Bài 50: Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính $AB.$ Trên tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B lấy điểm M sao cho $AB = BM$. Đường thẳng AM cắt đường tròn (O) tại C , gọi I là trung điểm của BM .

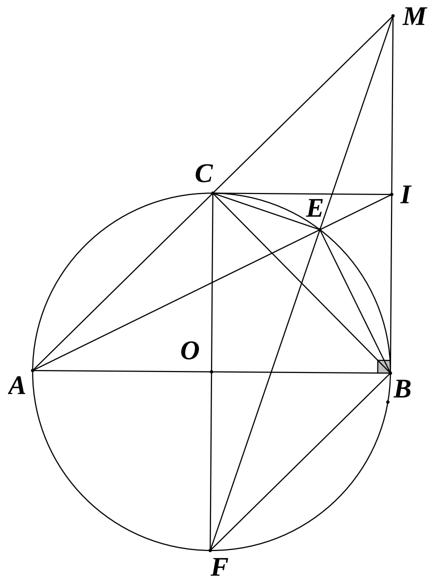
a) Chứng minh C là trung điểm của AM .

b) Chứng minh CI là tiếp tuyến của đường tròn (O)

c) Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại E . Chứng minh tứ giác $MCEI$ nội tiếp.

d) Đường thẳng ME cắt đường tròn tại điểm thứ hai là $F.$ Chứng minh ba điểm C,O,F thẳng hàng. Tính tích $ME.MF$ theo $R.$

Giải:



a) Ta có ACB 90 (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

ΔABM cân tại B ($AB=BM$) có BC là đường cao nên là đường trung tuyến

$\Rightarrow$ C là trung điểm của AM .

b) Ta có: $CA = CM$ và $IB = IM$ $\Rightarrow CI$ là đường trung bình của ΔABM .

$\Rightarrow CI //$AB $\qquad (1)$

Theo tính chất trung tuyến trong tam giác ΔAMB vuông tại B

$\Rightarrow CA = CB$

$\Rightarrow \Delta ABC$ cân tại C mà CO là đường trung tuyến nên CO là đường cao

$\Rightarrow CO \perp AB \qquad (2)$

Từ (1) và (2) $CI \perp CO$

$\Rightarrow CI$ là tiếp tuyến của (O).

c) Ta có: $CEA = \frac{1}{2}COA = \frac{1}{2}.90° = 45°$ (Hệ quả góc nội tiếp)

ΔABM vuông cân tại M $\Rightarrow AMB = 45°.$

Do đó $AMB = CEA = 45°$.

Tứ giác $MCEI$ có $CMI + CEI = CEA + CEI = 180°$ (Kề bù)

$\Rightarrow$ Tứ giác $MCEI$ nội tiếp

d) Ta có $EMI = EFC$ (Góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến cùng chắn EI)

$\Rightarrow CF//BM$ (So le trong).

Mặt khác $CO//BM$ (Cùng vuông góc AB)

Qua điểm C có $CF//BM$ và $CO//BM$ nên theo tiên đề Ơclit ta có C,O,F thẳng hàng.

Xét ΔMBE và ΔMFB có

BME chung.

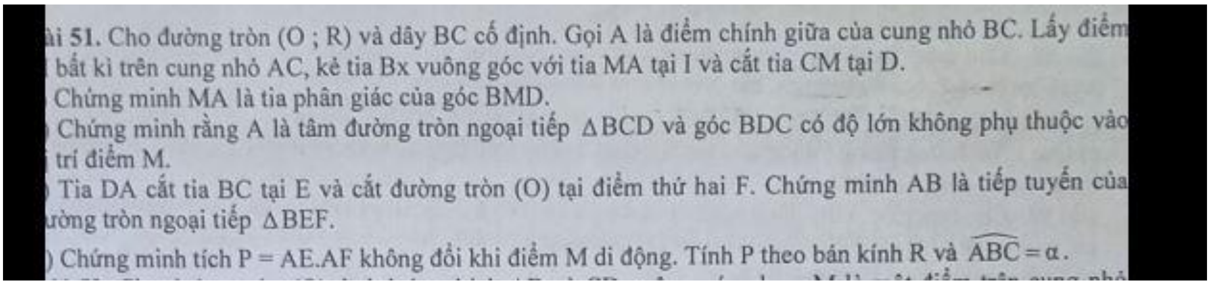
$MBE = MFB$ (Góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến cùng chắn EB).

$\Rightarrow \Delta MBE \backsim \Delta MFB$ (g.g).

$\Rightarrow \dfrac{MB}{ME} = \dfrac{MF}{MB}$.

$\Rightarrow ME.MF = MB^2 = AB^2 = (2R)^2 = 4R^2$.

Bài 51:


ài 51. Cho đường tròn (O ; R) và dây BC cố định. Gọi A là điểm chính giữa của cung nhỏ BC. Lấy điểm
bất kì trên cung nhỏ AC, kẻ tia Bx vuông góc với tia MA tại I và cắt tia CM tại D.
Chứng minh MA là tia phân giác của góc BMD.
Chứng minh rằng A là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD và góc BDC có độ lớn không phụ thuộc vào
trí điểm M.
Tia DA cắt tia BC tại E và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F. Chứng minh AB là tiếp tuyến của
ường tròn ngoại tiếp ΔBEF.
) Chứng minh tích P = AE.AF không đổi khi điểm M di động. Tính P theo bán kính R và $\widehat{ABC} = \alpha$.

Cho đường tròn $(O;R)$ và dây BC cố định. Gọi A là điểm chính giữa cung nhỏ BC. Lấy điểm M bất kì trên cung nhỏ AC, kẻ tia Bx vuông góc với tia MA tại I và cắt tia CM tại D.

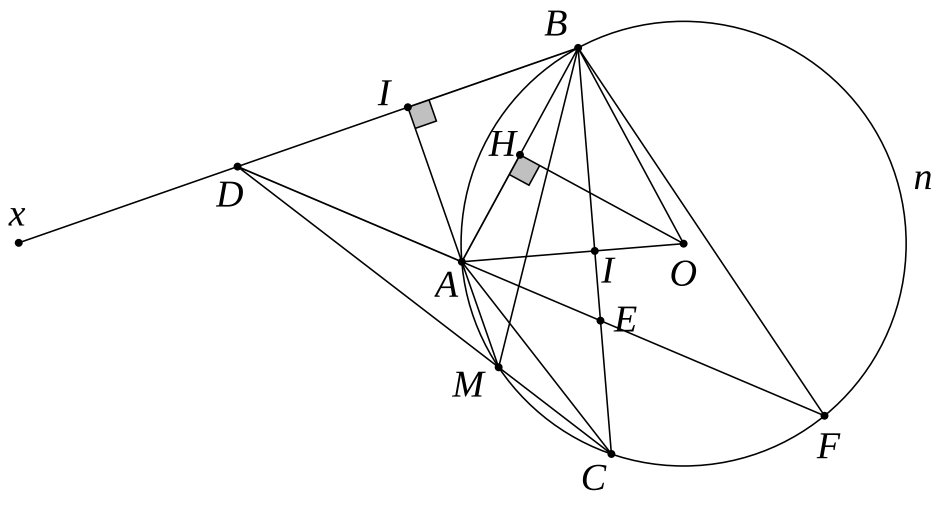
a) Chứng minh MA là tia phân giác của góc BMD.

b) Chứng minh A là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD và góc BDC có độ lớn không phụ thuộc vị trí điểm M.

c) Tia DA cắt tia BC tại E và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F. Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔBEF.

d) Chứng minh tích $P = AE.AF$ không đổi khi điểm M di động. Tính P theo bán kính R và $ABC = \alpha$.

Giải



a) Theo tính chất góc nội tiếp ta có: $BMA = \frac{1}{2} s\ \ AB$ và $BMC = \frac{1}{2} s\ \ BnC$.

$s\ \ BnC = 360° - s\ \ BC = 360° - 2s\ \ AB$ (Vì A là điểm chính giữa cung BC).

$\Rightarrow BMC = \frac{1}{2}\left(360° - 2s\ \ AB\right) = 180° - s\ \ AB$.

$DMB = 180° - BMC$ (Kề bù).

= $180° - \left(180° - s\ \ AB\right) = s\ \ AB$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $BMA = \frac{1}{2} DMB = DMA$ ($= \frac{1}{2} s\ \ AB$).

$\Rightarrow$ MA là tia phân giác của góc BMD.

b) Ta có $AB = AC$ $\Rightarrow$ $AB = AC$ (Liên hệ dây và cung)

ΔMBD có MI là đường cao và đường phân giác nên ΔMBD cân tại M .

$\Rightarrow MI$ là đường trung trực của BD.

$A \in BD$ $\Rightarrow AD = AB$ (Tính chất đường trung trực)

Do đó $AB = AC = AD$ nên A là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD.

Theo tính chất góc ngoài ΔBMC ta có: $BMC = MBD + MDB$

$BMC = 2.MDB$ ($MBD = MDB$ do ΔMDB cân tại M).

$\Rightarrow$ $MDB = \frac{1}{2} BMC = \frac{1}{4} s\ \ BnC$ (Không đổi do dây BC cố định).

c) Ta có $ABC = BFA$ (Các góc nội tiếp chắn các cung bằng nhau, $AC = AB$).

ΔBEF có $EFB = EBA$ và tia BA nằm ngoài ΔBEF nên AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔBEF .

d) Xét ΔABE và ΔAFB có:

BAF chung;

$ABE = AFB$ (Chứng minh trên).

$\Rightarrow \Delta ABE \square \Delta AFB$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{AE}{AB}$

$\Rightarrow P = AE.AF = AB^2$ (Không đổi).

Gọi I là giao điểm của BC và AO.

$AB = AC$ và $OB = OC$ nên OA là đường trung trực của $BC \Rightarrow AIB = 90^{\circ}$.

Kẻ $OH \perp AB$ tại H.

$\Rightarrow\ AH = BH = \dfrac{1}{2}AB$ (Quan hệ vuông góc đường kính và dây).

$AOI = AOH$ (Cùng phụ OAH).

$AH = OA.\sin AOH = OA.\sin ABI = R.\sin\alpha$.

$AB = 2AH = 2R.sin\alpha$.

$P = \left(2R\,sin\alpha\right)^2 = 4R^2\,sin\alpha$.

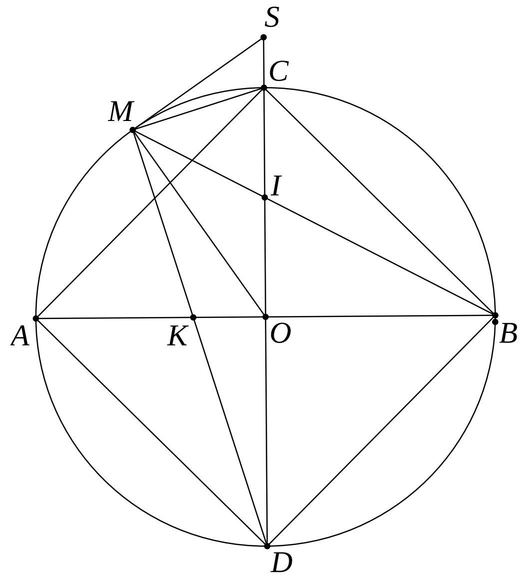
Bài 52: Cho đường tròn (O), hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau, M là một điểm trên cung nhỏ AC. Tiếp tuyến tại S. Gọi I là giao điểm của CD và MB.

a) Chứng minh tứ giác $AMIO$ nội tiếp.

b) Chứng minh: $MIC = MDB$ và $MSD = 2MBA$.

c) MD cắt AB tại K. Chứng minh $DK.DM$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M trên cung AC.

Giải:



a) Ta có: $AMI = 90°$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Xét tứ giác $AMIO$ có $AMI + AOI = 90° + 90° = 180°$ mà hai góc này đối nhau nên tứ giác $AMIO$ nội tiếp.

b) Vì hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau nên

$\Rightarrow s\ AC = s\ CB = s\ BD = s\ DA = 90°$. (1)

$MIC = \dfrac{1}{2}\left(s\ MC + s\ BD\right)$ (Góc có đỉnh nằm bên trong đường tròn) (2)

$= \frac{1}{2}\left(s \quad MC + s \quad AC\right)$ (Do $s \quad AC = s \quad BD$).

$= \frac{1}{2} s \quad MCB$

Mặt khác $MDB = \frac{1}{2} s \quad MCB$ (Tính chất góc nội tiếp)

$\Rightarrow \quad MIC = MDB$.

Ta có: $MBA = \frac{1}{2} s \quad AM$ (Tính chất góc nội tiếp)

$\Rightarrow 2MBA = s \quad AM \qquad (3)$

$MSD = \frac{1}{2}\left(s \quad MAD - s \quad MC\right)$

$= \frac{1}{2}\left(s \quad AM + s \quad AD - s \quad MC\right) = s \quad AM \qquad (4)$

Từ (3) và (4) suy ra $MSD = 2MBA$.

c) Ta có: $\Delta DOK \# \Delta DMC\left(g.g\right)$

$\Rightarrow \frac{DO}{DM} = \frac{DK}{DC}$

$\Rightarrow DK.DM = DO.DC = \frac{1}{2} DC.DC = \frac{DC^2}{2}$ (Không đổi)

Bài 53

Cho đường tròn (O) đường kính AB .Gọi K là điểm chính giữa cung AB ; M là điểm lưu động trên cung nhỏ AK (M khác hai điểm $A; K$).Lấy điểm N trên đoạn BM sao cho $BN = AM$

a)Chứng minh $AMK = BNK$

b)Chứng minh : tam giác MKN là tam giác vuông cân

c)Hai đường thẳng AM và OK cắt nhau tại D .Chứng minh MK là đường phân giác góc NMD

d)Chứng minh rằng đường thẳng qua N vuông góc BM luôn đi qua một điểm cố định

Lời giải :