

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN

Môn: Toán 9

Thời gian làm bài: 150 phút

Đề gồm 01 trang

Bài 1: (6,0 điểm)

1) Cho biểu thức $Q = \left(\frac{\sqrt{3}}{x^2 + x\sqrt{3} + 3} + \frac{3}{x^3 - \sqrt{27}} \right) \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{x} + 1 \right)$

a/ Tìm điều kiện của Q và rút gọn Q b/ Tính giá trị của Q khi

$$x = \sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}}$$

2) Chứng minh rằng $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 100^3$ chia hết cho $B = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$

Bài 2: (4,0 điểm)

1) Giải phương trình: $\sqrt{x - 2013} + \sqrt{4x - 8052} = 3$

2) Cho $abc = 1$. Tính $S = \frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+ac}$

Bài 3: (3,0 điểm)

1) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + 2y^2 + 2xy + 3y - 4 = 0$

2) Biết rằng a, b là các số thoả mãn $a > b > 0$ và $a \cdot b = 1$ Chứng minh :

$$\frac{a^2 + b^2}{a - b} \geq 2\sqrt{2}$$

Bài 3: (6,0 điểm)

Cho nửa đường tròn đường kính $BC = 2R$, tâm O cố định. Điểm A di động trên nửa đường tròn. Gọi H là hình chiếu của điểm A lên BC. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H lên AC và AB.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông

b) Chứng minh: $AB \cdot EB + AC \cdot EH = AB^2$

c) Xác định tam giác ABC sao cho tứ giác AEHD có diện tích lớn nhất?

Tính d/ tích lớn nhất đó theo R.

Bài 5: (1,0 điểm)

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $2(x + y) + 16 = 3xy$

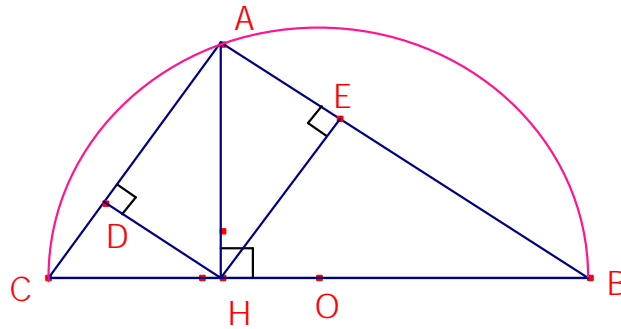
HƯỚNG DẪN CHẤM

Bài	Tóm tắt lời giải	Điểm
Bài 1 Câu 1a (2đ)	1.a) ĐKXD: $x \neq 0; x \neq \sqrt{3}$ $Q = \left(\frac{\sqrt{3}}{x^2 + x\sqrt{3} + 3} + \frac{3}{x^3 - \sqrt{27}} \right) \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{x} + 1 \right)$	0,5

	$Q = \left(\frac{\sqrt{3}}{x^2 + x\sqrt{3} + 3} + \frac{3}{(x - \sqrt{3})(x^2 + x\sqrt{3} + 3)} \right) \left(\frac{x^2 + x\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}x} \right)$ $= \left(\frac{(x - \sqrt{3})\sqrt{3} + 3}{(x - \sqrt{3})(x^2 + x\sqrt{3} + 3)} \right) \left(\frac{x^2 + x\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}x} \right)$ $= \frac{1}{x - \sqrt{3}}$	0,5 0,5 0,5
Bài 1 Câu 1b (2 đ)	<p>1.b) Ta có: $x = \sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}}$</p> $x = \sqrt{\frac{8 + 2\sqrt{7}}{2}} - \sqrt{\frac{8 - 2\sqrt{7}}{2}}$ $x = \sqrt{\frac{(1 + \sqrt{7})^2}{2}} - \sqrt{\frac{(1 - \sqrt{7})^2}{2}}$ $x = \frac{1 + \sqrt{7}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{7} - 1}{\sqrt{2}}$ $x = \sqrt{2}$ <p>Thay $x = \sqrt{2}$ vào Q ta có:</p> $Q = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = -\sqrt{2} - \sqrt{3}$	0,5 0,5 0,5 0,5
Bài 1 Câu 2 (2 đ)	<p>2. Ta có: $B = (1 + 100) + (2 + 99) + \dots + (50 + 51) = 101 \cdot 50$ Đề chứng minh A chia hết cho B ta chứng minh A chia hết cho 50 và 101</p> <p>Ta có: $A = (1^3 + 100^3) + (2^3 + 99^3) + \dots + (50^3 + 51^3)$ $= (1 + 100)(1^2 + 100 + 100^2) + (2 + 99)(2^2 + 2 \cdot 99 + 99^2) + \dots + (50 + 51)(50^2 + 50 \cdot 51 + 51^2) = 101(1^2 + 100 + 100^2 + 2^2 + 2 \cdot 99 + 99^2 + \dots + 50^2 + 50 \cdot 51 + 51^2)$ chia hết cho 101 (1)</p> <p>Lại có: $A = (1^3 + 99^3) + (2^3 + 98^3) + \dots + (50^3 + 100^3)$ Mỗi số hạng trong ngoặc đều chia hết cho 50 nên A chia hết cho 50 (2)</p> <p>Từ (1) và (2) suy ra A chia hết cho 101 và 50 nên A chia hết cho B</p>	0,5 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
Bài 2 (1,5 đ)	<p>1. $\sqrt{x - 2013} + \sqrt{4x - 8052} = 3; DK: x \geq 2013$ $\Rightarrow 3\sqrt{x - 2013} = 3 \Leftrightarrow x = 2014 (TMĐK)$</p> <p>2. Cho $abc = 1 \Rightarrow ab = \frac{1}{c}$</p>	0,5 1,0 0,5

(2,5 đ)	$S = \frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+ac}$	
	$= \frac{1}{1+a+\frac{1}{c}} + \frac{1}{abc+b+bc} + \frac{1}{1+c+ac}$	0,5
	$= \frac{c}{c+ac+1} + \frac{1}{b(ac+1+c)} + \frac{1}{1+c+ac}$	0,5
	$= \frac{bc+1+b}{b(1+c+ac)}$	0,5
	$= \frac{b(c+ac+1)}{b(c+ac+1)} = 1$	0,5
Bài 3	1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình:	
(1,5đ)	$x^2 + 2y^2 + 2xy + 3y - 4 = 0 \quad (1)$	
	$(1) \Leftrightarrow (x^2 + 2xy + y^2) + (y^2 + 3y - 4) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (x+y)^2 + (y-1)(y+4) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (y-1)(y+4) = -(x+y)^2 \quad (2)$	0,25
	Vì $-(x+y)^2 \leq 0$ với mọi x, y nên: $(y-1)(y+4) \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq y \leq 1$	0,25
	Vì y nguyên nên $y \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1\}$	0,25
	Thay các giá trị nguyên của y vào (2) ta tìm được các cặp nghiệm nguyên $(x; y)$ của PT đã cho là: $(4; -4), (1; -3), (5; -3), (-2; 0), (-1; 1)$.	0,25
(1,5 đ)	2. - Vì $a \cdot b = 1$ nên	
	$\frac{a^2 + b^2}{a - b} = \frac{(a - b)^2 + 2ab}{a - b}$	0,25
	$= \frac{(a - b)^2 + 2}{a - b} = (a - b) + \frac{2}{a - b}$	0,25
	- Do $a > b > 0$ nên áp dụng BĐT Cô Si cho 2 số dương	0,25
	Ta có: $(a - b) + \frac{2}{a - b} \geq 2\sqrt{(a - b) \cdot \frac{2}{a - b}}$	0,5
	Vậy $\frac{a^2 + b^2}{a - b} \geq 2\sqrt{2}$	0,25

Bài 4
6đ



0,5

a) Chứng minh tam giác ABC vuông
Ta có: $OA = OB = OC = R$
 \Rightarrow Tam giác ABC vuông tại A (theo đl đảo)

0,25
0,25

b) Chứng minh: $AB \cdot EB + AC \cdot EH = AB^2$
Chứng minh tứ giác ADHE là hình chữ nhật
 $AB \cdot EB = HB^2$
 $AC \cdot EH = AC \cdot AD = AH^2$
Ta có: $AB^2 = AH^2 + HB^2$ (định lý Pi ta go)
 \Rightarrow Đpcm

0,5
0,5
0,5
0,5
0,5

b) $S_{(ADHE)} = AD \cdot AE \leq \frac{AD^2 + AE^2}{2} = \frac{DE^2}{2} = \frac{AH^2}{2}$
 $\Rightarrow S_{(ADHE)} \leq \frac{AH^2}{2} \leq \frac{AO^2}{2} = \frac{R^2}{2}$
Vậy $\text{Max } S_{(ADHE)} = \frac{R^2}{2}$ Khi $AD = AE$ hay $AB = AC$
 \Leftrightarrow Tam giác ABC vuông cân tại A

1,0
0,5
0,5
0,5

Bài 5
(1,0đ)

Ta có $2(x + y) + 16 = 3xy \Leftrightarrow 3xy - 2x - 2y = 16$
 $\Leftrightarrow y(3x - 2) - \frac{2}{3}(3x - 2) = 16 + \frac{4}{3} \Leftrightarrow (3x - 2)(3y - 2) = 52$
Giả sử: $x \leq y$ khi đó $1 \leq 3x - 2 \leq 3y - 2$ và $52 = 1 \cdot 52 = 2 \cdot 26 = 4 \cdot 13$ ta có các trường hợp sau:
 $\begin{cases} 3x - 2 = 1 \\ 3y - 2 = 52 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3x - 2 = 2 \\ 3y - 2 = 26 \end{cases}; \text{ (loại)} \quad \begin{cases} 3x - 2 = 4 \\ 3y - 2 = 13 \end{cases}$
 \Rightarrow nghiệm nguyên dương của PT là: $(1; 18); (18; 1); (2; 5); (5; 2)$

0,25
0,25
0,25
0,25

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN

Môn: Toán 9

Thời gian làm bài: 150 phút

Đề gồm 01 trang

Bài 1: (3,5 điểm)

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có:

$$A = 7.5^{2n} + 12.6^n \text{ chia hết cho } 19$$

Bài 2: (2,5 điểm)

Tìm số tự nhiên n sao cho: $n + 24$ và $n - 65$ là hai số chính phương

Bài 3: (3,0 điểm)

Cho $a, b > 0$ và $a + b = 1$.

$$\text{Chứng minh rằng : } \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq 12,5$$

Bài 4: (3,0 điểm)

Cho x, y là hai số dương thỏa mãn : $x^2 + y^2 = 4$.

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : } E = \left(x + \frac{1}{y}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{x}\right)^2$$

Bài 5: (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC có D là trung điểm cạnh BC , điểm M nằm trên trung tuyến AD . Gọi I, K lần lượt là các trung điểm tương ứng của MB, MC và P, Q là các giao điểm tương ứng của các tia DI, DK với các cạnh AB, AC .

Chứng minh: $PQ \parallel IK$.

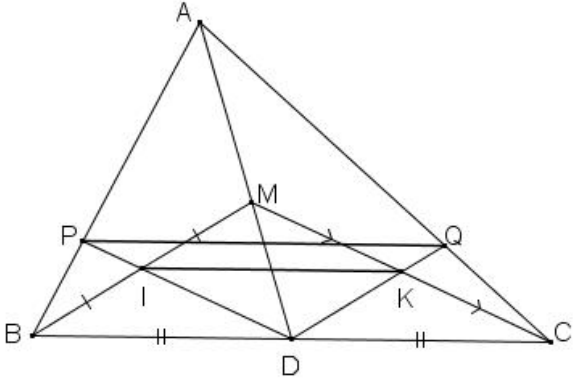
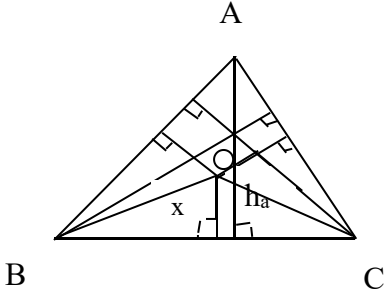
Bài 6: (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. Gọi đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C xuống các cạnh BC, CA và AB tương ứng là h_a, h_b, h_c . Gọi O là một điểm bất kỳ trong tam giác đó và khoảng cách từ O xuống ba cạnh BC, CA và AB tương ứng là x, y và z .

$$\text{Tính } M = \frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c}$$

HƯỚNG DẪN CHẤM

Bài 1 (3,5đ)	<p>Với $n = 0$ ta có $A(0) = 19 : 19$</p> <p>Giả sử A chia hết cho 19 với $n = k$ nghĩa là: $A(k) = 7.5^{2k} + 12.6^k : 19$</p> <p>Ta phải chứng minh A chia hết cho 19 với $n = k + 1$ nghĩa là phải chứng minh:</p> $A(k + 1) = 7.5^{2(k+1)} + 12.6^{k+1} : 19$ <p>Ta có: $A(k + 1) = 7.5^{2(k+1)} + 12.6^{k+1}$</p> $= 7.5^{2k}.5^2 + 12.6^n.6$ $= 7.5^{2k}.6 + 7.5^{2k}.19 + 12.6^n.6$ $= 6.A(k) + 7.5^{2k}.19 : 19$ <p>Vậy theo nguyên lý quy nạp thì $A = 7.5^{2n} + 12.6^n$ chia hết cho 19 với mọi số tự nhiên n</p>	<p>0,5</p> <p>0,75</p> <p>0,75</p> <p>1,0</p> <p>0,5</p>
Bài 2 (2,5đ)	<p>Ta có: $\begin{cases} n + 24 = k^2 \\ n - 65 = h^2 \end{cases}$</p> <p>$\Leftrightarrow k^2 - 24 = h^2 + 65$</p> <p>$\Leftrightarrow (k - h)(k + h) = 89 = 1.89$</p> <p>$\Leftrightarrow \begin{cases} k + h = 89 \\ k - h = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 45 \\ h = 44 \end{cases}$</p> <p>Vậy: $n = 45^2 - 24 = 2001$</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
Bài 3 (3,0đ)	<p>Nhận xét rằng với mọi x, y ta có:</p> $(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy$ $\Rightarrow 2(x^2 + y^2) \geq x^2 + y^2 + 2xy$ $\Rightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{(x + y)^2}{2}$ <p>Đặt $\left(a + \frac{1}{a}\right) = x$; $\left(b + \frac{1}{b}\right) = y$ ta được :</p> $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(a + b + \frac{a+b}{ab}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{ab}\right)^2$ <p>Vì $1 = (a + b)^2 \geq 4ab \Rightarrow ab \leq \frac{1}{4}$</p> <p>Do đó: $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{ab}\right)^2 \geq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{4}}\right) = 12,5$</p>	 <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,75</p> <p>0,5</p> <p>0,75</p>

Bài 4 (3,0đ)	<p>Ta có $E = (x^2 + y^2) + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) + 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$</p> <p>Áp dụng BĐT: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ với $a > 0; b > 0$.</p> <p>Ta có $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) \geq \frac{4}{x^2 + y^2} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq 1$</p> <p>Áp dụng BĐT: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ với $a > 0; b > 0$.</p> <p>Ta có $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geq 4$</p> <p>Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $E = 9$. Dấu “=” xảy ra khi $x = y = \sqrt{2}$</p>	0,5 1,0 1,0 0,5
Bài 5 (4,0đ)	 <p>- Vẽ hình đúng</p> <p>- Gọi E là trung điểm của AM, chứng minh được: $IK \parallel BC, EI \parallel AB, EK \parallel AC$</p> <p>- Áp dụng định lý Ta-lét vào các tam giác DPA, DAQ. Suy ra: $\frac{DI}{DP} = \frac{DE}{DA} = \frac{DK}{DQ}$</p> <p>- Áp dụng định lý Ta-lét đảo vào tam giác DPQ, suy ra: $PQ \parallel IK$</p>	0,5 1,5 1,5 0,5
Bài 6 (4,0đ)	<p>Vẽ hình đúng</p>  <p>Xét hai tam giác ABC và OBC ta có :</p> $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot h_a \quad (1)$ $S_{OBC} = \frac{1}{2} BC \cdot x \quad (2)$ <p>Từ (1) và (2) ta suy ra : $\frac{x}{h_a} = \frac{S_{OBC}}{S_{ABC}}$</p>	0,5 0,5 1,0

Tương tự ta có	$\frac{y}{h_b} = \frac{S_{COA}}{S_{ABC}}$	0,5
	$\frac{z}{h_c} = \frac{S_{AOB}}{S_{ABC}}$	0,5
Từ đó tính được :	$M = \frac{S_{BOC} + S_{COA} + S_{AOB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$	1,0

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO — ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
Môn: Toán 9
Thời gian làm bài: 150 phút
 Đề gồm 01 trang

Bài 1: Cho biểu thức: A

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot \frac{1}{x+y+2\sqrt{xy}} + \frac{2}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)} : \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{xy\sqrt{xy}}$$

a, Rút gọn biểu thức A.

b, Tính giá trị biểu thức A khi $x = 3 + \sqrt{5}$; $y = 3 - \sqrt{5}$

Bài 2: Cho 3 số a, b, c $\neq 0$ thỏa mãn: $a \neq b \neq c$ và $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

$$P = \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}; \quad Q = \frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a}$$

Chứng minh rằng : $P \cdot Q = 9$.

Bài 3: Giải phương trình : $(4x - 1)\sqrt{x^2 + 1} = 2(x^2 + 1) + 2x - 1$.

Bài 4: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x - y + \sqrt{x} = \sqrt{y} \\ x + y + 18\sqrt{xy} = 4\sqrt{x} + 3\sqrt{y} + 13 \end{cases}$$

Bài 5: Cho 3 số x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$ và $x^4 + y^4 + z^4 = 3xyz$. Hãy tính giá trị của biểu thức $M = x^{2006} + y^{2006} + z^{2006}$

Bài 6: Cho Parabol (P) có phương trình $y = x^2$ và điểm A(3;0) ; Điểm M thuộc (P) có hoành độ a.

a) Xác định a để đoạn thẳng AM có độ dài ngắn nhất .

b) Chứng minh rằng khi AM ngắn nhất thì đường thẳng AM vuông góc với tiếp tuyến của (P) tại điểm M.

Bài 7: Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $x^3 + x^2 + x + 1 = 2003^y$

Bài 8: Cho tam giác ABC vuông ở A. I là trung điểm của cạnh BC, D là một điểm bất kỳ trên cạnh BC. Đường trung trực của AD cắt các đường trung trực của AB, AC theo thứ tự tại E và F.

- a) Chứng minh rằng: 5 điểm A,E,I,D,F cùng thuộc một đường tròn.
 b) Chứng minh rằng: $AE.AC = AF.AB$.
 c) Cho $AC = b$; $AB = c$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AEF theo b, c

Bài 9: Cho tam giác ABC cân tại A. Một điểm P di động trên BC. Qua P vẽ $PQ \parallel AC$ ($Q \in AB$) và $PR \parallel AB$ ($R \in AC$). Tìm quỹ tích các điểm D đối xứng với P qua QR.

Hướng dẫn chấm

Bài	Lời giải	Biểu điểm
1	<p>a) ĐKXD : $x > 0 ; y > 0 ; x \neq y$</p> $A = \sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot \frac{1}{x+y+2\sqrt{xy}} + \frac{2}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)} : \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{xy\sqrt{xy}}$ $= \sqrt{\frac{x+y}{xy \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} + \frac{2(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^3 \cdot (\sqrt{x} \cdot \sqrt{y})}} \cdot \frac{xy\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ $= \sqrt{\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{xy(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}} \cdot \frac{xy\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ $= \frac{1}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{xy\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ <p>b) Với $x = 3 + \sqrt{5}$ và $y = 3 - \sqrt{5}$ ta có : $x > y$ do đó</p> $A = \frac{xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} > 0$ <p>Mà $A^2 = \frac{(xy)^2}{x+y-2\sqrt{xy}} = \frac{[(3+\sqrt{5}) \cdot (3-\sqrt{5})]^2}{(3+\sqrt{5}) + (3-\sqrt{5}) - 2\sqrt{3^2 - (\sqrt{5})^2}} = \frac{4^2}{6-2 \cdot 2} = 8$</p> <p>Vậy : $A = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$</p>	<p>0,25</p> <p>0,75</p> <p>0,25</p> <p>0,75</p>
2	<p>Ta có : $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ $\Leftrightarrow (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) = 0$ (1)</p> <p>Mà $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \neq 0$ (Do $a \neq b \neq c$)</p>	<p>0,5</p>

	<p>Do đó:(1) $\Leftrightarrow a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -c ; a + c = -b ; b + c = -a$ (2)</p> <p>Mặt khác :</p> $P = \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} = \frac{ab(b-a) + bc(b-c) + ac(c-a)}{abc}$ $P = \frac{ab(a-b) + b^2c - bc^2 + ac^2 - a^2c}{abc} = \frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{abc} \quad (3)$ <p>Hơn nữa :</p> <p>Đặt $\begin{cases} a-b = z \\ b-c = x \\ c-a = y \end{cases}$ Ta có $\begin{cases} x-y = a+b-2c = -3c \\ y-z = b+c-2a = -3a \\ z-x = a+c-2b = -3b \end{cases}$ (do (2))</p> <p>Vì thế :</p> $Q = \frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} = -\frac{1}{3} \left(\frac{x-y}{z} + \frac{y-z}{x} + \frac{z-x}{y} \right)$ $= -\frac{1}{3} \cdot \frac{(x-y) \cdot (y-z) \cdot (x-z)}{xyz} \quad (\text{Biến đổi tương tự rút gọn P})$ $= -\frac{1}{3} \cdot \frac{(-3c) \cdot (-3a) \cdot [-(-3b)]}{(a-b) \cdot (b-c) \cdot (c-a)}$ $= \frac{-9abc}{(a-b)(b-c)(c-a)} \quad (4)$ <p>Từ (3) và (4) ta có : $P \cdot Q = \frac{(a-b) \cdot (b-c) \cdot (a-c)}{abc} \cdot \frac{-9abc}{(a-b) \cdot (b-c) \cdot (c-a)} = 9$</p> <p>Vậy $P \cdot Q = 9$</p>	<p>0,5</p> <p>0,75</p> <p>0,25</p>
3	$(4x-1)\sqrt{x^2+1} = 2(x^2+1) + 2x-1 \quad (5)$ <p>Đặt $\sqrt{x^2+1} = y$ ($y \geq 1$) Ta có :</p> $(5) \Leftrightarrow (4x-1) \cdot y = 2y^2 + 2x - 1$ $\Leftrightarrow 2y^2 - 4xy + 2x + y - 1 = 0$ $\Leftrightarrow (2y^2 - 4xy + 2y) - (y - 2x + 1) = 0$ $\Leftrightarrow 2y(y - 2x + 1) - (y - 2x + 1) = 0$ $\Leftrightarrow (y - 2x + 1)(2y - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = \frac{1}{2} < 1 (\text{loại}) \end{cases}$ $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 2x - 1$ $\Leftrightarrow x^2 + 1 = 4x^2 - 4x + 1$ $\Leftrightarrow x(3x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$	<p>0,25</p> <p>1,0</p> <p>0,75</p>
4	$(I) \begin{cases} x - y + \sqrt{x} = \sqrt{y} (a) \\ x + y + 18\sqrt{xy} = 4\sqrt{x} + 3\sqrt{y} + 13(b) \end{cases} \quad (\text{ĐKXĐ : } x \geq 0; y \geq 0)$	

	<p>Ta có :</p> <p>(a) $\Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y} + 1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y}$ $\Leftrightarrow x = y$ thế vào (b) ta được :</p> <p>$2x + 18x = 4\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + 13 \Leftrightarrow 20x - 7\sqrt{x} - 13 = 0$ (6)</p> <p>Đặt $\sqrt{x} = t$ ($t \geq 0$) ta có :</p> <p>(6) $\Leftrightarrow 20t^2 - 7t - 13 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{-13}{20} < 0 \text{(loại)} \end{cases}$</p> <p>$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$</p> <p>Vậy hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x, y) = (1, 1)$</p>	<p>1,0</p> <p>1,0</p>
--	---	-----------------------