

BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN VÀ RÚT GỌN BIỂU THỨC

CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

Nếu a là một số và b là một số không âm thì $\sqrt{a^2b} = |a|\sqrt{b}$.

* Khi tính toán với những căn thức bậc hai mà biểu thức dưới dấu căn có mẫu, ta thường khử mẫu của biểu thức lấy căn (tức là biến đổi căn thức bậc hai đó thành một biểu thức mà trong căn thức không còn mẫu).

Ví dụ:

$$\text{a) } \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = |3|\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{b) } \sqrt{(-5)^2 \cdot 7} = \sqrt{(-5)^2} \cdot \sqrt{7} = |-5| \cdot \sqrt{7} = 5\sqrt{7}$$

$$\text{c) } \sqrt{x^2y} \text{ (với } x \geq 0, y \geq 0)$$

$$= \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y} = |x|\sqrt{y} = x\sqrt{y}$$

$$\text{d) } \sqrt{x^3y^2} \text{ (với } x \geq 0, y < 0)$$

$$= \sqrt{(xy)^2 x} = \sqrt{(xy)^2} \cdot \sqrt{x}$$

$$= |xy|\sqrt{x} = -xy\sqrt{x}$$

2. Đưa thừa số vào trong dấu căn

+ Nếu a và b là hia số không âm thì $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$

+ Nếu a là số âm và b là số không âm thì $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2b}$.

Ví dụ:

$$\text{a) } \frac{1}{2}\sqrt{8} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 8} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 8} = \sqrt{2}$$

$$\text{b) } -3\sqrt{5} = -\sqrt{3^2 \cdot 5} = -\sqrt{45}$$

$$\text{c) } x\sqrt{\frac{1}{x}} \text{ (với } x > 0)$$

$$= \sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x}} = \sqrt{x}$$

$$\text{d) } y\sqrt{\frac{2}{3y}} \text{ (với } y < 0)$$

$$= -\sqrt{y^2 \cdot \frac{2}{3y}} = -\sqrt{\frac{2}{3}}y$$

3. Trục căn thức ở mẫu

+ Với các biểu thức A, B và $B > 0$, ta có $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$

+ Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0, A \neq B^2$, ta có:

$$\frac{C}{\sqrt{A+B}} = \frac{C(\sqrt{A}-B)}{A-B^2}; \quad \frac{C}{\sqrt{A-B}} = \frac{C(\sqrt{A}+B)}{A-B^2}$$

+ Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0, B \geq 0, A \neq B^2$, ta có:

$$\frac{C}{\sqrt{A+\sqrt{B}}} = \frac{C(\sqrt{A}-\sqrt{B})}{A-B}; \quad \frac{C}{\sqrt{A-\sqrt{B}}} = \frac{C(\sqrt{A}+\sqrt{B})}{A-B}$$

4. Rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai

Khi rút gọn biểu thức có chứa căn thức bậc hai, ta cần phối hợp các phép tính (cộng, trừ, nhân, chia) và các phép biến đổi đã học (đưa thừa số ra ngoài hoặc vào trong dấu căn; khử mẫu của biểu thức lấy căn; trục căn thức ở mẫu).

B. Bài tập

Dạng 1: Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

I. Cách giải:

Để đưa thừa số ra ngoài dấu căn, ta có 2 bước:

Bước 1: Chia các số trong căn thành các số chính phương 4, 9, 16, 25, 36,...

Bước 2: Dùng công thức: Với $B \geq 0$, ta có:

$$\sqrt{A^2 B} = \sqrt{A^2} \cdot \sqrt{B} = |A| \cdot \sqrt{B} = \begin{cases} A\sqrt{B} & \text{khi } A \geq 0 \\ -A\sqrt{B} & \text{khi } A < 0 \end{cases}$$

II. Bài toán

Bài 1: Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

- | | |
|-----------------|------------------|
| a) $\sqrt{45}$ | b) $\sqrt{2400}$ |
| c) $\sqrt{147}$ | d) $\sqrt{1,25}$ |
| e) $\sqrt{12}$ | f) $3\sqrt{27}$ |
| g) $5\sqrt{48}$ | h) $\sqrt{45}$ |

Lời giải

- | | |
|---------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| a) $\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$ | b) $\sqrt{2400} = \sqrt{400 \cdot 6} = 20\sqrt{6}$ |
| c) $\sqrt{147} = \sqrt{49 \cdot 3} = 7\sqrt{3}$ | d) $\sqrt{1,25} = \sqrt{0,25 \cdot 5} = 0,5\sqrt{5}$ |
| e) $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$ | f) $3\sqrt{27} = 3\sqrt{3^2 \cdot 3} = 9\sqrt{3}$ |
| g) $5\sqrt{48} = 5\sqrt{16 \cdot 3} = 20\sqrt{3}$ | h) $\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$ |

Bài 2: Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

- | | |
|----------------|-----------------|
| a. $\sqrt{8}$ | b. $\sqrt{24}$ |
| c. $\sqrt{52}$ | d. $\sqrt{18}$ |
| e. $\sqrt{45}$ | f. $\sqrt{99}$ |
| g. $\sqrt{72}$ | h. $\sqrt{108}$ |

i. $\sqrt{180}$

k. $\sqrt{540}$

Bài 3: Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a. $\sqrt{75}$

b. $\sqrt{125}$

c. $\sqrt{175}$

d. $\sqrt{48}$

e. $\sqrt{80}$

f. $\sqrt{176}$

g. $\sqrt{98}$

h. $\sqrt{147}$

i. $\sqrt{245}$

k. $\sqrt{343}$

Bài 4: Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a) $\sqrt{50 \cdot 6}$

b) $\sqrt{14 \cdot 21}$

c) $\sqrt{32 \cdot 45}$

d) $\sqrt{125 \cdot 27}$

Lời giải

a) $\sqrt{50 \cdot 6} = \sqrt{100 \cdot 3} = 10\sqrt{3}$

b) $\sqrt{14 \cdot 21} = \sqrt{7 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3} = 7\sqrt{6}$

c) $\sqrt{32 \cdot 45} = \sqrt{16 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 5} = \sqrt{16 \cdot 9 \cdot 10} = 4 \cdot 3\sqrt{10} = 12\sqrt{10}$

d) $\sqrt{125 \cdot 27} = \sqrt{25 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 3} = \sqrt{25 \cdot 9 \cdot 5} = 5 \cdot 3\sqrt{5} = 15\sqrt{5}$

Bài 5: Viết gọn các biểu thức sau

a. $\sqrt{25 \cdot 90}$

b. $\sqrt{96 \cdot 125}$

c. $\sqrt{75 \cdot 54}$

d. $\sqrt{245 \cdot 35}$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{25 \cdot 90} = 15\sqrt{10}$

b) Ta có: $\sqrt{96 \cdot 125} = \sqrt{16 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 25} = 20\sqrt{30}$

c) Ta có: $\sqrt{75 \cdot 54} = 45\sqrt{2}$

d) Ta có: $\sqrt{245 \cdot 35} = \sqrt{49 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7} = 35\sqrt{7}$

Bài 6: Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a) $\sqrt{18x}$

b) $\sqrt{75x^2y}$

c) $\sqrt{605x^3y^2}$

d) $\sqrt{128(x-y)^2}$

e) $\sqrt{150(4x^2 - 4x + 1)}$

f) $\sqrt{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$

Lời giải

a) $\sqrt{18x} = \sqrt{9 \cdot 2x} = 3\sqrt{2x}$ với $x \geq 0$

b) $\sqrt{75x^2y} = \sqrt{25x^2 \cdot 3y} = 5|x|\sqrt{3y}$ với $y \geq 0$

$$= \begin{cases} 5x\sqrt{3y} & (x \geq 0) \\ -5x\sqrt{3y} & (x < 0) \end{cases}$$

$$c) \sqrt{605x^3y^2} = \sqrt{121x^2y^2 \cdot 5x} = 11x|y|\sqrt{5x} \text{ với } x \geq 0$$

$$= \begin{cases} 11xy\sqrt{5x} & (y \geq 0) \\ -11xy\sqrt{5x} & (y < 0) \end{cases}$$

$$d) \sqrt{128(x-y)^2} = \sqrt{64(x-y)^2 \cdot 2} = 8|x-y|\sqrt{2}$$

$$= \begin{cases} 8(x-y)\sqrt{2} & (x \geq y) \\ 8(y-x)\sqrt{2} & (x < y) \end{cases}$$

$$e) \sqrt{150(4x^2 - 4x + 1)} = \sqrt{25 \cdot 6(2x-1)^2} = 5|2x-1|\sqrt{6}$$

$$= \begin{cases} 5(2x-1)\sqrt{6} & \left(x \geq \frac{1}{2}\right) \\ 5(1-2x)\sqrt{6} & \left(x < \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$f) \sqrt{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} = \sqrt{(x-2)^3} = \sqrt{(x-2)^2(x-2)}$$

$$= (x-2)\sqrt{x-2} \text{ với } x \geq 2.$$

Bài 7: Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a. $\sqrt{27x^2} (x \geq 0)$

b. $\sqrt{8xy^2} (x \geq 0; y \leq 0)$

c. $\sqrt{25x^3} (x > 0)$

d. $\sqrt{48xy^4} (x \geq 0; y \in R)$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{27x^2} = \sqrt{(3x)^2 \cdot 3} = |3x|\sqrt{3} = 3\sqrt{3}x (x \geq 0)$

b) Ta có: $\sqrt{8xy^2} = \sqrt{(2y)^2 \cdot 2x} = |2y|\sqrt{2x} = -2y\sqrt{2x} (x \geq 0; y \leq 0)$

c) Ta có: $\sqrt{25x^3} = 5x\sqrt{x} (x > 0)$

d) Ta có: $\sqrt{48xy^4} (x \geq 0; y \in R) = 4y^2\sqrt{3x} (y^2 \geq 0)$

Bài 8: Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a. $\sqrt{32a}$ với $a \geq 0$

b. $\sqrt{75a}$ với $a \geq 0$

c. $\sqrt{80a^2}$ với $a \geq 0$

d. $\sqrt{15 \cdot 12a^2}$ với $a < 0$

e. $\sqrt{28x^2y^4}$ với $x < 0$

f. $\sqrt{54x^4y^2}$ với $y \geq 0$

g. $\sqrt{125(x-1)^3}$

h. $\sqrt{192(x+3)^5}$

Lời giải

g) Điều kiện xác định $x \geq 1$

Ta có: $\sqrt{125(x-1)^3} = \sqrt{25 \cdot 5 \cdot (x-1)^2 \cdot (x-1)}$

$$= |5(x-1)| \sqrt{5(x-1)}$$

h) Điều kiện xác định $x \geq -3$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \sqrt{192(x+3)^5} &= |8(x+3^2)| \cdot \sqrt{3(x+3)} \\ &= 8(x+3^2) \cdot \sqrt{3(x+3)}. \end{aligned}$$

Bài 9: Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a. $\sqrt{27x^2}$ ($x \geq 0$)

b. $\sqrt{8xy^2}$ ($x \geq 0; y \leq 0$)

c. $\sqrt{25x^3}$ ($x > 0$)

d. $\sqrt{48xy^4}$ ($x \geq 0; y \in \mathbb{R}$)

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{27x^2} = \sqrt{(3x)^2 \cdot 3} = |3x| \sqrt{3} = 3\sqrt{3}x$ ($x \geq 0$)

b) Ta có: $\sqrt{8xy^2} = \sqrt{(2y)^2 \cdot 2x} = |2y| \sqrt{2x} = -2y\sqrt{2x}$ ($x \geq 0; y \leq 0$)

c) Ta có: $\sqrt{25x^3} = 5x\sqrt{x}$ ($x > 0$)

d) Ta có: $\sqrt{48xy^4}$ ($x \geq 0; y \in \mathbb{R}$) = $4y^2\sqrt{3x}$ ($y^2 \geq 0$)

Bài 10: Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a. $\sqrt{32a}$ với $a \geq 0$

b. $\sqrt{75a}$ với $a \geq 0$

c. $\sqrt{80a^2}$ với $a \geq 0$

d. $\sqrt{15 \cdot 12a^2}$ với $a < 0$

e. $\sqrt{28x^2y^4}$ với $x < 0$

f. $\sqrt{54x^4y^2}$ với $y \geq 0$

g. $\sqrt{125(x-1)^3}$

h. $\sqrt{192(x+3)^5}$

Lời giải

g) Điều kiện xác định $x \geq 1$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \sqrt{125(x-1)^3} &= \sqrt{25 \cdot 5 \cdot (x-1)^2 \cdot (x-1)} \\ &= |5(x-1)| \sqrt{5(x-1)} \end{aligned}$$

h) Điều kiện xác định $x \geq -3$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \sqrt{192(x+3)^5} &= |8(x+3^2)| \cdot \sqrt{3(x+3)} \\ &= 8(x+3^2) \cdot \sqrt{3(x+3)} \end{aligned}$$