BÀI 01 VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

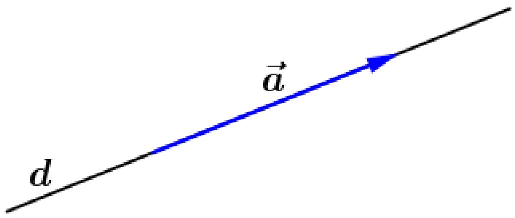
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Vectơ trong không gian

Định nghĩa: Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng. Độ dài của vectơ trong không gian là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

Chú ý: Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, đối với vectơ trong không gian ta cũng có các kí hiệu và khái niệm sau:

- Vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$.
- Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ thì vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \ldots$
- Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $\left|\vec{a}\right|$
- Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ đó (Hình 1).



Hình 1. Đường thẳng d là giá của vectơ $\vec{a}$

Tương tự như trường hợp của vectơ trong mặt phẳng, ta có các khái niệm sau đối với vectơ trong không gian:

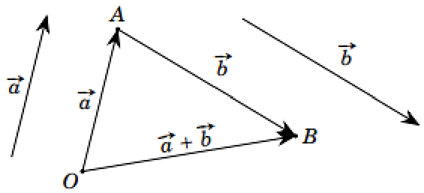
- Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.
- Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.
- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

Chú ý: Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, ta có tính chất và các quy ước sau đối với vectơ trong không gian:

- Trong không gian, với mỗi điểm O và vectơ a cho trước, có duy nhất điểm M sao cho $OM = a$
- Các vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ví dụ như $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \ldots$ gọi là các vectơ-không.
- Ta quy ước vectơ không có độ dài là 0, cùng hướng (và vì vậy cùng phương) với mọi vectơ.
- Do đó, các vectơ không đều bằng nhau và được kí hiệu chung là $\vec{0}$.

2 Tổng và hiệu của hai vectơ trong không gian

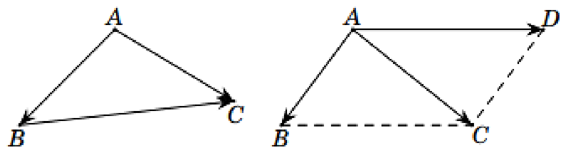
a) Tổng của hai vectơ trong không gian



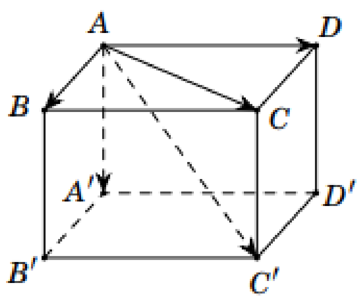
Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm O bất kì và các điểm A , B sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Khi đó, vectơ $\overrightarrow{OB}$ được gọi là **tổng của hai vectơ** $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ký hiệu là $\vec{a} + \vec{b}$.

Trong không gian, phép lấy tổng của hai vectơ được gọi là **phép cộng vectơ.**

Nhận xét: Quy tắc ba điểm và quy tắc hình bình hành trong mặt phẳng vẫn đúng trong không gian:



- **Quy tắc ba điểm:** Nếu A, B, C là ba điểm bất kì thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- **Quy tắc hình bình hành:** Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$



- **Quy tắc hình hộp chữ nhật:** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Ta có $AB + AD + AA' = AC'$.

Hệ thức tương tự: $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD'}$

Chú ý: Tương tự như phép cộng vectơ trong mặt phẳng, phép cộng vectơ trong không gian có các tính chất sau:

- **Tính chất giao hoán:** Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ bất kì thì $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
- **Tính chất kết hợp:** Nếu a,b và c là ba vectơ bất ki thì $\left(a+b\right)+c=a+\left(b+c\right)$.
- **Tính chất cộng với vectơ $\vec{0}$:** Nếu $\vec{a}$ là một vectơ bất kì thì $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

Từ tính chất kết hợp của phép cộng vectơ trong không gian, ta có thể viết tổng của ba vectơ $\vec{a},\vec{b}$ và $\vec{c}$ là $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ mà không cần sử dụng các dấu ngoặc. Tương tự đối với tổng của nhiều vectơ trong không gian.

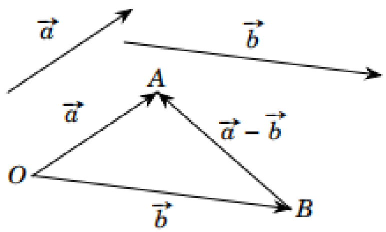
a) Hiệu của hai vectơ trong không gian

Vectơ đối: Trong không gian, vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ được gọi là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$

- Vectơ đối của $\vec{a}$ kí hiệu là $-\vec{a}$
- Vectơ đối của $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{BA}$, nghĩa là $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$ *(dùng để làm mất dấu trừ trước vectơ)*
- Vectơ $\vec{0}$ được coi là vectơ đối của chính nó

Định nghĩa: Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Ta gọi $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$ là hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và kí hiệu là $\vec{a}-\vec{b}$. Phép lấy hiệu của hai vectơ được gọi là phép trừ vectơ.

Nhận xét:



- Với ba điểm $O,\ A,\ B$ bất kì trong không gian thì ta có $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$.
- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đối nhau thì $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$

3 Tích của một số với một vectơ trong không gian

Trong không gian, tích của một số thực $k\neq 0$ với một vectơ $\vec{a}\neq 0$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

- Cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k>0$; ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k<0$
- Có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$.

Phép lấy tích của một số với một vectơ được gọi là **phép nhân một số với một vectơ**.

Chú ý: Quy ước $k\vec{a} = \vec{0}$ nếu $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.

- Nếu $k\vec{a} = \vec{0}$ thì $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.
- Trong không gian, điều kiện cần và đủ để hai vectơ a $\vec{a}$ và $\vec{b}$ $\left(\vec{b} \neq \vec{0}\right)$ cùng phương là có một số thực k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Xác định vectơ, chứng minh đẳng thức vectơ, độ dài vectơ

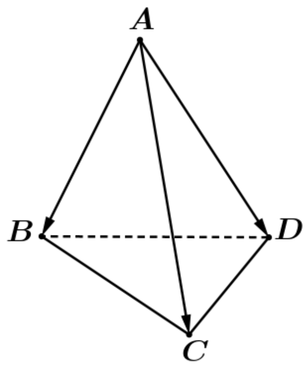
BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho tứ diện $ABCD$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1

a) Có bao nhiêu vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện

b) Trong các vectơ tìm được ở câu a, những vectơ nào có giá nằm trong mặt phẳng (ABC)

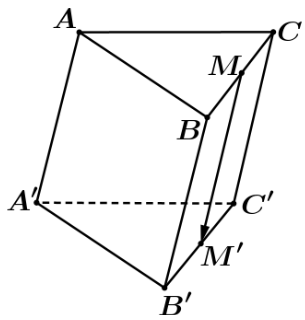
c) Tính độ dài của các vectơ tìm được ở câu a.



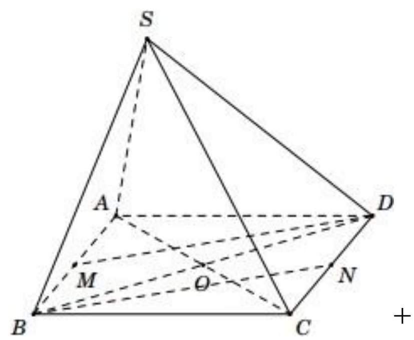
Bài tập 2: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

a) Trong ba vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CC'}$ và $\overrightarrow{B'B}$ thì vectơ nào bằng vectơ $\overrightarrow{AA'}$? Giải thích vì sao.

b) Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Xác định điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$.



Bài tập 3: Cho hình lăng trụ $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, O lần lượt là trung điểm AB, CD và AC. Chứng minh rằng:

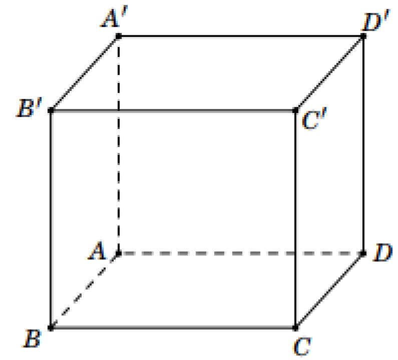


$+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}$

a) Hai vectơ $\overrightarrow{BM}$ và $\overrightarrow{DN}$ đối nhau b)

c) $\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{SC}$

Bài tập 4: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm của tam giác $AB'D'$



a) Tìm vectơ $\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BA}; \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{D'A'}$

b) Chứng minh $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$

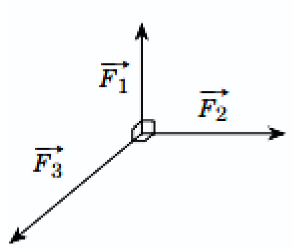
c) Chứng minh $\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{B'D}$

d) Chứng minh $\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{C'B'} + \overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{BD'}$

e) Chứng minh $\overrightarrow{A'C} = 3\overrightarrow{A'G}$

f) Tính độ dài $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{AA'}$

Bài tập 5: Ba lực $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ cùng tác dụng vào một vật có phương đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn lần lượt là 2 N, 3 N và 4 N.



a) Tính độ lớn hợp hai lực $\vec{F_2}, \vec{F_3}$

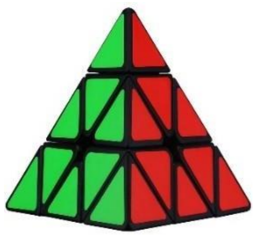
b) Tính độ lớn hợp lực của ba lực đã cho

Bài tập 6: Cho tứ diện $ABCD$ có AC và BD cùng vuông góc với AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB, CD. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right)$

b) $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB} = 0$

Bài tập 6: Tính khoảng cách từ trọng tâm của một khối Rubik (đồng chất) hình tứ diện đều đến một mặt của nó, biết rằng chiều cao của khối Rubik là 8cm.



Bài tập 7: Ba sợi dây không giãn với khối lượng không đáng kể được buộc chung một đầu và được kéo căng về ba hướng khác nhau. Nếu các lực kéo làm cho ba sợi dây ở trạng thái đứng yên thì khi đó ba sợi dây nằm trên cùng một mặt phẳng. Hãy giải thích vì sao?

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. **B.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

C. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$. **D.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$. Gọi M là trung điểm của đoạn BC. Đẳng thức nào dưới đây đúng?

A. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}\right)$. **B.** $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}\right)$.

C. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}\right)$. **D.** $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}\right)$.

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}+\vec{b}\right)$. **B.** $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{d}+\vec{b}-\vec{c}\right)$.

C. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{b}-\vec{d}\right)$. **D.** $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}\right)$.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi G_0 là giao điểm của GA và mặt phẳng (BCD). Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{G_0G}$. **B.** $\overrightarrow{GA}=4\overrightarrow{G_0G}$. **C.** $\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{G_0G}$. **D.** $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{G_0G}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{SB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{SC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{SD}=\vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$. **B.** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$. **C.** $\vec{a}+\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}$. **D.** $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}$.

Câu 6: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Véctơ $\overrightarrow{AG'}$ bằng?

A. $\frac{1}{3}\left(\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}\right)$. **B.** $\frac{1}{3}\left(3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$. **C.** $\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}\right)$. **D.** $\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Câu 7: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{B'C}$ theo $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$?

A. $\overrightarrow{B'C}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$. **B.** $\overrightarrow{B'C}=-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.

C. $\overrightarrow{B'C}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{B'C}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

Câu 8: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của cạnh BB'. Đặt $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$