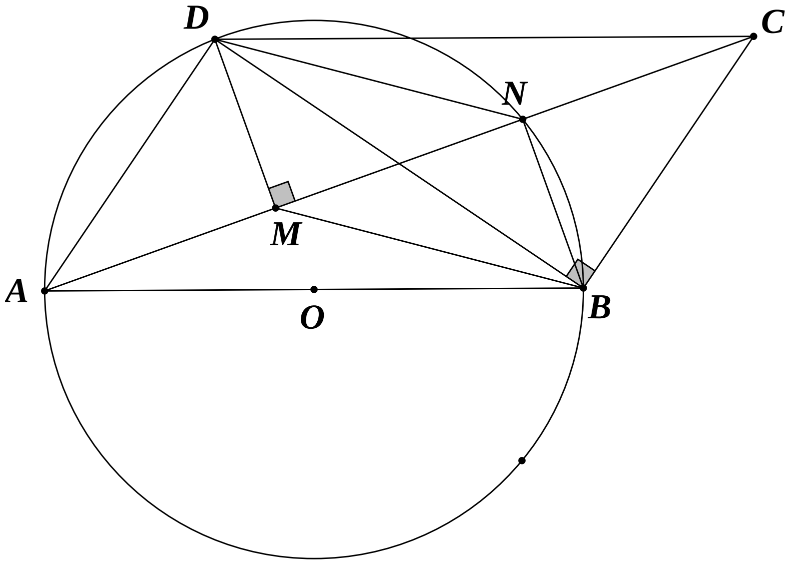
Bài 38: Cho hình bình hành ABCD có đỉnh D nằm trên đường tròn (O) đường kính AB = 2R. Hạ BN và DM cùng vuông góc với đường chéo AC.

a) Chứng minh tứ giác CBMD nội tiếp.

b) Chứng minh rằng DB.DC = DN.AC

c) Xác định vị trí điểm D để hình bình hành ABCD có diện tích lớn nhất và tính diện tích hình bình hành trong trường hợp này.

Giải:



a) Ta có $ADB \quad 90$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Nên AD ⊥ DB, mà CB // AD (ABCD là hình bình hành) suy ra CB ⊥ DB nên $DBC \quad 90$.

Xét tứ giác DMBC có $DMC \quad DBC \quad 90$ mà hai góc này cùng nhìn cạnh CD nên suy ra BMBC là tứ giác nội tiếp.

b) Vì CD // AB nên $DCA = CAB$ (so le trong)

Ta lại có $CAB = NAB = NDB$ (góc nội tiếp cùng chắn cung NB)

Suy ra $DCA = NDB$.

Xét DDAC và DNBD có

$DCA = NDB$ (cmt)

$DAC = NBD$ (góc nội tiếp cùng chắn cung ND)

Suy ra DDAC # DNBD (gg)

Nên ta có $\frac{DB}{DN} = \frac{AC}{DC} \qquad DB.DC = DN.AC$ (đpcm).

c) Nhận thấy $S_{ABCD} = 2S_{ADB} = 2.\frac{1}{2}.AD.DB$

Theo bất đẳng thức AM – GM thì suy ra

$$AD.DB \quad \frac{AD^2 + DB^2}{2} \quad \frac{AB^2}{2} \quad \frac{(2R)^2}{2} \quad 2R^2 .$$

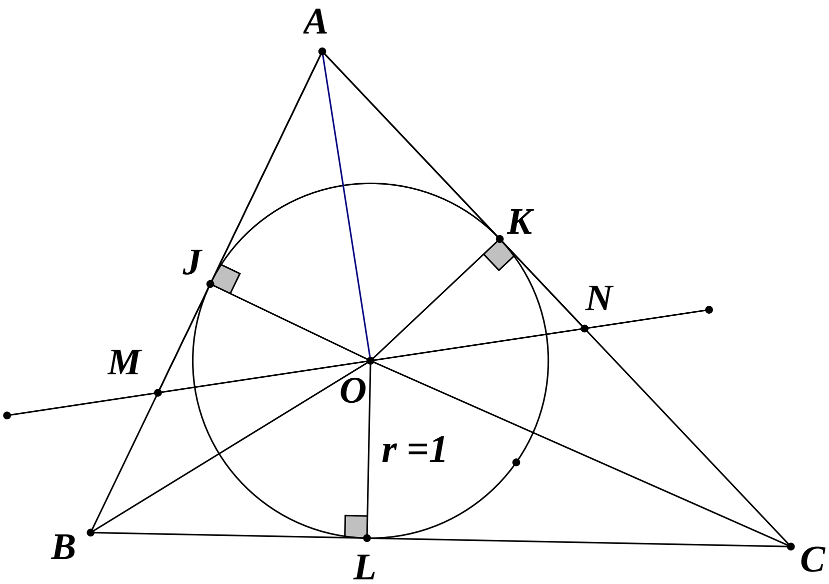
Đẳng thức xảy ra khi AD = DB hay D là điểm chính giữa cung AB.

Khi đó $S_{ABCD} = 2S_{ADB} = 2.\frac{1}{2}.AD.DB = 2R^2$.

Vậy để hình bình hành ABCD có diện tích lớn nhất thì D phải là điểm chính giữa cung AB và khi đó $S_{ABCD} = 2R^2$.

Bài 39: Cho đường tròn cố định tâm O, bán kính bằng 1. Tam giác ABC thay đổi và luôn ngoại tiếp đường tròn (O) . Một đường thẳng đi qua tâm O cắt các đoạn AB,AC lần lượt tại M và N . Xác định giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AMN.

Giải:



Gọi J,K,L lần lượt là các tiếp điểm của (O)với các cạnh AB,AC,BC của tam giác ABC như hình vẽ. Ta có: $S_{AMN} = S_{AMO} + S_{ANO} = \frac{1}{2}AM.OJ + \frac{1}{2}AN.OK$ = $\frac{1}{2}(AM + AN)$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM suy ra :

$S_{AMN} \quad \frac{1}{2}(AM \quad AN) \quad \sqrt{AM.AN}$. (1)

Mặt khác ta có : $S_{AMN} = \frac{1}{2}AM.AN.\sin MAN$

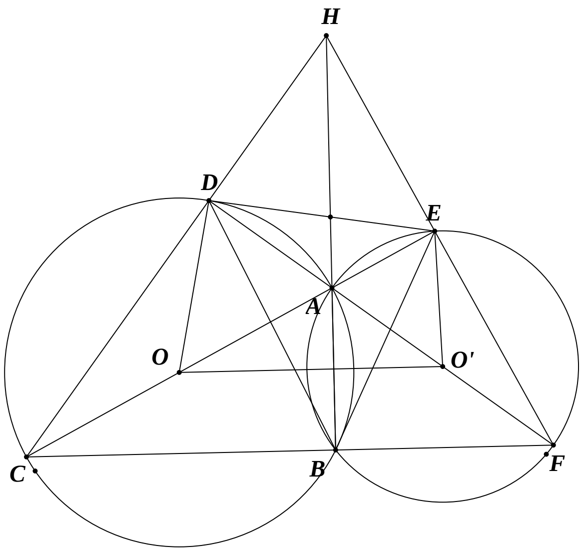
$AM.AN = \frac{2S_{AMN}}{\sin MAN} \quad 2S_{AMN}$ (2).

Từ (1) và (2) $\quad S_{AMN} \quad \sqrt{2S_{AMN}} \quad S_{AMN} \quad 2$.(dvdt)

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{matrix} AM = AN \\ \sin MAN = 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} AM = AN \\ MAN \quad 90 \end{matrix}$ DAMN vuông cân tại A.

Bài 40: Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ cắt nhau tại A và B (tâm của đường tròn này nằm ngoài đường tròn kia). Đường thẳng AO cắt đường tròn (O) tại C và cắt (O') tại E. Đường thẳng AO' cắt (O') tại F và cắt (O) tại D.

a) Chứng minh các tứ giác CDEF, ODEO' nội tiếp.
b) Chứng minh A là tâm đường tròn nội tiếp của ΔBDE .
c) Chứng minh các đường thẳng CD, EF, AB đồng quy.
Giải:



a) *) **Chứng minh CDEF nội tiếp:**

Nhận thấy ΔDOA cân tại O nên $ODA = OAD$

$\Delta AO'E$ cân tại O' nên $O'AE = AEO'$.

Mà $DAO = EAO'$ (đối đỉnh) $ODA = AEO'$.

Từ đó theo tính chất tổng ba góc trong một tam giác ta suy ra $DOA = AO'E$. (1)

Mặt khác $DBA = \frac{1}{2}DOA$ (góc nội tiếp bằng $\frac{1}{2}$ số đo góc ở tâm) (2)

và $ABE = \frac{1}{2}AO'E$ (góc nội tiếp bằng $\frac{1}{2}$ số đo góc ở tâm) (3).

Từ (1),(2) và (3) suy ra $DBA = EBA$. (4)

Lại có tứ giác ADCB nội tiếp (O) nên $DBA = DCA$ (cùng chắn cung DA) (5)

Tứ giác EABF nội tiếp (O') nên $ABE = AFE$ (6)

Từ (4), (5) và (6) suy ra $DCE = EFD$.

Xét tứ giác CDEF có $DCE = EFD$ (cmt) mà hai góc này cùng nhìn đoan DE dưới một cung. Suy ra tứ giác CDEF nội tiếp.

***) Chứng minh ODEO' nội tiếp:**

Nhận thấy OO' là đường trung bình của tam giác ACF, suy ra OO' // CF nên $AOO' = ACF$ (đồng vị). Mà $FCA = FCE = FDE$ (CDEF nội tiếp) suy ra

$EOO' = O'DE$, mà hai góc này cùng nhìn đoạn EO’ nên suy ra tứ giác ODEO’ nội tiếp.

b) Ta có $ADB = ACB$ (cùng nhìn cung AB)

mà $EDA = ECB$ (cmt)

nên $EDA = BDA$ suy ra DA là tia phân giác của tam giác EDB tại đỉnh D. Lại có BA là tia phân giác của tam giác EDB tại đỉnh B. Nên A là giao điểm của 3 đường phân giác của tam giác EDB. Từ đó suy ra A là tâm đường tròn nội tiếp tam giác EDB. (đpcm)

c) Gọi H là giao điểm của CD và EF như hình vẽ. Dễ dàng chứng minh được A là trực tâm của tam giác HCF, suy ra HA $\perp$ CF. Lại có AB $\perp$ CF ($ABC \quad 90$). Suy ra H, A, B thẳng hàng. Từ đó suy ra CD, EF, AB đồng quy.(đpcm)

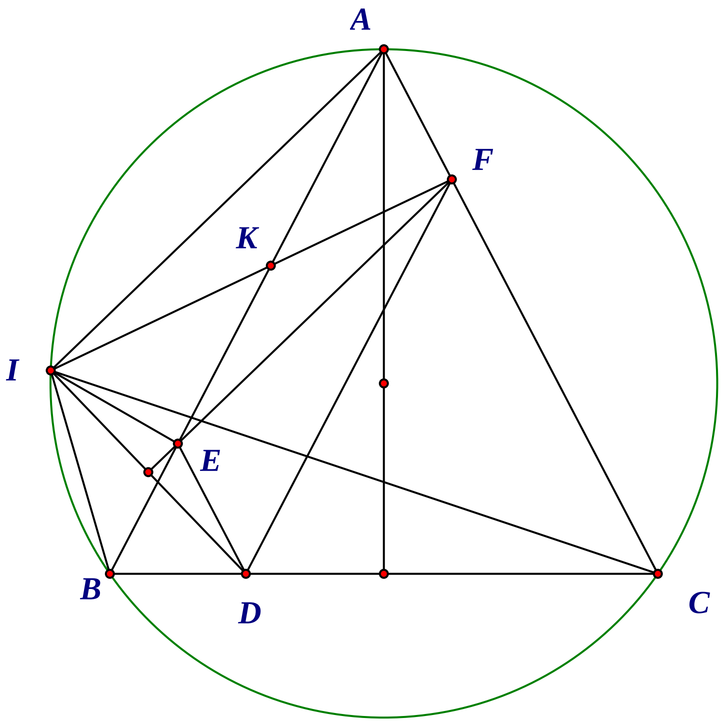
Bài 41. Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy điểm D nằm giữa B và C. Qua D lần lượt vẽ các đường thẳng song song với AC cắt AB tại E, song song với AB cắt AC tại F.

a).Chứng minh $DE + DF = AB$.

b).Gọi I là điểm đối xứng của D qua EF. Chứng minh tứ giác $AFEI$ là hình thang cân.

c).Chứng minh I thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải



a).Chứng minh $DE + DF = AB$***.***

Có $AE // DF$, $DE // AF \Rightarrow AEDF$ là hình bình hành $\Rightarrow AE = DF$.

Có $BDE = BCA$ (đồng vị), $BCA = EBD$ (do ΔABC cân tại A).

$\Rightarrow BDE = EBD$ $\Rightarrow \Delta EBD$ cân tại E $\Rightarrow EB = ED$.

Nên $AB = AE + EB = DF + DE$.

Vậy $DE + DF = AB$.

b).Gọi I ***là điểm đối xứng của*** D ***qua*** EF***. Chứng minh tứ giác*** $AEFI$ ***là hình thang cân.***

Gọi K là giao điểm của AE và IF.

Có FE là trung trực của $ID \Rightarrow FD = FI = AE$, $EI = ED = AE$.

ΔAEI, ΔIFA có AI chung $AE = IF$, $IE = AF$