10+ BÀI TẬP HÌNH HỌC LỚP 9 DÀNH CHO HSG – TAILIEUTHI.NET

Bài 65. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AM, BN, CP của tam giác ABC đồng quy tại H $(M \in BC, N \in AC, P \in AB)$.

a) Chứng minh tứ giác $MHNC$ nội tiếp đường tròn.

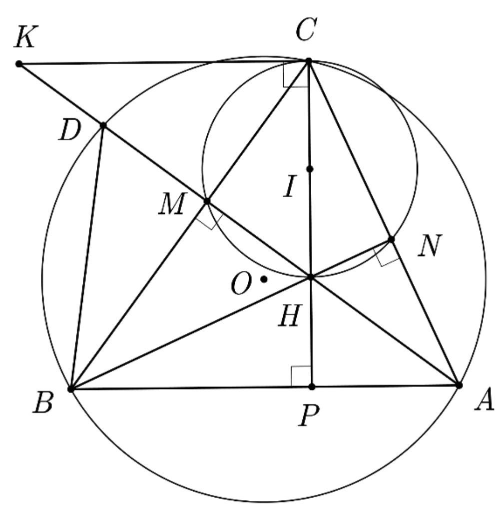
b) Kéo dài AH cắt (O) tại điểm thứ hai là D. Chứng minh $DBC = NBC$.

c) Tiếp tuyến tại C của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MHNC$ cắt đường thẳng AD tại K. Chứng minh rằng $KM.KH + HC^2 = KH^2$.

d) Tính giá trị của biểu thức $S = \dfrac{MH}{AM} + \dfrac{NH}{BN} + \dfrac{PH}{CP}$.

Lời giải

a)



Xét tứ giác $MHNC$ có $HMC + HNC = 180^\circ$, mà hai góc này đối nhau nên tứ giác $MHNC$ nội tiếp.

b)Ta có $DBC = CAD$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung CD).

Và $NBC = CAD$ (cùng phụ với góc ACB). Từ đó suy ra $DBC = NBC$.

c) ta có $KM.KH = KC^2$ từ đó suy ra $KM.KH + HC^2 = KH^2$ (py ta go)

d)Ta có $\dfrac{S_{BHC}}{S_{ABC}} = \dfrac{HM}{AM}; \dfrac{S_{AHB}}{S_{ABC}} = \dfrac{HP}{CP}; \dfrac{S_{AHC}}{S_{ABC}} = \dfrac{HN}{BN}$

$\Rightarrow \dfrac{MH}{AM} + \dfrac{NH}{BN} + \dfrac{PH}{CP} = \dfrac{S_{BHC} + S_{AHB} + S_{AHB}}{S_{ABC}} = 1.$

Bài 66. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp (O;R). Các đường cao BE, CF cắt nhau tại H và lần lượt cắt đường tròn (O) tại P và Q.

a) Chứng minh PQ//EF.

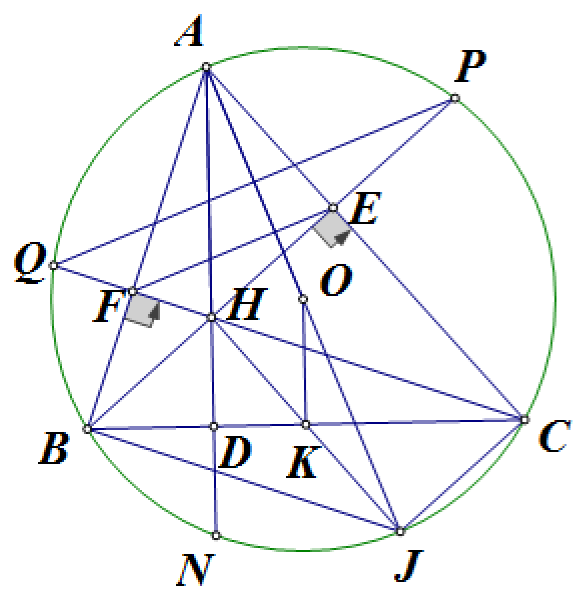
b) Chứng minh OA $\perp$ EF

c) Chứng minh rằng độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF không đổi khi A di động trên cung lớn BC của (O).

d) Tia AH lần lượt cắt BC và đường tròn (O) tại các điểm D và N. Chứng minh rằng

$$\frac{AD}{HD}+\frac{BE}{HE}+\frac{CF}{HF}\geq 9$$

Lời giải



a) Ta có $BEC = BFC = 90^0$ => đỉnh E, F cùng nhìn BC dưới góc vuông nên tứ giác BCEF nội tiếp => $EFC = EBC = PQC$ => EF//BC

b) do tứ giác BCEF nội tiếp =>

$ABE = ACF \Rightarrow AP = AQ \Rightarrow AO \perp PQ$

mà PQ//EF => $AO \perp EF$

c) Vẽ đường kính AJ của (O) .

Xét tứ giác BJCH có BH //CJ và CH //BJ

=> tứ giác BHCJ là hình bình hành;.

Gọi K là giao điểm của BC => KB = KC; HK = KJ => OK $\perp$ BC.

Mặt khác OA = OJ => OK là đường trung bình của tam giác AHJ => AH = 2OK

Mà BC cố định ; O cố định => OK không đổi => AH không đổi.

Do tứ giác AEHF nội tiếp đường tròn đường kính AH => AH là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF => bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF không đổi

d) ta có $\frac{AD}{HD}=\frac{S_{ABC}}{S_{BHC}};\frac{BE}{HE}=\frac{S_{ABC}}{S_{AHC}};\frac{CF}{HF}=\frac{S_{ABC}}{S_{ABH}}$

Đặt $S_{ABC}=1; S_{BHC}=a; S_{AHC}=b; S_{AHB}=c \Rightarrow a+b+c=1$

và $\frac{AD}{HD}+\frac{BE}{HE}+\frac{CF}{HF}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương ta có

$$a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc};\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge \sqrt[3]{\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}}$$

$$\Rightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 9 \text{ hay } \frac{AD}{HD}+\frac{BE}{HE}+\frac{CF}{HF}\ge 9.$$

Dấu = xảy ra khi a = b = c $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

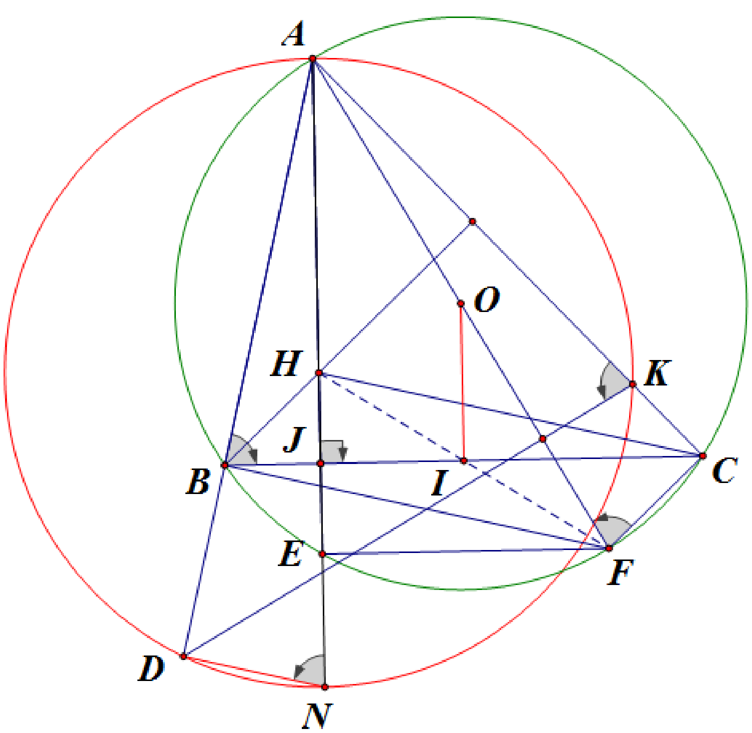
Bài 67. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O;R) có H là trực tâm của tam giác. Tia AH cắt (O) tại E. Kẻ đường kính AOF.

a) Chứng minh BC//EF và $BAE = CAF$

b) Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh H, I, F thẳng hàng và AH = 2OI.

c) Vẽ đường tròn tâm H bán kính HA, đường tròn này cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại D và K. Chứng minh AO ⊥ DK và D, J, K thẳng hàng (J là giao điểm của BC và AE)

d) Chứng minh rằng sinA + sinB + sinC <2(cosA + cosB + cosC)



a) BC//EF và $\widehat{BAE} = \widehat{CAF}$

*) ta có $\widehat{AEF} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) => AE $\perp$ EF

mà H là trực tâm nên AE $\perp$ BC

suy ra EF//BC (từ vuông góc đến song song).

*) ta có $\widehat{ABC} = \widehat{AFC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC)

mà $\widehat{ABC} + \widehat{BAE} = 90^0$; $\widehat{AFC} + \widehat{CAF} = 90^0 \left(\widehat{ACF} = 90^0\right)$

suy ra $\widehat{BAE} = \widehat{CAF}$

b) H, I, F thẳng hàng và AH = 2OI.

*) ta có H là trực tâm tam giác ABC nên CH $\perp$ AB; BH $\perp$ AC

mà $\widehat{ABF} = \widehat{ACF} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> BH//CF và BF//CH => tứ giác BHCF là hình bình hành

=> HF và BC cắt nhau tại trung điểm mỗi đường; do I là trung điểm của BC => HF đi qua I hay H, I, F thẳng hàng.

*) Xét tam giác AHF có OA = OF; IH = IF => OI là đường trung bình của tam giác

=> AH = 2OI

c) AO $\perp$ DK và D, J, K thẳng hàng (J là giao điểm của BC và AE)

*) Gọi giao điểm AH và đường tròn (H) là N

Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{AND}$ (tứ giác BDNJ nội tiếp)

$\widehat{ABC} = \widehat{AFC}; \widehat{AND} = \widehat{AKD}$ (các góc nội tiếp cùng chắn một cung)

=> $\widehat{AKD} = \widehat{AFC}$

Mà $\widehat{ACF} = 90^0 \Rightarrow AF \perp DK$ hay AO $\perp$ DK

*) Xem lại đề bài

d) Xét ΔABC ta có

sinA + sinB + sinC <2(cosA + cosB + cosC)

ta có $ACB = AFC;\ ABF = 90^\circ$

=> $BF = AF.cosF = AF.\ cosC = 2R.cosC$ (với R là bán kính (O)

Tương tự $CF = 2R.cosB$; $BC = 2R.sinA$ (vẽ thêm đường kính từ B);

Xét tam giác BCF có $BF + FC > BC \Leftrightarrow 2RcosC + 2RcosB > 2RsinA$

$\Leftrightarrow cosC + cosB > sinA$

Chứng minh tương tự ta có $cosA + cosB > sin\ C$; $cosA + cosC > sinB$

Cộng từng vế ta được $2\left(cosA + cosB + cosC\right) > sinA + sinB + sinC$

hay $sinA + sinB + sinC < 2\left(cosA + cosB + cosC\right)$.

Bài 68. Cho đường tròn $\left(O;R\right)$. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn vẽ tiếp tuyến MA, MB (A, B là các tiếp điểm). Lấy điểm C bất kỳ trên cung nhỏ AB (C khác A và B). Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của C trên AB, AM, BM.

a) Chứng minh tứ giác $AECD$ nội tiếp.

b) Chứng minh $CDE = CBA$.

c) Gọi I là giao điểm của AC và ED, K là giao điểm của CB và DF. Chứng minh $IK \parallel AB$.

d) Xác định vị trí của điểm C trên cung nhỏ AB để $AC^2 + CB^2$ nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó khi $OM = 2R$.

(Đề thi tuyển sinh THPT chuyên Lê Quý Đôn, tỉnh Bình Định,

năm học 2017 -2018)

Giải