

PHẦN I: ĐẠI SỐ

CHỦ ĐỀ 1: CĂN THỨC – BIẾN ĐỔI CĂN THỨC.

Dạng 1: Tìm điều kiện để biểu thức có chứa căn thức có nghĩa.

Bài 1: Tìm x để các biểu thức sau có nghĩa. (Tìm ĐKXD của các biểu thức sau).

1) $\sqrt{3x-1}$

8) $\sqrt{x^2+3}$

2) $\sqrt{5-2x}$

9) $\sqrt{x^2-2}$

3) $\frac{1}{\sqrt{7x-14}}$

10) $\sqrt{x^2-3x+7}$

4) $\sqrt{2x-1}$

11) $\sqrt{2x^2-5x+3}$

5) $\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{7x+2}}$

12) $\frac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}}$

6) $\sqrt{\frac{x+3}{7-x}}$

13) $\frac{1}{\sqrt{x-3}} + \frac{3x}{\sqrt{5-x}}$

7) $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$

14) $\sqrt{6x-1} + \sqrt{x+3}$

Dạng 2: Biến đổi đơn giản căn thức.

Bài 1: Đưa một thừa số vào trong dấu căn.

a) $\frac{3}{5}\sqrt{\frac{5}{3}}$;

b) $x\sqrt{\frac{2}{x}}$ (với $x > 0$);

c) $x\sqrt{\frac{2}{5}}$;

d) $(x-5)\sqrt{\frac{x}{25-x^2}}$;

e) $x\sqrt{\frac{7}{x^2}}$

Bài 2: Thực hiện phép tính.

a) $(\sqrt{28}-2\sqrt{14}+\sqrt{7})\cdot\sqrt{7}+7\sqrt{8}$;

d) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}$;

b) $(\sqrt{8}-3\sqrt{2}+\sqrt{10})(\sqrt{2}-3\sqrt{0,4})$

e) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}$

c) $(15\sqrt{50}+5\sqrt{200}-3\sqrt{450}):\sqrt{10}$;

f) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$

g) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$;

h) $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}-\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$

Bài 3: Thực hiện phép tính.

$$a) \left(\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{8}-2} - \frac{\sqrt{216}}{3} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \quad b) \frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}} : \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} \quad c) \frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{8-2\sqrt{6}}}{\sqrt{7+2\sqrt{10}}}$$

Bài 4: Thực hiện phép tính.

$$a) (4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}} \quad b) (3-\sqrt{5})\sqrt{3+\sqrt{5}}+(3+\sqrt{5})\sqrt{3-\sqrt{5}}$$

$$c) \sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{2} \quad d) \sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{7}$$

$$e) \sqrt{6,5+\sqrt{12}}+\sqrt{6,5-\sqrt{12}}+2\sqrt{6}$$

Bài 5: Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \frac{1}{\sqrt{7-\sqrt{24}}+1} - \frac{1}{\sqrt{7+\sqrt{24}}+1} \quad b) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}-1}+1}$$

$$c) \sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{5-\sqrt{6}}} + \sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{5+\sqrt{6}}} \quad d) \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}$$

Bài 6: Rút gọn biểu thức:

$$a) \sqrt{6+2\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}} \quad b) \sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48}-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}$$

$$c) \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

Bài 7: Rút gọn biểu thức sau:

$$a) \frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} : \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}, \text{ với } a > 0, b > 0 \text{ và } a \neq b.$$

$$b) \left(1 + \frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1} \right) \left(1 - \frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} \right), \text{ với } a > 0 \text{ và } a \neq 1.$$

$$c) \frac{a\sqrt{a}-8+2a-4\sqrt{a}}{a-4};$$

$$d) \frac{1}{2a-1} \cdot \sqrt{5a^4(1-4a+4a^2)}$$

$$e) \frac{2}{x^2-y^2} \cdot \sqrt{\frac{3x^2+6xy+3y^2}{4}}$$

Bài 8: Tính giá trị của biểu thức

- a) $A = x^2 - 3x\sqrt{y} + 2y$, khi $x = \frac{1}{\sqrt{5}-2}$; $y = \frac{1}{9+4\sqrt{5}}$
- b) $B = x^3 + 12x - 8$ với $x = \sqrt[3]{4(\sqrt{5}+1)} - \sqrt[3]{4(\sqrt{5}-1)}$;
- c) $C = x + y$, biết $(x + \sqrt{x^2 + 3})(y + \sqrt{y^2 + 3}) = 3$;
- d) $D = \sqrt{16 - 2x + x^2} + \sqrt{9 - 2x + x^2}$, biết $\sqrt{16 - 2x + x^2} - \sqrt{9 - 2x + x^2} = 1$.
- e) $E = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}$, biết $xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = a$.

Dạng 3: Bài toán tổng hợp kiến thức và kỹ năng tính toán.

Bài 1: Cho biểu thức $P = \frac{x-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}$

- a) Rút gọn P.
- b) Tính giá trị của P nếu $x = 4(2 - \sqrt{3})$.
- c) Tính giá trị nhỏ nhất của P.

Bài 2: Xét biểu thức $A = \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} - \frac{2a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1$.

- a) Rút gọn A.
- b) Biết $a > 1$, hãy so sánh A với $|A|$.
- c) Tìm a để $A = 2$.
- d) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

Bài 3: Cho biểu thức $C = \frac{1}{2\sqrt{x}-2} - \frac{1}{2\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}}{1-x}$

- a) Rút gọn biểu thức C.
- b) Tính giá trị của C với $x = \frac{4}{9}$.
- c) Tính giá trị của x để $|C| = \frac{1}{3}$.

Bài 4: Cho biểu thức $M = \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} - \left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\right) : \frac{b}{a - \sqrt{a^2-b^2}}$

- a) Rút gọn M.
- b) Tính giá trị M nếu $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$.
- c) Tìm điều kiện của a, b để $M < 1$.

Bài 5: Xét biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{(1-x)^2}{2}$.

- a) Rút gọn P.
- b) Chứng minh rằng nếu $0 < x < 1$ thì $P > 0$.
- c) Tìm giá trị lớn nhất của P.

Bài 6: Xét biểu thức $Q = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$.

- a) Rút gọn Q.
- b) Tìm các giá trị của x để $Q < 1$.
- c) Tìm các giá trị nguyên của x để giá trị tương ứng của Q cũng là số nguyên.

Bài 7: Xét biểu thức $H = \left(\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}}{x-y} \right) : \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + \sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

- a) Rút gọn H.
- b) Chứng minh $H \geq 0$.
- c) So sánh H với \sqrt{H} .

Bài 8: Xét biểu thức $A = \left(1 + \frac{\sqrt{a}}{a+1} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + \sqrt{a} - a - 1} \right)$.

- a) Rút gọn A.
- b) Tìm các giá trị của a sao cho $A > 1$.
- c) Tính các giá trị của A nếu $a = 2007 - 2\sqrt{2006}$.

Bài 9: Xét biểu thức $M = \frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x}}$.

a) Rút gọn M.

b) Tìm các giá trị nguyên của x để giá trị tương ứng của M cũng là số nguyên.

Bài 10: Xét biểu thức $P = \frac{15\sqrt{x} - 11}{x + 2\sqrt{x} - 3} + \frac{3\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3}$.

a) Rút gọn P.

b) Tìm các giá trị của x sao cho $P = \frac{1}{2}$.

c) So sánh P với $\frac{2}{3}$.

Chủ đề 2: PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI – ĐỊNH LÝ VI-ÉT.

Dạng 1: Giải phương trình bậc hai.

Bài 1: Giải các phương trình

1) $x^2 - 6x + 14 = 0$;

2) $4x^2 - 8x + 3 = 0$;

3) $3x^2 + 5x + 2 = 0$;
0 ;

4) $-30x^2 + 30x - 7,5 =$

5) $x^2 - 4x + 2 = 0$;

6) $x^2 - 2x - 2 = 0$;

7) $x^2 + 2\sqrt{2}x + 4 = 3(x + \sqrt{2})$;
 $\sqrt{3}(x + 1)$;

8) $2\sqrt{3}x^2 + x + 1 =$

9) $x^2 - 2(\sqrt{3} - 1)x - 2\sqrt{3} = 0$.

Bài 2: Giải các phương trình sau bằng cách nhẩm nghiệm:

1) $3x^2 - 11x + 8 = 0$;

2) $5x^2 - 17x + 12 = 0$;

3) $x^2 - (1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$;
 $+ 1 + 3\sqrt{2} = 0$;

4) $(1 - \sqrt{2})x^2 - 2(1 + \sqrt{2})x$

$$5) 3x^2 - 19x - 22 = 0 ;$$

$$6) 5x^2 + 24x + 19 = 0 ;$$

$$7) (\sqrt{3} + 1)x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} - 1 = 0 ;$$

$$8) x^2 - 11x + 30 = 0 ;$$

$$9) x^2 - 12x + 27 = 0 ;$$

$$10) x^2 - 10x + 21 = 0.$$

Dạng 2: Chứng minh phương trình có nghiệm, vô nghiệm.

Bài 1: Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm.

$$1) x^2 - 2(m - 1)x - 3 - m = 0 ;$$

$$2) x^2 + (m + 1)x + m$$

$$= 0 ;$$

$$3) x^2 - (2m - 3)x + m^2 - 3m = 0 ;$$

$$4) x^2 + 2(m + 2)x -$$

$$4m - 12 = 0 ;$$

$$5) x^2 - (2m + 3)x + m^2 + 3m + 2 = 0 ;$$

$$6) x^2 - 2x - (m - 1)(m$$

$$- 3) = 0 ;$$

$$7) x^2 - 2mx - m^2 - 1 = 0 ;$$

$$8) (m + 1)x^2 - 2(2m -$$

$$1)x - 3 + m = 0$$

$$9) ax^2 + (ab + 1)x + b = 0.$$

Bài 2:

a) Chứng minh rằng với a, b, c là các số thực thì phương trình sau luôn có nghiệm:

$$(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$$

b) Chứng minh rằng với ba số thực a, b, c phân biệt thì phương trình

sau có hai nghiệm phân biệt: $\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} + \frac{1}{x - c} = 0$ (ẩn x)

c) Chứng minh rằng phương trình: $c^2x^2 + (a^2 - b^2 - c^2)x + b^2 = 0$ vô nghiệm với a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

d) Chứng minh rằng phương trình bậc hai:

$$(a + b)^2x^2 - (a - b)(a^2 - b^2)x - 2ab(a^2 + b^2) = 0$$

luôn có hai nghiệm phân biệt.

Bài 3:

a) Chứng minh rằng ít nhất một trong các phương trình bậc hai sau đây có nghiệm:

$$ax^2 + 2bx + c = 0 \quad (1)$$

$$bx^2 + 2cx + a = 0 \quad (2)$$

$$cx^2 + 2ax + b = 0 \quad (3)$$

b) Cho bốn phương trình (ẩn x) sau:

$$x^2 + 2ax + 4b^2 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 - 2bx + 4a^2 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 - 4ax + b^2 = 0 \quad (3)$$

$$x^2 + 4bx + a^2 = 0 \quad (4)$$

Chứng minh rằng trong các phương trình trên có ít nhất 2 phương trình có nghiệm.

c) Cho 3 phương trình (ẩn x) sau:

$$ax^2 - \frac{2b\sqrt{b+c}}{b+c}x + \frac{1}{c+a} = 0 \quad (1)$$

$$bx^2 - \frac{2c\sqrt{c+a}}{c+a}x + \frac{1}{a+b} = 0 \quad (2)$$

$$cx^2 - \frac{2a\sqrt{a+b}}{a+b}x + \frac{1}{b+c} = 0 \quad (3)$$

với a, b, c là các số dương cho trước.

Chứng minh rằng trong các phương trình trên có ít nhất một phương trình có nghiệm.

Bài 4:

a) Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.

Biết $a \neq 0$ và $5a + 4b + 6c = 0$, chứng minh rằng phương trình đã cho có hai nghiệm.

b) Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm nếu một trong hai điều kiện sau được thoả mãn:

$$a(a + 2b + 4c) < 0 ;$$

$$5a + 3b + 2c = 0.$$

Dạng 3: Tính giá trị của biểu thức đối xứng, lập phương trình bậc hai nhờ nghiệm của phương trình bậc hai cho trước.

Bài 1: Gọi $x_1 ; x_2$ là các nghiệm của phương trình: $x^2 - 3x - 7 = 0$.

Tính:

$$A = x_1^2 + x_2^2;$$

$$B = |x_1 - x_2|;$$

$$C = \frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1};$$

$$D = (3x_1 + x_2)(3x_2 + x_1);$$

$$E = x_1^3 + x_2^3;$$

$$F = x_1^4 + x_2^4$$

Lập phương trình bậc hai có các nghiệm là $\frac{1}{x_1 - 1}$ và $\frac{1}{x_2 - 1}$.

Bài 2: Gọi $x_1 ; x_2$ là hai nghiệm của phương trình: $5x^2 - 3x - 1 = 0$.

Không giải phương trình, tính giá trị của các biểu thức sau:

$$A = 2x_1^3 - 3x_1^2x_2 + 2x_2^3 - 3x_1x_2^2;$$

$$B = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1}{x_2 + 1} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_2}{x_1 + 1} - \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right)^2;$$

$$C = \frac{3x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2^2}{4x_1x_2^2 + 4x_1^2x_2}.$$

Bài 3:

a) Gọi p và q là nghiệm của phương trình bậc hai: $3x^2 + 7x + 4 = 0$.

Không giải phương trình hãy thành lập phương trình bậc hai với hệ số

bằng số mà các nghiệm của nó là $\frac{p}{q-1}$ và $\frac{q}{p-1}$.

b) Lập phương trình bậc hai có 2 nghiệm là $\frac{1}{10 - \sqrt{72}}$ và $\frac{1}{10 + 6\sqrt{2}}$.

Bài 4: Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x - m = 0$.

a) Chứng minh rằng phương trình luôn luôn có hai nghiệm $x_1 ; x_2$ với mọi m .

b) Với $m \neq 0$, lập phương trình ẩn y thoả mãn

$$y_1 = x_1 + \frac{1}{x_2} \text{ và } y_2 = x_2 + \frac{1}{x_1}.$$

Bài 5: Không giải phương trình $3x^2 + 5x - 6 = 0$. Hãy tính giá trị các biểu thức sau:

$$A = (3x_1 - 2x_2)(3x_2 - 2x_1);$$

$$B = \frac{x_1}{x_2 - 1} + \frac{x_2}{x_1 - 1};$$

$$C = |x_1 - x_2|;$$

$$D = \frac{x_1 + 2}{x_1} + \frac{x_2 + 2}{x_2}$$

Bài 6: Cho phương trình $2x^2 - 4x - 10 = 0$ có hai nghiệm $x_1 ; x_2$. Không giải phương trình hãy thiết lập phương trình ẩn y có hai nghiệm $y_1 ; y_2$ thoả mãn: $y_1 = 2x_1 - x_2 ; y_2 = 2x_2 - x_1$

Bài 7: Cho phương trình $2x^2 - 3x - 1 = 0$ có hai nghiệm $x_1 ; x_2$. Hãy thiết lập phương trình ẩn y có hai nghiệm $y_1 ; y_2$ thoả mãn:

$$a) \begin{cases} y_1 = x_1 + 2 \\ y_2 = x_2 + 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} y_1 = \frac{x_1^2}{x_2} \\ y_2 = \frac{x_2^2}{x_1} \end{cases}$$

Bài 8: Cho phương trình $x^2 + x - 1 = 0$ có hai nghiệm $x_1 ; x_2$. Hãy thiết lập phương trình ẩn y có hai nghiệm $y_1 ; y_2$ thoả mãn:

$$a) \begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \\ \frac{y_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_1} = 3x_1 + 3x_2 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} y_1 + y_2 = x_1^2 + x_2^2 \\ y_1^2 + y_2^2 + 5x_1 + 5x_2 = 0. \end{cases}$$

Bài 9: Cho phương trình $2x^2 + 4ax - a = 0$ (a tham số, $a \neq 0$) có hai nghiệm $x_1 ; x_2$. Hãy lập phương trình ẩn y có hai nghiệm $y_1 ; y_2$ thoả mãn:

$$y_1 + y_2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \text{ và } \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = x_1 + x_2$$

Dạng 4: Tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm có nghiệm kép, vô nghiệm.

Bài 1:

a) Cho phương trình $(m - 1)x^2 + 2(m - 1)x - m = 0$ (ẩn x).

Xác định m để phương trình có nghiệm kép. Tính nghiệm kép này.

b) Cho phương trình $(2m - 1)x^2 - 2(m + 4)x + 5m + 2 = 0$.

Tìm m để phương trình có nghiệm.

a) Cho phương trình: $(m - 1)x^2 - 2mx + m - 4 = 0$.

- Tìm điều kiện của m để phương trình có nghiệm.

- Tìm điều kiện của m để phương trình có nghiệm kép. Tính nghiệm kép đó.

b) Cho phương trình: $(a - 3)x^2 - 2(a - 1)x + a - 5 = 0$.

Tìm a để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài 2:

a) Cho phương trình: $\frac{4x^2}{x^4 + 2x^2 + 1} - \frac{2(2m - 1)x}{x^2 + 1} + m^2 - m - 6 = 0$.

Xác định m để phương trình có ít nhất một nghiệm.

b) Cho phương trình: $(m^2 + m - 2)(x^2 + 4)^2 - 4(2m + 1)x(x^2 + 4) + 16x^2 = 0$. Xác định m để phương trình có ít nhất một nghiệm.

Dạng 5: Xác định tham số để các nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ thoả mãn điều kiện cho trước.

Bài 1: Cho phương trình: $x^2 - 2(m + 1)x + 4m = 0$