Chương 3

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

§1. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT VÀ PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG THẲNG

I. Tóm tắt lí thuyết

1. Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng

Định nghĩa 1. Véc-tơ $\overrightarrow{u}$ gọi là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ và giá của $\overrightarrow{u}$ song song hoặc trùng với Δ.

2. Phương trình tham số của đường thẳng

Định nghĩa 2. Cho đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0;y_0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u} = (u_1;u_2)$. Phương trình tham số của Δ : $\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases}$ (1) (t là tham số).

⚠ ***Nhận xét:*** $M(x;y) \in \Delta \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases}$

3. Phương trình chính tắc của đường thẳng

Định nghĩa 3. Cho đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0;y_0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u} = (u_1;u_2)$, trong đó u_1 và $u_2 \neq 0$. Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

4. Véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng

Định nghĩa 4. Véc-tơ $\overrightarrow{n}$ gọi là véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng Δ nếu $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$ và giá của $\overrightarrow{n}$ vuông góc với Δ.

5. Phương trình tổng quát của đường thẳng

Định nghĩa 5. Phương trình $Ax + By + C = 0$ (với $A^2 + B^2 \neq 0$) được gọi là phương trình tổng quát của đường thẳng.

⚠ ***Nhận xét:***

- *Nếu đường thẳng Δ có phương tình $Ax + By = C$ thì đường thẳng Δ có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = (A;B)$, véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u} = (B;-A)$ hoặc $\overrightarrow{u'} = (-B;A)$.*

- *Nếu đường thẳng* Δ *đi qua* $M(x_0;y_0)$ *và có một véc-tơ pháp tuyến* $\overrightarrow{n}=(A;B)$ *thì phương trình đường thẳng* $\Delta: A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$.

- *Đường thẳng* Δ *đi qua hai điểm* $A(a;0)$, $B(0;b)$ *(với* $a.b\neq 0$*) thì phương trình đường thẳng* Δ *có dạng:* $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$. *Đây gọi là phương trình đường thẳng theo đoạn chắn.*

- *Đường thẳng* Δ *đi qua điểm* $M(x_0;y_0)$ *và có hệ số góc* k *thì phương trình đường thẳng* Δ *là:* $y-y_0=k(x-x_0)$. *Đây là phương trình đường thẳng theo hệ số góc.*

- *Nếu đường thẳng* Δ *có véc-tơ chỉ phương* $\overrightarrow{u}=(u_1;u_2)$ *thì nó có hệ số góc là* $k=\dfrac{u_2}{u_1}$. *Ngược lại, nếu đường thẳng* Δ *có hệ số góc* $k=\dfrac{a}{b}$ *thì một véc-tơ chỉ phương của nó là* $\overrightarrow{u}=(1;k)$.

II. Các dạng toán

Dạng 1. Viết phương trình tham số của đường thẳng

Để lập phương trình tham số của đường thẳng Δ ta cần xác định một điểm $M(x_0;y_0)\in\Delta$ và một véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u}=(u_1;u_2)$.

Vậy phương trình tham số đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=x_0+tu_1\\ y=y_0+tu_2\end{cases}$

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình tham số đường thẳng Δ biết Δ đi qua $M(1;2)$ và có vec-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u}=(-1;3)$.

Lời giải. Phương trình tham số đường thẳng Δ: $\begin{cases}x=1-t\\ y=2+3t\end{cases}$.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng Oxy, đường thẳng d đi qua $A(1;2), B(3;1)$. Viết phương trình tham số đường thẳng d.

Lời giải. Đường thẳng d qua $A(1;2)$ và nhận $\overrightarrow{AB}=(2;-1)$ làm véc-tơ chỉ phương.

Vậy phương trình tham số đường thẳng d: $\begin{cases}x=1+2t\\ y=2-t\end{cases}$.

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng Oxy, đường thẳng d đi qua $M(-2;3)$ và song song với đường thẳng EF. Biết $E(0;-1), F(-3;0)$.Viết phương trình đường thẳng d.

Lời giải. $\overrightarrow{EF}=(-3;1)$.

Phương trình tham số đường thẳng d: $\begin{cases}x=-2-3t\\ y=3+t\end{cases}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A(3;-4)$, $B(0,6)$. Viết phương trình tham số của đường thẳng AB.

Lời giải. Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-3;10)$.

Đường thẳng (AB) qua $A(3;-4)$ và nhận $\overrightarrow{AB}=(-3;10)$ làm véc-tơ chỉ phương.

Vậy phương trình đường thẳng (AB): $\begin{cases}x=3-3t\\ y=-4+10t\end{cases}$.

Bài 2. Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $A(1;-4)$ có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u}=(5;1)$.

Lời giải. Phương trình đường thẳng (d): $\begin{cases} x=1-4t \\ y=5+t \end{cases}$.

Bài 3. Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(1;-1)$ có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u}=(0;1)$.

Lời giải. Phương trình đường thẳng (d): $\begin{cases} x=1 \\ y=-1+t \end{cases}$.

Bài 4. Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình tham số đường thẳng d đi qua điểm $A(0;-4)$ và song song với đường thẳng Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x=2017+2t \\ y=2018-t \end{cases}$.

Lời giải. Đường thẳng Δ : có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u}=(2;-1)$.
Vì đường thẳng d song song với đường thẳng Δ nên d nhận $\overrightarrow{u}=(2;-1)$ làm véc-tơ chỉ phương.
Lại có d đi qua điểm $A(0;-4)$ nên phương trình tham số đường thẳng d : $\begin{cases} x=2m \\ y=-4-m \end{cases}$

Dạng 2. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng

Để lập phương trình tổng quát của đường thẳng Δ ta cần xác định một điểm $M(x_0;y_0)\in\Delta$ và một véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}=(A;B)$.
Vậy phương trình đường thẳng $\Delta : A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$.
Vậy phương trình tổng quát đường thẳng Δ: $Ax+By=C$ với $C=-(Ax_0+By_0)$.

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình tổng quát đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-1;5)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}=(-2;3)$.

Lời giải. Phương trình đường thẳng $\Delta : -2(x+1)+3(y-5)=0 \Leftrightarrow -2x+3y-17=0$.
Vậy phương trình tổng quát đường thẳng $\Delta : -2x+3y-17=0$.

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình tổng quát đường thẳng Δ đi qua điểm $N(2;3)$ và vuông góc với đường thẳng AB với $A(1;3)$, $B(2;1)$.

Lời giải. Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;-2)$.
Đường thẳng Δ qua $N(2;3)$ và nhận $\overrightarrow{AB}=(1;-2)$ làm véc-tơ pháp tuyến.
Phương trình đường thẳng Δ: $(x-2)-2(y-3)=0 \Leftrightarrow x-2y+4=0$.
Vậy phương trình tổng quát đường thẳng $\Delta : x-2y+4=0$.

Ví dụ 6. Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua $A(-1;2)$ và vuông góc với đường thẳng $\triangle$: $2x-y+4=0$.

Lời giải.
Cách 1:
Phương trình đường thẳng d có dạng: $x+2y+C=0$.
Vì d đi qua $A(-1;2)$ nên ta có phương trình: $-1+2.2+C=0 \Leftrightarrow C=-3$. Vậy phương trình tổng quát đường thẳng của đường thẳng d: $x+2y-3=0$.
Cách 2:
Đường thẳng $\triangle$ có một véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u}=(1;2)$.
Vì d vuông góc với $\triangle$ nên d nhận $\overrightarrow{u}=(1;2)$ làm véc-tơ pháp tuyến.
Phương trình đường thẳng d: $(x+1)+2(y-2)=0 \Leftrightarrow x+2y-3=0$.

Ví dụ 7. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=-2t\\y=1+t\end{cases}$ và $\Delta':\begin{cases}x=-2-t'\\y=t'\end{cases}$.Viết phương trình tham số của đường thẳng d đối xứng với Δ' qua Δ.

A. $d:\begin{cases}x=l\\y=22-7l\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=22-7l\\y=l\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-6+3l\\y=4\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-6+7l\\y=4+l\end{cases}$.

Lời giải. Chọn đáp án B

Gọi $M=\Delta\cap\Delta'\Rightarrow M(-6;4)$

Có $A(-2;0)\in\Delta'$ khác M.

Tìm tọa độ hình chiếu của A lên Δ là $H\left(\frac{-6}{5};\frac{8}{5}\right)$.

Tọa độ điểm đối xứng của A qua Δ là $A'\left(-\frac{2}{5};\frac{16}{5}\right)$.

Vậy đường thẳng cần tìm là $\begin{cases}x=22-7l\\y=l\end{cases}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 5. Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số: $\begin{cases}x=1+2t\\y=-3-t\end{cases}$.

a) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ.

b) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng l đi qua điểm $N(4;2)$ và vuông góc với Δ.

Lời giải. a) Đường thẳng Δ có vecto chỉ phương là $\overrightarrow{u}=(2;-1)$ nên có véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n}=(1;2)$.
Chọn tham số $t=0$ ta có ngay điểm $A(1;-3)$ nằm trên Δ.
Phương trình tổng quát của đường thẳng Δ là:
$1.(x-1)+2.[y-(-3)]=0\Leftrightarrow x+2y-5=0$
b) Đường thẳng l vuông góc với Δ nên có vecto pháp tuyến là $\overrightarrow{n_l}=(2;-1)$. Phương trình tổng quát của đường thẳng l là: $2(x-4)-1(y-2)=0\Leftrightarrow 2x-y-6=0$

Bài 6. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d có hệ số góc bằng -3 và $A(1;2)$ nằm trên d. Lập phương trình tổng quát của đường thẳng d.

Lời giải. Đường thẳng $d$có hệ số góc bằng -3 nên có vec-tơ pháp tuyến là $(3;1)$.
Đường thẳng d đi qua điểm $A(1;2)$ và có vec-tơ pháp tuyến là $(3;1)$ nên có phương trình tổng quát là: $3(x-1)+1(y-2)=0\Leftrightarrow 3x+y-5=0$

Bài 7. Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua $A(2;-5)$ và nó tạo với trục Ox một góc 60°.

Lời giải. Hệ số góc của đường thẳng d là $k=\tan 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Phương trình đường thẳng d là: $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)-5\Leftrightarrow\sqrt{3}x-3y-15-2\sqrt{3}=0$

Bài 8. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $d:y=2x+1$, viết phương trình đường thẳng d' đi qua điểm B là điểm đối xứng của điểm $A(0;-5)$ qua đường thẳng d và song song với đường thẳng $y=-3x+2$.

Lời giải. Đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng d nên ta có: $k_{AB}.2=-1\Leftrightarrow k_{AB}=-\frac{1}{2}$.

Phương trình đường thẳng AB là: $y=-\frac{1}{2}(x-0)-5\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x-5$.

Vì A và B đối xứng nhau qua đường thẳng d nên trung điểm N của chúng sẽ là giao điểm của hai đường thẳng d và AB.

Suy ra tọa độ của điểm N là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}y=2x+1\\y=-\frac{1}{2}x-5\end{cases}\Rightarrow N\left(-\frac{12}{5};-\frac{19}{5}\right)$. Từ đó ta tính được $A\left(-\dfrac{24}{5};-\dfrac{13}{5}\right)$. Đường thẳng d' song song với đường thẳng $y=-3x+2$ nên $k_{d'}=-3$.

Phương trình đường thẳng d' là: $y=-3\left(x+\dfrac{24}{5}\right)-\dfrac{13}{5}\Leftrightarrow y=-3x-17$

Bài 9. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $d:2x-3y+1=0$ và điểm $A(-1;3)$.Viết phương trình đường thẳng d' đi qua A và cách điểm $B(2;5)$ khoảng cách bằng 3.

Lời giải. Phương trình d' có dạng: $ax+by=c=0$. Do $A\in d'$ nên: $(-1)a+3b+c=0\Leftrightarrow c=a-3b$ (1).

Hơn nữa d $(B,d')=3\Leftrightarrow\dfrac{|2a+5b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3$ (2).

Thay (1) vào (2) ta có: $\dfrac{|3a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3\Leftrightarrow 5b^2-12ab=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\ b=\dfrac{12a}{5}\end{array}\right.$

Với $b=0$ thay vào (1) ta có $c=a\Rightarrow d':ax+a=0\Leftrightarrow d':x+1=0$

Với $b=\dfrac{12a}{5}$ ta chọn $a=5,b=12$ thay vào (1) ta được: $c=5-3.12=-31\Rightarrow d':5x+12y-31=0$

Bài 10. Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(2;5)$ và cách đều $A(-1;2)$ và $B(5;4)$.

Lời giải. Gọi phương trình đường thẳng d cần tìm là $ax+by+c=0\left(a^2+b^2\neq-\right)$ (1).

Do $M(2;5)\in d$ nên ta có: $2a+5b+c=0\Leftrightarrow c=-2a-5b$. Thay $c=-2a-5b$ vào (1) ta có phương trình đường thẳng d trở thành: $ax+by-2a-5b=0$ (2).

Vì d cách đều hai điểm A và B nên:

$\dfrac{|(-1)a+2b-2a-5b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|5a+4b-2a-5b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow|3a+3b|=|3a-b|\Leftrightarrow 9a^2+18ab+9b^2=9a^2-6ab+b^2\Leftrightarrow 8b^2+24ab=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\ b=-3a\end{array}\right.$.

Trường hợp 1: Với $b=0$ thay vào (2) ta được phương trình đường thẳng d là:

$ax+0y-2a-5.0=0\Leftrightarrow ax-2a=0\Leftrightarrow x-2=0$

Trường hợp 2: Với $b=-3a$ ta chọn $a=1,b=-3$ thay vào (2) ta được phương trình đường thẳng d là: $1x-3y-2-5.(-3)=0\Leftrightarrow x-3y+13=0$

Dạng 3. Vị trí tương đối và góc giữa hai đường thẳng

Cho các đường thẳng $\Delta:Ax+By+C=0$ và $\Delta':A'x+B'y+C'=0$. Khi đó ta có $\overrightarrow{n}=(A,B)$ và $\overrightarrow{n'}=(A',B')$ lần lượt là véc-tơ pháp tuyến của Δ và Δ'.

a) Để xét vị trí tương đối của Δ và Δ' trước hết ta dựa vào các véc-tơ $\overrightarrow{n}$ và $\overrightarrow{n'}$. Nếu các véc-tơ $\overrightarrow{n}$ và $\overrightarrow{n'}$ không cộng tuyến thì Δ và Δ' cắt nhau. Nếu véc-tơ $\overrightarrow{n}$ và $\overrightarrow{n'}$ cộng tuyến, nghĩa là $\dfrac{A}{A'}=\dfrac{B}{B'}$ thì Δ và Δ' là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau. Cụ thể ta có:

   Δ cắt Δ' khi và chỉ khi $\dfrac{A}{A'}\neq\dfrac{B}{B'}$, hơn nữa nếu $AA'+BB'=0$ thì $\Delta\perp\Delta'$.

   $\Delta\equiv\Delta'$ khi và chỉ khi $\dfrac{A}{A'}=\dfrac{B}{B'}=\dfrac{C}{C'}$.

   $\Delta\parallel\Delta'$ khi và chỉ khi $\dfrac{A}{A'}=\dfrac{B}{B'}\neq\dfrac{C}{C'}$.

b) Nếu Δ cắt Δ' và gọi φ là góc giữa các đường thẳng Δ,Δ' thì $\cos\varphi=|\cos(\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'})|$

Chú ý rằng việc xét vị trí tương đối của hai đường thẳng cũng được xét qua số điểm chung của Δ và Δ'. Việc xét vị trí tương đối và tính góc giữa hai đường thẳng cắt nhau cũng được thực hiện qua các véc-tơ chỉ phương của Δ và Δ'.

Ví dụ 8. Cho ba đường thẳng: $d_1 : 2x+y-1=0$, $d_2 : x+2y+1=0$, $d_3 : mx-y-7=0$. Chứng minh rằng các đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau và tìm giá trị của tham số m để ba đường thẳng trên đồng quy.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ x+2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$.
Từ đó suy ra d_1, d_2 cắt nhau tại điểm $A(1;-1)$.
Ba đường thẳng đã cho đồng quy khi và chỉ khi d_3 cũng đi qua điểm A, hay $A \in d_3$, suy ra

$$m.1-(-1)-7=0 \Leftrightarrow m=6.$$

Ví dụ 9. Cho các đường thẳng $\Delta : 2x+3y-5=0, \Delta' : 3x-2y-1=0$ và điểm $M(2;3)$.
a) Xét vị trí tương đối giữa các đường thẳng Δ và Δ'.
b) Biết d là đường thẳng đi qua điểm M và tạo với các đường thẳng Δ, Δ' một tam giác cân. Tính góc giữa các đường thẳng Δ và d.

Lời giải. a) Ta có $\overrightarrow{n}=(2,3)$ và $\overrightarrow{n'}=(3,-2)$ là các véc-tơ pháp tuyến của Δ và Δ'.
Ta thấy $\overrightarrow{n}$ và $\overrightarrow{n'}$ không cùng phương vì $\dfrac{2}{3} \neq \dfrac{3}{-2}$, từ đó suy ra Δ và Δ' là các đường thẳng cắt nhau.
b) Ta có $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'}=2.3+3.(-2)=0$, do đó Δ và Δ' là các đường thẳng vuông góc với nhau.
Gọi $A=\Delta \cap \Delta'$, $B=\Delta \cap d$, $C=d \cap \Delta'$. Khi đó tam giác ABC là vuông tại A do đó nếu tam giác ABC cân thì $\widehat{B}=\widehat{C}=\dfrac{\pi}{4}$.
Từ đó suy ra góc giữa các đường thẳng Δ và d bằng $\dfrac{\pi}{4}$.

Ví dụ 10. Cho hai đường thẳng $\Delta : (m+3)x+3y-2m+3=0$ và $\Delta' : 2x+2y+2-3m=0$. Tìm giá trị của tham số m để
a) Đường thẳng Δ song song với Δ'.
b) Đường thẳng Δ cắt đường thẳng Δ'.

Lời giải. a) Δ cắt Δ' khi và chỉ khi $\dfrac{m+3}{2} \neq \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow m \neq 0$.
b) Theo câu a), để Δ song song với Δ' thì trước hết ta phải có $m=0$.
Với $m=0$, khi đó dễ dàng nhận thấy $\Delta \equiv \Delta'$.
Vậy không tồn tại m để $\Delta \parallel \Delta'$.
Chú ý: Ta có thể làm theo cách sau: Δ song song với Δ' khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \dfrac{m+3}{2}=\dfrac{3}{2} \neq \dfrac{-2m+3}{2-3m} \\ 2-3m \neq 0 \end{cases}$$

Hệ trên vô nghiệm, do đó không tồn tại m để $\Delta \parallel \Delta'$.

Ví dụ 11. Tìm các giá trị của k để góc giữa các đường thẳng $\Delta : kx-y+1=0$ và $\Delta' : x-y=0$ bằng 60°.

Lời giải. Ta có $\overrightarrow{n}=(k;1)$ và $\overrightarrow{n'}=(1;-1)$ là véc-tơ pháp tuyến của các đường thẳng Δ và Δ'.
Theo bài ra ta có $\cos 60^\circ = |\cos(\overrightarrow{n},\overrightarrow{n'})| \Leftrightarrow \dfrac{|k+1|}{\sqrt{k^2+1}\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2(k+1)^2=k^2+1$. Giải phương trình trên ta được $\left[\begin{array}{l} k=-2+\sqrt{3} \\ k=-2-\sqrt{3} \end{array}\right.$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 11. Tìmm sao cho hai đường thẳng $\Delta: x+5my-4=0$ và $\Delta': 2x+3y-2=0$ song song với nhau.
Lời giải. $\Delta \parallel \Delta' \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}=\dfrac{5m}{3} \Leftrightarrow m=\dfrac{3}{10}$.

Bài 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho 3 đường thẳng d_1: $2x+y-4=0$, d_2: $5x-2y+3=0$, d_3: $mx+3y-2=0$. a) Xét vị trí tương đối giữa d_1 và d_2.
b) Tìm giá trị của tham số m để 3 đường thẳng trên đồng quy.
Lời giải. a) Nhận thấy $\dfrac{2}{5} \neq \dfrac{1}{-2}$, từ đó suy ra các đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau.
b) Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x+y-4=0 \\ 5x-2y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{9} \\ y=\dfrac{26}{9} \end{cases}.$$

Vậy d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm $M\left(\dfrac{5}{9};\dfrac{26}{9}\right)$.
Vì d_1, d_2, d_3 đồng quy nên $M \in d_3$, ta có: $m.\dfrac{5}{9}+3.\dfrac{26}{9}-2=0 \Leftrightarrow m=-12$

Bài 13. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho các đường thẳng $\Delta_1: x+2y-\sqrt{2}=0$ và $\Delta_2: x-y=0$. Tính côsin của góc giữa các đường thẳng Δ_1 và Δ_2.
Lời giải. Ta có $\overrightarrow{n}=(1;2)$ và $\overrightarrow{n'}=(1;-1)$ là véc-tơ pháp tuyến của các đường thẳng Δ và Δ'.
Gọi φ là góc giữa các đường thẳng Δ và Δ'. Khi đó

$$\cos\varphi=|\cos(\overrightarrow{n},\overrightarrow{n'})|=\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Bài 14. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho các đường thẳng $\Delta: 3x+5y+15=0$ và $\Delta': \begin{cases} x=10-3t \\ y=1+5t \end{cases}$.
Tính góc φ giữa Δ_1 và Δ_2.
Lời giải. Ta có $\overrightarrow{n}=(3;5)$ là một véc-tơ pháp tuyến của Δ.
$\overrightarrow{u'}=(-3;5)$ là một véc-tơ chỉ phương của Δ', suy ra Δ' có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n'}=(5;3)$.
Do $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'}=0 \Rightarrow \Delta \perp \Delta'$.

Bài 15. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho 2 đường thẳng $\Delta: x+2y-5=0$, $\Delta': 3x+my-1=0$. Tìm m để góc giữa hai đường thẳng Δ, Δ' bằng 45°.
Lời giải. $\Delta: x+2y-5=0$ có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}=(1;2)$,
$\Delta': 3x+my-1=0$ có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n'}=(3;m)$.
Theo bài ra ta có: $\cos 45^\circ=\dfrac{\left|\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'}\right|}{|\overrightarrow{n}|.\left|\overrightarrow{n'}\right|}=\dfrac{|3+2m|}{\sqrt{5}\sqrt{3^2+m^2}}$.
Từ đó suy ra $\left[\begin{aligned} m&=1 \\ m&=-9 \end{aligned}\right.$

Dạng 4. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cho điểm $M(x_0;y_0)$ và đường thẳng Δ: $Ax+By+C=0$. Khi đó, khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ được tính theo công thức

$$\mathrm{d}(M,\Delta)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Ví dụ 12. Tìm khoảng cách từ điểm $M(1;2)$ đến đường thẳng $(D)\colon 4x+3y-2=0$.

Lời giải. Áp dụng công thức tính khoảng cách ta có
$\mathrm{d}(M,D)=\dfrac{|4\cdot 1+3\cdot 2-2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{8}{5}$.

Ví dụ 13. Tìm những điểm nằm trên đường thẳng $\Delta\colon 2x+y-1=0$ và có khoảng cách đến $(D)\colon 4x+3y-10=0$ bằng 2.

Lời giải. Giả sử có điểm $M\in\Delta$, khi đó $M(m;1-2m)$.
Theo đề $\mathrm{d}(M,\Delta)=2\Leftrightarrow \dfrac{|4m+3(1-2m)-10|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2\Leftrightarrow |-2m-7|=10$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2m+7=10\\ 2m+7=-10\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=\dfrac{3}{2}\\ m=-\dfrac{17}{2}\end{array}\right.$.
Vậy có hai điểm thỏa mãn điều kiện là $M_1\left(\dfrac{3}{2};-2\right)$ và $M_2\left(-\dfrac{17}{2};18\right)$.

Ví dụ 14. Viết phương trình của đường thẳng đi qua điểm $A(1,-3)$ và có khoảng cách đến điểm $M_0(2,4)$ bằng 1.

Lời giải. Giả sử đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1;-3)$ có hệ số góc k. Khi đó phương trình Δ có dạng:
$y+3=k(x-1)\Leftrightarrow kx-y-k-3=0$.
Theo đề ta có $\mathrm{d}(M_0,\Delta)=\dfrac{|2k-4-k-3|}{\sqrt{k^2+1}}=1\Leftrightarrow |k-7|=\sqrt{k^2+1}\Leftrightarrow (k-7)^2=k^2+1$
$\Leftrightarrow k^2-14k+49=k^2+1\Leftrightarrow 14k=48\Leftrightarrow k=\dfrac{24}{7}$.
Vậy phương trình $\Delta\colon 24x-7y-45=0$.

Ví dụ 15. Viết phương trình của đường thẳng (D) song song với $(D')\colon 3x+4y-1=0$ và cách (D') một đoạn bằng 2.

Lời giải. Đường thẳng $(D)\parallel(D')$ nên phương trình đường thẳng $(D)\colon 3x+4y+c=0$.
Lấy điểm $M(-1;1)\in(D')$, theo đề ta có:
$\mathrm{d}(D,D')=\mathrm{d}(M,D)=2\Leftrightarrow \dfrac{|-3+4+c|}{5}=2\Leftrightarrow |c+1|=10\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}c=9\\ c=-11\end{array}\right.$.
Với $c=9$ ta có $D\colon 3x+4y+9=0$.
Với $c=-11$ ta có $D\colon 3x+4y-11=0$.

Ví dụ 16. Cho điểm $A(-1,2)$ và hai đường $(\Delta)\colon x-y-1=0,(\Delta')\colon x+2y-5=0$. Tìm trên đường thẳng (Δ) một điểm M sao cho khoảng cách từ M đến (Δ') bằng AM.

Lời giải. Ta có $M\in\Delta$, suy ra $M(m,m-1)$.
$\overrightarrow{AM}=(m+1;m-3)\Rightarrow AM=\sqrt{(m+1)^2+(m-3)^2}=\sqrt{2m^2-4m+10}$.
Theo đề $\dfrac{|m+2(m-1)-5|}{\sqrt{5}}=\sqrt{2m^2-4m+10}\Leftrightarrow |3m-7|=\sqrt{5(2m^2-4m+10)}$
$\Leftrightarrow (3m-7)^2=10m^2-20m+50\Leftrightarrow m^2+22m+1=0\Leftrightarrow m=-11\pm 2\sqrt{30}$.
Vậy có hai điểm thỏa mãn là $M_1(-11-2\sqrt{30};-12-2\sqrt{30})$ và $M_2(-11+2\sqrt{30};-12+2\sqrt{30})$.

Ví dụ 17. Tìm phương trình của đường thẳng cách điểm $M(1,1)$ một khoảng bằng 2 và cách điểm $M'(2,3)$ một khoảng bằng 4.

Lời giải. Giả sử phương trình cần tìm là $\Delta\colon Ax+By+C=0$.
Theo đề ta có:

$$\mathrm{d}(M,\Delta)=2 \Leftrightarrow \frac{|A+B+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=2 \Leftrightarrow |A+B+C|=2\sqrt{A^2+B^2} \qquad (1)$$

$$\mathrm{d}(M',\Delta)=4 \Leftrightarrow \frac{|2A+3B+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=4 \Leftrightarrow |2A+3B+C|=4\sqrt{A^2+B^2} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $|2A+3B+C|=2|A+B+C| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2A+3B+C=2(A+B+C)\\ 2A+3B+C=-2(A+B+C)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}B-C=0\\ 4A+5B+3C=0\end{array}\right.$.

Thay $B=C$ và (1) ta được $|A+2B|=2\sqrt{A^2+B^2} \Rightarrow 3A^2-4BA=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}A=0\\ A=\dfrac{4}{3}B\end{array}\right.$.

Với $A=0$, chọn $B=C=1$, ta được đường thẳng $\Delta_1\colon\ y+1=0$.
Với $A=\dfrac{4}{3}B$, chọn $B=3 \Rightarrow A=4, C=3$. Ta có đường thẳng $\Delta_2\colon\ 4x+3y+3=0$.
Từ $4A+5B+3C=0 \Rightarrow C=-\dfrac{1}{3}(4A+5B)$ và (1) ta được
$|A+2B|=6\sqrt{A^2+B^2} \Rightarrow 35A^2-4BA+32B^2=0$.
Giải phương trình bậc hai theo ẩn A, ta có
$\Delta'=4B^2-1020B^2=-1016B^2\le 0$.
Trường hợp $B=0$, ta có $\Delta'=0$, phương trình có nghiệm kép $A=0$, vô lý.
Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn yêu cầu.

Dạng 5. Viết phương trình đường phân giác của góc do Δ_1 và Δ_2 tạo thành

Cho đường thẳng Δ: $ax+by+c=0$ và hai điểm $M(x_M;y_M), N(x_N;y_N) \notin \Delta$. Khi đó:

a) M,N nằm cùng phía so với Δ khi và chỉ khi $(ax_M+by_M+c)(ax_N+by_N+c)>0$.

b) M,N nằm khác phía so với Δ khi và chỉ khi $(ax_M+by_M+c)(ax_N+by_N+c)<0$.

Để viết phương trình đường phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ ta có nhiều cách. Dưới đây là 3 cách thường sử dụng:

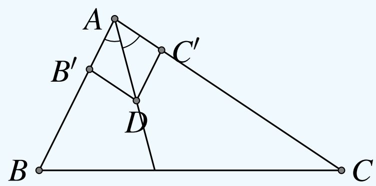
Cách 1:
Dựa vào tính chất đường phân giác là tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng $AB: ax+by+c=0$ và $AC: mx+ny+p=0$, ta có:

$$\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|mx+ny+p|}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

Hai đường thu được là phân giác trong và phân giác ngoài của góc $\widehat{ABC}$.
Sau đó, ta cần dựa vào vị trí tương đối của hai điểm B,C với hai đường vừa tìm được để phân biệt phân giác trong, phân giác ngoài. Cụ thể, nếu B,C ở cùng một phía thì đó là phân giác ngoài, ở khác phía thì là phân giác trong.

Cách 2:
Lấy B',C' lần lượt thuộc AB,AC sao cho:

$$\overrightarrow{AB'}=\frac{1}{AB}.\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC'}=\frac{1}{AC}.\overrightarrow{AC}.$$



Giả sử $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}$ Khi đó tứ giác $AB'DC'$ là hình thoi.
Do đó, $\overrightarrow{AD}$ là vectơ chỉ phương của đường phân giác cần tìm.

Cách 3:
Giả sử $\overrightarrow{u}=(a;b)$ là vectơ chỉ phương của đường phân giác cần tìm. Ta có:
$\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u})=\cos(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{u}) \Leftrightarrow \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\dfrac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{u}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}$

Ví dụ 18. Viết phương trình đường phân giác trong góc A của tam giác ABC biết $A(1;1)$, $B(4;5)$, $C(-4;-11)$.

Lời giải. **Cách 1.** Ta có phương trình các cạnh:

$$AB: 4x-3y-1=0; AC: 12x-5y-7=0$$

Phương trình hai đường phân giác góc A là:
$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{4x-3y-1}{5}=\dfrac{12x-5y-7}{13}\\ \dfrac{4x-3y-1}{5}=-\dfrac{12x-5y-7}{13}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x+7y-11=0\,(d_1)\\ 56x-32y-24=0\,(d_2)\end{array}\right.$$
Ta có:

$$(4x_C+7y_C-11)(4x_B+7y_B-11)<0$$

Do đó B,C khác phía so với (d_1) hay (d_1) là đường phân giác cần tìm.
Cách 2. Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;4); AB=5; \overrightarrow{AB'}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}=\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$

$\overrightarrow{AC}=(-5;-12); AC=13; \overrightarrow{AC'}=\dfrac{1}{13}\overrightarrow{AC}=\left(-\dfrac{5}{13};-\dfrac{12}{13}\right)$

Ta có: $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}=\left(\dfrac{14}{65};-\dfrac{8}{65}\right)$.

Vậy vectơ chỉ phương của đường phân giác cần tìm là: $\overrightarrow{u}=(7;-4)$. Do đó phương trình đường phân giác cần tìm là:

$$4(x-1)+7(y-1)=0 \Leftrightarrow 4x+7y-11=0$$

Cách 3. Giả sử $\overrightarrow{u}=(a;b)$ là vectơ chỉ phương của đường phân giác cần tìm.

Ta có $\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\dfrac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{u}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|} \Leftrightarrow \dfrac{3a+4b}{5}=\dfrac{-5a-12b}{13} \Leftrightarrow a=-\dfrac{7}{4}b.$

Vậy vectơ chỉ phương của đường phân giác cần tìm là: $\overrightarrow{u}=(7;-4)$. Do đó phương trình đường phân giác cần tìm là:

$$4(x-1)+7(y-1)=0 \Leftrightarrow 4x+7y-11=0$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

Bài 16. Tính khoảng cách từ điểm $M(3;5)$ đến đường thẳng $\Delta\colon x+y+1=0$.

Lời giải. Ta có $\mathrm{d}(M,\Delta)=\dfrac{|3+5+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{9}{\sqrt{2}}=\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$.

Bài 17. Tính khoảng cách từ điểm $M(4;-5)$ đến đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x=2t \\ y=2+3t \end{cases}$.

Lời giải. Viết phương trình dưới dạng tổng quát $\Delta\colon 3x-2y+4=0$.

Khi đó $\mathrm{d}(M,\Delta)=\dfrac{|3\cdot 4-2\cdot(-5)+4|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\dfrac{26}{\sqrt{13}}=2\sqrt{13}$.

Bài 18. Cho tam giác ABC. Tính diện tích tam giác ABC, với: $A(-2;14), B(4;-2), C(5;-4)$.

Lời giải. Ta có $\overrightarrow{BC}=(1;-2)\Rightarrow BC=\sqrt{5}$. Phương trình đường thẳng BC đi qua B có dạng $2(x-4)+1(y+2)=0 \Leftrightarrow 2x+y-6=0$.

Đường cao AH của tam giác ABC: $AH=\dfrac{|2(-2)+14-6|}{\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

Do đó $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot AH\cdot BD=\dfrac{4\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{10}=2(\text{đvdt})$

Bài 19. Viết phương trình đường thẳng (D) song song với đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x=3t \\ y=2+4t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ và cách đường thẳng Δ một khoảng bằng 3.

Lời giải. Vì $(D)\parallel\Delta$ nên phương trình đường thẳng (D) có dạng:

$(D)\colon 4x-3y+c=0$.

Chọn điểm $M(0;2)\in\Delta$, theo đề ta có

$\mathrm{d}(M,\Delta)=\dfrac{|4\cdot 0-3\cdot 2+c|}{5}=3 \Leftrightarrow |c-6|=15 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=21 \\ c=-9 \end{array}\right.$.

Vậy có hai phương trình thỏa mãn là $(D_1)\colon 4x-3y+21=0$ và $(D_2)\colon 4x-3y-9=0$.

Bài 20. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(1;3)$ và cách điểm $B(-2;1)$ một khoảng bằng 3.

Lời giải. Giả sử $\overrightarrow{n}=(a;b),(a^2+b^2>0)$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng cần tìm. Phương trình đường thẳng có dạng:

$$a(x-1)+b(y-3)=0 \Leftrightarrow ax+by-a-3b=0$$

Khi đó:

$d_{(B;\Delta)}=3 \Leftrightarrow \dfrac{|-2a+b-a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3 \Leftrightarrow 5a^2-12ab=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{r} b=0 \\ b=\dfrac{12}{5}a \end{array}\right.$

- $b = 0$, chọn $a = 1$ ta có $\Delta_1 : x - 1 = 0$.
- $b = \dfrac{12}{5}a$, chọn $a = 5, b = 12$ ta có $\Delta_2 : 5x + 12y - 41 = 0$.

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $\Delta_1 : x - 1 = 0; \Delta_2 : 5x + 12y - 41 = 0$.

Bài 21. Cho đường thẳng Δ: $5x - 12y + 32 = 0$ và hai điểm $A(1;-1), B(5;-3)$. Tìm một điểm M cách Δ một khoảng bằng 4 và cách đều hai điểm A, B.

Lời giải. Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm cần tìm, ta có hệ

$$\begin{cases} (x_0-1)^2 + (y_0+1)^2 = (x_0-5)^2 + (y_0+3)^2 \\ \dfrac{|5x_0 - 12y_0 + 32|}{13} = 4 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được $29x_0 - 64 = \pm 52$ cho ta hai điểm $M(4;0)$ và $M'\left(\dfrac{12}{29}; \dfrac{108}{29}\right)$

Bài 22. Cho tam giác ABC có $A(4;-13), B(4;12), C(-8;3)$. Viết phương trình đường phân giác trong góc B.

Lời giải. Phương trình cạnh BC là $3(x-4) - 4(y-12) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 36 = 0$.
Phương trình cạnh BA là $x - 4 = 0$.
Phương trình đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc B là

$$\frac{|3x-4y+36|}{5} = \frac{|x-4|}{1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 4y + 36 = x - 4 \\ 3x - 4y + 36 = -x + 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2y + 20 = 0\,(d_1) \\ x - y + 8 = 0\,(d_2) \end{array}\right. .$$

Ta thấy A và C nằm khác phía so với (d_2), suy ra đường phân giác trong góc B là đường $x - y + 8 = 0$.

Dạng 6. Phương trình đường thẳng trong tam giác

Ta có công thức viết nhanh phương trình đường thẳng qua hai điểm $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$ là:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$$

Chú ý: Công thức phương trình đường thẳng Δ qua $M(x_0;y_0)$ và vuông góc với đường thẳng d: $Ax + By + C = 0$ là: $\boxed{B(x-x_0) - A(y-y_0) = 0}$.

Ví dụ 19. Cho tam giác ABC có đỉnh $A(3;-4)$ và hai đường cao BH và CH có phương trình: $7x - 2y - 1 = 0$ và $2x - 7y - 6 = 0$. Hãy tìm phương trình hai cạnh AB và AC.

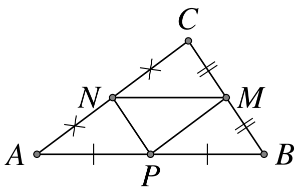
Lời giải. Cạnh AC: là đường thẳng đi qua $A(3;-4)$ và vuông góc với BH: $7x - 2y - 1 = 0$ nên có phương trình: $2(x-3) + 7(y+4) = 0 \Leftrightarrow 2x + 7y + 22 = 0$.
Cạnh AB: là đường thẳng qua $A(3;-4)$ và vuông góc với CH: $2x - 7y - 6 = 0$ nên có phương trình: $7(x - 3) + 2(y+4) = 0 \Leftrightarrow 7x + 2y - 73 = 0$.

Ví dụ 20. Cho tam giác ABC, biết trung điểm các cạnh là $M(-1;-1)$, $N(1;9)$, $P(9;1)$.

a) Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC.

b) Lập phương trình các đường trung trực của tam giác ABC.

Lời giải.



a) Cạnh AB qua điểm $P(9;1)$ và song song với MN nên nhận véc-tơ $\overrightarrow{MN} = (2;10)$ làm véc-tơ chỉ phương.
Phương trình cạnh AB là: $\dfrac{x-9}{2} = \dfrac{y-1}{10} \Leftrightarrow 5x - y - 44 = 0$.
Tương tự, ta có phương trình cạnh BC là: $x + y - 2 = 0$.
Phương trình cạnh AC là: $x - 5y + 44 = 0$.

b) Gọi các đường trung trực kẻ từ M, N, P theo thứ tự là (d_M), (d_N), (d_P).
Đường thẳng (d_M) qua điểm $M(-1;-1)$ và vuông góc với PN nên nhận véc-tơ $\overrightarrow{PN} = (8;-8)$ làm véc-tơ pháp tuyến.
Ta có phương trình đường thẳng (d_M) là: $x - y = 0$.
Tương tự, $(d_N): 5x + y - 14 = 0$.
$(d_P): x + 5y - 14 = 0$.

Ví dụ 21. Cho tam giác ABC, biết đỉnh $A(2;2)$, các đường cao xuất phát từ các đỉnh B, C có phương trình lần lượt là $x + y - 2 = 0$ và $9x - 3y - 4 = 0$. Hãy lập phương trình các cạnh của tam giác ABC.

Lời giải. Theo giả thiết ta có phương trình các đường cao: $BH: x + y - 2 = 0$, $CK: 9x - 3y - 4 = 0$.

- Lập phương trình cạnh AC.
  Cạnh AC là đường thẳng qua A và vuông góc với BH nên phương trình AC có dạng: $x - y + c = 0$.
  Do $A(2;2) \in AC$ nên $2 - 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = 0$.
  Vậy phương trình AC là: $x - y = 0$.

- Phương trình cạnh AB.
  Cạnh AB vuông góc với CK nên phương trình cạnh AB có dạng: $3x + 9y + m = 0$.
  Do $A(2;2) \in AB \Leftrightarrow 3.2 + 9.2 + m = 0 \Leftrightarrow m = -24$.
  Phương trình cạnh AB là: $3x + 9y - 24 = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 8 = 0$.

- Phương trình cạnh BC:
  Ta có $C = CK \cap AC$ nên tọa độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình:
  $$\begin{cases} x - y & = 0 \\ 9x - 3y - 4 & = 0 \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right).$$
  Lại có: $B = AB \cap BH$ nên tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình
  $$\begin{cases} x + y - 2 & = 0 \\ x + 3y - 8 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = -1 \\ y & = 3 \end{cases} \Rightarrow C(-1;3).$$
  Phương trình cạnh BC qua hai điểm B và C nên có phương trình:
  $\dfrac{x - x_C}{x_B - x_C} = \dfrac{y - y_C}{y_B - y_C} \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{\dfrac{2}{3}+1} = \dfrac{y-3}{\dfrac{2}{3}-3} \Leftrightarrow 7x + 5y - 8 = 0.$

Ví dụ 22. Tam giác ABC có phương trình cạnh AB là $5x - 3y + 2 = 0$, các đường cao qua đỉnh A và B lần lượt là $4x - 3y + 1 = 0$; $7x + 2y - 22 = 0$. Lập phương trình hai cạnh AC, BC và đường cao thứ ba.

Lời giải. Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} 5x - 3y + 2 = 0 & (AB) \\ 4x - 3y + 1 = 0 & (AH) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = -1 \\ y & = -1 \end{cases} \Rightarrow A(-1;-1)$$

Cạnh AC qua $A(-1;-1)$ và vuông góc với $BH: 7x+2y-11=0$ có phương trình:

$$2(x+1)-7(y+1)=0 \Leftrightarrow 2x-7y-5=0 \quad (AC)$$

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 5x-3y+2 &= 0 \\ 7x+2y-22 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow B(2;4)$$

Cạnh BC qua $B(2;4)$ và vuông góc với$AH: 4x-3y+1=0$ có phương trình:

$$3(x-2)+4(y-6)=0 \Leftrightarrow 3x+4y-22=0 \quad (BC)$$

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình:

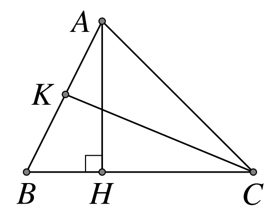
$$\begin{cases} 2x-7y-5 &= 0 \\ 3x+4y-22 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow C(6;1)$$

Đường cao CH qua $C(6;1)$ và vuông góc với $AB: 5x-3y+2=0$ có phương trình:

$$3(x-6)+5(y-1)=0 \Leftrightarrow 3x+5y-23=0$$

Ví dụ 23. Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC biết $B(2;-1)$, đường cao và phân giác trong qua hai đỉnh A, C lần lượt là $3x-4y+27=0$ và $x+2y-5=0$.

Lời giải.



Cạnh BC là đường thẳng qua $B(2;-1)$ và vuông góc với phân giác $3x-4y+27=0$ nên có phương trình: $4(x-2)+3(y+1)=0 \Leftrightarrow 4x+3y-5=0$.
Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình:

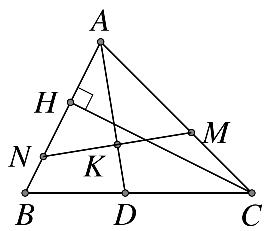
$$\begin{cases} 4x+3y-5 &= 0 \\ x+2y-5 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow C(-1;3)$$

Đường phân giác ứng với phương trình $x+2y-5=0$ có véc-tơ chỉ phương: $\vec{v}=(2;-1)$.

Ta có: $\tan(\widehat{\overrightarrow{CB},\vec{v}}) = \tan(\widehat{\vec{v},\overrightarrow{CA}}) \quad (1)$
Biết $\overrightarrow{CB}=(-3;4)$, $\overrightarrow{CA}=(x_A+1;y_A-3)$.
Do đó $(1) \Leftrightarrow \dfrac{3-8}{-6-4} = \dfrac{2(y_A-3)+(x_A+1)}{2(x_A+1)-(y_A-3)} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{x_A+2y_A-5}{2x_A-y_A+5} \Leftrightarrow y_A=3$.
Ta có: $y_A-y_C=3$. Vậy phương trình đường AC là $y=3$.
Thay $y_A=3$ vào $3x-4y+27=0$, ta có: $A(-5;3)$.
Suy ra $\overrightarrow{AB}=(7;-4)$.
Phương trình cạnh AB là: $4(x+5)+7(y-3)=0 \Leftrightarrow 4x+7y-1=0$.

Ví dụ 24. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có đường phân giác trong $(AD): x-y=0$, đường cao $(CH): 2x+y+3=0$, cạnh AC qua $M(0;-1)$, $AB=2AM$. Viết phương trình ba cạnh của tam giác ABC.

Lời giải.



Gọi N là điểm đối xứng của M qua AD (theo tính chất của đường phân giác trong), suy ra N nằm trên tia AB.
Mặt khác ta có: $AN = AM \Rightarrow AB = 2AN$. Suy ra N là trung điểm của AB. Do $MN \perp AD$ nên phương trình MN là: $x+y+m_1 = 0$;
$M(0;-1) \in MN \Rightarrow -1+m_1 = 0 \Leftrightarrow m_1 = 1$. Suy ra $(MN)\colon x+y+1 = 0$.
Gọi $K = MN \cap AD$, tọa độ K là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow K\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right).$$

Vì K là trung điểm của MN nên $\begin{cases} x_N = 2x_K - x_M = -1 \\ y_N = 2y_K - y_M = 0 \end{cases} \Rightarrow N(-1;0)$.
Do $AB \perp CH$ nên phương trình AB là: $\boxed{2-2y+m_2=0}$;
$N(-1;0) \in AB \Leftrightarrow -1+m_2 = 0 \Leftrightarrow m_2 = 1$.
Suy ra $AB\colon x-2y+1 = 0$.
Vì $A = AB \cap AD$ nên tọa độ A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-2y & =-1 \\ x-y & =0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow A(1;1)$$

Suy ra: $\boxed{AC\colon 2x-y-1.}$
Vì $C = AC \cap CH$ nên tọa độ C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x-y & =1 \\ 2x+y & =-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{1}{2};-2\right)$$

Do N là trung điểm của AB nên $\begin{cases} x_B = 2x_N - x_A = -2 \\ y_B = 2y_N - y_A = -1 \end{cases} \Rightarrow B(-3;-1)$.
Phương trình đường thẳng BC qua hai điểm $B(-3;-1)$ và $C\left(-\dfrac{1}{2};-2\right)$ là:

$$\frac{x+3}{-\frac{1}{2}+3} = \frac{y+1}{-2+1} \Leftrightarrow 2x+5y+11 = 0$$

Vậy $\boxed{BC\colon 2x+5y+11=0.}$

Ví dụ 25. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(-1;2)$. Trung tuyến $CM\colon 5x+7y-20=0$ và đường cao $BH\colon 5x-2y-4=0$. Viết phương trình các cạnh AC và BC.

Lời giải. Do $AC \perp BH$ nên phương trình AC có dạng: $2x+5y+m = 0$.
Do $A(-1;2) \in AC \Leftrightarrow -2+10+m = 0 \Leftrightarrow m = -8$.
Suy ra $\boxed{AC\colon 2x+5y-8=0.}$
Do $C = AC \cap CM$ nên tọa độ C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x+5y=8 \\ 5x+7y=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow C(4;0)$$

Đặt $B(a;b)$. Do $B \in BH$ nên $5a-2b-4 = 0$.
Vì M là trung điểm của AB nên tọa độ M là $M\left(\dfrac{-1+a}{2};\dfrac{2+b}{2}\right) \in CM \Leftrightarrow 5\cdot\dfrac{-1+a}{2}+7\cdot\dfrac{2+b}{2}-20 = 0 \Leftrightarrow$

$5a+7b-31=0$

Tọa độ M là nghiệm của hệ: $\begin{cases}5a-2b=4\\5a+7b=31\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\b=3\end{cases} \Rightarrow B(2;3)$

Phương trình cạnh BC là $\boxed{BC\colon 3x+2y-12=0.}$

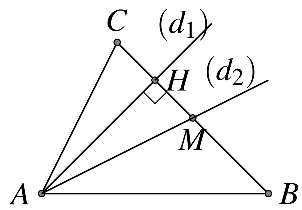
BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 23. Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC nếu cho $B(-4;-5)$ và hai đường cao có phương trình là: $5x+3y-4=0$ và $3x+8y+13=0$.

Lời giải. Đáp số: $AB\colon 3x-5y-13=0$;
$BC\colon 8x-3y+17=0$;
$AC\colon 5x+2y-1=0$.

Bài 24. Cho $\triangle ABC$, biết đỉnh $C(4;-1)$, đường cao và đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A có phương trình tương ứng là $(d_1)\colon 2x-3y+12=0$ và $(d_2)\colon 2x+3y=0$. Lập phương trình các cạnh của $\triangle ABC$.

Lời giải.



- Lập phương trình cạnh BC.
  Vì $BC\perp(d_1)$ nên phương trình (BC) có dạng: $-3x-2y+c=0$ (1)
  Vì $C\in(BC)$ nên: $(-3).4-2.(-1)+c=0 \Leftrightarrow c=10$.
  Thay $c=10$ vào (1) ta được phương trình $(BC)\colon 3x+2y-10=0$.

- Lập phương trình cạnh AC.
  Ta có điểm $A=(d_1)\cap(d_2)$ nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

  $$\begin{cases}2x-3y+12&=0\\2x+3y&=0\end{cases} \Rightarrow A(-3;2)$$

  Phương trình đường thẳng (AC) qua hai điểm $A(-3;2)$ và $C(4;1)$ là:
  $\dfrac{x+3}{4+3}=\dfrac{y-2}{-1-2} \Leftrightarrow (AC)\colon 3x+7y-5=0$.

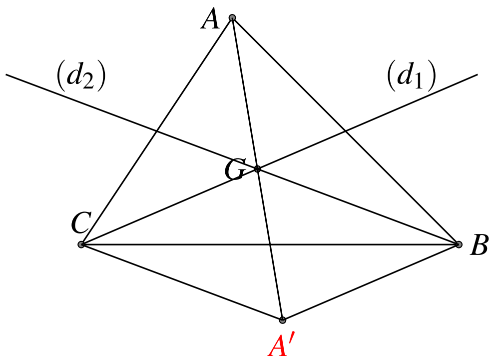
- Lập phương trình cạnh AB.
  Gọi M là trung điểm của BC, khi đó điểm $M=(d_2)\cap(BC)$.
  Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}3x+2y-10&=0\\2x+3y&=0\end{cases} \Rightarrow M(6;4)$.
  Tọa độ điểm B được xác định bởi:

  $$\begin{cases}x_B+x_C&=2x_M\\y_B+y_C&=2y_M\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_B&=2x_M-x_C\\y_B&=2y_M-y_C\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_B=8\\y_B=-7\end{cases}$$

  Phương trình đường thẳng (AB) qua hai điểm $A(-3;2)$ và $B(8;-7)$ là:
  $\dfrac{x-8}{-3-8}=\dfrac{y+7}{2+7} \Leftrightarrow 9x+11y+5=0$

Bài 25. Cho tam giác ABC, biết $A(1;3)$ và hai trung tuyến có phương trình là $x-2y+1=0$ và $y-1=0$. Lập phương trình các cạnh của $\triangle ABC$.

Lời giải.



Để có được phương trình các cạnh của $\triangle ABC$ ta đi xác định tọa độ điểm B, C.

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua trọng tâm G của $\triangle ABC$, khi đó: $\begin{cases} A'B \parallel (d_1) \\ A'C \parallel (d_2) \end{cases}$.

Suy ra: Điểm B là giao điểm của $(A'B)$ và (d_2).
Điểm (C) là giao điểm của $(A'C)$ và (d_1).
Vậy ta lần lượt thực hiện theo các bước sau:

- Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$, khi đó tọa độ của G là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} x-2y+1 &= 0 \\ y-1 &= 0 \end{cases} \Rightarrow G(1;1).$$
- Điểm A' là điểm đối xứng với A qua G, tọa độ của A' được cho bởi:
$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_G - x_A \\ y_{A'} = 2y_G - y_A \end{cases} \Rightarrow A'(1;-1)$$
- Tìm tọa độ điểm B.
Đường thẳng $A'B$ qua điểm $A'(1;-1)$ và song song với đường thẳng d_1 nên nhận véc-tơ $\overrightarrow{CG} = (2;1)$ làm véc-tơ chỉ phương.
Phương trình đường thẳng $A'B$ là: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} \Leftrightarrow x-2y-3=0$.
Điểm $B = A'B \cap d_2$, tọa độ điểm B là nghiệm hệ: $\begin{cases} x-2y-3 &= 0 \\ y-1 &= 0 \end{cases} \Rightarrow B(5;1)$.
- Tương tự, ta có $C(-3;-1)$.
- Phương trình đường thẳng AC qua hai điểm $A(1;3)$ và $C(-3;-1)$ là:
$\dfrac{x-1}{-3-1} = \dfrac{y-3}{-1-3} \Leftrightarrow x-y+2=0$.
- Tương tự ta có: phương trình cạnh AB là: $x+2y-7=0$;
Phương trình cạnh BC là: $x-4y-1=0$.

Bài 26. Cho tam giác ABC có phân giác của góc A có phương trình là: $d_1: x+y+2=0$; đường cao vẽ từ B có phương trình là $d_2: 2x-y+1=0$, cạnh AB qua $M(1;-1)$. Tìm phương trình cạnh AC của tam giác.

Bài 27. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, hãy xác định tọa độ đỉnh C của tam giác ABC biết rằng hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB là điểm $H(-1;-1)$, đường phân giác trong của góc A có phương trình $x-y+2=0$ và đường cao kẻ từ B có phương trình $4x+3y-1=0$.

Lời giải. Phương trình đường thẳng d qua $H(-1;-1)$ và vuông góc với $\Delta: x-y+2=0$ có dạng $1(x+1)+1(y+1)=0$.
Giao điểm I của d và Δ là nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} x+y+2=0 \\ x-y+2=0 \end{cases} \Rightarrow I(-2;0)$$

Gọi K là điểm đối xứng của H qua Δ thì $K(-3;1)$.
AC qua K và vuông góc với đường cao: $4x+3y-1=0$.
Phương trình AC: $3(x+3)-4(y-1)=0 \Leftrightarrow 3x-4y+13=0$.
Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x-4y+13 &= 0 \\ x-y+2 &= 0 \end{cases} \Rightarrow A(5;7)$$

CH qua H và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{HA}=2\overrightarrow{n}$ với $\overrightarrow{n}=(3;4)$.
Phương trình $CH:\ 3(x+1)+4(y+1)=0$.
Tọa độ C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x+4y+7 &= 0 \\ 3x-4y+13 &= 0 \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{10}{3};\frac{3}{4}\right)$$

§2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Phương trình đường tròn khi biết tâm và bán kính

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, phương trình đường tròn nhận điểm $I(a;b)$ làm tâm và có bán kính R là

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

2. Dạng khác của phương trình đường tròn

Phương trình dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ là phương trình của một đường tròn khi và chỉ khi

$$a^2+b^2-c>0$$

Khi đó, tâm là $I(a;b)$, bán kính là $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

3. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

Sau đây, ta có 2 công thức phương trình tiếp tuyến của đường tròn tại một điểm thuộc đường tròn (công thức tách đôi).

- Phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ tại điểm $M(x_0;y_0)$ thuộc đường tròn là
$$(x_0-a).(x-a)+(y_0-a).(y-a)=R^2.$$
- Phương trình tiếp tuyến của đường tròn $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ tại điểm $M(x_0;y_0)$ thuộc đường tròn là
$$x_0x+y_0y-a(x_0+x)-b(y_0+y)+c=0.$$

Không dùng công thức tách đôi này, ta vẫn có thể viết được phương trình tiếp tuyến bằng cách tìm toạ đoạ độ véc-tơ pháp tuyến của tiếp tuyến này là $\overrightarrow{IM}=(x_0-a;y_0-a)$.

II. Các dạng toán

Dạng 1. Tìm tâm và bán kính đường tròn.

Phương pháp giải:

- *Cách 1*. Đưa phương trình về dạng: $(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ (1). Xét dấu biểu thức $P=a^2+b^2-c$.
  - Nếu $P>0$ thì (1) là phương trình đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.
  - Nếu $P\leq 0$ thì (1) không phải là phương trình đường tròn.
- *Cách 2*. Đưa phương trình về dạng: $(x-a)^2+(y-b)^2=P$ (2).
  - Nếu $P>0$ thì (2) là phương trình đường tròn có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{P}$.
  - Nếu $P\leq 0$ thì (2) không phải là phương trình đường tròn.

Ví dụ 1. Xét xem các phương trình sau có là phương trình của đường tròn không? Hãy xác định tâm và bán kính của các đường tròn đó (nếu có).

a) $x^2+y^2+2x-4y+9=0$ (1).

b) $x^2+y^2-6x+4y+13=0$ (2).

c) $2x^2+2y^2-6x-4y-1=0$ (3).

d) $2x^2+y^2+2x-3y+9=0$ (4).

Lời giải.

a) Phương trình (1) có dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ với $a=-1;b=2;c=9$.
Ta có $a^2+b^2-c=1+4-9<0$.
Vậy phương trình (1) không phải là phương trình đường tròn.

b) Ta có: $a^2+b^2-c=9+4-13=0$.
Suy ra phương trình (2) không phải là phương trình đường tròn.

c) Ta có: $(3)\Leftrightarrow x^2+y^2-3x-2y-\dfrac{1}{2}=0\Leftrightarrow \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+(y-1)^2=\dfrac{5}{2}$.
Vậy phương trình (3) là phương trình đường tròn tâm $I\left(\dfrac{3}{2};1\right)$ bán kính $R=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

d) Phương trình (4) không phải là phương trình đường tròn vì hệ số của x^2 và y^2 khác nhau.

Ví dụ 2. Xét xem các phương trình sau có là phương trình của đường tròn không? Hãy xác định tâm và bán kính của các đường tròn đó (nếu có).

a) $x^2+y^2+2x-6y-15=0$ (1).

b) $2x^2+2y^2+4x+8y+14=0$ (2).

Lời giải.

a) Ta có: $\begin{cases}-2a=2\\-2b=-6\\c=-15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=3\\c=-15\end{cases}\Rightarrow a^2+b^2-c=25>0$.
Vậy phương trình (1) là phương trình của đường tròn (C) có tâm $I(-1;\,3)$ và bán kính $R=5$.

b) Ta có: $(2)\Leftrightarrow x^2+y^2+2x+4y+7=0\Rightarrow\begin{cases}-2a=2\\-2b=4\\c=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-2\\c=7\end{cases}\Rightarrow a^2+b^2-c=-2<0$.
Vậy phương trình (2) không là phương trình của đường tròn.

Ví dụ 3. Cho phương trình $x^2+y^2-2mx-4(m-2)y+6-m=0$ (1). Tìm điều kiện của m để (1) là phương trình đường tròn.

Lời giải. Phương trình (1) là phương trình đường tròn khi và chỉ khi $a^2+b^2-c>0$, với $a=m;b=2(m-2);c=6-m$.

Hay $m^2+4(m-2)^2-6+m>0\Leftrightarrow 5m^2-15m+10>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>2\\m<1\end{array}\right.$.

Dạng 2. Lập phương trình đường tròn.

Phương pháp giải:

- *Cách 1.*
  - Tìm toạ độ tâm $I(a;b)$ của đường tròn (C)
  - Tìm bán kính R của đường tròn (C)
  - Viết phương trình của (C) theo dạng $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.
- *Cách 2.*
  - Giả sử phương trình đường tròn (C) là: $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ (hoặc $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$).
  - Từ điều kiện của đề bài thiết lập hệ phương trình với ba ẩn là a,b,c.
  - Giải hệ để tìm a,b,c, từ đó tìm được phương trình đường tròn (C).

Chú ý:

- Cho đường tròn (C) có tâm I và bán kính R. $A\in(C)\Leftrightarrow IA=R$.
- (C) tiếp xúc với đường thẳng Δ tại $A\Leftrightarrow IA=\mathrm{d}(I;\Delta)=R$.
- (C) tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và $\Delta_2\Leftrightarrow \mathrm{d}(I;\Delta_1)=\mathrm{d}(I;\Delta_2)=R$.
- (C) cắt đường thẳng Δ_3 theo dây cung có độ dài $a\Leftrightarrow (\mathrm{d}(I;\Delta_3))^2+\dfrac{a^2}{4}=R^2$.

Ví dụ 4. Lập phương trình đường tròn có tâm $I(3;-5)$ bán kính $R=2$.

Lời giải. Ta có phương trình đường tròn là $(x-3)^2+(y+5)^2=2^2\Leftrightarrow x^2+y^2-6x+10y+30=0$.

Ví dụ 5. Lập phương trình đường tròn đường kính AB với $A(1;6), B(-3;2)$.

Lời giải. Đường tròn đường kính AB có:

- Tâm $I(-1;4)$ là trung điểm AB.
- Bán kính $R=\dfrac{AB}{2}=2\sqrt{2}$.

Do đó phương trình đường tròn là:
$(x+1)^2+(y-4)^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2\Leftrightarrow x^2+y^2+2x-8y+9=0$.

Ví dụ 6. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm $I(-1;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x-2y+7=0$.

Lời giải. Bán kính đường tròn (C) chính là khoảng cách từ I tới đường thẳng Δ nên

$$R=\mathrm{d}(I;\Delta)=\frac{|-1-4-7|}{\sqrt{1+4}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Vậy phương trình đường tròn (C) là: $(x+1)^2+(y-2)^2=\dfrac{4}{5}$.

Ví dụ 7. Viết phương trình đường tròn tâm $I(-2;1)$, cắt đường thẳng $\Delta: x-2y+3=0$ tại hai điểm A,B thỏa mãn $AB=2$.

Lời giải. Gọi h là khoảng cách từ I đến đường thẳng Δ. Ta có:

$$h = \mathrm{d}(I,\Delta) = \frac{|-2-2+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Gọi R là bán kính đường tròn, từ giả thiết suy ra:

$$R = \sqrt{h^2+\frac{AB^2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{5}+\frac{2^2}{4}} = \sqrt{\frac{6}{5}}.$$

Vậy phương trình đường tròn là: $(x+2)^2+(y-1)^2 = \dfrac{6}{5}$.

Ví dụ 8. Lập phương trình đường tròn đi qua ba điểm: $M(-2;4), N(5;5), P(6;-2)$.

Lời giải.

- *Cách 1*. Gọi phương trình đường tròn (C) có dạng là: $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$.
  Do đường tròn đi qua ba điểm M,N,P nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4+16+4a-8b+c=0 \\ 25+25-10a-10b+c=0 \\ 36+4-12a+4b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=-20 \end{cases}$$

  Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $x^2+y^2-4x-2y-20=0$.

- *Cách 2*. Gọi $I(x;y)$ và R là tâm và bán kính đường tròn cần tìm. Ta suy ra:

$$IM = IN = IP \Leftrightarrow \begin{cases} IM^2 = IN^2 \\ IM^2 = IP^2 \end{cases}.$$

  nên ta có hệ

$$\begin{cases} (x+2)^2+(y-4)^2 = (x-5)^2+(y-5)^2 \\ (x+2)^2+(y-4)^2 = (x-6)^2+(y+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}.$$

  Suy ra $I(2;1)$, bán kính $IA=5$.
  Vậy phương trình đường tròn cần tìm $(C):(x-2)^2+(y-1)^2=25$.

Ví dụ 9. Cho hai điểm $A(8;0)$ và $B(0;6)$.

a) Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB.

b) Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB.

Lời giải.

a) Ta có tam giác OAB vuông ở O nên tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm của cạnh huyền AB suy ra $I(4;3)$ và bán kính $R = IA = \sqrt{(8-4)^2+(0-3)^2} = 5$.
Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là: $(x-4)^2+(y-3)^2=25$.

b) Ta có $OA = 8; OB = 6; AB = \sqrt{8^2+6^2} = 10$.
Mặt khác $\frac{1}{2}OA.OB = pr$(vì cùng bằng diện tích tam giác ABC).
Suy ra $r = \dfrac{OA.OB}{OA+OB+AB} = 2$.
Dễ thấy đường tròn cần tìm có tâm thuộc góc phần tư thứ nhất và tiếp xúc với hai trục tọa độ nên tâm của đường tròn có tọa độ là $(2;2)$.
Vậy phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB là $(x-2)^2+(y-2)^2 = 4$.

Ví dụ 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: 2x-y-5=0$ và hai điểm $A(1;2), B(4;1)$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm thuộc d và đi qua hai điểm A, B.

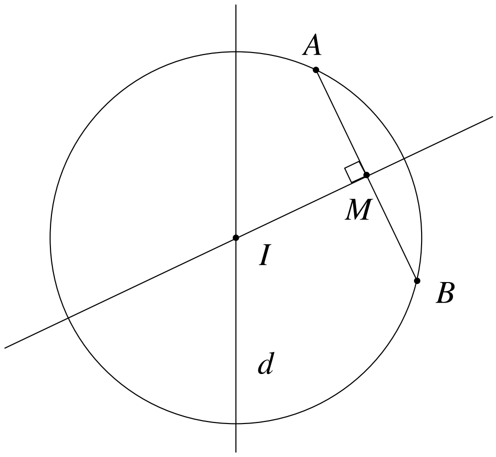
Lời giải.

- *Cách 1*. Gọi I là tâm của (C). Do $I \in d$ nên $I(t; 2t-5)$.
Hai điểm A, B cùng thuộc (C) nên

$$IA = IB \Leftrightarrow (1-t)^2+(7-2t)^2 = (4-t)^2+(6-2t)^2$$
$$\Leftrightarrow t = 1$$

Suy ra $I(1;-3)$ và bán kính $R = IA = 5$.
Vậy phương trình đường tròn cần tìm là:

$$(C): (x-1)^2+(y+3)^2 = 25.$$



- *Cách 2*. Gọi $M\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$ là trung điểm AB. Đường trung trực của đoạn AB đi qua M và nhận $\overrightarrow{AB} = (3;-1)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình $\Delta: 3x-y-6=0$.
Tọa độ tâm I của (C) là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x-y-5=0 \\ 3x-y-6=0 \end{cases} \Rightarrow I(1;-3)$.
Bán kính của đường tròn bằng $R = IA = 5$.
Vậy phương trình đường tròn cần tìm $(C): (x-1)^2+(y+3)^2 = 25$.

Ví dụ 11. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: x+3y+8=0$, $d_2: 3x-4y+10=0$ và điểm $A(-2;1)$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm thuộc d_1, đi qua điểm A và tiếp xúc với d_2.

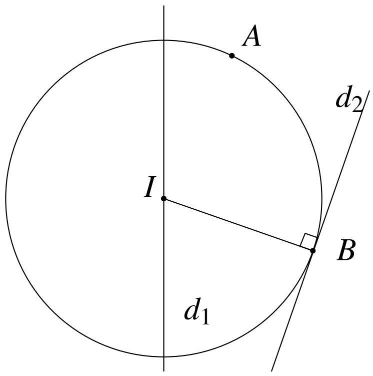
Lời giải.

Gọi I là tâm của (C). Do $I \in d_1$ nên $I(-3t-8;t)$.
Theo giả thiết bài toán, ta có

$$\mathrm{d}(I,d_2) = IA \Leftrightarrow \frac{|3(-3t-8)-4t+10|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \sqrt{(-3t-8+2)^2+(t-1)^2}$$
$$\Leftrightarrow t = -3.$$

Suy ra $I(1;-3)$ và bán kính $R = IA = 5$.
Vậy phương trình đường tròn cần tìm là

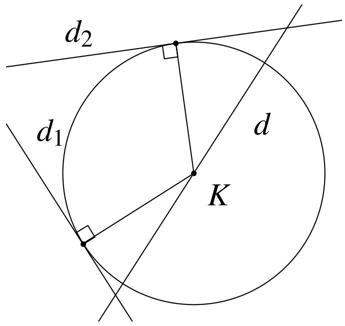
$$(C): (x-1)^2+(y+3)^2 = 25.$$



Ví dụ 12. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm nằm trên đường thẳng $d: x-6y-10=0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng có phương trình $d_1: 3x+4y+5=0$ và $d_2: 4x-3y-5=0$.

Lời giải.

Vì đường tròn cần tìm có tâm K nằm trên đường thẳng d nên gọi $K(6a+10;a)$
Mặt khác đường tròn tiếp xúc với d_1, d_2 nên khoảng cách từ tâm K đến hai đường thẳng này bằng nhau và bằng bán kính R suy ra



$$\frac{|3(6a+10)+4a+5|}{5} = \frac{|4(6a+10)-3a-5|}{5}$$
$$\Leftrightarrow |22a+35| = |21a+35|$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=\dfrac{-70}{43} \end{array}\right.$$

- Với $a=0$ thì $K(10;0)$ và $R=7$ suy ra $(C):(x-10)^2+y^2=49$
- Với $a=\dfrac{-70}{43}$ thì $K\left(\dfrac{10}{43};\dfrac{-70}{43}\right)$ và $R=\dfrac{7}{43}$ suy ra $(C):\left(x-\dfrac{10}{43}\right)^2+\left(y+\dfrac{70}{43}\right)^2=\left(\dfrac{7}{43}\right)^2$

Vậy có hai đường tròn thỏa mãn có phương trình là
$(C):(x-10)^2+y^2=49$ và $(C):\left(x-\dfrac{10}{43}\right)^2+\left(y+\dfrac{70}{43}\right)^2=\left(\dfrac{7}{43}\right)^2$.

Ví dụ 13. Viết phương trình đường tròn tâm I thuộc đường thẳng $d_1: x-y+1=0$, bán kính $R=2$ và cắt đường thẳng $d_2: 3x-4y=0$ tại hai điểm A,B thỏa mãn $AB=2\sqrt{3}$.

Lời giải. Tâm I thuộc đường thẳng d_1 nên suy ra $I(a;a+1)$.

$$\mathrm{d}(I,d_2)=\sqrt{R^2-\frac{AB^2}{4}}=\sqrt{4-\frac{12}{4}}=1.$$

Do đó

$$\frac{|3a-4(a+1)|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1 \Leftrightarrow |-a-4|=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-9 \end{array}\right.$$

- Với $a=1$ ta có $I(1;2)$, phương trình đường tròn là: $(x-1)^2+(y-2)^2=4$.
- Với $a=-9$ ta có $I(-9;-8)$, phương trình đường tròn là: $(x+9)^2+(y+8)^2=4$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, lập phương trình đường tròn đi qua ba điểm $A(-1;3)$, $B(1;4)$, $C(3;2)$.
Lời giải. Gọi phương trình đường tròn là $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$. Do đường tròn qua $A(-1;3), B(1;4), C(3;2)$ nên ta có

$$\begin{cases} (-1)^2+3^2-2(-1)a-2.3.b+c=0 \\ 1^2+4^2-2.1.a-2.4.b+c=0 \\ 3^2+2^2-2.3.a-2.2.b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-6b+c=-10 \\ -2a-8b+c=-17 \\ -6a-4b+c=-13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{5}{6} \\ b=\dfrac{11}{6} \\ c=\dfrac{-2}{3} \end{cases}.$$

Phương trình đường tròn là $x^2+y^2-\dfrac{5}{3}x-\dfrac{11}{3}y-\dfrac{2}{3}=0$.

Bài 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: 2x-y-4=0$. Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với các trục tọa độ và có tâm ở trên đường thẳng d.

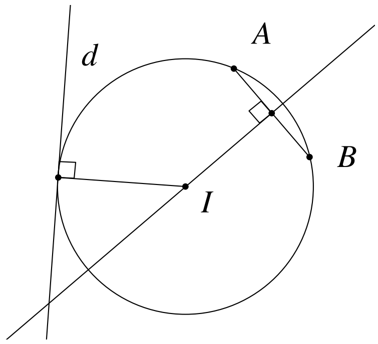
Lời giải. Gọi $I(m;2m-4)\in d$ là tâm đường tròn (C). Theo giả thiết bài toán, ta có

$$\mathrm{d}(I,Ox)=\mathrm{d}(I,Oy)\Leftrightarrow |2m-4|=|m|\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4\\ m=\dfrac{4}{3}\end{array}\right..$$

- Với $m=\dfrac{4}{3}$, suy ra $I\left(\dfrac{4}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$. Bán kính đường tròn $R=\mathrm{d}(I,Oy)=|m|=\dfrac{4}{3}$.
  Vậy phương trình đường tròn $(C):\left(x-\dfrac{4}{3}\right)^2+\left(y+\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{16}{9}$.
- Với $m=4$, suy ra $I(4;4)$. Bán kính đường tròn $R=\mathrm{d}(I,Oy)=|m|=4$.
  Vậy phương trình đường tròn $(C):(x-4)^2+(y+4)^2=16$.

Bài 3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-1;1)$, $B(3;3)$ và đường thẳng $d: 3x-4y+8=0$. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua hai điểm A,B và tiếp xúc với d.

Lời giải.



Đường trung trực Δ đi qua $M(1;2)$ là trung điểm AB và nhận $\overrightarrow{AB}=(4;2)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình $\Delta: 2x+y-4=0$.
Do (C) đi qua hai điểm A,B nên tâm I của (C) thuộc trung trực Δ nên $I(t;4-2t)$.
Theo giả thiết bài toán, ta có

$$\begin{aligned} IA=\mathrm{d}(I,d) &\Leftrightarrow \sqrt{(-1-t)^2+(2t-3)^2}=\frac{|3t-4(4-2t)+8|}{\sqrt{9+16}}\\ &\Leftrightarrow 5\sqrt{5t^2-10t+10}=|11t-8|\Leftrightarrow 2t^2-37t+93=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3\\ t=\dfrac{31}{2}\end{array}\right.\end{aligned}$$

- Với $t=3$, suy ra $I(3;-2)$. Bán kính $R=IA=5$. Khi đó phương trình đường tròn cần tìm là
  $$(C):(x-3)^2+(y+2)^2=25.$$
- Với $t=\dfrac{31}{2}$, suy ra $I\left(\dfrac{31}{2};-27\right)$. Bán kính $R=IA=\dfrac{65}{2}$. Khi đó phương trình đường tròn cần tìm là
  $$(C):\left(x-\frac{31}{2}\right)^2+(y+27)^2=\frac{4225}{4}.$$

Bài 4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d: x+2y-3=0$ và $\Delta: x+3y-5=0$. Viết phương trình đường tròn (C) có bán kính bằng $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$, có tâm thuộc d và tiếp xúc với Δ.

Lời giải. Gọi $I(-2t+3;t)\in d$ là tâm của (C). Theo giả thiết bài toán, ta có

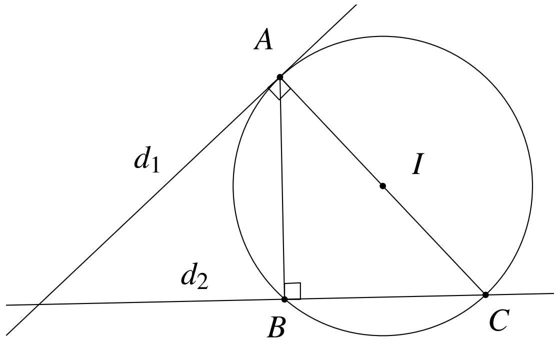
$$\mathrm{d}(I,\Delta)=R\Leftrightarrow \frac{|a-2|}{\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=6\\ a=-2\end{array}\right..$$

- Với $a=6$, suy ra $I(-9;6)$. Phương trình đường tròn $(C):(x+9)^2+(y-6)^2=\dfrac{8}{5}$.

- Với $a=-2$, suy ra $I(7;-2)$. Phương trình đường tròn $(C):(x-7)^2+(y+2)^2=\dfrac{8}{5}$.

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1:\sqrt{3}x+y=0$. và $d_2:\sqrt{3}x-y=0$. Gọi (C) là đường tròn tiếp xúc với d_1 tại A, cắt d_2 tại hai điểm B,C sao cho tam giác ABC vuông tại B. Viết phương trình của (C), biết tam giác ABC có diện tích bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.

Lời giải.



Vì $A\in d_1\Rightarrow A\left(a;-\sqrt{3}a\right),a>0;B,C\in d_2\Rightarrow B\left(b;\sqrt{3}b\right),C\left(c;\sqrt{3}c\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}\left(b-a;\sqrt{3}(a+b)\right),\overrightarrow{AC}\left(c-a;\sqrt{3}(c+a)\right)$.

Tam giác ABC vuông tại B do đó AC là đường kính của đường tròn (C).

Do đó

$$\begin{aligned}AC\perp d_1&\Rightarrow\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{u_1}=0\\&\Rightarrow-1.(c-a)+\sqrt{3}.\sqrt{3}(a+c)=0\\&\Rightarrow 2a+c=0(1)\\AB\perp d_2&\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2}=0\\&\Rightarrow 1.(b-a)+3(a+b)=0\\&\Rightarrow 2b+a=0(2)\end{aligned}$$

Mặt khác $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(A;d_2\right).BC\Rightarrow\dfrac{1}{2}.\dfrac{\left|2\sqrt{3}a\right|}{2}\sqrt{(c-b)^2+3(c-b)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow 2a\left|c-b\right|=1(3)$

Từ (1), (2) suy ra $2(c-b)=-3a$ thế vào (3) ta được $a\left|-3a\right|=1\Leftrightarrow a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Do đó $b=-\dfrac{\sqrt{3}}{6},c=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\Rightarrow A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3};-1\right),C\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3};-2\right)$.

Suy ra (C) nhận $I\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{6};-\dfrac{3}{2}\right)$ là trung điểm của AC làm tâm và bán kính là $R=\dfrac{AC}{2}=1$.

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $(C):\left(x+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2=1$

Bài 6. Cho ba đường thẳng $d_1:x-y+1=0$, $d_2:3x-4y=0$, $d_3:4x-3y-3=0$. Viết phương trình đường tròn tâm I thuộc đường thẳng d_1, cắt đường thẳng d_2 tại hai điểm A,B và cắt đường thẳng d_3 tại hai điểm C,D sao cho $AB=CD=2\sqrt{3}$.

Lời giải. Tâm I thuộc đường thẳng d_1 nên suy ra $I\left(a;a+1\right)$.

$$\mathrm{d}\left(I,d_2\right)=\sqrt{R^2-\frac{AB^2}{4}}=\sqrt{R^2-3}$$
$$\mathrm{d}\left(I,d_3\right)=\sqrt{R^2-\frac{AB^2}{4}}=\sqrt{R^2-3}$$

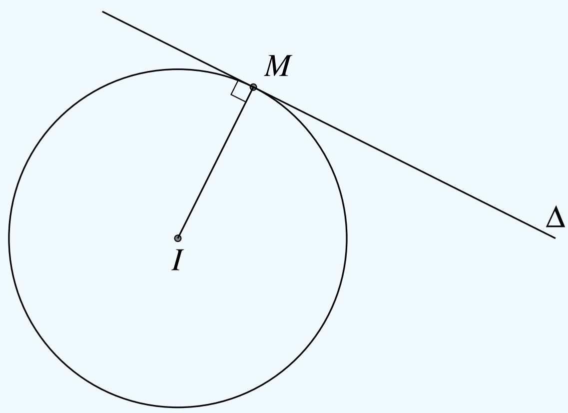
Suy ra

$$\mathrm{d}\left(I,d_2\right)=\mathrm{d}\left(I,d_3\right)\Rightarrow\frac{\left|-a-4\right|}{5}=\frac{\left|a-6\right|}{5}\Rightarrow a=1.$$

Với $a=1$ ta có $I\left(1;2\right)$ và $R=2$, phương trình đường tròn là: $(x-1)^2+(y-2)^2=4$.

Dạng 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn tại một điểm

Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) của đường tròn (C) tâm $I(a,b)$, tại điểm $M(x_0,y_0) \in (C)$.
Ta có $\overrightarrow{IM} = (x_0-a;y_0-b)$ là véc-tơ pháp tuyến của Δ.
Do đó Δ có phương trình là $(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0$.



Ví dụ 14. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C):(x-2)^2+(y+3)^2=5$ tại điểm $M(3;-1)$.

Lời giải. Đường tròn (C) có tâm $I(2;-3)$.
Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(3;-1)$ là:

$$\begin{aligned}&(3-2)(x-3)+(-1+3)(y+1)=0\\ \Leftrightarrow\ &x+2y-1=0.\end{aligned}$$

Vậy phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(3;-1)$ là $x+2y-1=0$.

Ví dụ 15. Cho đường tròn $(C_m): x^2+y^2+2(m-1)x-2my-4=0$. Biết rằng khi m thay đổi, đường tròn (C_m) luôn đi qua điểm I cố định có hoành độ dương. Tìm giá trị của m sao cho tiếp tuyến của đường tròn (C_m) tại I song song với $(d): x-2y-1=0$.

Lời giải. Giả sử đường tròn (C_m) luôn đi qua điểm $I(x_0;y_0)$ cố định khi m thay đổi.
Khi đó ta có

$$\begin{aligned}&x_0^2+y_0^2+2(m-1)x_0-2my_0-4=0 \text{ với mọi } m\\ \Leftrightarrow\ &m(2x_0-2y_0)+x_0^2+y_0^2-2x_0-4=0 \text{ với mọi } m\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}x_0=y_0\\ x_0^2+y_0^2-2x_0-4=0\end{cases}\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}x_0=y_0\\ 2x_0^2-2x_0-4=0\end{cases}\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x_0=y_0=-1\\ x_0=y_0=2.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy ta có điểm $I(2;2)$.
Đường tròn (C_m) có tâm $J(1-m;m)$. Véc-tơ pháp tuyến của tiếp tuyến của (C_m) tại I là $\overrightarrow{IJ}=(-m-1;m-2)$.
Để tiếp tuyến tại I song song với $(d): x-2y-1=0$ thì tồn tại k sao cho:

$$\overrightarrow{IJ}=k(1;-2) \Leftrightarrow \begin{cases}-m-1=k\\ m-2=-2k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=-4\\ k=3.\end{cases}$$

Vậy $m = -4$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 7. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C) : (x+2)^2 + (y-3)^2 = 5$ tại điểm $M(-1;1)$.
Lời giải. Đường tròn (C) có tâm $I(-2;3)$.
Phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M(-1;1)$ là $1(x+1)-2(y-1)=0$ hay $x-2y+3=0$.

Bài 8. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C) : x^2+y^2-2x=0$ tại điểm $M(1;1)$.
Lời giải. Đường tròn (C) có tâm $I(1;0)$.
Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(1;1)$ là $y=1$.

Bài 9. Cho đường tròn $(C) : x^2+y^2-2x-4y+1=0$ và đường thẳng $(\Delta) : y-x+1=0$. Gọi M,N là giao điểm của (C) và (Δ). Tìm tọa độ giao điểm của tiếp tuyến của đường tròn (C) kẻ tại M,N.
Lời giải. Tọa độ M,N là giao điểm của hệ phương trình sau

$$\begin{cases} y-x+1=0 \\ x^2+y^2-2x-4y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-1 \\ 2y^2-4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1; y=0 \\ x=3; y=2. \end{array} \right.$$

Không mất tổng quát, ta giả sử $M(1;0)$ và $N(3;2)$. Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$.
Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y=0$.
Phương trình tiếp tuyến của (C) tại N là $x=3$.

Tọa độ giao điểm của hai tiếp tuyến là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} y=0 \\ x=3 \end{cases}$.

Vậy tọa độ giao điểm của hai tiếp tuyến là $A(3;0)$.

Bài 10. Cho hai đường tròn $(C_1) : x^2+y^2+2x-2y-3=0$ và $(C_2) : x^2+y^2-4x-14y+33=0$.

a) Chứng minh rằng (C_1) và (C_2) tiếp xúc với nhau.

b) Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn tại tiếp điểm.

Lời giải.

a) Đường tròn (C_1) có tâm $I(-1;1)$ và bán kính $R_1 = \sqrt{5}$.
Đường tròn (C_2) có tâm $J(2;7)$ và bán kính $R_2 = 2\sqrt{5}$.
Ta có $IJ = \sqrt{(2+1)^2+(7-1)^2} = 3\sqrt{5} = R_1+R_2$. Do đó (C_1) tiếp xúc ngoài với (C_2).

b) Gọi M là tiếp điểm của (C_1) và (C_2).
Khi đó ta có $\overrightarrow{IJ} = 3\overrightarrow{IM} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OJ} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{OI}$.
Suy ra $M(0;3) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = (1;2)$.
Phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn tại M là $x+2(y-3)=0$ hay $x+2y-6=0$.

Bài 11. Cho đường tròn $(C_m) : x^2+y^2-(m-2)x+2my-1=0$.

a) Chứng minh rằng khi m thay đổi, đường tròn (C_m) luôn đi qua điểm cố định.

b) Gọi I là điểm cố định ở câu trên sao cho I có hoành độ âm. Tìm m sao cho tiếp tuyến của đường tròn (C_m) tại I song song với đường thẳng $(d) : x+2y=0$.

Lời giải.

a) Giả sử $I(x_0;y_0)$ là điểm cố định thuộc đường tròn (C_m) khi m thay đổi. Khi đó ta có

$$x_0^2+y_0^2-(m-2)x_0+2my_0-1=0 \text{ với mọi } m.$$

Điều này tương đương với

$$(2y_0 - x_0)m + x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 - 1 = 0 \text{ với mọi } m.$$

Do đó $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2y - x = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 5y^2 + 4y - 1 = 0. \end{cases}$

Giải hệ trên ta được hai nghiệm $(-2; -1)$ và $\left(\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

Vậy (C_m) luôn đi hai điểm cố định là $(-2; -1)$ và $\left(\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right)$ khi m thay đổi.

b) Vì $x_I < 0$ nên $I(-2; -1)$. Đường tròn (C_m) có tâm $J\left(\frac{m-2}{2}; -m\right)$.

Véc-tơ pháp tuyến của tiếp tuyến tại I là $\overrightarrow{IJ} = \left(\frac{m+2}{2}; -m+1\right)$.

Để tiếp tuyến tại I song song với $(d): x + 2y = 0$ thì $\overrightarrow{IJ}$ cùng phương với $\overrightarrow{n} = (1; 2)$, điều này tương đương với

$$\frac{m+2}{2} = \frac{-m+1}{2} \Leftrightarrow m + 2 = -m + 1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

Dạng 4. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn đi một điểm

Cho đường tròn (C) có tâm $I(a, b)$ và bán kính R. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $M(x_0, y_0)$.

a) Nếu $IM < R$ thì không có tiếp tuyến nào đi qua M.

b) Nếu $IM = R$ thì ta giải theo dạng 1.

c) Nếu $IM > R$ thì ta thực hiện theo các bước bên dưới.

- Gọi phương trình tiếp tuyến (Δ) của (C) đi qua M có dạng $m(x - x_0) + n(y - y_0) = 0$, trong đó $m^2 + n^2 \neq 0$.
- Sử dụng điều kiện tiếp xúc của tiếp tuyến với đường tròn ta có $\mathrm{d}(I, \Delta) = R$. Giải phương trình trên ta tìm được quan hệ giữa a, b.

Ví dụ 16. Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) của đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 8$ biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(3; -2)$.

Lời giải. Đường tròn (C) có tâm $I(1; 2)$ và bán kính $R = \sqrt{8}$.
Ta có $IM = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-2)^2} = 2\sqrt{5}$.
Gọi phương trình tiếp tuyến (Δ) của (C) và đi qua $M(3; -2)$ là $a(x-3) + b(y+2) = 0$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$.
Ta có $\mathrm{d}(I, \Delta) = \frac{|a(1-3) + b(2+2)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{8} \Leftrightarrow \frac{|-2a + 4b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{8}$.

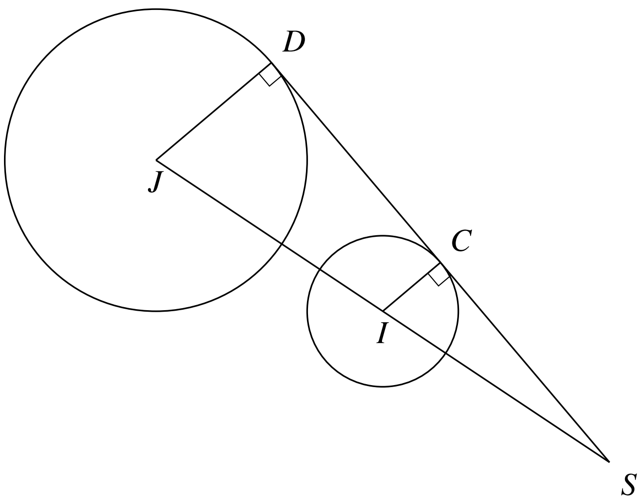
Phương trình trên tương đương với

$$\begin{aligned}
&|-2a+4b| = \sqrt{8a^2+8b^2}\\
\Leftrightarrow &(2a-4b)^2 = 8a^2+8b^2\\
\Leftrightarrow &8b^2-16ab-4a^2=0\\
\Leftrightarrow &2b^2-4ab-a^2=0\\
\Leftrightarrow &\left[\begin{array}{l} b=\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}a\\ b=\dfrac{2-\sqrt{6}}{2}a. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

- Nếu $b=\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}a$ thì ta chọn $a=2\Rightarrow b=2+\sqrt{6}$.
  Khi đó phương trình của tiếp tuyến (Δ) là:
  $$2(x-3)+(2+\sqrt{6})(y+2)=0 \text{ hay } 2x+(2+\sqrt{6})y+2\sqrt{6}-2=0.$$
- Nếu $b=\dfrac{2-\sqrt{6}}{2}a$ thì ta chọn $a=2\Rightarrow b=2-\sqrt{6}$.
  Khi đó phương trình của tiếp tuyến (Δ) là:
  $$2(x-3)+(2-\sqrt{6})(y+2)=0 \text{ hay } 2x+(2-\sqrt{6})y-2\sqrt{6}-2=0.$$

Ví dụ 17. Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn $(C_1): x^2+y^2-2x+2y+1=0$ và $(C_2): x^2+y^2+4x-2y+1=0$ sao cho (C_1)và (C_2) nằm cùng một nửa mặt phẳng bờ là tiếp tuyến đó (tiếp tuyến này được gọi là tiếp tuyến chung ngoài).

Lời giải. Đường tròn (C_1) có tâm $I(1;-1)$ và bán kính $R_1=1$. Đường tròn (C_2) có tâm $J(-2;1)$ và bán kính $R_2=2$.



Gọi S là giao điểm của tiếp tuyến ngoài và IJ. Gọi C,D lần lượt là tiếp điểm của tiếp tuyến với đường tròn (C_1) và (C_2).

Theo định lý Thales ta có $\dfrac{SI}{SJ}=\dfrac{CI}{DJ}=\dfrac{1}{2}$.

Vì vậy ta có $\overrightarrow{SJ}=2\overrightarrow{SI}$. Do đó $\overrightarrow{OS}=2\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OJ}\Rightarrow S(4;-3)$.

Gọi phương trình tiếp tuyến (Δ) tiếp xúc với $(C_1),(C_2)$ và đi qua S là $a(x-4)+b(y+3)=0$ trong đó

$a^2+b^2>0$.
Ta có

$$\begin{aligned} d(I,\Delta)=\frac{|2b-3a|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1 &\Rightarrow |2b-3a|=\sqrt{a^2+b^2}\\ &\Rightarrow 8a^2-12ab+3b^2=0\\ &\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}b\\ a=\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}b. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Nếu $a=\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}b$ thì ta chọn $b=4\Rightarrow a=3+\sqrt{3}$. Khi đó phương trình tiếp tuyến (Δ) là

$$(3+\sqrt{3})x+4y-4\sqrt{3}=0.$$

Nếu $a=\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}b$ thì ta chọn $b=4\Rightarrow a=3-\sqrt{3}$. Khi đó phương trình tiếp tuyến (Δ) là

$$(3-\sqrt{3})x+4y+4\sqrt{3}=0.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 12. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C):(x-3)^2+y^2=9$ biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(3;5)$.
Lời giải. Đường tròn (C) có tâm $I(3;0)$ và bán kính $R=3$.
Ta có $IM=\sqrt{0^2+5^2}=5>R=3$.
Gọi tiếp tuyến (Δ) của đường tròn (C) và đi qua M là $a(x-3)+b(y-5)=0$ với $a^2+b^2>0$.
Ta có

$$\begin{aligned} d(I,\Delta)=R &\Rightarrow \frac{|-5b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3\\ &\Rightarrow |5b|=3\sqrt{a^2+b^2}\\ &\Rightarrow b=\pm\frac{3}{4}a. \end{aligned}$$

Nếu $b=-\dfrac{3}{4}a$ thì ta chọn $a=4,b=-3$. Khi đó phương trình tiếp tuyến (Δ) là $4x-3y+3=0$.
Nếu $b=\dfrac{3}{4}a$ thì ta chọn $a=4,b=3$. Khi đó phương trình tiếp tuyến (Δ) là $4x+3y-27=0$.

Bài 13. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C):x^2+y^2+2x-4y+3=0$ biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(-2;5)$.
Lời giải. Đường tròn (C) có tâm $I(-1;2)$ và bán kính $R=\sqrt{2}$.
Gọi phương trình tiếp tuyến (Δ) đi qua điểm $M(-2;5)$ là $a(x+2)+b(y-5)=0$ với $a^2+b^2>0$.
Khi đó ta có

$$\begin{aligned} d(I,\Delta)=\frac{|a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{2} &\Leftrightarrow |a-3b|=\sqrt{2a^2+2b^2}\\ &\Leftrightarrow a^2-6ab+9b^2=2a^2+2b^2\\ &\Leftrightarrow a^2+6ab-7b^2=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b\\ a=-7b. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Nếu $a=b$ thì ta chọn $a=b=1$. Khi đó phương trình tiếp tuyến Δ là $x+y-3=0$.
Nếu $a=-7b$ thì ta chọn $a=7;b=-1$. Khi đó phương trình tiếp tuyến Δ là $7x-y+19=0$.

Bài 14. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-2y-2=0$. Qua điểm $A(1;2)$ kẻ hai tiếp tuyến đến đường tròn (C). Gọi tiếp điểm của hai tiếp tuyến đó là M,N. Tính MN.
Lời giải. Đường tròn (C) có tâm $I(-1;1)$ và bán kính $R=2$.
Gọi tiếp tuyến (Δ) đi qua $A(1,2)$ của đường tròn (C) là $a(x-1)+b(y-2)=0$ với $a^2+b^2>0$.
Ta có

$$\mathrm{d}(I,\Delta)=\frac{|-2a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2 \Rightarrow 4a^2+4ab+b^2=4a^2+4b^2$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ 4a=3b. \end{array}\right.$$

- Nếu $b=0$ thì ta chọn $a=1$. Khi đó phương trình (Δ_1) là $x=1$.
  Tiếp điểm của (Δ_1) và (C) là nghiệm của hệ phương trình

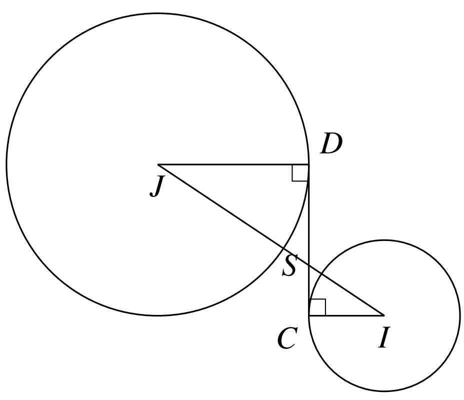
$$\begin{cases} x=1 \\ x^2+y^2+2x-2y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1, y=1.$$

- Nếu $4a=3b$ thì ta chọn $a=3, b=4$. Khi đó phương trình của (Δ_2) là $3x+4y-11=0$.
  Tiếp điểm của (Δ_2) và (C) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x+4y-11=0 \\ x^2+y^2+2x-2y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{11-4y}{3} \\ \dfrac{25y^2}{9}-\dfrac{130y}{9}+\dfrac{169}{9}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{5} \\ y=\dfrac{13}{5}. \end{cases}$$

Vậy $MN=\sqrt{\left(1-\frac{1}{5}\right)^2+\left(1-\frac{13}{5}\right)^2}=\frac{4}{\sqrt{5}}$.

Bài 15. Viết phương trình tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn $(C_1): x^2+y^2-2x+2y+1=0$ và $(C_2): x^2+y^2+4x-2y+1=0$.
Lời giải. Đường tròn (C_1) có tâm $I(1;-1)$ và bán kính $R_1=1$. Đường tròn (C_2) có tâm $J(-2;1)$ và bán kính $R_2=2$.



Gọi S là giao điểm của tiếp tuyến ngoài và IJ. C,D lần lượt là tiếp điểm của tiếp tuyến với đường tròn (C_1) và (C_2).
Theo định lý Thales ta có $\frac{SI}{SJ}=\frac{CI}{DJ}=\frac{1}{2}$.
Vì vậy ta có $\overrightarrow{SJ}=-2\overrightarrow{SI}$. Do đó $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{2OI}+\overrightarrow{OJ} \Rightarrow S\left(0;-\frac{1}{3}\right)$.
Gọi phương trình tiếp tuyến (Δ) tiếp xúc với $(C_1),(C_2)$ và đi qua S là $ax+b\left(y+\frac{1}{3}\right)=0$ trong đó $a^2+b^2>$

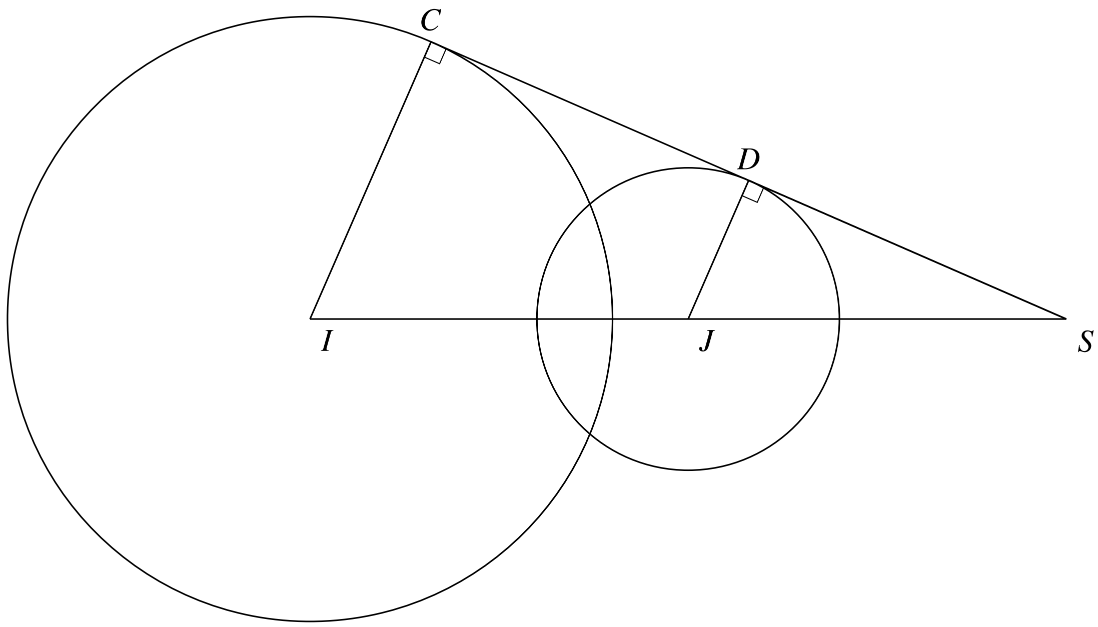
0.
Ta có

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(I,\Delta) = \frac{|a-\frac{2}{3}b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 1 &\Leftrightarrow |2b-3a| = \sqrt{9a^2+9b^2} \\ &\Leftrightarrow 5b^2+12ab=0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ 5b=-12a. \end{array}\right. \end{aligned}$$

- Nếu $b=0$ thì ta chọn $a=1$. Khi đó phương trình tiếp tuyến (Δ) là $x=0$.
- Nếu $5b=-12a$ thì ta chọn $b=-12; a=5$. Khi đó phương trình tiếp tuyến (Δ) là

$$5x-12\left(y+\frac{1}{3}\right)=0 \Leftrightarrow 5x-12y-4=0.$$

Bài 16. Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn $(C_1): x^2+y^2+6x-7=0$ và $(C_2): (x-2)^2+y^2=4$.
Lời giải. Đường tròn (C_1) có tâm $I(-3;0)$ và bán kính $R_1=4$. Đường tròn (C_2) có tâm $J(2;0)$ và bán kính $R_2=2$.
Ta có $IJ=5<R_1+R_2$ nên hai đường tròn cắt nhau. Do đó chúng chỉ có hai tiếp tuyến chung ngoài.



Gọi S là giao điểm của tiếp tuyến ngoài và IJ. C,D lần lượt là tiếp điểm của tiếp tuyến với đường tròn (C_1) và (C_2).
Theo định lý Thales ta có $\dfrac{SI}{SJ}=\dfrac{CI}{DJ}=2$.
Vì vậy ta có $\overrightarrow{SI}=2\overrightarrow{SI}$. Do đó $\overrightarrow{OS}=2\overrightarrow{OJ}-\overrightarrow{OI} \Rightarrow S(7;0)$.
Gọi phương trình tiếp tuyến (Δ) tiếp xúc với $(C_1),(C_2)$ và đi qua S là $a(x-7)+by=0$ trong đó $a^2+b^2>0$.
Ta có

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(I,\Delta) = \frac{|-10a|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 4 &\Leftrightarrow 100a^2 = 16a^2+16b^2 \\ &\Leftrightarrow 84a^2=16b^2 \\ &\Leftrightarrow b=\pm\frac{\sqrt{21}}{2}a. \end{aligned}$$

- Nếu $b = \frac{\sqrt{21}}{2}a$ thì ta chọn $a = 2; b = \sqrt{21}$. Khi đó phương trình tiếp tuyến (Δ) là $2x + \sqrt{21}y - 14 = 0$.
- Nếu $b = -\frac{\sqrt{21}}{2}a$ thì ta chọn $a = 2; b = -\sqrt{21}$. Khi đó phương trình tiếp tuyến (Δ) là $2x - \sqrt{21}y - 14 = 0$.

Dạng 5. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn thỏa mãn điều kiện cho trước

Cho đường tròn (C) có tâm $I(a,b)$ và bán kính R. Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) của (C) có phương xác định trước.

- Viết dạng phương trình tổng quát của Δ.
- Sử dụng điều kiện cho trước và $\mathrm{d}(I,\Delta) = R$ để tìm phương trình tổng quát của Δ.

Ví dụ 18. Tìm điều kiện của tham số a để đường thẳng $(\Delta): x + (a-1)y - a = 0$ tiếp xúc với đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$.

Lời giải. Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$ và bán kính $R = \sqrt{1^2 + 2^2 - 2} = \sqrt{3}$.
Để đường thẳng (Δ) là tiếp tuyến của đường tròn (C) thì

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(I,\Delta) = R &\Leftrightarrow \frac{|1 - 2(a-1) - a|}{\sqrt{1 + (a-1)^2}} = \sqrt{3} \\
&\Leftrightarrow \frac{|3 - 3a|}{\sqrt{a^2 - 2a + 2}} = \sqrt{3} \\
&\Leftrightarrow |3 - 3a| = \sqrt{3a^2 - 6a + 6} \\
&\Leftrightarrow (3 - 3a)^2 = 3a^2 - 6a + 6 \\
&\Leftrightarrow 2a^2 - 4a + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} a &= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

Vậy $a = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ hoặc $a = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ thỏa mãn đề bài.

Ví dụ 19. Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) của đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$ biết rằng tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x + 2y + 5 = 0$.

Lời giải. Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$ và bán kính $R = 1$.
Vì Δ vuông góc với đường thẳng $x + 2y + 5 = 0$ nên phương trình Δ có dạng $2x - y + m = 0$.
Vì Δ là tiếp tuyến của (C) nên ta có

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(I,\Delta) = R &\Leftrightarrow \frac{|2 + 2 + m|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = 1 \\
&\Leftrightarrow |4 + m| = \sqrt{5} \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} m &= \sqrt{5} - 4 \\ m &= -\sqrt{5} - 4. \end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

Nếu $m = \sqrt{5} - 4$ thì phương trình của Δ là $2x - y + \sqrt{5} - 4 = 0$.
Nếu $m = \sqrt{5} - 4$ thì phương trình của Δ là $2x - y - \sqrt{5} - 4 = 0$.

Ví dụ 20. Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) của đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y+4=0$ biết rằng tiếp tuyến hợp với đường thẳng $(d): x+y-5=0$ một góc 45°.

Lời giải. Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2-4}=1$.
Gọi véc-tơ pháp tuyến của Δ là $\overrightarrow{n_1}=(a;b)$ trong đó $a^2+b^2\neq 0$.
Véc-tơ pháp tuyến của d là $\overrightarrow{n_2}=(1;1)$.
Vì (Δ) tạo với d một góc 60° nên ta có

$$\begin{aligned}|cos(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})|=\cos 45^\circ &\Leftrightarrow \frac{|a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &\Leftrightarrow |a+b|=\sqrt{a^2+b^2}\\ &\Leftrightarrow (a+b)^2=a^2+b^2\\ &\Leftrightarrow ab=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=0\\ b=0.\end{array}\right.\end{aligned}$$

- Với $a=0$, phương trình Δ có dạng $y+m=0$.
  Có $\mathrm{d}(I,\Delta)=R\Leftrightarrow \dfrac{|2+m|}{1}=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=-3.\end{array}\right.$
  Khi đó phương trình tiếp tuyến Δ là $y-1=0$ hoặc $y-3=0$.
- Với $b=0$, phương trình Δ có dạng $x+m=0$.
  Có $\mathrm{d}(I,\Delta)=R\Leftrightarrow \dfrac{|1+m|}{1}=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=0\\ m=-2.\end{array}\right.$
  Khi đó phương trình tiếp tuyến Δ là $x=0$ hoặc $x-2=0$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm Δ là $y-1=0$ hoặc $y-3=0$ hoặc $x=0$ hoặc $x-2=0$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 17. Tìm giá trị của tham số m sao cho đường thẳng $(\Delta): (m-1)y+mx-2=0$ là tiếp tuyến của đường tròn $(C): x^2+y^2-6x+5=0$.
Lời giải. Đường tròn (C) có tâm $I(3;0)$ và bán kính $R=2$.
Để (Δ) là tiếp tuyến của đường tròn (C) thì ta phải có

$$\mathrm{d}(I,\Delta)=\frac{|3m-2|}{\sqrt{(m-1)^2+m^2}}=2\Leftrightarrow 4(2m^2-2m+1)=9m^2-12m+4\Leftrightarrow m^2-4m=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=0\\ m=4.\end{array}\right.$$

Bài 18. Cho đường tròn (C): $x^2+y^2-4x-6y-12=0$ và đường thẳng $d: 3x+4y-6=0$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) thỏa mãn:

a) Song song với đường thẳng d.

b) Vuông góc với đường thẳng d.

Lời giải. (C) có tâm $I(2;3)$, bán kính $R=5$.

a) Phương trình đường thẳng Δ_1 song song với d có dạng: $3x+4y+c_1=0$.
Δ_1 tiếp xúc với (C) nên $\mathrm{d}(I,\Delta_1)=R$.
Hay $\dfrac{|3.2+4.3+c_1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=5\Leftrightarrow |c_1+18|=25\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}c_1+18=25\\ c_1+18=-25\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}c_1=7\\ c_1=-43.\end{array}\right.$
Vậy phương trình tiếp tuyến của (C) song song với d là $3x+4y+7=0$ hoặc $3x+4y-43=0$.

b) Phương trình đường thẳng Δ_2 song song với d có dạng: $4x-3y+c_2=0$.
Δ_2 tiếp xúc với (C) nên $\mathrm{d}(I,\Delta_2)=R$.
Hay $\dfrac{|4.2-3.3+c_2|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=5 \Leftrightarrow |c_2-1|=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c_2-1=25 \\ c_2-1=-25 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c_2=26 \\ c_2=-24. \end{array}\right.$
Vậy phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với d là $4x-3y+26=0$ hoặc $4x-3y-24=0$.

Bài 19. Cho đường tròn $(C):(x-1)^2+y^2=9$. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) biết rằng tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=2x-1$.
Lời giải. Gọi phương trình tiếp tuyến (Δ) song song với $y=2x-1$ là $y-2x+n=0$.
Đường tròn (C) có tâm $I(1;0)$ và bán kính $R=3$.
Ta có

$$\mathrm{d}(I,\Delta)=\frac{|n-2|}{\sqrt{5}}=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=2-3\sqrt{5} \\ n=2+3\sqrt{5}. \end{array}\right.$$

Phương trình tiếp tuyến (Δ) là $y-2x+2-3\sqrt{5}=0$ hoặc $y-2x+2+3\sqrt{5}=0$.

Bài 20. Cho đường tròn $(C):x^2+y^2=25$. Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) của đường tròn (C) biết tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông có cạnh góc vuông bằng nửa cạnh huyền và cạnh góc vuông nằm trên Ox lớn hơn cạnh góc vuông nằm trên (Oy).
Lời giải. Vì tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông có cạnh góc vuông bằng nửa cạnh huyền và cạnh góc vuông nằm trên Ox lớn hơn cạnh góc vuông nằm trên (Oy) nên ta suy ra tiếp tuyến tạo với trục Ox góc 30°.
Đường tròn (C) có tâm $O(0;0)$ và bán kính $R=5$.
Gọi véc-tơ pháp tuyến của (Δ) là $\overrightarrow{n}=(a,b)$ với $a^2+b^2>0$.
Ta có $\cos(\Delta,Ox)=\dfrac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a^2=3b^2 \Rightarrow a=\pm\sqrt{3}b$.

- Nếu $a=\sqrt{3}b$ thì ta chọn $a=\sqrt{3};b=1$. Khi đó phương trình tiếp tuyến (Δ) có dạng $\sqrt{3}x+y+m=0$.
  Ta có

  $$\mathrm{d}(O;\Delta)=\frac{|m|}{\sqrt{3+1}}=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=10 \\ m=-10. \end{array}\right.$$

  Vậy phương trình tiếp tuyến (Δ) trong trường hợp này là $\sqrt{3}x+y-10=0$ hoặc $\sqrt{3}x+y+10=0$.
- Nếu $a=-\sqrt{3}b$ thì ta chọn $a=-\sqrt{3};b=1$. Khi đó phương trình tiếp tuyến (Δ) có dạng $-\sqrt{3}x+y+m=0$.
  Ta có

  $$\mathrm{d}(O;\Delta)=\frac{|m|}{\sqrt{3+1}}=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=10 \\ m=-10. \end{array}\right.$$

  Vậy phương trình tiếp tuyến (Δ) trong trường hợp này là $-\sqrt{3}x+y-10=0$ hoặc $-\sqrt{3}x+y+10=0$.

Bài 21. Cho đường tròn $(C):x^2+y^2-2x-4y=0$. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn sao cho tiếp tuyến đó cắt các trục tọa độ tạo thành một tam giác cân.
Lời giải. Phương trình đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$.
Để tiếp tuyến cùng với các trục tọa độ tạo thành tam giác cân thì tiếp tuyến phải có hệ số góc là 1 hoặc -1.

a) Nếu tiếp tuyến có hệ số góc bằng -1 thì ta có thể giả sử phương trình tiếp tuyến (Δ) là $x+y+m=0$.
Ta có

$$\mathrm{d}(I,\Delta)=\frac{|m+3|}{\sqrt{2}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-3-\sqrt{10} \\ m=-3+\sqrt{10}. \end{array}\right.$$

Do đó phương trình tiếp tuyến là $x+y-3-\sqrt{10}=0$ hoặc $x+y-3+\sqrt{10}=0$.

b) Nếu tiếp tuyến có hệ số góc bằng 1 thì ta có thể giả sử phương trình tiếp tuyến (Δ) là $x-y+m=0$. Ta có

$$\mathrm{d}(I,\Delta)=\frac{|m-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{5}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1-\sqrt{10}\\ m=1+\sqrt{10}.\end{array}\right.$$

Do đó phương trình tiếp tuyến là $x-y+1-\sqrt{10}=0$ hoặc $x-y+1+\sqrt{10}=0$.

Bài 22. Cho đường tròn (C_1): $x^2+y^2-6x-8y-11=0$ và đường tròn (C_2): $x^2+y^2-2x-6y-6=0$. Viết phương trình tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2).

Lời giải.

(C_1) có tâm $I_1(3;4)$, bán kính $R_1=6$.
(C_2) có tâm $I_2(1;3)$, bán kính $R_2=4$
Có $2=|R_1-R_2|<I_1I_2=\sqrt{(1-3)^2+(3-4)^2}=\sqrt{5}<R_1+R_2=10$.
Do đó (C_1) và (C_2) cắt nhau và có 2 tiếp tuyến chung.
Phương trình tiếp tuyến chung Δ có dạng $ax+by+c=0$, $(a^2+b^2\neq 0)\quad(*)$.
Δ tiếp xúc với (C_1) và (C_2) khi và chỉ khi $\begin{cases}\mathrm{d}(I_1,\Delta)=R_1\\ \mathrm{d}(I_2,\Delta)=R_2\end{cases}$

Hay $\begin{cases}\dfrac{|3a+4b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=6\quad(1)\\ \dfrac{|a+3b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=4\quad(2)\end{cases}$

$\Leftrightarrow 2|3a+4b+c|=3|a+3b+c|$
$\Leftrightarrow 2(3a+4b+c)=\pm 3(a+3b+c)$
$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=3a-b\\ c=-\dfrac{9a+17b}{5}.\end{array}\right.$

+ Thế $c=3a-b$ vào (2) ta được $|4a+2b|=4\sqrt{a^2+b^2}$
$\Leftrightarrow 4a^2+4ab+b^2=4(a^2+b^2)$
$\Leftrightarrow b(3b-4a)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\ b=\dfrac{4}{3}a.\end{array}\right.$

Với $b=0$ thì $c=3a$, $(*)$ trở thành $ax+3a=0$ hay $x+3=0$.
Với $b=\dfrac{4}{3}a$ thì $c=\dfrac{5}{3}a$, $(*)$ trở thành $ax+\dfrac{4}{3}ay+\dfrac{5}{3}a=0$ hay $3x+4y+5=0$.

+ Thế $c=-\dfrac{9a+17b}{5}$ vào (2) ta được $|-4a-2b|=20\sqrt{a^2+b^2}$
$\Leftrightarrow 4a^2+4ab+b^2=100(a^2+b^2)$
$\Leftrightarrow 96a^2-4ab+99b^2=0\quad$ (vô nghiệm).
Vậy (C_1) và (C_2) có tiếp tuyến chung là $x+3=0$ và $3x+4y+5=0$.

Bài 23. Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn $(C_1): x^2+y^2+2x-2y-3=0$ và $(C_2): x^2+y^2-4x-14y+48=0$ sao cho 2 đường tròn nằm cùng một nửa mặt phẳng bờ là tiếp tuyến chung đó..

Lời giải. Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(-1;1)$ và bán kính $R_1=\sqrt{5}$.
Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(2;7)$ và bán kính $R_2=\sqrt{5}$.
Do đó tiếp tuyến chung cần tìm của hai đường tròn song song với đường thẳng I_1I_2.
Ta có $\overrightarrow{I_1I_2}=(3;6)$. Suy ra véc-tơ pháp tuyến của I_1I_2 là $\vec{n}=(2;-1)$.
Do đó phương trình tiếp tuyến chung cần tìm (Δ) của $(C_1);(C_2)$ có dạng $2x-y+m=0$.
Ta có

$$\mathrm{d}(I_1;\Delta)=\frac{|-3+m|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\Leftrightarrow|m-3|=5$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\\ m=8.\end{array}\right.$$

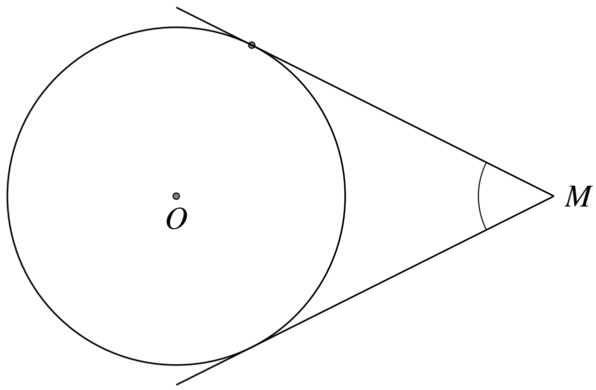
Vì vậy phương trình tiếp tuyến chung cần tìm của (C_1) và (C_2) là $2x-y-2=0$ hoặc $2x-y+8=0$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 24. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4x=0$. Tìm những điểm trên đường thẳng $x=4$ mà từ những điểm đó kẻ được đến (C) hai tiếp tuyến hợp với nhau góc 30°.

Lời giải.

Gọi điểm $M(4;b)$ thuộc đường thẳng $x=4$, $(b\in\mathbb{R})$.
$(C):(x-2)^2+y^2=4$, (C) có tâm $I(2;0)$, bán kính $R=2$.
Vì đường thẳng $x=4$ là một tiếp tuyến của đường tròn (C),nên yêu cầu bài toán là tìm những điểm trên đường thẳng $x=4$ sao cho kẻ được qua các điểm đó các tiếp tuyến đến (C) có hệ số góc là $k=\pm\tan 60^\circ=\pm\sqrt{3}$.



- $k=\sqrt{3}$: d là đường thẳng qua M có hệ số góc $k=\sqrt{3}$ có phương trình:

$$y=\sqrt{3}(x-4)+b \Leftrightarrow \sqrt{3}x-y-4\sqrt{3}+b=0.$$

$$d \text{ tiếp xúc với } (C) \Leftrightarrow \mathrm{d}(I,d)=R \Leftrightarrow |b-2\sqrt{3}|=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=4+2\sqrt{3} \\ b=-4+2\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

- $k=-\sqrt{3}$: d' là đường thẳng qua M có hệ số góc $k=-\sqrt{3}$ có phương trình:

$$y=-\sqrt{3}(x-4)+b \Leftrightarrow \sqrt{3}x+y-4\sqrt{3}-b=0.$$

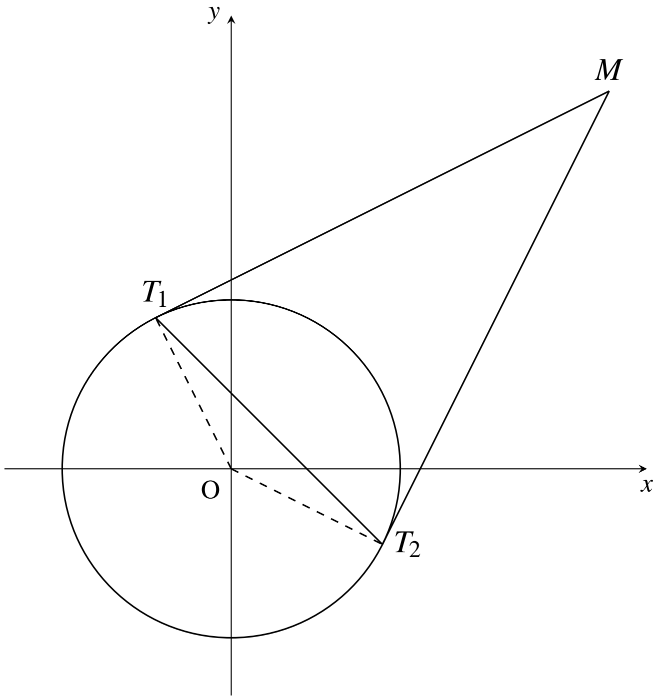
$$d \text{ tiếp xúc với } (C) \Leftrightarrow \mathrm{d}(I,d)=R \Leftrightarrow |-b-2\sqrt{3}|=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-4-2\sqrt{3} \\ b=4-2\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Vậy có 4 điểm thỏa mãn: $(4;4+2\sqrt{3})$, $(4;-4+2\sqrt{3})$, $(4;4-2\sqrt{3})$, $(4;-4-2\sqrt{3})$.

Bài 25. Cho đường tròn (C): $x^2+y^2=R^2$ và điểm $M(x_0;y_0)$ nằm ngoài (C). Từ M kẻ hai tiếp tuyến MT_1 và MT_2 tới (C) $(T_1,T_2$ là các tiếp điểm).

a) Viết phương trình đường thẳng T_1T_2.

b) Giả sử M chạy trên một đường thẳng d cố định không cắt (C). Chứng minh rằng đường thẳng T_1T_2 luôn đi qua một điểm cố định.



Lời giải.

a) Giả sử $T_1=(x_1;y_1), T_2=(x_2;y_2)$.
Đường tròn (C) có tâm $O(0;0)$, bán kính R.
Tiếp tuyến MT_1 đi qua điểm T_1, có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{OT_1}=(x_1;y_1)$ có phương trình:

$$x_1x+y_1y=R^2.$$

Và tiếp tuyến MT_2 có phương trình: $x_2x+y_2y=R^2$.
Có: $M\in MT_1, M\in MT_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1x_0+y_1y_0=R^2 \\ x_2x_0+y_2y_0=R^2. \end{cases}$
Suy ra $(x_1;y_1),(x_2;y_2)$ là các nghiệm của phương trình $x_0x+y_0y=R^2$. (1)
Vì M nằm ngoài (C) nên $x_0^2+y_0^2>0$, do đó (1) là phương trình đường thẳng.
Vậy phương trình đường thẳng T_1T_2 là: $x_0x+y_0y-R^2=0$.

b)
- Xét trường hợp đường thẳng cố định d có phương trình dạng: $x=a, (|a|>R)$.
Khi đó: $M=(a;y_0)$ và phương trình T_1T_2 là $ax+yy_0-R^2=0$.
Vậy đường thẳng T_1T_2 luôn đi qua điểm cố định $\left(\dfrac{R^2}{a};0\right)$.
- Xét trường hợp đường thẳng cố định d có phương trình dạng: $y=kx+m$.
Do d không cắt (C) nên $m\neq 0$. Ta có $M=(x_0;kx_0+m)$.
Phương trình đường thẳng T_1T_2 là:

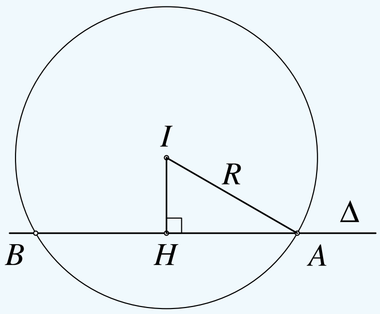
$$x_0x+(kx_0+m)y-R^2=0 \text{ hay } x_0(x+ky)+my-R^2=0.$$

Vậy điểm cố định mà đường thẳng T_1T_2 luôn đi qua là $\left(\dfrac{-kR^2}{m};\dfrac{R^2}{m}\right)$.

Dạng 6. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Cho đường thẳng $\Delta : ax+by+c=0$ và đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm $I(x_0;y_0)$, bán kính R. Đường thẳng Δ và đường tròn $(\mathscr{C})$ có ba vị trí tương đối.

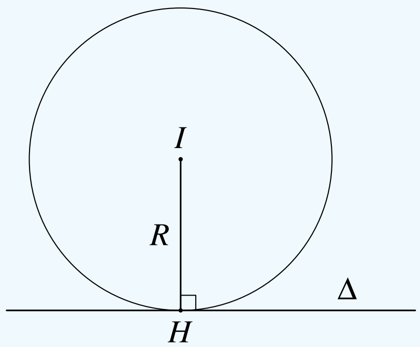
- Đường thẳng Δ và đường tròn $(\mathscr{C})$ có hai điểm chung, ta nói Δ và $(\mathscr{C})$ cắt nhau.



Hệ thức liên hệ giữa bán kính và khoảng cách từ tâm đường tròn $(\mathscr{C})$ đến đường thẳng Δ:

$$\mathrm{d}(I,\Delta)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}<R.$$

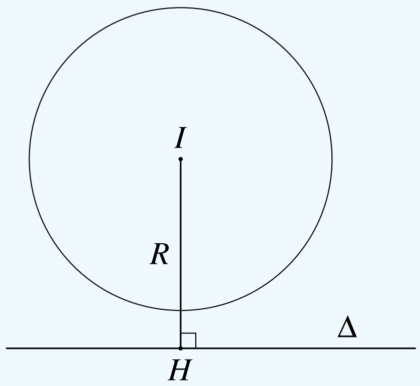
- Đường thẳng Δ và đường tròn $(\mathscr{C})$ có một điểm chung, ta nói Δ tiếp xúc với $(\mathscr{C})$. Đường thẳng Δ còn được gọi là tiếp tuyến của đường tròn $(\mathscr{C})$.



Hệ thức liên hệ giữa bán kính và khoảng cách từ tâm đường tròn $(\mathscr{C})$ đến đường thẳng Δ:

$$\mathrm{d}(I,\Delta)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=R.$$

- Đường thẳng Δ và đường tròn $(\mathscr{C})$ không có điểm chung nào, ta nói Δ và $(\mathscr{C})$ không cắt nhau.



Hệ thức liên hệ giữa bán kính và khoảng cách từ tâm đường tròn $(\mathscr{C})$ đến đường thẳng Δ:

$$\mathrm{d}(I,\Delta)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}>R.$$

Khi đường thẳng Δ cho bởi phương trình tham số $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}$. Để xét vị trí tương đối với đường tròn $(\mathscr{C})$ ta có thể làm hai cách:

a) Từ phương trình tham số chuyển về phương trình tổng quát, xét vị trí tương đối giống như trên.

b) Thế phương trình tham số vào phương trình của đường tròn $(\mathscr{C})$ ta được phương trình bậc hai có ẩn t, kí hiệu phương trình $(*)$.

- *Phương trình $(*)$ vô nghiệm. Ta nói Δ và $(\mathscr{C})$ không cắt nhau.*
- *Phương trình $(*)$ có một nghiệm. Ta nói Δ tiếp xúc với $(\mathscr{C})$.*
- *Phương trình $(*)$ có hai nghiệm. Ta nói Δ và $(\mathscr{C})$ cắt nhau.*

Khi đường thẳng Δ cho bởi phương trình tổng quát $\Delta : ax+by+c=0$, để xét vị trí tương đối

Ví dụ 21 (Lê Quốc Hiệp). [0H3B2] Cho đường thẳng $\Delta: x-2y+5=0$ và đường tròn $(\mathscr{C}): (x-2)^2+y^2=4$. Xét vị trí tương đối của Δ và $(\mathscr{C})$.

Lời giải. $(\mathscr{C})$ có tâm $I(2;0)$ và bán kính $R=2$.
Ta có: $\mathrm{d}(I,\Delta)=\dfrac{|2-2.0+5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{7\sqrt{5}}{5}>2$.
Vậy Δ và $(\mathscr{C})$ không cắt nhau.

Ví dụ 22. Cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=-5-2t \\ y=t \end{cases}$ và đường tròn $(\mathscr{C}): x^2+y^2-4x+2y=0$. Xét vị trí tương đối của Δ và $(\mathscr{C})$.

Lời giải. Thế phương trình của Δ vào phương trình $(\mathscr{C})$ ta được phương trình:

$$(-5-2t)^2+t^2-4(-5-2t)+2t=0 \Leftrightarrow 5t^2+30t+45=0 \Leftrightarrow t=-3.$$

Vậy Δ tiếp xúc với $(\mathscr{C})$.

Ví dụ 23. Cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=4t \\ y=2+2t \end{cases}$ và đường tròn $(\mathscr{C}): (x-3)^2+(y-1)^2=10$. Xét vị trí tương đối của Δ và $(\mathscr{C})$, tìm tọa độ giao điểm nếu có.

Lời giải. Thế phương trình của Δ vào phương trình $(\mathscr{C})$ ta được phương trình:

$$20t^2-20t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=1. \end{array}\right.$$

Vậy Δ cắt $(\mathscr{C})$.
Với $t=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$ và $t=1 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=4. \end{cases}$
Vậy tọa độ giao điểm của Δ và $(\mathscr{C})$ là: $A(0;2), B(4;4)$.

Ví dụ 24. Cho đường thẳng $\Delta: 6x+8y-1=0$ và đường tròn $(\mathscr{C}): x^2+y^2-2mx+4y+m^2-5=0$. Tìm m để Δ cắt $(\mathscr{C})$.

Lời giải. $(\mathscr{C})$ có tâm $I(m;-2)$ và bán kính $R=3$.
Để Δ cắt $(\mathscr{C})$ thì $\mathrm{d}(I,\Delta)<R$
$\Leftrightarrow \dfrac{|6m+8.(-2)-1|}{\sqrt{36+64}}<3 \Leftrightarrow |6m-17|<30 \Leftrightarrow -30<6m-17<30 \Leftrightarrow -\dfrac{13}{6}<m<\dfrac{47}{6}$.
Vậy $-\dfrac{13}{6}<m<\dfrac{47}{6}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 26. Cho đường thẳng $\Delta: 4x+3y+1=0$ và đường tròn $(\mathscr{C}): x^2+y^2-6x-8y=0$. Xét vị trí tương đối của Δ và $(\mathscr{C})$.
Lời giải. $(\mathscr{C})$ có tâm $I(3;4)$ và bán kính $R=5$.
Ta có: $\mathrm{d}(I,\Delta)=\dfrac{|4.3+3.4+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=5=R$.
Vậy Δ tiếp xúc với $(\mathscr{C})$.

Bài 27. Cho đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 + t \end{cases}$ và đường tròn $(\mathscr{C}) : (x+3)^2 + (y-1)^2 = 2$. Xét vị trí tương đối của Δ và $(\mathscr{C})$.

Lời giải. Thế phương trình của Δ vào phương trình $(\mathscr{C})$ ta được phương trình:

$$(4-4t)^2 + (1+t)^2 = 2 \Leftrightarrow 17t^2 - 30t + 15 = 0 \text{ (vô nghiệm)} .$$

Vậy Δ không cắt $(\mathscr{C})$.

Bài 28. Cho đường thẳng $\Delta : x - y + 5 = 0$ và đường tròn $(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 + 6x - 2y - 3 = 0$. Tìm tọa độ giao điểm của Δ và $(\mathscr{C})$.

Lời giải. Tọa độ giao điểm của Δ và $(\mathscr{C})$ là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} x - y + 5 = 0 \\ x^2 + y^2 + 6x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 5 \\ (y-5)^2 + y^2 + 6(y-5) - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 5 \\ 2y^2 - 6y - 8 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 5 \\ y = 4 \text{ hoặc } y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -6 \\ y = -1. \end{cases}$

Vậy tọa độ giao điểm của Δ và $(\mathscr{C})$ là: $A(-1;4), B(-6;-1)$.

Bài 29. Cho đường thẳng $\Delta : x - 2y + m = 0$ và đường tròn $(\mathscr{C}) : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$. Tìm m để Δ không cắt $(\mathscr{C})$.

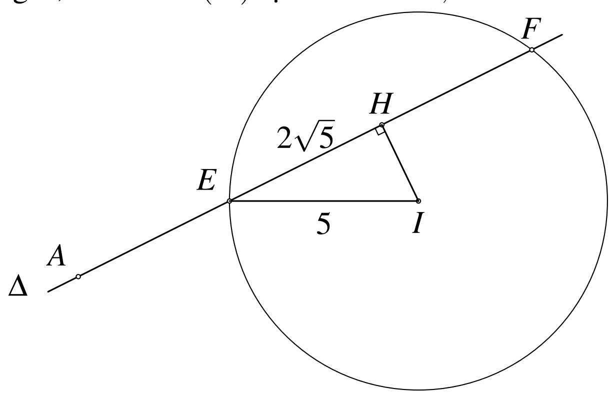
Lời giải. $(\mathscr{C})$ có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.

Để Δ không cắt $(\mathscr{C})$ thì $\mathrm{d}(I,\Delta) > R$

$\Leftrightarrow \dfrac{|1 - 2.2 + m|}{\sqrt{1+4}} > \sqrt{5} \Leftrightarrow |m-3| > 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m - 3 > 5 \\ m - 3 < -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 8 \\ m < -2. \end{array}\right.$

Vậy $m < -2$ hoặc $m > 8$.

Bài 30. Cho đường thẳng Δ đi qua $A(-6;0)$ và đường tròn $(\mathscr{C}) : (x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$. Viết phương trình đường thẳng Δ, biết Δ cắt $(\mathscr{C})$ tại hai điểm E, F sao cho $EF = 4\sqrt{5}$.



Lời giải.

$(\mathscr{C})$ có tâm $I(3;2)$ và bán kính $R = 5$.

Đường thẳng Δ đi qua $A(-6;0)$ có phương trình $a(x+6) + by = 0$ $(a^2 + b^2 > 0)$.

Gọi H là trung điểm của EF, xét tam giác IEH vuông tại H, ta có:$IH = \sqrt{IE^2 - EH^2} = \sqrt{5^2 - (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{5}$. Theo đề ta có:

$\mathrm{d}(I,\Delta) = IH \Leftrightarrow \dfrac{|a(3+6) + b.2|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |9a + 2b| = \sqrt{5(a^2+b^2)} \Leftrightarrow 76a^2 + 36ab - 1b^2 = 0 \ (*)$.

Do $b = 0$ không là nghiệm của $(*)$, $(*) \Leftrightarrow 76\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 + 36\left(\dfrac{a}{b}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} = -\dfrac{1}{2}$ hoặc $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{38}$.

Chọn $a = 1 \Rightarrow b = -2$ hoặc $b = 38$.

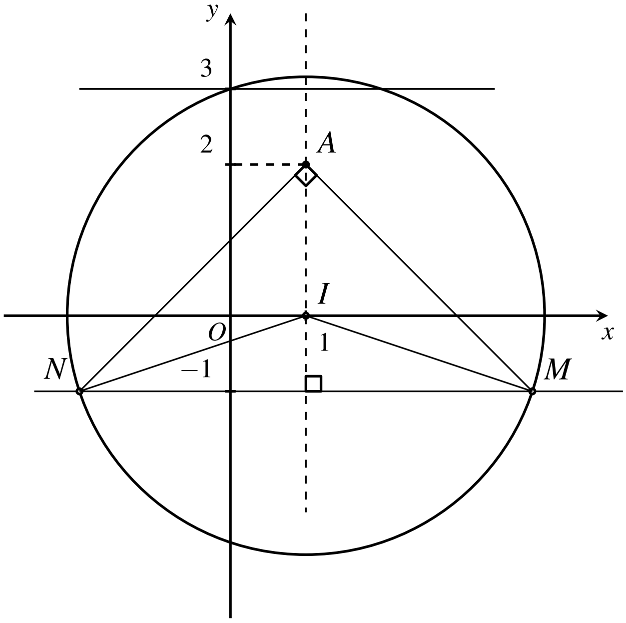
Với $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow \Delta : x - 2y + 6 = 0.$

Với $\begin{cases} a = 1 \\ b = 38 \end{cases} \Rightarrow \Delta : x + 38y + 6 = 0.$

Vậy $\Delta : x - 2y + 6 = 0, \Delta : x + 38y + 6 = 0.$

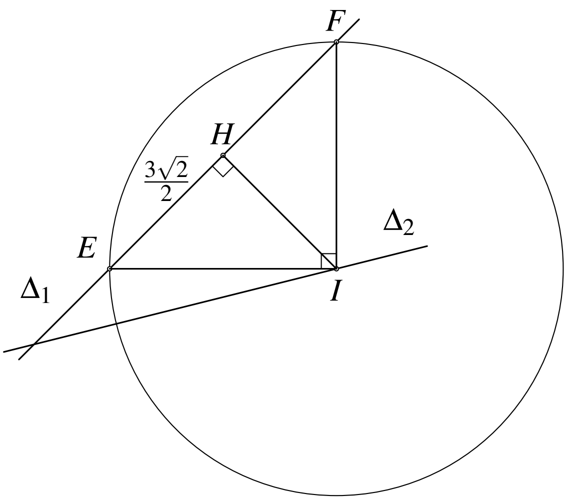
BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 31. Cho điểm $A(1;2)$ và đường tròn $(\mathscr{C}): x^2+y^2-2x-9=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt $(\mathscr{C})$ tại hai điểm M và N sao cho tam giác AMN vuông cân tại A.



Lời giải.
Đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm $I(1;0)$ và bán kính $R=\sqrt{10}$.
Ta có $IM=IN$ và $AM=AN \Rightarrow AI\perp MN$, suy ra phương trình Δ có dạng $y=m$.
Hoành độ M,N là nghiệm phương trình: $x^2-2x+m^2-9=0$ (1).
(1) có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2, khi và chỉ khi: $m^2-10<0$ $(*)$. Khi đó ta có $M(x_1;m)$ và $N(x_2;m)$.
$AM\perp AN \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}=0 \Leftrightarrow (x_1-1)(x_2-1)+(m-2)^2=0 \Leftrightarrow x_1x_2-(x_1+x_2)+m^2-4m+5=0$. Áp dụng Viét đối với (1), suy ra: $2m^2-4m-6=0 \Leftrightarrow m=-1$ hoặc $m=3$, thỏa mãn $(*)$.
Vậy phương trình $\Delta: y=-1$ hoặc $y=3$.

Bài 32. Cho đường thẳng $\Delta_1: x-y+4=0$ và $\Delta_2: x-4y+7=0$ Viết phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm I thuộc Δ_2 , cắt Δ_1 tại hai điểm E,F sao cho tam giác IEF vuông tại I và $EF=3\sqrt{2}$.



Lời giải.
Gọi $I(4t-7;t)$ thuộc Δ_2.

Gọi H là trung điểm của EF, do tam giác IEF vuông cân tại I nên $IH=\dfrac{1}{2}EF=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ và $IE=R=\sqrt{IE^2+IH^2}=9$.

Ta có:$\mathrm{d}(I,\Delta_1)=IH \Leftrightarrow \dfrac{|4t-7-t+4|}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |3t-3|=3 \Leftrightarrow t=0$ hoặc $t=2$.

Với $t=0 \Rightarrow I(-7;0) \Rightarrow (\mathscr{C}): (x+7)^2+y^2=9$.

Với $t=2 \Rightarrow I(1;2) \Rightarrow (\mathscr{C}) : (x-1)^2+(y-2)^2=9$.
Vậy $(\mathscr{C}) : (x+7)^2+y^2=9$ hoặc $(\mathscr{C}) : (x-1)^2+(y-2)^2=9$.

Dạng 7. Vị trí tương đối của hai đường tròn.

Phương pháp giải: Cho đường tròn (C) có tâm I, bán kính R và đường tròn (C') có tâm I', bán kính R'.

- Nếu $II' > R+R'$ suy ra hai đường tròn không cắt nhau và ở ngoài nhau.
- Nếu $II' < |R-R'|$ suy ra hai đường tròn không cắt nhau và lồng vào nhau.
- Nếu $II' = |R-R'|$ suy ra hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau.
- Nếu $|R-R'| < II' < R+R'$ suy ra hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

Ví dụ 25. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường tròn $(C) : x^2+y^2-2x-6y-15=0$ và $(C') : x^2+y^2-6x-2y-3=0$. Chứng minh rằng hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A,B.

Lời giải.

- Cách 1. (C) có tâm $I\,(1;3)$ và bán kính $R=5$, (C) có tâm $I'\,(3;1)$ và bán kính $R=\sqrt{13}$.
  Ta có $II'=\sqrt{(3-1)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{2}$.
  Ta thấy $|R_1-R_2|<I_1I_2<|R_1+R_2|$ suy ra hai đường tròn cắt nhau.
- Cách 2. Xét hệ phương trình
  $$\begin{cases} x^2+y^2-2x-6y-15=0 \\ x^2+y^2-6x-2y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2x-6y-15=0 \\ x-y-3=0 \end{cases}$$
  $$\Leftrightarrow \begin{cases} (y+3)^2+y^2-2(y+3)-6y-15=0 \\ x=y+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-y-6=0 \\ x=y+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=-2 \\ y=3 \end{array}\right. \\ x=y+3 \end{cases}.$$
  Suy ra hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm có tọa độ là $A(1;-2)$ và $B\,(6;3)$.

Ví dụ 26. Cho hai đường tròn: $(C) : x^2+y^2=1$ và $(C_m) : x^2+y^2-2(m+1)x+4my-5=0$. Xác định m để (C_m) tiếp xúc với (C).

Lời giải. Dễ thấy (C) có tâm $O\,(0;0)$ và bán kính $R=1$.
(C_m) có tâm $I\,(m+1;-2m)$ và bán kính $R'=\sqrt{(m+1)^2+4m^2+5}$.
Ta thấy $OI=\sqrt{(m+1)^2+4m^2}<R'$ điểm O nằm trong đường tròn tâm I suy ra (C) và (C_m) chỉ có thể tiếp xúc trong nhau.
Điều kiện để hai đường tròn tiếp xúc trong là
$R'-R=OI \Leftrightarrow \sqrt{(m+1)^2+4m^2+5}-1=\sqrt{(m+1)^2+4m^2}$.
Giải phương trình ta được $m=-1$ hoặc $m=\dfrac{3}{5}$.

Ví dụ 27. Cho đường tròn $(C) : x^2+y^2-2x+4y-4=0$ có tâm I và đường thẳng $\Delta : \sqrt{2}x+my+1-\sqrt{2}=0$.

a) Tìm m để đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A,B.

b) Tìm m để diện tích tam giác IAB là lớn nhất.

Lời giải.

a) Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=3$
Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi
$\mathrm{d}(I;\Delta)<R \Leftrightarrow \dfrac{\left|\sqrt{2}-2m+1-\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2+m^2}}<3. \Leftrightarrow 5m^2+5m+17>0$ (đúng với mọi m).

b) Ta có $S_{IAB}=\dfrac{1}{2}IA.IB.\sin\widehat{AIB}=\dfrac{9}{2}\sin\widehat{AIB}\le\dfrac{9}{2}$.
Suy $\max S_{IAB}=\dfrac{9}{2}$ khi và chỉ khi $\sin\widehat{AIB}=1\Leftrightarrow\widehat{AIB}=90^\circ$.
Gọi H là hình chiếu của I lên Δ khi đó $\widehat{AIH}=45^\circ\Rightarrow IH=IA.\cos 45^\circ=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.
Ta có $\mathrm{d}(I;\Delta)=IH\Leftrightarrow\dfrac{|1-2m|}{\sqrt{2+m^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow m^2+8m+16=0\Leftrightarrow m=-4$.
Vậy với $m=-4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 8. Phương trình đường thẳng chứa tham số

Đối với bài toán tìm m: Ta dựa vào điều kiện bài ra đưa về phương trình ẩn m.

Ví dụ 28. Tìm m biết đường thẳng $d:(m+1)x-my+2m-1=0$ đi qua điểm $A(-1;2)$.

Lời giải. Đường thẳng d đi qua điểm $A(-1;2)$ khi và chỉ khi

$$-(m+1)-2m+2m-1=0\Leftrightarrow m=-2.$$

Ví dụ 29. Tìm m biết đường thẳng $d:mx-(m-2)y+3=0$ song song với đường thẳng $\Delta:2x+3y-1=0$.

Lời giải. Đường thẳng d song song với đường thẳng Δ khi và chỉ khi

$$\frac{m}{2}=\frac{-m+2}{3}\neq\frac{3}{-1}\Leftrightarrow m=\frac{4}{5}.$$

Ví dụ 30. Tìm m biết đường thẳng $d:x+(2m+1)y+m$ vuông góc với đường thẳng $\Delta:x-y+1=0$.

Lời giải. Đường thẳng d có véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n}_d=(1;2m+1)$. Đường thẳng Δ có véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n}_\Delta=(1;-1)$.
Đường thẳng d vuông góc với đường thẳng Δ khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{n}_d.\overrightarrow{n}_\Delta=0\Leftrightarrow 1.1+(2m+1)(-1)=0\Leftrightarrow m=0.$$

Ví dụ 31. Tìm m biết đường thẳng $d:2x-my+2=0$ tạo với đường thẳng $\Delta:x+y+1=0$ một góc 60°.

Lời giải. Đường thẳng d và Δ có véc-tơ pháp tuyến lần lượt là $\overrightarrow{n}_d=(2;-m)$ và $\overrightarrow{n}_\Delta=(1;1)$.
Theo bài ra ta có

$$\cos 60^\circ=\frac{|\overrightarrow{n}_d.\overrightarrow{n}_\Delta|}{|\overrightarrow{n}_d|.|\overrightarrow{n}_\Delta|}=\frac{|2-m|}{\sqrt{2^2+m^2}.\sqrt{1^2+1^2}}$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{2^2+m^2}.\sqrt{1^2+1^2}=2|2-m|$$

$$\Leftrightarrow 2(m^2+4) = 4(4-4m+m^2)$$
$$\Leftrightarrow m^2-8m+4=0 \Leftrightarrow m = 4\pm 2\sqrt{3}.$$

Ví dụ 32. Tìm m để đường thẳng $d_m : mx+(m-3)y+m^2-3m=0$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 1.

Lời giải. Điều kiện để đường thẳng d_m cắt hai trục tọa độ là $m(m-3)\neq 0$.
Tọa độ giao điểm của đường thẳng d_m với Ox và Oy lần lượt là $A(3-m;0)$ và $B(0;-m)$.
Ta có

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}\sqrt{(3-m)^2}.\sqrt{(-m)^2} = \frac{|3m-m^2|}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow |m^2-3m| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2-3m+2=0 \\ m^2-3m-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=2 \\ m=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2} \\ m=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \end{array}\right. .$$

Ví dụ 33. Tìm điểm cố định của họ đường thẳng $d_m : (2m-1)x-(m+1)y+3-m=0$.

Lời giải. Gọi $A(x_0;y_0)$ là điểm cố định của họ đường thẳng, khi đó ta có

$$(2m-1)x_0-(m+1)y_0+3-m=0,\ \forall m\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow (2x_0-y_0-1)m+(3-x_0-y_0)=0,\ \forall m\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0-y_0=1 \\ x_0+y_0=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=\dfrac{4}{3} \\ y_0=\dfrac{5}{3} \end{cases}.$$

Vậy $A\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{5}{3}\right)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 33. Cho họ đường thẳng $d_m : (2m-3)x+my-2=0$. Tìm điều kiện của tham số m biết đường thẳng d_m đi qua $A(2;3)$.
Lời giải. Đường thẳng d_m đi qua $A(2;3)$ khi và chỉ khi

$$(2m-3)2+3m-2=0 \Leftrightarrow 7m-8=0 \Leftrightarrow m=\frac{8}{7}.$$

Bài 34. Cho họ đường thẳng $d_m : (2m-3)x+my-2=0$. Tìm điều kiện của tham số m biết đường thẳng d_m song song với đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x=1+2t \\ y=t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.
Lời giải. Ta có phương trình tổng quát của $\Delta : x-2y-1=0$.
Đường thẳng d_m song song với Δ khi và chỉ khi $\dfrac{2m-3}{1} = \dfrac{m}{-2} \neq \dfrac{-2}{-1} \Leftrightarrow m=\dfrac{6}{5}$.

Bài 35. Cho họ đường thẳng $d_m : (2m-3)x+my-2=0$. Tìm điều kiện của tham số m biết đường thẳng d_m vuông góc với đường thẳng $3x-4y+5=0$.
Lời giải. Đường thẳng d_m và Δ lần lượt có véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n}_d=(2m-3;m)$ và $\overrightarrow{n}_\Delta=(3;-4)$.
Để $d_m \perp \Delta$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{n}_d.\overrightarrow{n}_\Delta=0 \Leftrightarrow 3(2m-3)-4m=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{9}{2}$.

Bài 36. Tìm điểm cố định của họ đường thẳng $d_m : (2m-3)x+my-2=0$.
Lời giải. Gọi điểm cố định của họ đường thẳng là $A(x_0;y_0)$. Khi đó ta có

$$(2m-3)x_0+my_0-2=0,\ \forall m$$

$$\Leftrightarrow (2x_0+y_0)m-(3x_0+2)=0,\ \forall m$$

$$\Leftrightarrow x_0=-\frac{2}{3}, y_0=\frac{4}{3}.$$

Vậy $A\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3}\right)$.

Dạng 9. Phương trình đường tròn chứa tham số

Dựa theo điều kiện bài toán, ta đưa về phương trình theo tham số nào đó, từ đó giải ra tìm được điều kiện của tham số.

Ví dụ 34. Cho đường tròn $(C_m) : x^2+y^2-(m+2)x-(m+4)y+m+1=0$.

a) Chứng minh rằng (C_m) luôn là đường tròn với mọi giá trị của tham số m.

b) Tìm m để đường tròn (C_m) đi qua điểm $A(2;-3)$.

c) Tìm tập hợp tâm các đường tròn (C_m) khi m thay đổi.

d) Chứng minh rằng khi m thay đổi, họ các đường tròn (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định.

e) Tìm những điểm trong mặt phẳng tọa độ mà họ (C_m) không đi qua với mọi giá trị của tham số m.

Lời giải.

a) Ta có $a^2+b^2-c=\dfrac{(m+2)^2}{4}+\dfrac{(m+4)^2}{4}-m-1=\dfrac{2m^2+8m+16}{4}=\dfrac{m^2+(m+4)^2}{4}>0, \forall m\in\mathbb{R}$.
Điều đó chứng tỏ (C_m) luôn là phương trình đường tròn.

b) Để (C_m) đi qua điểm $A(2;-3)$ khi và chỉ khi

$$2^2+(-3)^2-2(m+2)-(m+4)(-3)+m+1=0$$

$$\Leftrightarrow 2m+22=0 \Leftrightarrow m=-11.$$

c) Tọa độ tâm của họ đường tròn (C_m) là $I(\dfrac{m+2}{2};\dfrac{m+4}{2})$.
Đặt $x=\dfrac{m+2}{2};y=\dfrac{m+4}{2} \Rightarrow y=x+1$. Vậy quỹ tích tâm I là đường thẳng $y=x+1$.

d) Giả sử $A(x_0;y_0)$ là điểm cố định của họ (C_m), khi đó ta có

$$x_0^2+y_0^2-(m+2)x_0-(m+4)y_0+m+1=0,\ \forall m$$

$$\Leftrightarrow (1-x_0-y_0)m+(x_0^2+y_0^2-2x_0-4y_0+1)=0,\ \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x_0 - y_0 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 - 4y_0 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases} \end{array}\right..$$

e) Giả sử $A(x_0; y_0)$ là điểm mà họ (C_m) không đi qua với mọi m, khi đó ta có

$$x_0^2 + y_0^2 - (m+2)x_0 - (m+4)y_0 + m + 1 \neq 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow (1 - x_0 - y_0)m + (x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 - 4y_0 + 1) \neq 0, \forall m$$

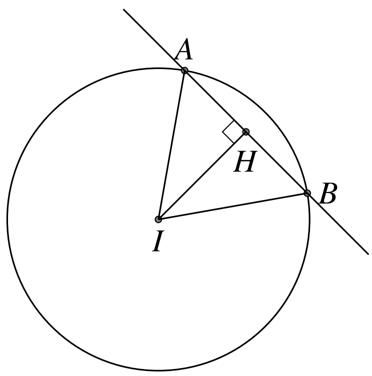
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x_0 - y_0 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 - 4y_0 + 1 \neq 0 \end{cases}$$

Điều đó tương đương với họ (C_m) không đi qua mọi điểm nằm trong hình tròn $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ trừ hai điểm $A_1(-1; 2)$ và $A_2(1; 0)$.

Ví dụ 35. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 2my + m^2 - 24 = 0$ có tâm I và đường thẳng $\Delta: mx + 4y = 0$ (ở đó m là tham số). Tìm m biết đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn diện tích tam giác IAB bằng 12.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1; m)$, bán kính $R = 5$. Gọi H là trung điểm của dây cung AB. Ta có IH là đường cao của tam giác IAB và



$$IH = \mathrm{d}(I, \Delta) = \frac{|m + 4m|}{\sqrt{m^2 + 16}} = \frac{|5m|}{\sqrt{m^2 + 16}}$$

$$AH = \sqrt{IA^2 - IH^2} = \sqrt{25 - \frac{(5m)^2}{m^2 + 16}} = \frac{20}{\sqrt{m^2 + 16}}.$$

Theo bài ra ta có

$$S_{\triangle IAB} = 12 \Leftrightarrow 2S_{\triangle IAH} = 12$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{d}(I, \Delta).AH = 12 \Leftrightarrow 25|m| = 3(m^2 + 16) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \pm 3 \\ m = \pm \dfrac{16}{3} \end{array}\right..$$

Ví dụ 36. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho họ đường thẳng phụ thuộc tham số α là d_α có phương trình: $(x+1)\cos\alpha + (y-1)\sin\alpha - 1 = 0$. Chứng minh rằng họ đường thẳng đã cho luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Lời giải. Lấy $A(-1; 1)$, ta có $\mathrm{d}(A; d_\alpha) = \dfrac{|-1|}{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}} = 1$. Vậy họ đường thẳng luôn tiếp xúc với đường tròn $(A; R = 1)$ cố định.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 37. Cho họ đường tròn (C_m) có phương trình $x^2 + y^2 - 4mx - 2my + \dfrac{9m^2}{2} - m - \dfrac{1}{2}$.

a) Tìm tập hợp tâm của (C_m) khi m thay đổi.

b) Chứng minh rằng (C_m) luôn tiếp xúc với hai đường thẳng cố định.

c) Tìm m để (C_m) tiếp xúc với đường thẳng $\Delta : x+y-2$.

Lời giải.

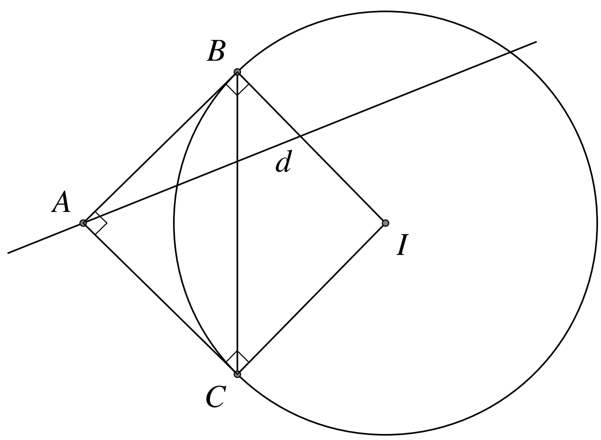
a) Quỹ tích tâm là đường thẳng $x-2y=0$.

b) Họ đường tròn (C_m) có tâm $I(2m;m)$ và bán kính $R=\dfrac{|m+1|\sqrt{2}}{2}$.
Giả sử đường thẳng cố định cần tìm là $d : Ax+By+C=0$. Suy ra $\mathrm{d}(I;d)=R, \forall m$.
Điều đó tương đương với
$$\frac{|2Am+Bm+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|m+1|\sqrt{2}}{2}, \forall m$$
Giải ra ta được $\left[\begin{array}{l}A=1,B=-1,C=1\\A=1,B=-7,C=-5\end{array}\right.$.

c) Để đường thẳng Δ tiếp xúc với (C_m) thì $\mathrm{d}(I;\Delta)=R \Leftrightarrow \dfrac{|2m+m-2|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|m+1|\sqrt{2}}{2}$.
Giải ra ta được $m=\dfrac{3}{2}$ và $m=\dfrac{1}{4}$.

Bài 38. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C) : x^2+y^2-4x+8y-5=0$. Tìm điều kiện của tham số m để đường thẳng $\Delta : x+(m-1)y+m=0$ tiếp xúc với đường tròn (C).
Lời giải. Đường tròn (C) có tâm $I(2;-4)$ và bán kính $R=\sqrt{2^2+(-4)^2-(-5)}=5$.
Để đường thẳng Δ tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi
$$\mathrm{d}(I;\Delta)=R \Leftrightarrow \frac{|2-4(m-1)+m|}{\sqrt{1+(m-1)^2}}=5$$
$$\Leftrightarrow (6-3m)^2=25(2-2m+m^2) \Leftrightarrow 8m^2-7m+7=0(\text{vô nghiệm}).$$
Vậy đường thẳng Δ không thể tiếp xúc đường tròn.

Bài 39. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C) : (x-1)^2+(y+2)^2=9$ và đường thẳng $d : x+y+m=0$. Tìm m để trên đường thẳng d có duy nhất một điểm A mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (C) (B, C là hai tiếp điểm) sao cho tam giác ABC vuông.
Lời giải.



Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$ và bán kính $R=3$. Nếu tam giác ABC vuông góc tại A thì khi đó tứ giác $ABIC$ là hình vuông. Theo tính chất hình vuông tac có $IA = IB\sqrt{2}$. (1)

Nếu A nằm trên d thì $A(t;-m-t)$ suy ra $IA = \sqrt{(t-1)^2+(t-2+m)^2}$. Thay vào (1) ta có

$$\sqrt{(t-1)^2+(t-2+m)^2} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow 2t^2-2(m-1)t+m^2-4m-13=0. (2)$$

Để trên d có đúng một điểm A thì (2) có đúng một nghiệm t, từ đó ta có

$$\Delta = -(m^2+10m+25) = 0 \Leftrightarrow -(m+5)^2 = 0 \Leftrightarrow m=-5.$$

Khi đó (2) có nghiệm kép là $t_1 = t_2 = t_0 = \dfrac{m-1}{2} = \dfrac{-5-1}{2} = -3 \Rightarrow A(-3;8)$.

Bài 40. Trong mặt phẳng tọa độ với hệ tọa độ Oxy, cho họ đường tròn $(C_m): x^2+y^2-2(m+1)x-2(m+2)y+6m+7=0$ (với m là tham số). Xác định tọa độ tâm đường tròn thuộc họ đã cho tiếp xúc với trục tung.

Lời giải. Họ đường tròn (C_m) có tâm $I(m+1;m+2)$ và bán kính

$$R = \sqrt{(m+1)^2+(m+2)^2-6m-7} = \sqrt{2m^2-2}.$$

Để (C_m) tiếp xúc với trục tung thì

$$|m+1| = \sqrt{2m^2-2} \Leftrightarrow m^2-2m-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=3 \end{array}\right..$$

Thử lại ta được $m=3$ thỏa mãn, từ đó ta được $I(4;5)$.

Bài 41. Cho đường tròn $(C): (x-2)^2+(y-1)^2=9$ và đường thẳng $\Delta: (m+1)x+my-1=0$, với m là tham số.

a) Chứng minh rằng đường thẳng Δ luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B.

b) Tìm m để độ dài đoạn thẳng AB đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

a) Đường tròn (C) có tâm $I(2;1)$ và bán kính $R=3$.
Ta có $\mathrm{d}(I;\Delta) = \dfrac{|(m+1)2+m-1|}{\sqrt{(m+1)^2+m^2}} = \dfrac{|3m+1|}{\sqrt{(m+1)^2+m^2}}$.
Xét $d^2(I;\Delta)-R^2 = \dfrac{(3m+1)^2}{2m^2+2m+1} - 9 = \dfrac{-9m^2-12m-8}{(m+1)^2+m^2} = \dfrac{-(3m+2)^2-4}{(m+1)^2+m^2} < 0, \forall m$.
Vậy $\mathrm{d}(I;\Delta) < R, \forall m$, suy ra đường thẳng Δ luôn cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt A, B.

b) Gọi M là trung điểm của dây AB suy ra

$$AB^2 = 4MA^2 = 4(R^2-d^2(I;\Delta)) = 4\frac{9m^2+12m+8}{2m^2+2m+1} = 4y.$$

Từ đó ta có

$$9m^2+12m+8 = 2ym^2+2ym+y$$
$$\Leftrightarrow (2y-9)m^2+(2y-12)m+(y-8)=0 \quad (*)$$

Để tồn tại m thì phương trình $(*)$ phải có nghiệm.
Khi $y=\dfrac{9}{2}$ thì ta có phương trình $-3m-\dfrac{7}{2}=0$ có nghiệm.
Khi $y \neq \dfrac{9}{2}$ ta xét $\Delta' = (y-6)^2-(2y-9)(y-8) \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{19-\sqrt{217}}{2} \leq y \leq \dfrac{19+\sqrt{217}}{2}$.

Bài 42. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hệ phương trình sau có đúng hai nghiệm

$$\begin{cases} x^2+y^2=2(1+a) \\ (x+y)^2=4 \end{cases}.$$

Lời giải. Phương trình thứ hai tương đương với $\left[\begin{array}{l} x+y-2=0 \\ x+y+2=0 \end{array}\right.$.

Nhận thấy $d_1: x+y-2=0$ và $d_2: x+y+2=0$ là hai đường thẳng đối xứng nhau qua gốc tọa độ, mặt khác đường tròn $(C): x^2+y^2=2(1+a)$ $(a>-1)$ cũng đối xứng qua gốc tọa độ. Vì vậy để hệ có đúng hai nghiệm thì đường tròn (C) phải tiếp xúc với d_1. Từ đó ta có

$$\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2(1+a)} \Leftrightarrow 1+a=1 \Leftrightarrow a=0.$$

Bài 43. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho họ đường tròn $(C_m): x^2+y^2-2mx-2(1-m)y+2m^2-2m-3=0$. Tìm quỹ tích tâm của họ đường tròn (C_m).

Lời giải. Quỹ tích tâm đường tròn (C_m) là đường thẳng $y=1-x$.

Dạng 10. Tìm tọa độ một điểm thỏa một điều kiện cho trước

Ở đây, ta xét bài toán tìm tọa độ một điểm thỏa một điều kiện cho trước về độ dài, về góc, về khoảng cách, diện tích, liên quan đến đường tròn, tạo hình vuông, tam giác đều, ...

Trong mặt phẳng Oxy, xét đường tròn $(\mathscr{C}): (x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

Tìm điểm $M \in (\mathscr{C})$, ta làm như sau:

Cách 1

- Gọi $M(x_0;y_0) \in (\mathscr{C})$, ta có: $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=R^2$.
- Dựa vào điều kiện cho trước ta có thêm hệ thức liên hệ giữa x_0 và y_0. Từ đó tìm được tọa độ của điểm M.

Cách 2

- Chuyển phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$ về dạng tham số: $\begin{cases} x=a+R\sin t \\ y=b+R\cos t \end{cases}$ với $t \in [0;360^\circ)$.
- Gọi $M(x_0;y_0) \in (\mathscr{C})$, ta có: $\begin{cases} x_0=a+R\sin t \\ y_0=b+R\cos t \end{cases}$ với $t \in [0;360^\circ)$.
- Sử dụng điều kiện cho trước để xác định $\sin t$ và $\cos t$. Từ đó tìm được tọa độ của điểm M.

Ví dụ 37. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC vuông cân tại A. Biết $M(1;-1)$ là trung điểm cạnh BC và $G\left(\frac{2}{3};0\right)$ là trọng tâm tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC.

Lời giải. Vì G là trọng tâm tam giác ABC và M là trung điểm cạnh BC nên ta có $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM} \Rightarrow A(0;2)$.

Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên $AM \perp BC$ và $MA=MB=MC$.

Phương trình đường thẳng BC đi qua điểm $M(1;-1)$ và nhận $\overrightarrow{AM}=(1;-3)$ làm véc-tơ pháp tuyến là: $1(x-1)-3(y+1)=0$ hay $x-3y-4=0$.

Vì $MA=MB=MC=\sqrt{10}$ nên hai điểm B, C thuộc đường tròn $(\mathscr{C}): (x-1)^2+(y+1)^2=10$.

Do đó, tọa độ hai điểm B, C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-3y-4=0 \\ (x-1)^2+(y+1)^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=-2 \\ y=-2. \end{cases}$$

Vậy $A(0;2)$, $B(4;0)$, $C(-2;-2)$ hoặc $A(0;2)$, $B(-2;-2)$, $C(4;0)$.

Ví dụ 38. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(\mathscr{C}): x^2+y^2-4x-6y+5=0$.

a) Tìm các điểm thuộc $(\mathscr{C})$ có tọa độ nguyên.

b) Xác định tọa độ các đỉnh B, C của tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(\mathscr{C})$, biết điểm $A(4;5)$.

Lời giải.

a) Ta xem phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$ đã cho là phương trình bậc hai với ẩn số là y:
$$y^2-6y+x^2-4x+5=0. \quad (1)$$
Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -x^2+4x+4 \geq 0 \Leftrightarrow 2-2\sqrt{2} \leq x \leq 2+2\sqrt{2}$. (2)
Từ (2) suy ra các điểm thuộc $(\mathscr{C})$ có hoành độ nguyên là: 0; 1; 2; 3; 4. (3)
Lần lượt thay các hoành độ nguyên ở (3) vào (1) ta tìm được các điểm thuộc $(\mathscr{C})$ có tọa độ nguyên là: $(0;1)$, $(0;5)$, $(4;1)$, $(4;5)$.

b) Đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm $I(2;3)$ và bán kính $R=2\sqrt{2}$.
Vì tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn $(\mathscr{C})$ nên tâm I của $(\mathscr{C})$ là trọng tâm, đồng thời là trực tâm của tam giác ABC.
Gọi $H(x;y)$ là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh BC, ta có:
$$\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{IH} \Rightarrow H(1;2).$$
Phương trình đường thẳng BC đi qua điểm $H(1;2)$ và nhận $\overrightarrow{AI} = (-2;-2) = -2(1;1)$ làm véc-tơ pháp tuyến có dạng: $x+y-3=0$.
Do đó, tọa độ hai điểm B, C là nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ x^2+y^2-4x-6y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y \\ 2y^2-8y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-\sqrt{3} \\ y=2+\sqrt{3} \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x=1+\sqrt{3} \\ y=2-\sqrt{3}. \end{cases}$$
Vậy $B\left(1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right), C\left(1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$ hoặc $B\left(1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right), C\left(1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$.

Ví dụ 39. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(\mathscr{C}): x^2+y^2-4x-4y+4=0$ và đường thẳng $(d): x+y-2=0$.

a) Chứng minh rằng (d) luôn cắt $(\mathscr{C})$ tại hai điểm phân biệt A, B. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

b) Tìm điểm C thuộc $(\mathscr{C})$ sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Lời giải.

a) Xét hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2+y^2-4x-4y+4=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y \\ 2y^2-4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x=0 \\ y=2. \end{cases}$$
Hệ phương trình trên có hai nghiệm $(2;0)$ và $(0;2)$ nên suy ra (d) luôn cắt $(\mathscr{C})$ tại hai điểm phân biệt $A(2;0)$, $B(0;2)$.
Ta có: $AB = \sqrt{(0-2)^2+(2-0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

b) Ta có $(\mathscr{C}): x^2+y^2-4x-4y+4=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2=4$.
Phương trình của $(\mathscr{C})$ được viết dưới dạng tham số là: $\begin{cases} x=2+2\sin t \\ y=2+2\cos t \end{cases}$ với $t \in [0;360^\circ)$.
Vì $C \in (\mathscr{C})$ nên suy ra $C(2+2\sin t; 2+2\cos t)$.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB, ta có: $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AB.CH = CH\sqrt{2}$.
Suy ra tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi và chỉ khi CH có độ dài lớn nhất.

Ta có $CH = \mathrm{d}(C,(d)) = \dfrac{|2+2\sin t+2+2\cos t-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}|\sqrt{2}\sin(t+45^\circ)+1|$.
Do đó, CH lớn nhất $\Leftrightarrow \sin(t+45^\circ)=1 \Leftrightarrow t=45^\circ$.
Vậy $C\left(2+\sqrt{2};2+\sqrt{2}\right)$.

Ví dụ 40. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(\mathscr{C}):(x-2)^2+(y-3)^2=2$ và đường thẳng (d) : $x-y-2=0$.

a) Tìm trên $(\mathscr{C})$ điểm P sao cho khoảng cách từ P đến đường thẳng (d) đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

b) Tìm điểm $M(x_0;y_0)$ thuộc $(\mathscr{C})$ sao cho x_0+y_0 đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Lời giải.

a) Đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm $I(2;3)$ và bán kính $R=\sqrt{2}$.
Ta có $\mathrm{d}(I,(d)) = \dfrac{|2-3-2|}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} > \sqrt{2} = R \Rightarrow (d)$ không cắt $(\mathscr{C})$.
Gọi Δ là đường thẳng đi qua tâm I của $(\mathscr{C})$ và vuông góc với (d). Khi đó phương trình đường thẳng Δ là: $1(x-2)+1(y-3)=0$ hay $x+y-5=0$.
Tọa độ giao điểm của Δ và $(\mathscr{C})$ là nghiệm của hệ phương trình:
$\begin{cases}(x-2)^2+(y-3)^2=2\\ x+y-5=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5-y\\ y^2-6y+8=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=4\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=3\\ y=2.\end{cases}$
Suy ra Δ cắt $(\mathscr{C})$ tại hai điểm phân biệt $P_1(1;4)$ và $P_2(3;2)$.
Ta có:

$$\mathrm{d}(P_1,(d)) = \frac{|1-4-2|}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$
$$\mathrm{d}(P_2,(d)) = \frac{|3-2-2|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy khi $P\equiv P_1$ thì khoảng cách từ P đến đường thẳng (d) đạt giá trị lớn nhất và khi $P\equiv P_2$ thì khoảng cách từ P đến đường thẳng (d) đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Phương trình của $(\mathscr{C})$ được viết dưới dạng tham số là: $\begin{cases}x=2+\sqrt{2}\sin t\\ y=3+\sqrt{2}\cos t\end{cases}$ với $t\in[0;360^\circ)$.
Vì $M(x_0;y_0)\in(\mathscr{C})$ nên suy ra $\begin{cases}x_0=2+\sqrt{2}\sin t\\ y_0=3+\sqrt{2}\cos t.\end{cases}$
Ta có $x_0+y_0=5+\sqrt{2}(\sin t+\cos t)=5+2\sin(t+45^\circ)$.
Do đó, ta có:

x_0+y_0 đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow \sin(t+45^\circ)=1 \Leftrightarrow t=45^\circ \Rightarrow M(1;2)$.
x_0+y_0 đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow \sin(t+45^\circ)=-1 \Leftrightarrow t=225^\circ \Rightarrow M(3;4)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 44. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(\mathscr{C}):x^2+y^2=4$ và hai điểm $A\left(1;-\dfrac{8}{3}\right)$, $B(3;0)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc $(\mathscr{C})$ sao cho tam giác MAB có diện tích bằng $\dfrac{20}{3}$.

Lời giải. Ta có $AB = \sqrt{(3-1)^2 + \left(0+\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{10}{3}$.

Phương trình đường thẳng AB đi qua điểm $B(3;0)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = \left(2;\frac{8}{3}\right) = \frac{2}{3}(3;4)$ làm véc-tơ chỉ phương có dạng: $4(x-3)-3(y-0)=0$ hay $4x-3y-12=0$.

Gọi $M(x;y)$. Ta có: $S_{\triangle MAB} = \frac{20}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\mathrm{d}(M,AB).AB = \frac{20}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2}.\frac{|4x-3y-12|}{5}.\frac{10}{3} = \frac{20}{3} \Leftrightarrow |4x-3y-12| = 20$. (1)

Lại có $M \in (\mathscr{C}) \Rightarrow x^2+y^2=4$. (2)

Từ (1) & (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ |4x-3y-12|=20 \end{cases}$.

Giải hệ phương trình trên, ta tìm được $M(-2;0)$ hoặc $M\left(-\frac{14}{25};\frac{48}{75}\right)$.

Bài 45. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x+y+2=0$ và đường tròn $(\mathscr{C}): x^2+y^2-4x-2y=0$. Gọi I là tâm của đường tròn $(\mathscr{C})$ và M là một điểm thuộc đường thẳng Δ. Qua M, kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn $(\mathscr{C})$ (A, B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm M sao cho tứ giác $MAIB$ có diện tích bằng 10.

Lời giải. Đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm $I(2;1)$ và bán kính $R=\sqrt{5} \Rightarrow AI = \sqrt{5}$.

Ta có $S_{MAIB} = 10 \Leftrightarrow S_{\triangle MAI} = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{2}.AM.AI = 5 \Leftrightarrow AM = 2\sqrt{5}$.

Suy ra $IM^2 = IA^2 + AM^2 = 5+20 = 25$.

Ta có $M \in \Delta \Rightarrow M(m;-m-2)$. Do đó, ta có:

$IM^2 = 20 \Leftrightarrow (m-2)^2+(m+3)^2 = 20 \Leftrightarrow m^2+m-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=2. \end{array}\right.$

Vậy $M(2;-3)$ hoặc $M(-3;1)$.

Bài 46. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(\mathscr{C}): (x-3)^2+(y-2)^2=8$ và điểm $A(2;3)$.

a) Tìm các điểm thuộc $(\mathscr{C})$ có tọa độ nguyên.

b) Tìm điểm M thuộc $(\mathscr{C})$ sao cho MA đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Lời giải.

a) Ta xem phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$ đã cho là phương trình bậc hai với ẩn số là y:

$y^2-4y+x^2-6x+5=0$. (1)

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -x^2+6x+1 \geq 0 \Leftrightarrow 3-2\sqrt{2} \leq x \leq 3+2\sqrt{2}$. (2)

Từ (2) suy ra các điểm thuộc $(\mathscr{C})$ có hoành độ nguyên là: 1; 2; 3; 4; 5. (3)

Lần lượt thay các hoành độ nguyên ở (3) vào (1) ta tìm được các điểm thuộc $(\mathscr{C})$ có tọa độ nguyên là: (1;0), (1;4), (5;0), (5;4).

b) Phương trình của $(\mathscr{C})$ được viết dưới dạng tham số là: $\begin{cases} x = 3+2\sqrt{2}\sin t \\ y = 2+2\sqrt{2}\cos t \end{cases}$ với $t \in [0;360^\circ)$.

Vì $M \in (\mathscr{C})$ nên suy ra $M(3+2\sqrt{2}\sin t; 2+2\sqrt{2}\cos t)$.

Ta có $MA^2 = \left(2\sqrt{2}\sin t+1\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\cos t-1\right)^2 = 10+8\sin(t-45^\circ)$.

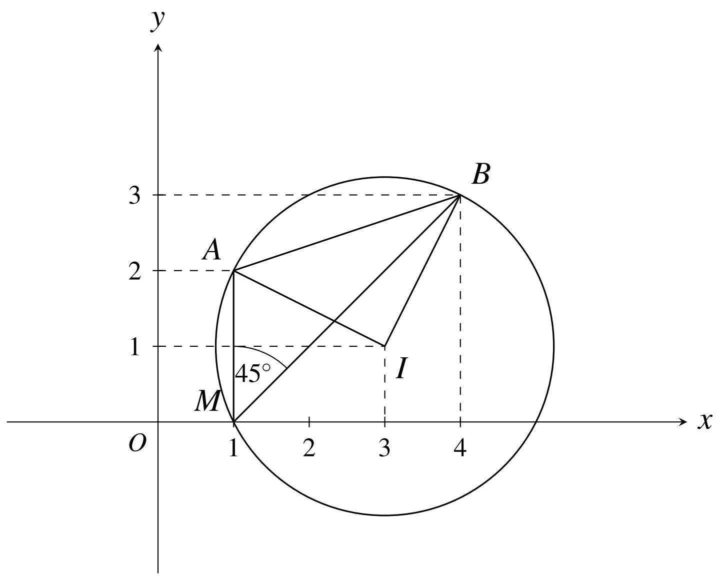
Suy ra $2 \leq MA^2 \leq 18 \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq MA \leq 3\sqrt{2}$.

Do đó, ta có:

- MA đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow \sin(t-45^\circ)=1 \Leftrightarrow t=135^\circ \Rightarrow M(1;4)$.
- MA đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow \sin(t-45^\circ)=-1 \Leftrightarrow t=315^\circ \Rightarrow M(5;0)$.

Bài 47. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(1;2)$, $B(4;3)$. Tìm trên trục hoành điểm M sao cho $\widehat{AMB} = 45^\circ$.

Lời giải.



Giả sử đã tìm được điểm $M \in Ox$ sao cho $\widehat{AMB} = 45°$. Vẽ đường tròn tâm $I(x;y)$ qua ba điểm A, B, M. Khi đó, ta có tam giác ABI vuông cân tại I. Do đó, ta có:

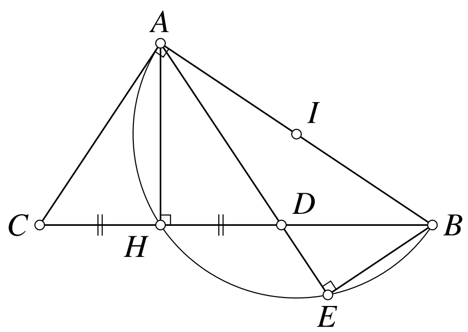
$$\begin{cases} AI = BI \\ \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BI} = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-4)^2 + (y-3)^2 \\ (x-1)(x-4) + (y-2)(y-3) = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3x + y = 10 \\ x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x = 2 \\ y = 4. \end{cases}$$

Vậy $I(3;1)$ hoặc $I(2;4)$.
Trong cả hai trường hợp này ta đều có $IA = \sqrt{5}$.
Đường tròn tâm $I(2;4)$, bán kính $\sqrt{5}$ không cắt trục hoành.
Đường tròn tâm $I(3;1)$, bán kính $\sqrt{5}$ có phương trình $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$, nó cắt trục hoành tại hai điểm $(1;0)$ và $(5;0)$.
Vậy $M(1;0)$ hay $M(5;0)$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 48. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại $A(2;4)$ có $AB > AC$ và $B(8;0)$. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A, điểm D nằm trên đường thẳng BC sao cho H là trung điểm CD. Gọi E là điểm nằm trên đường thẳng AD sao cho BC là phân giác góc $\widehat{ABE}$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE.

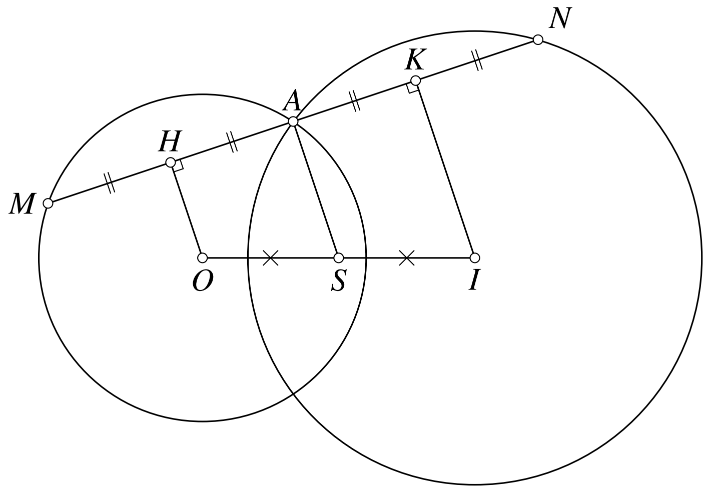
Lời giải.



Dễ thấy tam giác ACD cân tại A có AH là đường cao nên $\widehat{CAH} = \widehat{DAH}$. Ta có $\widehat{EBD} = \widehat{ABD} = \widehat{CAH} = \widehat{DAH}$ nên tứ giác $AHEB$ nội tiếp. Mà $\widehat{AHB} = 90^\circ$ nên tam giác ABE nội tiếp đường tròn đường kính AB.
Gọi I là trung điểm của AB. Ta có $I(5;2)$ và $IA = \sqrt{13}$. Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 13$.

Bài 49. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai đường tròn $(C_1)\colon x^2+y^2 = 13$ và $(C_2)\colon (x-6)^2+y^2 = 25$. Gọi A là giao điểm của (C_1) và (C_2) sao cho A có tung độ dương. Viết phương trình đường thẳng đi qua A cắt (C_1) và (C_2) theo hai dây cung có độ dài bằng nhau.

Lời giải.

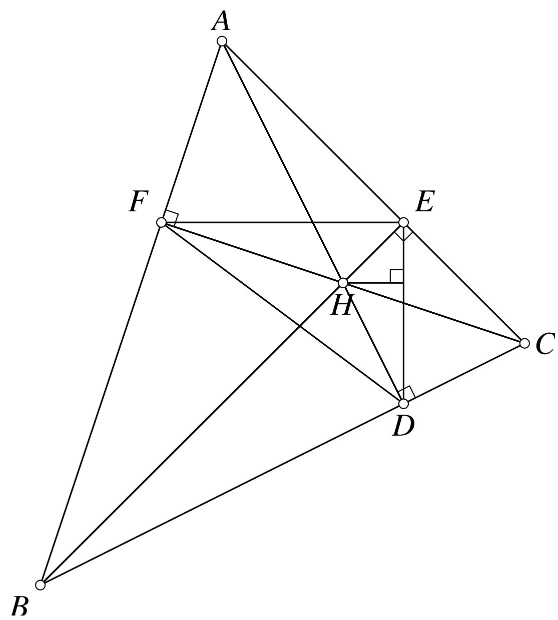


Tâm và bán kính của hai đường tròn (C_1), (C_2) lần lượt là $O(0;0)$, $R_1 = \sqrt{13}$ và $I(6;2)$, $R_2 = 5$. Gọi S, H, K lần lượt là trung điểm của OI, MA, NA.

Giao điểm của (C_1) và (C_2) là nghiệm của hệ $\begin{cases} x^2+y^2 = 13 \\ (x-6)^2+y^2 = 25 \end{cases}$. Giải hệ ta suy ra $A(2;3)$ (A có tung độ dương). Ta có $OH \parallel IK$ (cùng vuông góc với d), lại theo giả thiết suy ra $AH = AK$ nên SA là đường trung bình của hình thang $HOIK$. Do đó $SA \perp d$. Đường thẳng d qua A nhận $\overrightarrow{SA}$ làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình $x - 3y + 7 = 0$.

Bài 50. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho ba điểm $A(-1;5)$, $B(-4;-4)$, $C(4;0)$. Gọi D, E, F lần lượt là chân các đường cao hạ từ A, B, C. Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

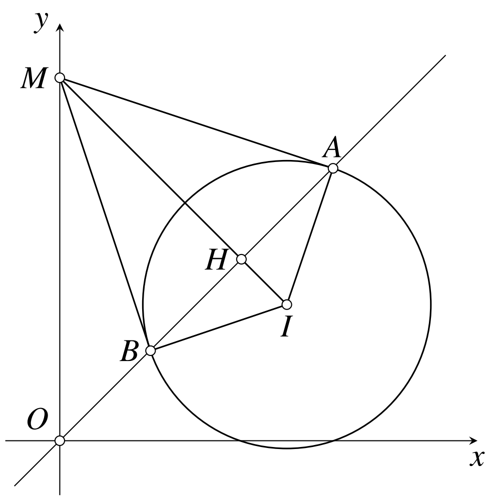
Lời giải.



Lời giải. Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Dễ thấy $BFHD$ và $CEHD$ là các tứ giác nội tiếp. Suy ra $\widehat{HDE} = \widehat{HCE} = \widehat{HBF} = \widehat{HDF}$, do đó HD là tia phân giác góc $\widehat{EDF}$. Tương tự HE là tia phân giác góc

$\widehat{DEF}$. Vậy H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.
Các đường thẳng BC và AC lần lượt có phương trình $x-2y-4=0$ và $x+y-4=0$. Các đường thẳng AD và BE lần lượt đi qua A, B và vuông góc với BC, CA nên chúng lần lượt có phương trình là $2x+y-3=0$ và $x-y=0$. Do H là giao điểm của AD và BE nên $H(1;1)$. Do D, E lần lượt là giao điểm của AD với BC, BE với CA nên $D(2;-1)$, $E(2;2)$. Suy ra phương trình đường thẳng DE là $y=2$. Do đó $\mathrm{d}(H;DE)=1$.
Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

Bài 51. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng $d: x-y=0$. Đường tròn (C) có bán kính $R=\sqrt{10}$ cắt d tại hai điểm AB sao cho $AB=4\sqrt{2}$. Tiếp tuyến của (C) tại A và B cắt nhau tại một điểm trên trục tung. Viết phương trình đường tròn (C).
Lời giải.



Đặt $M(0;m)$. Gọi H là trung điểm của AB, suy ra $AH=2\sqrt{2}$. Ta có $IH=\sqrt{IA^2-AH^2}=\sqrt{2}$, suy ra $MH=\dfrac{AH^2}{IH}=4\sqrt{2}$. Do đó

$$4\sqrt{2}=MH=\mathrm{d}(M,AB)=\frac{|m|}{\sqrt{2}}\Rightarrow m\pm 8.$$

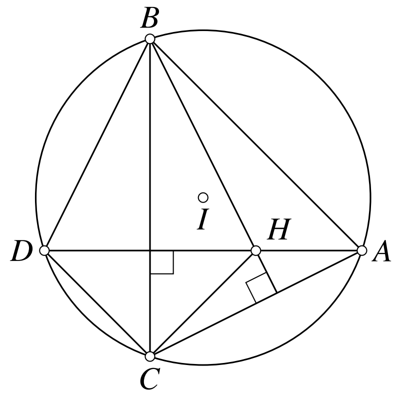
- Với $m=8$ ta được $M(0;8)$. Giả sử $I(a;b)$. Đường thẳng IM đi qua M vuông góc AB có phương trình $x+y-8=0$. Ta có

$$\begin{cases} I \text{ khác phía } M \text{ đối với } AB \\ I\in IM \\ \mathrm{d}(I,AB)=\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (0-8)(a-b)<0 \\ a+b-8=0 \\ \dfrac{|a-b|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=3. \end{cases}$$

  Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $(x-5)^2+(y-3)^2=10$.

- Với $m=-8$, tương tự ta được phương trình đường tròn cần tìm là $(x+5)^2+(y+3)^2=10$.

Bài 52. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm $H(2;1)$ và $B(1;3)$, $C(1;0)$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Lời giải.



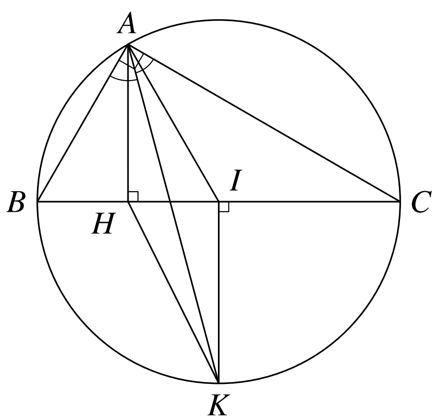
Gọi D là điểm đối xứng với H qua đường thẳng BC. Dễ thấy $\widehat{HBC} = 180^\circ - \widehat{BAC}$, mà D đối xứng với H qua BC nên $\widehat{BDC} = \widehat{BHC} = 180^\circ - \widehat{BAC}$. Suy ra tứ giác $ABDC$ là tứ giác nội tiếp, do đó đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cũng là đường tròn ngoại tiếp tam giác DBC.
Giả sử $D(u;v)$. Phương trình đường thẳng BC là $x = 1$. Do $HD \perp BC$ nên đường thẳng BC nhận véc-tơ $\overrightarrow{HA} = (u-2;v-1)$ làm một véc-tơ pháp tuyến. Suy ra $v = 1$.
Mặt khác trung điểm của HD nằm trên BC nên $\dfrac{u+2}{2} = 1$ hay $u = 0$. Vậy $D(0;1)$.
Giả sử phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác DBC có dạng $x^2+y^2+ax+by+c = 0$. Do D, B, C thuộc đường tròn nên toạ độ của chúng thoả mãn phương trình đường tròn hay

$$\begin{cases} 0^2+1^2+a\cdot 0+b\cdot 1+c=0 \\ 1^2+3^2+a\cdot 1+b\cdot 3+c=0 \\ 1^2+0^2+a\cdot 1+b\cdot 0+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=-3 \\ c=2. \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $x^2+y^2-3x-3y+2=0$.

Bài 53. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có $AB < AC$ nội tiếp đường tròn $(C):(x-3)^2+(y-1)^2=8$ và $B(1;-1)$, $C(5;3)$. Tia phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn (C) tại K. Hình chiếu của A trên đường thẳng BC là H. Tìm toạ độ điểm A biết $\dfrac{AH}{HK} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$ và A có tung độ dương.

Lời giải.

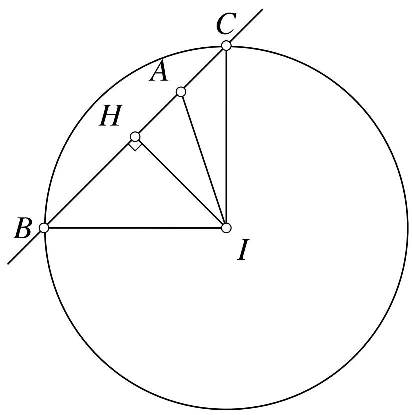


Đường tròn (C) có tâm $I(3;1)$, bán kính $R = 2\sqrt{2}$ và BC là đường kính của đường tròn (C). Dễ thấy K là điểm chính giữa cung BC nên $IK \perp BC$. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{3}{5} = \frac{AH^2}{HK^2} &= \frac{BH \cdot CH}{IH^2+IK^2}\\ &= \frac{(R-IH)(R+IH)}{R^2+IH^2}\\ &= \frac{R^2-IH^2}{R^2+IH^2}\\ \Rightarrow IH &= \frac{R}{2}.\end{aligned}$$

Do đó H là trung điểm BI, suy ra A nằm trên đường trung trực của BI, có phương trình $x+y-2=0$. Do A là giao điểm của đường trung trực của đoạn BI và đường tròn (C) nên toạ độ của điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+y=2 \\ (x-3)^2+(y-1)^2=8 \end{cases}$.
Giải hệ ta được $A\left(2-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$.

Bài 54. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn $(C): (x-1)^2+(y+1)^2=16$ có tâm I và điểm $A(0;2)$. Viết phương trình đường thẳng d qua A cắt (C) tại hai điểm phân biệt B, C sao cho tam giác IBC và có diện tích bằng 8.
Lời giải.



Dễ thấy $I=(1;-1)$ và $IA=\sqrt{10}<4$ nên A nằm trong đường tròn (C). Do đó đường thẳng d qua A luôn cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt B, C.
Ta có $8 = S_{IBC} = \frac{1}{2} IB \cdot IC \sin\widehat{BIC}$ nên $\sin\widehat{BIC}=1$. Do đó $\widehat{BIC}=90^\circ$. Gọi H là trung điểm BC ta có $IH=2\sqrt{2}$. Đường thẳng đi qua A có phương trình dạng

$$ax+b(y-2)=0\ (a^2+b^2>0).$$

Ta có $\mathrm{d}(I,d)=IH=2\sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{|a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\sqrt{2} \Rightarrow a^2+6ab-b^2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ b=7a \end{array}\right.$.

- Với $a=-b$, chọn $a=1, b=-1$ ta được đường thẳng $d_1: x-y+2=0$.
- Với $b=7a$ chọn $a=1, b=7$, ta được đường thẳng $d_2: x+7y-14=0$.

Bài 55. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+4\sqrt{3}x-4=0$. Tia Oy cắt (C) tại A. Viết phương trình đường tròn (C'), bán kính $R'=2$ và tiếp xúc ngoài với (C) tại A.
Lời giải. Đường tròn (C) có tâm $I\left(-2\sqrt{3};0\right)$, bán kính $R=4$.

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x^2+y^2+4\sqrt{3}x-4=0 \\ x=0 \end{cases}$ với $y>0$, suy ra $A(0;2)$.

Đường thẳng IA đi qua hai điểm I và A nên có phương trình $IA:\begin{cases}x=2\sqrt{3}t\\ y=2t+2\end{cases}$.

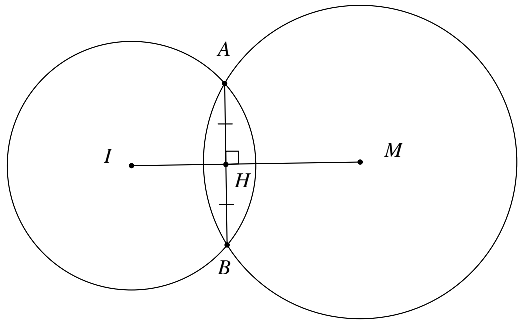
Đường tròn (C') tiếp xúc ngoài với (C) nên tâm I' thuộc đường thẳng IA, suy ra $I'\left(2\sqrt{3}t;2t+2\right)$.

Hơn nữa, $R=2R'$ nên $\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{I'A}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\sqrt{3}-0=2\left(0-2\sqrt{3}t\right)\\ 0-2=2\left(2-2t-2\right)\end{cases}\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$.

Với $t=\dfrac{1}{2}$, suy ra $I'\left(\sqrt{3};3\right)$. Phương trình đường tròn $(C'):\left(x-\sqrt{3}\right)^2+(y-3)^2=4$.

Bài 56. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):x^2+y^2-2x+4y+2=0$. Viết phương trình đường tròn (C') có tâm $M(5;1)$, biết (C') cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho $AB=\sqrt{3}$.

Lời giải.



Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=\sqrt{3}$.
Phương trình đường thẳng nối hai tâm IM là $3x-4y-11=0$.
Gọi $H(x;y)$ là trung điểm của AB. Ta có

$$\begin{cases}H\in IM\\ IH=\sqrt{R^2-AH^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-4y-11=0\\ (x-1)^2+(y+2)^2=\dfrac{9}{4}\end{cases}$$

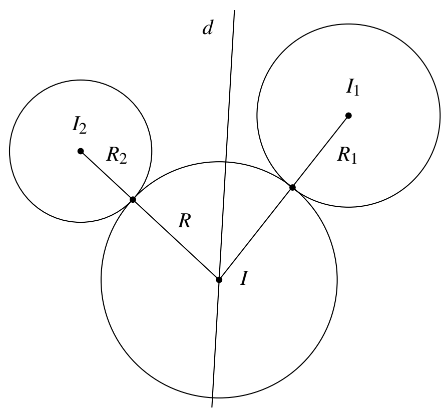
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{1}{5}\\ y=-\dfrac{29}{10}\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x=\dfrac{11}{5}\\ y=-\dfrac{11}{10}\end{cases}.$$

Suy ra $H\left(-\dfrac{1}{5};-\dfrac{29}{10}\right)$ hoặc $H\left(\dfrac{11}{5};-\dfrac{11}{10}\right)$.

- Với $H\left(-\dfrac{1}{5};-\dfrac{29}{10}\right)$. Ta có $R'^2=MH^2+AH^2=43$.
  Phương trình đường tròn $(C'):(x-5)^2+(y-1)^2=43$.
- Với $H\left(\dfrac{11}{5};-\dfrac{11}{10}\right)$. Ta có $R'^2=MH^2+AH^2=13$.
  Phương trình đường tròn $(C'):(x-5)^2+(y-1)^2=13$.

Bài 57. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d:x-y-1=0$ và hai đường tròn có phương trình $(C_1):(x-3)^2+(y+4)^2=8$, $(C_2):(x+5)^2+(y-4)^2=32$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I thuộc d và tiếp xúc ngoài với (C_1) và (C_2).

Lời giải.



Gọi I,I_1,I_2,R,R_1,R_2 lần lượt là tâm và bán kính của (C), (C_1) và (C_2).
Giả sử $I(t;t-1)\in d$. Theo giả thiết bài toán: (C) tiếp xúc ngoài với (C_1) và (C_2) nên

$$\begin{cases}II_1=R+R_1\\ II_2=R+R_2\end{cases}$$

Suy ra

$$II_1-R_1=II_2-R_2\Leftrightarrow\sqrt{(t-3)^2+(t+3)^2}-2\sqrt{2}=\sqrt{(t-5)^2+(a+5)^2}-4\sqrt{2}\Leftrightarrow t=0.$$

Với $t=0$, suy ra $I(0;-1)$ và $R=II_1-R_1=\sqrt{2}$.
Phương trình đường tròn $(C):x^2+(y+1)^2=2$.

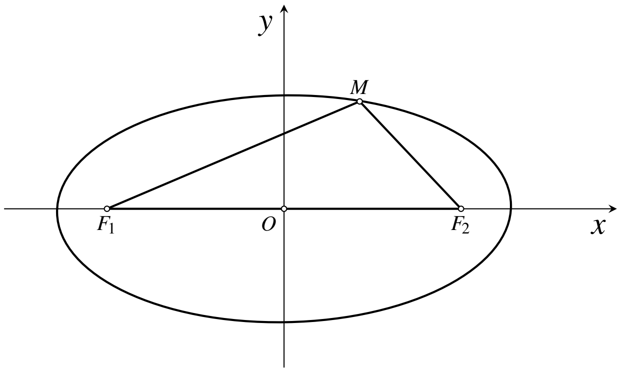
§3. ĐƯỜNG ELIP

I. Tóm tắt lí thuyết

1. Định nghĩa

Trong mặt phẳng cho hai điểm cố định F_1, F_2 với $F_1F_2 = 2c$ và một độ dài không đổi $2a$ $(0 < c < a)$. Elip (E) là tập hợp tất cả các điểm M trong mặt phẳng thỏa mãn $MF_1 + MF_2 = 2a$.
Ta gọi:

- F_1, F_2 là các tiêu điểm của elip;
- $F_1F_2 = 2c$: Tiêu cự của elip;
- MF_1, MF_2: Bán kính qua tiêu.



2. Phương trình chính tắc của Elip

Phương trình chính tắc của elip:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

trong đó $a^2 = b^2 + c^2$.

Chứng minh. Cho Elip có hai tiêu điểm F_1 và F_2. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho $F_1(-c;0), F_2(c;0)$.
Khi đó: $MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Leftrightarrow MF_1^2 = (x+c)^2 + y^2$
$MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Leftrightarrow MF_2^2 = (x-c)^2 + y^2$
$\Rightarrow MF_1^2 - MF_2^2 = 4cx$ mà $M \in (E) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 2a$ nên $MF_1 - MF_2 = \dfrac{2cx}{a}$.
Ta có hệ:

$$\begin{cases} MF_1 - MF_2 &= \dfrac{2cx}{a} \\ MF_1 + MF_2 &= 2a \end{cases} \tag{3.1}$$

Suy ra:

$$\begin{cases} MF_1 &= a + \dfrac{cx}{a} \\ MF_2 &= a - \dfrac{cx}{a} \end{cases} \tag{3.2}$$

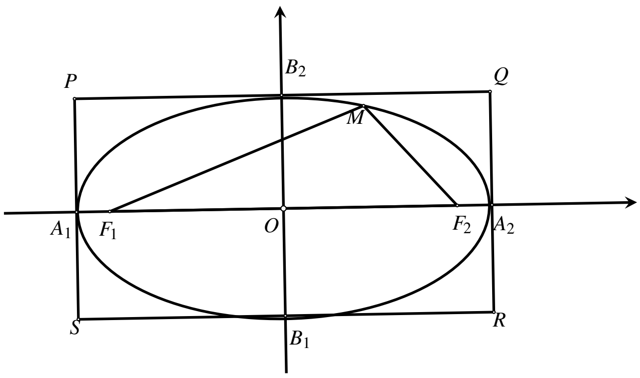
Lại có: $MF_1 = a + \dfrac{cx}{a} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ hay $\left(a + \dfrac{cx}{a}\right)^2 = (x+c)^2 + y^2$

Từ đó, phân tích và rút gọn ta được: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$

Do $a^2 - c^2 > 0$ nên đặt $a^2 - c^2 = b^2\,(b > 0)$, ta được: $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1(*)}$

Phương trình $(*)$ gọi là phương trình chính tắc của elip.

3. Hình dạng của elip



a) *Trục đối xứng của elip*: Elip có phương trình $(*)$ nhận các trục tọa độ làm trục đối xứng và nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

b) *Hình chữ nhật cơ sở*: Vẽ qua A_1 và A_2 hai đường thẳng song song với trục tung, vẽ qua B_1 và B_2 hai đường thẳng song song với trục hoành. Bốn đường thẳng đó tạo thành hình chữ nhật $PQRS$. Ta gọi hình chữ nhật đó là hình chữ nhật cơ sở của elip.
Từ đó suy ra Mọi điểm của elip nếu không phải là đỉnh đều nằm trong hình chữ nhật cơ sở của nó, bốn đỉnh của elip là trung điểm các cạnh của hình chữ nhật cơ sở.

⚠ *Các điểm:* $A_1(-a;0);A_2(a;0);B_1(0;-b);B_2(0;b)$ *gọi là các đỉnh của elip.*
$A_1A_2 = 2a$*: Độ dài trục lớn.* $B_1B_2 = 2b$*: Độ dài trục bé.*

c) *Tâm sai của elip*: Tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn của elip gọi là tâm sai của elip và được kí hiệu là e tức là $\boxed{e = \frac{c}{a}}$.
– Nếu tâm sai e càng bé (tức là càng gần 0) thì b càng gần a và hình chữ nhật cơ sở càng gần với hình vuông, do đó đường elip càng "béo".
– Nếu tâm sai e càng lớn (tức là càng gần 1) thì tỉ số $\frac{b}{a}$ càng gần tới 1 và hình chữ nhật cơ sở càng "dẹt", do đó đường elip càng "gầy".

II. Các dạng toán

Dạng 1. Xác định các yếu tố của elip

Xác đinh tọa độ các đỉnh, tọa độ các tiêu điểm, độ dài các trục, độ dài tiêu cự của elip bằng cách áp dụng các công thức:

a) $c^2 = a^2 - b^2$.

b) Độ dài trục lớn: $A_1A_2 = 2a$, độ dài trục nhỏ: $B_1B_2 = 2b$.

c) Độ dài tiêu cự: $F_1F_2 = 2c$.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Xác định tọa độ các đỉnh và độ dài các trục của các elip có phương trình sau:

a) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$

b) $x^2+4y^2=1$.

Lời giải.

a) Từ phương trình $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$ ta có: $a=4$, $b=2$.
Các đỉnh: $A_1(-4;0)$, $A_2(4;0)$, $B_1(0;-2)$, $B_2(0;2)$.
Độ dài trục lớn: $A_1A_2=2a=8$, $B_1B_2=2b=4$.

b) Ta có $x^2+4y^2=1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{1}+\dfrac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$: $a=1$, $b=\dfrac{1}{2}$.
Các đỉnh: $A_1(-1;0)$, $A_2(1;0)$, $B_1(0;-\dfrac{1}{2})$, $B_2(0;\dfrac{1}{2})$.
Độ dài trục lớn: $A_1A_2=2a=2$, $B_1B_2=2b=1$.

Ví dụ 2. Xác định tọa độ các tiêu điểm và độ dài tiêu cự của các elip có phương trình sau:

a) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

b) $4x^2+25y^2=36$.

Lời giải.

a) Từ phương trình $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ ta có: $a^2=4$, $b^2=3$, suy ra $c=1$.
Các tiêu điểm: $F_1(-1;0)$, $F_2(1;0)$.
Độ dài tiêu cự: $F_1F_2=2c=2$.

b) Ta có $4x^2+25y^2=36 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{\frac{36}{25}}=1$, suy ra: $a^2=9$, $b^2=\dfrac{36}{25} \Rightarrow c=\dfrac{3\sqrt{21}}{5}$.
Các tiêu điểm: $F_1(-\dfrac{3\sqrt{21}}{5};0)$, $F_2(\dfrac{3\sqrt{21}}{5};0)$.
Độ dài tiêu cự: $F_1F_2=2c=\dfrac{6\sqrt{21}}{5}$.

Ví dụ 3. Cho elip (E) có độ dài trục lớn bằng 10, tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn là $\dfrac{3}{5}$. Tính độ dài trục nhỏ của elip.

Lời giải. Ta có $2a=10 \Rightarrow a=5$. Mà $\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{5} \Rightarrow c=3$.
Do đó $b^2=a^2-c^2=16 \Rightarrow b=4$. Vậy độ dài tục nhỏ $2b=8$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Xác định tọa độ các đỉnh và các tiêu điểm của các elip có phương trình sau:

a) $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=1$

b) $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

Lời giải.
a) Ta có $a^2 = 100, b^2 = 64 \Rightarrow a = 10, b = 8, c = 6$.
Vậy $A_1(-10;0)$, $A_2(10;0)$, $B_1(0;-8)$, $B_2(0;8), F_1(-6;0), F_2(6;0)$.
b) Ta có $a^2 = 4, b^2 = 1 \Rightarrow a = 2, b = 1, c = \sqrt{3}$.
Vậy $A_1(-2;0)$, $A_2(2;0)$, $B_1(0;-1)$, $B_2(0;1), F_1(-\sqrt{3};0), F_2(\sqrt{3};0)$.

Bài 2. Xác định tọa độ các đỉnh và các tiêu điểm của các elip có phương trình sau:
a) $16x^2 + 25y^2 = 1$
b) $0,25x^2 + 9y^2 = 1$.
Lời giải.
a) Ta có $16x^2 + 25y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{16}} + \frac{y^2}{\frac{1}{25}} = 1$.
Do đó: $A_1(-\frac{1}{4};0)$, $A_2(\frac{1}{4};0)$, $B_1(0;-\frac{1}{5})$, $B_2(0;\frac{1}{5}), F_1(-\frac{3}{20};0), F_2(\frac{3}{20};0)$.
b) Ta có $0,25x^2 + 9y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1$.
Vậy: $A_1(-\frac{1}{4};0)$, $A_2(\frac{1}{4};0)$, $B_1(0;-\frac{1}{5})$, $B_2(0;\frac{1}{5}), F_1(-\frac{3}{20};0), F_2(\frac{3}{20};0)$.

Bài 3. Tìm độ dài trục lớn, trục nhỏ và tiêu cự của các elip có phương trình sau:
a) $16x^2 + 64y^2 = 100$
b) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 2$.
Lời giải.
a) Ta có $16x^2 + 64y^2 = 100 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{100}{16}} + \frac{y^2}{\frac{100}{64}} = 1$. Vậy $2a = 5, 2b = \frac{5}{2}, 2c = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.
b) Ta có $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. Vậy $2a = 8, 2b = 4, 2c = 4\sqrt{3}$.

Bài 4. Xác định độ dài các trục của elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(a > b > 0)$ biết rằng (E) có độ dài tiêu cự bằng 6 và đi qua điểm $A(5;0)$.
Lời giải.
Ta có $2c = 6 \Rightarrow c = 3, a = 5 \Rightarrow b = 4$. Vậy $2a = 10, 2b = 8$.

Bài 5. Xác định tọa độ các đỉnh của elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(a > b > 0)$ biết rằng (E) đi qua hai điểm $M(0;-2)$ và $N(2;\sqrt{3})$.
Lời giải.
Ta có $b = 2$. (E) đi qua điểm $N(2;\sqrt{3})$ nên $a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$.
Vậy $A_1(-4;0), A_2(4;0), B_1(0;-2), B_2(0;2)$.

Bài 6. Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Biết (E) đi qua điểm $M\left(2\sqrt{3};\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$ và có tiêu cự bằng $\frac{3}{4}$ độ dài trục lớn. Tính độ dài trục nhỏ của (E).
Lời giải.
Ta có $c = \frac{3}{4}a$, $b^2 = a^2 - c^2 = \frac{7}{16}a^2$. Vì $M \in (E)$ nên $b^2 = 7$. Suy ra $2b = 2\sqrt{7}$.

Bài 7. Tìm tọa độ các đỉnh của elip (E) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, biết rằng (E) đi qua điểm $M(2;1)$ và các đỉnh trên trục nhỏ nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông.
Lời giải.
Gọi B là đỉnh trên trục nhỏ, F_1, F_2 là hai tiêu điểm.
Khi đó tam giác F_1BF_2 vuông cân nên $b = c$. Do đó $a^2 = b^2 + c^2 = 2b^2$.

Mặt khác $M \in (E)$ nên $\dfrac{4}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = 1$. Từ đó suy ra $b^2 = 3$, $a^2 = 6$.
Vậy $A_1(-\sqrt{6},0)$, $A_2(\sqrt{6},0)$, $B_1(0;-\sqrt{3})$, $B_2(0;\sqrt{3})$.

Bài 8. Cho elip (E) có phương trình chính tắc là $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Xác định tọa độ các tiêu điểm của (E) biết rằng (E) đi qua điểm $M(\sqrt{5};1)$ và khoảng cách từ một đỉnh nằm trên trục lớn đến một đỉnh nằm trên trục nhỏ bằng tiêu cự.

Lời giải.
Gọi $A(a;0)$, $B(0;b)$ là hai đỉnh. Khi đó $AB = 2c$ suy ra $a^2 + b^2 = 4c^2$.
Mà $c^2 = a^2 - b^2$ nên $3a^2 = 5b^2$.
Vì $M \in (E)$ suy ra $b^2 = 4$, $a^2 = \dfrac{20}{3} \Rightarrow c = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.
Vậy $F_1(-\dfrac{2\sqrt{6}}{3};0)$, $F_1(-\dfrac{2\sqrt{6}}{3};0)$.

Dạng 2. Viết phương trình đường Elip

Viết phương trình elip là quá trình tìm các dặc trưng của elip, đó là độ dài trục lớn ($2a$), độ dài trục nhỏ ($2b$).

Khi làm dạng bài này, đầu tiên cần giả sử phương trình elip có dạng $(E) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.
Sau đó từ những giả thiết bài toán, giải tìm a, b và viết phương trình.
$*$ Khi làm bài cần chú ý các tính chất sau của elip:

a) Elip nhận hai trục Ox, Oy làm trục đối xứng.

b) Tâm sai của elip $e = \dfrac{c}{a}$.

c) Bán kính qua tiêu của điểm $M(x;y) \in (E)$: $MF_1 = a + ex; MF_2 = a - ex$.

d) Đường chuẩn của elip:
Đường thẳng $d_1 : x + \dfrac{a}{e} = 0$ được gọi là đường chuẩn của elip, ứng với tiêu điểm $F_1(-c;0)$.
Đường thẳng $d_2 : x - \dfrac{a}{e} = 0$ được gọi là đường chuẩn của elip, ứng với tiêu điểm $F_2(c;0)$.

Ví dụ 4. Lập phương trình chính tắc của elip (E) mà độ dài trục lớn bằng 6, độ dài trục nhỏ bằng 4.

Lời giải. Giả sử phương trình elip có dạng $(E) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.
Độ dài trục lớn bằng $6 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$.
Độ dài trục nhỏ bằng $4 \Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = 2$.
Vậy phương trình elip là $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

Ví dụ 5. Lập phương trình chính tắc của elip (E) có độ dài trục lớn bằng 10, tiêu cự có độ dài bằng 6.

Lời giải. Giả sử phương trình elip có dạng $(E) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.
Độ dài trục lớn bằng $10 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5$.
Độ dài tiêu cự bằng $6 \Rightarrow 2c = 6 \Rightarrow c = 3$.
Ta có $b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b = 4$.
Vậy phương trình elip có dạng $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

Ví dụ 6. Viết phương trình chính tắc của elip đi qua hai điểm $M(1;0), N(\frac{\sqrt{3}}{2};1)$.

Lời giải. Giả sử phương trình elip có dạng $(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Điểm $M \in (E) \Rightarrow \frac{1}{a^2}=1 \Rightarrow a=1$.

Điểm $N \in (E) \Rightarrow \frac{3}{4}+\frac{1}{b^2}=1 \Rightarrow b=2$.

Vậy phương trình chính tắc của elip có dạng $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 9. Lập phương trình chính tắc của elip biết elip đi qua điểm $M(8;12)$ và có bán kính qua tiêu điểm bên phải của M bằng 20.

Lời giải. Giả sử phương trình elip có dạng $(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

$M(8;12) \in (E) \Rightarrow \frac{64}{a^2}+\frac{144}{b^2}=1$.

Bán kính qua tiêu điểm bên phải: $MF_2=20 \Rightarrow a-ex=20 \Rightarrow a-\frac{8c}{a}=20 \Rightarrow c=\frac{a^2-20a}{8}$.

Lại có $b^2=a^2-c^2$, thay vào ta được phương trình ẩn a sau khi quy đồng và khử mẫu có dạng: $a^4-40a^3+272a^2+2560a-12288=0 \Leftrightarrow (a-4)(a-16)(a^2-20a-192)=0$.

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=4 \\ a=16 \\ a=10-2\sqrt{73} \\ a=10+2\sqrt{73} \end{array}\right.$$

Chú ý là $c>0 \Rightarrow a=10+2\sqrt{73} \Rightarrow c=24 \Rightarrow b^2=40\sqrt{73}-184$.

Vậy phương trình elip cần tìm là: $\frac{x^2}{(10+2\sqrt{73})^2}+\frac{y^2}{40\sqrt{73}-184}=1$.

Bài 10. Viết phương trình chính tắc của elip đi qua $M\left(\frac{8}{\sqrt{5}};\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ và $\widehat{F_1MF_2}=90^\circ$.

Lời giải. Giả sử phương trình elip có dạng $(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

$M \in (E) \Rightarrow \frac{64}{5a^2}+\frac{16}{5b^2}=1 (1)$.

Ta có: $\overrightarrow{F_1M}=\left(\frac{8}{\sqrt{5}}+c;\frac{4}{\sqrt{5}}\right); \overrightarrow{F_2M}=\left(\frac{8}{\sqrt{5}}-c;\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$

$\overrightarrow{F_1M}.\overrightarrow{F_2M}=0 \Rightarrow c=4$.

Lại có $b^2=a^2-c^2$. Thay vào (1), ta có phương trình ẩn a: $\frac{64}{5a^2}+\frac{16}{5(a^2-16)}=1$.

Giải phương trình trên ta có $\left[\begin{array}{l} a^2=\frac{80+16\sqrt{5}}{5} \\ a^2=\frac{80-16\sqrt{5}}{5} \end{array}\right.$. Với $a>c \Rightarrow a^2=\frac{80+16\sqrt{5}}{5}$

$b^2=a^2-c^2=\frac{16\sqrt{5}}{5}$.

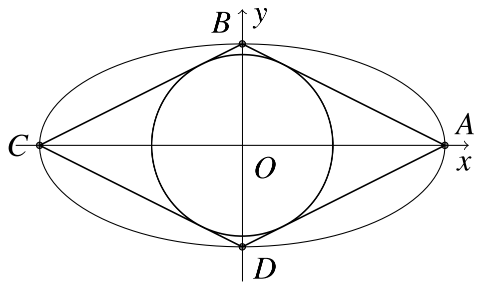
Vậy phương trình elip cần tìm là: $\frac{x^2}{\frac{80+16\sqrt{5}}{5}}+\frac{y^2}{\frac{16\sqrt{5}}{5}}=1$.

Bài 11. Viết phương trình chính tắc của đường elip biết hình chữ nhật cơ sở của (E) có một cạnh nằm trên đường thẳng $y-2=0$ và có độ dài đường chéo bằng 6.

Lời giải. Giả sử phương trình elip có dạng $(E): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.
Một cạnh của hình chữ nhật cơ sở nằm trên đường thẳng $y=2$ suy ra $b=2$.
Đường chéo của hình chữ nhật cơ sở có độ dài bằng 6 suy ra $4a^2=36-16=20 \Rightarrow a^2=5$.
Vậy phương trình elip cần tìm là $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

Bài 12. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hình thoi $ABCD$ có $AC=2BD$ và đường tròn tiếp xúc với các cạnh của hình thoi có phương trình $x^2+y^2=4$. Viết phương trình chính tắc của elip đi qua các đỉnh A,B,C,D của hình thoi. Biết điểm A nằm trên trục Ox.

Lời giải.



Đường tròn nội tiếp hình thoi $ABCD$ có tâm trùng với giao điểm của hai đường chéo AC,BD của hình thoi.
Do $A\in Ox \Rightarrow C\in Ox, B,D\in Oy$. Nên A,B,C,D chính là bốn đỉnh của (E).
Giả sử phương trình elip có dạng $(E): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.
Từ việc bốn đỉnh của hình thoi là bốn đỉnh của hình thoi và giả thiết $AC=2BD$ suy ra $a=2b$.
Xét tam giác vuông OAD trong hệ mặt phẳng Oxy với AD là tiếp tuyến của đường tròn nội tiếp hình thoi $ABCD$, đường cao xuất phát từ đỉnh O của tam giác này có độ dài là h bằng bán kính đường tròn nội tiếp hình thoi $ABCD$.
Ta có $\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OD^2}$, với $h=2, OA=a=2b=2OD$.
Từ đó ta có $a^2=20, b^2=5$.
Vậy phương trình elip cần tìm là $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{5}=1$.

Bài 13. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho điểm $M(1;2)$ và đường tròn $(C): x^2+y^2=21$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) biết hình chữ nhật cơ sở của (E) nội tiếp đường tròn (C) và điểm M nhìn hai tiêu điểm của (E) dưới một góc 60°.

Lời giải. Giả sử phương trình elip có dạng $(E): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$
Vì đường tròn (C) có tâm $O(0;0)$ trùng với tâm của hình chữ nhật cơ sở và tâm của elip nên ta có $2\sqrt{a^2+b^2}=2R$ suy ra $a^2+b^2=21$.
Ta có hai tiêu điểm $F_1(-c;0), F_2(c;0)$, lại có $\widehat{F_1MF_2}=60^\circ$
$\Rightarrow (F_1F_2)^2=(MF_1)^2+(MF_2)^2-2MF_1.MF_2.\cos 60^\circ$
$\Rightarrow 4c^2=(2+c)^2+1+(2-c)^2+1-\sqrt{1+(2+c)^2}.\sqrt{1+(2+c)^2}$
$\Rightarrow 3c^4-34c^2+75=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c^2=3 \\ c^2=\dfrac{25}{3}\end{array}\right.$
Với $c^2=3 \Rightarrow a^2=12, b^2=9 \Rightarrow (E): \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.
Với $c^2=\dfrac{25}{3} \Rightarrow a^2=\dfrac{44}{3}, b^2=\dfrac{19}{3} \Rightarrow (E): \dfrac{x^2}{\frac{44}{3}}+\dfrac{y^2}{\frac{19}{3}}=1$.

Bài 14. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2=9$, viết phương trình chính tắc của cho elip (E) có tâm sai $e=\dfrac{1}{3}$. Biết (E) cắt (C) tại 4 điểm phân biệt A,B,C,D sao cho AB song song với Ox và $AB=3BC$.

Lời giải. Giả sử phương trình elip có dạng $(E): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Tâm sai của (E) bằng $\frac{1}{3}$ suy ra $\frac{c}{a}=\frac{1}{3} \Rightarrow 8a^2-9b^2=0 \qquad (1)$

Toạ độ của A,B,C,D là nghiệm của hệ $\begin{cases} x^2+y^2=9(2) \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(3) \end{cases}$

Do (E) và (C) cùng nhận Ox,Oy làm trục đối xứng nên ta có $ABCD$ là hình chữ nhật.
Giả sử $A(x;y)$, vì $AB \parallel Ox$ nên $B(-x;y);C(-x;-y);D(x;-y)$.
Ta có $AB=3BC \Leftrightarrow x^2=9y^2 \quad (4)$

Từ (2) thay vào (4) ta có: $x^2=\frac{81}{10}, y^2=\frac{9}{10}$, thay vào (3), ta được $\frac{81}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1 \quad (5)$

Từ (1) và (5) ta có hệ sau: $\begin{cases} 8a^2-9b^2=0 \\ \dfrac{81}{a^2}+\dfrac{9}{b^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=\dfrac{729}{80} \\ b^2=\dfrac{81}{10} \end{cases}$

Vậy phương trình elip (E) cần tìm là $\dfrac{x^2}{\frac{729}{80}}+\dfrac{y^2}{\frac{81}{10}}=1$.

Dạng 3. Tìm điểm thuộc elip thỏa điều kiện cho trước

Từ phương trình chính tắc của elip $(E): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ suy ra rằng nếu điểm $M(x_0;y_0)\in(E)$ thì tọa độ của M phải thỏa phương trình trên, tức $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$. Kết hợp với các điều kiện khác để tìm điểm M.

Ví dụ 7. Trong mặt phẳng Oxy, cho elip $(E): 9x^2+16y^2=144$. Tìm tất cả điểm M thuộc elip sao cho góc $\widehat{F_1MF_2}$ bằng 60^0.

Lời giải. Phương trình chính tắc của elip $(E): \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$. Khi đó: $a=4, b=3, c=\sqrt{7}$.
Gọi $M(x;y)$ là điểm cần tìm. Ta có:

$$MF_1=4+\frac{\sqrt{7}}{4}x;\quad MF_2=4-\frac{\sqrt{7}}{4}x;\quad F_1F_2=2\sqrt{7}$$

Áp dụng định lí cosin trong tam giác F_1MF_2, ta được:

$$F_1F_2^2=MF_1^2+MF_2^2-2MF_1.MF_2.\cos\widehat{F_1MF_2}$$

$$28=2\left(16+\frac{7}{16}x^2\right)-\left(4+\frac{\sqrt{7}}{4}x\right)\left(4-\frac{\sqrt{7}}{4}x\right)\Leftrightarrow x^2=\frac{64}{7}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{8}{\sqrt{7}} \text{ hoặc } x=-\frac{8}{\sqrt{7}}.$$

Vậy có 4 điểm thỏa đề bài là $\left(\frac{8}{\sqrt{7}};\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right);\left(-\frac{8}{\sqrt{7}};\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right);\left(\frac{8}{\sqrt{7}};-\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right);\left(-\frac{8}{\sqrt{7}};-\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)$.

Ví dụ 8. Trong mặt phẳng Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$. Tìm tất cả các điểm thuộc elip có tọa độ là số nguyên.

Lời giải. Gọi $M(x;y)$ là điểm cần tìm.
Khi đó $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1 \Rightarrow |x|\le 2\sqrt{2}$ nên $|x|$ chỉ có thể nhận các giá trị $0,1$ hoặc 2.

Với $|x|=0$ ta có $|y|=\sqrt{2}$ (loại).
Với $|x|=1$ ta có $|y|=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ (loại).
Với $|x|=2$ ta có $|y|=1$.
Vậy tất cả các điểm thuộc (E) có tọa đô nguyên là $(2;1),(2;-1),(-2;1),(-2;-1)$.

Ví dụ 9. Trong mặt phẳng Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$. Gọi M là điểm di động trên elip. Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của M lên các trục tọa độ Ox và Oy. Tìm tất cả điểm M để tứ giác $OHMK$ có diện tích lớn nhất.

Lời giải. Gọi $M(x;y)$ là điểm cần tìm. Dễ thấy tứ giác $OHKM$ là hình chữ nhật. Khi đó,

$$S_{OHKM}=OH.OK=|x|.|y|=|xy|.$$

Mặt khác, ta có

$$1=\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}\geq 2\sqrt{\frac{x^2}{9}.\frac{y^2}{4}}=\frac{1}{3}|xy|\Rightarrow |xy|\leq 3$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{x^2}{9}=\dfrac{y^2}{4}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ và $y=\pm\sqrt{2}$.
Vậy, tứ giác $OHMK$ có diện tích lớn nhất khi M nằm tại một trong các điểm

$$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2};\sqrt{2}\right);\left(\frac{3\sqrt{2}}{2};-\sqrt{2}\right);\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2};\sqrt{2}\right);\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2};-\sqrt{2}\right).$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 15. Trong mặt phẳng Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$. Gọi F_1,F_2 lần lượt là tiêu điểm bên trái và bên phải của elip. Tìm tất cả điểm M thuộc elip sao cho:

a) $MF_1=3$.

b) $MF_1=3MF_2$.

Lời giải. Ta có: $a=4;b=\sqrt{7};c=3$. Gọi $M(x;y)$ là điểm cần tìm. Khi đó:

$$MF_1=4+\frac{3}{4}x;\quad MF_2=4-\frac{3}{4}x.$$

a) Theo đề bài, ta có

$$MF_1=3\Leftrightarrow 4+\frac{3}{4}x=3\Leftrightarrow x=-\frac{4}{3}.$$

Thay vào phương trình của elip, ta được $y=\pm\dfrac{2\sqrt{14}}{3}$.

Vậy, điểm cần tìm là $\left(-\dfrac{4}{3};\dfrac{2\sqrt{14}}{3}\right);\left(-\dfrac{4}{3};-\dfrac{2\sqrt{14}}{3}\right)$.

b) Theo đề bài, ta có

$$MF_1=3MF_2\Leftrightarrow 4+\frac{3}{4}x=3\left(4-\frac{3}{4}x\right)\Leftrightarrow x=\frac{8}{3}$$

Thay vào phương trình của elip, ta được $y=\pm\dfrac{\sqrt{35}}{3}$.

Vậy điểm cần tìm là $\left(\dfrac{8}{3};\dfrac{\sqrt{35}}{3}\right);\left(\dfrac{8}{3};-\dfrac{\sqrt{35}}{3}\right)$.

Bài 16. Trong mặt phẳng Oxy, cho elip $(E): x^2+5y^2-20=0$, có F_1, F_2 lần lượt là tiêu điểm bên trái và bên phải. Tìm tất cả điểm M thuộc elip sao cho:

a) $\widehat{F_1MF_2}=90^\circ$.

b) $\widehat{F_1MF_2}=120^\circ$.

Lời giải. Phương trình chính tắc $(E): \dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{4}=1$.
Ta có $a=2\sqrt{5}; b=2; c=4; F_1F_2=2c=8$. Gọi $M(x;y)$ là điểm cần tìm. Khi đó,

$$MF_1=2\sqrt{5}+\frac{2}{\sqrt{5}}x; MF_2=2\sqrt{5}-\frac{2}{\sqrt{5}}x$$

a) Theo đề bài, ta có

$$F_1F_2^2=MF_1^2+MF_2^2 \Leftrightarrow 64=\left(2\sqrt{5}+\frac{2}{\sqrt{5}}x\right)^2+\left(2\sqrt{5}-\frac{2}{\sqrt{5}}x\right)^2 \Leftrightarrow x^2=15 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{15}.$$

Vậy điểm cần tìm là $\left(\sqrt{15};1\right);\left(\sqrt{15};-1\right);\left(-\sqrt{15};1\right);\left(-\sqrt{15};-1\right)$.

b) Áp dụng định lí cosin trong tam giác MF_1F_2 ta được

$$F_1F_2^2=MF_1^2+MF_2^2-2MF_1.MF_2.\cos F_1MF_2$$
$$\Leftrightarrow 64=\left(2\sqrt{5}+\frac{2}{\sqrt{5}}x\right)^2+\left(2\sqrt{5}-\frac{2}{\sqrt{5}}x\right)^2+\left(2\sqrt{5}+\frac{2}{\sqrt{5}}x\right).\left(2\sqrt{5}-\frac{2}{\sqrt{5}}x\right)$$
$$\Leftrightarrow x^2=5 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{5}.$$

Vậy điểm cần tìm là $\left(\sqrt{5};\sqrt{3}\right);\left(\sqrt{5};-\sqrt{3}\right);\left(-\sqrt{5};\sqrt{3}\right);\left(-\sqrt{5};-\sqrt{3}\right)$.

Bài 17. Trong mặt phẳng Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ và điểm $A(-3;0)$. Tìm tất cả các điểm B, C thuộc elip sao cho tam giác ABC nhận điểm $I(-1;0)$ làm tâm đường trong ngoại tiếp.
Lời giải. Gọi (C) là đường tròn ngoại tiếp ΔABC, có tâm là $I(-1;0)$ và bán kính $IA=2$. Khi đó, phương trình đường tròn (C) là $(x+1)^2+y^2=4$. Do B, C thuộc elip nên tọa độ của B, C là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}(x+1)^2+y^2=4\\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-3 \text{ hoặc } x=-\dfrac{3}{5}\\ y^2=4-(x+1)^2\end{cases}$$

Với $x=-3$ thì $y=0$. Suy ra A, B, C trùng nhau (loại).
Với $x=-\dfrac{3}{5}$ thì $y=\pm\dfrac{4\sqrt{6}}{5}$. Vậy, tất cả các điểm thỏa bài toán là

$$B\left(-\frac{3}{5};\frac{4\sqrt{6}}{5}\right);C\left(-\frac{3}{5};-\frac{4\sqrt{6}}{5}\right) \text{ hoặc } B\left(-\frac{3}{5};-\frac{4\sqrt{6}}{5}\right);C\left(-\frac{3}{5};\frac{4\sqrt{6}}{5}\right).$$

Bài 18. Cho elip $(E): \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$. Tìm tọa độ các điểm A và B thuộc (E) có hoành độ dương sao cho tam giác OAB cân tại O và có diện tích lớn nhất.
Lời giải. Gọi $A(x;y)$ thì $B(x;-y)$ với $x>0$. Ta có $AB=2|y|=\sqrt{4-x^2}$.
Gọi H là trung điểm của AB thì $OH=x$ suy ra

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}OH.AB=\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2(4-x^2)}\le 1.$$

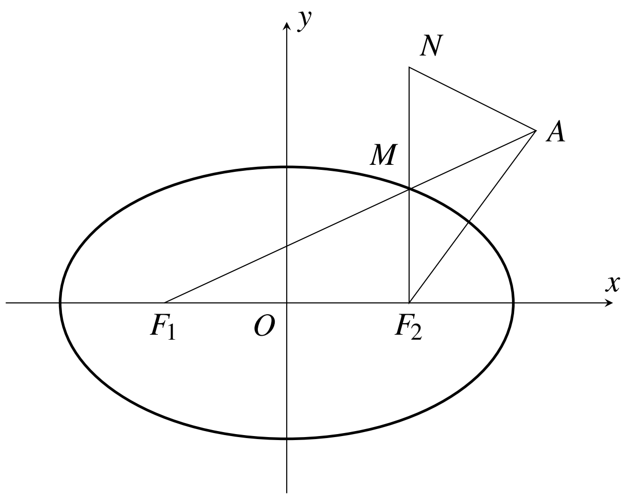
Đẳng thức xảy ra khi $x=\sqrt{2}$.
Vậy ta có $A\left(\sqrt{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right), B\left(\sqrt{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ hoặc $A\left(\sqrt{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right), B\left(\sqrt{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Bài 19. Cho elip $(E): \dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1$ và điểm $M(3;2)$. Gọi A và B là hai điểm nằm trên elip và đối xứng nhau qua M. Viết phương trình đường thẳng AB.

Lời giải. Gọi $A(x;y)\in(E)$, ta có $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1$.
Từ M là trung điểm của AB suy ra $B(6-x;4-y)$. (1)
Ta cũng có $B\in(E)$ nên suy ra $\dfrac{(6-x)^2}{100}+\dfrac{(4-y)^2}{36}=1$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $27x+50y-131=0$. (*)
Do tọa độ của A và B đều thỏa (*) nên (*) chính là phương trình đường thẳng AB cần tìm.

Bài 20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(2;\sqrt{3})$ và elip $(E): \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$. Gọi F_1,F_2 là các tiêu điểm của (E) (F_1 có hoành độ âm); M là giao điểm của đường thẳng AF_1 với (E) (M có tung độ dương); N là điểm đối xứng của F_2 qua M. Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF_2.

Lời giải.



Ta có $F_1(-1;0),F_2(1;0)$.
Đường thẳng AF_1 có phương trình $x-\sqrt{3}y+1=0$.
M là giao điểm có tung độ dương của AF_1 với (E) suy ra $M\left(1;\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.
Ta tính được $MA=MF_2=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.
Do N đối xứng với F_2 qua M nên $MF_2=MN$, suy ra $MA=MF_2=MN$.
Do đó đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF_2 là đường tròn tâm M, bán kính $MA=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Bài 21. Cho elip $(E): \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ và hai điểm $A(-5;3),B(5;-3)$. Tìm trên (E) điểm C có hoành độ và tung độ dương sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó.

Lời giải. Ta có $AB=2\sqrt{34}$ và phương trình đường thẳng $AB: 3x+5y=0$.
Gọi $C(x;y)\in(E)$ $(x>0,y>0)$, ta có $\mathrm{d}(C,AB)=\dfrac{|3x+5y|}{\sqrt{34}}$. Khi đó diện tích tam giác ABC là

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.\mathrm{d}(C,AB)=\frac{1}{2}.2\sqrt{34}.\frac{|3x+5y|}{\sqrt{34}}=|3x+5y|.$$

Mà $|3x+5y|=15\left|\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{3}\right|\le 15\sqrt{2\left(\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}\right)}=15\sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\dfrac{x}{5}=\dfrac{y}{3}$. Thay vào phương trình của (E) và chú ý $x>0,y>0$ ta tìm được $x=\dfrac{5\sqrt{2}}{2},y=$

$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Vậy $M\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2};\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 22. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, viết phương trình chính tắc của elip (E) biết khi M thay đổi trên (E) thì độ dài nhỏ nhất của OM bằng 4 và độ dài lớn nhất của MF_1 bằng 8 với F_1 là tiêu điểm có hoành độ âm.

Lời giải. Giả sử phương trình elip có dạng $(E): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$M(x;y)\in(E)\Rightarrow MF_1=a+\dfrac{cx}{a}$, mà $-a\le x\le a$ nên MF_1 lớn nhất bằng $a+c$ khi $x=a, y=0$.

Vì $a>b$ nên $\dfrac{x^2}{a^2}\le\dfrac{x^2}{b^2}\Rightarrow 1=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le\dfrac{x^2+y^2}{b^2}=\dfrac{OM^2}{b^2}\Rightarrow OM\ge b$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của OM bằng b khi $x=0, y=\pm b$.

Kết hợp với giả thiết ta có: $\begin{cases} b=4\\ a+c=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=4\\ a=5\end{cases}$.

Vậy phương trình của $(E): \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

Bài 23. Trong mặt phẳng Oxy, lập phương trình chính tắc của elip (E), biết có một đỉnh và hai tiêu điểm của (E) tạo thành một tam giác đều và chu vi hình chữ nhật cơ sở của (E) là $12(2+\sqrt{3})$.

Lời giải. Giả sử phương trình elip có dạng $(E): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Chu vi của hình chữ nhật cơ sở là $2(2a+2b)$

Suy ra $2(2a+2b)=12(2+\sqrt{3})\Leftrightarrow a+b=3(2+\sqrt{3})\qquad(1)$

Do các đỉnh $A_1(-a;0), A_2(a;0)$ và $F_1(-c;0), F_2(c;0)$ cùng nằm trên Ox nên theo giả thiết F_1, F_2 cùng với đỉnh $B_2(0,b)$ trên Oy tạo thành một tam giác đều $\Leftrightarrow B_2F_2=F_1F_2=B_2F_1\qquad(*)$

Lại có F_1F_2 đối xứng nhau qua Oy nên tam giác $B_2F_1F_2$ luôn là tam giác cân tại B_2.

Do đó: $(*)\Leftrightarrow B_2F_2=F_1F_2\Leftrightarrow\sqrt{c^2+b^2}=2c\Leftrightarrow b^2=3c^2$.

Lại có: $a^2-c^2=b^2\Rightarrow 3a^2=4b^2\quad(2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $a=6$ và $b=3\sqrt{3}$.

Vậy phương trình elip (E) là $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{27}=1$.

Bài 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$. Đường thẳng $\Delta: 2x-3y=0$ cắt (E) tại hai điểm B, C. Tìm tọa độ điểm A trên (E) sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Lời giải. Do $\Delta\cap(E)=\{B;C\}$ nên B, C cố định hay độ dài BC không đổi.

Do đó diện tích $\triangle ABC$ lớn nhất khi khoảng cách $h=d(A,\Delta)$ lớn nhất.

Phương trình tham số của (E) có dạng: $\begin{cases} x=3\sin t\\ y=2\cos t\end{cases}$

Mà $A\in(E)\Rightarrow A(3\sin t;2\cos t)$, khi đó

$$h=(A,\Delta)=\frac{|6\sin t-6\cos t|}{\sqrt{13}}=\frac{6|\sin t-\cos t|}{\sqrt{13}}=\frac{6\sqrt{2}\left|\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right|}{\sqrt{13}}\le\frac{6\sqrt{26}}{13}$$

Dấu "=" xảy ra khi: $\left|\sin\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)=1\\ \sin\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi\\ t=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

\+ Với $t=\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi\Rightarrow A\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2};\sqrt{2}\right)$

\+ Với $t=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\Rightarrow A\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2};\sqrt{2}\right)$

Bài 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip (E) có phương trình $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ và $P(1;-1)$. Gọi d là đường thẳng đi qua P cắt (E) tại hai điểm M,N. Tìm tọa độ hai điểm M,N sao cho $PM.PN$ lớn nhất.

Lời giải.

Ta có $P(1;-1)$ thuộc miền trong của (E) nên d luôn cắt (E) tại M,N.

Gọi phương trình đường thẳng d có dạng $\begin{cases} x=1+mt \\ y=-1+nt \end{cases}$ với $t\in\mathbb{R}, m^2+n^2\neq 0$. Gọi $M(1+mt_1;-1+nt_1);N(1+mt_2;-1+nt_2)$. Trong đó t_1,t_2 là nghiệm của phương trình

$$\frac{(1+mt)^2}{8}+\frac{(-1+nt)^2}{4}=1\Leftrightarrow (m^2+2n^2)t^2+2(m-2n)t-5=0.$$

Theo hệ thức Vi-et ta có $t_1.t_2=\dfrac{-5}{m^2+2n^2}$

Khi đó $PM.PN=\sqrt{(mt_1)^2+(nt_2)^2}.\sqrt{(mt_2)^2+(nt_2)^2}=(m^2+n^2)|t_1.t_2|=\dfrac{5(m^2+n^2)}{m^2+2n^2}=\dfrac{5}{2-\dfrac{m^2}{M^2+n^2}}$.

Mặt khác $0\leq\dfrac{m^2}{m^2+n^2}\leq 1$, do đó $PM.PN$ lớn nhất khi và chỉ khi $\dfrac{m^2}{m^2+n^2}\Leftrightarrow n=0$.

Khi đó phương trình của đường thẳng d có dạng $y=-1$, suy ra tọa độ của các điểm M,N là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1 \\ y=-1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2=6 \\ y=-1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=\pm\sqrt{6} \\ y=-1 \end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} M(\sqrt{6};-1) \\ N(-\sqrt{6};-1) \end{cases} \\ \begin{cases} M(-\sqrt{6};-1) \\ N(\sqrt{6};-1) \end{cases} \end{array}\right..$$

Bài 26. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E):\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{8}=1$. Viết phương trình đường thẳng d cắt (E) tại hai điểm phân biệt có tọa độ là các số nguyên.

Lời giải. Gọi $M(x_0;y_0)\in(E)\Rightarrow\dfrac{x_0^2}{2}+\dfrac{y_0^2}{8}=1$ (1)

$\Rightarrow x_0^2\leq 2\Rightarrow x_0\in\{-1;0;1\}$.

Với $x_0=\pm1\Rightarrow y_0=\pm2$ (thỏa mãn).

Với $x_0=0\Rightarrow y_0=\pm2\sqrt{2}$ (loại).

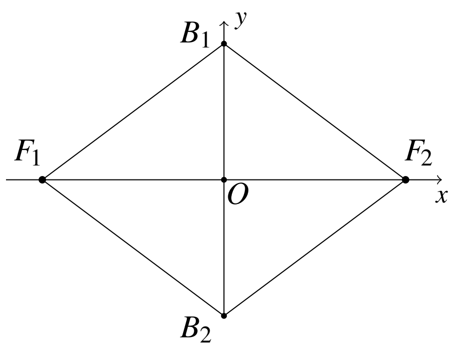
Vậy có bốn điểm có tọa độ nguyên trên (E) là $M_1(1;2);M_2(1;-2);M_3(-1;2);M_4(-1;-2)$.

Do đó ta sẽ lập được 6 phương trình đường thẳng d thỏa mãn đề bài là:

$y=2;2x+y=0;-2x+y=0;x=-1;x=1;y=-2$.

Bài 27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình chính tắc của (E) có tâm sai bằng $\dfrac{4}{5}$. Biết rằng diện tích của tứ giác tạo bởi các tiêu điểm và các đỉnh trên trục bé của (E) là 24.

Lời giải.



Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a>b>0$ và $a^2=b^2+c^2$.
Ta có tâm sai $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}\Leftrightarrow a=\frac{5}{4}c$.
Gọi $F_1(-c;0),F_2(c;0)$ là các tiêu điểm và $B_1(0;-b),B_2(0;b)$ la các đỉnh trên trục bé.
Suy ra $F_1B_2F_2B_2$ là hình thoi, kho đó $S_{F_1B_2F_2B_2}=\frac{1}{2}F_1F_2.B_1B_2=\frac{1}{2}2c.2b=2bc=24\Leftrightarrow b=\frac{12}{c}$.
Khi đó
$a^2=b^2+c^2\Leftrightarrow\left(\frac{5}{4}c\right)^2=\left(\frac{12}{c}\right)^2+c^2\Leftrightarrow 25c^4=2304+16c^4\Leftrightarrow c^4=256\Leftrightarrow c=4(\text{do } c>0)$.
Suy ra $a=5;b=3$. Vậy phương trình chính tắc của elip (E) cần tìm là: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

Bài 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(4;3),B(6,4)$. Xác định điểm M thuộc elip (E) : $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{8}=1$ sao cho diện tích tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất.
Lời giải. Ta có $AB=\sqrt{5}$ và phương trình đường thẳng $AB: 2x+y-11=0$.
Gọi $M(x_0,y_0)\in(E)$. Khi đó $\frac{x_0^2}{2}+\frac{y_0^2}{8}=1$. (1)
Từ (1) suy ra $|x_0|\le\sqrt{2};y_0\le 2\sqrt{2}\Rightarrow 2x_0+y_0<11$.
Ta lại có $d(M,AB)=\frac{|2x_0+y_0-11|}{\sqrt{5}}=\frac{11-(2x_0+y_0)}{\sqrt{5}}$.
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$(2x_0+y_0)^2\le(8+8)\left(\frac{x_0^2}{2}+\frac{y_0^2}{8}\right)=16\Rightarrow -4\le 2x_0+y_0\le 4$$

Suy ra $d(M,AB)\ge\frac{7}{\sqrt{5}}\Rightarrow(d(M,AB))_{\min}=\frac{7}{\sqrt{5}}$
Vậy $minS_{MAB}=\frac{1}{2}.(d(M,AB))_{\min}.AB=\frac{1}{2}.\frac{7}{\sqrt{5}}.\sqrt{5}=\frac{7}{2}\Leftrightarrow M(1;2)$.

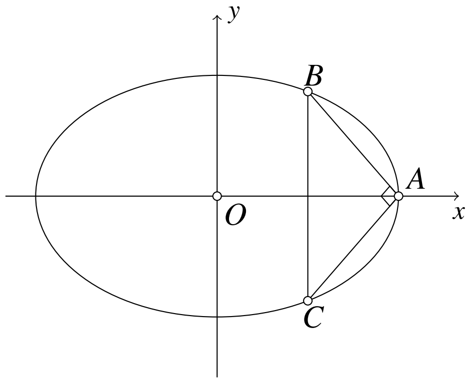
Bài 29. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ và điểm $M(2;3)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua M, cắt (E) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho M là trung điểm của AB.
Lời giải. Ta có M thuộc miền trong của (E), do đó d luôn cắt (E) tại hai điểm phân biệt.
Gọi phương trình đường thẳng d có dạng: $\begin{cases}x=2+mt\\y=3+nt\end{cases}$ với $t\in\mathbb{R},m^2+n^2\neq 0$.
Gọi $A(2+mt_1;3+nt_1),B(2+mt_2;3+nt_2)$. Khi đó t_1,t_2 là nghiệm của phương trình

$$\frac{(1+mt)^2}{25}+\frac{(2+nt)^2}{9}=1\Leftrightarrow(9m^2+25n^2)t^2+2(9m+50n)t-116=0$$

Theo hệ thức Vi-et ta có $t_1+t_2=-\frac{2(9m+50n)}{9m^2+25n^2}$
Mặt khác ta lại có M là trung điểm của AB, do đó $\begin{cases}x_A+x_B=2x_M\\y_A+y_B=2y_M\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4+(t_1+t_2)m=4\\6+(t_1+t_2)n=6\end{cases}$
$\Leftrightarrow\begin{cases}m(t_1+t_2)=0\\n(t_1+t_2)=0\end{cases}\Leftrightarrow t_1+t_2=0\quad(m^2+n^2\neq 0)$
$\Rightarrow-\frac{2(9m+50n)}{9m^2+25n^2}=0\Leftrightarrow 9m+50n=0\Leftrightarrow m=-\frac{50}{9}n$.
Chọn $m=9\Rightarrow n=-50$. Khi đó phương trình đường thẳng d là $\begin{cases}x=2+9t\\y=3-50t\end{cases}$

Bài 30. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(4;0)$ và elip $(E): \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$. Tìm tọa độ các điểm B,C thuộc (E) sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Lời giải.



Ta có B,C thuộc (E) và tam giác ABC vuông cân tại A. Mặt khá $A(4;0)\in Ox$ và (E) nhận các trục Ox,Oy là trục đối xứng nên B,C đối xứng nhau qua trục Ox.
Do đó gọi $B(m;n),C(m;-n)\in(E)$ với $n\neq 0$.

Suy ra $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(m-4;n)\\ \overrightarrow{AC}=(m-4;-n)\end{cases}$, khi đó $\begin{cases}\dfrac{m^2}{16}+\dfrac{n^2}{9}=1\\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{m^2}{16}+\dfrac{n^2}{9}=1\\ (m-4)^2-n^2\end{cases}=0\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{m^2}{16}+\dfrac{n^2}{9}=1\\ n^2=(m-4)^2\end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{m^2}{16}+\dfrac{(m-4)^2}{9}=1\Leftrightarrow 25m^2-128m+112=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=4\\ m=\dfrac{28}{25}.\end{array}\right.$

Với $m=4\Rightarrow n=0$

Với $m=\dfrac{28}{25}\Rightarrow n=\pm\dfrac{72}{25}$. Suy ra $\begin{cases}B\left(\dfrac{28}{25};\dfrac{72}{25}\right)\\ C\left(\dfrac{28}{25};-\dfrac{72}{25}\right)\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}B\left(\dfrac{28}{25};-\dfrac{72}{25}\right)\\ C\left(\dfrac{28}{25};\dfrac{72}{25}\right)\end{cases}$.

Bài 31. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x+y-4=0$ và elip $(E): \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với d và cắt (E) tại hai điểm A,B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 2.

Lời giải. Ta có $\Delta\perp d$ do đó phương trình đường thẳng Δ có dạng: $x-y+c=0$.
Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (E) là:
$2x^2+4(x+c)^2=8\Leftrightarrow 6x^2+8cx+4c^2-8=0 \quad (1)$
Ta lại có Δ cắt (E) tại hai điểm phân biệt do đó (1) phải có hai nghiệm phân biệt, nghĩa là
$\Delta'=48-8c^2>0\Leftrightarrow -\sqrt{6}<c<\sqrt{6} \quad (2)$
Ta có $A(x_1,x_1+c),B(x_2,x_2+c)$ là các giao điểm của Δ với (E), khi đó x_1,x_2 là các nghiệm của phương trình (1).

Do đó $\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{4c}{3}\\ x_1.x_2=\dfrac{2c^2-4}{3}\end{cases}$

Mặt khác ta lại có $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(x_2-x_1)^2}=\sqrt{2(x_1+x_2)^2-8x_1.x_2}$

$\Rightarrow AB=\sqrt{\dfrac{32c^2}{9}-\dfrac{16c^2-32}{9}}=\dfrac{4}{3}\sqrt{c^2+2}$

Ta lại có $d(O,\Delta)=\dfrac{|c|}{\sqrt{2}}$

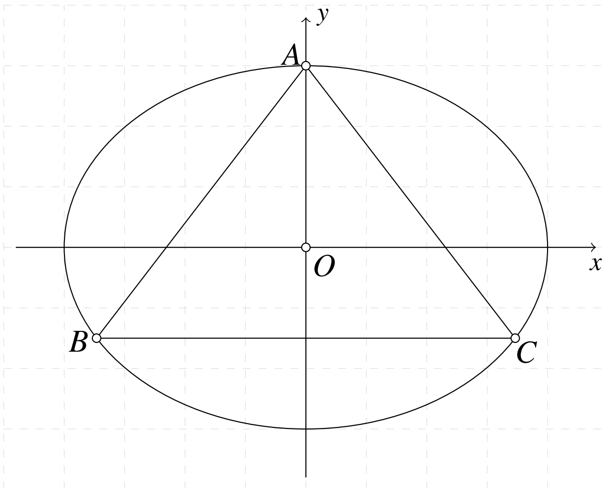
Mà $S_{ABC}=2\Rightarrow\dfrac{1}{2}.AB.d(O,\Delta)=2$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}.\dfrac{4}{3}\sqrt{c^2+2}.\dfrac{|c|}{\sqrt{2}} = 2 \Leftrightarrow c^4+2c^2-18=0 \Leftrightarrow c = \pm\sqrt{-1+\sqrt{19}}$ (thỏa mãn (2))

Vậy đường thẳng Δ cần lập là $\Delta : x-y+\sqrt{-1+\sqrt{19}}=0$ hoặc $\Delta : x-y-\sqrt{-1+\sqrt{19}}=0$

Bài 32. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E) : \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ ngoại tiếp tam giác đều ABC. Tính diện tích tam giác ABC, biết (E) nhận $A(0;3)$ làm đỉnh và trục tung làm trục đối xứng.

Lời giải.



Do $\triangle ABC$ đều và có $A(0;3)$ nên B,C đối xứng với nhau qua trục tung, nên gọi $B(m,n) \Rightarrow C(-m,n)$ với $m>0 \Rightarrow a = BC = 2m$ và chiều cao của tam giác là $h = 3-n$.

Khi đó $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} \Leftrightarrow 3-n = \sqrt{3}m \Leftrightarrow n = 3-\sqrt{3}m \Rightarrow B(m;3-\sqrt{3}m)$

Mặt khác $B \in (E)$, do đó $\dfrac{m^2}{16}+\dfrac{(3-\sqrt{3}m)^2}{9}=1 \Leftrightarrow 9m^2-32\sqrt{3}m=0$

$\Leftrightarrow m = \dfrac{32\sqrt{3}}{19}$ (thỏa mãn) và $m=0$ (loại).

Khi đó $n = \dfrac{-39}{19} \Rightarrow \begin{cases} h = \dfrac{96}{19} \\ BC = \dfrac{64\sqrt{3}}{19} \end{cases} \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{1}{2}h.BC = \dfrac{3072\sqrt{3}}{361}$

§4. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG 3

I. Đề số 1a

Bài 1. Cho $A(1,5); B(4,-1); C(-4,-5)$.

a) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng chứa các cạnh của tam giác.

b) Viết phương trình đường trung trực cạnh BC và AB.

c) Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (3,-6)$; $\overrightarrow{BC} = (-8,-4)$, $\overrightarrow{AC} = (-5,-10)$.
Phương trình tổng quát của đường thẳng chứa cạnh AB: $2(x-1)+(y-5) = 0 \Leftrightarrow 2x+y-7 = 0$
. . . . 0,5 điểm
Phương trình tổng quat đường thẳng chứa cạnh AC: $2(x+4)-(y+5) = 0 \Leftrightarrow 2x-y+3 = 0$
. . . . 0,5 điểm
Phương trình tổng quát đường thẳng chứa cạnh BC: $(x-4)-2(y+1) = 0 \Leftrightarrow x-2y-6 = 0$
. . . . 0,5 điểm

b) Gọi I là trung điểm cạnh BC. Khi đó $I(0;-3)$. Phương trình đường trung trực cạnh BC là $2(x-0)+(y+3) = 0 \Leftrightarrow 2x+y+3 = 0$ . . 0,5 điểm Gọi J là trung điểm cạnh AB. Khi đó $J(\frac{5}{2};2)$. Phương trình đường trung trực cạnh AB là $(x-\frac{5}{2})-2(y-2) = 0 \Leftrightarrow 2x-4y+3 = 0$ . . . . .0,5 điểm

c) Vì tam giác ABC vuông tại B nên tâm đường tròn ngoại tiếp là trung điểm O của cạnh AC. Ta có $O(\frac{-3}{2};0)$ và bán kính $OA = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}$; $\overrightarrow{OA} = (\frac{-5}{2};-5)$. . . . . 0,5 điểm
Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $(x+\frac{3}{2})^2+y^2 = \dfrac{125}{4}$ . . . . .0,5 điểm.

Bài 2. Cho elip (E) có phương trình $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1} = 1$.

a) Tìm tiêu điểm, tâm sai, đường chuẩn của (E).

b) Tìm trên (E) những điểm M sao cho M nhìn đoạn thẳng nối hai tiêu điểm dưới một góc vuông.

Lời giải.

a) Ta có $c^2 = a^2-b^2 = 3$, suy ra $c = \sqrt{3}$. Các tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3};0)$ và $F(\sqrt{3};0)$. . . . . 0,5 điểm
Tâm sai $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ . . . . 0,5 điểm
Đường chuẩn $x = \pm\dfrac{a}{e} = \pm\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ . . . . 0,5 điểm

b) Vì $\widehat{F_1MF_2} = 90^\circ$, do đó M thuộc đường tròn đường kính F_1F_2 là $x^2+y^2 = 3$. . . . . 0,5 điểm.
Tọa độ điểm M là nghiệm hệ phương trình $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1} = 1$ và $x^2+y^2 = 3$. . . . . .0,5 điểm.
Gải hệ ta được $x = \dfrac{\pm 2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ . . . . 0,5 điểm
Vậy có bốn điểm cần tìm là $\left(\left(\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; \dfrac{\pm 1}{\sqrt{3}}\right)\right.$ . . . . 0,5 điểm

Bài 3. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho hai điểm $A(2;0)$ và $B(6;4)$. Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành tại điểm A và khoảng cách từ tâm của (C) đến điểm B bằng 5.

Lời giải. Gọi $I(a;b)$, R là tâm và bán kính đường tròn (C). Do (C) tiếp xúc với trục hoành tại điểm $A(2;0)$ nên $a=2$ và $|b|=R$ .... 0,75 điểm

Do $IB=5$ mà $I(2;b)$ và $B(6;4)$ suy ra $(b-2)^2+(4-b)^2=5^2 \Leftrightarrow b^2=8b+7=0 \leftrightarrow b=1, b=7$

.... 0,75 điểm

Với $a=2, b=1 \Rightarrow R=1$, ta có phương trình của (C) là $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ .... 0,75 điểm

Với $a=2, b=7 \Rightarrow R=7$ ta có phương trình của (C) là $(x-2)^2+(y-7)^2=49$ .... 0,75 điểm

II. Đề số 1b

Bài 1. Cho $A(-5,6); B(-4,-1); C(4,3)$.

a) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng chứa các cạnh của tam giác.

b) Viết phương trình đường trung trực cạnh BC và AB.

c) Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(1,-7)$; $\overrightarrow{BC}=(8,4)$, $\overrightarrow{AC}=(9,-3)$.
Phương trình tổng quát của đường thẳng chứa cạnh AB: $7(x+5)+(y-6)=0 \Leftrightarrow 7x+y+29=0$
.... 0,5 điểm
Phương trình tổng quat đường thẳng chứa cạnh AC: $(x+5)+3(y-6)=0 \Leftrightarrow x+3y-13=0$
.... 0,5 điểm
Phương trình tổng quát đường thẳng chứa cạnh BC: $(x+4)-2(y+1)=0 \Leftrightarrow x-2y+2=0$
.... 0,5 điểm

b) Gọi I là trung điểm cạnh BC. Khi đó $I(0;1)$. Phương trình đường trung trực cạnh BC là $2(x-0)+(y-1)=0 \Leftrightarrow 2x+y-1=0$ .... 0,5 điểm
Gọi J là trung điểm cạnh AB. Khi đó $J(\frac{-9}{2};\frac{5}{2})$. Phương trình đường trung trực cạnh AB là $(x+\frac{9}{2})-7(y-\frac{5}{2})=0 \Leftrightarrow x-7y+22=0$ .... 0,5 điểm

c) Gọi O là giao điểm hai đường trung trực của hai cạnh AB và BC. Tọa độ điểm O là nghiệm hệ phương trình $2x+y-1=0$ và $x-7y+22=0$ . . 0,5 điểm Giải hệ ta được $O(-1;3)$ và $\overrightarrow{OC}=(-5;0)$ suy ra bán kính $OC=5$. .... 0,5 điểm
Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $(x+1)^2+(y-3)^2=25$ .... 0,5 điểm.

Bài 2. Cho elip (E) có phương trình $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

a) Tìm tiêu điểm, tâm sai, đường chuẩn của (E).

b) Tìm trên (E) những điểm M sao cho M nhìn đoạn thẳng nối hai tiêu điểm dưới một góc vuông.

Lời giải.

a) Ta có $c^2=a^2-b^2=5$, suy ra $c=\sqrt{5}$. Các tiêu điểm $F_1(-\sqrt{5};0)$ và $F(\sqrt{5};0)$. .... 0,5 điểm
Tâm sai $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ .... 0,5 điểm
Đường chuẩn $x=\pm\dfrac{a}{e}=\pm\dfrac{9}{\sqrt{5}}$ .... 0,5 điểm

b) Vì $\widehat{F_1MF_2} = 90^\circ$, do đó M thuộc đường tròn đường kính F_1F_2 là $x^2+y^2=5$. . . . . 0,5 điểm.
Tọa độ điểm M là nghiệm hệ phương trình $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ và $x^2+y^2=5$. . . . . 0,5 điểm.
Gải hệ ta được $x=\dfrac{\pm 3}{\sqrt{5}}; y=\pm\dfrac{\pm 4}{\sqrt{6}}$ . . . . 0,5 điểm
Vậy có bốn điểm cần tìm là $\left(\pm\dfrac{3}{\sqrt{5}}; \dfrac{\pm 4}{\sqrt{5}}\right)$ . . . . 0,5 điểm

Bài 3. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $C(-1;-2)$, đường trung tuyến kẻ từ A và đường cao kẻ từ B lần lượt có phương trình là $5x+y-9=0$ và $x+3y-5=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A và B.
Lời giải. Đường thẳng AC đi qua C và vuông góc với đường thẳng $x+3y-5=0$, suy ra phương trình AC là $3x-y+1=0$ . . . . 0,75 điểm
Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ $5x+y-9=0$ và $3x-y+1=0$, suy ra $A(1;4)$ . . . . 0,75 điểm
Điểm B thuộc đường thẳng $x+3y-5=0$ và trung điểm của cạnh BC thuộc đường thẳng $5x+y-9=0$ 0,5 điểm
Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình $x+3y-5=0$ và $5\left(\dfrac{x-1}{2}\right)+\dfrac{y-2}{2}-9=0$, suy ra $B(5;0)$ 0,75 điểm

III. Đề số 2a

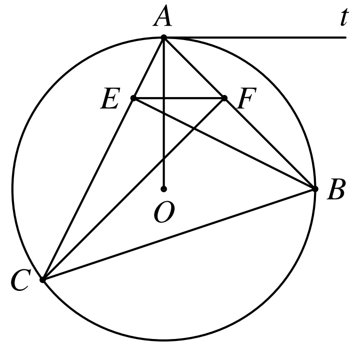
Bài 1 (2 điểm). Trong mặt phẳng Oxy, cho $\Delta: \begin{cases} x=1+t \\ y=t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ và điểm $A(3;0)$. Tìm $B\in\Delta$ sao cho ΔAOB vuông tại O.
Lời giải. Gọi $B(1+b;b)\in\Delta$. Khi đó: $\overrightarrow{OB}=(1-b;b)$; $\overrightarrow{OA}=(0;3)$. . . . . (0,5 điểm).
ΔAOB vuông tại O
$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$ . . . . (0,5 điểm).
$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0$ . . . . (0,5 điểm).
$\Leftrightarrow 3.(1+b)+0.(b)=0$ . . . . (0,5 điểm).
$\Leftrightarrow b=-1$
Vậy $B(0;-1)$ . . . . (0,5 điểm).

Bài 2 (2 điểm). Tìm hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O lên đường thẳng $\Delta: x-y+2=0$, từ đó tìm điểm đối xứng của O qua Δ.
Lời giải. Gọi H là hình chiếu của O lên Δ.
Vì OH vuông góc với Δ nên OH nhận vectơ pháp tuyến $(\overrightarrow{n_\Delta}=(1;-1))$ của Δ làm vectơ chỉ phương, tức là OH nhận $\overrightarrow{n_{OH}}=(1;1)$ làm vectơ pháp tuyến. . . . . (0,5 điểm).
Do đó, OH là đường thẳng qua $O(0;0)$ và nhận $\overrightarrow{n_{OH}}=(1;1)$ làm vectơ pháp tuyến; vậy OH có phương trình: $1(x-0)+1(y-0)=0\Leftrightarrow x+y=0$. . . . . (0,5 điểm).
Ta có $H=\Delta\cap OH$, nên tọa độ của H là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-y+2=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$.
Vậy $H(-1;1)$. . . . . (0,5 điểm).
Gọi O' là điểm đối xứng với O qua Δ.
Khi đó, H là trung điểm của OO'.
Áp dụng công thức tính tọa độ trung điểm ta tính được $O'(-2;2)$. . . . . (0,5 điểm).

Bài 3 (2 điểm). Viết phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$ nội tiếp ΔABC biết $(\mathscr{C})$ có tâm $I(1;2)$ và $AB: x-2y+7=0$.
Lời giải. Vì ΔABC nội tiếp $(\mathscr{C})$ nên $(\mathscr{C})$ có bán kính $R=\mathrm{d}(I,AB)=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$. . . . . (1,0 điểm).
Vậy $(\mathscr{C}):\ (x-1)^2+(y-2)^2=\dfrac{16}{5}$. . . . . (1,0 điểm).

Bài 4 (2 điểm). Cho ΔABC nội tiếp đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm là gốc tọa độ O. Viết phương trình tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại A biết $E(-1;0)$ và $F(1;1)$ lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C; A thuộc đường thẳng $\Delta:\ 3x+y-1=0$.

Lời giải. Gọi At là tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại A.



- Chứng minh $OA \perp EF$.
  Tứ giác $BCEF$ nội tiếp nên $\widehat{EFA} = \widehat{ACB}$.
  Hơn nữa, $\widehat{BAt} = \widehat{ACB}$.
  Do đó, $\widehat{EFA} = \widehat{BAt}$.
  Mặt khác $At \perp OA$ nên $EF \perp OA$ . . . . (0,5 điểm).
- OA là đường thẳng đi qua $O(0;0)$ và nhận $\overrightarrow{EF} = (2;1)$ làm véc-tơ pháp tuyến.
  $OA:\ 2x+y=0$. . . . . (0,5 điểm).
- A là giao điểm của OA và Δ. Do đó, tọa độ $(x;y)$ của A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 3x+y-1=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$. Ta tìm được $A(1;-2)$. . . . . (0,5 điểm).
- Tiếp tuyến At là đường thẳng qua $A(1;-2)$ và nhận $\overrightarrow{OA} = (1,-2)$ làm véc-tơ pháp tuyến.
  $At: x-2y-5=0$. . . . . (0,5 điểm).

Bài 5 (2 điểm). Cho elip $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

a) Tìm độ dài trục lớn, độ dài trục nhỏ, tiêu cự của (E).

b) Viết phương trình đường tròn đường kính là đoạn nối hai tiêu điểm của (E).
Chứng minh (E) và $(\mathscr{C})$ không có điểm chung nào.

Lời giải.

a) Ta có $a = \sqrt{25} = 5$; $b = \sqrt{16} = 4$; $c = \sqrt{a^2-b^2} = 3$. . . . . (0,5 điểm).
Độ dài trục lớn: $2a = 10$.
Độ dài trục bé: $2b = 8$.
Tiêu cự: $2c = 6$. . . . . (0,5 điểm).

b) Đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng $c = 3$.
$(\mathscr{C})$ có phương trình: $x^2+y^2 = 9$. . . . . (0,5 điểm).
Vì hệ $\begin{cases} \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1 \\ x^2+y^2 = 9 \end{cases}$ vô nghiệm nên (E) và $(\mathscr{C})$ không có điểm chung nào. . . . . (0,5 điểm).

IV. Đề số 2b

Bài 1 (2 điểm). Trong mặt phẳng Oxy, cho $\Delta: \begin{cases} x = 1-t \\ y = t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ và điểm $A(0;3)$. Tìm $B \in \Delta$ sao cho ΔAOB vuông tại O.

Lời giải. Gọi $B(1-b;b) \in \Delta$. Khi đó: $\overrightarrow{OB} = (1-b;b)$; $\overrightarrow{OA} = (0;3)$.
ΔAOB vuông tại O.
$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$. . . . . (0,5 điểm).
$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0$. . . . . (0,5 điểm).
$\Leftrightarrow 0.(1-b)+3.(b) = 0$. . . . . (0,5 điểm).
$\Leftrightarrow b = 0$
Vậy $B(1;0)$. . . . . (0,5 điểm).

Bài 2 (2 **điểm**). Tìm hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O lên đường thẳng $\Delta : x+y-2=0$, từ đó tìm điểm đối xứng của O qua Δ.

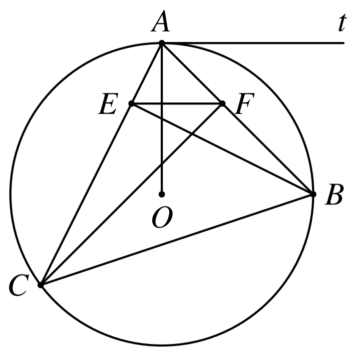
Lời giải. Gọi H là hình chiếu của O lên Δ.
Vì OH vuông góc với Δ nên OH nhận vectơ pháp tuyến ($\overrightarrow{n_\Delta}=(1;1)$) của Δ làm vectơ chỉ phương, tức là OH nhận $\overrightarrow{n_{OH}}=(1;-1)$ làm vectơ pháp tuyến. . . . . (0,5 điểm).
Do đó, OH là đường thẳng qua $O(0;0)$ và nhận $\overrightarrow{n_{OH}}=(1;-1)$ làm vectơ pháp tuyến; vậy OH có phương trình: $1(x-0)-1(y-0)=0 \Leftrightarrow x-y=0$. . . . . (0,5 điểm).
Ta có $H=\Delta\cap OH$, nên tọa độ của H là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x+y-2=0\\x-y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$.
Vậy $H(1;1)$. . . . . (0,5 điểm).
Gọi O' là điểm đối xứng với O qua Δ.
Khi đó, H là trung điểm của OO'.
Áp dụng công thức tính tọa độ trung điểm ta tính được $O'(2;2)$. . . . . (0,5 điểm).

Bài 3 (2 **điểm**). Viết phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$ nội tiếp ΔABC biết $(\mathscr{C})$ có tâm $I(-1;2)$ và $AB : x-2y+7=0$.

Lời giải. Vì ΔABC nội tiếp $(\mathscr{C})$ nên $(\mathscr{C})$ có bán kính $R=\mathrm{d}(I,AB)=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. . . . . (1,0 điểm).
Vậy $(\mathscr{C}):\ (x+1)^2+(y-2)^2=\dfrac{4}{5}$. . . . . (1,0 điểm).

Bài 4 (2 **điểm**). Cho ΔABC nội tiếp đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm là gốc tọa độ O. Viết phương trình tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại A biết $E(-1;3)$ và $F(2;3)$ lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C và A thuộc đường thẳng $\Delta:\ 2x+y-5=0$.

Lời giải. Gọi At là tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại A.



- Chứng minh $OA\perp EF$.
  Tứ giác $BCEF$ nội tiếp nên $\widehat{EFA}=\widehat{ACB}$.
  Hơn nữa, $\widehat{BAt}=\widehat{ACB}$.
  Do đó, $\widehat{EFA}=\widehat{BAt}$.
  Mặt khác $At\perp OA$ nên $EF\perp OA$. . . . . (0,5 điểm).
- OA là đường thẳng đi qua $O(0;0)$ và nhận $\overrightarrow{EF}=(3;0)$ làm véc-tơ pháp tuyến.
  $OA:\ x=0$. . . . . (0,5 điểm).
- A là giao điểm của OA và Δ. Do đó, tọa độ $(x;y)$ của A là nghiệm của hệ: $\begin{cases}2x+y-5=0\\x=0\end{cases}$. Ta tìm được $A(0;5)$. . . . . (0,5 điểm).
- Tiếp tuyến At là đường thẳng qua $A(0;5)$ và nhận $\overrightarrow{OA}=(0;5)$ làm véc-tơ pháp tuyến.
  $At : y=5$. . . . . (0,5 điểm).

Bài 5 (2 **điểm**). Cho elip $(E):\ \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

a) Tìm độ dài trục lớn, độ dài trục nhỏ, tiêu cự của (E).

b) Viết phương trình đường tròn đường kính là đoạn nối hai tiêu điểm của (E).
Chứng minh (E) và $(\mathscr{C})$ có 4 điểm chung.

Lời giải.

a) Ta có $a=\sqrt{25}=5$; $b=\sqrt{9}=3$; $c=\sqrt{a^2-b^2}=4$. . . . . (0,5 điểm).
Độ dài trục lớn: $2a=10$.
Độ dài trục bé: $2b=6$.
Tiêu cự: $2c=8$. . . . . (0,5 điểm).

b) Đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng $c = 4$.
$(\mathscr{C})$ có phương trình: $x^2 + y^2 = 16$. . . . . (0,5 điểm).
Vì hệ $\begin{cases} \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$ có 4 nghiệm phân biệt nên (E) và $(\mathscr{C})$ có 4 điểm chung. . . . . (0,5 điểm).

V. Đề số 3a

Câu 1. (4,0 điểm) Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(-1;3), B(3;1)$ và $C(3;-5)$.

a) Viết phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường thẳng chứa cạnh AC.

b) Viết phương trình tổng quát của đường cao xuất phát từ đỉnh B và tìm tọa độ trực tâm của tam giác ABC.

c) Viết phương trình đường thẳng d đi qua A và cách B một đoạn bằng 4.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AC} = (4;-8)$ nên đường thẳng AC nhận véc-tơ $\overrightarrow{n_1} = (2;1)$ làm véc-tơ pháp tuyến. . . 0,5 điểm.
Phương trình tham số của đường thẳng AC : $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 - 2t. \end{cases}$ . . . . 0,5 điểm.
Phương trình tổng quát của đường thẳng $AC : 2x + y - 1 = 0$. . . . . 0,5 điểm.

b) Phương trình của đường cao xuất phát từ $B(3;1)$ và nhận véc-tơ $\overrightarrow{AC} = (4;-8)$ làm véc-tơ pháp tuyến là $x - 2y - 1 = 0$. . . . . 0,5 điểm.
Phương trình đường cao xuất phát từ $A(-1;3)$ và nhận $\overrightarrow{BC} = (0;-6)$ làm véc-tơ pháp tuyến là $y - 3 = 0$. . . . . 0,5 điểm.
Tọa độ trực tâm H của ΔABC là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ \quad\;\; y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 3. \end{cases}$$

. . . . 0,25 điểm.

c) Gọi Δ là đường thẳng cần tìm và Δ có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = (a;b)$ với $a^2 + b^2 \neq 0$.
Đường thẳng Δ có dạng $a(x+1) + b(y-3) = 0$. . . . . 0,25 điểm.
Ta có

$$\begin{aligned} d(B;\Delta) = 4 &\Leftrightarrow \frac{|a(3+1) + b(1-3)|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 4 \\ &\Leftrightarrow |2a - b| = 2\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow 4ab + 3b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow b = 0 \text{ hoặc } b = -\frac{3a}{4}. \end{aligned}$$

. . . . 1,0 điểm.
Khi $b = 0$ (thì $a \neq 0$), ta có phương trình Δ là $x + 1 = 0$. . . . . 0,25 điểm.
Khi $b = -\dfrac{3a}{4}$ thì Δ có phương trình là $4x - 3y + 13 = 0$. . . . . 0,25 điểm.

B

Câu 2. (2,0 điểm) Trong hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(T) : x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$.

a) Tìm tọa độ tâm và tính bán kính của (T).

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (T), biết rằng tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $l: 3x-4y+5=0$.

Lời giải.

a) Đường tròn (T) có tâm $I(1;-3)$ và bán kính $R=5$. .... 0,5 điểm.

b) Gọi Δ là tiếp tuyến cần tìm.
Vì Δ song song l nên Δ có dạng $3x-4y+m=0, m\neq 5$. .... 0,5 điểm.
Vì Δ tiếp xúc (T) nên $d(I;\Delta)=R \Leftrightarrow m=10$ hoặc $m=-35$. .... 0,75 điểm.
Vậy phương trình Δ là $3x-4y+10=0$ và $3x-4y-35=0$. .... 0,25 điểm.

Câu 3. (2,0 điểm) Trong hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

a) Xác định tọa độ các tiêu điểm F_1, F_2 và độ dài tiêu cự của (E).

b) Lấy điểm M tùy ý thuộc (E). Chứng minh rằng biểu thức $T=MF_1\cdot MF_2+OM^2$ có giá trị không đổi.

Lời giải.

a) Ta có $c^2=a^2-b^2=5$ nên elip E có hai tiêu điểm $F_1(-\sqrt{5};0), F_2(\sqrt{5};0)$. .... 0,5 điểm.
Độ dài tiêu cự của (E) là $F_1F_2=2c=2\sqrt{5}$. .... 0,25 điểm.

b) Với M tùy ý thuộc E, ta có $MF_1\cdot MF_2=\left(a+\dfrac{c}{a}x_M\right)\cdot\left(a-\dfrac{c}{a}x_M\right)=9-\dfrac{5}{9}x_M^2$. .... 0,5 điểm.
Mà $OM^2=x_M^2+y_M^2=x_M^2+4\left(1-\dfrac{x_M^2}{9}\right)=\dfrac{5}{9}x_M^2+4$. .... 0,5 điểm.
Vậy $T=MF_1\cdot MF_2+OM^2=13$. .... 0,25 điểm.

Câu 4. (2,0 điểm) Trong hệ tọa độ Oxy, cho $(E): \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

a) Viết phương trình đường tròn (C) có tâm O và đường kính bằng độ dài trục nhỏ của (E).

b) Tìm điểm $M(x;y)$ thuộc E có tọa độ dương sao cho tích $x\cdot y$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

a) Elip (E) có độ dài trục nhỏ $2b=8$ nên đường tròn cần tìm có bán kính $r=4$. .... 0,5 điểm.
Vậy phương trình (C) là $x^2+y^2=16$. .... 0,5 điểm.

b) Vì $M(x;y)\in(E)$ và $x,y>0$ nên ta có $y=4\sqrt{1-\dfrac{x^2}{25}}=\dfrac{4}{5}\sqrt{25-x^2}$. .... 0,25 điểm.
Ta có $xy=\dfrac{4}{5}\sqrt{x^2(25-x^2)}\leq\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{x^2+25-x^2}{2}=10$. .... 0,5 điểm.
Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x^2=25-x^2\\ x>0\\ y=4\sqrt{1-\dfrac{x^2}{25}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\\ y=2\sqrt{2}.\end{cases}$ .... 0,25 điểm.

VI. Đề số 3b

Câu 1. (4,0 điểm) Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác MNP với $M(-1;3), N(3;1)$ và $P(3;-5)$.

a) Viết phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường thẳng chứa cạnh MP.

b) Viết phương trình tổng quát của đường cao xuất phát từ đỉnh N và tìm tọa độ trực tâm của tam giác MNP.

c) Viết phương trình đường thẳng d đi qua M và cách N một đoạn bằng 4.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{MP} = (4;-8)$ nên đường thẳng MP nhận véc-tơ $\overrightarrow{n_1} = (2;1)$ làm véc-tơ pháp tuyến. . 0,5 điểm.

Phương trình tham số của đường thẳng MP : $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 - 2t. \end{cases}$ . . . . 0,5 điểm.

Phương trình tổng quát của đường thẳng $MP : 2x + y - 1 = 0$. . . . . 0,5 điểm.

b) Phương trình của đường cao xuất phát từ $N(3;1)$ và nhận véc-tơ $\overrightarrow{MP} = (4;-8)$ làm véc-tơ pháp tuyến là $x - 2y - 1 = 0$. . . . . 0,5 điểm.

Phương trình đường cao xuất phát từ $M(-1;3)$ và nhận $\overrightarrow{NP} = (0;-6)$ làm véc-tơ pháp tuyến là $y - 3 = 0$. . . . . 0,5 điểm.

Tọa độ trực tâm H của ΔMNP là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ \quad\quad y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 3. \end{cases}$$

. . . . 0,25 điểm.

c) Gọi Δ là đường thẳng cần tìm và Δ có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = (a;b)$ với $a^2 + b^2 \neq 0$.

Đường thẳng Δ có dạng $a(x+1) + b(y-3) = 0$. . . . . 0,25 điểm.

Ta có

$$\begin{aligned} d(N;\Delta) = 4 &\Leftrightarrow \frac{|a(3+1) + b(1-3)|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 4 \\ &\Leftrightarrow |2a - b| = 2\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow 4ab + 3b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow b = 0 \text{ hoặc } b = -\frac{3a}{4}. \end{aligned}$$

. . . . 1,0 điểm.

Khi $b = 0$ (thì $a \neq 0$), ta có phương trình Δ là $x + 1 = 0$. . . . . 0,25 điểm.

Khi $b = -\dfrac{3a}{4}$ thì Δ có phương trình là $4x - 3y + 13 = 0$. . . . . 0,25 điểm.

Câu 2. (2,0 điểm) Trong hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$.

a) Tìm tọa độ tâm và tính bán kính của (C).

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết rằng tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $d : 4x - 3y + 1 = 0$.

Lời giải.

a) Đường tròn (C) có tâm $I(1;-3)$ và bán kính $R = 5$. . . . . 0,5 điểm.

b) Gọi Δ là tiếp tuyến cần tìm.

Vì Δ song song d nên Δ có dạng $4x - 3y + m = 0, m \neq 1$. . . . . 0,5 điểm.

Vì Δ tiếp xúc (C) nên $d(I;\Delta) = R \Leftrightarrow m = 12$ hoặc $m = -38$. . . . . 0,75 điểm.

Vậy phương trình Δ là $4x - 3y + 12 = 0$ và $4x - 3y - 38 = 0$. . . . . 0,25 điểm.

Câu 3. (2,0 điểm) Trong hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

a) Xác định tọa độ các tiêu điểm F_1, F_2 và độ dài tiêu cự của (E).

b) Lấy điểm M tùy ý thuộc (E). Chứng minh rằng biểu thức $T = MF_1 \cdot MF_2 + OM^2$ có giá trị không đổi.

Lời giải.

a) Ta có $c^2 = a^2 - b^2 = 5$ nên elip E có hai tiêu điểm $F_1(-2\sqrt{2};0), F_2(2\sqrt{2};0)$. .... 0,5 điểm.
Độ dài tiêu cự của (E) là $F_1F_2 = 2c = 4\sqrt{2}$. .... 0,25 điểm.

b) Với M tùy ý thuộc E, ta có $MF_1 \cdot MF_2 = \left(a+\dfrac{c}{a}x_M\right)\cdot\left(a-\dfrac{c}{a}x_M\right) = 12-\dfrac{2}{3}x_M^2$. .... 0,5 điểm.
Mà $OM^2 = x_M^2 + y_M^2 = x_M^2 + 4\left(1-\dfrac{x_M^2}{12}\right) = \dfrac{2}{3}x_M^2 + 4$. .... 0,5 điểm.
Vậy $T = MF_1 \cdot MF_2 + OM^2 = 16$. .... 0,25 điểm.

Câu 4. (2,0 điểm) Trong hệ tọa độ Oxy, cho $(E): \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

a) Viết phương trình đường tròn (C) có tâm O và đường kính bằng độ dài trục nhỏ của (E).

b) Tìm điểm $M(x;y)$ thuộc E có tọa độ dương sao cho tích $x \cdot y$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

a) Elip (E) có độ dài trục nhỏ $2b = 6$ nên đường tròn cần tìm có bán kính $r = 3$. .... 0,5 điểm.
Vậy phương trình (C) là $x^2 + y^2 = 9$. .... 0,5 điểm.

b) Vì $M(x;y) \in (E)$ và $x, y > 0$ nên ta có $y = 3\sqrt{1-\dfrac{x^2}{16}} = \dfrac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$. .... 0,25 điểm.
Ta có $xy = \dfrac{3}{4}\sqrt{x^2(16-x^2)} \leq \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{x^2+16-x^2}{2} = 6$. .... 0,5 điểm.
Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x^2 = 16 - x^2 \\ x > 0 \\ y = 3\sqrt{1-\dfrac{x^2}{16}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ y = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$ .... 0,25 điểm.