$ **(4')**

Với điều kiện : $x \geq 3$ **ta có :**

(4') $\Leftrightarrow \sqrt{x+1}.\sqrt{x-3} + \sqrt{x+2} = \sqrt{x+1}.\sqrt{x+2} + \sqrt{x-3}$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-3}) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1} - 1 = 0 \\ \sqrt{x+2} - \sqrt{x-3} = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1} = 1 \\ \sqrt{x+2} = \sqrt{x-3} \end{array}\right.$

(loại)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 < 3 \\ 2 = 3 \end{cases}$ **(vô lý)**

vậy phương trình đã cho vô nghiệm

<u>Bài toán 6:</u> Giải phương trình: $\sqrt{\dfrac{42}{5-x}}+\sqrt{\dfrac{60}{7-x}}=6$ (1)

Phương trình (1) có nghĩa khi x < 5 nên $(1) \Leftrightarrow \left(3-\sqrt{\dfrac{42}{5-x}}\right)+\left(3-\sqrt{\dfrac{60}{7-x}}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(3-\sqrt{\frac{42}{5-x}}\right)\left(3+\sqrt{\frac{42}{5-x}}\right)}{\left(3+\sqrt{\frac{42}{5-x}}\right)}+\frac{\left(3-\sqrt{\frac{60}{7-x}}\right)\left(3+\sqrt{\frac{60}{7-x}}\right)}{\left(3+\sqrt{\frac{60}{7-x}}\right)}=0 \Leftrightarrow \frac{9-\frac{42}{5-x}}{\left(3+\sqrt{\frac{42}{5-x}}\right)}+\frac{9-\frac{60}{7-x}}{\left(3+\sqrt{\frac{60}{7-x}}\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9(5-x)-42}{(5-x)\left(3+\sqrt{\frac{42}{5-x}}\right)}+\frac{9(7-x)-60}{(7-x)\left(3+\sqrt{\frac{60}{7-x}}\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow 3(1-3x)\left[\frac{1}{(5-x)\left(3+\sqrt{\frac{42}{5-x}}\right)}+\frac{1}{(7-x)\left(3+\sqrt{\frac{60}{7-x}}\right)}\right]=0 \Leftrightarrow 3(1-3x)=0$$ vì

$\dfrac{1}{(5-x)\left(3+\sqrt{\frac{42}{5-x}}\right)}+\dfrac{1}{(7-x)\left(3+\sqrt{\frac{60}{7-x}}\right)}>0$ nên $x=\dfrac{1}{3}$. Thử lại đúng nên nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{1}{3}$.

<u>Bài toán 17</u>: Giải phương trình $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2+2x-3}$.

Điều kiện của phương trình: $x \geq 2$

Ta có $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2+2x-3} \Leftrightarrow \sqrt{x-1}.\sqrt{x-2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}.\sqrt{x+3}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}\right)-\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}\right)=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}\right)\left(\sqrt{x-1}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}\right)$ hoặc $\sqrt{x-1}-1=0 \Leftrightarrow x-2=x-3$ hoặc $x-1=1 \Leftrightarrow 0x=-1$ hoặc $x=2$. $\Leftrightarrow x=2$ là một nghiệm của phương trình.

5. Phương pháp 5: **Đặt ẩn phụ.**

a) *Đặt ẩn phụ để có phương trình bậc hai*

Ví dụ 5 **: Giải phương trình : $3x^2+6x+20=\sqrt{x^2+2x+8}$ (5)**

<u>Giải</u>

Ta có (5) <=> $3(x^2+2x+8)-4=\sqrt{x^2+2x+8}$

Vì $x^2+2x+8=(x+1)^2+7$ => TXĐ : Mọi x

Đặt t=$\sqrt{x^2+2x+8}$ **=> t** $\ge\sqrt{7}$**. Khi đó ta có : $3t^2-4=t$**

$\Leftrightarrow 3t^2-t-4=0\Leftrightarrow$ **t = -1** $<\sqrt{7}$ **loại**

t=$\frac{4}{3}=\sqrt{\frac{16}{9}}<\sqrt{\frac{63}{9}}=\sqrt{7}$ **loại**

b) ***Đặt ẩn phụ để có phương trình hữu tỷ bậc cao***

Ví dụ 6 **: Giải phương trình** $x^2+x+12\sqrt{x+1}=36$

<u>*Giải*</u>

ĐK : x+1>0 <=> $x\ge -1$

Đặt $\sqrt{x+1}=t\Rightarrow t\ge 0$ **=> $x+1=t^2$ => $x=t^2-1$ => $x^2=t^4-2t^2+1$.**

Khi đó ta có : $t^4-2t^2+1+t^2-1+12t-36=0$

$\Leftrightarrow t^4-t^2+12t-36=0$

$\Leftrightarrow t^4-2t^3+2t^3-4t^2+3t^2-6t=18t-36=0$

$\Leftrightarrow t^3(t-2)+2t^2(t-2)+3t(t-2)+18(t-2)=0$

$\Leftrightarrow (t-2)(t^3+2t^2+3t+18)=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}t=2\\ t^3+2t^2+3t+18=0\end{cases}$ **vụ nghiệm vỡ** $t\ge 0\Rightarrow t^3+2t^2+3t+18\ge 18>0$

<=> t=2 => x+1=4 => x=3>-1. Vậy nghiệm của phương trình là x=3

c) ***Đặt ẩn phụ để có hệ phương trình hữu tỷ đơn giản***

Ví dụ 7: **Giải phương trình** $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2$

<u>*Giải*</u>

Điều kiện: $x\ge 6$

Đặt a=$\sqrt{x+6}$ **; b=**$\sqrt{x-6}$ **(a, b không âm) . Từ đó ta có hệ:**

$\begin{cases}a-b=2\\ a^2-b^2=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=2\\ a+b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\ b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x+2}=3\\ \sqrt{x-6}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2=9\\ x-6=1\end{cases}\Leftrightarrow x=7$ **(TMĐK) nên là nghiệm của phương trình**

Ví dụ 8: **Giải phương trình :** $\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x-3}=\sqrt[3]{2}$

<u>*Giải*</u>

Đặt a =$\sqrt[3]{x-1}$ **; b =** $\sqrt[3]{x-3}$**. Từ đó ta có hệ:**

$\begin{cases}a-b=\sqrt[3]{2}\\ a^3-b^3=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=\sqrt[3]{2}\\ a^2+ab+b^2=\sqrt[3]{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=\sqrt[3]{2}\\ (a-b)^2+3ab=\sqrt[3]{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=\sqrt[3]{2}\\ ab=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\ b=-\sqrt[3]{2}\end{cases}$ **hoặc** $\begin{cases}a=\sqrt[3]{2}\\ b=0\end{cases}$

Nếu a=0; b=-$\sqrt[3]{2}$ **=> x=1**

a=$\sqrt[3]{2}$ **; b=0 =>x=3**

Vậy phương trình có hai nghiệm : x=1 ; x=3

<u>*Bài toán 5:*</u> Giải phương trình: $5\sqrt{1+x^3}=2(x^2+2)$ (1)

Giải:

Điều kiện $1+x^3\ge 0\Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-x+1\right)\ge 0$ Do $x^2-x+1\ge 0$ với mọi x nên $x+1\ge 0\Leftrightarrow x\ge -1$

Đặt $a=\sqrt{x+1}$; $b=\sqrt{x^2-x+1}$ với $a\ge 0; b>0$. Nên phương trình (1) trở thành :

$5ab=2\left(a^2+b^2\right)\Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b}\right)^2-5\left(\frac{a}{b}\right)+2=0.$ Giải phương trình này được $\frac{a}{b}=2$ hoặc $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$

Với $\frac{a}{b}=2$ thì phương trình (1) vô nghiệm

Với $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$ thì $2\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-x+1}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x^2-5x-3=0 \end{cases}$. Phương trình có hai nghiệm thoả điều kiện $x_1=\frac{5-\sqrt{37}}{2}$; $x_2=\frac{5+\sqrt{37}}{2}$.

__Bài toán 8:__ Giải phương trình: $\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+7x+10}\right)=3$ (1)

Đặt $a=\sqrt{x+2}\Rightarrow a^2=x+2$; $b=\sqrt{x+5}\Rightarrow b^2=x+5$ nên $b^2-a^2=x+5-x-2=3$ .Do đó phương trình (1) trở thành: $\begin{cases} b^2-a^2=3 \\ (b-a)(1+ab)=3 \end{cases}$ (*)

Từ hệ (*) suy ra $b^2-a^2=(b-a)(1+ab)\Leftrightarrow (b-a)(a+b-ab-1)=0$

$\left[\begin{array}{l} b-a=0 \\ a+b-ab-1=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ (a-1)(b-1)=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow a=b=1$ khi đó ta cũng có x = -1.

__Cách giải khác__:

Điều kiện x > -2 và $x^2+7x+10=(x+2)(x+5)$. Nhân hai vế của phương trình (1) với $\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+5}\right)$ ta được: $\left[(x+2)-(x+5)\right]\left(1+\sqrt{(x+2)(x+5)}\right)=3\ \left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+5}\right)$

$\Leftrightarrow 3\left(1+\sqrt{(x+2)(x+5)}\right)=3\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+5}\right)\Leftrightarrow \sqrt{x+2}+\sqrt{x+5}-\sqrt{(x+2)(x+5)}-1=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+5}\left(1-\sqrt{x+2}\right)-\left(1-\sqrt{x+2}\right)=0\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+5}-1\right)\left(1-\sqrt{x+2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+5}-1=0 \\ 1-\sqrt{x+2}=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+5=1 \\ x+2=1 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=-1 \end{array}\right.$ Do x > -2 nên x = -4 (loại). Vậy nghiệm của phương trình x = -1.

__Bài toán 9:__ Giải phương trình: $\sqrt{25-x^2}-\sqrt{10-x^2}=3$ (1)

Giải: Điều kiện $\begin{cases} 25-x^2\ge 0 \\ 10-x^2\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x^2\le 25 \\ x^2\le 10 \end{cases}\Leftrightarrow x^2\le 10\Leftrightarrow -\sqrt{10}\le x\le \sqrt{10}$ (*).

Đặt $0<a=\sqrt{25-x^2}$; $\sqrt{10-x^2}=b>0\Rightarrow a^2-b^2=25-x^2-10+x^2=15$. Nên phương trình (1) trở thành $\begin{cases} a-b=3 \\ a^2-b^2=15 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=3 \\ a+b=5 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases}$

Nếu b = 1 thì $10-x^2=1\Leftrightarrow x^2=9\Leftrightarrow x=\pm 3$ so với điều kiên (*) $x=\pm 3$ thoả

Nếu a = 4 thì $25-x^2=16\Leftrightarrow x^2=9\Leftrightarrow x=\pm 3$ so với điều kiên (*) $x=\pm 3$ thoả.

Vậy phương trình có nghiệm là $x=\pm 3$.

Bài toán 10: Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{5x}$ (*)

Lập phương hai vế của phương trình (*) ta được:

$5x=x+1+x-1+3\sqrt[3]{(x+1)(x-1)}\left[\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}\right]\Leftrightarrow 5x=2x+3\sqrt[3]{x^2-1}.\sqrt[3]{5x}$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2-1}.\sqrt[3]{5x}=x\Leftrightarrow x^3=5x\left(x^2-1\right)\Leftrightarrow 4x^3-5x=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$. Thử lại ta thấy phương trinh có đúng ba nghiệm trên.

Bài toán 11: Giải phương trình $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2$ (1)

Điều kiện: $x\ge 0$. Đặt $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}=a$; $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=b$ $\Rightarrow a^3=1+\sqrt{x}$; $\Rightarrow b^3=1-\sqrt{x}$ nên phương trình (1) trở thành

$\begin{cases}a+b=2\\a^3+b^3=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=2\\(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=2\\a^2-ab+b^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2-b\\(2-b)^2-b(2-b)+b^2-1=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=2-b\\4-4b+b^2-2b+b^2+b^2-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2-b\\b^2-2b+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2-b\\(b-1)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow a=b=1$

Nếu a = 1 thì $1+\sqrt{x}=1\Leftrightarrow\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0$

Nếu b = 1 thì $1-\sqrt{x}=1\Leftrightarrow\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0$.

Vậy x = 0 là một nghiệm của phương trình.

Bài toán 12: Giải phương trình $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1$ (1)

Giải: TXĐ $x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$. Đặt $\sqrt[3]{2-x}=a$; $\sqrt{x-1}=b\ge 0$. Nên phương trình đã cho trở thành: $\begin{cases}a+b=1\\a^3+b^3=1\end{cases}$ $\begin{cases}a+b=1\\a^3+b^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1-b\\(1-b)^3+b^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1-b\\1-3b^2+3b-b^3+b^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1-b\\b\left(b^2-4b+3\right)=0\end{cases}$

Nên $b\in\{0;1;3\}$ Do đó $(a;b)=\{(1;0);(0;1);(-2;3)\}$

Nếu $a=0$ thì $\sqrt[3]{2-x}=0\Leftrightarrow 2-x=0\Leftrightarrow x=2$; $b=1$ thì $\sqrt{x-1}=1\Leftrightarrow x-1=1\Leftrightarrow x=2$

Nếu $a=1$ thì $\sqrt[3]{2-x}=1\Leftrightarrow 2-x=1\Leftrightarrow x=1$; $b=0$ thì $\sqrt{x-1}=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$

Nếu $a=-2$ thì $\sqrt[3]{2-x}=-2\Leftrightarrow 2-x=-8\Leftrightarrow x=10$; $b=3$ thì $\sqrt{x-1}=3\Leftrightarrow x-1=9\Leftrightarrow x=10$

Vậy phương trình có ba nghiệm là $x\in\{1;2;10\}$

Bài toán 14: Giải phương trình : $\sqrt[3]{3x^2-x+2001}-\sqrt[3]{3x^2-7x+2002}-\sqrt[3]{6x-2003}=\sqrt[3]{2002}$.

Giải: Đặt : $\sqrt[3]{3x^2-x+2001}=a\Rightarrow a^3=3x^2-x+2001$

$-\sqrt[3]{3x^2-7x+2002}=b\Rightarrow b^3=-3x^2+7x-2002$

$-\sqrt[3]{6x-2003}=c\Rightarrow c^3=-6x+2003$

Suy ra $a^3+b^3+c^3=2002$. Do đó phương trình đã cho sẽ là $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3$ nên $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)=0$ Khai triển và thu gọn được: $3(a+b)(b+c)(c+a)=0$.

- Nếu $a+b=0\Leftrightarrow\sqrt[3]{3x^2-x+2001}=\sqrt[3]{3x^2-7x+2002}\Leftrightarrow 3x^2-x+2001=3x^2-7x+2002$

$\Leftrightarrow 6x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$

- Nếu $b + c = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{3x^2 - 7x + 2002} = -\sqrt[3]{6x - 2003} \Leftrightarrow 3x^2 - 7x + 2002 = -6x + 2003$

$\Leftrightarrow 3x^2 - x - 1 = 0$. Phương trình này có nghiệm $x \in \left\{\frac{1+\sqrt{13}}{6}; \frac{1-\sqrt{13}}{6}\right\}$

- Nếu $a + c = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{3x^2 - x + 2001} = \sqrt[3]{6x - 2003} \Leftrightarrow 3x^2 - x + 2001 = 6x - 2003$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 7x + 4004 = 0$. Phương trình này vô nghiệm

Vậy phương trình có ba nghiệm $x \in \left\{\frac{1}{6}; \frac{1+\sqrt{13}}{6}; \frac{1-\sqrt{13}}{6}\right\}$.

<u>Bài toán 16:</u> Giải phương trình: $x^2 - x - 1000\sqrt{1 + 8000x} = 1000$

Giải: Đặt $\sqrt{1+8000x} + 1 = 2y \Rightarrow \sqrt{1+8000x} = 2y - 1 \Rightarrow 1 + 8000x = 4y^2 - 4y + 1 \Rightarrow 4y^2 - 4y = 8000x$

$\Rightarrow y^2 - y = 2000x$. Do đó phương trình đã cho trở thành hệ phương trình:

$\begin{cases} x^2 - x = 2000y \\ y^2 - y = 2000x \end{cases}$ (1).Từ hệ phương trình (1) ta suy ra

$x^2 - x - y^2 + y = 2000(y - x) \Leftrightarrow (x-y)(x+y) - (x-y) + 2000(x-y) = 0$ (2)

$\Leftrightarrow (x-y)(x+y-1+2000) = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y+1999) = 0$

Từ hệ phương trình (1)

suy ra: $x^2 + y^2 - (x+y) = 2000(x+y) \Rightarrow 2001(x+y) = x^2 + y^2 > 0 \Rightarrow x + y > 0$.

Nên $x + y + 1999 > 0$ .Do đó từ (2) suy ra $x - y = 0$ hay x = y. Thay vào hệ (1) ta được

$x^2 - x = 2000x \Rightarrow x(x - 2001) = 0 \Rightarrow x = 0$ hoặc $x = 2001$. Nhưng x = 0 không là nghiệm của phương trình nên phương trình có nghiệm là x = 2001.

<u>Bài toán 30:</u> Tìm x, y, z biết $\sqrt{x-y+z} = \sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z}$.

Điều kiện: $x; y; z \ge 0$; $x - y + z \ge 0$. Đặt $x = a^2$; $y = b^2$; $z = c^2$. Do a.b.c ≥ 0 nên ta có

$\sqrt{a^2 - b^2 + c^2} = a - b + c \Leftrightarrow a^2 - b^2 + c^2 = (a-b+c)^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$

$\Leftrightarrow -2b^2 + 2ab - 2ac + 2bc = 0 \Leftrightarrow 2b(a-b) - 2c(a-b) = 0 \Leftrightarrow 2(a-b)(b-c) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a - b = 0 \\ b - c = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ b = c \end{array}\right.$ Do đó x = y và z tuỳ ý ; y = z và x tuỳ ý

<u>Hoặc cách giải khác:</u>

$\sqrt{x-y+z} = \sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z} \Rightarrow \sqrt{x-y+z} + \sqrt{y} = \sqrt{x} + \sqrt{z} \Rightarrow x - y + z + y + 2\sqrt{y(x-y+x)} = x + z + 2\sqrt{xz}$

$\Rightarrow \sqrt{y(x-y+z)} = \sqrt{xz} \Rightarrow y(x-y+z) = xz \Rightarrow y(x-y) + yz - xz = 0$

$\Rightarrow y(x-y) - z(x-y) = 0 \Rightarrow (x-y)(y-z) = 0$ Do đó x = y và z tuỳ ý hoặc y = z và x tuỳ ý

6. Phương pháp 6: **Nhẩm nghiệm và chứng minh đó là nghiệm duy nhất.**

Ví dụ 9: **Giải phương trình :** $\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x-2)}=2\sqrt{x(x-3)}$ **(9)**

Giải

Ta thấy với x=0 thì giá trị vế trái=$\sqrt{0(0-1)}+\sqrt{0(0-2)}=0$ **.**

Giá trị vế phải =$\sqrt{2(0-3)}=0$ **=> x=0 là nghiệm**

Giả sử phương trình có nghiệm x>0. Tiến hành chia hai vế của (9) cho $\sqrt{x}$ **ta có**

$\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}=2\sqrt{x-3}$ **(9')**

Mà $\sqrt{(x-1)}>\sqrt{(x-3)}\Rightarrow\sqrt{x-2}>\sqrt{x-3}\Rightarrow\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}>2\sqrt{x-3}\Rightarrow$ **(9') vô nghiệm=> phương trình (9) không có nghiệm x>0**

Giả sử phương trình có nghiệm x<0. Tiến hành chia hai vế của (9) cho $\sqrt{-x}$ **ta có**

$\sqrt{1-x}+\sqrt{2-x}=2\sqrt{3-x}$ **(9'')**

Mà $\sqrt{1-x}<\sqrt{3-x}$ **=>** $\sqrt{2-x}<\sqrt{3-x}\Rightarrow\sqrt{1-x}+\sqrt{2-x}<2\sqrt{3-x}\Rightarrow$ **(9'') vô nghiệm => phương trình (9) không có nghiệm x<0**

Vậy x=0 là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho

<u>*Bài toán 13*</u>:Giải phương trình $\sqrt{\frac{1-x}{x}}=\frac{2x+x^2}{1+x^2}$ (*)

Giải: Điều kiện để phương trình có nghĩa là $x\neq 0$ và $\frac{1-x}{x}\geq 0$ hay $0<x\leq 1$

$(*)\Leftrightarrow\sqrt{\frac{1-x}{x}}=1+\frac{2x-1}{1+x^2}$. Thử thấy $x=\frac{1}{2}$ là một nghiệm của phương trình (*)

Với $0<x<\frac{1}{2}$ thì $1-x>x>0$ và $2x-1<0$ .Suy ra $\sqrt{\frac{1-x}{x}}>1>1+\frac{2x-1}{1+x^2}$

Với $\frac{1}{2}<x\leq 1$ thì $0\leq 1-x<x$ và $2x-1>0$ .Suy ra $\sqrt{\frac{1-x}{x}}<1<1+\frac{2x-1}{1+x^2}$

Vậy x = $\frac{1}{2}$ là nghiệm của phương trình.

7. Phương pháp 7:**Sử dụng bất đẳng thức.**

a) Chứng tỏ tập giá trị của hai vế không giao nhau, khi đó phương trình vô nghiệm

Ví dụ 10: **Giải phương trình :** $\sqrt{x}-\sqrt{x+1}=\sqrt{x-3}$

Giải

ĐK : $\begin{cases}x\geq 0\\ x+1\geq 0\\ x-3\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\geq 3$

Khi đó ta có : $\sqrt{x}<\sqrt{x+1}$ **=> giá trị của vế trái nhận giá trị âm. Mà** $\sqrt{x-3}\geq 0$**=> giá trị vế phải lại không âm. Do đó phương trình đã cho vô nghiệm**

b) Chứng tỏ tập giá trị của hai vế không giao nhau tại cùng một giá trị. Khi đó phương trình có nghiệm tại chính giá trị đó của ẩn.

Ví dụ 11: **Giải phương trình :** $\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{3x^2+6x+7}=2-2x-x^2$

Giải

Ta có : $\sqrt{x^2+2x+2}=\sqrt{(x+1)^2+1}\geq\sqrt{1}$**. Dấu "=" xảy ra** $\Leftrightarrow$ **x=-1**

$\sqrt{3x+6x+7}=\sqrt{3(x+1)^2+4}\geq\sqrt{4}$**. Dấu "=" xảy ra** $\Leftrightarrow$ **x=-1**

=> Giá trị vế trái $\geq\sqrt{1}+\sqrt{4}=3$**.Dấu "=" xảy ra** $\Leftrightarrow$ **x=-1**

Mà 2- 2x- x^2 **=-(**x^2 **+2x+1)+3=- (x+1)**^{2} **+3** ≤ -3**. Dấu "=" xảy ra** $\Leftrightarrow$ **x=-1**

Vì thế x=-1 là nghiệm của phương trình đã cho

c) Sử dụng dấu bằng xảy ra trong bất đẳng thức:

Ví dụ 12: **Giải phương trình :** $\frac{4}{\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-2}=4$

Giải

ĐK: x>2 . Ta có $\frac{4}{\sqrt{x-2}}>0$; $\sqrt{x-2}>0$**. áp dụng bất đẳng thức cô-sy cho hai số không âm ta có:**

$$\frac{4}{\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-2}\geq 2.\sqrt{\frac{4}{\sqrt{x-2}}\sqrt{x-2}}=4$$

áp dụng a+b$\geq 2\sqrt{ab}$ $\quad\forall a,b\geq 0$**. Dấu "=" xảy ra** $\Leftrightarrow$ **a=b**

Ta có $\frac{4}{\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-2}$ **=4**

$$\Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x-2}}=\sqrt{x-2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2}=4$$

=> $\frac{4}{\sqrt{x-2}}=\sqrt{x-2}\Leftrightarrow\frac{4}{\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-2}\geq 2.\sqrt{\frac{4}{\sqrt{x-2}}.\sqrt{x-2}}=4$

$$\frac{4}{\sqrt{x-2}}=\sqrt{x-2}\Leftrightarrow\frac{4}{\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-2}=4$$

$\sqrt{(x-2)^2}=4\Leftrightarrow x=6>2$ **(TM). Vậy nghiệm của phương trình là x=6**

Bài toán 1: Giải phương trình $\sqrt{x-2}+\sqrt{10-x}=x^2-12x+40$

Bổ đề : Với $a\geq 0;b\geq 0$ $a+b=\sqrt{(a+b)^2}\leq\sqrt{(a+b)^2+(a-b)^2}\Rightarrow a+b\leq\sqrt{2(a^2+b^2)}$

Giải: Điều kiện : $2\leq x\leq 10$, Ta có $\sqrt{x-2}+\sqrt{10-x}\leq\sqrt{2(x-2+10-x)}=4$ mà

$x^2-12x+40=(x^2-12x+36)+4=(x-6)^2+4\geq 4$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$\begin{cases}x-2=10-x\\x-6=0\end{cases}\Leftrightarrow x=6$. Vậy phương trình có nghiệm x = 6

Hoặc: Áp dung bất đẳng thức Cô si cho hai số không âm ta có

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{10-x}=\frac{\sqrt{(x-2).4}}{2}+\frac{\sqrt{(10-x).4}}{2}\leq\frac{x-2+4}{4}+\frac{10-x+4}{4}=4.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x-2=4\\10-x=4\end{cases}\Leftrightarrow x=6$.

Bài toán 2: Giải phương trình: $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-x^2+1}=x^2-x+2$

Vì $x^2+x-1\ge 0$ và $x-x^2+1\ge 0$ nên Áp dụng bất đẳng thức Cô si mỗi số hạng của vế trái ta được: $\sqrt{\left(x^2+x-1\right).1}\le \frac{x^2+x-1+1}{2}=\frac{x^2+x}{2}$ (1)

$\sqrt{\left(x-x^2+1\right).1}\le \frac{x-x^2+1+1}{2}=\frac{x-x^2+2}{2}$ (2)

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta có: $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-x^2+1}\le \frac{x^2+x}{2}+\frac{x-x^2+2}{2}=x+1$ nên theo đề ta có : $x^2-x+2\le x+1\Rightarrow (x-1)^2\le 0$. Đẳng thức xảy ra khi x = 1 . Thử lại ta thấy x = 1 thoả m·n. Vậy phương trình có nghiệm là x = 1.

Bài toán 3: Giải phương trình: $\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}=3x^2-12x+14$ (1)

Điều kiện tồn tại phương trình: $\begin{cases}2x-3\ge 0\\5-2x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge \frac{3}{2}\\x\le \frac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow \frac{3}{2}\le x\le \frac{5}{2}$ (*)

Vế phải của (1): $3x^2-12x+14=3\left(x^2-4x+4\right)+2=3(x-2)^2+2\ge 2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x = 2.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki thoả mãn (*) thì vế trái của phương trình (1): $\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}\le\sqrt{\left(1^2+1^2\right)(2x-3+5-2x)}=\sqrt{4}=2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2x-3=5-2x\Leftrightarrow x=2$. Đẳng thức xảy ra ở phương trình (1) là 2 nên x = 2 là nghiệm của phương trình.

Hoặc Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho hai số không âm ta có: $\sqrt{(2x-3).1}+\sqrt{(5-2x).1}\le\frac{2x-3+1}{2}+\frac{5-2x+1}{2}=2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}2x-3=1\\5-2x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=2$. Đẳng thức xảy ra ở phương trình (1) là 2 nên x = 2 là nghiệm của phương trình.

Bài toán 4: Giải phương trình: $x^2-2x+3=\sqrt{2x^2-x}+\sqrt{1+3x-3x^2}$. (1)

Giải: Điều kiện $\begin{cases}2x^2-x\ge 0\\1+3x-3x^2\ge 0\end{cases}$ (2).

Vế trái của phương trình (1): $x^2-2x+3=(x-1)^2+2\ge 2$ với mọi $x\in ℝ$. đẳng thức xảy ra khi x = 1. Theo bất đẳng thức Bunhiacôpxki với mọi x thoả mãn (2) thì vế phải của phương trình (1) thoả:

$\sqrt{2x^2-x}+\sqrt{1+3x-3x^2}<\sqrt{\left(1^2+1^2\right)\left(2x^2-x+1+3x-3x^2\right)}=\sqrt{2+4x-2x^2}=\sqrt{4-(x-1)^2}\le 2$. đẳng thức xảy ra khi $2x^2-x=1+3x-3x^2$. Để đẳng thức xảy ra ở phương trình (1) thì cả hai vế của phương trình (1) đều bằng 2. Nên x = 1. Thử lại thấy x = 1 là nghiệm của phương trình.

Bài toán 1: Giải phương trình $\sqrt{x-2}+\sqrt{10-x}=x^2-12x+40$

Bổ đề : Với $a\geq 0;b\geq 0$ $a+b=\sqrt{(a+b)^2}\leq\sqrt{(a+b)^2+(a-b)^2}\Rightarrow a+b\leq\sqrt{2(a^2+b^2)}$

Giải: Điều kiện : $2\leq x\leq 10$, Ta có $\sqrt{x-2}+\sqrt{10-x}\leq\sqrt{2(x-2+10-x)}=4$ mà $x^2-12x+40=(x^2-12x+36)+4=(x-6)^2+4\geq 4$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x-2=10-x\\x-6=0\end{cases}\Leftrightarrow x=6$. Vậy phương trình có nghiệm x = 6

Hoặc: Áp dung bất đẳng thức Cô si cho hai số không âm ta có

$\sqrt{x-2}+\sqrt{10-x}=\dfrac{\sqrt{(x-2).4}}{2}+\dfrac{\sqrt{(10-x).4}}{2}\leq\dfrac{x-2+4}{4}+\dfrac{10-x+4}{4}=4$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x-2=4\\10-x=4\end{cases}\Leftrightarrow x=6$.

Bài toán 2: Giải phương trình: $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-x^2+1}=x^2-x+2$

Vì $x^2+x-1\geq 0$ và $x-x^2+1\geq 0$ nên Áp dụng bất đẳng thức Cô si mỗi số hạng của vế trái ta được: $\sqrt{(x^2+x-1).1}\leq\dfrac{x^2+x-1+1}{2}=\dfrac{x^2+x}{2}$ (1)

$\sqrt{(x-x^2+1).1}\leq\dfrac{x-x^2+1+1}{2}=\dfrac{x-x^2+2}{2}$ (2)

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta có: $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-x^2+1}\leq\dfrac{x^2+x}{2}+\dfrac{x-x^2+2}{2}=x+1$ nên theo đề ta có : $x^2-x+2\leq x+1\Rightarrow(x-1)^2\leq 0$. Đẳng thức xảy ra khi x = 1 . Thử lại ta thấy x = 1 thoả m·n. Vậy phương trình có nghiệm là x = 1.

Bài toán 3: Giải phương trình: $\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}=3x^2-12x+14$ (1)

Điều kiện tồn tại phương trình: $\begin{cases}2x-3\geq 0\\5-2x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq\dfrac{3}{2}\\x\leq\dfrac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{3}{2}\leq x\leq\dfrac{5}{2}$ (*)

Vế phải của (1): $3x^2-12x+14=3(x^2-4x+4)+2=3(x-2)^2+2\geq 2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x = 2.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki thoả mãn (*) thì vế trái của phương trình (1):
$\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}\leq\sqrt{(1^2+1^2)(2x-3+5-2x)}=\sqrt{4}=2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2x-3=5-2x\Leftrightarrow x=2$. Đẳng thức xảy ra ở phương trình (1) là 2 nên x = 2 là nghiệm của phương trình.

Hoặc Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho hai số không âm ta có: $\sqrt{(2x-3).1}+\sqrt{(5-2x).1}\leq\dfrac{2x-3+1}{2}+\dfrac{5-2x+1}{2}=2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$\begin{cases} 2x-3=1 \\ 5-2x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$. Đẳng thức xảy ra ở phương trình (1) là 2 nên x = 2 là nghiệm của phương trình.

<u>Bài toán 4</u>: Giải phương trình: $x^2-2x+3=\sqrt{2x^2-x}+\sqrt{1+3x-3x^2}$. (1)

<u>Giải:</u> Điều kiện $\begin{cases} 2x^2-x \ge 0 \\ 1+3x-3x^2 \ge 0 \end{cases}$ (2).

Vế trái của phương trình (1): $x^2-2x+3=(x-1)^2+2 \ge 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. đẳng thức xảy ra khi x = 1. Theo bất đẳng thức Bunhiacôpxki với mọi x thoả mãn (2) thì vế phải của phương trình (1) thoả:

$\sqrt{2x^2-x}+\sqrt{1+3x-3x^2} < \sqrt{(1^2+1^2)(2x^2-x+1+3x-3x^2)} = \sqrt{2+4x-2x^2} = \sqrt{4-(x-1)^2} \le 2$. đẳng thức xảy ra khi $2x^2-x=1+3x-3x^2$. Để đẳng thức xảy ra ở phương trình (1) thì cả hai vế của phương trình (1) đều bằng 2. Nên x = 1. Thử lại thấy x = 1 là nghiệm của phương trình.

<u>Bài toán 5:</u> Giải phương trình: $5\sqrt{1+x^3}=2(x^2+2)$ (1)

Giải:

Điều kiện $1+x^3 \ge 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+1) \ge 0$ Do $x^2-x+1 \ge 0$ với mọi x nên $x+1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -1$

Đặt $a=\sqrt{x+1}$; $b=\sqrt{x^2-x+1}$ với $a \ge 0; b > 0$. Nên phương trình (1) trở thành :

$5ab=2(a^2+b^2) \Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b}\right)^2-5\left(\frac{a}{b}\right)+2=0.$ Giải phương trình này được $\frac{a}{b}=2$ hoặc $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$

Với $\frac{a}{b}=2$ thì phương trình (1) vô nghiệm

Với $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$ thì $2\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x^2-5x-3=0 \end{cases}$. Phương trình có hai nghiệm thoả điều kiện $x_1=\frac{5-\sqrt{37}}{2}$; $x_2=\frac{5+\sqrt{37}}{2}$.

<u>Bài toán 6:</u> Giải phương trình: $\sqrt{\frac{42}{5-x}}+\sqrt{\frac{60}{7-x}}=6$ (1)

Phương trình (1) có nghĩa khi x < 5 nên $(1) \Leftrightarrow \left(3-\sqrt{\frac{42}{5-x}}\right)+\left(3-\sqrt{\frac{60}{7-x}}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(3-\sqrt{\frac{42}{5-x}}\right)\left(3+\sqrt{\frac{42}{5-x}}\right)}{\left(3+\sqrt{\frac{42}{5-x}}\right)}+\frac{\left(3-\sqrt{\frac{60}{7-x}}\right)\left(3+\sqrt{\frac{60}{7-x}}\right)}{\left(3+\sqrt{\frac{60}{7-x}}\right)}=0 \Leftrightarrow \frac{9-\frac{42}{5-x}}{\left(3+\sqrt{\frac{42}{5-x}}\right)}+\frac{9-\frac{60}{7-x}}{\left(3+\sqrt{\frac{60}{7-x}}\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9(5-x)-42}{(5-x)\left(3+\sqrt{\frac{42}{5-x}}\right)}+\frac{9(7-x)-60}{(7-x)\left(3+\sqrt{\frac{60}{7-x}}\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow 3(1-3x)\left[\frac{1}{(5-x)\left(3+\sqrt{\frac{42}{5-x}}\right)}+\frac{1}{(7-x)\left(3+\sqrt{\frac{60}{7-x}}\right)}\right]=0 \Leftrightarrow 3(1-3x)=0$$ vì

$\frac{1}{(5-x)\left(3+\sqrt{\frac{42}{5-x}}\right)}+\frac{1}{(7-x)\left(3+\sqrt{\frac{60}{7-x}}\right)}>0$ nên $x=\frac{1}{3}$. Thử lại đúng nên nghiệm của phương trình là $x=\frac{1}{3}$.

<u>Bài toán 7:</u> Giải phương trình: $\sqrt{x(x-2)}+\sqrt{x(x-5)}=\sqrt{x(x+3)}$ (1)

Điều kiện để phương trình có nghĩa là : $-3<x<0 \quad ;0<x<5$. Bình phương hai vế của phương trình (1) ta được: $x(x-2)+x(x-5)+2\sqrt{x^2(x-2)(x-5)}=x(x+3)$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2(x-2)(x-5)}=10x-x^2 \Leftrightarrow 4x^2(x-2)(x-5)=\left(10x-x^2\right)^2$

$\Leftrightarrow 4x^2(x-2)(x-5)=100x^2-20x^3+x^4 \Leftrightarrow 4x^2\left(x^2-7x+10\right)=100x^2-20x^3+x \Leftrightarrow 3x^4-8x^3-60x^2=0$

$\Leftrightarrow x^2\left(3x^2-8x-60\right)=0$. Giải phương trình này được $x\in\left\{-\frac{10}{3};0;6\right\}$. Thử lai chỉ có hai nghiệm x = 0; x = 6 thoả mãn đề cho.

<u>Bài toán 8:</u> Giải phương trình: $\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+7x+10}\right)=3$ (1)

Điều kiện x > -2 và $x^2+7x+10=(x+2)(x+5)$. Nhân hai vế của phương trình (1) với $\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+5}\right)$ ta được: $\left[(x+2)-(x+5)\right]\left(1+\sqrt{(x+2)(x+5)}\right)=3\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+5}\right)$

$\Leftrightarrow 3\left(1+\sqrt{(x+2)(x+5)}\right)=3\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+5}\right) \Leftrightarrow \sqrt{x+2}+\sqrt{x+5}-\sqrt{(x+2)(x+5)}-1=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+5}\left(1-\sqrt{x+2}\right)-\left(1-\sqrt{x+2}\right)=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+5}-1\right)\left(1-\sqrt{x+2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+5}-1=0\\ 1-\sqrt{x+2}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+5=1\\ x+2=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-4\\ x=-1\end{array}\right.$ Do x > -2 nên x = -4 (loại). Vậy nghiệm của phương trình x = -1.

<u>Cách giải khác</u>:

Đặt $a=\sqrt{x+2}\Rightarrow a^2=x+2$; $b=\sqrt{x+5}\Rightarrow b^2=x+5$ nên $b^2-a^2=x+5-x-2=3$ .Do đó phương trình (1) trở thành: $\begin{cases}b^2-a^2=3\\ (b-a)(1+ab)=3\end{cases}$ (*)

Từ hệ (*) suy ra $b^2-a^2=(b-a)(1+ab)\Leftrightarrow(b-a)(a+b-ab-1)=0$

$\left[\begin{array}{l} b-a=0 \\ a+b-ab-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ (a-1)(b-1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow a=b=1$ khi đó ta cũng có x = -1.

<u>Bài toán 9:</u> Giải phương trình: $\sqrt{25-x^2}-\sqrt{10-x^2}=3$ (1)

Giải: Điều kiện $\begin{cases} 25-x^2 \geq 0 \\ 10-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 25 \\ x^2 \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 \leq 10 \Leftrightarrow -\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}$ (*).

Đặt $0<a=\sqrt{25-x^2}$; $\sqrt{10-x^2}=b>0 \Rightarrow a^2-b^2=25-x^2-10+x^2=15$. Nên phương trình (1) trở thành $\begin{cases} a-b=3 \\ a^2-b^2=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=3 \\ a+b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases}$

Nếu b = 1 thì $10-x^2=1 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$ so với điều kiên (*) $x=\pm 3$ thoả

Nếu a = 4 thì $25-x^2=16 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$ so với điều kiên (*) $x=\pm 3$ thoả.

Vậy phương trình có nghiệm là $x=\pm 3$.

<u>Bài toán 10:</u> Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{5x}$ (*)

Lập phương hai vế của phương trình (*) ta được:

$5x=x+1+x-1+3\sqrt[3]{(x+1)(x-1)}\left[\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}\right] \Leftrightarrow 5x=2x+3\sqrt[3]{x^2-1}.\sqrt[3]{5x}$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2-1}.\sqrt[3]{5x}=x \Leftrightarrow x^3=5x\left(x^2-1\right) \Leftrightarrow 4x^3-5x=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$. Thử lại ta thấy phương trinh có đúng ba nghiệm trên.

<u>Bài toán 11:</u> Giải phương trình $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2$ (1)

Điều kiện: $x \geq 0$. Đặt $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}=a$; $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=b \Rightarrow a^3=1+\sqrt{x}$; $\Rightarrow b^3=1-\sqrt{x}$ nên phương trình (1) trở thành

$\begin{cases} a+b=2 \\ a^3+b^3=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ a^2-ab+b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2-b \\ (2-b)^2-b(2-b)+b^2-1=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2-b \\ 4-4b+b^2-2b+b^2+b^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2-b \\ b^2-2b+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2-b \\ (b-1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=1$

Nếu a = 1 thì $1+\sqrt{x}=1 \Leftrightarrow \sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0$

Nếu b = 1 thì $1-\sqrt{x}=1 \Leftrightarrow \sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0$.

Vậy x = 0 là một nghiệm của phương trình.

<u>Bài toán 12:</u> Giải phương trình $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1$ (1)

Giải: TXĐ $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. Đặt $\sqrt[3]{2-x}=a$; $\sqrt{x-1}=b \geq 0$. Nên phương trình đã cho trở thành: $\begin{cases} a+b=1 \\ a^3+b^3=1 \end{cases}$ $\begin{cases} a+b=1 \\ a^3+b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-b \\ (1-b)^3+b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-b \\ 1-3b^2+3b-b^3+b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-b \\ b\left(b^2-4b+3\right)=0 \end{cases}$

Nên $b \in \{0;1;3\}$ Do đó $(a;b)=\{(1;0);(0;1);(-2;3)\}$

Nếu $a=0$ thì $\sqrt[3]{2-x}=0 \Leftrightarrow 2-x=0 \Leftrightarrow x=2$; $b=1$ thì $\sqrt{x-1}=1 \Leftrightarrow x-1=1 \Leftrightarrow x=2$

Nếu $a=1$ thì $\sqrt[3]{2-x}=1 \Leftrightarrow 2-x=1 \Leftrightarrow x=1$; $b=0$ thì $\sqrt{x-1}=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

Nếu $a=-2$ thì $\sqrt[3]{2-x}=-2 \Leftrightarrow 2-x=-8 \Leftrightarrow x=10$; $b=3$ thì $\sqrt{x-1}=3 \Leftrightarrow x-1=9 \Leftrightarrow x=10$

Vậy phương trình có ba nghiệm là $x \in \{1;2;10\}$

Bài toán 13:Giải phương trình $\sqrt{\frac{1-x}{x}}=\frac{2x+x^2}{1+x^2}$ (*)

Giải: Điều kiện để phương trình có nghĩa là $x \neq 0$ và $\frac{1-x}{x} \geq 0$ hay $0<x \leq 1$

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1-x}{x}}=1+\frac{2x-1}{1+x^2}$. Thử thấy $x=\frac{1}{2}$ là một nghiệm của phương trình (*)

Với $0<x<\frac{1}{2}$ thì $1-x>x>0$ và $2x-1<0$ .Suy ra $\sqrt{\frac{1-x}{x}}>1>1+\frac{2x-1}{1+x^2}$

Với $\frac{1}{2}<x \leq 1$ thì $0 \leq 1-x<x$ và $2x-1>0$ .Suy ra $\sqrt{\frac{1-x}{x}}<1<1+\frac{2x-1}{1+x^2}$

Vậy x = $\frac{1}{2}$ là nghiệm của phương trình.

Bài toán 14: Giải phương trình : $\sqrt[3]{3x^2-x+2001}-\sqrt[3]{3x^2-7x+2002}-\sqrt[3]{6x-2003}=\sqrt[3]{2002}$.

Giải: Đặt : $\sqrt[3]{3x^2-x+2001}=a \Rightarrow a^3=3x^2-x+2001$

$-\sqrt[3]{3x^2-7x+2002}=b \Rightarrow b^3=-3x^2+7x-2002$

$-\sqrt[3]{6x-2003}=c \Rightarrow c^3=-6x+2003$

Suy ra $a^3+b^3+c^3=2002$. Do đó phương trình đã cho sẽ là $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3$ nên $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)=0$ Khai triển và thu gọn được: $3(a+b)(b+c)(c+a)=0$.

- Nếu $a+b=0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{3x^2-x+2001}=\sqrt[3]{3x^2-7x+2002} \Leftrightarrow 3x^2-x+2001=3x^2-7x+2002$

  $\Leftrightarrow 6x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{6}$
- Nếu $b+c=0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{3x^2-7x+2002}=-\sqrt[3]{6x-2003} \Leftrightarrow 3x^2-7x+2002=-6x+2003$

$\Leftrightarrow 3x^2-x-1=0$. Phương trình này có nghiệm $x \in \left\{\frac{1+\sqrt{13}}{6};\frac{1-\sqrt{13}}{6}\right\}$

- Nếu $a+c=0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{3x^2-x+2001}=\sqrt[3]{6x-2003} \Leftrightarrow 3x^2-x+2001=6x-2003$

$\Leftrightarrow 3x^2-7x+4004=0$. Phương trình này vô nghiệm

Vậy phương trình có ba nghiệm $x \in \left\{\frac{1}{6};\frac{1+\sqrt{13}}{6};\frac{1-\sqrt{13}}{6}\right\}$.

Bài toán 15: Tính giá trị của biểu thức:

$\frac{a+1}{\sqrt{a^4+a+1}-a^2}$ trong đó a là nghiệm d-¬ng của phương trình $4x^2+\sqrt{2}x-\sqrt{2}=0$

Giải : Phương trình $4x^2+\sqrt{2}x-\sqrt{2}=0$ có ac = - 4$\sqrt{2}<0$ nên có hai nghiệm phân biệt với a là nghiệm dương của phương trình nên ta có: $4a^2+\sqrt{2}a-\sqrt{2}=0$ (1) .

Vì a > 0 nên từ (1) có :

$$a^2=\frac{\sqrt{2}-a\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}(1-a)}{\sqrt{2}.2\sqrt{2}}=\frac{1-a}{2\sqrt{2}}\Rightarrow a^4=\frac{1-2a+a^2}{8}.$$

Gọi S $=\dfrac{a+1}{\sqrt{a^4+a+1}-a^2}=\dfrac{(a+1)\sqrt{a^4+a+1}+a^2}{\left(\sqrt{a^4+a+1}\right)^2-a^4}=\dfrac{(a+1)\sqrt{a^4+a+1}+a^2}{a^4+a+1-a^4}=\sqrt{a^4+a+1}+a^2$

$$=\sqrt{\frac{1-2a+a^2}{8}+a+1}+\frac{1-a}{2\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{1-2a+a^2+8a+8}{8}}+\frac{1-a}{2\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{a^2+6a+9}{8}}+\frac{1-a}{2\sqrt{2}}=\frac{a+3}{2\sqrt{2}}+\frac{1-a}{2\sqrt{2}}=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

__Bài toán 16:__ Giải phương trình: $x^2-x-1000\sqrt{1+8000x}=1000$

Giải: Đặt $\sqrt{1+8000x}+1=2y\Rightarrow\sqrt{1+8000x}=2y-1\Rightarrow 1+8000x=4y^2-4y+1\Rightarrow 4y^2-4y=8000x$ $\Rightarrow y^2-y=2000x$. Do đó phương trình đã cho trở thành hệ phương trình:

$\begin{cases}x^2-x=2000y\\ y^2-y=2000x\end{cases}$ (1).Từ hệ phương trình (1) ta suy ra

$x^2-x-y^2+y=2000(y-x)\Leftrightarrow(x-y)(x+y)-(x-y)+2000(x-y)=0$ (2)

$\Leftrightarrow(x-y)(x+y-1+2000)=0\Leftrightarrow(x-y)(x+y+1999)=0$

Từ hệ phương trình (1)

suy ra: $x^2+y^2-(x+y)=2000(x+y)\Rightarrow 2001(x+y)=x^2+y^2>0\Rightarrow x+y>0$.

Nên $x+y+1999>0$ .Do đó từ (2) suy ra $x-y=0$ hay x = y. Thay vào hệ (1) ta được $x^2-x=2000x\Rightarrow x(x-2001)=0\Rightarrow x=0$ hoặc $x=2001$. Nhưng x = 0 không là nghiệm của phương trình nên phương trình có nghiệm là x = 2001.

__Bài toán 17__: Giải phương trình $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2+2x-3}$.

Điều kiện của phương trình: $x\ge 2$

Ta có $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2+2x-3}\Leftrightarrow\sqrt{x-1}.\sqrt{x-2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}.\sqrt{x+3}$

$\Leftrightarrow\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}\right)-\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}\right)=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}\right)\left(\sqrt{x-1}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}\right)$ hoặc $\sqrt{x-1}-1=0\Leftrightarrow x-2=x-3$ hoặc $x-1=1\Leftrightarrow 0x=-1$ hoặc $x=2$. $\Leftrightarrow x=2$ là một nghiệm của phương trình.

__Bài toán 18__: Giải phương trình $\dfrac{1}{5x^2}+\dfrac{1}{x^2-9x+36}=\dfrac{1}{x^2-4x+16}$

Giải :

ĐKXĐ: $x\ne 0$

Từ phương trình trên ta có $\frac{1}{5x^2}+\frac{4}{4x^2-36x+12^2}=\frac{9}{9x^2-36x+12^2}$. Với $x\neq 0$ nên chia hai vế của phương trình cho x^2 ở mẫu ta được : $\frac{1}{5}+\frac{4}{4-\frac{36}{x}+\left(\frac{12}{x}\right)^2}=\frac{9}{9-\frac{36}{x}+\left(\frac{12}{x}\right)^2}$. Đặt

$\left(\frac{12}{x}\right)^2-\frac{36}{x}=t$. Khi đó ta có $\frac{1}{5}+\frac{4}{4+t}=\frac{9}{9+t}$. Quy đồng khử mẫu ta được:

$t^2-12t+36=0\Leftrightarrow (t-6)^2=0\Leftrightarrow t=6$

Do đó $\left(\frac{12}{x}\right)^2-\frac{36}{x}=6$ Quy đồng khử mẫu ta được $x^2+6x-24=0$

Giải phương trình $x^2+6x-24=0$ ta được nghiệm: $x_{1,2}=-3\pm\sqrt{33}$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x_{1,2}=-3\pm\sqrt{33}$

Bài toán 30: Tìm x, y, z biết $\sqrt{x-y+z}=\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

Điều kiện: $x;y;z\geq 0$; $x-y+z\geq 0$. Đặt $x=a^2$; $y=b^2$; $z=c^2$. Do a.b.c ≥ 0 nên ta có

$\sqrt{a^2-b^2+c^2}=a-b+c\Leftrightarrow a^2-b^2+c^2=(a-b+c)^2\Leftrightarrow a^2-b^2+c^2=a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$

$\Leftrightarrow -2b^2+2ab-2ac+2bc=0\Leftrightarrow 2b(a-b)-2c(a-b)=0\Leftrightarrow 2(a-b)(b-c)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a-b=0\\b-c=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\b=c\end{array}\right.$ Do đó x = y và z tuỳ ý ; y = z và x tuỳ ý

Hoặc cách giải khác:

$\sqrt{x-y+z}=\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}\Rightarrow\sqrt{x-y+z}+\sqrt{y}=\sqrt{x}+\sqrt{z}\Rightarrow x-y+z+y+2\sqrt{y(x-y+x)}=x+z+2\sqrt{xz}$

$\Rightarrow\sqrt{y(x-y+z)}=\sqrt{xz}\Rightarrow y(x-y+z)=xz\Rightarrow y(x-y)+yz-xz=0$

$\Rightarrow y(x-y)-z(x-y)=0\Rightarrow(x-y)(y-z)=0$ Do đó x = y và z tuỳ ý hoặc y = z và x tuỳ ý

Bài toán 33: Cho phương trình $x^4+2mx^2+4=0$ (*). Tìm giá trị của tham số m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt $x_1;x_2;x_3;x_4$ thoả mãn $x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=32$.

Giải:

Đặt $x^2=t>0$ khi đó phương trình (*) trở thành $t^2+2mt+4=0$ (1). Phương trình (*) có nghiệm phân biệt nên phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt $t_1;t_2$ ngh ĩa l à:

$$\begin{cases}\Delta'=m^2-4>0\\t_1+t_2=-2m>0\\t_1.t_2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|m|>2\\m<0\\t_1.t_2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>2\wedge m<-2\\m<0\end{cases}\Rightarrow m<-2$$

Khi m <-2 thì phương trình (*) có 4 nghiệm $x_{1;2}=\pm\sqrt{t_1}$; $x_{3;4}=\pm\sqrt{t_2}$ và

$x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=2(t_1+t_2)^2-4t_1t_2=8m^2-16$. Từ giả thiết suy ra $8m^2-13=32\Leftrightarrow m=-\sqrt{6}$ vì $m<-2$

Bài toán 34:

Chứng minh rằng nếu phương trình $ax^4+bx^3+cx^2-2bx+4a=0 \quad (a\neq 0)$ (*) có hai nghiệm $x_1;x_2$ thoả mãn $x_1.x_2=1$ thì $5a^2=2b^2+ac$.

Giải:

Nếu phương trình (*) có hai nghiệm $x_1;x_2$ thì đa thức bậc bốn ở vế trái của phương trình phân tích được : $ax^4+bx^3+cx^2-2bx+4a=(x-x_1)(x-x_2)(ax^2+mx+n)=$

$=(x^2-px+1)(ax^2+mx+n)$ (vì $x_1.x_2=1$ và $p=x_1+x_2$)

$=ax^4+(m-ap)x^3+(a-mp+n)x^2+(m-pn)x+n$. Đồng nhất thức hai vế của phương trình trên ta được : $\begin{cases} n=4a & (1)\\ m-pn=-2b & (2)\\ m-ap=b & (3)\\ a-mp+n=c & (4)\end{cases}$

Giải hệ phương trình trên ta được $5a^2=2b^2+ac$.

Cách giải 2: Vì $x_1\neq 0$ và $x_2=\dfrac{1}{x_1}$ đều là nghiệm của phương trình (*) nên ta có:

$ax_1^4+bx_1^3+cx_1^2-2bx_1+4a=0 \Leftrightarrow a(x_1^4-1)-bx_1(x_1^2-1)=0 \Leftrightarrow (x_1^2-1)(ax_1^2-bx_1+a)=0$

$=(x_1-1)(x_1+1)(ax_1^2-bx_1+a)$.

Có ba trường hợp xảy ra

Trường hợp 1: Nếu $x_1=-1 \Rightarrow x_1=x_2=-1$. Đa thức vế trái chia hết cho $(x+1)^2=x^2+2x+1$ nên đa thức dư đồng nhất phải bằng 0. Bằng phép chia đa thức cho đa thức ta được:

$\begin{cases}-4a+b-2c=0\\ a+2b-c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2a\\ c=-3a\end{cases} \Rightarrow 5a^2=2b^2+ac$

Trường hợp 2: Nếu $x_1=1 \Rightarrow x_2=x_1=1$. Tương tự trường hợp (1) ta cũng có $5a^2=2b^2+ac$

Trường hợp 3: Nếu $|x_1|\neq 1$ thì $x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình $ax^2-bx+a=0$. Chia đa thức (*) cho ax^2-bx+a ta được đa thức dư đồng nhất bằng 0 có

$(a-bx)(5a^2-2b^2-ac)=0 \Rightarrow 5a^2=2b^2+ac$.

Cách giải 3: Vì $x=0$ không là nghiệm của phương trình (*) nên chia hai vế cho x^2 ta được: $a\left(x^2+\dfrac{4}{x^2}\right)+b\left(x-\dfrac{2}{x}\right)+c=0 \quad (1)$. Đặt $y=x-\dfrac{2}{x} \Leftrightarrow x^2+\dfrac{4}{x^2}=y^2+4$ nên phương trình trở thành $ay^2+by+4a+c=0 \quad (2)$. Đặt $y_1=x_1-\dfrac{2}{x_1} \;;\; y_2=x_2-\dfrac{2}{x_2} \quad (3)$. Áp dụng định lý Viet cho phương trình (2) $y_1+y_2=-\dfrac{b}{a} \;;\; y_1.y_2=\dfrac{4a+c}{a}$. Thay vào (3) và biến đổi ta được $5a^2=2b^2+ac$.

Phương trình (2) có hai nghiệm $y_1;y_2$. Nếu $y_1=y_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$ mới chỉ là một nghiệm của phương trình (2) vậy ta phải xét thêm các trường hợp 1) 2) như cách giải 2:

Bài tập về nhà : Giải các phương trình sau:

a) $(x+3\sqrt{x}+2)(x+9\sqrt{x}+18)=168x$ KQ: x = 1; x = 36 *b)* $\sqrt{5x^2+14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}$ $\quad x\in\left\{8;\dfrac{5+\sqrt{61}}{2}\right\}$

1) $\sqrt{10-2x}-\sqrt{2x+3}=1$

2) $\sqrt{48-x^3}+\sqrt{35-x^3}=13$

3) $\sqrt[5]{32-x^2}-\sqrt[5]{1-x^2}=4$

4) $\sqrt[3]{x-1}+3=\sqrt[4]{82-x}$

5) $\sqrt{x}+\sqrt[4]{20-x}=4$

6) $x+\sqrt{17-x^2}+x\sqrt{17-x^2}=9$

7) $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$

8) $\sqrt{8+\sqrt{x}}+\sqrt{5-\sqrt{x}}=5$

DẠNG VI: PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

1. Một số định nghĩa, định lí, tính chất và kiến thức liên quan đến các phương pháp giải phương trình nghiệm nguyên

1. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$

Nếu có nghiệm nguyên là x_0 thì $c \vdots x_0$

Phương trình có nghiệm nguyên khi Δ (Δ') là số chính phương, hoặc Δ (Δ') không âm.

2. Phương trình được đưa về dạng f(x).g(x) = k với f(x) và g(x) là các đa thức hệ số nguyên. Ta phân tích k ra thừa số nguyên tố rồi giải các hệ phương trình.

$\begin{cases} f(x)=m \\ g(x)=n \end{cases}$ với m.n = k.

2. Một số phương pháp giải phương trình nghiệm nguyên

Phương trình nghiệm nguyên rất đa dạng và phong phú. Không có cách giải chung cho mọi phương trình, tuy nhiên để giải các phương trình đó ta thường dựa vào một số phương pháp giải như sau:

Phương pháp I : Phương pháp đưa về dạng tích

Biến đổi phương trình về dạng: Vế trái là tích của của các đa thức chứa ẩn, vế phải là tích của các số nguyên.

Ví dụ 1: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $2(x+y)+5=3xy$

Lời giải:

Ta có: $2(x+y)+5=3xy \Leftrightarrow 3xy-2x-2y=5$

$\Leftrightarrow y(3x-2)-\dfrac{2}{3}(3x-2)=5+\dfrac{4}{3} \Leftrightarrow (3x-2)(3y-2)=19$

Do x, y nguyên dương nên $3x-2\ge 1;\ 3y-2\ge 1$ mà 19 = 1.19 = 19.1 nên ta có các khả năng sau: $\begin{cases}3x-2=1\\3y-2=19\end{cases}$ (I) ; $\begin{cases}3x-2=19\\3y-2=1\end{cases}$ (II)

Giải các hệ phương trình trên, ta đươc 2 nghiêm nguyên của phương trình là

$(x;\ y)\in\{(1;\ 7);\ (7;\ 1)\}$

<u>Ví dụ 2</u>: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + x + 6 = y^2$

<u>Lời giải:</u>

Ta có: $x^2 + x + 6 = y^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 24 = 4y^2 \Leftrightarrow (2x + 1)^2 - 4y^2 = -23$

$\Leftrightarrow (2x - 2y + 1)(2x + 2y + 1) = -23$

Suy ra: $\begin{cases}2x-2y+1=-1\\2x+2y+1=23\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}2x-2y+1=23\\2x+2y+1=-1\end{cases}$

hoặc $\begin{cases}2x-2y+1=1\\2x+2y+1=-23\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}2x-2y+1=-23\\2x+2y+1=1\end{cases}$

Giải các trường hợp trên và kết hợp với điều kiện x, y nguyên ta được các nghiệm nguyên (x, y) là (5; 6); (5; -6) ; (-6;- 6); (- 6; 6)

<u>Ví dụ 3</u>: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x = y^2$

<u>Lời giải:</u>

Ta có: $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x = y^2 \Leftrightarrow x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 - y^2 = 1 \Leftrightarrow (x+1)^4 - y^2 = 1$

$$\Leftrightarrow [(x+1)^2 - y][(x+1)^2 + y] = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x+1)^2 - y = -1\\(x+1)^2 + y = -1\end{cases}\\ \begin{cases}(x+1)^2 - y = 1\\(x+1)^2 + y = 1\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}-1 + y = -1 - y\\1 + y = 1 - y\end{array}\right.$$

$\Rightarrow y = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 1 \Leftrightarrow x+1 = \pm 1 \Rightarrow x = 0$ hoặc $x = -2$. Thử lai các giá trị tương ứng của x và y ta thấy đều thỏa mãn phương trình đã cho.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm nguyên là $(x, y) \in \{(0, 0); (-2, 0)\}$

<u>Ví dụ 4</u> : Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $y^3 - x^3 = 91$ (1)

Lời giải

Ta có (1) tương đương với $(y - x)(x^2 + xy + y^2) = 91$ (*)

Vì $x^2 + xy + y^2 > 0$ với mọi x, y nên từ (*) => $y - x > 0$.

Mặt khác $91 = 1 . 91 = 7 . 13$ và $y - x$; $x^2 + xy + y^2$ đều có giá trị nguyên dương nên ta có bốn khả năng sau:

$y - x = 91$ và $x^2 + xy + y^2 = 1$ (I)

$y - x = 1$ và $x^2 + xy + y^2 = 91$ (II)

$y - x = 3$ và $x^2 + xy + y^2 = 7$ (III)

$y - x = 7$ và $x^2 + xy + y^2 = 13$ (IV)

Đến đây, bài toán coi như được giải quyết.

Phương pháp II : Sử dụng tính chất chia hết

- Sử dụng tính chất chia hết để chứng minh phương trình vô nghiệm hoặc tìm nghiệm của phương trình.

- Hai vế của phương trình nghiệm nguyên khi chia cho cùng một số có số dư khác nhau thì phương trình đó không có nghiệm nguyên.

Ví dụ 1 : Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $xy + x - 2y = 3$ (3)

Lời giải

Ta có (3) tương đương $y(x - 2) = - x + 3$. Vì $x = 2$ không thỏa mãn phương trình nên (3) tương đương với: $y = \frac{-x+3}{x-2} \Leftrightarrow y = -1 + \frac{1}{x-2}$

Ta thấy: y là số nguyên nên $x - 2$ là ước của 1 hay $x - 2 = 1$ hoặc $x - 2 = -1$ $\Leftrightarrow$ với $x = 1$ hoặc $x = 3$. Từ đó ta có nghiệm nguyên (x ; y) là (1 ; -2) và (3 ; 0).

Chú ý: Có thể dùng phương pháp 1 để giải bài toán này, nhờ đưa phương trình (3) về dạng : $x(y + 1) - 2(y + 1) = 1$ tương đương $(x - 2)(y + 1) = 1$.

Ví dụ 2: Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau. $x^2 = 2y^2$ (4)

Lời giải

Ta thấy: $x = y = 0$ là nghiệm của (4).

Nếu $x_0, y_0 \neq 0$ và (x_0, y_0) là nghiệm của (4). Gọi $d = (x_0, y_0)$, suy ra $\left(\frac{x_0}{d}, \frac{y_0}{d}\right) = 1$. (*)

Ta có: $x_0^2 = 2y_0^2 \Rightarrow \left(\frac{x_0}{d}\right)^2 = 2\left(\frac{y_0}{d}\right)^2 \Rightarrow \frac{x_0}{d}$ chẵn và $2\left(\frac{y_0}{d}\right)^2 \vdots 4$ (mâu thuẫn với (*))

Vậy phương trình (4) chỉ có nghiệm nguyên duy nhất là (0; 0).

Ví dụ 3: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $2x^2 + 4x = 19 - 3y^2$

Lời giải:

Ta có: $2x^2 + 4x + 2 = 21 - 3y^2$

$\Leftrightarrow 2(x + 1)^2 = 3(7 - y^2)$ (2)

Ta thấy $3(7 - y^2) \vdots 2 \Rightarrow 7 - y^2 \vdots 2 \Rightarrow$ y lẻ

Ta lại có $7 - y^2 \geq 0$ nên chỉ có thể $y^2 = 1$

Khi đó (2) có dạng: $2(x + 1)^2 = 18$

Ta được : $x + 1 = \pm 3$ do đó $x_1 = 2$, $x_2 = -4$

Các cặp số (2;1), (2;-1), (-4;1), (-4;-1) thoả mãn nên là các nghiệm nguyên của pt

Phương pháp V: Đưa về dạng tổng

Biến đổi phương trình về dạng : Vế trái là tổng của các bình phương, vế phải là tổng của các số chính phương.

Ví dụ 1 : Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + y^2 - x - y = 8$ (1)

Lời giải

(1) $\Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 - 4x - 4y = 32$

$\Leftrightarrow (4x^2 - 4x + 1) + (4y^2 - 4y + 1) = 34$

$\Leftrightarrow (2x - 1)^2 + (2y - 1)^2 = 34$

Bằng phương pháp thử chọn ta thấy 34 chỉ có duy nhất một dạng phân tích thành tổng của hai số chính phương 3^2 và 5^2.

Do đó phương trình thỏa mãn chỉ trong hai khả năng :

$\begin{cases} |2x - 1| = 3 \\ |2y - 1| = 5 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} |2x - 1| = 5 \\ |2y - 1| = 3 \end{cases}$

Giải các hệ trên, suy ra phương trình (1) có bốn nghiệm nguyên là

$(x ; y) \in \{2 ; 3) ; (3 ; 2) ; (-1 ; -2) ; (-2 ; -1)\}$

Ví dụ 2: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - 4xy + 5y^2 = 169$

Lời giải

Ta có: $x^2 - 4xy + 5y^2 = 169 \Leftrightarrow (x - 2y)^2 + y^2 = 169$ Ta thấy $169 = 0^2 + 13^2 = 5^2 + 12^2$

Do đó phương trình thỏa mãn chỉ trong bốn khả năng :

$\Rightarrow \begin{cases} |x-2y| = 0 \\ |y| = 13 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} |x-2y| = 13 \\ |y| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x-2y| = 5 \\ |y| = 12 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} |x-2y| = 12 \\ |y| = 5 \end{cases}$

Giải ra ta được các nghiêm nguyên của phương trình là

$(x, y) \in \{(29, 12); (19, 12); (-19, -12); (22, 5); (-2, 5) ;(2, -5); (-22, -5); (26, 13); (-26, -13); (-13. 0); (13, 0)\}$

Phương pháp VIII: Sử dụng tính chất nghiệm của phương trình bậc 2

Biến đổi phương trình về dạng phương trình bậc 2 của một ẩn coi các ẩn khác là tham số, sử dụng các tính chất về nghiệm của phương trình bậc 2 để xác định giá trị của tham số.

Ví dụ 1: Giải phương trình nghiệm nguyên: $3x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y + 5 = 0$

Lời giải

Ta có phương trình: $3x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y + 5 = 0$

$\Leftrightarrow y^2 + (4x + 2)y + 3x^2 + 4x + 5 = 0$ (*)

Coi x là tham số của phương trình bậc 2 (*) với ẩn y, ta có:

$y = -(2x + 1) \pm \sqrt{\Delta'_x}$. Do y nguyên, x nguyên $\Rightarrow \sqrt{\Delta'_x}$ nguyên

Mà $\Delta'_x = (2x + 1)^2 - (3x^2 + 4x + 5) = x^2 - 4 \Rightarrow x^2 - 4 = n^2$ $(n \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow (x- n) (x+ n) = 4 \Rightarrow x = \pm 2$ (do x - n và x + n cùng tính chẵn lẻ)

Vậy phương trình có 2 nghiệm nguyên là $(x; y) \in \{(2; -5); (-2, 3)\}$

Ví dụ 2 : Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - (y+5)x + 5y + 2 = 0$

Lời giải

Ta có: $x^2 - (y+5)x + 5y + 2 = 0$ coi y là tham số ta có phương trình bậc 2 ẩn x. Giả sử phương trình bậc 2 có 2 nghiệm x_1, x_2

Theo định lý Viet, ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = y + 5 \\ x_1x_2 = 5y + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 + 5x_2 = 5y + 25 \\ x_1x_2 = 5y + 2 \end{cases}$

$\Rightarrow 5x_1 + 5x_2 - x_1x_2 = 23$

$\Leftrightarrow (x_1 - 5)(x_2 - 5) = 2$ mà $2 = 1.2 = (-1)(-2)$

$\Rightarrow x_1 + x_2 = 13$ hoặc $x_1 + x_2 = 7 \Rightarrow y = 8$ hoặc $y = 2$

Thay vào phương trình ta tìm được các cặp số (7; 8); (6; 8); (4; 2); (3; 2) là các nghiệm nguyên của phương trình.

Ví dụ 3: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $x + y + xy = x^2 + y^2$ (1)

Lời giải

Viết (1) thành phương trình bậc 2 đối với x

$x^2 - (y + 1)x + (y^2 - y) = 0$ (2)

Điều kiện cần để (2) có nghiệm là $\Delta \geq 0$

$\Delta = (y + 1)^2 - 4(y^2 - y) = y^2 + 2y + 1 - 4y^2 + 4y$

$= -3y^2 + 6y + 1$

* $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 6y - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 3(y-1)^2 \leq 4$

Do đó $(y - 1)^2 \leq 1$. Suy ra $-1 \leq y - 1 \leq 1$

y - 1	-1	0	1
y	0	1	2

Với y = 0, thay vào (2) ta được $x^2 - x = 0$ Ta có $x_1 = 0$; $x_2 = 1$

Với y = 1, thay vào (2) được $x^2 - 2x = 0$ Ta có $x_3 = 0$; $x_4 = 2$

Với y = 2, thay vào (2) ta được $x^2 - 3x + 2 = 0$ Ta có $x_5 = 1$; $x_6 = 2$

Thử lại, các giá trị trên đều nghiệm đúng phương trình.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm nguyên là (0;0), (1;0), (0;1), (2;1), (1;2), (2;2)

CHUYÊN ĐỀ VII: CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

I. PHƯƠNG PHÁP 1 : DÙNG ĐỊNH NGHĨA

Kiến thức: Để chứng minh A > B. Ta chứng minh A –B > 0

Lưu ý dùng hằng bất đẳng $M^2 \geq 0$ với $\forall$ M

Ví dụ 1 $\forall$ x, y, z chứng minh rằng :

a) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$; b) $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy - 2xz + 2yz$

c) $x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(x + y + z)$

Giải: a) Ta xét hiệu: $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2}.2.(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= \frac{1}{2}\left[(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2\right] \geq 0$ đúng với mọi x; y; $z \in R$

Vậy $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$. Dấu bằng xảy ra khi x = y = z

b)Ta xét hiệu: $x^2 + y^2 + z^2 - (2xy - 2xz + 2yz) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz$

$= (x - y + z)^2 \geq 0$ đúng với mọi x;y;$z \in R$

Vậy $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy - 2xz + 2yz$ đúng với mọi x;y;$z \in R$. Dấu bằng xảy ra khi x+y=z

c) Ta xét hiệu: $x^2 + y^2 + z^2 + 3 - 2(x + y + z) = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1$

$= (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \geq 0$. Dấu(=)xảy ra khi x=y=z=1

Ví dụ 2: chứng minh rằng :

a) $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$; b) $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$

Giải:

a) Ta xét hiệu $\frac{a^2 + b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{2(a^2 + b^2)}{4} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - a^2 - b^2 - 2ab)$

$= \frac{1}{4}(a-b)^2 \geq 0$. Vậy $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$; Dấu bằng xảy ra khi a=b

b)Ta xét hiệu: $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} - \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] \geq 0$

Vậy $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$; Dấu bằng xảy ra khi a = b = c

II. PHƯƠNG PHÁP 2 : DÙNG PHÉP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

Ta biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức đúng hoặc bất đẳng thức đã được chứng minh là đúng.

Chú ý các hằng đẳng thức sau: $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$

$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$; $(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$

Ví dụ 1: Cho a, b, c, d, e là các số thực chứng minh rằng:

a) $a^2 + \frac{b^2}{4} \geq ab$ b) $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$ c) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$

Giải:a) $a^2 + \frac{b^2}{4} \geq ab \Leftrightarrow 4a^2 + b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow 4a^2 - 4ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2a - b)^2 \geq 0$ (BĐT này luôn đúng)

Vậy $a^2 + \frac{b^2}{4} \geq ab$ (dấu bằng xảy ra khi 2a=b)

b) $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + 1) > 2(ab + a + b)$

$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 \geq 0$ (BĐTnàyluôn đúng)

Vậy $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$. Dấu bằng xảy ra khi a=b=1

c) $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \ge a(b+c+d+e) \Leftrightarrow 4(\ a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\ ) \ge 4a(b+c+d+e)$

$\Leftrightarrow (a^2-4ab+4b^2)+(a^2-4ac+4c^2)+(a^2-4ad+4d^2)+(a^2-4ac+4c^2) \ge 0$

$\Leftrightarrow (a-2b)^2+(a-2c)^2+(a-2d)^2+(a-2c)^2 \ge 0$ (BĐT này luôn đúng)

Vậy ta có điều phải chứng minh

Ví dụ 2: Cho a, b là hai số dương có tổng bằng 1 . Chứng minh rằng : $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1} \ge \frac{4}{3}$

Giải: Dùng phép biến đổi tương đương ;

$3(a + 1 + b + 1) \ge 4(a + 1) (b + 1) \Leftrightarrow 9 \ge 4(ab + a + b + 1)$ (vì $a + b = 1$)

$\Leftrightarrow 9 \ge 4ab + 8 \Leftrightarrow 1 \ge 4ab \Leftrightarrow (a + b)^2 \ge 4ab$ (BĐT này luôn đúng)

Vậy ta có điều phải chứng minh

Ví dụ 3: Cho 2 số a, b thoả mãn a + b = 1 . CMR $a^3 + b^3 + ab \ge \frac{1}{2}$

Giải : Ta có : $a^3 + b^3 + ab \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow a^3 + b^3 + ab - \frac{1}{2} \ge 0$

$\Leftrightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2) + ab - \frac{1}{2} \ge 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - \frac{1}{2} \ge 0$. Vì $a + b = 1 \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 - 1 \ge 0$

$\Leftrightarrow 2a^2 + 2(1-a)^2 - 1 \ge 0$ (vì $b = a -1$) $\Leftrightarrow 4a^2 - 4a + 1 \ge 0 \Leftrightarrow (2a - 1)^2 \ge 0$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng .

Vậy $a^3 + b^3 + ab \ge \frac{1}{2}$. Dấu " = " xảy ra khi $a = b = \frac{1}{2}$

III. PHƯƠNG PHÁP 3: DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC QUEN THUỘC

1. Một số bất đẳng thức hay dùng

1) Các bất đẳng thức phụ:

a) $x^2+y^2 \ge 2xy$ b) $(x+y)^2 \ge 4xy$ c) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \ge 2$

2) Bất đẳng thức Cô si: $\frac{a_1+a_2+a_3+....+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1a_2a_3....a_n}$ Với $a_i > 0$

3) Bất đẳng thức Bunhiacopski: $(a_2{}^2+a_2^2+....+a_n^2)(x_1^2+x_2^2+....+_n^2) \ge (a_1x_1+a_2x_2+....+a_nx_n)^2$

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho a, b, c là các số không âm chứng minh rằng: $(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8abc$

Giải: Dùng bất đẳng thức phụ: $(x+y)^2 \ge 4xy$

Tacó $(a+b)^2 \ge 4ab$; $(b+c)^2 \ge 4bc$; $(c+a)^2 \ge 4ac$

$\Rightarrow (a+b)^2\,(b+c)^2\,(c+a)^2 \ge 64a^2b^2c^2 = (8abc)^2 \Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \ge 8abc$

Dấu “=” xảy ra khi a = b = c

Ví dụ 2: Cho x , y là 2 số thực thoả mãn : $x^2 + y^2 = x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$

Chứng minh rằng : $3x + 4y \le 5$

Giải : Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có :

$(x^2 + y^2)^2 = (x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})^2$ ($|x| \le 1$; $|y| \le 1$) $\le (x^2 + y^2)(1 - y^2 + 1 - x^2) \Rightarrow x^2 + y^2 \le 1$

Ta lại có : $(3x + 4y)^2 \le (3^2 + 4^2)(x^2 + y^2) \le 25 \Rightarrow 3x + 4y \le 5$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x > 0, y > 0 \\ \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{5} \\ y = \dfrac{4}{5} \end{cases}$. Điều kiện : $\dfrac{3}{2} \le x \le \dfrac{5}{2}$

Ví dụ 3: Cho a, b, c $\ge$ 0 ; a + b + c = 1 . Chứng minh rằng :

a, $\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \le \sqrt{6}$; b, $\sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} + \sqrt{c+1} < 3{,}5$

Giải : a, Áp dụng bất dẳng thức Bunhiacôpxki với 2 bộ 3 số ta có :

$$\left(\sqrt{a+b}.1 + \sqrt{b+c}.1 + \sqrt{c+a}.1\right) \le (1+1+1)\left[\left(\sqrt{a+b}\right)^2 + \left(\sqrt{b+c}\right)^2 + \left(\sqrt{c+a}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}\right)^2 \le 3.(2a + 2b + ac) = 6 \Rightarrow \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \le \sqrt{6} .$$

Dấu " = " xảy ra khi : a = b = c = $\dfrac{1}{3}$

b, Áp dụng bất đẳng thức Côsi , ta có : $\sqrt{a+1} \le \dfrac{(a+1)+1}{2} = \dfrac{a}{2} + 1$

Tương tự : $\sqrt{b+1} \le \dfrac{b}{2} + 1$; $\sqrt{c+1} \le \dfrac{c}{2} + 1$

Cộng từng vế của 3 bất đẳng thức trên ta được : $\sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} + \sqrt{c+1} \le \dfrac{a+b+c}{2} + 3 = 3{,}5$

Dấu đẳng thức xảy ra khi a = b = c =0 trái với giả thiết : a + b + c = 1

Vậy : $\sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} + \sqrt{c+1} < 3{,}5$

Ví dụ 4 : Cho các số dương a , b , c thoả mãn : a + b + c = 1 . Chứng minh : $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \ge 9$

Giải : Ta có : $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} > 0$, a , b > 0

Ta có : $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = (\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}).1 = (\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}).(a + b + c)$

$$= 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1 = 3 + (\frac{a}{b} + \frac{b}{a}) + (\frac{b}{c} + \frac{c}{b}) + (\frac{c}{a} + \frac{a}{c}) \ge 3 + 2 + 2 + 2 = 9$$

$\Rightarrow \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \ge 9$ Dấu "=" xảy ra khi : a = b = c = $\dfrac{1}{3}$

Ví dụ 5: Cho 4 số a,b,c,d bất kỳ chứng minh rằng: $\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \le \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}$

Giải: Dùng bất đẳng thức Bunhiacopski ta có: ac + bd $\le \sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{c^2 + d^2}$

mà $(a+c)^2 + (b+d)^2 = a^2 + b^2 + 2(ac + bd) + c^2 + d^2 \le (a^2 + b^2) + 2\sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{c^2 + d^2} + c^2 + d^2$

$\Rightarrow \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \le \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}$

Ví dụ 6: Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ac$

Giải: Dùng bất đẳng thức Bunhiacopski. Xét cặp số (1,1,1) và (a,b,c) ta có :

$(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2) \ge (1.a+1.b+1.c)^2 \Rightarrow 3(a^2+b^2+c^2) \ge a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ac$ Điều phải chứng minh Dấu bằng xảy ra khi a=b=c

IV. PHƯƠNG PHÁP 4: DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC

Kiến thức: Nếu a; b; c là số đo ba cạnh của tam giác thì: a; b; c> 0; và $|b-c| < a < b+c$; $|a-c| < b < a+c$ $|a-b| < c < b+a$

Ví dụ 1: Cho a; b; c là số đo ba cạnh của tam giác chứng minh rằng:

a, $a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ac)$ b, $abc > (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

Giải: a)Vì a,b,c là số đo 3 cạnh của một tam giác nên ta có

$$\begin{cases} 0<a<b+c \\ 0<b<a+c \\ 0<c<a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2<a(b+c) \\ b^2<b(a+c) \\ c^2<c(a+b) \end{cases}$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta có : $a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ac)$ (đpcm)

b) Ta có $a > |b-c| \Rightarrow a^2 > a^2-(b-c)^2 > 0$

$b > |a-c| \Rightarrow b^2 > b^2-(c-a)^2 > 0$

$c > |a-b| \Rightarrow c^2 > c^2-(a-b)^2 > 0$

Nhân vế các bất đẳng thức ta được

$$\Rightarrow a^2b^2c^2 > \left[a^2-(b-c)^2\right]\left[b^2-(c-a)^2\right]\left[c^2-(a-b)^2\right]$$

$$\Rightarrow a^2b^2c^2 > (a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2$$

$$\Rightarrow abc > (a+b-c).(b+c-a).(c+a-b)$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có chu vi 2p = a + b + c (a, b , c là độ dài các cạnh của tam giác) . Chứng minh rằng : $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

Giải: Ta có : p - a = $\frac{b+c-a}{2} > 0$; Tương tự : p - b > 0 ; p - c > 0 ;

áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \ge \frac{4}{x+y}$ ta được ; $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b} \ge \frac{4}{(p-a)+(p-b)} = \frac{4}{c}$

Tương tự : $\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \ge \frac{4}{a}$; $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-c} \ge \frac{4}{b}$

=> $2\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-c}+\frac{1}{p-c}\right) \ge 4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ => điều phải chứng minh .

Dấu " = " xảy ra khi : p - a = p - b = p - c ⇔ a = b = c. Khi đó tam giác ABC là đều .

V. PHƯƠNG PHÁP 5: ĐỔI BIẾN SỐ

Ví dụ 1: Chứng minh rằng : Nếu a , b , c > 0 thì : $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{b+a} \ge \frac{3}{2}$

Giải: Đặt : b +c = x , c + a = y , a + b = z => a + b + c = $\frac{x+y+z}{2}$

=> a = $\frac{y+z-x}{2}$, b = $\frac{z+x-y}{2}$, c = $\frac{x+y-z}{2}$

Khi đó : VT = $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{b+a}$ = $\frac{y+z-x}{2x}+\frac{z+x-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}$

$=\frac{1}{2}(\frac{y}{x}+\frac{x}{y})+\frac{1}{2}(\frac{z}{x}+\frac{x}{z})+\frac{1}{2}(\frac{z}{y}+\frac{y}{z})-\frac{3}{2}\geq 1+1+1-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

Ví dụ 2: Cho a, b, c > 0 và a + b +c < 1. Cmr $\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}\geq 9$ (1)

Giải: Đặt x = a^2+2bc ; y = b^2+2ac ; z = c^2+2ab Ta có $x+y+z=(a+b+c)^2<1$

(1) $\Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 9$ Với x+y+z < 1 và x ,y,z > 0

Theo bất đẳng thức Côsi ta có: $x+y+z\geq 3.\sqrt[3]{xyz}$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 3..\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$ $\Rightarrow$ $(x+y+z).\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$ Mà x+y+z < 1. Vậy $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 9$ (đpcm)

VI. BÀI TẬP VẬN DỤNG:

Bài 1: Cho x > y và xy =1. Chứng minh rằng: $\frac{(x^2+y^2)^2}{(x-y)^2}\geq 8$

Giải: Ta có $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=(x-y)^2+2$ (vì xy = 1)$\Rightarrow$ $(x^2+y^2)^2=(x-y)^4+4.(x-y)^2+4$

Do đó BĐT cần chứng minh tương đương với $(x-y)^4+4(x-y)^2+4\geq 8.(x-y)^2$

$\Leftrightarrow$ $(x-y)^4-4(x-y)^2+4\geq 0 \Leftrightarrow \left[(x-y)^2-2\right]^2\geq 0$ BĐT cuối đúng nên ta có điều phải cm

Bài 2: Cho xy ≥ 1 .Chứng minh rằng: $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\geq\frac{2}{1+xy}$

Giải : Ta có $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\geq\frac{2}{1+xy}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+y^2}\right)+\left(\frac{1}{1+y^2}-\frac{1}{1+xy}\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow\frac{xy-x^2}{(1+x^2).(1+xy)}+\frac{xy-y^2}{(1+y^2).(1+xy)}\geq 0\Leftrightarrow\frac{x(y-x)}{(1+x^2).(1+xy)}+\frac{y(x-y)}{(1+y^2).(1+xy)}\geq 0$

$\Leftrightarrow\frac{(y-x)^2(xy-1)}{(1+x^2).(1+y^2).(1+xy)}\geq 0$ BĐT cuối này đúng do xy > 1. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 3: Cho a , b, c là các số thực và a + b +c =1. Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}$

Giải : Áp dụng BĐT BunhiaCôpski cho 3 số (1,1,1) và (a,b,c)

Ta có $(1.a+1.b+1.c)^2\leq(1+1+1).(a^2+b^2+c^2)\Leftrightarrow$ $(a+b+c)^2\leq 3.(a^2+b^2+c^2)$

$\Leftrightarrow$ $a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}$ (vì a+b+c =1) (đpcm)

Bài 4: Cho a,b,c là các số dương. Chứng minh rằng: $(a+b+c).\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$ (1)

Giải : (1) $\Leftrightarrow$ $1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{a}+1\geq 9\Leftrightarrow$ $3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\geq 9$

Áp dụng BĐT phụ $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2$ Với x,y > 0

Ta có BĐT cuối cùng luôn đúng. Vậy $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$ (đpcm)

Bài 5: Cho a ,b ,c ,d > 0 .Chứng minh rằng : $2<\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{b+c+d}+\frac{c+d}{c+d+a}+\frac{d+a}{d+a+b}<3$

Giải : Vì a ,b ,c ,d > 0 nên ta có $\frac{a+b}{a+b+c+d}<\frac{a+b}{a+b+c}<\frac{a+b+d}{a+b+c+d}$ (1)

$\frac{b++c}{a+b+c+d}<\frac{b+c}{b+c+d}<\frac{b+c+a}{a+b+c+d}$ (2) $\frac{d+a}{a+b+c+d}<\frac{d+a}{d+a+b}<\frac{d+a+c}{a+b+c+d}$ (3)

Cộng các vế của 4 bất đẳng thức trên ta có :

$$2<\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{b+c+d}+\frac{c+d}{c+d+a}+\frac{d+a}{d+a+b}<3 \quad \text{(đpcm)}$$

Bài 6: Cho a ,b,c là số đo ba cạnh tam giác. Chứng minh rằng: $1<\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2$

Giải: Vì a ,b ,c là số đo ba cạnh của tam giác nên ta có a, b, c > 0
Và a < b + c; b < a + c; c < a + b

Từ (1) $\Rightarrow \frac{a}{b+c}<\frac{a+a}{a+b+c}=\frac{2a}{a+b+c}$. Mặt khác $\frac{a}{b+c}>\frac{a}{a+b+c}$

Vậy ta có $\frac{a}{a+b+c}<\frac{a}{b+c}<\frac{2a}{a+b+c}$ Tương tự ta có $\frac{b}{a+b+c}<\frac{b}{a+c}<\frac{2b}{a+b+c}$

$\frac{c}{a+b+c}<\frac{c}{b+a}<\frac{2c}{a+b+c}$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta có:

$$1<\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2 \quad \text{(đpcm)}$$

CHUYÊN ĐỀ VIII: CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN CỰC TRỊ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Các kiến thức thường dùng

1.1. Luỹ thừa:

a) $x^2 \ge 0\ \forall x \in |R \Rightarrow x^{2k} \ge 0\ \forall x \in |R, k \in z \Rightarrow -x^{2k} \le 0$

Tổng quát : $[f(x)]^{2k} \ge 0\ \forall x \in |R, k \in z \Rightarrow -[f(x)]^{2k} \le 0$

Từ đó suy ra : $[f(x)]^{2k} + m \ge m$ $\forall x \in |R, k \in z$

$M - [f(x)]^{2k} \le M$

b) $\sqrt{x} \ge 0\ \ \forall x \ge 0 \Rightarrow (\sqrt{x})^{2k} \ge 0\ \ \forall x\ge 0 ; k \in z$

Tổng quát: $(\sqrt{A})^{2k} \ge 0\ \ \forall A \ge 0$ (A là 1 biểu thức)

1.2 Bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối:

a) $|x| \ge 0\ \ \forall x\in |R$

b) $|x + y| \le |x| + |y|$; nếu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x.y \ge 0$

c) $|x - y| \ge |x| - |y|$; nếu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x.y \ge 0$ và $|x| \ge |y|$

1.3. Bất đẳng thức côsi :

$\forall ai \geq 0$; $i = \overline{1,n}$: $\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 . a_2 ..... a_n}$ $\forall n \in N$, $n \geq 2$.

dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$

1.4. Bất đẳng thức Bunhiacôpxki :

Với n cặp số bất kỳ $a_1, a_2, ..., a_n$; $b_1, b_2, ..., b_n$ ta có :

$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2).(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a_i}{b_i}$ = Const ($i = \overline{1,n}$)

1.5. Một số Bất đẳng thức đơn giản thường gặp được suy ra từ bất đẳng thức $(A+B)^2 \geq 0$.

$a^2 + b^2 \geq 2ab$; $(a + b)^2 \geq 4ab$; $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$ $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$ $\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{a} \geq \dfrac{4}{a+b}$

II. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN

Phương pháp 01: Sử dụng phép biến đổi đồng nhất

Bằng cách nhóm, thêm, bớt, tách các hạng tử một cách hợp lý, ta biến đổi biểu thức đã cho về tổng các biểu thức không âm (hoặc không dương) và những hằng số. Từ đó :

1.Để tìm Max f(x, y,...) trên miền |D ta chỉ ra :

$$\begin{cases} f(x, y...) \leq M \\ \exists (x_0, y_0....) \in | R \end{cases}$$ sao cho $f(x_0, y_0,...) = M$

2. Để tìm Min f(x, y,...) trên miền |D ta chỉ ra :

$$\begin{cases} f(x, y...) \geq m \\ \exists (x_0, y_0....) \in | R \end{cases}$$ sao cho $f(x_0, y_0,...) = m$

I. Các ví dụ:

1. Ví dụ 1 : Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A_4 = \dfrac{2x^2 - 10x - 1}{x^2 - 2x + 1}$ $(x \neq 1)$

Giải :Ta có: $A_4 = \dfrac{2x^2 - 10x - 1}{x^2 - 2x + 1} = \dfrac{2(x^2 - 2x + 1) - 6(x-1) - 9}{(x-1)^2} = 2 - \dfrac{6}{x-1} - \dfrac{9}{(x-1)^2}$

$$= -\left(\frac{3}{x-1} + 1\right)^2 + 3 \leq 3 \text{ vì } -\left(\frac{3}{x-1} + 1\right)^2 \leq 0 \ \forall x$$

$\Rightarrow A_4$ Max = 3 $\Leftrightarrow \dfrac{3}{x-1} + 1 = 0 \Leftrightarrow$ x = -2 Vậy : A_4 Max = 3 $\Leftrightarrow$ x = -2

2. Ví dụ 2 : Tìm giá trị nhỏ nhất của $A_5 = \dfrac{x}{\sqrt{y}} + \dfrac{y}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} - \sqrt{y}$ với x, y>0

Giải :Ta có:$A_5 = \dfrac{x}{\sqrt{y}} + \dfrac{y}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} - \sqrt{y} = \dfrac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y} - x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}} = \dfrac{x(\sqrt{x} - \sqrt{y}) - y(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{\sqrt{xy}}$

$A_5 = \dfrac{(\sqrt{x} - \sqrt{y}).(x - y)}{\sqrt{xy}} = \dfrac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2.(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{\sqrt{xy}} \geq 0$ $\forall x, y > 0$

$\Rightarrow A_5$ min = 0 $\Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \Leftrightarrow$ x = y Vậy : A_5 min = 0 $\Leftrightarrow$ x = y > 0

3. Ví dụ 3 : Tìm giá trị lớn nhất của $A_7 = xy + yz + zx - x^2 - y^2 - z^2$

Giải :Ta có : $A_7 = xy + yz + zx - x^2 - y^2 - z^2 = -\frac{1}{2}(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2xz)$

$A_7 = -\frac{1}{2}\{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\} \le 0, \forall x,y,z \Rightarrow A_7 \text{ Max} = 0 \Leftrightarrow x=y = z$

Vậy : A_7 Max = 0 $\Leftrightarrow$ x = y = z

4. Ví dụ 4 **:** Tìm GTLN của biểu thức: $y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$.

Giải: Ta có thể viết: $y = \frac{1}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$

Vì $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \ge \frac{3}{4}$. Do đó ta có: $y \le \frac{4}{3}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Vậy: GTLN của $y = \frac{4}{3}$ tại $x = \frac{-1}{2}$

II. Nhận xét: Phương pháp giải toán cực trị đại số bằng cách sử dụng các phép biến đổi đồng nhất được áp dụng cho nhiều bài tập, nhiều dạng bài tập khác nhau. Song đôi khi học sinh thường gặp khó khăn trong công việc biến đổi để đạt được mục đích.

III. Bài tập về nhà:

1. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a. A = (x - 1)(x + 2)(x + 3)(x + 6) b. $B = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1}$ $(x \neq 1)$

c. $C = x^3 + y^3 + xy$ biết x + y = 1

2. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức :

a. $A = -x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x + 2002$ b. $B = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$

Phương pháp 02: Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản.

Ta biết rằng: Từ một bất đẳng thức, bằng cách chuyển vế bao giờ ta cũng đưa về 1 bất đẳng thức cơ bản và các phép biến đổi tương đương mà một vế là hằng số. Vì vậy: Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản và các phép biến đổi tương đương ta có thể tìm được cực trị của 1 biểu thức nào đó.

I. Các ví dụ:

1. Ví dụ 1**:** Cho a > b > 0. Tìm GTNN của $B_1 = a + \frac{1}{b(a-b)}$

Giải: Ta có: $B_1 = a + \frac{1}{b(a-b)} = b + (a-b) + \frac{1}{b(a-b)} \ge 3.\sqrt[3]{\frac{b(a-b)}{b.(a-b)}}$ (theo Côsi).

$B_1 \ge 3 \Rightarrow B_1 \min = 3 \Leftrightarrow b = a-b = \frac{1}{b(a-b)} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$ Vậy: $B_1 \min = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$

2. Ví dụ 2 **:** Cho a,b > 0 và a + b = 1 . Tìm GTNN của $B_2 = \frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2 + b^2}$

Giải: Theo bđt Côsi: $(x + y)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) \ge 2\sqrt{x.y}\,.\,2\sqrt{\frac{1}{xy}} = 4$ (với x, y > 0) $\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \ge \frac{4}{x+y}$ (1)

Ta có : ab $\le (\frac{a+b}{2})^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{ab} \ge 4$ (2) do a+b = 1 ; a,b > 0

Áp dụng bất đẳng thức (1) và kết quả (2) ta có :

$$B_2 = \frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2+b^2} = \frac{2}{2ab} + \frac{1}{a^2+b^2} = \frac{1}{2ab} + (\frac{1}{2ab} + \frac{1}{a^2+b^2}) \ge \frac{4}{2} + \frac{4}{2ab+a^2+b^2}$$

$B_2 \ge 2 + \frac{4}{(a+b)^2} = 6$ do a + b = 1 $\Rightarrow B_2min = 6 \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$ Vậy: $B_2min = 6 \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$

***3. Ví dụ 3*: Cho xy + xz + yz = 4 . Tìm GTNN của $B_3 = x^4 + y^4 + z^4$**

Giải :Do xy + xz + yz = 4 $\Rightarrow 16 = (xy + xz + yz)^2 \le (x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)$

(Theo Bunhiacôpxki) $\Leftrightarrow 16 \le (x^2+y^2+z^2)^2 \le (x^4 + y^4 + z^4)(1^2+1^2+1^2)$

$\Rightarrow B_3 = x^4 + y^4 + z^4 \ge \frac{16}{3} \Rightarrow B_3min = \frac{16}{3} \Leftrightarrow x = y = z = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Vậy : $B_3min = \frac{16}{3} \Leftrightarrow x = y = z = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$

***4. Ví dụ 4*: Cho xyz = 1 và x + y + z = 3. Tìm GTNN của $B_8 = x^{16} + y^{16} + z^{16}$**

Giải : ***Cách 1* :** Ta có : $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \ge 0 \quad \forall a,b,c$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + ac + bc$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức (1) ta có :

$B_8 = x^{16} + y^{16} + z^{16} = (x^8)^2 + (y^8)^2 + (z^8)^2 \ge x^8y^8 + y^8z^8 + z^8x^8$

$\Leftrightarrow B_8 \ge x^8y^8 + y^8z^8 + z^8x^8$

$\Leftrightarrow B_8 \ge (x^4y^4)^2 + (y^4z^4)^2 + (z^4x^4)^2 \ge x^4y^4.\ y^4z^4 + x^4y^4.\ z^4x^4 + y^4z^4.\ z^4x^4$

$\Leftrightarrow B_8 \ge x^4y^8z^4 + x^8y^4z^4 + x^4y^4z^8$

$\Leftrightarrow B_8 \ge (x^2y^4z^2)^2 + (x^4y^2z^2)^2 + (x^2y^2z^4)^2 \ge x^6y^6z^4 + x^6y^4z^6 + x^4y^6z^6$

$\Leftrightarrow B_8 \ge (x^3y^3z^2)^2 + (x^2y^3z^3)^2 + (x^3y^2z^3)^2 \ge x^5y^6z^5 + x^6y^5z^5 + x^5y^5z^6$

$\Leftrightarrow B_8 \ge (xyz)^5.x + (xyz)^5.y + (xyz)^5.z = x + y + z = 3$

(do xyz = 1 và x + y + z = 3) $\Rightarrow B_8min = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$

***Cách 2*:** (Không sử dụng giả thiết xyz = 1)

Áp dụng bất đẳng thức bunhiacôpxki nhiều lần ta có :

$3 = x + y + z \Rightarrow 9 = (x+ y + z)^2 \le (x^2 + y^2 + z^2).3$

$\Leftrightarrow 3 \le (x^2 + y^2 + z^2) \Leftrightarrow 9 \le (x^2 + y^2 + z^2)^2 \le (x^4 + y^4 + z^4).3$

$\Leftrightarrow 3 \le x^4 + y^4 + z^4 \Leftrightarrow 9 \le (x^4 + y^4 + z^4)^2 \le (x^8 + y^8 + z^8).3$

$\Leftrightarrow 3 \le x^8 + y^8 + z^8 \Leftrightarrow 9 \le (x^8 + y^8 + z^8)^2 \le (x^{16} + y^{16} + z^{16}).3$

$\Leftrightarrow B_8 = x^{16} + y^{16} + z^{16} \ge 3$. $\Rightarrow B_8min = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$

Vậy : $B_8min = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$

***5. Ví dụ 5*: Cho hai số thực x, y thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 = 1$.**

Tìm GTLN và GTNN của x + y.

Giải: Ta có: $(x + y)^2 + (x - y)^2 \ge (x + y)^2$

$\Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) \ge (x + y)^2$

Mà $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow (x + y)^2 \le 2$

$\Leftrightarrow |x+y| \le \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} \le x+y \le \sqrt{2}$

- Xét $x+y \le \sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x+y=\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

- Xét $x+y \ge -\sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x+y=-\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

Vậy x + y đạt GTNN là $-\sqrt{2} \Leftrightarrow x=y=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$.

6. Ví dụ 6: Tìm GTLN của hàm số: $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}$.

Giải: Điều kiện: $\begin{cases} x-2 \ge 0 \\ 4-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \le x \le 4 (*)$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki: $(ac+bd)^2 \le (a^2+b^2)(c^2+d^2)$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$.

Chọn $a=\sqrt{x-2}; c=1; b=\sqrt{4-x}; d=1$ với $2 \le x \le 4$. Ta có:

$y^2=\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\right)^2 \le \left[\left(\sqrt{x-2}\right)^2+\left(\sqrt{4-x}\right)^2\right].\left(1^2+1^2\right)$

$\Leftrightarrow y^2 \le \left[(x-2)+(4-x)\right].2$

$\Leftrightarrow y^2 \le 4 \Leftrightarrow |y| \le 2$

Vì y > 0 nên ta có: $0 < y \le 2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x-2}=\sqrt{4-x} \Leftrightarrow x-2=4-x \Leftrightarrow x=3$ (Thỏa mãn (*))

Vậy GTLN của y là 2 tại x = 3.

7. Ví dụ 7: Tìm GTNN của biểu thức: M = $\sqrt{(x-1994)^2}+\sqrt{(x+1995)^2}$

Giải: M = $\sqrt{(x-1994)^2}+\sqrt{(x+1995)^2} = |x-1994|+|x+1995|$

áp dụng bất đẳng thức: $|a|+|b| \ge |a+b|$ ta có:

M = $|x-1994|+|x+1995| = |x-1994|+|1995+x|$ => M $\ge |x-1994+1995-x|=1$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi (x – 1994) . (1995 – x) ≥ 0

<=> $1994 \le x \le 1995$ Vậy GTNN của M = 1 ⇔ $1994 \le x \le 1995$

II. Nhận xét:

Rõ ràng khi áp dụng một số bất đẳng thức cơ bản, bài toán được giải quyết nhanh hơn. Song việc vận dụng bất đẳng thức nào thuận lợi còn tuỳ thuộc vào giả thiết bài toán và sự vận dụng linh hoạt các bất đẳng thức đó. Một vấn đề đặt ra là: Hai phương pháp vừa nêu vẫn chưa đủ để giải quyết được hết các bài toán cực trị đại số THCS. Chính vì lẽ đó nhu cầu phải có những phương pháp khác tối ưu hơn và thực hiện được yêu cầu bài toán.

III. Bài tập về nhà:

1. Cho a, b, c > 0 và a + b + c = 1. Tìm GTNN của A = $(1+\dfrac{1}{a})(1+\dfrac{1}{b})(1+\dfrac{1}{c})$

2. Cho a, b, > 0 và a + b = 1. Tìm GTNN của B = $\dfrac{2}{ab} + \dfrac{3}{a^2+b^2}$

3. Cho a, b, c > 0

a) Tìm GTNN của C = $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b}$

b) Tìm GTNN của D = $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} + \dfrac{b+c}{a} + \dfrac{c+a}{b} + \dfrac{a+b}{c}$

4. Cho x, y, z $\geq -\dfrac{3}{4}$ và x+y+z =1.Tìm GTLN của E= $\sqrt{4x+3} + \sqrt{4y+3} + \sqrt{4z+3}$

5. Cho a,b,c $\geq$ 0 và a + b + c = 1.Tìm GTLN của F = $\sqrt{a+b} + \sqrt{a+c} + \sqrt{b+c}$

6. Cho $0 \leq x \leq \dfrac{4}{3}$. Tìm GTLN của G = $4x^2 - 3x^3$

7. Cho $0 \leq x \leq 3$; Cho $0 \leq y \leq 4$. Tìm GTLN H = (3 - x)(4 - y)(2x + 3y)

8. Cho x, y, z, t $\geq$ 0 và 2x + xy + z + yzt = 1. Tìm GTLN của I = $x^2y^2z^2.t$

9. Cho x, y, z, t $\geq$ 0 và xt + xy + z + yzt = 1. Tìm GTLN của K = xyzt

10. Tìm GTNN của M = | x-2 | + | y-3 | + |x+y - 2007 |

Phương pháp 03: Sử dụng phương pháp đặt biến phụ.

Bằng cách đặt biến phụ và sử dụng các phép biến đối tương đương. Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản ta có thể chuyển biến thức đã cho về biểu thức đơn giản hơn, dễ xác định cực trị hơn.

I. Các ví dụ:

1. Ví dụ 1: Tìm GTNN của $C_1 = x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 12$

Giải : $C_1 = x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 12$

$C_1 = (x^4 + 6x^3 + 19x^2 + 30x + 25) - 6(x^2 + 3x + 5) + 17$

$C_1 = (x^2 + 3x + 5)^2 - 6(x^2 + 3x + 5) + 17$

Đặt: $x^2 + 3x + 5 = a$

$C_1 = a^2 - 6a + 17 = a^2 + 6a + 9 + 8$

$C_1 = (a - 3)^2 + 8 \geq 8$ do $(a - 3)^2 \geq 0\ \forall a$.

$\Rightarrow C_1min = 8 \Leftrightarrow a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = 3 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Vậy : $C_1min = 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

2. Ví dụ 2: Tìm GTNN của $C_2 = 2.\left(\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2}\right) - 5\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right) + 6$ với x, y > 0

Giải: Đặt: $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = a \geq 2 \Rightarrow \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} = a^2 - 2$

$\Rightarrow C_2 = 2(a^2 - 2) - 5a + 6 = 2a^2 - 5a + 2$

Ta thấy: $a \geq 2 \Rightarrow C_2 = 2a^2 - 5a + 2 \geq 0$

$\Rightarrow C_2min = 0 \Leftrightarrow a = 2 \Leftrightarrow x = y > 0$

Vậy : $C_2min = 0 \Leftrightarrow x = y > 0$

3. Ví dụ 3: Tìm GTNN của $C_3 = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 3\sqrt{\frac{x}{y}} - 3\sqrt{\frac{y}{x}} + 2004$ với x, y>0

Giải: Đặt: $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = a \ge 2 \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = a^2 - 2$. Khi đó: $C_3 = (a^2 - 2) - 3a + 2004$

$C_3 = a^2 - 3a + 2004 = a^2 - 3a + 2 + 2002 = (a-1)(a-2) + 2000$

Do ta có : $a \ge 2 \Rightarrow a - 1 > 0$; $a - 2 \ge 0 \Rightarrow (a-1)(a-2) \ge 0$

$\Rightarrow C_3 = (a-1)(a-2) + 2000 \ge 2000 \Rightarrow C_3 \min = 2000 \Leftrightarrow a = 2 \Leftrightarrow x = y$; $xy > 0$

Vậy $C_3 \min = 2000 \Leftrightarrow x = y$ và $xy > 0$

II. Bài tập về nhà:

1. Tìm GTNN của $A = x^2 + 4 - x + \frac{1}{x^2 - x + 1}$

2. Tìm GTLN của $B = \sqrt{a+1} + \sqrt{2a-3} + \sqrt{50-3a}$ với $a \in \left[\frac{3}{2}; \frac{50}{3}\right]$

3. Cho $a \ge -\frac{1}{2}$; $b \ge -\frac{1}{2}$; $c \ge -\frac{1}{2}$ và $a + b + c = 1$

Tìm GTLN của $C = \sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1}$

4. Cho x, y > 0. Tìm GTNN của $D = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 4$

Phương pháp 04: Sử dụng biểu thức phụ.

Để tìm cực trị của 1 biểu thức nào đó, đôi khi người ta xét cực trị của 1 biểu thức khác có thể so sánh được với nó, nếu biểu thức phụ dễ tìm cực trị hơn.

Ví dụ: Để tìm cực trị của biểu thức A với A > 0, ta có thể xét cực trị của biểu thức: $\frac{1}{A}$, -A, kA, k + A, |A| , A^2 (k là hằng số).

I. Các vị dụ:

1. Ví dụ 1: Tìm GTLN của $A = \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$

Giải: a) Xét $x = 0 \Rightarrow A = 0$ giá trị này không phải là GTLN của A vì với $x \ne 0$ ta có $A > 0$.

b) Xét $x \ne 0$ đặt $P = \frac{1}{A}$ khi đó $A_{max} \Leftrightarrow P_{min}$

với cách đặt trên ta có : $P = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 1$

ta có : $x^2 + \frac{1}{x^2} \ge 2\sqrt{x^2 . \frac{1}{x^2}} = 2$ (theo côsi) $\Rightarrow P \ge 2 + 1 = 3 \Rightarrow P_{min} = 3 \Leftrightarrow x = 1$

Do đó : $A_{max} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 1$

2. Ví dụ 2: Tìm GTNN của $B = \frac{-x}{(x + 2002)^2}$ với $x > 0$

Giải: Đặt $P_1 = -B$ như vậy $P_{1max} \Leftrightarrow M_{min}$

Ta có : $P_1 = \frac{x}{(x + 2002)^2}$ với $x > 0 \Rightarrow P > 0$

Đặt $P_2 = \frac{1}{P_1} > 0$ với $x > 0$ khi đó $P_{2\ Min} \Leftrightarrow P_{1\ Max}$

$P_2 = \frac{(x+2002)^2}{x} = \frac{x^2 + 2.x.2002 + 2002^2}{x}$

$P_2 = \frac{x^2 - 2.x.2002 + 2002^2 + 4.x.2002}{x}$

$P_2 = \frac{(x-2002)^2}{x} + 4.2002 \geq 4.2002 = 8008$

(do $\frac{(x-2002)^2}{x} \geq 0 \qquad \forall x > 0$)

$\Rightarrow P_{2\ Min} = 8008 \Leftrightarrow x = 2002 \Rightarrow P_{1\ Max} = \frac{1}{8008} \Leftrightarrow x = 2002$

$\Leftrightarrow B_{Min} = -\frac{1}{8008} \Leftrightarrow x = 2002$ Vậy $B_{Min} = -\frac{1}{8008} \Leftrightarrow x = 2002$

***<u>3. Ví dụ 3</u>*: Cho a, b, c dương và a + b + c = 3**

Tìm GTLN của $C = \sqrt{5a+4b} + \sqrt{5b+4c} + \sqrt{5c+4a}$

<u>Giải</u>: Do a, b, c > 0 ⇒ C > 0

Đặt: $P = C^2$ khi đó $\sqrt{P_{Max}} \Leftrightarrow C_{Max}$

Ta có: $P = \left(\sqrt{5a+4b} + \sqrt{5b+4c} + \sqrt{5c+4a}\right)^2$

$\Leftrightarrow \quad P \leq (1^2 + 1^2 + 1^2)(5a + 4b + 5b + 4c + 5c + 4a)$ theo Bunhiacôpxki

$P \leq 3.9(a + b + c) = 81 \quad$ do a + b + c = 3

$\Rightarrow P_{Max} = 81 \Leftrightarrow a = b = c = 1 \Leftrightarrow C^2_{Max} = 81 \Leftrightarrow a = b = c = 1$

$\Leftrightarrow C_{Max} = 9 \Leftrightarrow \Leftrightarrow a = b = c = 1$ Vậy $C_{Max} = 9 \Leftrightarrow \Leftrightarrow a = b = c = 1$

***<u>4. Ví dụ 4</u>*: Cho x, y, z, t > 0**

Tìm GTNN của $D = \frac{x}{y+t} + \frac{y+t}{x} + \frac{y}{t+x} + \frac{t+x}{y} + \frac{t}{x+y} + \frac{x+y}{t}$

<u>Giải</u> : Đặt P = 2D ta có :

$P = \frac{2x}{y+t} + \frac{2(y+t)}{x} + \frac{2y}{t+x} + \frac{2(t+x)}{y} + \frac{2t}{x+y} + \frac{2(x+y)}{t}$

$P = \left(\frac{2x}{y+t} + \frac{y+t}{2x}\right) + \left(\frac{2y}{t+x} + \frac{t+x}{2y}\right) + \left(\frac{2t}{x+y} + \frac{x+y}{2t}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{y+t}{x} + \frac{t+x}{y} + \frac{x+t}{t}\right)$

$P = \left(\frac{2x}{y+t} + \frac{y+t}{2x}\right) + \left(\frac{2y}{t+x} + \frac{t+x}{2y}\right) + \left(\frac{2t}{x+y} + \frac{x+y}{2t}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{y}{x} + \frac{t}{x} + \frac{t}{y} + \frac{x}{y} + \frac{x}{t} + \frac{y}{t}\right)$

$P \geq \quad 2 + 2 + 2 + \frac{3}{6}.6$ (theo côsi)

$P \geq 15 \Rightarrow P_{Min} = 15 \Leftrightarrow x = y = t > 0 \Rightarrow D_{Min} = \frac{15}{2} \Leftrightarrow x = y = t$ b Vậy $D_{Min} = \frac{15}{2} \Leftrightarrow x = y = t$

II. Các bài tập :

1. Cho x,y, z > 0 và $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm GTNN của A $= \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}$

2. Cho x ≠ 0. Tìm GTNN của B = $\frac{x^8 + x^4 + 1}{x^4}$

3. Cho x ≠ 0. Tìm GTLN của C = $\frac{x^8}{x^{16} + x^8 + 1}$

4. Cho $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm GTLN của D = a + 2b + 3c

5. Cho a,b > 0 và a + b = 2. Tìm GTNN của E = $\left(1 - \frac{4}{a^2}\right)\left(1 - \frac{4}{b^2}\right)$

6. Cho a, b, c, d > 0. Tìm GTNN của F = $\frac{a+b}{b+c+d} = \frac{b+c}{c+d+a} + \frac{c+d}{d+a+b} + \frac{d+a}{a+b+c}$

7. Cho a,b ∈ |R. Tìm GTNN của G = $\sqrt{a^2 + (1-b)^2} + \sqrt{b^2 + (1-a)^2}$

Phương pháp 05: Phương pháp miền giá trị.

Trong một số trường hợp đặc biệt, biểu thức đại số đã cho chỉ có thể có một hoặc hai biến số và đưa được về dạng tam thức bậc 2 thì ta có thể sử dụng kiến thức về miền già trị của hàm số để giải.

❖ **Phương pháp chung:**

Giải sử ta phải tìm cực trị của hàm số f(x) có miền giá trị D. Gọi y là một giá trị nào đó của f(x) với x ∈ D. Điều này có nghĩa là điều kiện để phương trình f(x) = y có nghiệm. Sau đó giải điều kiện để phương trình f(x) = y có nghiệm (x là biến, coi y là tham số).

Thường đưa đến biểu thức sau: m ≤y≤M

Từ đó ⇒ Min f(x) = m   với x ∈ D.

⇒ Max f(x) = M   với x ∈ D.

I. Các ví dụ:

1. Ví dụ 1: Tìm GTNN của $f(x) = x^2 + 4x + 5$

Giải: Gọi y là một giá trị của f(x) .

Ta có : $y = x^2 + 4x + 5$

⇔ $x^2 + 4x + 5 - y = 0$ (có nghiệm)

⇔ $\Delta' = 4 - 5 + y \geq 0$

⇔ $y \geq 1$

Vậy $f(x)_{Min} = 1$ ⇔ x = -2

2. Ví dụ 2: Tìm GTLN của $f(x) = - x^2 + 2x - 7$

Giải: Gọi y là một giá trị của f(x). Ta có: $y = - x^2 + 2x - 7$

⇔ $x^2 - 2x + y + 7$ (có nghiệm)

⇔ $\Delta' = 1 - y - 1 \geq 0$

⇔ $y \leq - 6$

Vậy $f(x)_{Max} = -6$ ⇔ x = 1

3. Ví dụ 3: Tìm GTLN, GTNN của f(x) = $\frac{x^2 + 4x + 6}{x^2 + 2x + 3}$

Giải: Gọi y là một giá trị của f(x) .

Ta có : y = $\frac{x^2+4x+6}{x^2+2x+3}$ $\Leftrightarrow yx^2 + 2yx + 3y - x^2 - 4x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow (y - 1)x^2 + 2(y - 2).x + 3y - 6 = 0$ (có nghiệm)

* Nếu $y = 1 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

* Nếu $y \neq 1 \Rightarrow \Delta' = (y - 2)^2 + (3y - 6)(1 - y) \geq 0$

$\Leftrightarrow y^2 - 4y + 4 - 3y^2 + 3y + 6y - 6 \geq 0 \Leftrightarrow -2y^2 + 5y + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq y \leq 2$

Ta thấy : $\frac{1}{2} < 1 < 2$

Do vậy : $f(x)_{Min} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -3$; $f(x)_{Max} = 2 \Leftrightarrow x = 0$

CHUYÊN ĐỀ IX: GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH.

A) TÓM TẮT Lí THUYẾT

Bước 1: Lập phương trình hoặc hệ phương trình:

a) Chọn ẩn và đặt điều kiện cho ẩn.

b) Biểu diễn các đại lượng chưa biết thông qua ẩn và các địa lượng đã biết.

c) Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2: Giải phương trình.

Bước 3: Đối chiếu nghiệm của pt, hệ phương trình (nếu có) với điều kiện của ẩn số để trả lời.

Chú ý: Tuỳ từng bài tập cụ thể mà ta có thể lập phương trình bậc nhất một ẩn, hệ phương trình hay phương trình bậc hai.

Khi đặt diều kiện cho ẩn ta phải dựa vào nội dung bài toán và những kiến thức thực tế....

B) CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Toán về quan hệ các số.

Những kiến thức cần nhớ:

+ Biểu diễn số có hai chữ số: $\overline{ab} = 10a + b$ (với $0<a \leq 9$; $0 \leq b \leq 9; a, b \in N$)

+ Biểu diễn số có ba chữ số: $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ (với $0<a \leq 9$; $0 \leq b,c \leq 9; a, b, c \in N$)

+ Tổng hai số x; y là: x + y

+ Tổng bình phương hai số x, y là: $x^2 + y^2$

+ Bình phương của tổng hai số x, y là: $(x + y)^2$

+ Tổng nghịch đảo hai số x, y là: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

Ví dụ 1: Một số của một phân số lớn hơn tử số của nó là 3 đơn vị. Nếu tăng cả tử và mẫu của nó thêm 1 đơn vị thì được một phân số mới bằng $\frac{1}{2}$ phân số đã cho. Tìm phân số đó?

Giải:

Gọi tử số của phân số đó là x (đk: $x \neq 3$)

Mẫu số của phân số đó là x + 3.

Nếu tăng cả tử và mẫu thêm 1 đơn vị thì:

Tử số là x + 1

Mẫu số là x + 3 + 1 = x + 4

Được phân số mới bằng $\frac{1}{2}$ ta có phương trình $\frac{x+1}{x+4}=\frac{1}{2}$.

$\Leftrightarrow 2(x+1) = x+4$

$\Leftrightarrow x = 2$(Thoả mãn điều kiện của bài toán)

V ph s�ban �u 字 cho l� $\frac{2}{5}$

Ví dụ 2: Tổng các chữ số của 1 số có hai chữ số là 9. Nếu thêm vào số đó 63 đơn vị thì số thu được cũng viết bằng hai chữ số đó nhưng theo thứ tự ngược lại. Hãy tìm số đó?

Giải

Gọi chữ số hàng chục là x ($(0 < x \le 9, x \in N)$

Ch�s�h g ↑n v��y $(0<y \le 9, y \in N)$

Vì tổng 2 chữ số là 9 ta có x + y = 9 (1)

Số đó là $\overline{xy} = 10x + y$

Số viết ngược lại là $\overline{yx} = 10y + x$

Vì thêm vào số đó 63 đơn vị thì được số viết theo thứ tự ngược lại ta có

$\overline{xy} + 63 = \overline{yx} \Rightarrow 10x + y + 63 = 10y + x$

$\Leftrightarrow 9x - 9y = -63 (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} x+y=9 \\ 9x-9y=-63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=9 \\ x-y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=2 \\ x+y=9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=8 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

Vậy số phải tìm là 18.

Ví dụ 3: Tìm hai số tự nhiên liên tiếp có tổng các bình phương của nó là 85.

Giải

Gọi số bé là x ($x \in N$). Số tự nhiên kề sau là x + 1.

Vì tổng các bình phương của nó là 85 nên ta có phương trình: $x^2 + (x + 1)^2 = 85$

$\Leftrightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 = 85 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 84 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 42 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4.1.(-42) = 169 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{169} = 13$

Phương trình có hai nghiệm

$$x_1 = \frac{-1+13}{2} = 6(\text{thoả mãn điều kiện})$$

$$x_2 = \frac{-1-13}{2} = -7(\text{loại})$$

Vậy hai số phải tìm là 6 và 7.

Bài tập:

Bài 1: Đem một số nhân với 3 rồi trừ đi 7 thì được 50. Hỏi số đó là bao nhiêu?

Bài 2: Tổng hai số bằng 51. Tìm hai số đó biết rằng $\frac{2}{5}$ số thứ nhất thì bằng $\frac{1}{6}$ số thứ hai.

Bài 3: Tìm một số tự nhiên có hai chữ số, biết tổng các chữ số của nó là 7. Nếu đổi chỗ hai chữ số hàng đơn vị và hàng chụccho nhau thì số đó giảm đi 45 đơn vị.

Bài 4: Tìm hai số hơn kém nhau 5 đơn vị và tích của chúng bằng 150.

Bài 5: Tìm số tự nhiên có 2 chữ số, biết rằng số đó bằng lập phương của số tạo bởi chữ số hàng vạn và chữ số hàng nghìn của số đã cho theo thứ tự đó.

ĐÁP SỐ:

Bài 1: Số đó là 19;

Bài 2: Hai số đó là 15 và 36

Bài 3: Số đó là 61

Bài 4: Hai số đó là 10 và 15 hoặc -10 và -15;

Bài 5: Số đó là 32.

Tiết 2:

Dạng 2: Toán chuyển động

Những kiến thức cần nhớ:

Nếu gọi quảng đường là S; Vận tốc là v; thời gian là t thì:

S = v. t ; $v = \frac{s}{t}; t = \frac{s}{v}$.

Gọi vận tốc thực của ca nô là v_1 vận tốc dòng nước là v_2 tì vận tốc ca nô khi xuôi dòng nước là
$v = v_1 + v_2$. Vân tốc ca nô khi ngược dòng là $v = v_1 - v_2$

Ví dụ 1: Xe máy thứ nhất đi trên quảng đường từ Hà Nội về Thái Bình hết 3 giờ 20 phút. Xe máy thứ hai đi hết 3 giờ 40 phút. Mỗi giờ xe máy thứ nhất đi nhanh hơn xe máy thứ hai 3 km. Tính vận tốc của mỗi xe máy và quảng đường từ Hà Nội đến Thái Bình?

Giải:

Gọi vận tốc x thứ nhất là x (km/h), đk: x>3;

Vận tốc của xe tứ hai là x - 3 (km/h).

Trong 3 giờ 20 phút (=$\frac{10}{3}$ giờ) xe máy thứ nhất đi được $\frac{10}{3}x(km)$

Trong 3 giờ 40 phút (=$\frac{11}{3}$ giờ) xe máy thứ nhất đi được $\frac{11}{3}(x-3)(km)$

Đó là quảng đường tứ Hà nội đến Thái Bình nên ta có phương trình

$\frac{10}{3}x = \frac{11}{3}(x-3) \Leftrightarrow x = 33$ (thoả mãn điều kiện bài toán).

Vậy vận tốc của xe máy thứ nhất là 33 km/h. Vận tốc của xe máy thứ hai là 30 km/h. Quảng đường từ Hà Nội đến Thái Bình là 110 km.

Ví dụ 2: Đoạn đường AB dài 180 km . Cùng một lúc xe máy đi từ A và ô tô đi từ B xe máy gặp ô tô tại C cách A 80 km. Nếu xe máy khởi hành sau 54 phút thì chúng gặp nhau tại D cách A là 60 km. Tính vận tốc của ô tô và xe máy ?

Giải

Gọi vận tốc của ô tô là x (km/h), đk: x > 0.

Gọi vận tốc của xe máylà y (km/h), đk: y > 0.

Thời gian xe máy đi để gặp ô tô là $\frac{80}{y}$(giờ)

Quảng đường ô tô đi là 100 km nên thời gian ô tô đi là $\frac{100}{y}$(giờ)

ta có phương trình $\frac{100}{x} = \frac{80}{y}(1)$

Quảng đường xe máy đi là 60 km nên thời gian xe máy đi là $\frac{60}{y}$(giờ)

Quảng đường ô tô đi lag 120 km nên thời gian ô tô đi là $\frac{120}{y}$(giờ)

Vì ô tô đi trước xe máy 54 phút = $\frac{9}{10}$ nên ta có phương trình

$\frac{120}{x} - \frac{60}{y} = \frac{9}{10}(2)$.

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} \frac{100}{x} = \frac{80}{y} \\ \frac{120}{x} - \frac{60}{y} = \frac{9}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{100}{x} - \frac{80}{y} = 0 \\ \frac{40}{x} - \frac{20}{y} = \frac{3}{10} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{100}{x} - \frac{80}{y} = 0 \\ \frac{160}{x} - \frac{80}{y} = \frac{12}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{60}{x} = \frac{12}{10} \\ \frac{100}{x} - \frac{80}{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 40 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

Vậy vận tốc của ô tô là 50 km/h. Vận tốc của xe máy là 40 km/h.

Ví dụ 3: Một ô tô đi trên quảng đường dai 520 km. Khi đi được 240 km thì ô tộ tăng vận tốc thêm 10 km/h nữa và đi hết quảng đường còn lại. T ính vận tốc ban đầu của ô tô biết thời gian đi hết quảng đường là 8 giờ.

Giải:

Gọi vận tốc ban đầu của ô tô là x (km/h), đk: x>0.

Vận tốc lúc sau của ô tô là x+10 (km/h).

Thời gian ô tô đi hết quảng đường đầu là $\frac{240}{x}$ (giờ)

Thời gian ô tô đi hết quảng đường đầu là $\frac{280}{x+10}$ (giờ)

Vì thời gian ô tô đi hết quảng đường là 8 giờ nên ta có phương trình

$$\frac{240}{x}+\frac{280}{x+10}=8\Rightarrow x^2-55x-300=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=(-55)^2-4.(-300)=4225>0\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{4225}=65$$

Phương trình có hai nghiệm $x_1=\frac{55+65}{2}=60(\text{TMDK});x_2=\frac{55-65}{2}=-5(\text{loai})$

Vậy vận tốc ban đầu của ô tô là 60 km/h.

Bài tập:

1. Một ô tô khởi hành từ A với vận tốc 50 km/h. Qua 1 giờ 15 phút ô tô thứ hai cũng khởi hành từ A đi cùng hướng với ô tô thứ nhất với vận tốc 40 km/h. Hỏi sau mấy giờ thì ô tô gặp nhau, điểm gặp nhau cách A bao nhiêu km?

2. Một ca nô xuôi dòng 50 km rồi ngược dòng 30 km. Biết thời gian đi xuôi dòng lâu hơn thời gian ngược dòng là 30 phút và vận tốc đi xuôi dòng lớn hơn vận tốc đi ngược dòng là 5 km/h.

Tính vận tốc lúc đi xuôi dòng?

3. Hai ô tô cùng khởi hành cùng một lúc từ A đến B cách nhau 150 km. Biết vận tốc ô tô thứ nhất lớn hơn vận tốc ô tô thứ hai là 10 km/h và ô tô thứ nhất đến B trước ô tô thứ hai là 30 phút. Tính vânl tốc của mỗi ô tô.

4. Một chiếc thuyền đi trên dòng sông dài 50 km. Tổng thời gian xuôi dòng và ngược dòng là 4 giờ 10 phút. Tính vận tốc thực của thuyền biết rằng một chiếc bè thả nổi phải mất 10 giờ mới xuôi hết dòng sông.

5. Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 108 km. Cùng lúc đó một ô tô khởi hành từ B đến A với vận tốc hơn vận tốc xe đạp là 18 km/h. Sau khi hai xe gặp nhau xe đạp phải đi mất 4 giờ nữa mới tới B. Tính vận tốc của mỗi xe?

6. Một ca nô xuôi dòng từ A đến B cách nhau 100 km. Cùng lúc đó một bè nứa trôi tự do từ A đến B. Ca nô đến B thì quay lại A ngay, thời gian cả xuôi dòng

và ngược dòng hết 15 giờ. Trên đường ca nô ngược về A thì gặp bè nứa tại một điểm cách A là 50 km. Tìm vận tốc riêng của ca nô và vận tốc của dòng nước?

Đáp án:

1. $4\frac{3}{8}$(giờ)

2. 20 km/h

3. Vận tốc của ô tô thứ nhất 60 km/h. Vận tốc của ô tô thứ hai là 50 km/h.

4. 25 km/h

5.

6. Vận tốc của ca nô là 15 km/h. Vận tốc của dòng nước là 5 km/h.

Tiết 3:

Dạng 3: Toán làm chung công việc

Những kiến thức cần nhớ:

- Nếu một đội làm xong công việc trong x giờ thì một ngày đội đó làm được $\frac{1}{x}$ công việc.
- Xem toàn bộ công việc là 1

Ví dụ 1:

Hai người thợ cùng làm một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm 3 giờ, người thứ hai làm 6 giờ thì chỉ hoàn thành được 25% công việc. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người hoàn thành công việc trong bao lâu?

<u>Giải:</u>

Ta có 25% = $\frac{1}{4}$.

Gọi thời gian một mình người thứ nhất hoàn thành công việc là x(x > 0; giờ)

Gọi thời gian một mình người thứ hai hoàn thành công việc là y(y > 0; giờ)

Trong một giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ công việc

Trong một giờ người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ công việc.

Hai người cùng làm thì xong trong 16 giờ. Vậy trong 1 giờ cả hai người cùng làm được $\frac{1}{16}$ công việc.

Ta có phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{16}(1)$

Người thứ nhất làm trong 3 giờ, người thứ hai làm trong 6 giờ thì 25%= $\frac{1}{4}$ công việc.

Ta có phương trình $\frac{3}{x}+\frac{6}{y}=\frac{1}{4}(2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{16}\\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{y}=\dfrac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{3}{x}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{3}{16}\\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{y}=\dfrac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{16}\\ \dfrac{3}{y}=\dfrac{1}{16}\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=24\\ y=48\end{cases}$ (thoả mãn điều kiện) .

Vậy nếu làm riêng thì người thứ nhất hoàn thành công việc trong 24 giờ. Người thứ hai hoàn thành công việc trong 48 giờ.

Ví dụ 2:

Hai thợ cùng đào một con mương thì sau 2giờ 55 phút thì xong việc. Nếu họ làm riêng thì đội 1 hoàn thành công việc nhanh hơn đội 2 là 2 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội phải làm trong bao nhiêu giờ thì xong công việc?

Giải:

Gọi thời gian đội 1 làm một mình xong công việc là x ($x > 0$; giờ)

Gọi thời gian đội 2 làm một mình xong công việc là $x + 2$ (giờ)

Mỗi giờ đội 1 làm được $\dfrac{1}{x}$ công việc

Mỗi giờ đội 2 làm được $\dfrac{1}{x+2}$ công việc

Vì cả hai đội thì sau 2 giờ 55 phút $=2\dfrac{11}{12}=\dfrac{35}{12}$ (giờ) xong.

Trong 1 giờ cả hai đội làm được $\dfrac{12}{35}$ công việc

Theo bài ra ta có phương trình $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{12}{35} \Leftrightarrow 35x+70+35=12x^2+24x$

$$\Leftrightarrow 12x^2-46x-70=0 \Leftrightarrow 6x^2-23x-35=0$$

Ta có

$$\Delta=(-23)^2-4.6.(-35)=529+840=1369>0 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{1369}=37$$

V ph[illegible]ng tr h c[illegible]hai nghi $x_1=\dfrac{23+37}{12}=5$(thoa mãn); $x_2=\dfrac{23-37}{12}=-2$(loại)

Vậy đội thứ nhất hoàn thành công việc trong 5 giờ. Đội hai hoàn thành công việc trong 7 giờ.

Chú ý:

+ Nếu có hai đối tượng cùng làm một công việc nếu biết thời gian của đại lượng này hơn, kém đại lượng kia ta nên chọn một ẩn và đưa về phương trình bậc hai.

+ Nếu thời gian của hai đại lượng này không phụ thuộc vào nhau ta nên chọn hai ẩn làm thời gian của hai đội rồi đưa về dạng hệ phương trình để giải.

Ví dụ 3:

Hai người thợ cùng sơn cửa cho một ngôi nhà thì 2 ngày xong việc. Nếu người thứ nhất làm trong 4 ngày rồi nghỉ người thứ hai làm tiếp trong 1 ngày nữa thì xong việc. Hỏi mỗi người làm một mình thì bao lâu xong công việc?

Giải:

Gọi thời gian để một mình người thứ nhất hoàn thành công việc là x (x > 2; ngày)

Gọi thời gian để một mình người thứ hai hoàn thành công việc là y (x > 2; ngày).

Trong một ngày người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ công việc

Trong một ngày người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ công việc

Cả hai người làm xong trong 2 ngày nên trong 1 ngày cả hai người làm được $\frac{1}{2}$ công việc. Từ đó ta có pt $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ (1)

Người thứ nhất làm trong 4 ngày rồi người thứ hai làm trong 1 ngày thì xong công việc ta có pt:

$\frac{4}{x} + \frac{1}{y} = 1$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ pt $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \\ \frac{4}{x} + \frac{1}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{x} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$ (thoả mãn đk)

Vậy người thứ nhất làm một mình xong công việc trong 6 ngày. Người thứ hai làm một mình xong công việc trong 3 ngày.

Bài tâp:

1. Hai người thợ cùng làm một công việc thì xong trong 18 giờ. Nếu người thứ nhất làm trong 4 giờ, người thứ hai làm trong 7 giờ thì được 1/3 công việc. Hỏi mỗi người làm một mình thì mất bao lâu sẽ xong công việc?

2. Để hoàn thành một công việc hai tổ phải làm trong 6 giờ. Sau 2 giờ làm chung thì tổ hai được điều đi làm việc khác. Tổ một đã hoàn thành công việc còn lại trong 10 giờ. Hỏi nếu mỗi tổ làm riêng thì bao lâu xong công việc đó?

3. Hai đội công nhân cùng đào một con mương. Nếu họ cùng làm thì trong 2 ngày sẽ xong công việc. Nếu làm riêng thì đội haihoàn thành công việc nhanh hơn đội một là 3 ngày. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội phải làm trong bao nhiêu ngày để xong công việc?

4. Hai chiếc bình rỗng giống nhau có cùng dung tích là 375 lít. Ở mỗi bình có một vòi nước chảy vào và dung lượng nước chảy trong một giờ là như nhau. Người ta mở cho hai vòi cùng chảy vào bình nhưng sau 2 giờ thì khoá vòi thứ hai lại và sau 45 phút mới tiếp tục mở lại. Để hai bình cùng đầy một lúc người ta phải tăng dung lượng vòi thứ hai thêm 25 lít/giờ.

Tính xem mỗi giờ vòi thứ nhất chảy được bao nhiêu lít nước.

Kết quả:

1) Người thứ nhất làm một mình trong 54 giờ. Người thứ hai làm một mình trong 27 giờ.

2) Tổ thứ nhất làm một mình trong 10 giờ. Tổ thứ hai làm một mình trong 15 giờ.

3) Đội thứ nhất làm một mình trong 6 ngày. Đội thứ hai làm một mình trong 3 ngày.
4) Mỗi giờ vòi thứ nhất chảy được 75 lít.

Tiết 4:
Dạng 4: Toán có nội dung hình học:

Kiến thức cần nhớ:
- Diện tích hình chữ nhật S = x.y (x là chiều rộng; y là chiều dài)
- Diện tích tam giác $S = \frac{1}{2}x.y$ (x là chiều cao, y là cạnh đảy tương ứng)
- Độ dài cạnh huyền: $c^2 = a^2 + b^2$ (c là cạnh huyền; a, b là các cạnh góc vuông)
- Số đường chéo của một đa giác $\frac{n(n-3)}{2}$ (n là số đỉnh)

Ví dụ 1: Tính các kích thước của hình chữ nhật có diện tích 40 cm^2, biết rằng nếu tăng mỗi kích thước thêm 3 cm thì diện tích tăng thêm 48 cm^2.
Giải:
Gọi các kích thước của hình chữ nhật lần lượt là x và y (cm; x, y > 0).
Diện tích hình chữ nhật lúc đầu là x.y (cm^2). Theo bài ra ta có pt x.y = 40 (1)
Khi tăng mỗi chiều thêm 3 cm thì diện tích hình chữ nhật là. Theo bài ra ta có pt
$(x + 3)(y + 3) – xy = 48 \Leftrightarrow 3x + 3y + 9 = 48 \Leftrightarrow x + y = 13 (2)$
Từ (1) và (2) suy ra x và y là nghiệm của pt $X^2 – 13 X + 40 = 0$
Ta có $\Delta = (-13)^2 - 4.40 = 9 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3$
Phương trình có hai nghiệm $X_1 = \frac{13+3}{2} = 8; X_2 = \frac{13-3}{2} = 5$
Vậy các kích thước của hình chữ nhật là 5 (cm) và 8 (cm)
Ví dụ 2: Cạnh huyền của một tam giác vuông bằng 5 m. Hai cạnh góc vuông hơn kém nhau 1m. Tính các cạnh góc vuông của tam giác?
Giải:
Gọi cạnh góc vuông thứ nhất là x (m) (5 > x > 0)
Cạnh góc vuông thứ hai là x + 1 (m)
Vì cạnh huyền bằng 5m nên theo định lý pi – ta – go ta có phương trình
$x^2 + (x + 1)^2 = 5^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 24 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$
$\Delta = 1^2 - 4.(-12) = 49 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 7$
Ph ng tr h c hai nghi ph bi
$x_1 = \frac{-1+7}{2} = 3$ (thoả mãn); $x_2 = \frac{-1-7}{2} = -4$(loại)
Vậy kích thước các cạnh góc vuông của tam giác vuông là 3 m và 4 m.
Bài tâp:
Bài 1: Một hình chữ nhật có đường chéo bằng 13 m, chiều dài hơn chiều rộng 7 m. Tính diện tích hình chữ nhật đó?
Bài 2: Một thửa ruộng hình chữ nhật có chu vi là 250 m. Tính diện tích của thửa ruộng biết rằng chiều dài giảm 3 lần và chiều rộng tăng 2 lần thì chu vi thửa ruộng không thay đổi

Bài 3: Một đa giác lồi có tất cả 35 đường chéo. Hỏi đa giác đó có bao nhiêu đỉnh?

Bài 4: Một cái sân hình tam giác có diện tích 180 m^2. Tính cạnh đáy của sân biết rằng nếu tăng cạnh đáy 4 m và giảm chiều cao tương ứng 1 m thì diện tích không đổi?

Bài 5: Một miếng đất hình thang cân có chiều cao là 35 m hai đáy lần lượt bằng 30 m và 50 m người ta làm hai đoạn đường có cùng chiều rộng. Các tim đứng lần lượt là đường trung bình của hình thang và đoạn thẳng nối hai trung điểm của hai đáy. Tính chiều rộng đoạn đường đó biết rằng diện tích phần làm đường bằng $\frac{1}{4}$ diện tích hình thang.

Đáp số: Bài 1: Diện tích hình chữ nhật là 60 m^2

Bài 2: Diện tích hình chữ nhật là 3750 m^2

Bài 3: Đa giác có 10 đỉnh

Bài 4: Cạnh đày của tam giác là 36 m.

Bài 5: Chiều rộng của đoạn đường là 5 m.

Dạng 5: Toán lãi suất, tăng trưởng:

Những kiến thức cần nhớ:

+ $x\% = \frac{x}{100}$

+ Dân số tỉnh A năm ngoái là a, tỷ lệ gia tăng dân số là x% thì dân số năm nay của tỉnh A là

$$a + a.\frac{x}{100}$$

Số dân năm sau là $(a+a.\frac{x}{100}) + (a+a.\frac{x}{100}).\frac{x}{100}$

Ví dụ 1: Bài 42 – SGK tr 58

Gọi lãi suất cho vay là x (%), đk: x > 0

Tiền lãi suất sau 1 năm là $2000000.\frac{x}{100} = 20000$ (đồng)

Sau 1 năm cả vốn lẫn lãi là 200000 + 20000 x (đồng)

Riêng tiền lãi năm thứ hai là $(2000000 + 20000x).\frac{x}{100} = 20000x + 200x^2$ (đồng)

Số tiền sau hai năm Bác Thời phải trả là 2000000 +20000x + 20000x + $200x^2$(đồng)

$200x^2$ + 40000x +2000000 (đồng)

Theo bài ra ta có phương trình $200x^2 + 40\,000x + 2000000 = 2420000$

$$\Leftrightarrow x^2 + 200x - 2100 = 0 .$$

Giải phương trình ta được $x_1 = 10$ (thoả mãn); $x_2 = -210$ (không thoả mãn)

Vậy lãi suất cho vay là 10 % trong một năm.

Ví dụ 2: Theo kế hoạch hai tổ sản xuất 600 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do áp dụng kỹ thuật mới nên tổ I đã sản xuất vượt mức kế hoạch là 18% và tổ II vượt mức 21%. Vì vậy trong thời gian quy định họ đã hoàn thành vượt mức 120 sản phẩm. Hỏi số sản phẩm được giao của mỗi tổ là bao nhiêu.

Giải

Gọi x là số sản phẩm tổ I hoàn thành theo kế hoạch (sản phẩm), đk 0 < x < 600.

Số sản phẩm tổ II hoàn thành theo kế hoạch là 600 – x (sản phẩm).

Số sản phẩm vượt mức của tổ I là $x.\frac{18}{100}$ (sản phẩm).

Số sản phẩm vượt mức của tổ II là $(600-x).\frac{21}{100}$ (sản phẩm).

Vì số sản phẩm vượt mức kế hoạch của hai tổ là 120 sản phẩm ta có pt

$\frac{18x}{100}+\frac{21(600-x)}{100}=120$ ⇔ x = 20 (thoả mãn yêu cầu của bài toán)

Vậy số sản phẩm theo kế hoạch của tổ I là 200 (sản phẩm)
Vậy số sản phẩm theo kế hoạch của tổ II là 400 (sản phẩm)

Bài tập:

Bài 1: Dân số của thành phố Hà Nội sau 2 năm tăng từ 200000 lên 2048288 người. Tính xem hàng năm trung bình dân số tăng bao nhiêu phần trăm.

Bài 2: Bác An vay 10 000 000 đồng của ngân hàng để làm kinh tế. Trong một năm đầu bác chưa trả được nên số tiền lãi trong năm đầu được chuyển thành vốn để tính lãi năm sau. Sau 2 năm bác An phải trả là 11 881 000 đồng. Hỏi lãi suất cho vay là bao nhiêu phần trăm trong một năm?

Bài 3: Theo kế hoạch hai tổ sản xuất 1000 sản phẩm trong một thời gian dự định. Do áp dụng kỹ thuật mới nên tổ I vượt mức kế hoạch 15% và tổ hai vượt mức 17%. Vì vậy trong thời gian quy định cả hai tổ đã sản xuất được tất cả được 1162 sản phẩm. Hỏi số sản phẩm của mỗi tổ là bao nhiêu?

Kết quả:

Bài 1: Trung bình dân số tăng 1,2%
Bài 2: Lãi suất cho vay là 9% trong 1 năm
Bài 3: Tổ I được giao 400 sản phẩm. Tổ II được giao 600 sản phẩm

Dạng 6: Các dạng toán khác

Những kiến thức cần nhớ :

- $V=\frac{m}{D}$ (V là thể tich dung dich; m là khối lư g; D l kh l ng ri g)
- Khối lượng nồng độ dung dịch = $\frac{\text{Kh l ng ch tan}}{\text{Kh l ng dung m (m t g)}}$

Ví dụ : (Bài 5 trang 59 SGK)

Gọi trọng lượng nước trong dung dịch trước khi đổ thêm nước là x (g). đk x > 0.

Nồng độ muối của dung dịch khi đó là $\frac{40}{x+40}\%$

Nếu đổ thêm 200g nước vào dung dịch thì trọng lượng của dung dịch là: $\frac{40}{x+240}\%$

Vì nồng độ giảm 10% nên ta có phương trình

$\frac{40}{x+40}-\frac{40}{x+240}=\frac{10}{100}\Leftrightarrow x^2+280x-70400=0$

Giải pt ta được x_1 = -440 (loại); x_2 = 160 (thoả mãn đk của bài toán)

Vậy trước khi đổ thêm nước trong dung dịch có 160 g nước.

Ví dụ 2: Người ta trộn 8g chất lỏng này với 6g chất lỏng khác có khối lượng riêng nhỏ hơn nó là 0,2g/cm^3 để được hỗn hợp có khối lượng riêng 0,7g/cm^3. Tìm khối lượng riêng của mỗi chất lỏng.

Giải

Gọi khối lượng riêng của chất lỏng thứ nhất là x (g/cm^3). Đk x > 0,2

Khối lượng riêng của chất lỏng thứ nhất là x – 0,2 (g/cm^3).

Thể tích của chất lỏng thứ nhất là $\frac{8}{x}(cm^3)$

Thể tích của chất lỏng thứ hai là $\frac{6}{x-0,2}(cm^3)$

Thể tích của hỗn hợp là $\frac{8}{x}+\frac{6}{x+0,2}(cm^3)$

Theo bài ra ta có pt $\frac{8}{x}+\frac{6}{x+0,2}=\frac{14}{0,7}\Leftrightarrow 14x^2-12,6x+1,12=0$. Giải pt ta được kết quả

x_1 = 0,1 (loại) ; x_2 = 0,8 (t/m đk)

Vậy khối lượng riêng của chất lỏng thứ nhất là 0,8 (g/cm^3)

Khối lượng riêng của chất lỏng thứ hai là 0,6 (g/cm^3).

Bài tập:

Bài 1: Một phòng họp có 240 ghế được xếp thành các dãy có số ghế bằng nhau. Nếu mỗi dãy bớt đi một ghế thì phải xếp thêm 20 dãy mới hết số ghế. Hỏi phòng họp lúc đầu được xếp thành bao nhiêu dãy ghế.

Bài 2: Hai giá sách có 400 cuốn. Nếu chuyển từ giá thứ nhất sang giá thứ hai 30 cuốn thì số sách ở giá thứ nhất bằng $\frac{3}{5}$ số sách ở ngăn thứ hai. Tính số sách ban đầu của mỗi ngăn?

Bài 3: Người ta trồng 35 cây dừa trên một thửa đất hình chữ nhật có chiều dài 30 m chiều rộng là 20 m thành những hàng song song cách đều nhau theo cả hai chiều. Hàng cây ngoài cùng trồng ngay trên biên của thửa đất. Hãy tính khoảng cách giữa hai hàng liên tiếp?

Bài 4: Hai người nông dân mang 100 quả trứng ra chợ bán. Số trứng của hai người không bằng nhau nhưng số tiền thu được của hai người lại bằng nhau. Một người nói với người kia: " Nếu số trứng của tôi bằng số trứng của anh thì tôi bán được 15 đồng ". Người kia nói " Nếu số trứng của tôi bằng số trứmg của anh tôi chỉ bán được $6\frac{2}{3}$ đồng thôi". Hỏi mỗi người có bao nhiêu quả trứng?

Bài 5: Một hợp kim gồm đồng và kẽm trong đó có 5 gam kẽm. Nếu thêm 15 gam kẽm vào hợp kim này thì được một hợp kim mới mà trong đó lượng đồng đã giảm so với lúc đầu là 30%. Tìm khối lượng ban đầu của hợp kim?

Kết quả:

Bài 1: Có 60 dãy ghế

Bài 2: Giá thứ nhất có 180 quyển. Giá thứ hai có 220 quyển.

Bài 3: Khoảng cách giữa hai hàng là 5m

Bài 4: Người thứ nhất có 40 quả. Người thứ hai có 60 quả.

Bài 5: 25 gam hoặc 10 gam.

DẠNG X: HÌNH HỌC

Bài 1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H và cắt đường tròn (O) lần lượt tại M,N,P.

Chứng minh rằng:

1. Tứ giác CEHD, nội tiếp .
2. Bốn điểm B,C,E,F cùng nằm trên một đường tròn.
3. AE.AC = AH.AD; AD.BC = BE.AC.
4. H và M đối xứng nhau qua BC.
5. Xác định tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

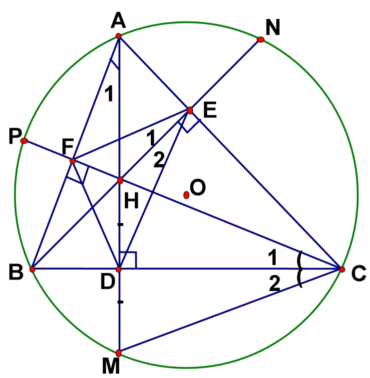
Lời giải:

1. Xét tứ giác CEHD ta có:

$\angle$ CEH = 90^0 (Vì BE là đường cao)

$\angle$ CDH = 90^0 (Vì AD là đường cao)

=> $\angle$ CEH + $\angle$ CDH = 180^0



Mà $\angle$ CEH và $\angle$ CDH là hai góc đối của tứ giác CEHD , Do đó CEHD là tứ giác nội tiếp

2. Theo giả thiết: BE là đường cao => BE $\perp$ AC => $\angle$BEC = 90^0.

CF là đường cao => CF $\perp$ AB => $\angle$BFC = 90^0.

Như vậy E và F cùng nhìn BC dưới một góc 90^0 => E và F cùng nằm trên đường tròn đường kính BC.

Vậy bốn điểm B,C,E,F cùng nằm trên một đường tròn.

3. Xét hai tam giác AEH và ADC ta có: $\angle$ AEH = $\angle$ ADC = 90^0 ; Â là góc chung

=> Δ AEH ~ ΔADC => $\frac{AE}{AD}=\frac{AH}{AC}$ => AE.AC = AH.AD.

* Xét hai tam giác BEC và ADC ta có: $\angle$ BEC = $\angle$ ADC = 90^0 ; $\angle$C là góc chung

=> Δ BEC ~ ΔADC => $\frac{BE}{AD}=\frac{BC}{AC}$ => AD.BC = BE.AC.

4. Ta có $\angle C_1 = \angle A_1$ (vì cùng phụ với góc ABC)

$\angle C_2 = \angle A_1$ (vì là hai góc nội tiếp cùng chắn cung BM)

=> $\angle C_1 = \angle C_2$ => CB là tia phân giác của góc HCM; lại có CB $\perp$ HM => Δ CHM cân tại C

=> CB cũng là đương trung trực của HM vậy H và M đối xứng nhau qua BC.

5. Theo chứng minh trên bốn điểm B,C,E,F cùng nằm trên một đường tròn

=> $\angle C_1 = \angle E_1$ (vì là hai góc nội tiếp cùng chắn cung BF)

Cũng theo chứng minh trên CEHD là tứ giác nội tiếp

- ⇨ $\angle C_1 = \angle E_2$ (vì là hai góc nội tiếp cùng chắn cung HD)
- ⇨ $\angle E_1 = \angle E_2$ => EB là tia phân giác của góc FED.

Chứng minh tương tự ta cũng có FC là tia phân giác của góc DFE mà BE và CF cắt nhau tại H do đó H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

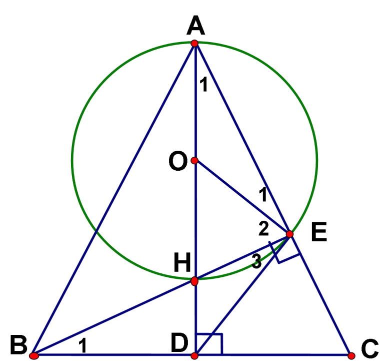
Bài 2. Cho tam giác cân ABC (AB = AC), các đường cao AD, BE, cắt nhau tại H. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE.

1. Chứng minh tứ giác CEHD nội tiếp .
2. Bốn điểm A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn.
3. Chứng minh ED = $\frac{1}{2}$BC.
4. Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).
5. Tính độ dài DE biết DH = 2 Cm, AH = 6 Cm.

Lời giải:

1. Xét tứ giác CEHD ta có:

$\angle$ CEH = 90^0 (Vì BE là đường cao)



$\angle$ CDH = 90^0 (Vì AD là đường cao)

=> $\angle$ CEH + $\angle$ CDH = 180^0

Mà $\angle$ CEH và $\angle$ CDH là hai góc đối của tứ giác CEHD , Do đó CEHD là tứ giác nội tiếp

2. Theo giả thiết: BE là đường cao => BE $\perp$ AC => $\angle$BEA = 90^0.

AD là đường cao => AD $\perp$ BC => $\angle$BDA = 90^0.

Như vậy E và D cùng nhìn AB dưới một góc 90^0 => E và D cùng nằm trên đường tròn đường kính AB.

Vậy bốn điểm A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn.

3. Theo giả thiết tam giác ABC cân tại A có AD là đường cao nên cũng là đường trung tuyến

=> D là trung điểm của BC. Theo trên ta có $\angle BEC = 90^0$.

Vậy tam giác BEC vuông tại E có ED là trung tuyến => $DE = \frac{1}{2}BC$.

4. Vì O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE nên O là trung điểm của AH => OA = OE => tam giác AOE cân tại O => $\angle E_1 = \angle A_1$ (1).

Theo trên $DE = \frac{1}{2}BC$ => tam giác DBE cân tại D => $\angle E_3 = \angle B_1$ (2)

Mà $\angle B_1 = \angle A_1$ (vì cùng phụ với góc ACB) => $\angle E_1 = \angle E_3$ => $\angle E_1 + \angle E_2 = \angle E_2 + \angle E_3$

Mà $\angle E_1 + \angle E_2 = \angle BEA = 90^0$ => $\angle E_2 + \angle E_3 = 90^0 = \angle OED$ => $DE \perp OE$ tại E.

Vậy DE là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại E.

5. Theo giả thiết AH = 6 Cm => OH = OE = 3 cm.; DH = 2 Cm => OD = 5 cm. Áp dụng định lí Pitago cho tam giác OED vuông tại E ta có $ED^2 = OD^2 - OE^2$ ⇔ $ED^2 = 5^2 - 3^2$ ⇔ ED = 4cm

Bài 3 Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax , By lần lượt ở C và D. Các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N.

1. Chứng minh AC + BD = CD.
2. Chứng minh $\angle COD = 90^0$.

3.Chứng minh AC. BD = $\frac{AB^2}{4}$.

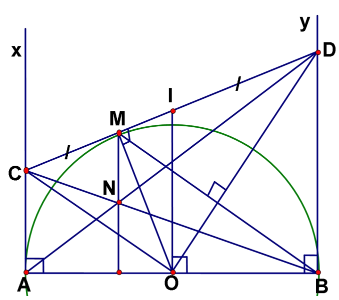
4.Chứng minh OC // BM

5.Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.

5.Chứng minh $MN \perp AB$.

6.Xác định vị trí của M để chu vi tứ giác ACDB đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải:



1. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: CA = CM; DB = DM => AC + BD = CM + DM.

Mà CM + DM = CD => AC + BD = CD

2. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: OC là tia phân giác của góc AOM; OD là tia phân giác của góc BOM, mà $\angle AOM$ và $\angle BOM$ là hai góc kề bù => $\angle COD = 90^0$.

3. Theo trên $\angle COD = 90^0$ nên tam giác COD vuông tại O có $OM \perp CD$ (OM là tiếp tuyến).

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có OM^2 = CM. DM,

Mà OM = R; CA = CM; DB = DM => AC. BD = R^2 => AC. BD = $\frac{AB^2}{4}$.

4. Theo trên $\angle COD = 90^0$ nên OC ⊥ OD .(1)
Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: DB = DM; lại có OM = OB =R => OD là trung trực của BM => BM ⊥ OD .(2). Từ (1) Và (2) => OC // BM (Vì cùng vuông góc với OD).

5. Gọi I là trung điểm của CD ta có I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác COD đường kính CD có IO là bán kính.
Theo tính chất tiếp tuyến ta có AC ⊥ AB; BD ⊥ AB => AC // BD => tứ giác ACDB là hình thang. Lại có I là trung điểm của CD; O là trung điểm của AB => IO là đường trung bình của hình thang ACDB
⇒ IO // AC , mà AC ⊥ AB => IO ⊥ AB tại O => AB là tiếp tuyến tại O của đường tròn đường kính CD

6. Theo trên AC // BD => $\frac{CN}{BN}=\frac{AC}{BD}$, mà CA = CM; DB = DM nên suy ra $\frac{CN}{BN}=\frac{CM}{DM}$
=> MN // BD mà BD ⊥ AB => MN ⊥ AB.

7. (HD): Ta có chu vi tứ giác ACDB = AB + AC + CD + BD mà AC + BD = CD nên suy ra chu vi tứ giác ACDB = AB + 2CD mà AB không đổi nên chu vi tứ giác ACDB nhỏ nhất khi CD nhỏ nhất , mà CD nhỏ nhất khi CD là khoảng cách giữ Ax và By tức là CD vuông góc với Ax và By. Khi đó CD // AB => M phải là trung điểm của cung AB.

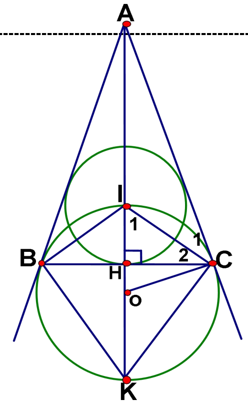
Bài 4 Cho tam giác cân ABC (AB = AC), I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A , O là trung điểm của IK.

1. Chứng minh B, C, I, K cùng nằm trên một đường tròn.
2. Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).
3. Tính bán kính đường tròn (O) Biết AB = AC = 20 Cm, BC = 24 Cm.

Lời giải: (HD)

1. Vì I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A nên BI và BK là hai tia phân giác của hai góc kề bù đỉnh B
Do đó BI ⊥ BK hay $\angle IBK = 90^0$.
Tương tự ta cũng có $\angle ICK = 90^0$ như vậy B và C cùng nằm trên đường tròn đường kính IK do đó B, C, I, K cùng nằm trên một đường tròn.

2. Ta có $\angle C_1 = \angle C_2$ (1) (vì CI là phân giác của góc ACH.
$\angle C_2 + \angle I_1 = 90^0$ (2) (vì $\angle IHC = 90^0$).



$\angle I_1 = \angle ICO$ (3) (vì tam giác OIC cân tại O)

Từ (1), (2) , (3) => $\angle C_1 + \angle ICO = 90^0$ hay $AC \perp OC$. Vậy AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

3. Từ giả thiết AB = AC = 20 Cm, BC = 24 Cm => CH = 12 cm.

$AH^2 = AC^2 - HC^2 \Rightarrow AH = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$ (cm)

$CH^2 = AH.OH \Rightarrow OH = \frac{CH^2}{AH} = \frac{12^2}{16} = 9$ (cm)

$OC = \sqrt{OH^2 + HC^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15$ (cm)

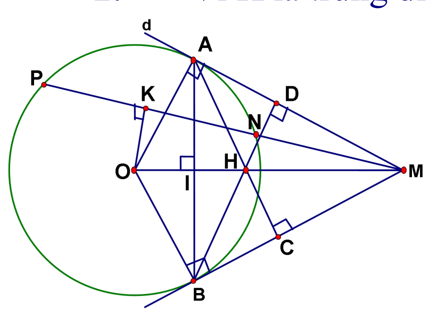
Bài 5 Cho đường tròn (O; R), từ một điểm A trên (O) kẻ tiếp tuyến d với (O). Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kì (M khác A) kẻ cát tuyến MNP và gọi K là trung điểm của NP, kẻ tiếp tuyến MB (B là tiếp điểm). Kẻ $AC \perp MB$, $BD \perp MA$, gọi H là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của OM và AB.

1. Chứng minh tứ giác AMBO nội tiếp.
2. Chứng minh năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn .
3. Chứng minh $OI.OM = R^2$; $OI. IM = IA^2$.
4. Chứng minh OAHB là hình thoi.
5. Chứng minh ba điểm O, H, M thẳng hàng.
6. Tìm quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d

Lời giải:

1. (HS tự làm).

2. Vì K là trung điểm NP nên $OK \perp NP$ (quan hệ đường kính



Và dây cung) => $\angle OKM = 90^0$. Theo tính chất tiếp tuyến ta có $\angle OAM = 90^0$; $\angle OBM = 90^0$. như vậy K, A, B cùng nhìn OM dưới một góc 90^0 nên cùng nằm trên đường tròn đường kính OM.

Vậy năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn.

3. Ta có MA = MB (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau); OA = OB = R

=> OM là trung trực của AB => OM ⊥ AB tại I .

Theo tính chất tiếp tuyến ta có ∠OAM = 90^0 nên tam giác OAM vuông tại A có AI là đường cao.

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao => OI.OM = OA^2 hay OI.OM = R^2; và OI. IM = IA^2.

4. Ta có OB ⊥ MB (tính chất tiếp tuyến) ; AC ⊥ MB (gt) => OB // AC hay OB // AH.

OA ⊥ MA (tính chất tiếp tuyến) ; BD ⊥ MA (gt) => OA // BD hay OA // BH.

=> Tứ giác OAHB là hình bình hành; lại có OA = OB (=R) => OAHB là hình thoi.

5. Theo trên OAHB là hình thoi. => OH ⊥ AB; cũng theo trên OM ⊥ AB => O, H, M thẳng hàng(Vì qua O chỉ có một đường thẳng vuông góc với AB).

6. (HD) Theo trên OAHB là hình thoi. => AH = AO = R. Vậy khi M di động trên d thì H cũng di động nhưng luôn cách A cố định một khoảng bằng R. Do đó quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d là nửa đường tròn tâm A bán kính AH = R

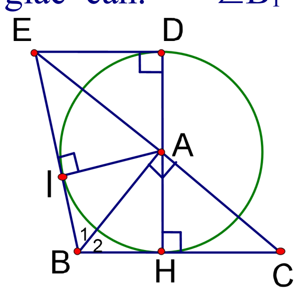
Bài 6 Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AH. Gọi HD là đường kính của đường tròn (A; AH). Tiếp tuyến của đường tròn tại D cắt CA ở E.

1. Chứng minh tam giác BEC cân.
2. Gọi I là hình chiếu của A trên BE, Chứng minh rằng AI = AH.
3. Chứng minh rằng BE là tiếp tuyến của đường tròn (A; AH).
4. Chứng minh BE = BH + DE.

Lời giải: (HD)

1. Δ AHC = ΔADE (g.c.g) => ED = HC (1) và AE = AC (2).

Vì AB ⊥CE (gt), do đó AB vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến của ΔBEC => BEC là tam giác cân. => $\angle B_1 = \angle B_2$



2. Hai tam giác vuông ABI và ABH có cạnh huyền AB chung, $\angle B_1 = \angle B_2$ => Δ AHB = ΔAIB => AI = AH.

3. AI = AH và BE ⊥ AI tại I => BE là tiếp tuyến của (A; AH) tại I.

4. DE = IE và BI = BH => BE = BI+IE = BH + ED

Bài 7 Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax và lấy trên tiếp tuyến đó một điểm P sao cho AP > R, từ P kẻ tiếp tuyến tiếp xúc với (O) tại M.

1. Chứng minh rằng tứ giác APMO nội tiếp được một đường tròn.
2. Chứng minh BM // OP.
3. Đường thẳng vuông góc với AB ở O cắt tia BM tại N. Chứng minh tứ giác OBNP là hình bình hành.

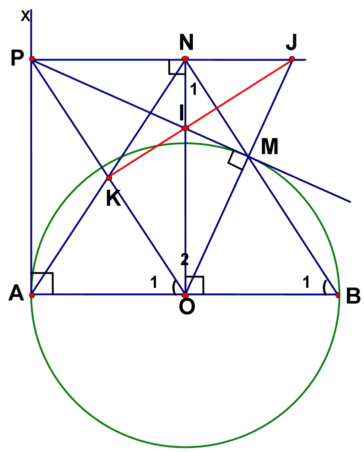
4. Biết AN cắt OP tại K, PM cắt ON tại I; PN và OM kéo dài cắt nhau tại J. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

Lời giải:

1. (HS tự làm).

2. Ta có ∠ ABM nội tiếp chắn cung AM; ∠ AOM là góc ở tâm chắn cung AM => ∠ ABM = $\frac{\angle AOM}{2}$ (1) OP là tia phân giác ∠ AOM (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau) => ∠ AOP = $\frac{\angle AOM}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) => ∠ ABM = ∠ AOP (3)



Mà ∠ ABM và ∠ AOP là hai góc đồng vị nên suy ra BM // OP. (4)

3. Xét hai tam giác AOP và OBN ta có : ∠PAO=90^0 (vì PA là tiếp tuyến); ∠NOB = 90^0 (gt NO⊥AB).

=> ∠PAO = ∠NOB = 90^0; OA = OB = R; ∠AOP = ∠OBN (theo (3)) => ΔAOP = ΔOBN => OP = BN (5)

Từ (4) và (5) => OBNP là hình bình hành (vì có hai cạnh đối song song và bằng nhau).

4. Tứ giác OBNP là hình bình hành => PN // OB hay PJ // AB, mà ON ⊥ AB => ON ⊥ PJ

Ta cũng có PM ⊥ OJ (PM là tiếp tuyến), mà ON và PM cắt nhau tại I nên I là trực tâm tam giác POJ. (6)

Dễ thấy tứ giác AONP là hình chữ nhật vì có ∠PAO = ∠AON = ∠ONP = 90^0 => K là trung điểm của PO (t/c đường chéo hình chữ nhật). (6)

AONP là hình chữ nhật => ∠APO = ∠ NOP (so le) (7)

Theo t/c hai tiếp tuyến cắt nhau Ta có PO là tia phân giác ∠APM => ∠APO = ∠MPO (8).

Từ (7) và (8) => ΔIPO cân tại I có IK là trung tuyến đông thời là đường cao => IK ⊥ PO. (9)

Từ (6) và (9) => I, J, K thẳng hàng.

Bài 8 Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và điểm M bất kì trên nửa đường tròn (M khác A,B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến Ax. Tia BM cắt Ax tại I; tia phân giác của góc IAM cắt nửa đường tròn tại E; cắt tia BM tại F tia BE cắt Ax tại H, cắt AM tại K.

1) Chứng minh rằng: EFMK là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh rằng: $AI^2 = IM \cdot IB$.

3) Chứng minh BAF là tam giác cân.

4) Chứng minh rằng : Tứ giác AKFH là hình thoi.

5) Xác định vị trí M để tứ giác AKFI nội tiếp được một đường tròn.

Lời giải:

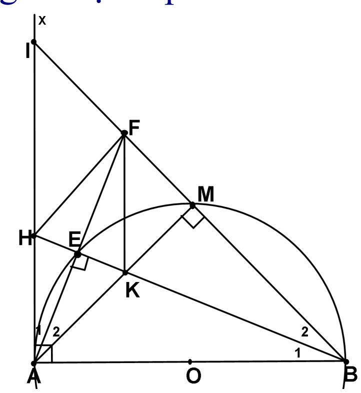
1. Ta có : $\angle AMB = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> $\angle KMF = 90^0$ (vì là hai góc kề bù).

$\angle AEB = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> $\angle KEF = 90^0$ (vì là hai góc kề bù).

=> $\angle KMF + \angle KEF = 180^0$. Mà $\angle KMF$ và $\angle KEF$ là hai góc đối của tứ giác EFMK do đó EFMK là tứ giác nội tiếp.



2. Ta có $\angle IAB = 90^0$ (vì AI là tiếp tuyến) => ΔAIB vuông tại A có $AM \perp IB$ (theo trên).

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao => $AI^2 = IM \cdot IB$.

3. Theo giả thiết AE là tia phân giác góc IAM => $\angle IAE = \angle MAE$ => $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{ME}$ (*lí do ……*)

=> $\angle ABE = \angle MBE$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) => BE là tia phân giác góc ABF. (1)

Theo trên ta có $\angle AEB = 90^0$ => $BE \perp AF$ hay BE là đường cao của tam giác ABF (2).

Từ (1) và (2) => BAF là tam giác cân. tại B .

4. BAF là tam giác cân. tại B có BE là đường cao nên đồng thời là đương trung tuyến => E là trung điểm của AF. (3)

Từ $BE \perp AF$ => $AF \perp HK$ (4), theo trên AE là tia phân giác góc IAM hay AE là tia phân giác $\angle HAK$ (5)

Từ (4) và (5) => HAK là tam giác cân. tại A có AE là đường cao nên đồng thời là đương trung tuyến => E là trung điểm của HK. (6).

Từ (3) , (4) và (6) => AKFH là hình thoi (vì có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường).

5. (HD). Theo trên AKFH là hình thoi => HA // FK hay IA // FK => tứ giác AKFI là hình thang.

Để tứ giác AKFI nội tiếp được một đường tròn thì AKFI phải là hình thang cân.

AKFI là hình thang cân khi M là trung điểm của cung AB.

Thật vậy: M là trung điểm của cung AB => $\angle ABM = \angle MAI = 45^0$ (t/c góc nội tiếp). (7)

Tam giác ABI vuông tại A có $\angle ABI = 45^0 \Rightarrow \angle AIB = 45^0$.(8)

Từ (7) và (8) => $\angle IAK = \angle AIF = 45^0$ => AKFI là hình thang cân (hình thang có hai góc đáy bằng nhau).

Vậy khi M là trung điểm của cung AB thì tứ giác AKFI nội tiếp được một đường tròn.

Bài 9 Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Bx và lấy hai điểm C và D thuộc nửa đường tròn. Các tia AC và AD cắt Bx lần lượt ở E, F (F ở giữa B và E).

1. Chứng minh AC. AE không đổi.
2. Chứng minh $\angle ABD = \angle DFB$.
3. Chứng minh rằng CEFD là tứ giác nội tiếp.

Lời giải:

1. C thuộc nửa đường tròn nên $\angle ACB = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => BC $\perp$ AE.

$\angle ABE = 90^0$ (Bx là tiếp tuyến) => tam giác ABE vuông tại B có BC là đường cao => AC. AE = AB^2 (hệ thức giữa cạnh và đường cao), mà AB là đường kính nên AB = 2R không đổi do đó AC. AE không đổi.

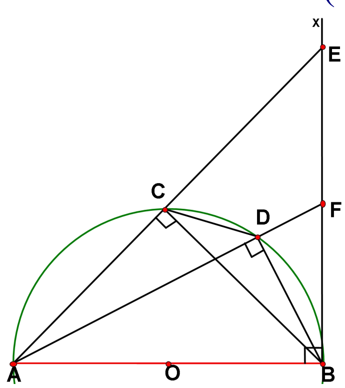
2. Δ ADB có $\angle ADB = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn).

=> $\angle ABD + \angle BAD = 90^0$ (vì tổng ba góc của một tam giác bằng 180^0)(1)

Δ ABF có $\angle ABF = 90^0$ (BF là tiếp tuyến).

=> $\angle AFB + \angle BAF = 90^0$ (vì tổng ba góc của một tam giác bằng 180^0) (2)

Từ (1) và (2) => $\angle ABD = \angle DFB$ (cùng phụ với $\angle BAD$)



3. Tứ giác ACDB nội tiếp (O) => $\angle ABD + \angle ACD = 180^0$.

$\angle ECD + \angle ACD = 180^0$ (Vì là hai góc kề bù) => $\angle ECD = \angle ABD$ (cùng bù với $\angle ACD$).

Theo trên $\angle ABD = \angle DFB \Rightarrow \angle ECD = \angle DFB$. Mà $\angle EFD + \angle DFB = 180^0$ (Vì là hai góc kề bù) nên suy ra $\angle ECD + \angle EFD = 180^0$, mặt khác $\angle ECD$ và $\angle EFD$ là hai góc đối của tứ giác CDFE do đó tứ giác CEFD là tứ giác nội tiếp.

Bài 10 Cho đường tròn tâm O đường kính AB và điểm M bất kì trên nửa đường tròn sao cho AM < MB. Gọi M' là điểm đối xứng của M qua AB và S là giao điểm của hai tia BM, M'A. Gọi P là chân đường vuông góc từ S đến AB.

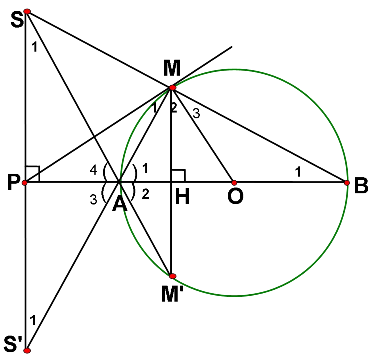
1.Gọi S' là giao điểm của MA và SP. Chứng minh rằng Δ PS'M cân. 2.Chứng minh PM là tiếp tuyến của đường tròn .

Lời giải:

1. Ta có SP ⊥ AB (gt) => ∠SPA = 90^0 ; ∠AMB = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => ∠AMS = 90^0 . Như vậy P và M cùng nhìn AS dưới một góc bằng 90^0 nên cùng nằm trên đường tròn đường kính AS.

Vậy bốn điểm A, M, S, P cùng nằm trên một đường tròn.

2. Vì M'đối xứng M qua AB mà M nằm trên đường tròn nên M' cũng nằm trên đường tròn => hai cung AM và AM' có số đo bằng nhau



=> ∠AMM' = ∠AM'M (Hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) (1)

Cũng vì M'đối xứng M qua AB nên MM' ⊥ AB tại H => MM'// SS' (cùng vuông góc với AB)

=> ∠AMM' = ∠AS'S; ∠AM'M = ∠ASS' (vì so le trong) (2).

=> Từ (1) và (2) => ∠AS'S = ∠ASS'.

Theo trên bốn điểm A, M, S, P cùng nằm trên một đ/ tròn => ∠ASP=∠AMP (nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AP}$)

=> ∠AS'P = ∠AMP => tam giác PMS' cân tại P.

3. Tam giác SPB vuông tại P; tam giác SMS' vuông tại M => ∠B_1 = ∠S'_1 (cùng phụ với ∠S). (3)

Tam giác PMS' cân tại P => ∠S'_1 = ∠M_1 (4)

Tam giác OBM cân tại O (vì có OM = OB =R) => ∠B_1 = ∠M_3 (5).

Từ (3), (4) và (5) => ∠M_1 = ∠M_3 => ∠M_1 + ∠M_2 = ∠M_3 + ∠M_2 mà ∠M_3 + ∠M_2 = ∠AMB = 90^0 nên suy ra ∠M_1 + ∠M_2 = ∠PMO = 90^0 => PM ⊥ OM tại M => PM là tiếp tuyến của đường tròn tại M

Bài 11. Cho tam giác ABC (AB = AC). Cạnh AB, BC, CA tiếp xúc với đường tròn (O) tại các điểm D, E, F . BF cắt (O) tại I , DI cắt BC tại M. Chứng minh :

1. Tam giác DEF có ba góc nhọn.

2. DF // BC. **3**. Tứ giác BDFC nội tiếp. **4.** $\frac{BD}{CB}=\frac{BM}{CF}$

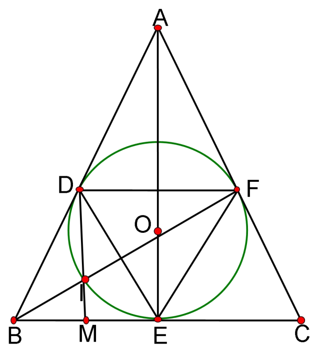
Lời giải:

1. (HD) Theo t/c hai tiếp tuyến cắt nhau ta có AD = AF => tam giác ADF cân tại A => ∠ADF = ∠AFD < 90^0 => sđ cung DF < 180^0 => ∠DEF < 90^0 (vì góc DEF nội tiếp chắn cung DE).

Chứng minh tương tự ta có ∠DFE < 90^0; ∠EDF < 90^0. Như vậy tam giác DEF có ba góc nhọn.

2. Ta có AB = AC (gt); AD = AF (theo trên) => $\frac{AD}{AB}=\frac{AF}{AC}$ => DF // BC.

3. DF // BC => BDFC là hình thang lại có ∠ B = ∠C (vì tam giác ABC cân) => BDFC là hình thang cân do đó BDFC nội tiếp được một đường tròn .



4. Xét hai tam giác BDM và CBF Ta có ∠ DBM = ∠BCF (hai góc đáy của tam giác cân).

∠BDM = ∠BFD (nội tiếp cùng chắn cung DI); ∠ CBF = ∠BFD (vì so le) => ∠BDM = ∠CBF .

=> ΔBDM ~ΔCBF => $\frac{BD}{CB}=\frac{BM}{CF}$

Bài 12 Cho đường tròn (O) bán kính R có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên đoạn thẳng AB lấy điểm M (M khác O). CM cắt (O) tại N. Đường thẳng vuông góc với AB tại M cắt tiếp tuyến tại N của đường tròn ở P. Chứng minh :

1. Tứ giác OMNP nội tiếp.
2. Tứ giác CMPO là hình bình hành.
3. CM. CN không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.
4. Khi M di chuyển trên đoạn thẳng AB thì P chạy trên đoạn thẳng cố định nào.

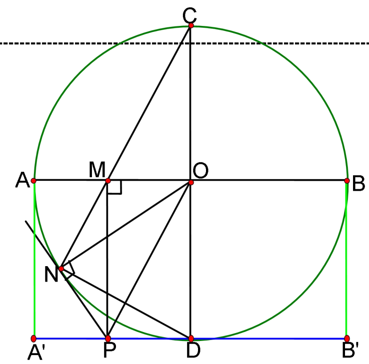
Lời giải:

1. Ta có ∠OMP = 90^0 (vì PM ⊥ AB); ∠ONP = 90^0 (vì NP là tiếp tuyến).

Như vậy M và N cùng nhìn OP dưới một góc bằng 90^0 => M và N cùng nằm trên đường tròn đường kính OP => Tứ giác OMNP nội tiếp.

2. Tứ giác OMNP nội tiếp => ∠OPM = ∠ ONM (nội tiếp chắn cung OM)

Tam giác ONC cân tại O vì có ON = OC = R => ∠ONC = ∠OCN



=> $\angle OPM = \angle OCM$.

Xét hai tam giác OMC và MOP ta có $\angle MOC = \angle OMP = 90^0$; $\angle OPM = \angle OCM$ => $\angle CMO = \angle POM$ lại có MO là cạnh chung => $\Delta OMC = \Delta MOP$ => OC = MP. (1)

Theo giả thiết Ta có $CD \perp AB$; $PM \perp AB$ => CO//PM (2).

Từ (1) và (2) => Tứ giác CMPO là hình bình hành.

3. Xét hai tam giác OMC và NDC ta có $\angle MOC = 90^0$ (gt $CD \perp AB$); $\angle DNC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => $\angle MOC = \angle DNC = 90^0$ lại có $\angle C$ là góc chung => $\Delta OMC \sim \Delta NDC$

=> $\frac{CM}{CD} = \frac{CO}{CN}$ => CM. CN = CO.CD mà CO = R; CD = 2R nên CO.CD = $2R^2$ không đổi => CM.CN $=2R^2$ không đổi hay tích CM. CN không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

4. (HD) Dễ thấy $\Delta OMC = \Delta DPO$ (c.g.c) => $\angle ODP = 90^0$ => P chạy trên đường thẳng cố định vuông góc với CD tại D.

Vì M chỉ chạy trên đoạn thẳng AB nên P chỉ chạy trên doạn thẳng A' B' song song và bằng AB.

<u>Bài 13</u> Cho tam giác ABC vuông ở A (AB > AC), đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điển A , Vẽ nửa đường tròn đường kính BH cắt AB tại E, Nửa đường tròn đường kính HC cắt AC tại F.

1. Chứng minh AFHE là hình chữ nhật.
2. BEFC là tứ giác nội tiếp.
3. AE. AB = AF. AC.
4. Chứng minh EF là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn .

<u>Lời giải:</u>

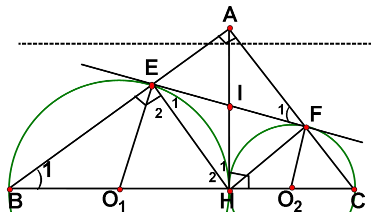
1. Ta có : $\angle BEH = 90^0$ (nội tiếp chắn nức đường tròn)

=> $\angle AEH = 90^0$ (vì là hai góc kề bù). (1)

$\angle CFH = 90^0$ (nội tiếp chắn nức đường tròn)

=> $\angle AFH = 90^0$ (vì là hai góc kề bù).(2)

$\angle EAF = 90^0$ (Vì tam giác ABC vuông tại A) (3)



Từ (1), (2), (3) => tứ giác AFHE là hình chữ nhật (vì có ba góc vuông).

2. Tứ giác AFHE là hình chữ nhật nên nội tiếp được một đường tròn =>$\angle F_1$=$\angle H_1$ (nội tiếp chắn cung AE) . Theo giả thiết AH $\perp$BC nên AH là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn (O_1) và (O_2)

=> $\angle B_1$ = $\angle H_1$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HE) => $\angle B_1$= $\angle F_1$ => $\angle$EBC+$\angle$EFC = $\angle$AFE + $\angle$EFC mà $\angle$AFE + $\angle$EFC = 180^0 (vì là hai góc kề bù) => $\angle$EBC+$\angle$EFC = 180^0 mặt khác $\angle$EBC và $\angle$EFC là hai góc đối của tứ giác BEFC do đó BEFC là tứ giác nội tiếp.

3. Xét hai tam giác AEF và ACB ta có $\angle$A = 90^0 là góc chung; $\angle$AFE = $\angle$ABC (theo Chứng minh trên)

=> ΔAEF ~ΔACB => $\frac{AE}{AC}=\frac{AF}{AB}$ => AE. AB = AF. AC.

* ***HD cách 2***: *Tam giác AHB vuông tại H có HE $\perp$ AB => AH^2 = AE.AB (*)*

Tam giác AHC vuông tại H có HF $\perp$ AC => AH^2 = AF.AC (**)

Từ (*) và (**) => AE. AB = AF. AC

4. Tứ giác AFHE là hình chữ nhật => IE = EH => ΔIEH cân tại I => $\angle E_1$ = $\angle H_1$.

ΔO_1EH cân tại O_1 (vì có O_1E vàO_1H cùng là bán kính) => $\angle E_2$ = $\angle H_2$.

=> $\angle E_1$ + $\angle E_2$ = $\angle H_1$ + $\angle H_2$ mà $\angle H_1$ + $\angle H_2$ = $\angle$AHB = 90^0 => $\angle E_1$ + $\angle E_2$ = $\angle O_1EF$ = 90^0

=> O_1E $\perp$EF .

Chứng minh tương tự ta cũng có O_2F $\perp$ EF. Vậy EF là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn .

Bài 14 Cho điểm C thuộc đoạn thẳng AB sao cho AC = 10 Cm, CB = 40 Cm. Vẽ về một phía của AB các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự là AB, AC, CB và có tâm theo thứ tự là O, I, K.

Đường vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn (O) tại E. Gọi M. N theo thứ tự là giao điểm của EA, EB với các nửa đường tròn (I), (K).

1.Chứng minh EC = MN.

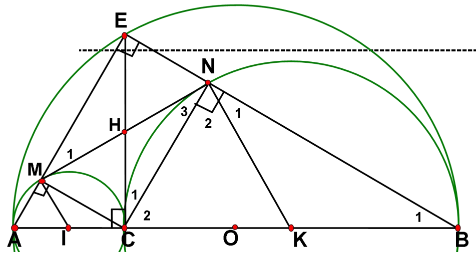
2.Ch/minh MN là tiếp tuyến chung của các nửa đ/tròn (I), (K).

3.Tính MN.

4.Tính diện tích hình được giới hạn bởi ba nửa đường tròn

Lời giải:

1. Ta có: $\angle$BNC= 90^0(nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm K)



=> $\angle ENC = 90^0$ (vì là hai góc kề bù). (1)

$\angle AMC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửc đường tròn tâm I) => $\angle EMC = 90^0$ (vì là hai góc kề bù).(2)

$\angle AEB = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O) hay $\angle MEN = 90^0$ (3)

Từ (1), (2), (3) => tứ giác CMEN là hình chữ nhật => EC = MN (tính chất đường chéo hình chữ nhật)

2. Theo giả thiết EC $\perp$AB tại C nên EC là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn (I) và (K)
=> $\angle B_1 = \angle C_1$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CN). Tứ giác CMEN là hình chữ nhật nên
=> $\angle C_1 = \angle N_3$
=> $\angle B_1 = \angle N_3$.(4) Lại có KB = KN (cùng là bán kính) => tam giác KBN cân tại K => $\angle B_1 = \angle N_1$ (5)

Từ (4) và (5) => $\angle N_1 = \angle N_3$ mà $\angle N_1 + \angle N_2 = \angle CNB = 90^0$ => $\angle N_3 + \angle N_2 = \angle MNK = 90^0$ hay MN $\perp$ KN tại N => MN là tiếp tuyến của (K) tại N.

Chứng minh tương tự ta cũng có MN là tiếp tuyến của (I) tại M,

Vậy MN là tiếp tuyến chung của các nửa đường tròn (I), (K).

3. Ta có $\angle AEB = 90^0$ (nội tiếp chắn nửc đường tròn tâm O) => ΔAEB vuông tại A có EC $\perp$ AB (gt)

=> $EC^2 = AC.\ BC \Leftrightarrow EC^2 = 10.40 = 400$ => EC = 20 cm. Theo trên EC = MN => MN = 20 cm.

4. Theo giả thiết AC = 10 Cm, CB = 40 Cm => AB = 50cm => OA = 25 cm

Ta có $S_{(o)} = \pi.OA^2 = \pi 25^2 = 625\pi$; $S_{(I)} = \pi.\ IA^2 = \pi.5^2 = 25\pi$; $S_{(k)} = \pi.KB^2 = \pi.\ 20^2 = 400\pi$.

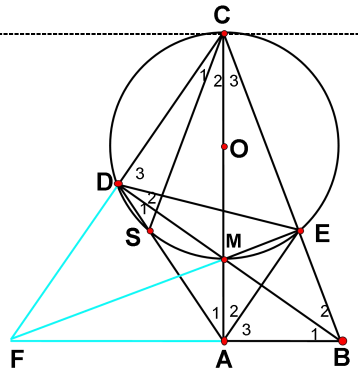
Ta có diện tích phần hình được giới hạn bởi ba nửa đường tròn là $S = \frac{1}{2}(\ S_{(o)} - S_{(I)} - S_{(k)})$

$$S = \frac{1}{2}(\ 625\pi - 25\pi - 400\pi\ ) = \frac{1}{2}.200\ \pi\ = 100\pi\ \approx 314\ (cm^2)$$

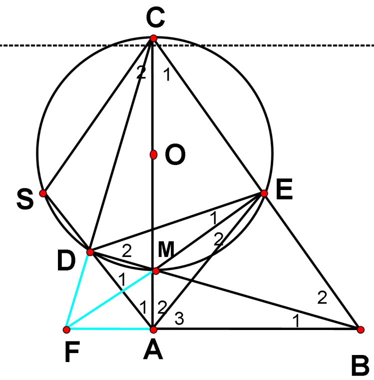
Bài 15 Cho tam giác ABC vuông ở A. Trên cạnh AC lấy điểm M, dựng đường tròn (O) có đường kính MC. đường thẳng BM cắt đường tròn (O) tại D. đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại S.

1. Chứng minh ABCD là tứ giác nội tiếp .
2. Chứng minh CA là tia phân giác của góc SCB.
3. Gọi E là giao điểm của BC với đường tròn (O). Chứng minh rằng các đường thẳng BA, EM, CD đồng quy.
4. Chứng minh DM là tia phân giác của góc ADE.
5. Chứng minh điểm M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE.

Lời giải:



Hình a



Hình b

1. Ta có $\angle CAB = 90^0$ (vì tam giác ABC vuông tại A); $\angle MDC = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) => $\angle CDB = 90^0$ như vậy D và A cùng nhìn BC dưới một góc bằng 90^0 nên A và D cùng nằm trên đường tròn đường kính BC => ABCD là tứ giác nội tiếp.

2. ABCD là tứ giác nội tiếp => $\angle D_1 = \angle C_3$(nội tiếp cùng chắn cung AB).

$\angle D_1 = \angle C_3$ => $\overset{\frown}{SM} = \overset{\frown}{EM}$ => $\angle C_2 = \angle C_3$ (hai góc nội tiếp đường tròn (O) chắn hai cung bằng nhau)

=> CA là tia phân giác của góc SCB.

3. Xét ΔCMB Ta có $BA \perp CM$; $CD \perp BM$; $ME \perp BC$ như vậy BA, EM, CD là ba đường cao của tam giác CMB nên BA, EM, CD đồng quy.

4. Theo trên Ta có $\overset{\frown}{SM} = \overset{\frown}{EM}$ => $\angle D_1 = \angle D_2$ => DM là tia phân giác của góc ADE.(1)

5. Ta có $\angle MEC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) => $\angle MEB = 90^0$.

Tứ giác AMEB có $\angle MAB = 90^0$; $\angle MEB = 90^0$ => $\angle MAB + \angle MEB = 180^0$ mà đây là hai góc đối nên tứ giác AMEB nội tiếp một đường tròn => $\angle A_2 = \angle B_2$.

Tứ giác ABCD là tứ giác nội tiếp => $\angle A_1 = \angle B_2$(nội tiếp cùng chắn cung CD)

=> $\angle A_1 = \angle A_2$ => AM là tia phân giác của góc DAE (2)

Từ (1) và (2) Ta có M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE

TH2 ***(Hình b)***

Câu 2 : $\angle ABC = \angle CME$ (cùng phụ $\angle ACB$); $\angle ABC = \angle CDS$ (cùng **bù** $\angle ADC$) => $\angle CME = \angle CDS$

=> $\overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{CS}$ => $\overset{\frown}{SM} = \overset{\frown}{EM}$ => $\angle SCM = \angle ECM$ => CA là tia phân giác của góc SCB.

Bài 16 Cho tam giác ABC vuông ở A.và một điểm D nằm giữa A và B. Đường tròn đường kính BD cắt BC tại E. Các đường thẳng CD, AE lần lượt cắt đường tròn tại F, G.

Chứng minh :

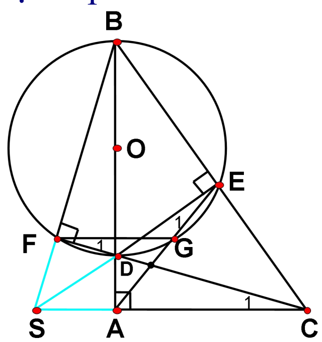
1. Tam giác ABC đồng dạng với tam giác EBD.
2. Tứ giác ADEC và AFBC nội tiếp .
3. AC // FG.
4. Các đường thẳng AC, DE, FB đồng quy.

Lời giải:

1. Xét hai tam giác ABC và EDB Ta có $\angle BAC = 90^0$ (vì tam giác ABC vuông tại A); $\angle DEB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> $\angle DEB = \angle BAC = 90^0$; lại có $\angle ABC$ là góc chung => $\Delta DEB \sim \Delta CAB$.

2. Theo trên $\angle DEB = 90^0$ => $\angle DEC = 90^0$ (vì hai góc kề bù); $\angle BAC = 90^0$ (vì ΔABC vuông tại A) hay $\angle DAC = 90^0$ => $\angle DEC + \angle DAC = 180^0$ mà đây là hai góc đối nên ADEC là tứ giác nội tiếp .



* $\angle BAC = 90^0$ (vì tam giác ABC vuông tại A); $\angle DFB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay $\angle BFC = 90^0$ như vậy F và A cùng nhìn BC dưới một góc bằng 90^0 nên A và F cùng nằm trên đường tròn đường kính BC => AFBC là tứ giác nội tiếp.

3. Theo trên ADEC là tứ giác nội tiếp => $\angle E_1 = \angle C_1$ lại có $\angle E_1 = \angle F_1$ => $\angle F_1 = \angle C_1$ mà đây là hai góc so le trong nên suy ra AC // FG.

4. (HD) Dễ thấy CA, DE, BF là ba đường cao của tam giác DBC nên CA, DE, BF đồng quy tại S.

Bài 17. Cho tam giác đều ABC có đường cao là AH. Trên cạnh BC lấy điểm M bất kì (M không trùng B. C, H) ; từ M kẻ MP, MQ vuông góc với các cạnh AB. AC.

1. Chứng minh APMQ là tứ giác nội tiếp và hãy xác định tâm O của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó.
2. Chứng minh rằng MP + MQ = AH.
3. Chứng minh OH ⊥ PQ.

Lời giải:

1. Ta có MP ⊥ AB (gt) => $\angle APM = 90^0$; MQ ⊥ AC (gt)

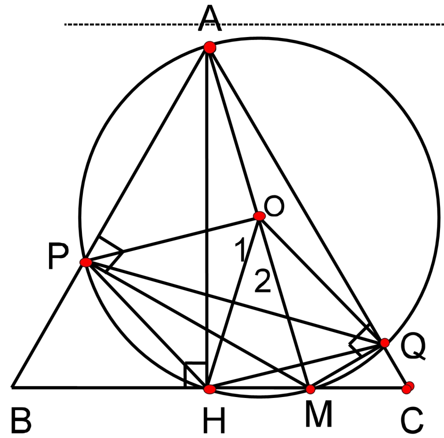
=> $\angle AQM = 90^0$ như vậy P và Q cùng nhìn BC dưới một góc bằng 90^0 nên P và Q cùng nằm trên đường tròn đường kính AM => APMQ là tứ giác nội tiếp.

* Vì AM là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác APMQ tâm O của đường tròn ngoại tiếp tứ giác APMQ là trung điểm của AM.

2. Tam giác ABC có AH là đường cao => $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AH$.

Tam giác ABM có MP là đường cao => $S_{ABM} = \frac{1}{2}AB.MP$

Tam giác ACM có MQ là đường cao => $S_{ACM} = \frac{1}{2}AC.MQ$



Ta có $S_{ABM} + S_{ACM} = S_{ABC}$ => $\frac{1}{2}$AB.MP + $\frac{1}{2}$AC.MQ = $\frac{1}{2}$BC.AH => AB.MP + AC.MQ = BC.AH

Mà AB = BC = CA (vì tam giác ABC đều) => MP + MQ = AH.

3. Tam giác ABC có AH là đường cao nên cũng là đường phân giác => ∠HAP = ∠HAQ => $\overset{\frown}{HP} = \overset{\frown}{HQ}$ (tính chất góc nội tiếp) => ∠HOP = ∠HOQ (t/c góc ở tâm) => OH là tia phân giác góc POQ. Mà tam giác POQ cân tại O (vì OP và OQ cùng là bán kính) nên suy ra OH cũng là đường cao => OH ⊥ PQ

<u>Bài 18</u> Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên đoạn thẳng OB lấy điểm H bất kì (H không trùng O, B) ; trên đường thẳng vuông góc với OB tại H, lấy một điểm M ở ngoài đường tròn ; MA và MB thứ tự cắt đường tròn (O) tại C và D. Gọi I là giao điểm của AD và BC.

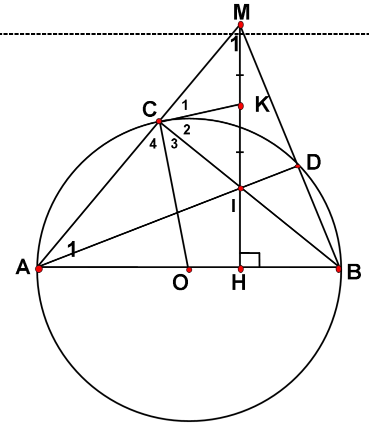
1. Chứng minh MCID là tứ giác nội tiếp .
2. Chứng minh các đường thẳng AD, BC, MH đồng quy tại I.
3. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác MCID, Chứng minh KCOH là tứ giác nội tiếp .

<u>Lời giải:</u>

1. Ta có : ∠ACB = 90^0 (nội tiếp chắn nửc đường tròn)
=> ∠MCI = 90^0 (vì là hai góc kề bù).
∠ADB = 90^0 (nội tiếp chắn nửc đường tròn)
=> ∠MDI = 90^0 (vì là hai góc kề bù).
=> ∠MCI + ∠MDI = 180^0 mà đây là hai góc đối của tứ giác MCID nên MCID là tứ giác nội tiếp.

2. Theo trên Ta có BC ⊥ MA; AD ⊥ MB nên BC và AD là hai đường cao của tam giác MAB mà BC và AD cắt nhau tại I nên I là trực tâm của tam giác MAB. Theo giả thiết thì MH ⊥ AB nên MH cũng là đường cao của tam giác MAB => AD, BC, MH đồng quy tại I.

3. ΔOAC cân tại O (vì OA và OC là bán kính) => $\angle A_1 = \angle C_4$
ΔKCM cân tại K (vì KC và KM là bán kính) => $\angle M_1 = \angle C_1$.



Mà $\angle A_1 + \angle M_1 = 90^0$ (do tam giác AHM vuông tại H) => $\angle C_1 + \angle C_4 = 90^0$ => $\angle C_3 + \angle C_2 = 90^0$ (vì góc ACM là góc bẹt) hay $\angle OCK = 90^0$.

Xét tứ giác KCOH Ta có $\angle OHK = 90^0$; $\angle OCK = 90^0$ => $\angle OHK + \angle OCK = 180^0$ mà $\angle OHK$ và $\angle OCK$ là hai góc đối nên KCOH là tứ giác nội tiếp.

Bài 19. Cho đường tròn (O) đường kính AC. Trên bán kính OC lấy điểm B tuỳ ý (B khác O, C). Gọi M là trung điểm của đoạn AB. Qua M kẻ dây cung DE vuông góc với AB. Nối CD, Kẻ BI vuông góc với CD.

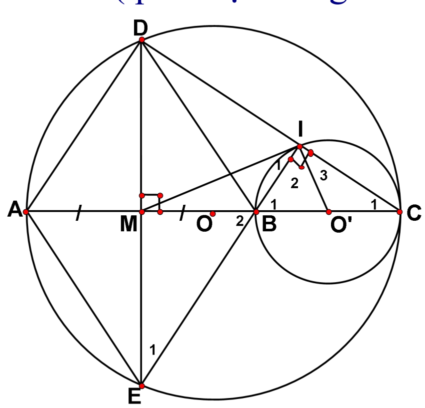
1. Chứng minh tứ giác BMDI nội tiếp .
2. Chứng minh tứ giác ADBE là hình thoi.
3. Chứng minh BI // AD.
4. Chứng minh I, B, E thẳng hàng.
5. Chứng minh MI là tiếp tuyến của (O').

Lời giải:

1. $\angle BIC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => $\angle BID = 90^0$ (vì là hai góc kề bù); DE $\perp$ AB tại M => $\angle BMD = 90^0$

=> $\angle BID + \angle BMD = 180^0$ mà đây là hai góc đối của tứ giác MBID nên MBID là tứ giác nội tiếp.

2. Theo giả thiết M là trung điểm của AB; DE $\perp$ AB tại M nên M cũng là trung điểm của DE (quan hệ đường kính và dây cung)



=> Tứ giác ADBE là hình thoi vì có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường .

3. $\angle ADC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => AD $\perp$ DC; theo trên BI $\perp$ DC => BI // AD. (1)

4. Theo giả thiết ADBE là hình thoi => EB // AD (2).

Từ (1) và (2) => I, B, E thẳng hàng (vì qua B chỉ có một đường thẳng song song với AD mà thôi.)

5. I, B, E thẳng hàng nên tam giác IDE vuông tại I => IM là trung tuyến (vì M là trung điểm của DE) =>MI = ME => ΔMIE cân tại M => $\angle I_1 = \angle E_1$; ΔO'IC cân tại O' (vì O'C và O'I cùng là bán kính) => $\angle I_3 = \angle C_1$ mà $\angle C_1 = \angle E_1$ (Cùng phụ với góc EDC) => $\angle I_1 = \angle I_3$ => $\angle I_1 + \angle I_2 = \angle I_3 + \angle I_2$. Mà $\angle I_3 + \angle I_2 = \angle BIC = 90^0$ => $\angle I_1 + \angle I_2 = 90^0 = \angle MIO'$ hay MI $\perp$ O'I tại I => MI là tiếp tuyến của (O').

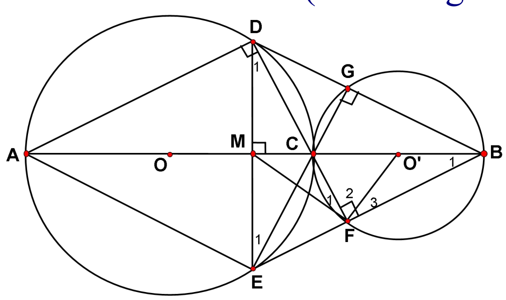
Bài 20. Cho đường tròn (O; R) và (O'; R') có R > R' tiếp xúc ngoài nhau tại C. Gọi AC và BC là hai đường kính đi qua điểm C của (O) và (O'). DE là dây cung của (O) vuông góc với AB tại trung điểm M của AB. Gọi giao điểm thứ hai của DC với (O') là F, BD cắt (O') tại G. Chứng minh rằng:

1. Tứ giác MDGC nội tiếp .
2. Bốn điểm M, D, B, F cùng nằm trên một đường tròn
3. Tứ giác ADBE là hình thoi.
4. B, E, F thẳng hàng
5. DF, EG, AB đồng quy.
6. MF = 1/2 DE.
7. MF là tiếp tuyến của (O').

Lời giải:

1. $\angle BGC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> $\angle CGD = 90^0$ (vì là hai góc kề bù)



Theo giả thiết DE $\perp$ AB tại M => $\angle CMD = 90^0$

=> $\angle CGD + \angle CMD = 180^0$ mà đây là hai góc đối của tứ giác MCGD nên MCGD là tứ giác nội tiếp

2. $\angle BFC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => $\angle BFD = 90^0$; $\angle BMD = 90^0$ (vì DE $\perp$ AB tại M) như vậy F và M cùng nhìn BD dưới một góc bằng 90^0 nên F và M cùng nằm trên đường tròn đường kính BD => M, D, B, F cùng nằm trên một đường tròn .

3. Theo giả thiết M là trung điểm của AB; DE $\perp$ AB tại M nên M cũng là trung điểm của DE (quan hệ đường kính và dây cung)

=> Tứ giác ADBE là hình thoi vì có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường .

4. $\angle ADC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => AD $\perp$ DF ; theo trên tứ giác ADBE là hình thoi

=> BE // AD mà AD $\perp$ DF nên suy ra BE $\perp$ DF .

Theo trên $\angle BFC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => $BF \perp DF$ mà qua B chỉ có một đường thẳng vuông góc với DF do đo B, E, F thẳng hàng.

5. Theo trên $DF \perp BE$; $BM \perp DE$ mà DF và BM cắt nhau tại C nên C là trực tâm của tam giác BDE

=> EC cũng là đường cao => $EC \perp BD$; theo trên $CG \perp BD$ => E,C,G thẳng hàng. Vậy DF, EG, AB đồng quy

6. Theo trên $DF \perp BE$ => ΔDEF vuông tại F có FM là trung tuyến (vì M là trung điểm của DE) suy ra

MF = 1/2 DE (vì trong tam giác vuông trung tuyến thuộc cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền).

7. (HD) theo trên MF = 1/2 DE => MD = MF => ΔMDF cân tại M => $\angle D_1 = \angle F_1$

$\Delta O'BF$ cân tại O' (vì O'B và O'F cùng là bán kính) => $\angle F_3 = \angle B_1$ mà $\angle B_1 = \angle D_1$ (Cùng phụ với $\angle DEB$) => $\angle F_1 = \angle F_3$ => $\angle F_1 + \angle F_2 = \angle F_3 + \angle F_2$. Mà $\angle F_3 + \angle F_2 = \angle BFC = 90^0$ => $\angle F_1 + \angle F_2 = 90^0 = \angle MFO'$ hay $MF \perp O'F$ tại F => MF là tiếp tuyến của (O').

Bài 21. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Gọi I là trung điểm của OA . Vẽ đường tron tâm I đi qua A, trên (I) lấy P bất kì, AP cắt (O) tại Q.

1. Chứng minh rằng các đường tròn (I) và (O) tiếp xúc nhau tại A.
2. Chứng minh IP // OQ.
3. Chứng minh rằng AP = PQ.
4. Xác định vị trí của P để tam giác AQB có diện tích lớn nhất.

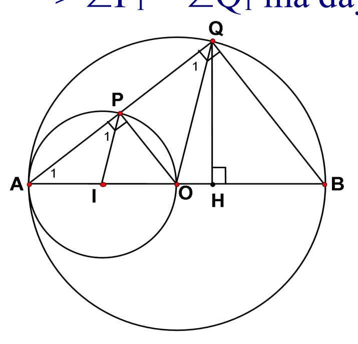
Lời giải:

1. Ta có OI = OA – IA mà OA và IA lần lượt là các bán kính của đ/ tròn (O) và đường tròn (I) . Vậy đ/ tròn (O) và đường tròn (I) tiếp xúc nhau tại A .

2. ΔOAQ cân tại O (vì OA và OQ cùng là bán kính) => $\angle A_1 = \angle Q_1$

ΔIAP cân tại I (vì IA và IP cùng là bán kính) => $\angle A_1 = \angle P_1$

=> $\angle P_1 = \angle Q_1$ mà đây là hai góc đồng vị nên suy ra IP // OQ.



3. $\angle APO = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => $OP \perp AQ$ => OP là đường cao của ΔOAQ mà ΔOAQ cân tại O nên OP là đường trung tuyến => AP = PQ.

4. (***HD***) Kẻ $QH \perp AB$ ta có $S_{AQB} = \frac{1}{2} AB.QH$. mà AB là đường kính không đổi nên S_{AQB} lớn nhất khi QH lớn nhất. QH lớn nhất khi Q trùng với trung điểm của cung AB. Để Q trùng với trung điểm của cung AB thì P phải là trung điểm của cung AO.

Thật vậy P là trung điểm của cung AO => $PI \perp AO$ mà theo trên PI // QO => $QO \perp AB$ tại O => Q là trung điểm của cung AB và khi đó H trung với O; OQ lớn nhất nên QH lớn nhất.

Bài 22. Cho hình vuông ABCD, điểm E thuộc cạnh BC. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với DE, đường thẳng này cắt các đường thẳng DE và DC theo thứ tự ở H và K.

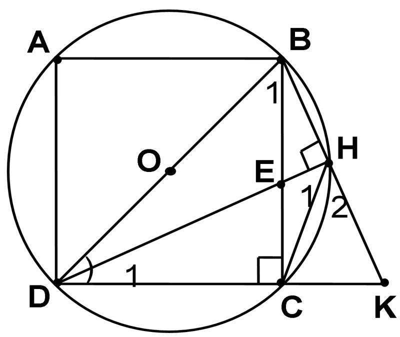
1. Chứng minh BHCD là tứ giác nội tiếp .
2. Tính góc CHK.
3. Chứng minh KC. KD = KH.KB
4. Khi E di chuyển trên cạnh BC thì H di chuyển trên đường nào?

Lời giải:

1. Theo giả thiết ABCD là hình vuông nên $\angle BCD = 90^0$; BH $\perp$ DE tại H nên $\angle BHD = 90^0$ => như vậy H và C cùng nhìn BD dưới một góc bằng 90^0 nên H và C cùng nằm trên đường tròn đường kính BD => BHCD là tứ giác nội tiếp.

2. BHCD là tứ giác nội tiếp => $\angle BDC + \angle BHC = 180^0$. (1)

$\angle BHK$ là góc bẹt nên $\angle KHC + \angle BHC = 180^0$ (2).



Từ (1) và (2) => $\angle CHK = \angle BDC$ mà $\angle BDC = 45^0$ (vì ABCD là hình vuông) => $\angle CHK = 45^0$.

3. Xét ΔKHC và ΔKDB ta có $\angle CHK = \angle BDC = 45^0$; $\angle K$ là góc chung

=> ΔKHC ~ ΔKDB => $\frac{KC}{KB} = \frac{KH}{KD}$ => KC. KD = KH.KB.

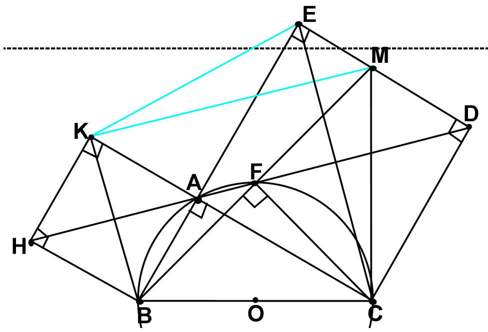
4. (*HD*) Ta luôn có $\angle BHD = 90^0$ và BD cố định nên khi E chuyển động trên cạnh BC cố định thì H chuyển động trên cung BC (E ≡ B thì H ≡ B; E ≡ C thì H ≡ C).

Bài 23. Cho tam giác ABC vuông ở A. Dựng ở miền ngoài tam giác ABC các hình vuông ABHK, ACDE.

1. Chứng minh ba điểm H, A, D thẳng hàng.
2. Đường thẳng HD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại F, chứng minh FBC là tam giác vuông cân.
3. Cho biết $\angle ABC > 45^0$; gọi M là giao điểm của BF và ED, Chứng minh 5 điểm B, K, E, M, C cùng nằm trên một đường tròn.
4. Chứng minh MC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải:

1. Theo giả thiết ABHK là hình vuông => $\angle BAH = 45^0$



Tứ giác AEDC là hình vuông => ∠CAD = 45^0; tam giác ABC vuông ở A => ∠BAC = 90^0

=> ∠BAH + ∠BAC + ∠CAD = $45^0 + 90^0 + 45^0 = 180^0$ => ba điểm H, A, D thẳng hàng.

2. Ta có ∠BFC = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên tam giác BFC vuông tại F. (1).

∠FBC = ∠FAC (nội tiếp cùng chắn cung FC) mà theo trên ∠CAD = 45^0 hay ∠FAC = 45^0 (2).

Từ (1) và (2) suy ra ΔFBC là tam giác vuông cân tại F.

3. Theo trên ∠BFC = 90^0 => ∠CFM = 90^0 (vì là hai góc kề bù); ∠CDM = 90^0 (t/c hình vuông).

=> ∠CFM + ∠CDM = 180^0 mà đây là hai góc đối nên tứ giác CDMF nội tiếp một đường tròn suy ra ∠CDF = ∠CMF , mà ∠CDF = 45^0 (vì AEDC là hình vuông) => ∠CMF = 45^0 hay ∠CMB = 45^0.

Ta cũng có ∠CEB = 45^0 (vì AEDC là hình vuông); ∠BKC = 45^0 (vì ABHK là hình vuông).

Như vậy K, E, M cùng nhìn BC dưới một góc bằng 45^0 nên cùng nằm trên cung chứa góc 45^0 dựng trên BC => 5 điểm B, K, E, M, C cùng nằm trên một đường tròn.

4. ΔCBM có ∠B = 45^0 ; ∠M = 45^0 => ∠BCM =45^0 hay MC ⊥ BC tại C => MC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 24. Cho tam giác nhọn ABC có ∠B = 45^0 . Vẽ đường tròn đường kính AC có tâm O, đường tròn này cắt BA và BC tại D và E.

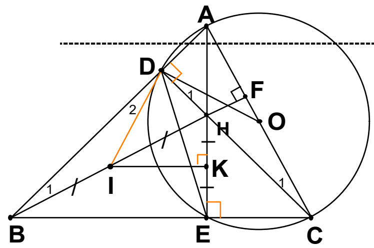
1. Chứng minh AE = EB.
2. Gọi H là giao điểm của CD và AE, Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn HE đi qua trung điểm I của BH.
3. Chứng minh OD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp Δ BDE.

Lời giải:

1. ∠AEC = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> ∠AEB = 90^0 (vì là hai góc kề bù); Theo giả thiết ∠ABE = 45^0

=> ΔAEB là tam giác vuông cân tại E => EA = EB.



2. Gọi K là trung điểm của HE (1) ; I là trung điểm của HB => IK là đường trung bình của tam giác HBE => IK // BE mà $\angle AEC = 90^0$ nên BE ⊥ HE tại E => IK ⊥ HE tại K (2).

Từ (1) và (2) => IK là trung trực của HE . Vậy trung trực của đoạn HE đi qua trung điểm I của BH.

3. theo trên I thuộc trung trực của HE => IE = IH mà I là trung điểm của BH => IE = IB. $\angle ADC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => $\angle BDH = 90^0$ (kề bù $\angle ADC$) => tam giác BDH vuông tại D có DI là trung tuyến (do I là trung điểm của BH) => ID = 1/2 BH hay ID = IB => IE = IB = ID => I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE bán kính ID.

Ta có ΔODC cân tại O (vì OD và OC là bán kính) => $\angle D_1 = \angle C_1$. (3)

ΔIBD cân tại I (vì ID và IB là bán kính) => $\angle D_2 = \angle B_1$. (4)

Theo trên ta có CD và AE là hai đường cao của tam giác ABC => H là trực tâm của tam giác ABC => BH cũng là đường cao của tam giác ABC => BH ⊥ AC tại F => ΔAEB có $\angle AFB = 90^0$.

Theo trên ΔADC có $\angle ADC = 90^0$ => $\angle B_1 = \angle C_1$ (cùng phụ $\angle BAC$) (5).

Từ (3), (4), (5) =>$\angle D_1 = \angle D_2$ mà $\angle D_2 + \angle IDH = \angle BDC = 90^0$=> $\angle D_1 + \angle IDH = 90^0 = \angle IDO$ => OD ⊥ ID tại D => OD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE.

Bài 25. Cho đường tròn (O), BC là dây bất kì (BC< 2R). Kẻ các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và C chúng cắt nhau tại A. Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M rồi kẻ các đường vuông góc MI, MH, MK xuống các cạnh tương ứng BC, AC, AB. Gọi giao điểm của BM, IK là P; giao điểm của CM, IH là Q.

1. Chứng minh tam giác ABC cân. **2**. Các tứ giác BIMK, CIMH nội tiếp .

3. Chứng minh $MI^2 = MH.MK$. **4**. Chứng minh PQ ⊥ MI.

Lời giải:

1. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có AB = AC => ΔABC cân tại A.

2. Theo giả thiết MI ⊥ BC => $\angle MIB = 90^0$; MK ⊥ AB => $\angle MKB = 90^0$.

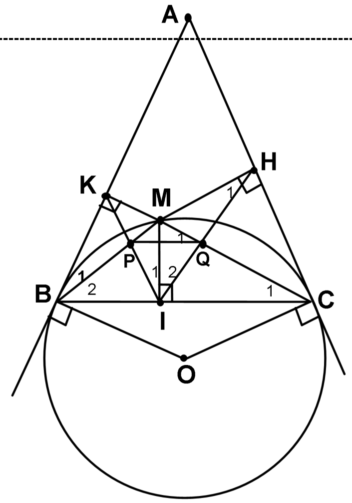
=> $\angle MIB + \angle MKB = 180^0$ mà đây là hai góc đối => tứ giác BIMK nội tiếp

**** (Chứng minh tứ giác CIMH nội tiếp tương tự tứ giác BIMK)***

3. Theo trên tứ giác BIMK nội tiếp => $\angle KMI + \angle KBI = 180^0$; tứ giác CHMI nội tiếp => $\angle HMI + \angle HCI = 180^0$. mà $\angle KBI = \angle HCI$ (vì tam giác ABC cân tại A) => $\angle KMI = \angle HMI$ (1).

Theo trên tứ giác BIMK nội tiếp => $\angle B_1 = \angle I_1$ (nội tiếp cùng chắn cung KM); tứ giác CHMI nội tiếp => $\angle H_1 = \angle C_1$ (nội tiếp cùng chắn cung IM). Mà $\angle B_1 = \angle C_1$ (= 1/2 sđ $\overset{\frown}{BM}$) => $\angle I_1 = \angle H_1$ (2).

Từ (1) và (2) => ΔMKI ΔMIH => $\dfrac{MI}{MH} = \dfrac{MK}{MI}$ => $MI^2 = MH.MK$



4. Theo trên ta có $\angle I_1 = \angle C_1$; cũng chứng minh tương tự ta có $\angle I_2 = \angle B_2$ mà $\angle C_1 + \angle B_2 + \angle BMC = 180^0$ => $\angle I_1 + \angle I_2 + \angle BMC = 180^0$ hay $\angle PIQ + \angle PMQ = 180^0$ mà đây là hai góc đối => tứ giác PMQI nội tiếp => $\angle Q_1 = \angle I_1$ mà $\angle I_1 = \angle C_1$ => $\angle Q_1 = \angle C_1$ => PQ // BC (vì có hai góc đồng vị bằng nhau) . Theo giả thiết MI ⊥BC nên suy ra IM ⊥ PQ.

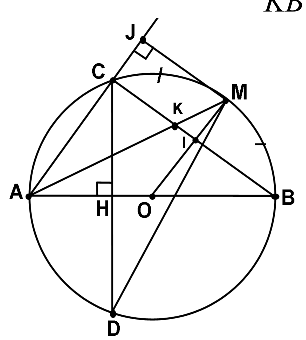
Bài 26. Cho đường tròn (O), đường kính AB = 2R. Vẽ dây cung CD ⊥ AB ở H. Gọi M là điểm chính giữa của cung CB, I là giao điểm của CB và OM. K là giao điểm của AM và CB. Chứng minh :

1. $\frac{KC}{KB} = \frac{AC}{AB}$ **2**. AM là tia phân giác của ∠CMD. **3**. Tứ giác OHCI nội tiếp

4. Chứng minh đường vuông góc kẻ từ M đến AC cũng là tiếp tuyến của đường tròn tại M.

Lời giải: **1**. Theo giả thiết M là trung điểm của $\overset{\frown}{BC}$ => $\overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{MC}$

=> ∠CAM = ∠BAM (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) => AK là tia phân giác của góc CAB => $\frac{KC}{KB} = \frac{AC}{AB}$ (t/c tia phân giác của tam giác)



2. (***HD***) Theo giả thiết CD ⊥ AB => A là trung điểm của $\overset{\frown}{CD}$ => ∠CMA = ∠DMA => MA là tia phân giác của góc CMD.

3. (***HD***) Theo giả thiết M là trung điểm của $\overset{\frown}{BC}$ => OM ⊥ BC tại I => $\angle OIC = 90^0$; CD ⊥ AB tại H => $\angle OHC = 90^0$ => $\angle OIC + \angle OHC = 180^0$ mà đây là hai góc đối => tứ giác OHCI nội tiếp

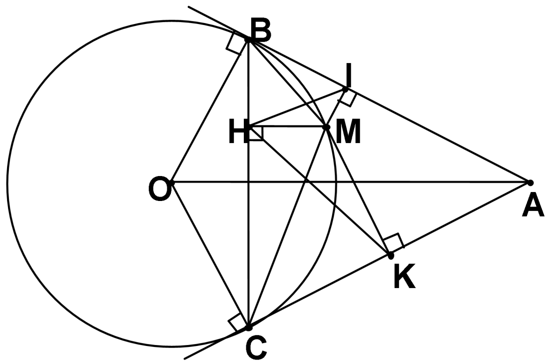
4. Kẻ MJ ⊥ AC ta có MJ // BC (vì cùng vuông góc với AC). Theo trên OM ⊥ BC => OM ⊥ MJ tại J suy ra MJ là tiếp tuyến của đường tròn tại M.

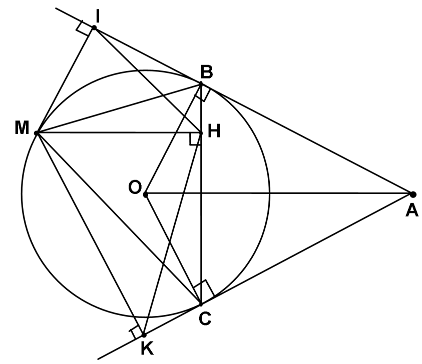
Bài 27 Cho đường tròn (O) và một điểm A ở ngoài đường tròn . Các tiếp tuyến với đường tròn (O) kẻ từ A tiếp xúc với đường tròn (O) tại B và C. Gọi M là điểm tuỳ ý trên đường tròn (M khác B, C), từ M kẻ MH $\perp$ BC, MK $\perp$ CA, MI $\perp$ AB. Chứng minh :

1. Tứ giác ABOC nội tiếp. **2**. $\angle$BAO = $\angle$ BCO. **3**. ΔMIH ~ ΔMHK.

4. MI.MK = MH^2.

Lời giải:





1. (*HS tự giải*)

2. Tứ giác ABOC nội tiếp => $\angle$BAO = $\angle$ BCO (nội tiếp cùng chắn cung BO).

3. Theo giả thiết MH $\perp$ BC => $\angle$MHC = 90^0; MK $\perp$ CA => $\angle$MKC = 90^0 => $\angle$MHC + $\angle$MKC = 180^0 mà đây là hai góc đối => tứ giác MHCK nội tiếp => $\angle$HCM = $\angle$HKM (nội tiếp cùng chắn cung HM).

Chứng minh tương tự ta có tứ giác MHBI nội tiếp => $\angle$MHI = $\angle$MBI (nội tiếp cùng chắn cung IM).

Mà $\angle$HCM = $\angle$MBI (= 1/2 sđ $\overset{\frown}{BM}$) => $\angle$HKM = $\angle$MHI (1). Chứng minh tương tự ta cũng có

$\angle$KHM = $\angle$HIM (2). Từ (1) và (2) => Δ HIM ~ Δ KHM.

4. Theo trên Δ HIM ~ Δ KHM => $\frac{MI}{MH}=\frac{MH}{MK}$ => MI.MK = MH^2

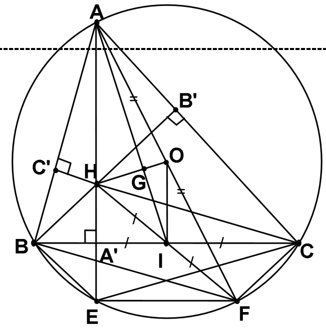
Bài 28 Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC; E là điểm đối xứng của H qua BC; F là điểm đối xứng của H qua trung điểm I của BC.

1. Chứng minh tứ giác BHCF là hình bình hành.
2. E, F nằm trên đường tròn (O).
3. Chứng minh tứ giác BCFE là hình thang cân.
4. Gọi G là giao điểm của AI và OH. Chứng minh G là trọng tâm của tam giác ABC.

Lời giải:

1. Theo giả thiết F là điểm đối xứng của H qua trung điểm I của BC => I là trung điểm BC và HE => BHCF là hình bình hành vì có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường .

2. (***HD***) Tứ giác AB'HC' nội tiếp => $\angle$BAC + $\angle$B'HC' = 180^0 mà $\angle$BHC = $\angle$B'HC' (đối đỉnh) => $\angle$BAC + $\angle$BHC = 180^0. Theo trên BHCF là hình bình hành => $\angle$BHC = $\angle$BFC => $\angle$BFC + $\angle$BAC = 180^0



=> Tứ giác ABFC nội tiếp => F thuộc (O).

* H và E đối xứng nhau qua BC => ΔBHC = ΔBEC (c.c.c) => ∠BHC = ∠BEC => ∠ BEC + ∠BAC = 180^0 => ABEC nội tiếp => E thuộc (O) .

3. Ta có H và E đối xứng nhau qua BC => BC ⊥ HE (1) và IH = IE mà I là trung điểm của của HF

=> EI = 1/2 HE => tam giác HEF vuông tại E hay FE ⊥ HE (2)

Từ (1) và (2) => EF // BC => BEFC là hình thang. (3)

Theo trên E ∈(O) => ∠CBE = ∠CAE (nội tiếp cùng chắn cung CE) (4).

Theo trên F ∈(O) và ∠FEA =90^0 => AF là đường kính của (O) => ∠ACF = 90^0 => ∠BCF = ∠CAE

(vì cùng phụ ∠ACB) (5).

Từ (4) và (5) => ∠BCF = ∠CBE (6).

Từ (3) và (6) => tứ giác BEFC là hình thang cân.

4. Theo trên AF là đường kính của (O) => O là trung điểm của AF; BHCF là hình bình hành => I là trung điểm của HF => OI là đường trung bình của tam giác AHF => OI = 1/ 2 AH.

Theo giả thiết I là trung điểm của BC => OI ⊥ BC (Quan hệ đường kính và dây cung) => ∠OIG = ∠HAG (vì so le trong); lại có ∠OGI = ∠ HGA (đối đỉnh) => ΔOGI ~ ΔHGA => $\frac{GI}{GA}=\frac{OI}{HA}$ mà OI = $\frac{1}{2}$ AH

=> $\frac{GI}{GA}=\frac{1}{2}$ mà AI là trung tuyến của Δ ABC (do I là trung điểm của BC) => G là trọng tâm của Δ ABC.

<u>**Bài 29**</u> BC là một dây cung của đường tròn (O; R) (BC ≠ 2R). Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho O luôn nằm trong tam giác ABC. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại H.

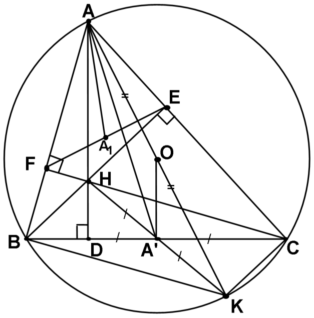
1. Chứng minh tam giác AEF đồng dạng với tam giác ABC.
2. Gọi A' là trung điểm của BC, Chứng minh AH = 2OA'.
3. Gọi A_1 là trung điểm của EF, Chứng minh R.AA_1 = AA'. OA'.
4. Chứng minh R(EF + FD + DE) = $2S_{ABC}$ suy ra vị trí của A để tổng EF + FD + DE đạt giá trị lớn nhất.

<u>**Lời giải:**</u> ***(HD)***

1. Tứ giác BFEC nội tiếp => ∠AEF = ∠ACB (cùng bù ∠BFE)

∠AEF = ∠ABC (cùng bù ∠CEF) => Δ AEF ~ Δ ABC.

2. Vẽ đường kính AK => KB // CH (cùng vuông góc AB); KC // BH (cùng vuông góc AC) => BHKC là hình bình hành => A' là trung điểm của HK => OK là đường trung bình của ΔAHK => AH = 2OA'



3. Áp dụng tính chất : *nếu hai tam giác đồng dạng thì tỉ số giữa hia trung tuyến, tỉ số giữa hai bán kính các đường tròn ngoại tiếp bằng tỉ số đồng dạng.* ta có :

Δ AEF ~ Δ ABC => $\frac{R}{R'} = \frac{AA'}{AA_1}$ (1) trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC; R' là bán kính đường tròn ngoại tiếp Δ AEF; AA' là trung tuyến của ΔABC; AA_1 là trung tuyến của ΔAEF.

Tứ giác AEHF nội tiếp đường tròn đường kính AH nên đây cũng là đường tròn ngoại tiếp ΔAEF

Từ (1) => $R.AA_1 = AA'.R' = AA' \frac{AH}{2} = AA' . \frac{2A'O}{2}$

Vậy $R . AA_1 = AA' . A'O$ (2)

4. Gọi B', C'lần lượt là trung điểm của AC, AB, ta có OB'$\perp$AC ; OC'$\perp$AB (bán kính đi qua trung điểm của một dây không qua tâm) => OA', OB', OC' lần lượt là các đường cao của các tam giác OBC, OCA, OAB.

$$S_{ABC} = S_{OBC} + S_{OCA} + S_{OAB} = \frac{1}{2}(OA' . BC' + OB' . AC + OC' . AB)$$

$2S_{ABC}$ = OA' . BC + OB' . AC' + OC' . AB (3)

Theo (2) => OA' = R . $\frac{AA_1}{AA'}$ mà $\frac{AA_1}{AA'}$ là tỉ số giữa 2 trung tuyến của hai tam giác đồng dạng AEF và ABC nên $\frac{AA_1}{AA'} = \frac{EF}{BC}$. Tương tự ta có : OB' = R . $\frac{FD}{AC}$; OC' = R . $\frac{ED}{AB}$ Thay vào (3) ta được

$2S_{ABC} = R\left(\frac{EF}{BC}.BC + \frac{FD}{AC}.AC + \frac{ED}{AB}.AB\right) \Leftrightarrow 2S_{ABC} = R(EF + FD + DE)$

* R(EF + FD + DE) = $2S_{ABC}$ mà R không đổi nên (EF + FD + DE) đạt gí trị lớn nhất khi S_{ABC}.

Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}$AD.BC do BC không đổi nên S_{ABC} lớn nhất khi AD lớn nhất, mà AD lớn nhất khi A là điểm chính giữa của cung lớn BC.

<u>Bài 30</u> Cho tam giác ABC nội tiếp (O; R), tia phân giác của góc BAC cắt (O) tại M. Vẽ đường cao AH và bán kính OA.

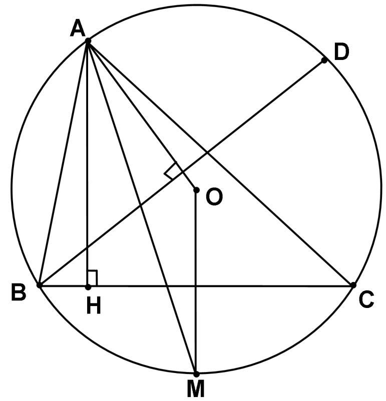
1. Chứng minh AM là phân giác của góc OAH.
2. Giả sử ∠B > ∠C. Chứng minh ∠OAH = ∠B - ∠C.
3. Cho ∠BAC = 60^0 và ∠OAH = 20^0. Tính:

a) ∠B và ∠C của tam giác ABC.

b) Diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây BC và cung nhỏ BC theo R

Lời giải: ***(HD)***

1. AM là phân giác của ∠BAC => ∠BAM = ∠CAM => $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{CM}$ => M là trung điểm của cung BC => OM ⊥ BC; Theo giả thiết AH ⊥ BC => OM // AH => ∠HAM = ∠OMA (so le). Mà ∠OMA = ∠OAM (vì tam giác OAM cân tại O do có OM = OA = R) => ∠HAM = OAM => AM là tia phân giác của góc OAH.



2. Vẽ dây BD ⊥ OA => $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AD}$ => ∠ABD = ∠ACB.

Ta có ∠OAH = ∠ DBC (góc có cạnh tương ứng vuông góc cùng nhọn) => ∠OAH = ∠ABC - ∠ABD => ∠OAH = ∠ABC - ∠ACB hay ∠OAH = ∠B - ∠C.

3. a) Theo giả thiết ∠BAC = 60^0 => ∠B + ∠C = 120^0 ; theo trên ∠B ∠C = ∠OAH => ∠B - ∠C = 20^0 .

=> $\begin{cases} \angle B + \angle C = 120^0 \\ \angle B - \angle C = 20^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \angle B = 70^0 \\ \angle C = 50^0 \end{cases}$

b) $S_{vp} = S_{qBOC} - S_{\triangle BOC} = \dfrac{\pi.R^2.120^2}{360^0} - \dfrac{1}{2}R.\sqrt{3}.\dfrac{R}{2} = \dfrac{\pi.R^2}{3} - \dfrac{R^2.\sqrt{3}}{4} = \dfrac{R^2.(4\pi - 3\sqrt{3})}{12}$

Bài 31 Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp (O; R), biết ∠BAC = 60^0.

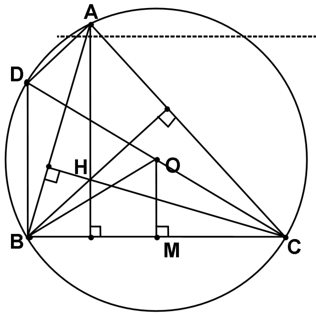
1. Tính số đo góc BOC và độ dài BC theo R.
2. Vẽ đường kính CD của (O; R); gọi H là giao điểm của ba đường cao của tam giác ABC Chứng minh BD // AH và AD // BH.
3. Tính AH theo R.

Lời giải:

1. Theo giả thiết ∠BAC = 60^0 => sđ $\overset{\frown}{BC} = 120^0$ (t/c góc nội tiếp)
=> ∠BOC = 120^0 (t/c góc ở tâm) .

* Theo trên sđ $\overset{\frown}{BC} = 120^0$ => BC là cạnh của một tam giác đều nội tiếp (O; R) => BC = R$\sqrt{3}$.

2. CD là đường kính => ∠DBC = 90^0 hay DB ⊥ BC; theo giả thiết AH là



đường cao => AH ⊥ BC => BD // AH. *Chứng minh tương tự ta cũng được AD // BH.*

3. Theo trên ∠DBC = 90^0 => ΔDBC vuông tại B có BC = $R\sqrt{3}$; CD = 2R.

=> $BD^2 = CD^2 - BC^2$ => $BD^2 = (2R)^2 - (R\sqrt{3})^2 = 4R^2 - 3R^2 = R^2$ => BD = R.

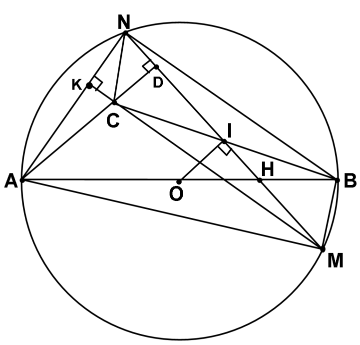
Theo trên BD // AH; AD // BH => BDAH là hình bình hành => AH = BD => AH = R.

Bài 32 Cho đường tròn (O), đường kính AB = 2R. Một cát tuyến MN quay quanh trung điểm H của OB.

1. Chứng minh khi MN di động , trung điểm I của MN luôn nằm trên một đường tròn cố định.
2. Từ A kẻ Ax ⊥ MN, tia BI cắt Ax tại C. Chứng minh tứ giác CMBN là hình bình hành.
3. Chứng minh C là trực tâm của tam giác AMN.
4. Khi MN quay quanh H thì C di động trên đường nào.
5. Cho AM. AN = $3R^2$, AN = $R\sqrt{3}$. Tính diện tích phần hình tròn (O) nằm ngoài tam giác AMN.

Lời giải: (*HD*)

1. I là trung điểm của MN => OI ⊥ MN tại I (quan hệ đường kính và dây cung) = > ∠OIH = 90^0 .



OH cố địmh nên khi MN di động thì I cũng di động nhưng luôn nhìn OH cố định dưới một góc 90^0 do đó I di động trên đường tròn đường kính OH. Vậy khi MN di động , trung điểm I của MN luôn nằm trên một đường tròn cố định.

2. Theo giả thiết Ax ⊥ MN; theo trên OI ⊥ MN tại I => OI // Ax hay OI // AC mà O là trung điểm của AB => I là trung điểm của BC, lại có I là trung điểm của MN (gt) => CMBN là hình bình hành (Vì có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường).

3. CMBN là hình bình hành => MC // BN mà BN ⊥ AN (vì ∠ANB = 90^0 do là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) => MC ⊥ AN; theo trên AC ⊥ MN => C là trực tâm của tam giác AMN.

4. Ta có H là trung điểm của OB; I là trung điểm của BC => IH là đường tung bình của ΔOBC => IH // OC Theo giả thiết Ax ⊥ MN hay IH ⊥ Ax => OC ⊥ Ax tại C => $\angle OCA = 90^0$ => C thuộc đường tròn đường kính OA cố định. Vậy khi MN quay quanh H thì C di động trên đường tròn đường kính OA cố định.

5. Ta có AM. AN = $3R^2$, AN = $R\sqrt{3}$. => AM =AN = $R\sqrt{3}$ => ΔAMN cân tại A. (1)

Xét ΔABN vuông tại N ta có AB = 2R; AN = $R\sqrt{3}$ => BN = R => $\angle ABN = 60^0$.

$\angle ABN = \angle AMN$ (nội tiếp cùng chắn cung AN) => $\angle AMN = 60^0$ (2).

Từ (1) và (2) => ΔAMN là tam giác đều => $S_{\Delta AMN} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

=> $S = S_{(O)} - S_{\Delta AMN} = \pi R^2 - \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{R^2(4\pi - 3\sqrt{3}}{4}$

Bài 33 Cho tam giác ABC nội tiếp (O; R), tia phân giác của góc BAC cắt BC tại I, cắt đường tròn tại M.

1. Chứng minh OM ⊥ BC.
2. Chứng minh MC^2 = MI.MA.
3. Kẻ đường kính MN, các tia phân giác của góc B và C cắt đường thẳng AN tại P và Q. Chứng minh bốn điểm P, C , B, Q cùng thuộc một đường tròn .

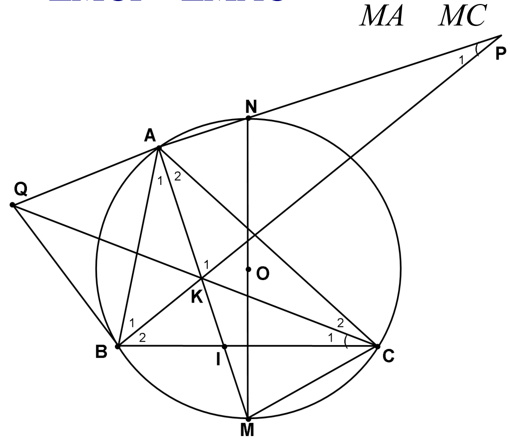
Lời giải:

1. AM là phân giác của $\angle BAC$ => $\angle BAM = \angle CAM$

=> $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{CM}$ => M là trung điểm của cung BC => OM ⊥ BC

2. Xét ΔMCI và ΔMAC có $\angle MCI = \angle MAC$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau); $\angle M$ là góc chung

=> $\Delta MCI \sim \Delta MAC$ => $\dfrac{MC}{MA} = \dfrac{MI}{MC}$ => MC^2 = MI.MA.



3. (*HD*) $\angle MAN = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> $\angle P_1 = 90^0 - \angle K_1$ mà $\angle K_1$ là góc ngoài của tam giác AKB nên $\angle K_1 = \angle A_1 + \angle B_1 = \dfrac{\angle A}{2} + \dfrac{\angle B}{2}$ (t/c phân giác của một góc) => $\angle P_1 = 90^0 - (\dfrac{\angle A}{2} + \dfrac{\angle B}{2})$.(1)

CQ là tia phân giác của góc ACB => $\angle C_1 = \dfrac{\angle C}{2} = \dfrac{1}{2}(180^0 - \angle A - \angle B) = 90^0 - (\dfrac{\angle A}{2} + \dfrac{\angle B}{2})$. (2).

Từ (1) và (2) => $\angle P_1 = \angle C_1$ hay $\angle QPB = \angle QCB$ mà P và C nằm cùng về một nửa mặt phẳng bờ BQ nên cùng nằm trên cung chứa góc $90^0 - (\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2})$ dựng trên BQ.

Vậy bốn điểm P, C, B, Q cùng thuộc một đường tròn .

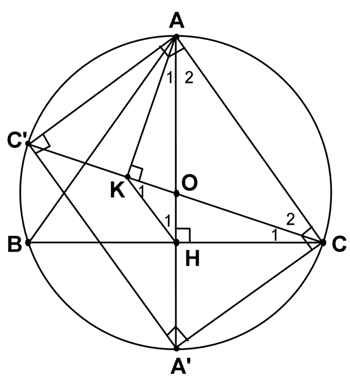
Bài 34 Cho tam giác ABC cân (AB = AC), BC = 6 Cm, chiều cao AH = 4 Cm, nội tiếp đường tròn (O) đường kính AA'.

1. Tính bán kính của đường tròn (O).
2. Kẻ đường kính CC', tứ giác CAC'A' là hình gì? Tại sao?
3. Kẻ AK $\perp$ CC' tứ giác AKHC là hình gì? Tại sao?
4. Tính diện tích phần hình tròn (O) nằm ngoài tam giác ABC.

Lời giải:

1. *(HD)* Vì ΔABC cân tại A nên đường kính AA' của đường tròn ngoại tiếp và đường cao AH xuất phát từ đỉnh A trùng nhau, tức là AA'đi qua H. => ΔACA' vuông tại C có đường cao CH = $\frac{BC}{2} = \frac{6}{2} =$ 3cm; AH = 4cm => CH^2 = AH.A'H => A'H = $\frac{CH^2}{AH} = \frac{3^2}{4} = \frac{9}{4} = 2,5$

=> AA'



=> AA' = AH + HA' = 4 + 2,5 = 6,5 9cm) => R = AA' : 2 = 6,5 : 2 = 3,25 (cm) .

2. Vì AA' và CC' là hai đường kính nên cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường => ACA'C' là hình bình hành. Lại có $\angle ACA' = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên suy ra tứ giác ACA'C' là hình chữ nhật.

3. Theo giả thiết AH $\perp$ BC; AK $\perp$ CC' => K và H cùng nhìn AC dưới một góc bằng 90^0 nên cùng nằm trên đường tròn đường kính AC hay tứ giác ACHK nội tiếp (**1**) => $\angle C_2 = \angle H_1$ (nội tiếp cung chắn cung AK) ; ΔAOC cân tại O (vì OA=OC=R) => $\angle C_2 = \angle A_2$ => $\angle A_2 = \angle H_1$ => HK // AC (vì có hai góc so le trong bằng nhau) => tứ giác ACHK là hình thang (2).Từ (1) và (2) suy ra tứ giác ACHK là hình thang cân.

Bài 35 Cho đường tròn (O), đường kính AB cố định, điểm I nằm giữa A và O sao cho AI = 2/3 AO. Kẻ dây MN vuông góc với AB tại I, gọi C là điểm tuỳ ý thuộc cung lớn MN sao cho C không trùng với M, N và B. Nối AC cắt MN tại E.

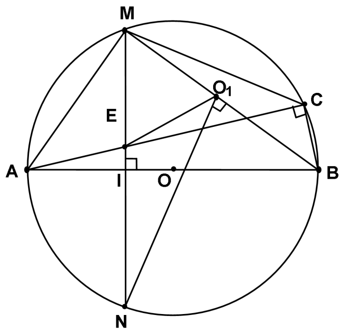
1. Chứng minh tứ giác IECB nội tiếp .
2. Chứng minh tam giác AME đồng dạng với tam giác ACM.
3. Chứng minh AM^2 = AE.AC.
4. Chứng minh AE. AC - AI.IB = AI^2 .

5. Hãy xác định vị trí của C sao cho khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME là nhỏ nhất.

Lời giải:

1. Theo giả thiết MN $\perp$AB tại I => $\angle$EIB = 90^0; $\angle$ ACB nội tiếp chắn nửa đường tròn nên $\angle$ACB = 90^0 hay $\angle$ECB = 90^0

=> $\angle$EIB + $\angle$ECB = 180^0 mà đây là hai góc đối của tứ giác IECB nên tứ giác IECB là tứ giác nội tiếp .



2. Theo giả thiết MN $\perp$AB => A là trung điểm của cung MN => $\angle$AMN = $\angle$ACM (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) hay $\angle$AME = $\angle$ACM. Lại thấy $\angle$CAM là góc chung của hai tam giác AME và AMC do đó tam giác AME đồng dạng với tam giác ACM.

3. Theo trên ΔAME ~ Δ ACM => $\frac{AM}{AC}=\frac{AE}{AM}$ => AM^2 = AE.AC

4. $\angle$AMB = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn); MN $\perp$AB tại I => ΔAMB vuông tại M có MI là đường cao => MI^2 = AI.BI (hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông) . Áp dụng định lí Pitago trong tam giác AIM vuông tại I ta có $AI^2 = AM^2 – MI^2$ => AI^2 = AE.AC - AI.BI .

5. Theo trên $\angle$AMN = $\angle$ACM => AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp Δ ECM; Nối MB ta có $\angle$AMB = 90^0 , do đó tâm O_1 của đường tròn ngoại tiếp Δ ECM phải nằm trên BM. Ta thấy NO_1 nhỏ nhất khi NO_1 là khoảng cách từ N đến BM => $NO_1 \perp$BM.

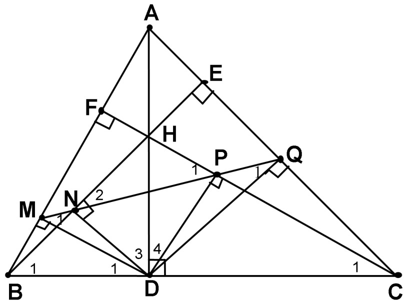
Gọi O_1 là chân đường vuông góc kẻ từ N đến BM ta được O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp Δ ECM có bán kính là O_1M. Do đó để khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME là nhỏ nhất thì C phải là giao điểm của đường tròn tâm O_1 bán kính O_1M với đường tròn (O) trong đó O_1 là hình chiếu vuông góc của N trên BM.

Bài 36 Cho tam giác nhọn ABC , Kẻ các đường cao AD, BE, CF. Gọi H là trực tâm của tam giác. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các hình chiếu vuông góc của D lên AB, BE, CF, AC. Chứng minh :

1. Các tứ giác DMFP, DNEQ là hình chữ nhật.
2. Các tứ giác BMND; DNHP; DPQC nội tiếp .
3. Hai tam giác HNP và HCB đồng dạng.
4. Bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng.

Lời giải: ***1. & 2. (HS tự làm)***

3. Theo chứng minh trên DNHP nội tiếp => $\angle N_2 = \angle D_4$ (nội tiếp cùng chắn cung HP); ΔHDC có $\angle HDC = 90^0$ (do AH là đường cao) Δ HDP có $\angle HPD = 90^0$ (do DP $\perp$ HC) => $\angle C_1 = \angle D_4$ (cùng phụ với $\angle$DHC)=>$\angle C_1 = \angle N_2$ (1) chứng minh tương tự ta có $\angle B_1 = \angle P_1$ (2)
Từ (1) và (2) => ΔHNP ~ Δ HCB



4. Theo chứng minh trên DNMB nội tiếp => $\angle N_1 = \angle D_1$ (nội tiếp cùng chắn cung BM).(3)
DM // CF (cùng vuông góc với AB) => $\angle C_1 = \angle D_1$ (hai góc đồng vị).(4)
Theo chứng minh trên $\angle C_1 = \angle N_2$ (5)
Từ (3), (4), (5) => $\angle N_1 = \angle N_2$ mà B, N, H thẳng hàng => M, N, P thẳng hàng. (6)
Chứng minh tương tự ta cung có N, P, Q thẳng hàng . (7)
Từ (6), (7) => Bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng

Bài 37 Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC, B $\in$ (O), C $\in$ (O') . Tiếp tuyến chung trong tại A cắt tiếp tuyến chung ngoài BC ở I.

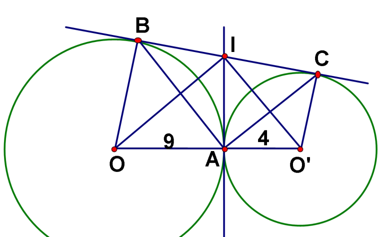
1. Chứng minh các tứ giác OBIA, AICO' nội tiếp .
2. Chứng minh $\angle$ BAC = 90^0 .
3. Tính số đo góc OIO'.
4. Tính độ dài BC biết OA = 9cm, O'A = 4cm.

Lời giải:

1. *(HS tự làm)*

2. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có IB = IA , IA = IC

$\triangle$ABC có AI = $\frac{1}{2}$BC =>$\triangle$ABC vuông tại A hay $\angle BAC = 90^0$



3. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có IO là tia phân giác $\angle$BIA; I0'là tia phân giác $\angle$CIA . mà hai góc BIA và CIA là hai góc kề bù => I0 $\perp$ I0'=> $\angle 0I0' = 90^0$

4. Theo trên ta có $\triangle$0I0' vuông tại I có IA là đường cao (do AI là tiếp tuyến chung nên AI $\perp$OO')

=> $IA^2 = A0.A0' = 9.\ 4 = 36$ => IA = 6 => BC = 2. IA = 2. 6 = 12(cm)

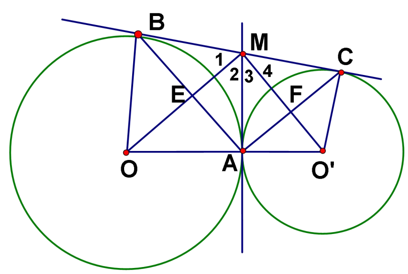
Bài 38 Cho hai đường tròn (O) ; (O') tiếp xúc ngoài tại A, BC là tiếp tuyến chung ngoài, $B\in(O)$, $C\in$ (O'). Tiếp tuyến chung trong tại A cắ tiếp tuyến chung ngoài BC ở M. Gọi E là giao điểm của OM và AB, F là giao điểm của O'M và AC. Chứng minh :

1. Chứng minh các tứ giác OBMA, AMCO' nội tiếp .
2. Tứ giác AEMF là hình chữ nhật.
3. ME.MO = MF.MO'.
4. OO' là tiếp tuyến của đường tròn đường kính BC.
5. BC là tiếp tuyến của đường tròn đường kính OO'.

Lời giải:

1. ***(HS tự làm)***

2. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có MA = MB



=>△MAB cân tại M. Lại có ME là tia phân giác => ME ⊥ AB (1).

Chứng minh tương tự ta cũng có MF ⊥ AC (2).

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta cũng có MO và MO' là tia phân giác của hai góc kề bù BMA và CMA => MO ⊥ MO' (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra tứ giác MEAF là hình chữ nhật

3. Theo giả thiết AM là tiếp tuyến chung của hai đường tròn => MA ⊥ OO'=> ΔMAO vuông tại A có AE ⊥ MO (theo trên ME ⊥ AB) $\Rightarrow MA^2 = ME.\ MO$ (4)

Tương tự ta có tam giác vuông MAO' có AF⊥MO'$\Rightarrow MA^2 = MF.MO'$ (5)

Từ (4) và (5) ⇒ ME.MO = MF. MO'

4. Đường tròn đường kính BC có tâm là M vì theo trên MB = MC = MA, đường tròn này đi qua Avà co MA là bán kính . Theo trên OO' ⊥ MA tại A ⇒ OO' là tiếp tuyến tại A của đường tròn đường kính BC.

5. ***(HD)*** Gọi I là trung điểm của OO' ta có IM là đường trung bình của hình thang BCO'O

=> IM⊥BC tại M (*) .Ta cung chứng minh được ∠OMO' vuông nên M thuộc đường tròn đường kính OO' => IM là bán kính đường tròn đường kính OO' (**)

Từ (*) và (**) => BC là tiếp tuyến của đường tròn đường kính OO'

Bài 39 Cho đường tròn (O) đường kính BC, dấy AD vuông góc với BC tại H. Gọi E, F theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC. Gọi (I), (K) theo thứ tự là các đường tròn ngoại tiếp tam giác HBE, HCF.

1. Hãy xác định vị trí tương đối của các đường tròn (I) và (O); (K) và (O); (I) và (K).
2. Tứ giác AEHF là hình gì? Vì sao?.
3. Chứng minh AE. AB = AF. AC.
4. Chứng minh EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K).
5. Xác định vị trí của H để EF có độ dài lớn nhất.

Lời giải:

1.*(HD)* OI = OB – IB => (I) tiếp xúc (O)

OK = OC – KC => (K) tiếp xúc (O)

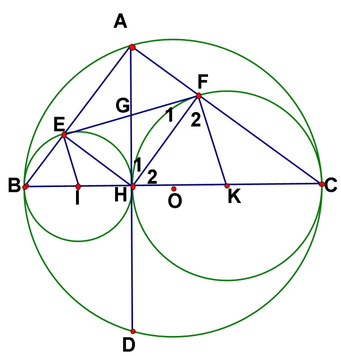
IK = IH + KH => (I) tiếp xúc (K)

2. Ta có : $\angle BEH = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> $\angle AEH = 90^0$ (vì là hai góc kề bù). (1)

$\angle CFH = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> $\angle AFH = 90^0$ (vì là hai góc kề bù).(2)



$\angle BAC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn hay $\angle EAF = 90^0$ (3)

Từ (1), (2), (3) => tứ giác AFHE là hình chữ nhật (vì có ba góc vuông).

3. Theo giả thiết AD⊥BC tại H nên ΔAHB vuông tại H có HE ⊥ AB ($\angle BEH = 90^0$) => AH^2 = AE.AB (*)

Tam giác AHC vuông tại H có HF ⊥ AC (theo trên $\angle CFH = 90^0$) => AH^2 = AF.AC (**)

Từ (*) và (**) => AE. AB = AF. AC (= AH^2)

4. Theo chứng minh trên tứ giác AFHE là hình chữ nhật, gọi G là giao điểm của hai đường chéo AH và EF ta có GF = GH (tính chất đường chéo hình chữ nhật) => ΔGFH cân tại G => $\angle F_1 = \angle H_1$.

ΔKFH cân tại K (vì có KF và KH cùng là bán kính) => $\angle F_2 = \angle H_2$.

=> $\angle F_1 + \angle F_2 = \angle H_1 + \angle H_2$ mà $\angle H_1 + \angle H_2 = \angle AHC = 90^0$ => $\angle F_1 + \angle F_2 = \angle KFE = 90^0$ => KF ⊥EF .

Chứng minh tương tự ta cũng có IE ⊥ EF. Vậy EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K).

e) Theo chứng minh trên tứ giác AFHE là hình chữ nhật => EF = AH ≤ OA (OA là bán kính đường tròn (O) có độ dài không đổi) nên EF = OA <=> AH = OA <=> H trùng với O.

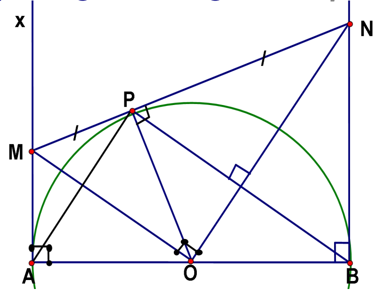
Vậy khi H trùng với O túc là dây AD vuông góc với BC tại O thì EF có độ dài lớn nhất.

Bài 40 Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By. Trên Ax lấy điểm M rồi kẻ tiếp tuyến MP cắt By tại N.

1. Chứng minh tam giác MON đồng dạng với tam giác APB.
2. Chứng minh AM. BN = R^2.
3. Tính tỉ số $\frac{S_{MON}}{S_{APB}}$ khi AM = $\frac{R}{2}$.
4. Tính thể tích của hình do nửa hình tròn APB quay quanh cạnh AB sinh ra.

Lời giải:

1. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: OM là tia phân giác của góc AOP ; ON là tia phân giác của góc BOP, mà



∠AOP và ∠BOP là hai góc kề bù => ∠MON = 90^0. hay tam giác MON vuông tại O.

∠APB = 90^0((nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay tam giác APB vuông tại P.

Theo tính chất tiếp tuyến ta có NB ⊥ OB => ∠OBN = 90^0; NP ⊥ OP => ∠OPN = 90^0 =>∠OBN+∠OPN =180^0 mà ∠OBN và ∠OPN là hai góc đối => tứ giác OBNP nội tiếp =>∠OBP = ∠PNO

Xét hai tam giác vuông APB và MON có ∠APB = ∠ MON = 90^0; ∠OBP = ∠PNO => ΔAPB ~ Δ MON

2. Theo trên ΔMON vuông tại O có OP ⊥ MN (OP là tiếp tuyến).

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có OP^2 = PM. PM

Mà OP = R; AM = PM; BN = NP (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) => AM. BN = R^2

3. Theo trên OP^2 = PM. PM hay PM. PM = R^2 mà PM = AM = $\frac{R}{2}$ => PM = $\frac{R}{2}$=> PN = R^2: $\frac{R}{2}$ = 2R

=> MN = MP + NP = $\frac{R}{2}$+ 2R = $\frac{5R}{2}$Theo trên ΔAPB ~ Δ MON => $\frac{MN}{AB}$ = $\frac{5R}{2}$: 2R = $\frac{5}{4}$ = k (k là tỉ số đồng dạng).Vì tỉ số diện tich giữa hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng nên ta có:

$$\frac{S_{MON}}{S_{APB}} = k^2 \Rightarrow \frac{S_{MON}}{S_{APB}} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

Bài 41 Cho tam giác đều ABC , O là trung điểm của BC. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm D, E sao cho ∠ DOE = 60^0 .

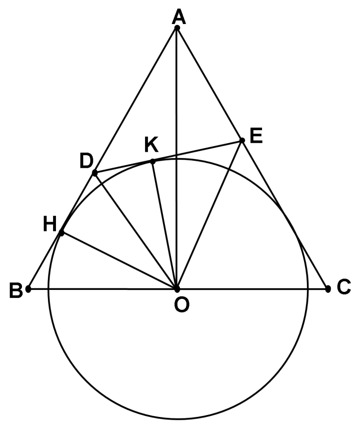
1)Chứng minh tích BD. CE không đổi.

2)Chứng minh hai tam giác BOD; OED đồng dạng. Từ đó suy ra tia DO là tia phân giác của góc BDE

3)Vẽ đường tròn tâm O tiếp xúc với AB. Chứng minh rằng đường tròn này luôn tiếp xúc với DE.

Lời giải:

1. Tam giác ABC đều => ∠ABC = ∠ ACB = 60^0 (1);
∠ DOE = 60^0 (gt) =>∠DOB + ∠EOC = 120^0 (2).
ΔDBO có ∠DOB = 60^0 => ∠BDO + ∠BOD = 120^0 (3) .
Từ (2) và (3) => ∠BDO = ∠ COE (4)
Từ (2) và (4) => ΔBOD ~ ΔCEO => $\frac{BD}{CO}=\frac{BO}{CE}$ => BD.CE = BO.CO mà OB = OC = R không đổi => BD.CE = R^2 không đổi.



2. Theo trên ΔBOD ~ ΔCEO => $\frac{BD}{CO}=\frac{OD}{OE}$ mà CO = BO =>
$\frac{BD}{BO}=\frac{OD}{OE} \Rightarrow \frac{BD}{OD}=\frac{BO}{OE}$ (5)
Lại có ∠DBO = ∠DOE = 60^0 (6).
Từ (5) và (6) => ΔDBO ~ ΔDOE => ∠BDO = ∠ODE => DO là tia phân giác ∠ BDE.
3. Theo trên DO là tia phân giác ∠ BDE => O cách đều DB và DE => O là tâm đường tròn tiếp xúc với DB và DE. Vậy đường tròn tâm O tiếp xúc với AB luôn tiếp xúc với DE

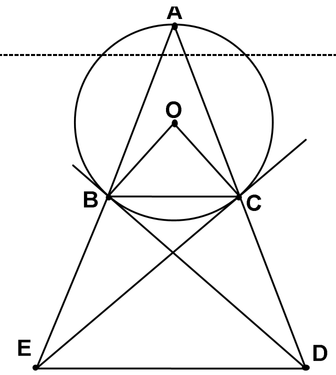
Bài 42 Cho tam giác ABC cân tại A. có cạnh đáy nhỏ hơn cạnh bên, nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại B và C lần lượt cắt AC, AB ở D và E. Chứng minh :

1. BD^2 = AD.CD.
2. Tứ giác BCDE nội tiếp .
3. BC song song với DE.

Lời giải:

1. Xét hai tam giác BCD và ABD ta có ∠CBD = ∠BAD (Vì là góc nội tiếp và góc giữa tiếp tuyến với một dây cùng chắn một cung), lại có ∠D chung => ΔBCD ~ ΔABD => $\frac{BD}{AD}=\frac{CD}{BD}$ => BD^2 = AD.CD.

2. Theo giả thiết tam giác ABC cân tại A => ∠ABC = ∠ACB
=> ∠EBC = ∠DCB mà ∠CBD = ∠BCD (góc giữa tiếp tuyến với một dây cùng chắn một cung) => ∠EBD = ∠DCE => B và C nhìn DE dưới cùng



một góc do đó B và C cùng nằm trên cung tròn dựng trên DE
=> Tứ giác BCDE nội tiếp

3. Tứ giác BCDE nội tiếp => $\angle BCE = \angle BDE$ (nội tiếp cùng chắn cung BE) mà $\angle BCE = \angle CBD$ (theo trên) => $\angle CBD = \angle BDE$ mà đây là hai góc so le trong nên suy ra BC // DE.

<u>Bài 43</u> Cho đường tròn (O) đường kính AB, điểm M thuộc đường tròn . Vẽ điểm N đối xứng với A qua M,
BN cắt (O) tại C. Gọi E là giao điểm của AC và BM.

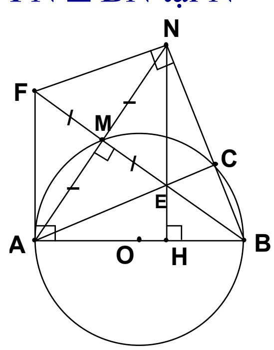
1. Chứng minh tứ giác MNCE nội tiếp .
2. Chứng minh NE ⊥ AB.
3. Gọi F là điểm đối xứng với E qua M. Chứng minh FA là tiếp tuyến của (O).
4. Chứng minh FN là tiếp tuyến của đường tròn (B; BA).

<u>Lời giải:</u> **1**. ***(HS tự làm)***

2. (HD) Dễ thấy E là trực tâm của tam giác NAB => NE ⊥ AB.

3.Theo giả thiết A và N đối xứng nhau qua M nên M là trung điểm của AN; F và E xứng nhau qua M nên M là trung điểm của EF => AENF là hình bình hành => FA // NE mà NE ⊥ AB => FA ⊥ AB tại A => FA là tiếp tuyến của (O) tại A.

4. Theo trên tứ giác AENF là hình bình hành => FN // AE hay FN // AC mà AC ⊥ BN => FN ⊥ BN tại N



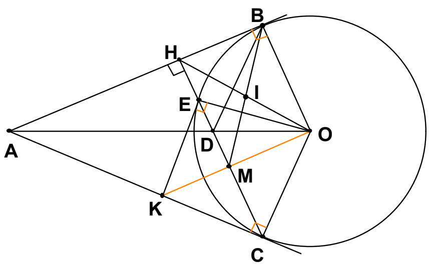
ΔBAN có BM là đường cao đồng thời là đường trung tuyến (do M là trung điểm của AN) nên ΔBAN cân tại B => BA = BN => BN là bán kính của đường tròn (B; BA) => FN là tiếp tuyến tại N của (B; BA).

<u>Bài 44</u> AB và AC là hai tiếp tuyến của đường tròn tâm O bán kính R (B, C là tiếp điểm). Vẽ CH vuông góc AB tại H, cắt (O) tại E và cắt OA tại D.

1. Chứng minh CO = CD.
2. Chứng minh tứ giác OBCD là hình thoi.
3. Gọi M là trung điểm của CE, Bm cắt OH tại I. Chứng minh I là trung điểm của OH.
4. Tiếp tuyến tại E với (O) cắt AC tại K. Chứng minh ba điểm O, M, K thẳng hàng.

Lời giải:

1. Theo giả thiết AB và AC là hai tiếp tuyến của đường tròn tâm O => OA là tia phân giác của ∠BOC => ∠BOA = ∠COA (1)



OB ⊥ AB (AB là tiếp tuyến); CH ⊥ AB (gt) => OB // CH => ∠BOA = ∠CDO (2)

Từ (1) và (2) => ΔCOD cân tại C => CO = CD.(3)

2. theo trên ta có CO = CD mà CO = BO (= R) => CD = BO (4) lại có OB // CH hay OB // CD (5)

Từ (4) và (5) => BOCD là hình bình hành (6) . Từ (6) và (3) => BOCD là hình thoi.

3. M là trung điểm của CE => OM ⊥ CE (quan hệ đường kính và dây cung) => ∠OMH = 90^0. theo trên ta cũng có ∠OBH =90^0; ∠BHM =90^0 => tứ giác OBHM là hình chữ nhật => I là trung điểm của OH.

4. M là trung điểm của CE; KE và KC là hai tiếp tuyến => O, M, K thẳng hàng.

Bài 45 Cho tam giác cân ABC (AB = AC) nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là trung điểm của AC; tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A cắt tia BD tại E. Tia CE cắt (O) tại F.

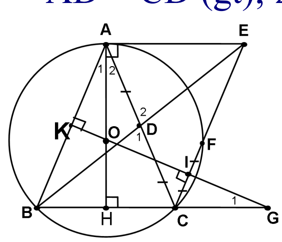
1. Chứng minh BC // AE.
2. Chứng minh ABCE là hình bình hành.
3. Gọi I là trung điểm của CF và G là giao điểm của BC và OI.

So sánh ∠BAC và ∠BGO.

Lời giải: 1. ***(HS tự làm)***

2).Xét hai tam giác ADE và CDB ta có ∠EAD = ∠BCD (vì so le trong)

AD = CD (gt); ∠ADE = ∠CDB (đối đỉnh) => ΔADE = ΔCDB => AE = CB (1)



Theo trên AE // CB (2) .Từ (1) và (2) => AECB là hình bình hành.

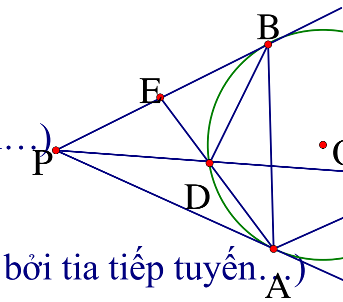
. 3) I là trung điểm của CF => OI ⊥ CF (quan hệ đường kính và dây cung). Theo trên AECB là hình bình hành => AB // EC => OI ⊥ AB tại K, => ΔBKG vuông tại K. Ta cung có ΔBHA vuông tại H

=> ∠BGK = ∠BAH (cung phụ với ∠ABH) mà ∠BAH = $\frac{1}{2}$ ∠BAC (do ΔABC cân nên AH là phân giác) => ∠BAC = 2∠BGO.

Bài 46: Cho đường trũn (O) và một điểm P ở ngoài đường trũn. Kẻ hai tiếp tuyến PA, PB (A; B là tiếp điểm). Từ A vẽ tia song song với PB cắt (O) tại C ($C \neq A$). Đoạn PC cắt đường trũn tại điểm thứ hai D. Tia AD cắt PB tại E.

a. Chứng minh ΔEAB ~ ΔEBD.

b. Chứng minh AE là trung tuyến của ΔPAB.



HD: a) ΔEAB ~ ΔEBD (g.g) vỡ: $\widehat{BEA}$ chung

$\widehat{EAB} = \widehat{EBD}$ (gúc nội tiếp và gúc tạo bởi tia tiếp tuyến…)

$\Rightarrow \frac{EB}{EA} = \frac{ED}{EB} \Rightarrow EB^2 = EA.ED$ (1)

* $\widehat{EPD} = \widehat{PCA}$ (s.l.t) ; $\widehat{EAP} = \widehat{PCA}$ (gúc nội tiếp và gúc tạo bởi tia tiếp tuyến…)

$\Rightarrow \widehat{EPD} = \widehat{EAP}$; $\widehat{PEA}$ chung $\Rightarrow$ ΔEPD ~ ΔEAP (g.g)

$\Rightarrow \frac{EP}{EA} = \frac{ED}{EP} \Rightarrow EP^2 = EA.ED$ (2)Từ 1 & 2 $\Rightarrow EB^2 = EP^2 \Rightarrow EB = EP \Rightarrow$ AE là trung tuyến Δ PAB.

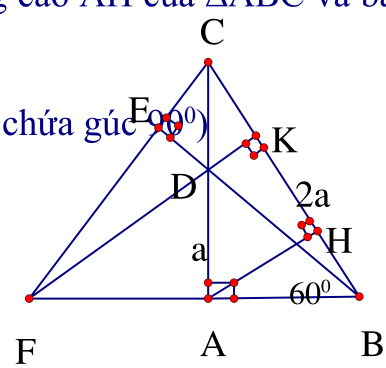
Bài 47: Cho ΔABC vuông ở A. Lấy trên cạnh AC một điểm D. Dựng CE vuông góc BD.

a. Chứng minh ΔABD ~ ΔECD.

b. Chứng minh tứ giỏc ABCE là tứ giỏc nội tiếp.

c. Chứng minh FD vuông góc BC, trong đó F là giao điểm của BA và CE.

d. Cho $\widehat{ABC} = 60^0$; BC = 2a; AD = a. Tính AC; đường cao AH của ΔABC và bán kính đường trũn ngoại tiếp tứ giỏc ADEF.



HD: a) ΔABD ~ ΔECD (g.g)

b) tứ giỏc ABCE là tứ giỏc nội tiếp (Quĩ tớch cung chứa gúc 90^0)

c) Chứng minh D là trực tõm Δ CBF.

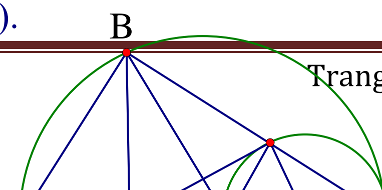
d) $AC = BC.\sin\widehat{ABC} = 2a.\sin60^0 = 2a.\frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

$AB = BC.\cos\widehat{ABC} = 2a.\cos60^0 = 2a.\frac{1}{2} = a$

$AH = AB.\sin\widehat{ABC} = a.\sin60^0 = a\frac{\sqrt{3}}{2}$; Δ FKB vuụng tại K , cú $\widehat{ABC} = 60^0 \Rightarrow \widehat{BFK} = 30^0$

$\Rightarrow AD = FD.\sin\widehat{BFK} \Rightarrow AD = FD.\sin30^0 \Rightarrow a = FD.0,5 \Rightarrow FD = a : 0,5 = 2a.$

Bài 48: Cho ΔABC vuụng ($\widehat{ABC} = 90^0$; BC > BA) nội tiếp trong đường trũn đưũng kớnh AC. Kẻ dõy cung BD vuụng gúc AC. H là giao điểm AC và BD. Trên HC lấy điểm E sao cho E đối xứng với A qua H. Đường trũn đường kính EC cắt BC tại I ($I \neq C$).



a. Chứng minh $\frac{CI}{CB} = \frac{CE}{CA}$

b. Chứng minh D; E; I thẳng hàng.

c. Chứng minh HI là một tiếp tuyến của đường trũn đường kính EC.

I

H

A O E O' C

D

HD; a) AB // EI (cụng $\perp$ BC)

$\Rightarrow \frac{CI}{CB} = \frac{CE}{CA}$ (đ/lí Ta-lét)

b) chứng minh ABED là hỡnh thoi $\Rightarrow$ DE // AB mà EI //AB

$\Rightarrow$ D, E, I cùng nằm trên đường thẳng đi qua E // AB

$\Rightarrow$ D, E, I thẳng hàng.

c) $\widehat{EIO'} = \widehat{IEO'}$ (vỡ Δ EO'I cõn ; O'I = O'E = $R_{(O')}$)

$\widehat{IEO'} = \widehat{HED}$ (đ/đ) ; ΔBID vuông ; IH là trung tuyến $\Rightarrow$ ΔHID cõn $\Rightarrow \widehat{HIE} = \widehat{HDI}$

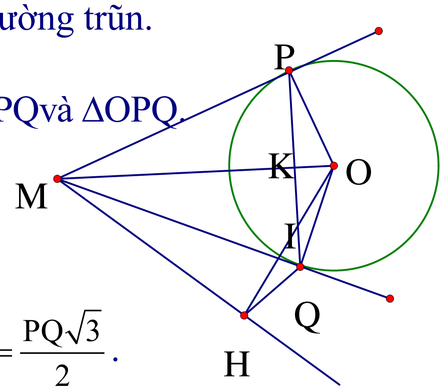
Mà $\widehat{HDI} + \widehat{HED} = 90^0 \Rightarrow$ đpcm.

Bài 49: Cho đường trũn (O; R) và một đường thẳng (d) cố định không cắt (O; R). Hạ OH $\perp$ (d) (H $\in$ d). M là một điểm thay đổi trên (d) (M $\neq$ H). Từ M kẻ 2 tiếp tuyến MP và MQ (P, Q là tiếp điểm) với (O; R). Dây cung PQ cắt OH ở I; cắt OM ở K.

a. Chứng minh 5 điểm O, Q, H, M, P cùng nằm trên 1 đường trũn.

b. Chứng minh IH.IO = IQ.IP

c. Giả sử $\widehat{PMQ} = 60^0$. Tớnh tỉ số diện tớch 2 tam giỏc: ΔMPQvà ΔOPQ.



HD: a) 5 điểm O, Q, H, M, P cùng nằm trên 1 đường trũn

(Dựa vào quĩ tớch cung chứa gúc 90^0)

b) Δ OIP ~ Δ QIH (g.g) $\Rightarrow \frac{IO}{IP} = \frac{IQ}{IH} \Rightarrow$ IH.IO = IQ.IP

c) Δv MKQ cú : $MK = KQ.tg\widehat{MQK} = KQ.tg60^0 = \frac{PQ}{2}\sqrt{3} = \frac{PQ\sqrt{3}}{2}$.

Δv OKQ cú: $OK = KQ.tg\widehat{OQK} = KQ.tg30^0 = KQ.\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{PQ}{2}.\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{PQ\sqrt{3}}{6}$

$$\Rightarrow \frac{S_{MPQ}}{S_{OPQ}} = \frac{PQ\sqrt{3}}{2} : \frac{PQ\sqrt{3}}{6} = 3$$

Bài 50: Cho nửa đường trũn (O), đường kính AB=2R. Trên tia đối của tia AB lấy điểm E (E $\neq$ A). Từ E, A, B kẻ các tiếp tuyến với nửa đường trũn. Tiếp tuyến kẻ từ E cắt hai tiếp tuyến kẻ từ A và B theo thứ tự tại C và D.

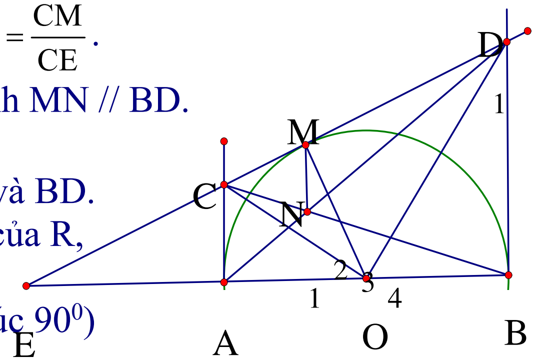
a. Gọi M là tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ E tới nửa đường trũn. Chứng minh tứ giỏc ACMO nội tiếp được trong một đường trũn.

b. Chứng minh $\Delta EAC \sim \Delta EBD$, từ đó suy ra $\frac{DM}{DE}=\frac{CM}{CE}$.

c. Gọi N là giao điểm của AD và BC. Chứng minh MN // BD.

d. Chứng minh: $EA^2 = EC.EM - EA.AO$.

e. Đặt $\widehat{AOC}$ = ỏ. Tớnh theo R và ỏ cỏc đoạn AC và BD. Chứng tỏ rằng tớch AC.BD chỉ phụ thuộc giỏ trị của R, khụng phụ thuộc vào ỏ.



HD:a) ACMO nội tiếp (Dựa vào quĩ tớch cung chứa gúc 90^0)

b) AC // BD (cựng $\perp$ EB) $\Rightarrow \Delta EAC \sim \Delta EBD$

$\Rightarrow \frac{CE}{DE}=\frac{AC}{BD}$ (1)mà AC = CM ; BD = MD (T/c hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \frac{CE}{DE}=\frac{CM}{DM}$ (2) $\Rightarrow$ $\frac{DM}{DE}=\frac{CM}{CE}$

c) AC // BD (cmt) $\Rightarrow \Delta NAC \sim \Delta NBD \Rightarrow \frac{NC}{NB}=\frac{AC}{BD}$(3) .Từ 1; 2; 3 $\Rightarrow \frac{NC}{NB}=\frac{CM}{DM} \Rightarrow$ MN // BD

d) $\widehat{O_1}=\widehat{O_2}$; $\widehat{O_3}=\widehat{O_4}$ mà $\widehat{O_1}+\widehat{O_2}+\widehat{O_3}+\widehat{O_4}=180^0 \Rightarrow \widehat{O_2}+\widehat{O_3}=90^0$; $\widehat{O_4}+\widehat{D_1}=90^0$ (…)

$\Rightarrow \widehat{D_1}=\widehat{O_2}=\widehat{O_1}$ = ỏ . Vậy: DB = $\frac{OB}{tg\alpha}=\frac{R}{tg\alpha}$; Lại cú: AC = OA.tgỏ = R.tgỏ $\Rightarrow$ AC.DB = R.tgỏ. $\frac{R}{tg\alpha}$

$\Rightarrow$ AC.DB = R^2 (Đpcm)

Bài 51: Cho ΔABC có 3 góc nhọn. Gọi H là giao điểm của 3 đường cao AA_1; BB_1; CC_1.

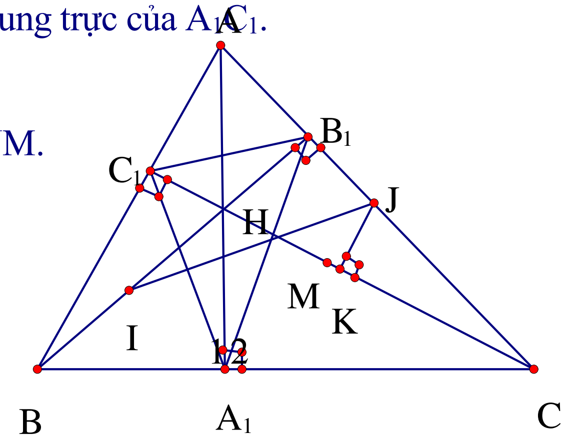
a. Chứng minh tứ giỏc HA_1BC_1 nội tiếp được trong đường trũn. Xỏc định tâm I của đường trũn ấy.

b. Chứng minh A_1A là phõn giỏc của $\widehat{B_1A_1C_1}$.

c. Gọi J là trung điểm của AC. Chứng minh IJ là trung trực của A_1C_1.

d. Trên đoạn HC lấy 1 điểm M sao cho $\frac{MH}{MC}=\frac{1}{3}$.

So sỏnh diện tớch của 2 tam giỏc: ΔHAC và ΔHJM.



HD: a) HA_1BC_1 nội tiếp (quĩ tớch cung chứa gúc 90^0)

Tâm I là trung điểm BH.

b) C/m: $\widehat{HA_1C_1}=\widehat{HBC_1}$; $\widehat{HA_1B_1}=\widehat{HCB_1}$;

$\widehat{HBC_1}=\widehat{HCB_1} \Rightarrow \widehat{HA_1C_1}=\widehat{HA_1B_1} \Rightarrow$ đpcm.

c) $IA_1 = IC_1 = R_{(I)}$; $JA = JA_1 = AC/2$ …

$\Rightarrow$ IJ là trung trực của A_1C_1.

d) $S_{HJM}=\frac{1}{2}HM.JK$; $S_{HAC}=\frac{1}{2}HC.AC_1$

$\Rightarrow S_{HAC} : S_{HJM} = \frac{HC.AC_1}{HM.JK}$ mà $\frac{MH}{MC}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{HC}{HM}=\frac{HM+MC}{HM}=1+\frac{MC}{HM}=1+3=4$; $\frac{AC_1}{JK}=2$ (JK// AC_1

$\Rightarrow S_{HAC} : S_{HJM} = 8$

Bài 52: Cho điểm C cố định trên một đường thẳng xy. Dựng nửa đường thẳng Cz vuông góc với xy và lấy trên đó 2 điểm cố định A, B (A ở giữa C và B). M là một điểm di động trên xy. Đường vuông góc với AM tại A và với BM tại B cắt nhau tại P.

a. Chứng minh tứ giỏc MABP nội tiếp được và tâm O của đường trũn này nằm tròn một đường thẳng cố định đi qua điểm giữa L của AB.

b. Kẻ PI $\perp$ Cz. Chứng minh I là một điểm cố định.

c. BM và AP cắt nhau ở H; BP và AM cắt nhau ở K. Chứng minh rằng KH $\perp$ PM.

d. Cho N là trung điểm của KH. Chứng minh các điểm N; L; O thẳng hàng.

HD: a) MABP nội tiếp đ/trũn đ/k MP.(quĩ tớch cung chứa gúc 90^0…)

OA = OB = $R_{(O)}$ $\Rightarrow$ O thuộc đường trung trực AB đi qua L là trung điểm AB…

b) IP // CM ($\perp$ Cz) $\Rightarrow$ MPIC là hỡnh thang. $\Rightarrow$ IL = LC không đổi vỡ A,B,C cố định. $\Rightarrow$ I cố định.

c) PA $\perp$ KM ; PK $\perp$ MB $\Rightarrow$ H là trực tõm Δ PKM

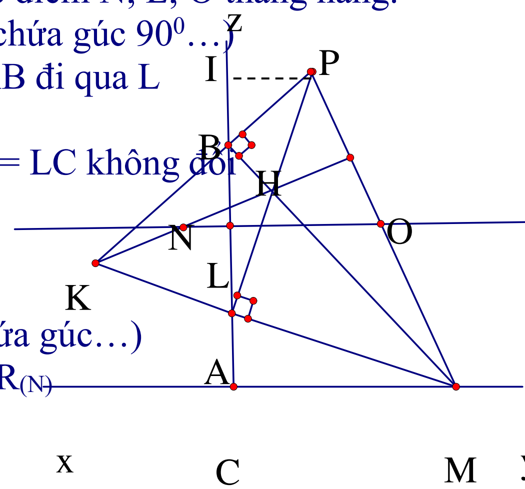
$\Rightarrow$ KH $\perp$ PM

d) AHBK nội tiếp đ/trũn đ/k KH (quĩ tớch cung chứa gúc…)

$\Rightarrow$ N là tâm đ/trũn ngoại tiếp … $\Rightarrow$ NE = NA = $R_{(N)}$

$\Rightarrow$ N thuộc đường trung trực AB

$\Rightarrow$ O,L,N thẳng hàng.



Bài 53: Cho nửa đường trũn (O) đường kính AB và K là điểm chính giữa của cung AB. Trên cung AB lấy một điểm M (khác K; B). Trên tia AM lấy điểm N sao cho AN = BM. Kẻ dây BP song song với KM. Gọi Q là giao điểm của các đường thẳng AP, BM.

a. So sỏnh hai tam giỏc: ΔAKN và ΔBKM.

b. Chứng minh: ΔKMN vuụng cõn.

c. Tứ giỏc ANKP là hỡnh gỡ? Vỡ sao?

HD: a) Δ AKN = Δ BKM(c.g.c)

b) HS tự c/m. Δ KMN vuụng cõn.

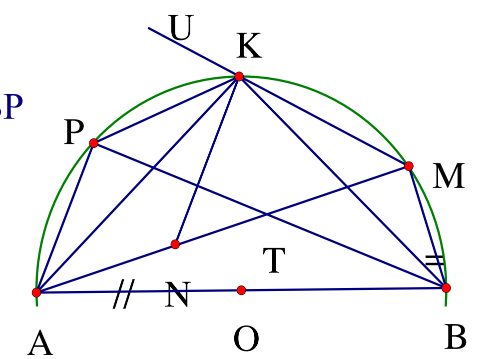
c) Δ KMN vuụng $\Rightarrow$ KN $\perp$ KM mà KM // BP $\Rightarrow$ KN $\perp$ BP

$\widehat{APB} = 90^0$ (gúc nội tiếp…) $\Rightarrow$ AP $\perp$ BP

$\Rightarrow$ KN // AP ($\perp$ BP)

KM // BP $\Rightarrow$ $\widehat{KMN} = \widehat{PAT} = 45^0$

Mà $\widehat{PAM} = \widehat{PKU} = \dfrac{\overparen{PKM}}{2} = 45^0$



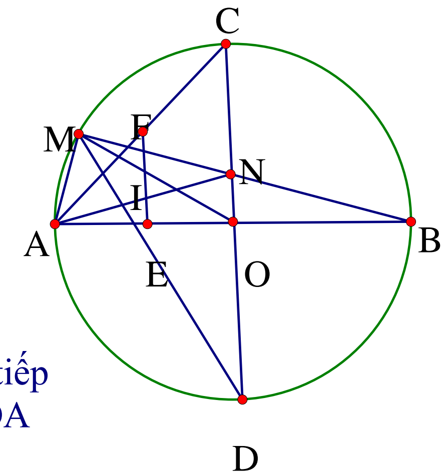
$\widehat{PKN} = 45^0$; $\widehat{KNM} = 45^0 \Rightarrow$ PK // AN . Vậy ANPK là hõnh bõnh hành.

Bài 54: Cho đường trũn tõm O, bỏn kớnh R, cú hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. M là một điểm tuỳ ý thuộc cung nhỏ AC. Nối MB, cắt CD ở N.

a. Chứng minh: tia MD là phõn giỏc của gúc AMB.

b. Chứng minh:ΔBOM ~ ΔBNA. Chứng minh: BM.BN không đổi.

c. Chứng minh: tứ giác ONMA nội tiếp. Gọi I là tâm đường trũn ngoại tiếp tứ giỏc ONMA, I di động như thế nào?



HD: a) $\widehat{AMD} = \widehat{DMB} = 45^0$ (chắn cung ¼ đ/trũn)

$\Rightarrow$ MD là tia phõn giỏc $\widehat{AMB}$

b) Δ OMB cõn vỡ OM = OB = $R_{(O)}$

Δ NAB cân có NO vừa là đ/cao vừa là đường trung tuyến.

$\Rightarrow$Δ OMB ~ Δ NAB

$\Rightarrow \frac{BM}{BA} = \frac{BO}{BN} \Rightarrow$ BM.BN = BO.BA = $2R^2$ không đổi.

c) ONMA nội tiếp đ/trũn đ/k AN. Gọi I là tâm đ/trũn ngoại tiếp

$\Rightarrow$ I cách đều A và O cố định $\Rightarrow$ I thuộc đường trung trực OA

Gọi E và F là trung điểm của AO; AC

Vỡ M chạy trờn cung nhỏ AC nờn tập hợp I là đoạn EF

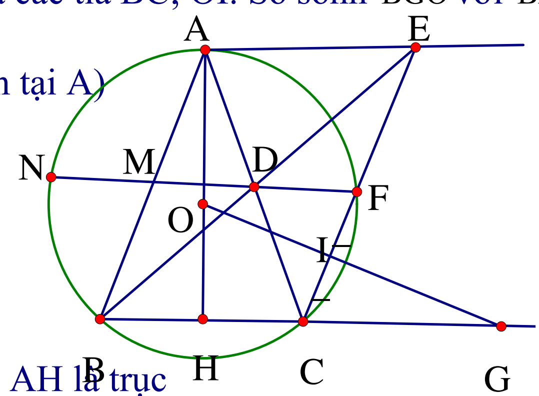
Bài 55: Cho ΔABC cân (AB = AC) nội tiếp một đường trũn (O). Gọi D là trung điểm của AC; tia BD cắt tiếp tuyến tại A với đường tròn (O) tại điểm E; EC cắt (O) tại F.

a. Chứng minh: BC song song với tiếp tuyến của đường trũn (O) tại A.

b. Tứ giác ABCE là hì nh gì? Tại sao?

c. Gọi I là trung điểm của CF và G là giao điểm của các tia BC; OI. So sỏnh $\widehat{BGO}$ với $\widehat{BAC}$.

d. Cho biết DF // BC. Tớnh cos$\widehat{ABC}$.



HD:a) Gọi H là trung điểm BC$\Rightarrow$AH$\perp$BC (Δ ABC cõn tại A)

lập luận chỉ ra AH$\perp$AE$\Rightarrow$ BC // AE. (1)

b) Δ ADE = Δ CDB (g.c.g) $\Rightarrow$ AE = BC (2)

Từ 1 và 2 $\Rightarrow$ ABCE là hõnh bõnh hành.

c) Theo c.m.t $\Rightarrow$AB // CF $\Rightarrow$ GO$\perp$AB.

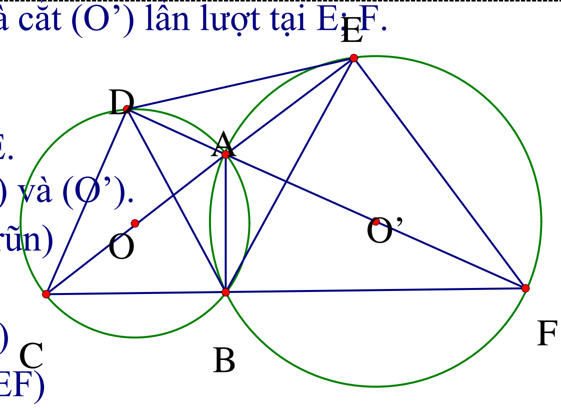
$\Rightarrow \widehat{BGO} = 90^0 - \widehat{ABC} = \widehat{BAH} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$

d) Tia FD cắt AB taijM, cắt (O) tại N.; DF // BC và AH là trục đối xứng cuarBC và đ/trũn (O) nờn F, D thứ tự đối xứng với N, M qua AH.

$\Rightarrow$ FD = MN = MD = $\frac{1}{2}$BC = $\frac{1}{2}$ND = BH ; Δ NDA ~ Δ CDF (g.g) $\Rightarrow$ DF.DN = DA.DC

$\Rightarrow 2BH^2 = \frac{1}{4}AC^2 \Rightarrow BH = \frac{\sqrt{2}}{4}AC \Rightarrow \cos\widehat{ABC} = \frac{BH}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Bài 56: Cho 2 đường trũn (O) và (O’) cắt nhau tại hai điểm A và B. Các đường thẳng AO; AO’ cắt đường trũn (O) lần lượt tại các điểm C; D và cắt (O’) lần lượt tại E; F.



a. Chứng minh: C; B; F thẳng hàng.

b. Chứng minh: Tứ giác CDEF nội tiếp được.

c. Chứng minh: A là tâm đường trũn nội tiếp ΔBDE.

d. Tỡm điều kiện để DE là tiếp tuyến chung của (O) và (O’).

HD: a) $\widehat{CBA} = 90^0 = \widehat{FBA}$ (góc nội tiếp chắn nửa đ/trũn)

$\Rightarrow \widehat{CBA} + \widehat{FBA} = 180^0 \Rightarrow$ C, B, F thẳng hàng.

b) $\widehat{CDF} = 90^0 = \widehat{CEF} \Rightarrow$ CDEF nội tiếp (quĩ tớch …)

c) CDEF nội tiếp$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ECB}$ (cựng chắn cung EF)

Xột (O) cú: $\widehat{ADB} = \widehat{ECB}$ (cựng chắn cung AB)

$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ADB} \Rightarrow$ DA là tia phõn giỏc $\widehat{BDE}$. Tương tự EA là tia phân giác $\widehat{DEB}$

Vậy A là tâm đường trũn nội tiếp ΔBDE..

d) ODEO’ nội tiếp. Thực vậy : $\widehat{DOA} = 2\widehat{DCA}$; $\widehat{EO'A} = 2\widehat{EFA}$ mà $\widehat{DCA} = \widehat{EFA}$ (gúc nội tiếp chắn cung DE) $\Rightarrow \widehat{DOA} = \widehat{EO'A}$; mặt khỏc: $\widehat{DAO} = \widehat{EAO'}$ (đ/đ) $\Rightarrow \widehat{ODO'} = \widehat{O'EO} \Rightarrow$ ODEO’ nội tiếp.

Nếu DE tiếp xỳc với (O) và (O’) thỡ ODEO’ là hỡnh chữ nhật $\Rightarrow$ AO = AO’ = AB.

Đảo lại : AO = AO’ = AB cũng kết luận được DE là tiếp tuyến chung của (O) và (O’)

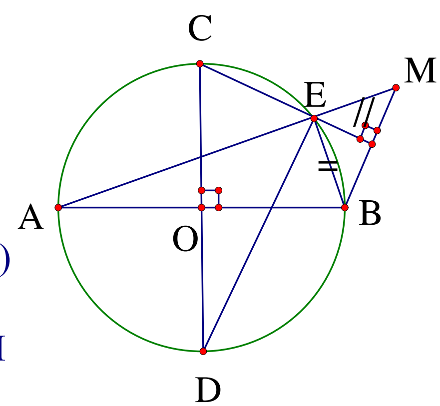
Kết luận : Điều kiện để DE là tiếp tuyến chung của (O) và (O’) là : AO = AO’ = AB.

Bài 57: Cho đường trũn (O; R) cú 2 đường kính cố định AB $\perp$ CD.

a) Chứng minh: ACBD là hỡnh vuụng.

b). Lấy điểm E di chuyển trên cung nhỏ BC (E $\neq$ B; E $\neq$ C). Trên tia đối của tia EA lấy đoạn EM = EB. Chứng tỏ: ED là tia phân giác của $\widehat{AEB}$ và ED // MB.

c). Suy ra CE là đường trung trực của BM và M di chuyển trên đường trũn mà ta phải xỏc định tâm và bán kính theo R.



HD: a) AB $\perp$ CD. ; OA = OB = OC = OD = $R_{(O)}$

$\Rightarrow$ ACBD là hỡnh vuụng.

b) $\widehat{AED} = \frac{1}{2}\widehat{AOD} = 45^0$; $\widehat{DEB} = \frac{1}{2}\widehat{DOB} = 45^0$

$\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{DEB} \Rightarrow$ ED là tia phõn giỏc của $\widehat{AEB}$.

$\widehat{AED} = 45^0$; $\widehat{EMB} = 45^0$ (Δ EMB vuụng cõn tại E)

$\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{EMB}$ (2 góc đồng vị) $\Rightarrow$ ED // MB.

c) Δ EMB vuụng cõn tại E và CE $\perp$ DE ; ED // BM

$\Rightarrow$ CE $\perp$ BM $\Rightarrow$ CE là đường trung trực BM.

d) Vỡ CE là đường trung trực BM nờn CM = CB = $R\sqrt{2}$

Vậy M chạy trên đường trũn (C ; R’ = $R\sqrt{2}$)

Bài 58: Cho ΔABC đều, đường cao AH. Qua A vẽ một đường thẳng về phía ngoài của tam giác, tạo với cạnh AC một góc 40^0. Đường thẳng này cắt cạnh BC kéo dài ở D. Đường trũn tõm O đường kính CD cắt AD ở E. Đường thẳng vuông góc với CD tại O cắt AD ở M.

a. Chứng minh: AHCE nội tiếp được. Xác định tâm I của đường trũn đó.

b. Chứng minh: CA = CM.

c. Đường thẳng HE cắt đường trũn tõm O ở K, đường thẳng HI cắt đường trũn tõm I ở N và cắt đường thẳng DK ở P. Chứng minh: Tứ giác NPKE nội tiếp.

Bài 59: BC là một dây cung của đường trũn (O; R) ($BC \neq 2R$). Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho O luôn nằm trong ΔABC. Các đường cao AD; BE; CF đồng quy tại H.

a. Chứng minh:ΔAEF ~ ΔABC.

b. Gọi A' là trung điểm BC. Chứng minh: AH = 2.A'O.

c. Gọi A_1 là trung điểm EF. Chứng minh: $R.AA_1 = AA'.OA'$.

d. Chứng minh: R.(EF + FD + DE) = $2.S_{ABC}$.

Suy ra vị trí điểm A để tổng (EF + FD + DE) đạt GTLN.

Bài 60: Cho đường trũn tõm (O; R) cú AB là đường kính cố định cũn CD là đường kính thay đổi. Gọi (Δ) là tiếp tuyến với đường trũn tại B và AD, AC lần lượt cắt (Δ) tại Q và P.

a. Chứng minh: Tứ giác CPQD nội tiếp được.

b. Chứng minh: Trung tuyến AI của ΔAQP vuụng gúc với DC.

c. Tỡm tập hợp cỏc tõm E của đường trũn ngoại tiếp ΔCPD.

Bài 61: Cho ΔABC cõn (AB = AC; $\widehat{A} < 90^0$), một cung trũn BC nằm bờn trong ΔABC tiếp xỳc với AB, AC tại B và C. Trờn cung BC lấy điểm M rồi hạ các đường vuông góc MI, MH, MK xuống các cạnh tương ứng BC, CA, AB. Gọi Q là giao điểm của MB, IK.

a. Chứng minh: Các tứ giác BIMK, CIMH nội tiếp được.

b. Chứng minh: tia đối của tia MI là phân giác $\widehat{HMK}$.

c. Chứng minh: Tứ giác MPIQ nội tiếp được ⇒ PQ // BC.

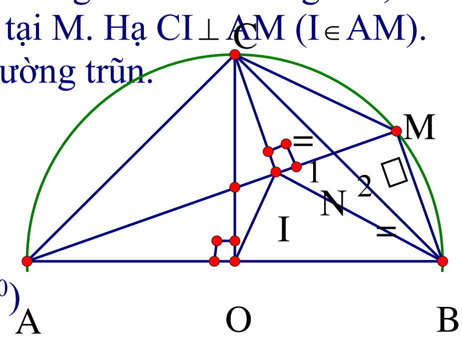
Bài 62: Cho nửa đường trũn (O), đường kính AB, C là trung điểm của cung AB; N là trung điểm của BC. Đường thẳng AN cắt nửa đường trũn (O) tại M. Hạ CI ⊥ AM (I ∈ AM).

a. Chứng minh: Tứ giác CIOA nội tiếp được trong 1 đường trũn.

b. Chứng minh: Tứ giác BMCI là hình bình hành.

c. Chứng minh: $\widehat{MOI} = \widehat{CAI}$.

d. Chứng minh: MA = 3.MB.



HD: a) $\widehat{COA} = 90^0 (\ldots)$; $\widehat{CIA} = 90^0 (\ldots)$

⇒ Tứ giỏc CIOA nội tiếp (quĩ tớch cung chứa gúc 90^0)

b) MB // CI (⊥BM). (1)

Δ CIN = Δ BMN (g.c.g) $\widehat{N_1} = \widehat{N_2}$ (đ/đ) ; NC = NB ; $\widehat{NCI} = \widehat{NBM}$ (slt)

⇒ CI = BM (2). Từ 1 và 2 ⇒ BMCI là hỡnh bỡnh hành.

c) Δ CIM vuụng cõn ($\widehat{CIA}=90^0$; $\widehat{CMI}=\frac{1}{2}\widehat{COA}=45^0$) $\Rightarrow$ MI = CI ; Δ IOM = Δ IOC vỡ OI chung ;

IC = IM (c.m.t) ; OC = OM = $R_{(O)}$ $\Rightarrow \widehat{MOI}=\widehat{IOC}$ mà: $\widehat{IOC}=\widehat{CAI} \Rightarrow \widehat{MOI}=\widehat{CAI}$

d) Δ ACN vuụng cú : AC = $R\sqrt{2}$; NC = $\frac{R\sqrt{2}}{2}=\frac{AC}{2}$ (với R = AO)

Từ đó : AN = $\sqrt{AC^2+CN^2}=\sqrt{2R^2+\frac{R^2}{2}}=R\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{R\sqrt{10}}{2}$; NI = $\frac{NC^2}{NA}=\frac{R\sqrt{10}}{10}=MN=\frac{MI}{2}$

$\Rightarrow$ MB = $\sqrt{NC^2-MN^2}=\sqrt{\frac{R^2}{2}-\frac{R^2}{10}}=\frac{2R}{\sqrt{10}}=\frac{R\sqrt{10}}{5}$ $\Rightarrow$ AM = AN + MN = $\frac{R\sqrt{10}}{2}+\frac{R\sqrt{10}}{10}=\frac{3R\sqrt{10}}{5}$

$\Rightarrow$ AM = 3 BM.

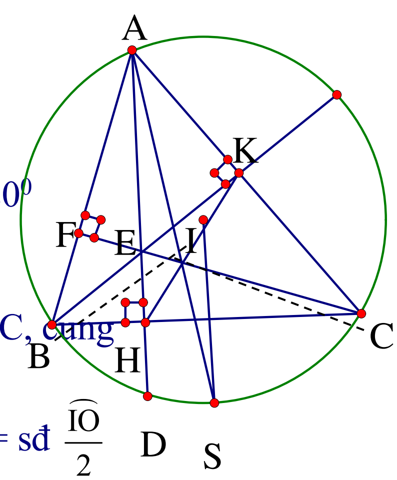
Bài 63: Cho ΔABC cú $\widehat{A}=60^0$ nội tiếp trong đường trũn (O), đường cao AH cắt đường trũn ở D, đường cao BK cắt AH ở E.

a. Chứng minh: $\widehat{BKH}=\widehat{BCD}$.

b. Tính $\widehat{BEC}$.

c. Biết cạnh BC cố định, điểm A chuyển động trên cung lớn BC. Hỏi tâm I của đườngtrũn nội tiếp ΔABC chuyển động trên đường nào? Nêu cách dựng đường đó (chỉ nêu cách dựng) và cách xác định rừ nú (giới hạn đường đó).

d. Chứng minh: ΔIOE cõn ở I.



HD: a) ABHK nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BKH}=\widehat{BAH}$;

$\widehat{BCD}=\widehat{BAH}$ (cựng chắn cung BD) $\Rightarrow \widehat{BCD}=\widehat{BKH}$

b) CE cắt AB ở F. ;

AFEK nội tiếp$\Rightarrow \widehat{FEK}=180^0-\widehat{A}=180^0-60^0=120^0 \Rightarrow \widehat{BEC}=120^0$

c) $\widehat{BIC}=180^0-\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}=180^0-\frac{120^0}{2}=120^0$

Vậy I chuyển động trên cung chứa góc 120^0 dựng trên đoạn BC, cung này nằm trong đường trũn tõm (O).

d) Trong đ/trũn (O) cú $\widehat{DAS}$ = sđ $\frac{\overset{\frown}{DS}}{2}$; trong đ/trũn (S) cú $\widehat{ISO}$ = sđ $\frac{\overset{\frown}{IO}}{2}$

vỡ $\widehat{DAS}=\widehat{ISO}$ (so le trong) nờn: $\frac{\overset{\frown}{DS}}{2}=\frac{\overset{\frown}{IO}}{2}$ mà $\overset{\frown}{DS}=\overset{\frown}{IE} \Rightarrow \overset{\frown}{IO}=\overset{\frown}{IE} \Rightarrow$ đpcm.

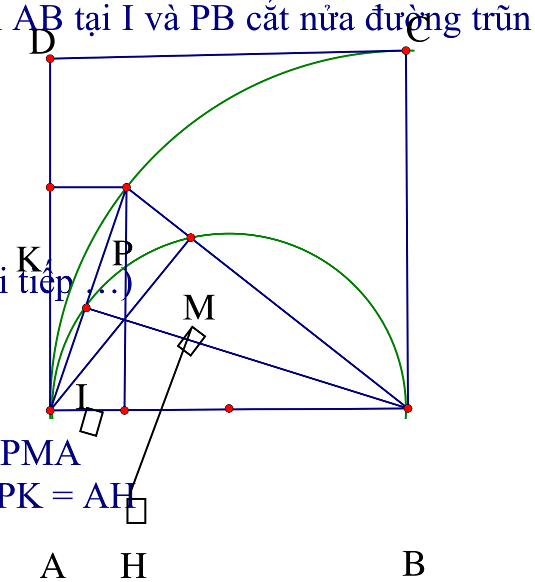
Bài 64: Cho hõnh vuụng ABCD, phớa trong hõnh vuụng dựng cung một phần tư đường trũn tõm B, bỏn kớnh AB và nửa đường trũn đường kớnh AB. Lấy 1 điểm P bất kỳ trên cung AC, vẽ $PK \perp AD$ và $PH \perp AB$. Nối PA, cắt nửa đường trũn đường kớnh AB tại I và PB cắt nửa đường trũn này tại M. Chứng minh rằng:

a. I là trung điểm của AP.

b. Các đường PH, BI và AM đồng quy.

c. PM = PK = AH.

d. Tứ giỏc APMH là hõnh thang cõn.



HD: a) Δ ABP cõn tại B. (AB = PB = $R_{(B)}$) mà $\widehat{AIB} = 90^0$ (gúc nội tiếp …)

$\Rightarrow BI \perp AP \Rightarrow$ BI là đường cao cũng là đường trung tuyến

$\Rightarrow$ I là trung điểm của AP

b) HS tự c/m.

c) Δ ABP cõn tại B $\Rightarrow$ AM = PH ; AP chung $\Rightarrow \Delta$vAHP = Δv PMA

$\Rightarrow$ AH = PM ; AHPK là hõnh chữ nhật $\Rightarrow$ AH = KP $\Rightarrow$ PM = PK = AH

d) PMAH nằm trờn đ/trũn đ/k AP mà PM = AH (c.m.t)

$\Rightarrow \overset{\frown}{PM} = \overset{\frown}{AH} \Rightarrow$ PA // MH

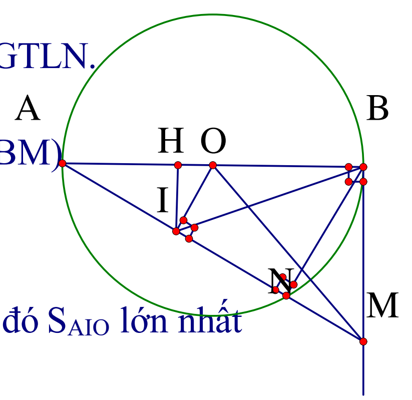
Vậy APMH là hõnh thang cõn.

Bài 65: Cho đường trũn tõm O, đường kính AB = 2R. Kẻ tia tiếp tuyến Bx, M là điểm thay đổi trên Bx;. AM cắt (O) tại N. Gọi I là trung điểm của AN.

a. Chứng minh: Tứ giác BOIM nội tiếp được trong 1 đường trũn.

b. Chứng minh:$\Delta IBN \sim \Delta OMB$.

c. Tỡm vị trớ của điểm M trên tia Bx để diện tích tam giác AIO có GTLN.



HD: a) BOIM nội tiếp được vỡ $\widehat{OIM} = \widehat{OBM} = 90^0$

b) $\widehat{INB} = \widehat{OBM} = 90^0$; $\widehat{NIB} = \widehat{BOM}$ (2 gúc nội tiếp cựng chắn cung BM)

$\Rightarrow \Delta IBN \sim \Delta OMB$.

c) $S_{AIO} = \frac{1}{2}AO.IH$; S_{AIO} lớn nhất $\Leftrightarrow$ IH lớn nhất vỡ AO = $R_{(O)}$

Khi M chạy trờn tia Bx thỡ I chạy trờn nửa đường trũn đ/k AO. Do đó S_{AIO} lớn nhất

Khi IH là bán kính, khi đó Δ AIH vuông cân, tức $\widehat{HAI} = 45^0$

Vậy khi M cách B một đoạn BM = AB = $2R_{(O)}$ thỡ S_{AIO} lớn nhất .

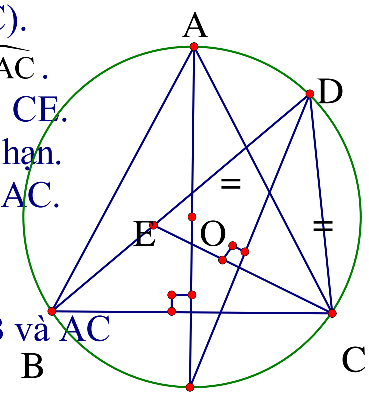
Bài 66: Cho Δ ABC đều, nội tiếp trong đường trũn (O; R). Gọi AI là một đường kính cố định và D là điểm di động trên cung nhỏ AC ($D \neq A$ và $D \neq C$).

a. Tính cạnh của ΔABC theo R và chứng tỏ AI là tia phõn giỏc của $\widehat{BAC}$.

b. Trên tia DB lấy đoạn DE = DC. Chứng tỏ ΔCDE đều và $DI \perp CE$.

c. Suy ra E di động trên đường trũn mà ta phải xỏc định tâm và giới hạn.

d. Tính theo R diện tích ΔADI lúc D là điểm chớnh giữa cung nhỏ AC.



HD: a) Δ ABC đều, nội tiếp trong đường trũn (O; R). HS tự c/m :

$\Rightarrow AB = AC = BC = R\sqrt{3}$

Trong đ/trũn (O; R) cú: AB = AC $\Rightarrow$ Tâm O cách đều 2 cạnh AB và AC

$\Rightarrow$AO hay AI là tia phõn giỏc của $\widehat{BAC}$.

b) Ta cú : DE = DC (gt) $\Rightarrow \Delta$ DEC cõn ; $\widehat{BDC} = \widehat{BAC} = 60^0$ (cựng chắn $\widehat{BC}$) I

$\Rightarrow \Delta$CDE đều. I là điểm giữa $\widehat{BC}$ $\Rightarrow \widehat{IB} = \widehat{IC} \Rightarrow \widehat{BDI} = \widehat{IDC}$

$\Rightarrow$ DI là tia phõn giỏc $\widehat{BDC}$ $\Rightarrow \Delta$CDE đều có DI là tia phân giác nên cũng là đường cao $\Rightarrow$ DI $\perp$ CE

c) ΔCDE đều có DI là đường cao cũng là đường trung trực của CE $\Rightarrow$ IE = IC mà I và C cố định $\Rightarrow$ IC không đổi $\Rightarrow$ E di động trên 1 đ/trũn cố định tâm I, bán kính = IC. Giới hạn : I $\in$ $\widehat{AC}$ (cung nhỏ)

D $\rightarrow$ C thỡ E $\rightarrow$ C ; D $\rightarrow$ A thỡ E $\rightarrow$ B $\Rightarrow$ E đi động trên $\widehat{BC}$ nhỏ của đ/t (I; R = IC) chứa trong Δ ABC đều.

<u>Bài 67</u>: *(6,0 điểm).*

1) Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi (P), (Q) theo thứ tự là đường tròn nội tiếp hai tam giác AHB và AHC. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài (khác BC) của (P) và (Q) cắt AB, AH, AC theo tự M, K, N. Chứng minh rằng.

a. ΔHPQ $\backsim$ ΔABC

b. KP // AB, KQ // AC.

c. Tứ giác BMNC nội tiếp được

2) Cho a, b, clà độ dài 3 cạnh của ΔABC. Gọi m, n, k là độ dài các đường phân giác trong của ba góc của ΔABC. Chứng minh rằng: $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{k} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

<u>Giải</u> 1) a. ΔAHB $\backsim$ ΔCHA mặt khác P và Q lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp Δ AHB và ΔAHC

=> $\frac{HP}{HQ} = \frac{AB}{AC}$ (1) lại có $\angle$BAC = $\angle$PHQ = 90^0 (2)

Từ (1) và (2) suy ra ΔHPQ $\backsim$ ΔABC

b. Theo câu a. ta có $\angle$PQH = $\angle$ACB (3)

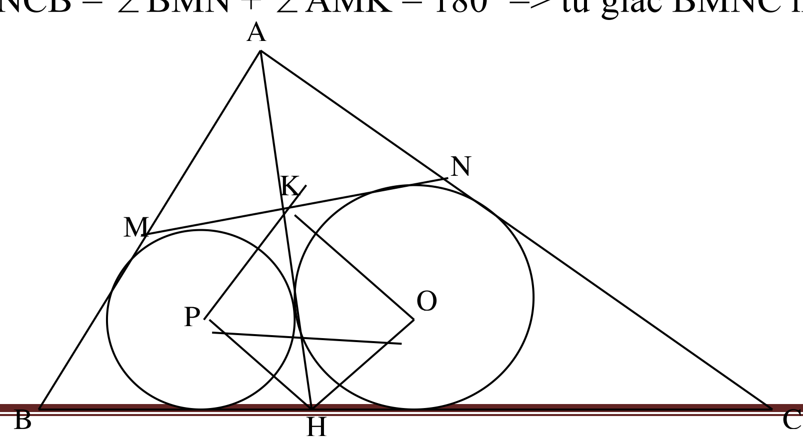
$\angle$PKQ = $\angle$PHQ = 90^0 => tứ giác PKQH nội tiếp được => $\angle$PKH = $\angle$PQH (4)

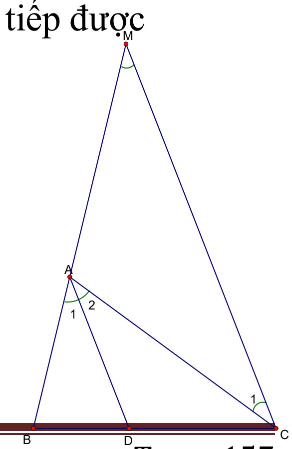
Từ (3) và (4) => $\angle$PKH = $\angle$ACB

lại có $\angle$BAH = $\angle$ACB=> $\angle$PKH = $\angle$BAH => PK // AB chứng minh tương tự ta cũng có KQ //AC.

c. Ta có $\angle$ACB = $\angle$PKH = $\angle$MKP = $\angle$AMK

=> $\angle$BMN + $\angle$NCB = $\angle$BMN + $\angle$AMK = 180^0 => tứ giác BMNC nội tiếp được





2) Qua điểm C vẽ đường thẳng song song AD cắt AB tại M

$\angle A_1 = \angle M_1$, $\angle A_2 = \angle C_2$, Mà $\angle A_1 = \angle A_2$, (AD là tia phân giác của góc A)

Nên $\angle M_1 = \angle C_1$, $\Rightarrow$ AM = AC. Xét ΔAMC : MC < AM + AC = 2AM

Xét ΔBMC ta có : AD // MC $\Rightarrow \dfrac{AD}{MC} = \dfrac{AB}{BM} = \dfrac{AB}{AB + AM}$

Nên AD = $\dfrac{AB\,.\,MC}{AB + AM} < \dfrac{AB\,.\,2AC}{AB + AC} \Rightarrow \dfrac{1}{AD} > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AD}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{m} > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

Tương tự : $\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c}\right)$; $\dfrac{1}{k} > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$. Vậy $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{k} > \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$

4. 1) a. ΔAHB $\backsim$ ΔCHA mặt khác P và Q lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp ΔAHB và ΔAHC

=> $\dfrac{HP}{HQ} = \dfrac{AB}{AC}$ (1) lại có $\angle BAC = \angle PHQ = 90^0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ΔHPQ $\backsim$ ΔABC

b. Theo câu a. ta có $\angle PQH = \angle ACB$ (3)

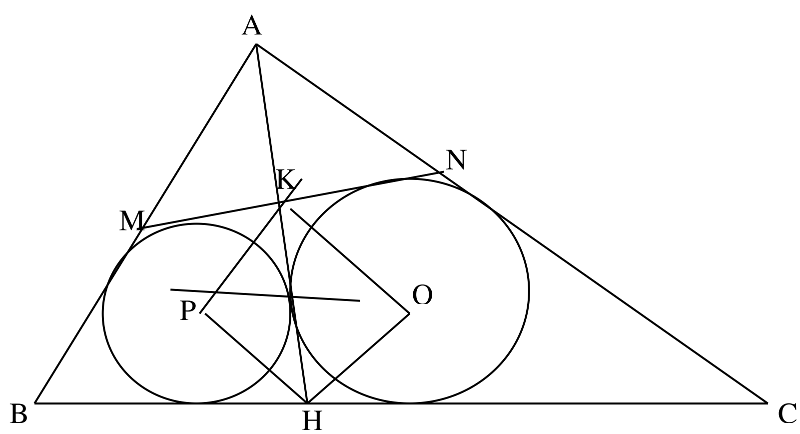
$\angle PKQ = \angle PHQ = 90^0$ => tứ giác PKQH nội tiếp được => $\angle PKH = \angle PQH$ (4)

Từ (3) và (4) => $\angle PKH = \angle ACB$

lại có $\angle BAH = \angle ACB$=> $\angle PKH = \angle BAH$ => PK // AB chứng minh tương tự ta cũng có KQ //AC.

c. Ta có $\angle ACB = \angle PKH = \angle MKP = \angle AMK$

=> $\angle BMN + \angle NCB = \angle BMN + \angle AMK = 180^0$ => tứ giác BMNC nội tiếp được

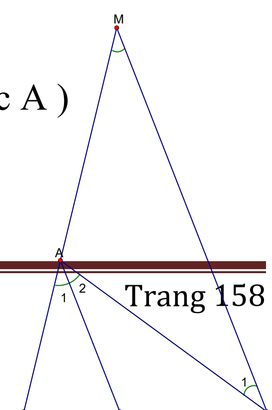


2) Qua điểm C vẽ đường thẳng song song AD cắt AB tại M

$\angle A_1 = \angle M_1$, $\angle A_2 = \angle C_2$, Mà $\angle A_1 = \angle A_2$, (AD là tia phân giác của góc A)

Nên $\angle M_1 = \angle C_1$, $\Rightarrow$ AM = AC. Xét ΔAMC : MC < AM + AC = 2AM

Xét ΔBMC ta có : AD // MC $\Rightarrow \dfrac{AD}{MC} = \dfrac{AB}{BM} = \dfrac{AB}{AB + AM}$



Nên $AD = \dfrac{AB\,.\,MC}{AB + AM} < \dfrac{AB\,.\,2AC}{AB + AC} \Rightarrow \dfrac{1}{AD} > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AD}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{m} > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

Tương tự : $\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c}\right)$; $\dfrac{1}{k} > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$. Vậy $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{k} > \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$

Bài 68: *(6,0 điểm).*

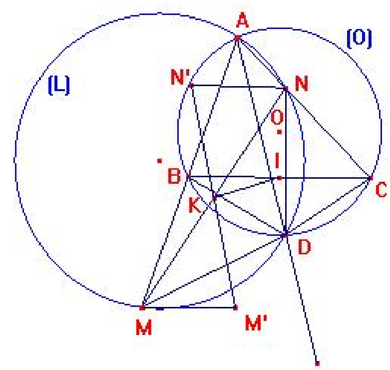
Cho ΔABC nội tiếp đường tròn tâm O. Tia phân giác trong góc A cắt (O) tại D. Một đường tròn (L) thay đổi nhưng luôn đi qua A, D cắt AB, AC tại điểm thứ hai lần lượt tại M, N.

a) CMR: BM = CN

b) Tìm quỹ tích trung điểm K của MN

c) Tìm vị trí của (L) sao cho MN ngắn nhất.

Giải:4.a) Xét ΔBMD và ΔCND:



+. BD=CD (vì AD là phân giác góc A) +. $\angle ACD = \dfrac{1}{2}$ sđ cung AD

$\angle MBD = A_1 + D_1 = \dfrac{1}{2}$ sđ cung AB $+ \dfrac{1}{2}$ sđ cung BD $= \dfrac{1}{2}$ sđ cung AD

$\Rightarrow \angle ACD = \angle MBD$. Trong (L), vì $A_1 = A_2 \Rightarrow$ DM = DN

$\Rightarrow \Delta BMD = \Delta CND \Rightarrow BM = CN$.

b). Gọi I là trung điểm BC $\Rightarrow$ I cố định

Vẽ hình bình hành: IBMM', ICNN' $\Rightarrow$MM'NN' là hình bình hành.

$\Rightarrow$ K là trung điểm M'N'

Vì IM' = BM = CN = IN' $\Rightarrow$ IM'=IN'$\Rightarrow$ IK là phân giác của $\angle$M'IN'

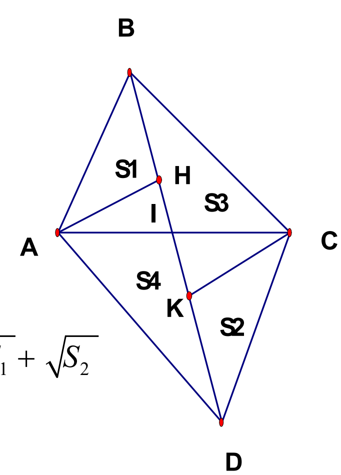
Do $\begin{cases} IM' // MB \\ IN' // CN \end{cases} \Rightarrow$ IM', IN' cố định. Vậy: Quỹ tích K là đờng phân giác $\angle$M'IN'

c) ΔDMN cântại D có $\angle MDN = 180^0 - \angle BAC$ = Const

$\Rightarrow$MN ngắn nhất $\Leftrightarrow$ DM nhỏ nhất$\Leftrightarrow$ DM$\perp$AB $\Leftrightarrow$ khi AD là đờng kính của (L).

5. a. Gọi $S_1 = S_{AIB}$; $S_2 = S_{CID}$; $S_3 = S_{BIC}$; $S_4 = S_{AID}$

Kẻ $AH \perp BD; CK \perp BD$



Ta có: $\begin{matrix} S_{AIB} = \frac{1}{2}AH.BI \\ S_{AID} = \frac{1}{2}AH.DI \end{matrix} \Leftrightarrow \dfrac{S_1}{S_4} = \dfrac{BI}{DI}(1)$ và $\begin{matrix} S_{CID} = \frac{1}{2}CK.DI \\ S_{BIC} = \frac{1}{2}CK.BI \end{matrix} \Leftrightarrow \dfrac{S_3}{S_2} = \dfrac{BI}{DI}(2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{S_1}{S_4} = \dfrac{S_3}{S_2} \Leftrightarrow S_1.S_2 = S_3.S_4 (3)$

Ta có: $S_{ABCD} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \geq S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_3.S_4} (4)$

Từ (3) và (4) ta suy ra: $S \geq S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1.S_2} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2 \Leftrightarrow \sqrt{S} \geq \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$ (đpcm)

b. Khi tứ giác ABCD là hình thang ta xét:

* Nếu AB // CD ta có: $S_{ACD} = S_{BCD}$ suy ra: $S_3 = S_4 \Rightarrow \sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$

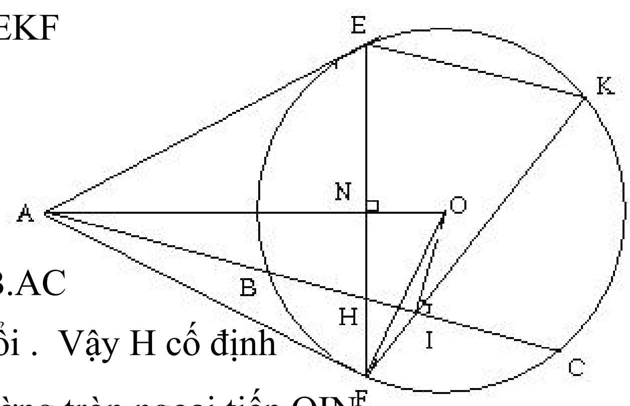
* Nếu BC // AD ta có: $S_{ABC} = S_{CAD}$ Suy ra: $S_1 = S_2 \Rightarrow \frac{\sqrt{S}}{2} \geq \sqrt{S_1} = \sqrt{S_2}$

Dấu bằng sảy ra khi: $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \frac{S}{4} \Leftrightarrow$ ABCD là hình bình hành

Bài 69: *(2,0 điểm).* Cho ba điểm cố định A,B,C thẳng hàng theo thứ tự đó.vẽ đường tròn tâm O qua B và C.Qua A vẽ tiếp tuyến AE,AF với đường tròn (O); Gọi I là trung điểm BC ,N là trung điểm EF .
a.Chứng minh rằng các điểm E, F luôn nằm trên một đường tròn cố định khi đường tròn (O) thay đổi.
b.Đường thẳng FI cắt đường tròn (O) tại K .Chứng minh rằng :EK song song với AB .
c.Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ONI chạy trên một đường thẳng cố định khi đường tròn(O) thay đổi.

Bài 70: *(2,0 điểm).* Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, các tiếp điểm của (O) và các cạnh BC, CA, AB lần lượt là D, E, F. Kẻ $BB_1 \perp AO$, $AA_1 \perp BO$
Chứng minh rằng 4 điểm D, E, A, B thẳng hàng.

Giải:69. a) Δ ABF và Δ AFC đồng dạng (g_g). Ta có : AB/ AF=AF/AC $\Leftrightarrow$ AF^2=AB.AC
$\Rightarrow$ AF=$\sqrt{AB.AC}$ Mà AE=AF nên AE=AF=$\sqrt{AB.AC}$ không đổi
Vậy E,F thuộc đường tròn (A;$\sqrt{AB.AC}$) cố định.
b) Tứ giác AOIF nội tiếp đường tròn. Ta có : $\angle$ AIF = $\angle$ AOF (1)
$\angle AOF = \frac{1}{2}\angle EOF$ và $\angle EKF = \frac{1}{2}\angle EOF$
$\Rightarrow \angle EKF = \angle AOF$ (2).Từ(1) và(2) $\Rightarrow \angle AIF = \angle EKF$
Do đó : EK vàAB song song vơí nhau
c) Cm được A,N,O thẳng hàng và AO $\perp$ EF ;
Gọi H là giao điểm của BC và EF .



Ta có : Δ ANH và Δ AIO đồng dạng nên $\frac{AH}{AO} = \frac{AN}{AI}$
Suy ra :AH.AI =AN.AO. Lại có :AN .AO=AE^2 =AB.AC
Do đó : AI.AH =AB.AC $\Rightarrow AH = \frac{AB.AC}{AI}$ không đổi . Vậy H cố định
Tứ giác OIHN là tứ giác nội tiếp đường tròn nên đường tròn ngoại tiếp OIN luôn qua I và H ;Do đó tâm đương f tròn này nằm trên đường trung trực của IH

70. Theo bài ra ta có: $A\hat{A_1}B = A\hat{B_1}B$=$90^0$
Suy ra tứ giác AA_1 B_1 B nôi tiếp trong một đường tròn
$\Rightarrow B\hat{A_1}B_1 = A\hat{B}B_1$ cùng chắn cung BB_1
Mặt khác: $A\hat{E_1}O = A\hat{A_1}O = 1V \Rightarrow$ tứ giác AEA_1O nội tiếp
$\Rightarrow E\hat{A_1}A = E\hat{O}A_1$ cùng chắn cung AE)

mà $B\hat{A}B_1 = B_1\hat{A}E$
$O\hat{A}E + E\hat{O}A = 90^0 \Rightarrow E, A_1, B_1$

thẳng hàng (*)

Tương tự: ta có tứ giác AA_1B_1B nội tiếp

Theo bài ra ta có:

$$\widehat{AA_1B} = A\hat{B}_1B = 90^0$$

Suy ra tứ giác AA_1 B_1 B nôi tiép trong một đường tròn

$\Rightarrow \widehat{A_1B_1A} = A_1\hat{B}A$ cùng chắn cung AA_1

Ta lại có: $\widehat{OD_1B} = O\hat{B}B = 1V \Rightarrow$ tứ giác OB_1DB nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{DB_1B} = D\hat{O}B$ (cùng chắn cung BD)

$\widehat{DOB} = D\hat{B}O$

mà $D\hat{B}O + D\hat{O}B = 90^0$

$D\hat{B}O = O\hat{B}A$

Tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau

Vậy $\widehat{DB_1B} + B\hat{B}_1A + A\hat{B}_1A_1 = 180^0 \Rightarrow$ 3 điểm D, B_1, A_1 thẳng hàng (**)

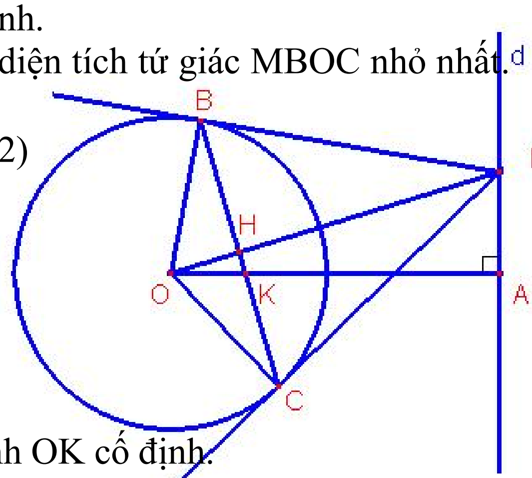
Từ (*) , (**) suy ra A_1, D, B_1, E thẳng hàng

__Bài 71__: **Bài 5:** *(6 điểm)* Cho đường tròn (O; R) và một điểm A ở ngoài đường tròn. Từ một điểm M di động trên đường thẳng d $\perp$ OA tại A, vẽ các tiếp tuyến MB, MC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Dây BC cắt OM và OA lần lượt tại H và K.

a) Chứng minh rằng OA.OK không đổi, từ đó suy ra BC luôn đi qua một điểm cố định.

b) Chứng minh rằng H di động trên một đường tròn cố định.

c) Cho biết OA = 2R, hãy xác định vị trí của điểm M để diện tích tứ giác MBOC nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.



Xét ΔBOM vuông tại B nên : $OB^2 = OH.OM$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra A. $OK = R^2$ (không đổi)

Giải :a) Dễ thấy OM $\perp$ BCΔHOK $\backsim$ ΔAOM

=> $\frac{OH}{OA} = \frac{OK}{OM}$ => OA.OK = OH.OM (1)

=> $OK = \frac{R^2}{OA}$ (không đổi) do đó K cố định trên OA

b)Ta có OHK = 90^0 => H nằm trên đường tròn đường kính OK cố định.

c) Tứ giác MBOC có hai đường chéo vuông góc nên $S_{MBOC} = \frac{1}{2}$OM.BC

=> S nhỏ nhất ⇔ OM nhỏ nhất và BC nhỏ nhất.

+ OM nhỏ nhất ⇔ M trùng với A

+ BC nhỏ nhất ⇔ BC $\perp$ OK ⇔ H trùng với K ⇔ M trùng với A

Nếu OA = 2R thì: $OK = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2}$; BC = 2 BK = $2\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = R\sqrt{3}$

Vậy $S_{MBOC} = \frac{1}{2}$2R.$R\sqrt{3} = R^2\sqrt{3}$

Bài 72: *(6 điểm)* Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O;R) . Điểm M thuộc cung nhỏ BC. gọi I,K,H theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M trên AB; AC; BC. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB; HK.

a) Chứng minh MQ $\perp$ PQ.

b) Chứng minh : $\frac{AB}{MI}+\frac{AC}{MK}=\frac{BC}{MH}$

c) Cho tam giác ABC đều. Xác định vị trí của điểm M trên cung BC để MA + MB + MC đạt giá trị lớn nhất

Giải: . a) Tứ giác MCKH nội tiếp $\Rightarrow$ $\widehat{BCM}=\widehat{HKM}=\widehat{BAM};\ \widehat{HMK}=\widehat{BCA}=\widehat{BMA}$

$\Rightarrow \Delta$ BMA $\backsim$ Δ HMK.

Mặt khác MP, MQ là trung tuyến của Δ BMA, Δ HMK

$\Rightarrow \frac{MP}{MQ}=\frac{MB}{MH}$ và $\widehat{BMH}=\widehat{PMQ}$ $\Rightarrow$ Δ BMH $\backsim$ Δ PMQ

Mặt khác $\widehat{BHM}=90^0$ $\Rightarrow$ $\widehat{PQM}=90^0$ $\Rightarrow$ PQ $\perp$MQ.

b) Giả sử AC $\geq$ AB ta có:

$$\frac{AB}{MI}+\frac{AC}{MK}=\frac{AI-BI}{MI}+\frac{AK+KC}{MK}=\frac{AI}{MI}+\frac{AK}{MK} \quad (1)$$

(Do $\widehat{MBI}=\widehat{MCK}$ $\Rightarrow$ cotg $\widehat{MBI}$ = cotg$\widehat{MCK}$ $\Rightarrow$ $\frac{BI}{MI}=\frac{KC}{MK}$)

Do $\widehat{C}_1=\widehat{A}_1$ nên cotg$\widehat{A}_1$ = cotg$\widehat{C}_1$ $\Rightarrow$ $\frac{AI}{MI}=\frac{CH}{MH}$ (2)

$\widehat{A}_2=\widehat{B}_1$ nên cotg$\widehat{A}_2$ = cotg$\widehat{B}_1$ $\Rightarrow$ $\frac{AK}{MK}=\frac{BH}{MH}$ (3)

c) Từ (1),(2) và (3) suy ra $\frac{AB}{MI}+\frac{AC}{MK}=\frac{CH}{MH}+\frac{BH}{MH}=\frac{BC}{MH}$

Gọi D là giao điểm của MA với BD ta có :

Δ MBD $\backsim$ Δ MAC $\left(\widehat{BMD}=\widehat{AMC},\ \widehat{DBM}=\widehat{CAM}\right)$ $\Rightarrow \frac{MB}{MA}=\frac{BD}{AC}$

Tương tự ta có : $\frac{MC}{MA}=\frac{CD}{AB}$ Do đó $\frac{MB}{MA}+\frac{MC}{MA}=1$

Suy ra MA + MB + MC = 2MA $\leq$ 4R

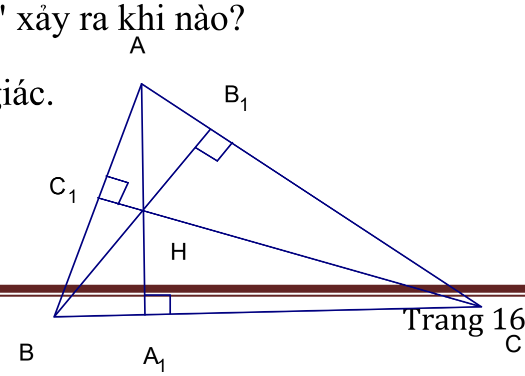
Vậy max (MA + MB + MC) = 4R khi AM là đường kính khi đó M là trung điểm của cung BC

Bài 73: *(2,0 điểm)*.Cho tam giác ABC nhọn có 3 đường cao: AA_1, BB_1, CC_1 đồng qui tại H.

Chứng minh rằng: $\frac{HA}{HA_1}+\frac{HB}{HB_1}+\frac{HC}{HC_1}\geq 6$. Dấu "=" xảy ra khi nào?

Giải: . Do tam giác ABC nhọn, nên H nằm trong tam giác.

* Đặt S = $S_{\Delta ABC}$; $S_1 = S_{HBC}$; $S_2 = S_{HAC}$; $S_3 = S_{HAB}$.



Ta có: $\frac{S}{S_1}=\frac{\frac{1}{2}.AA_1.BC}{\frac{1}{2}.HA_1.BC}=\frac{AA_1}{HA_1}=1+\frac{HA}{HA_1}$ .T^2: $\frac{S}{S_2}=1+\frac{HB}{HB_1}$, $\frac{S}{S_3}=1+\frac{HC}{HC_1}$

Suy ra: $\frac{HA}{HA_1}+\frac{HB}{HB_1}+\frac{HC}{HC_1}=S\left(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}\right)-3\ =(S_1+S_2+S_3)\left(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}\right)-3$

Theo bất đẳng thức Côsy:

$=(S_1+S_2+S_3)\left(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}\right)\geq 9 \Rightarrow \frac{HA}{HA_1}+\frac{HB}{HB_1}+\frac{HC}{HC_1}\geq 9-3=6$

Dấu "=" xảy ra khi tam giỏc ABC đều