Bài 77.

Cho đường tròn *(O)*, đường kính *AB* cố định, một điểm *I* nằm giữa *A* và *O* sao cho $AI = \frac{2}{3}AO$. Kẻ dây *MN* vuông góc với *AB* tại *I*. Gọi *C* là điểm tùy ý thuộc cung lớn *MN* sao cho *C* không trùng với *M*, *N* và *B*, *AC* cắt *MN* tại *E*.

a) Chứng minh tứ giác *IECB* nội tiếp.

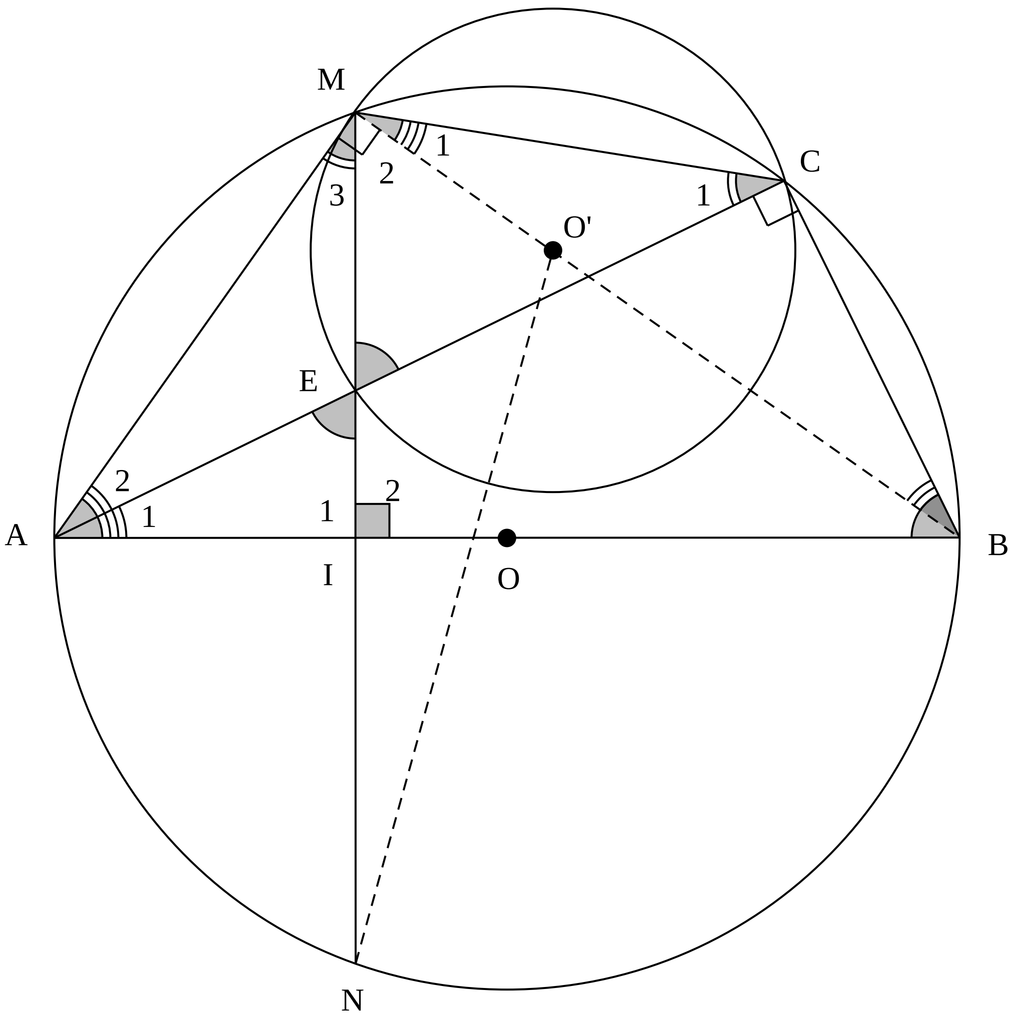
b) Chứng minh $\Delta AME \backsim \Delta ACM$ và $AM^2 = AE.AC$.

c) Chứng minh $AE.AC - AI.IB = AI^2$.

d) Gọi *O'* là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔCME. Chứng minh *M*, *O'*, *B* thẳng hàng. Hãy xác định vị trí điểm *C* sao cho *NO'* nhỏ nhất.

(Trích đề thi TS vào 10 THPT - TP Hà Nội 2002-2003)

Hướng dẫn giải:



a) Ta có: $AO \perp MN = I$ (gt) $\Rightarrow EIB = 90^\circ$ (Vì: $E \in MN$)

Mà: $ACB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow ECB = 90^\circ$ (Vì: $E \in AC$) $\Rightarrow EIB + ECB = 180^\circ$

$\Rightarrow \square\ IECB$ nội tiếp (vì: $EIB; ECB$ đối nhau).

b) Ta có: $AMB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow AMC = AMB + M_1 = 90^\circ + M_1$ (1)

Mà: $AEM = AIE + A_1 = 90^\circ + A_1$ (2) (góc ngoài ΔAIE)

Mặt khác: $A_1 = M_1 = \frac{1}{2}BC$ (góc nội tiếp chắn BC)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AEM = AMC$

Xét ΔAEM và ΔAMC có: $\begin{cases} A\ chung \\ AEM = AMC\ (cmt) \end{cases} \Rightarrow \Delta AEM \backsim \Delta AMC\ (g.g)$

Vì: $\Delta AEM \backsim \Delta AMC\ (cmt) \Rightarrow \frac{AE}{AM} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow AM^2 = AE.AC$ (đpcm)

c) Xét ΔAMI và ΔMBI có: $\begin{cases} I_1 = I_2 = 90^\circ \\ AMI = MBI\ (hay\ MBA) \end{cases}$ (Cùng phụ với BAM)

$\Rightarrow \Delta AMI \backsim \Delta MBI\ (g.g) \Rightarrow \frac{MI}{BI} = \frac{AI}{MI} \Rightarrow MI^2 = IA.IB$ (3)

Mà: $AM^2 = AE.AC\ (cmt)$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow AE.AC - IA.IB = AM^2 - MI^2 = AI^2$ (đpcm)

d) Ta có: $C_1 = M_3\ \left(Do: \Delta AEM \backsim \Delta AMC\ (cmt)\right)$

Mà: $C_1 = \frac{1}{2}ME$ (góc nội tiếp chắn ME) $\Rightarrow M_3 = \frac{1}{2}ME$

$\Rightarrow MA$ là tiếp tuyến tại *M* của *(O')* $\Rightarrow MA \perp MO'$ (5)

Mặt khác: $MA \perp MB\ (cmt)$ (6)

Từ (5) và (6) $\Rightarrow M, O', B$ thẳng hàng.

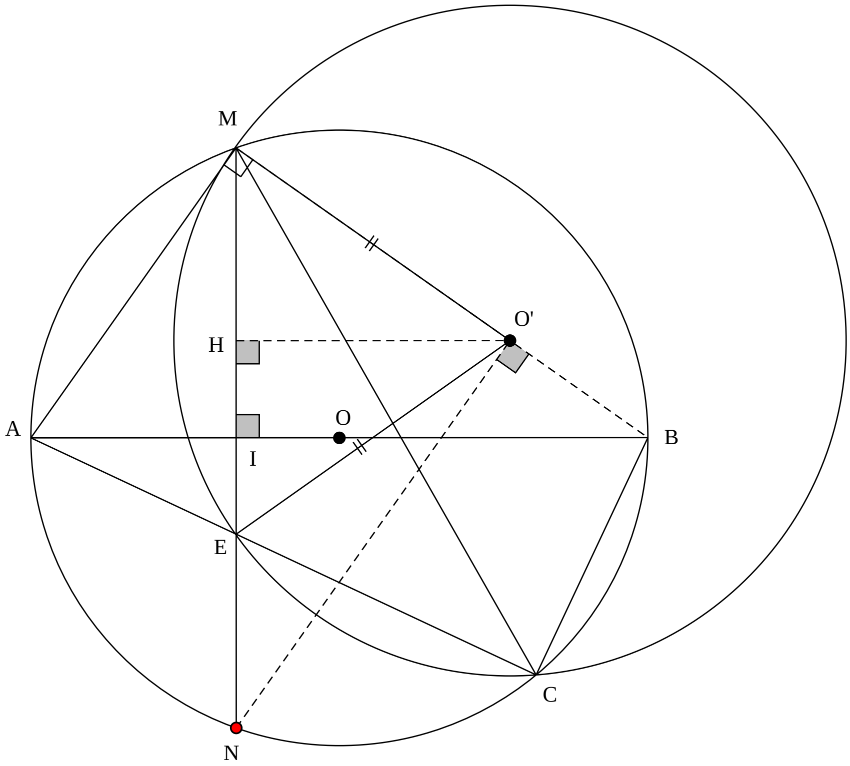
Ta thấy: *NO'* nhỏ nhất khi *O'* là hình chiếu vuông góc của *N* trên *MB*.

Hay: $NO' \perp MB = O'$

Từ O' kẻ đường thẳng vuông góc với MN tại H. Lấy điểm E đối xứng với M qua H $\Rightarrow O'M = O'E \Rightarrow E, M \in (O')$

Vẽ đường tròn *(O')* cắt *(O)* tại *C*.

Vậy *C* thuộc NB của đường tròn *(O)* sao cho *OC = OM = OE* thì *NO'* nhỏ nhất.



Bài 78.

Cho đường tròn *(O)* đường kính *AB* = 2*R*. Gọi *M* là một điểm bất kỳ thuộc *(O) (M* khác *A, B)*. Các tiếp tuyến của đường tròn *(O)* tại *A* và *M* cắt nhau tại *E*. Vẽ *MP* vuông góc với *AB* tại *P*, vẽ *MQ* vuông góc với *AE* tại *Q*.

a) Chứng minh tứ giác *AEMO* nội tiếp và tứ giác *APMQ* là hình chữ nhật.

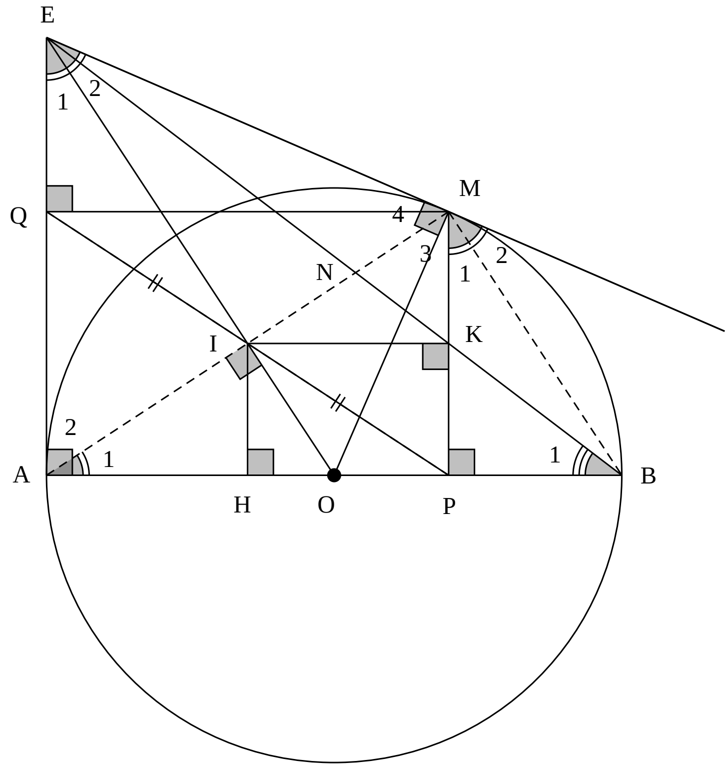
b) Gọi *I* là trung điểm của *PQ*. Chứng minh O, I, E thẳng hàng.

c) Gọi *K* là giao điểm của *EB* và *MP*. Chứng minh rằng $\triangle AEO \backsim \triangle PMB$ và *KM* = *KP*.

d) Đặt *AP* = *x*. Tính *MP* theo *R* và *x*. Tìm vị trí của điểm *M* trên đường tròn *(O)* để hình chữ nhật *APMQ* có diện tích lớn nhất.

(Trích đề thi TS vào 10 THPT - TP Hồ Chí Minh 2010-2011)

Hướng dẫn giải:



a) Ta có: $EMO = EAO = 90^\circ\ (gt) \Rightarrow EMO + EAO = 180^\circ$

$\Rightarrow \square AEMO$ nội tiếp (vì: $EAO; EMO$ đối nhau).

Xét $\Rightarrow \square AQMP$ có: $Q = A = P = 90^\circ\ (gt) \Rightarrow \square AQMP$ là hình chữ nhật.

b) Vì: $IQ = IP\ (gt) \Rightarrow IA = IM$ (T/c của hình chữ nhật)

Mà: $EA = EM$ (T/c 2 tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow EI \perp AM$ (T/c tam giác cân) (1)

Mặt khác: $OI \perp AM\ (Do: IA = IM)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow E, O, I$ thẳng hàng (đpcm).

c) Ta có: $E_1 = E_2$ (T/c 2 tiếp tuyến cắt nhau) và $A_1 = M_1$ (cùng phụ với B)

Mà: $A_1 = E_2$ (Vì: $\square AEMO$ nội tiếp) $\Rightarrow E_1 = M_1$

Xét $\square AEO$ và $\square PMB$ có: $\begin{cases} E_1 = M_1\ (cmt) \\ A = P = 90^\circ\ (gt) \end{cases} \Rightarrow \square AEO \backsim \square PMB\ (g.g)$

Do: $\begin{cases} A_1 = M_1\,(cmt) \\ A_1 = M_2 = \dfrac{1}{2}MB \end{cases} \Rightarrow M_1 = M_2 \Rightarrow$ MB là tia phân giác ngoài của $\square MKE$

$\Rightarrow \dfrac{BK}{BE} = \dfrac{MK}{ME}(1)$ (T/c đường phân giác trong tam giác)

Mặt khác: $\begin{cases} A_2 = M_4\,(cmt) \\ A_2 = M_3\,(So\,le\,trong) \end{cases} \Rightarrow M_3 = M_4 \Rightarrow$ MA là tia phân giác trong của $\square MKE$

Gọi N là giao điểm của EB và MA $\Rightarrow \dfrac{KN}{NE} = \dfrac{MK}{ME}(2)$ (T/c đường phân giác trong tam giác)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{KN}{NE} = \dfrac{BK}{BE}\left(= \dfrac{MK}{ME}\right)(3)$

Lại có: $MP//EA$. Theo Ta-Let $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{MK}{EA} = \dfrac{KN}{NE} \\ \dfrac{KP}{EA} = \dfrac{BK}{BE} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{MK}{EA} = \dfrac{KP}{EA} (Theo\,(3)) \Rightarrow MK = KP$ (đpcm)

d) Ta có: $AMB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \Delta AMB$ vuông tại M.

$\Rightarrow PM^2 = PA.PB$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông)

$\Rightarrow PM^2 = PA.(OB - OP) = x.(R - (x - R)) = x.(2R - x)$

$\Rightarrow PM = \sqrt{x.(2R - x)}$ (đvđd)

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên AB.

$\Rightarrow S_{AQMP} = 2S_{AMP} = 2.(S_{AIO} + S_{IMP}) = 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot IH.AP + 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot IK.MP$

Mà: $IH = \dfrac{1}{2}MP; IK = \dfrac{1}{2}AP$ (cmt)

$\Rightarrow S_{AQMP} = \dfrac{1}{2} \cdot MP.AP + \dfrac{1}{2} \cdot AP.MP = AP.MP$

Mặt khác: $AP.MP \overset{\text{Cô-Si}}{\leq} \dfrac{AP + MP}{2} \cdot$ Dấu "=" xảy ra $AP = MP$.

Hay: $\square AQMP$ là hình vuông (Tức M nằm chính giữa cung AB).

Bài 79.

Cho đường tròn *(O)* đường kính *AB*. Trên đường tròn *(O)* lấy điểm *C (C* khác *A, B* và *CA > CB).* Các tiếp tuyến của đường tròn *(O)* tại *A* và *C* cắt nhau tại *D*. Kẻ *CH* vuông góc với *AB* ($H \in AB$), *DO* cắt *AC* tại *E*.

a) Chứng minh tứ giác *OECH* nội tiếp.

b) Đường thẳng *CD* cắt đường thẳng *AB* tại *F*. Chứng minh rằng $2BCF + CFB = 90^\circ$.

c) *BD* cắt *CH* tại *M*. Chứng minh *EM // AB*.

Hướng dẫn giải: