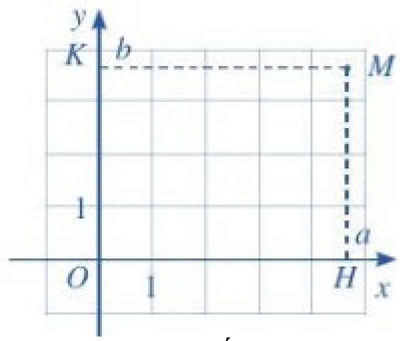
Bài 1. TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ

• |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

A. LÝ THUYẾT

I. Tọa độ của một điểm

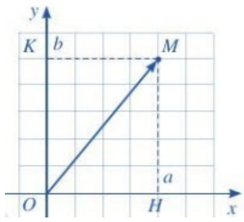


- Từ M kẻ đường thẳng vuông góc với trục hoành và cắt trục hoành tại điểm H ứng với số a. Số a là hoành độ của điểm M.
- Từ M kẻ đường thẳng vuông góc với trục tung và cắt trục tung tại điểm K ứng với số b. Số b là tung độ của điểm M.

Cặp số $(a;b)$ là toạ độ của điểm M trong mặt phẳng toạ độ Oxy. Ta kí hiệu là $M(a;b)$.

II. Tọa độ của một vectơ

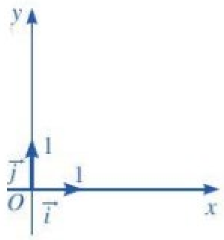
Toạ độ của điểm M được gọi là toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$.



Nếu $\overrightarrow{OM}$ có toạ độ $(a;b)$ thì ta viết $\overrightarrow{OM}=(a;b)$, trong đó a gọi là hoành độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ và b gọi là tung độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$

Chú ý: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, ta có:

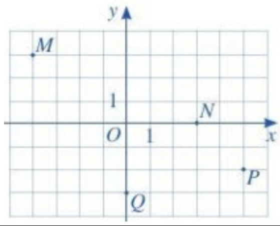
- $\overrightarrow{OM}=(a;b) \Leftrightarrow M(a;b)$.



- Vectơ $\vec{i}$ có điểm gốc là O và có toạ độ $(1;0)$ gọi là vectơ đơn vị trên trục Ox.

Vectơ $\vec{j}$ có điểm gốc là O và có tọa độ $(0;1)$ gọi là vectơ đơn vị trên trục Oy

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm M,N,P,Q. Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}$.

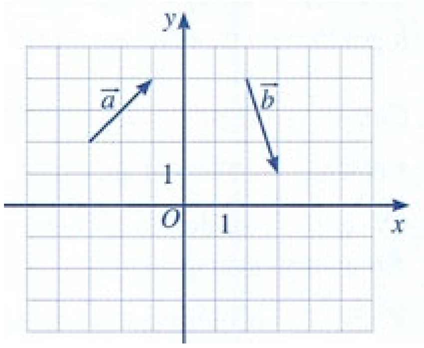


Giải
Từ hình trên ta có: $M(-4;3), N(3;0), P(5;-2), Q(0;-3)$.

Do đó: $\overrightarrow{OM}=(-4;3), \overrightarrow{ON}=(3;0)\ \ \overrightarrow{OP}=(5;-2), \overrightarrow{OQ}=(0;-3)$

Với mỗi vectơ $\vec{u}$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy, toạ độ của vectơ $\vec{u}$ là toạ độ của điểm A sao cho $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$. Nếu $\vec{u}$ có toạ độ $(a;b)$ thì ta viết $\vec{u}=(a;b)$, trong đó a gọi là hoành độ của vectơ $\vec{u}$ và b gọi là tung độ của vectơ $\vec{u}$.

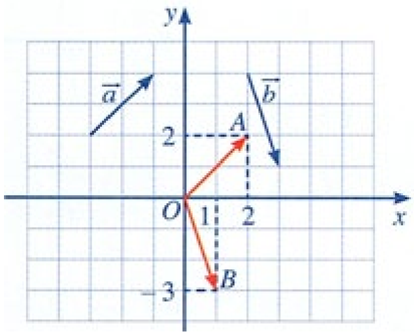
Ví dụ 2. Tìm toạ độ của các vectơ $\vec{a},\vec{b}$ ở hình



Giải
Trong hình, ta có:

+) $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ và $A(2;2)$; toạ độ vectơ $\overrightarrow{OA}$ chính là toạ độ điểm A nên $\vec{a}=(2;2)$.

+) $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ và $B(1;-3)$; toạ độ vectơ $\overrightarrow{OB}$ chính là toạ độ điểm B nên $\vec{b}=(1;-3)$.



Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nếu $\vec{u}=(a;b)$ thì $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}$. Ngược lại, nếu $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}$ thì $\vec{u}=(a;b)$.

Chú ý: Với $\vec{a}=(x_1;y_1)$ và $\vec{b}=(x_2;y_2)$, ta có: $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\y_1=y_2\end{cases}$. Như vậy, mỗi vectơ hoàn toàn được xác định khi biết tọa độ của nó.

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $A(1;2)$ và vectơ $\vec{u}=(3;-4)$.

a) Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{OA}$ qua vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$.

b) Biểu diễn vectơ $\vec{u}$ qua vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$.

Giải
a) Vì điểm A có toạ độ là $(1;2)$ nên $\overrightarrow{OA}=(1;2)$. Do đó:

$\overrightarrow{OA}=1\vec{i}+2\vec{j}=\vec{i}+2\vec{j}.$

b) Vì $\vec{u}=(3;-4)$ nên $\vec{u}=3\vec{i}+(-4)\vec{j}=3\vec{i}-4\vec{j}$.

III. Liên hệ giữa tọa độ của điểm và tọa độ của vectơ

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai điểm $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A)$.

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho ba điểm $A(1;1), B(4;3), C(-1;-2)$ không thẳng hàng.

a) Tìm toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm toạ độ của điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Giải

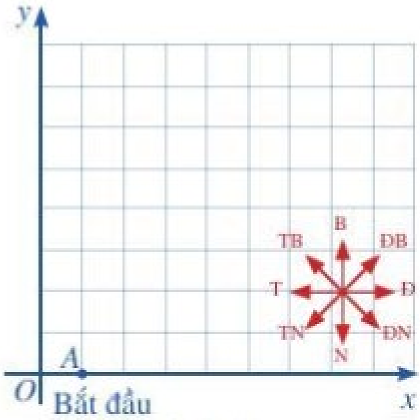
a) Ta có: $\overrightarrow{AB}=(4-1;3-1)$. Vậy $\overrightarrow{AB}=(3;2)$.

b) Gọi tọa độ của điểm D là $(x_D;y_D)$, ta có: $\overrightarrow{DC}=(-1-x_D;-2-y_D)$. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow \overrightarrow{DC}=(3;2)\Leftrightarrow \begin{cases}-1-x_D=3\\-2-y_D=2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x_D=-4\\y_D=-4\end{cases}$$

Vậy $D(-4;-4)$.

Ví dụ 5. Trong một bài luyện tập của các cầu thủ bóng nước, huấn luyện viên cho các cầu thủ di chuyển theo ba đoạn liên tiếp. Đoạn thứ nhất di chuyển về hướng Đông Bắc với quãng đường là $20m$; đoạn thứ hai di chuyển về hướng Tây Bắc với quãng đường là $10m$ và đoạn thứ ba di chuyển theo hướng Đông Bắc với quãng đường $5m$.

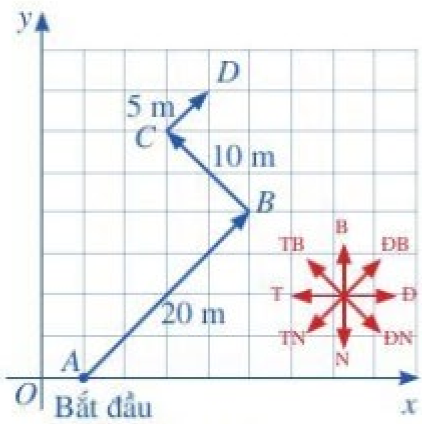


a) Vẽ các vectơ biểu diễn sự di chuyển của các cầu thủ trong hệ trục toạ độ Oxy với vị trí bắt đầu như hình, trong đó ta quy ước độ dài đường chéo của mỗi ô vuông là $5m$.

b) Tìm toạ độ của các vectơ trên.

Giải

a) Trong hình, ta thấy các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}$ lần lượt biểu diễn sự di chuyển theo đoạn thứ nhất; đoạn thứ hai; đoạn thứ ba của các cầu thủ.



b) Do độ dài đường chéo của mỗi ô vuông là $5m$ nên độ dài cạnh của mỗi ô vuông là $\frac{5\sqrt{2}}{2}m$. Dựa vào số ô vuông, ta có:

$$A\left(\frac{5\sqrt{2}}{2};0\right);\quad B\left(\frac{25\sqrt{2}}{2};10\sqrt{2}\right);$$

$$C\left(\frac{15\sqrt{2}}{2};15\sqrt{2}\right);\quad D\left(10\sqrt{2};\frac{35\sqrt{2}}{2}\right).$$

Do đó

$$\overrightarrow{AB}=\left(\frac{25\sqrt{2}}{2}-\frac{5\sqrt{2}}{2};10\sqrt{2}-0\right)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(10\sqrt{2};10\sqrt{2})$$

$$\overrightarrow{BC}=\left(\frac{15\sqrt{2}}{2}-\frac{25\sqrt{2}}{2};15\sqrt{2}-10\sqrt{2}\right)\Rightarrow\ \overrightarrow{BC}=(-5\sqrt{2};5\sqrt{2})$$

$$\overrightarrow{CD}=\left(10\sqrt{2}-\frac{15\sqrt{2}}{2};\frac{35\sqrt{2}}{2}-15\sqrt{2}\right)\ \Rightarrow\ \overrightarrow{CD}=\left(\frac{5\sqrt{2}}{2};\frac{5\sqrt{2}}{2}\right).$$

Tìm hiểu thêm

Chứng minh công thức tính toạ độ của vectơ qua tọa độ của điểm đầu và điểm cuối

Trong Mục III, ta đã phát biểu khẳng định sau:

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai điểm $A\left(x_A;y_A\right)$ và $B\left(x_B;y_B\right)$. Ta có

$$\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A;y_B-y_A\right).$$

Khẳng định trên có thể chứng minh như sau:

Vì $\overrightarrow{OA}=\left(x_A;y_A\right)$ nên $\overrightarrow{OA}=x_A\vec{i}+y_A\vec{j}$.

Vì $\overrightarrow{OB}=\left(x_B;y_B\right)$ nên $\overrightarrow{OB}=x_B\vec{i}+y_B\vec{j}$

Do đó

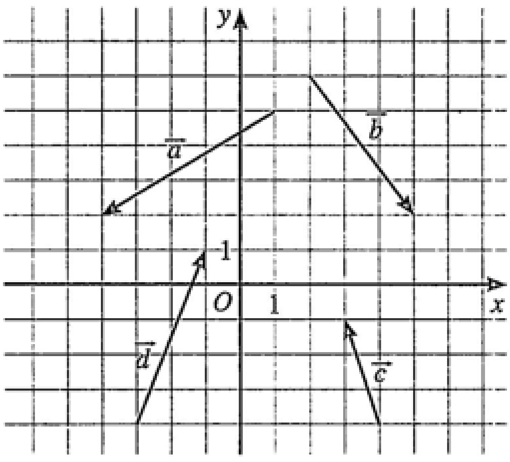
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\left(x_B\vec{i}+y_B\vec{j}\right)-\left(x_A\vec{i}+y_A\vec{j}\right)=\left(x_B\vec{i}-x_A\vec{i}\right)+\left(y_B\vec{j}-y_A\vec{j}\right)=\left(x_B-x_A\right)\vec{i}+\left(y_B-y_A\right)\vec{j}$

Vậy $\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A;y_B-y_A\right)$.

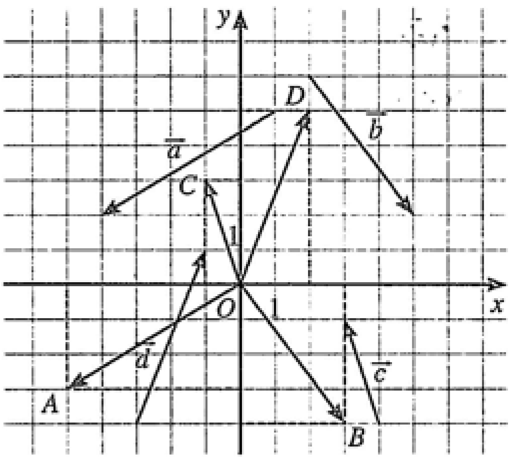
B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1 . Tìm toạ độ của vectơ

Câu 1 Tìm toạ độ của các vectơ trong Hình 2.



Hình 2



Hình 3

Giải

Trong Hình 3 , ta có:

- Vẽ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, ta có: $A(-5;-3)$ nên $\vec{a}=(-5;-3)$.
- Vẽ $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, ta có: $B(3;-4)$ nên $\vec{b}=(3;-4)$.
- Vẽ $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, ta có: $C(-1;3)$ nên $\vec{c}=(-1;3)$.
- Vẽ $\overrightarrow{OD}=\vec{d}$, ta có: $D(2;5)$ nên $\vec{d}=(2;5)$.

Câu 1. Tìm toạ độ của các vectơ sau:

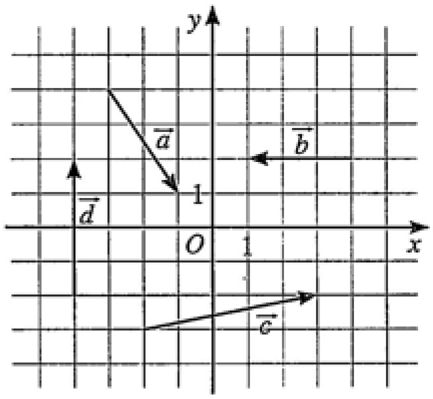
a) $\vec{a}=-2\vec{i}$

b) $\vec{b}=3\vec{j}$;

c) $\vec{c}=-4\vec{i}+\vec{j}$

d) $\vec{d}=\sqrt{5}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$.

Câu 2. Tìm toạ độ của các vectơ trong Hình 4 .



Hình 4

Câu 3. Viết tọa độ của các vectơ sau:

a) $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j};\ \vec{b}=\frac{1}{3}\vec{i}-5\vec{j};\ \vec{c}=3\vec{i};\ \vec{d}=-2\vec{j}$.

b) $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j};\ \vec{b}=\frac{1}{2}\vec{i}+\vec{j};\ \vec{c}=-\vec{i}+\frac{3}{2}\vec{j};\ \vec{d}=-4\vec{j};\ \vec{e}=3\vec{i}$

Câu 4. Viết dưới dạng $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ khi biết tọa độ của vectơ $\vec{u}$ là:

a) $\vec{u}=(2;-3);\ \vec{u}=(-1;4);\ \vec{u}=(2;0);\ \vec{u}=(0;-1)$.

b) $\vec{u}=(1;3);\ \vec{u}=(4;-1);\ \vec{u}=(1;0);\ \vec{u}=(0;0)$.

Dạng 2 . Tìm điều kiện để hai vectơ bằng nhau, chứng minh hai vectơ bằng nhau

Câu 5. Tìm các số thực a và b sao cho mỗi cặp vectơ sau bằng nhau:

a) $\vec{m}=(3a-1;2b+1)$ và $\vec{n}=(-4;2)$;

b) $\vec{u}=(2a-1;-3)$ và $\vec{v}=(3;4b+1)$;

c) $\vec{x}=(a+b;-2a+3b)$ và $\vec{y}=(2a-3;4b)$.

Câu 6. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho bốn điểm $A(-2;1), B(2;3), C(1;0)$,

Câu 7. Tìm các số thực a và b sao cho mỗi cặp vectơ sau bằng nhau:

a) $\vec{m}=(2a+3;b-1)$ và $\vec{n}=(1;-2)$;

b) $\vec{u}=(3a-2;5)$ và $\vec{v}=(5;2b+1)$;

c) $\vec{x}=(2a+b;2b)$ và $\vec{y}=(3+2b;b-3a)$.

Dạng 3. Tìm toạ độ của một điểm thoả mãn điều kiện cho trước

Câu 8. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho ba điểm $A(2;3), B(-1;1), C(3;-1)$.

a) Tìm toạ độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}$.

b) Tìm tọa độ trung điểm N của đoạn thẳng AC. Chứng minh $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{NM}$.

Câu 9. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC. Các điểm $M(1;-2)$, $N(4;-1)$ và $P(6;2)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Tìm toạ độ của các điểm A, B, C.

Câu 10. Cho ba điểm $A(1;-2), B(2;3), C(-1;-2)$.

a) Tìm tọa độ điểm D đối xứng với A qua C.

b) Tìm tọa độ điểm E là đỉnh thứ tư của hình bình hành có 3 đỉnh là A, B, C.

c) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Toạ độ của vectơ $\vec{u} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ là:

A. $(-3;2)$.
B. $(2;-3)$.
C. $(-3\vec{i};2\vec{j})$.
D. $(3;2)$.

Câu 2. Tọa độ của vectơ $\vec{u} = 5\vec{j}$ là:

A. $(5;0)$.
B. $(5;\vec{j})$.
C. $(0;5\vec{j})$.
D. $(0;5)$.

Câu 3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho $A(2;-5)$. Toạ độ của vecto $\overrightarrow{OA}$ là:

A. $(2;5)$.
B. $(2;-5)$.
C. $(-2;-5)$.
D. $(-2;5)$.

Câu 4. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho $A(-1;3), B(2;-1)$. Tọ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là:

A. $(1;-4)$.
B. $(-3;4)$.
C. $(3;-4)$.
D. $(1;-2)$.

Câu 5. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho $\vec{u} = (-2;-4), \vec{v} = (2x - y; y)$. Hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ bằng nhau nếu:

A. $\begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4. \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \end{cases}$

Câu 6. Cho hình bình hành $ABCD$ có $A(-1;-2)$, $B(3;2), C(4;-1)$. Toạ độ của đỉnh D là:

A. $(8;3)$.
B. $(3;8)$.
C. $(-5;0)$.
D. $(0;-5)$.

Câu 7. Trên trục $x'Ox$ cho bốn điểm A, B, C, D có tọa độ lần lượt là $3;5;-7;9$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\overline{AB} = 2$ **B.** $\overline{AC} = -10$ **C.** $\overline{CD} = -16$ **D.** $\overline{AB} + \overline{AC} = -8$

Câu 8. Trên trục $x'Ox$ cho tọa độ các điểm *A, B* lần lượt là *a, b*. Khi đó tọa độ điểm A' đối xứng với *A* qua *B* là:

A. $b-a$ **B.** $\frac{a+b}{2}$ **C.** $2a-b$ **D.** $2b-a$

Câu 9. Cho 4 điểm *A, B, C, D* trên trục $\left(O;\vec{i}\right)$ thỏa mãn $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=-\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$. Khi sso mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\frac{2}{\overline{AC}}=\frac{1}{\overline{AB}}+\frac{1}{\overline{AD}}$ **B.** $\frac{2}{\overline{AB}}=\frac{1}{\overline{AC}}+\frac{1}{\overline{DA}}$ **C.** $\frac{2}{\overline{AB}}=\frac{1}{\overline{AC}}+\frac{1}{\overline{AD}}$ **D.** $\frac{2}{\overline{AD}}=\frac{1}{\overline{AB}}+\frac{1}{\overline{AC}}$

Câu 10. Trên trục $x'Ox$ cho 3 điểm *A, B, C* có tọa độ lần lượt là $2;1;-2$. Khi đó tọa độ điểm *M* nguyên dương thỏa mãn $\frac{1}{MA}=\frac{1}{MB}+\frac{1}{MC}$ là:

A. 0 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 3

Câu 11. Trong hệ trục tọa độ $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, tọa độ của véc tơ $\overrightarrow{2i}+\overrightarrow{3j}$ là:

A. $(2;3)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;0)$. **D.** $(3;2)$.

Câu 12. Trên mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho vectơ $\vec{u}=3\vec{i}-4\vec{j}$. Tọa độ của vectơ $\vec{u}$ là

A. $\vec{u}=(3;-4)$. **B.** $\vec{u}=(3;4)$. **C.** $\vec{u}=(-3;-4)$. **D.** $\vec{u}=(-3;4)$.

Câu 13. Trong hệ tọa độ Oxy cho $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{i}-5\vec{j}$. Tọa độ của vecto $\vec{u}$ là

A. $\vec{u}=\left(\frac{1}{2};5\right)$. **B.** $\vec{u}=\left(\frac{1}{2};-5\right)$. **C.** $\vec{u}=(-1;10)$. **D.** $\vec{u}=(1;-10)$.

Câu 14. Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho hai điểm $M(1;1)$, $N(4;-1)$. Tính độ dài véctơ $\overrightarrow{MN}$.

A. $\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{13}$. **B.** $\left|\overrightarrow{MN}\right|=5$. **C.** $\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{29}$. **D.** $\left|\overrightarrow{MN}\right|=3$.

Câu 15. Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2;-1),B(4;3)$. Tọa độ của véctơ $\overrightarrow{AB}$ bằng

A. $\overrightarrow{AB}=(8;-3)$. **B.** $\overrightarrow{AB}=(-2;-4)$. **C.** $\overrightarrow{AB}=(2;4)$. **D.** $\overrightarrow{AB}=(6;2)$.

Câu 16. Trong hệ trục toạ độ Oxy, toạ độ của vectơ $\vec{a}=8\vec{j}-3\vec{i}$ bằng

A. $\vec{a}=(-3;8)$. **B.** $\vec{a}=(3;-8)$. **C.** $\vec{a}=(8;3)$. **D.** $\vec{a}=(8;-3)$.

Câu 17. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $B(-1;3)$ và $C(3;1)$. Độ dài vectơ $\overrightarrow{BC}$ bằng

A. 6. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** 2. **D.** $\sqrt{5}$.

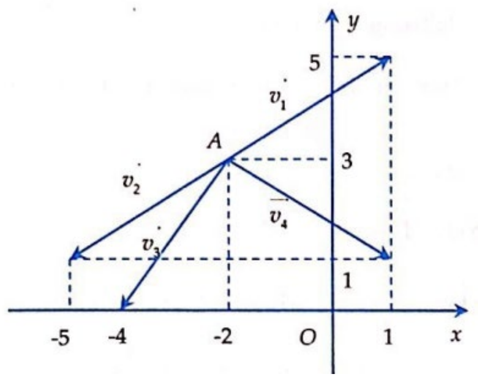
Câu 18. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho điểm $A(1;3)$ và $B(0;6)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}=(5;-3)$. **B.** $\overrightarrow{AB}=(1;-3)$. **C.** $\overrightarrow{AB}=(3;-5)$. **D.** $\overrightarrow{AB}=(-1;3)$.

Câu 19. Vectơ $\vec{a}=(5;0)$ biểu diễn dạng $\vec{a}=x.\vec{i}+y.\vec{j}$ được kết quả nào sau đây?

A. $\vec{a}=5\vec{i}-\vec{j}$ **B.** $\vec{a}=5\vec{i}$ **C.** $\vec{a}=\vec{i}-5\vec{j}$ **D.** $\vec{a}=-\vec{i}+5\vec{j}$

Câu 20. Cho điểm $A(-2;3)$ và vectơ $\overrightarrow{AM}=3\vec{i}-2\vec{j}$.Vectơ nào trong hình là vectơ $\overrightarrow{AM}$?



A. $\vec{V_1}$ **B.** $\vec{V_2}$ **C.** $\vec{V_3}$ **D.** $\vec{V_4}$

Câu 21. Trong các cặp vectơ sau, cặp vectơ nào không cùng phương?

A. $\vec{a}=(2;3);\vec{b}=(-10;-15)$ **B.** $\vec{u}=(0;5);\vec{v}=(0;8)$

C. $\vec{m}=(-2;1);\vec{n}=(-6;3)$ **D.** $\vec{c}=(3;4);\vec{d}=(6;9)$

Câu 22. Trong các cặp vectơ sau, cặp vectơ nào không cùng phương?

A. $\vec{a}=(2;3),\vec{b}=(6;9)$ **B.** $\vec{u}=(0;5),\vec{v}=(0;-1)$

C. $\vec{m}=(-2;1),\vec{b}=(1;2)$ **D.** $\vec{c}=(3;4),\vec{d}=(-6;-8)$

Câu 23. Cho $\vec{u}=\left(m^2+3;2m\right),\vec{v}=\left(5m-3;m^2\right)$. Vectơ $\vec{u}=\vec{v}$ khi và chỉ khi m thuộc tập hợp:

A. $\{2\}$ **B.** $\{0;2\}$ **C.** $\{0;2;3\}$ **D.** $\{3\}$

Câu 24. Cho 2 vectơ $\vec{u}=(2m-1)\vec{i}+(3-m)\vec{j}$ và $\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}$. Tìm m để hai vectơ cùng phương.

A. $m=\dfrac{5}{11}$ **B.** $m=\dfrac{11}{5}$ **C.** $m=\dfrac{9}{8}$ **D.** $m=\dfrac{8}{9}$

Câu 25. Trong mặt phẳng Oxy, cho $A(m-1;2);B(2;5-2m);C(m-3;4)$. Tìm m để A, B, C thẳng hàng.

A. $m=3$ **B.** $m=2$ **C.** $m=-2$ **D.** $m=1$

Câu 26. Cho $\vec{a}=(4;-m),\vec{v}=(2m+6;1)$. Tập giá trị của m để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương là:

A. $\{-1;1\}$ **B.** $\{-1;2\}$ **C.** $\{-2;-1\}$ **D.** $\{-2;1\}$

Câu 27. Cho 4 điểm $A(1;-2),B(0;3),C(-3;4),\ D(-1;8)$. Ba điểm nào trong bốn điểm dã cho thẳng hàng?

A. A, B, C **B.** B, C, D **C.** A, B, D **D.** A, C, D

Câu 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, $\vec{a}=(5;2)$, $\vec{b}=(10;6-2x)$. Tìm x để $\vec{a};\vec{b}$ cùng phương?

A. 1. **B.** -1. **C.** 2. **D.** -2.

Câu 29. Trong hệ trục Oxy, cho 4 điểm $A(3;-2),B(7;1),C(0;1),D(-8;-5)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$ đối nhau **B.** $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$ ngược hướng

C. $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$ cùng hướng **D.** A, B, C, D thẳng hàng

Câu 30. Cho 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai vectơ nào sau đây cùng phương?

A. $\vec{u}=2\vec{a}+\vec{b}$ và $\vec{v}=\dfrac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}$ **B.** $\vec{u}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+3\vec{b}$ và $\vec{v}=2\vec{a}-9\vec{b}$

C. $\vec{u}=\frac{3}{5}\vec{a}+3\vec{b}$ và $\vec{v}=2\vec{a}-\frac{3}{5}\vec{b}$ **D.** $\vec{u}=2\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$ và $\vec{v}=-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}$

Câu 31. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho $A(m-1;2),B(2;5-2m)$ và $C(m-3;4)$. Tìm giá trị m để A, B, C thẳng hàng.

A. $m=-2$.
B. $m=2$.
C. $m=1$.
D. $m=3$.

Câu 32. Cho $A(-1;1),B(1;3),C(-2;0)$. Tìm x sao cho $\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{BC}$

A. $x=\frac{2}{3}$ **B.** $x=-\frac{2}{3}$ **C.** $x=\frac{3}{2}$ **D.** $x=-\frac{3}{2}$

Câu 33. Cho $\vec{A}=(3;-2),\vec{B}=(-5;4),\vec{C}=\left(\frac{1}{3};0\right)$. Tìm $\vec{x}$ thỏa mãn $\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AC}$.

A. $x=3$ **B.** $x=-3$ **C.** $x=2$ **D.** $x=-4$

Câu 34. Vectơ $\vec{a}=(2;-1)$ biểu diễn dưới dạng $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$ được kết quả nào sau đây?

A. $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}$ **B.** $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}$ **C.** $\vec{a}=-2\vec{i}+\vec{j}$ **D.** $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}$

Câu 35. Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy*, cho ΔABC có $M(2;3),N(0;4),P(-1;6)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh *BC, CA, AB.* Tìm tọa độ đỉnh ***A***.

A. $A(1;5)$ **B.** $A(-3;7)$ **C.** $A(-2;-7)$ **D.** $A(1;-10)$

Câu 36. Trong hệ tọa độ *Oxy*, cho $M(2;0);N(2;2);P(-1;3)$ lần lượt là trung điểm các cạnh *BC, CA, AB* của ΔABC.Tọa độ điểm *B* là:

A. $B(1;1)$ **B.** $B(-1;-1)$ **C.** $B(-1;1)$ **D.** $B(1;-1)$

Câu 37. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(-1;1),B(1;3),C(5;2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

A. $(3;0)$. **B.** $(5;0)$. **C.** $(7;0)$. **D.** $(5;-2)$.

Câu 38. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(-2;3)$, $B(0;4)$, $C(5;-4)$. Tọa độ đỉnh D là

A. $(3;\sqrt{2})$. **B.** $(3;7)$. **C.** $(\sqrt{7};2)$. **D.** $(3;-5)$.

Câu 39. Trong mặt phẳng Oxy ;cho hai điểm $A(1;4),B(-4;2)$. Tọa độ giao điểm của đường thẳng đi qua hai điểm A,B với trục hoành là

A. $(-9;0)$. **B.** $(0;9)$. **C.** $(9;0)$. **D.** $(0;-9)$.

Câu 40. Trong hệ tọa độ *Oxy*, cho 3 điểm $A(2;1);B(0;-3);C(3;1)$. Tìm tọa độ điểm *D* để *ABCD* là hình bình hành.

A. $D(5;5)$ **B.** $D(5;-2)$ **C.** $D(5;-4)$ **D.** $D(-1;-4)$

Câu 41. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $A(2;1),B(-1;2),C(3;0)$. Tứ giác $ABCE$ là hình bình hành khi tọa độ E là cặp số nào sau đây?

A. $(6;-1)$ **B.** $(0;1)$ **C.** $(1;6)$ **D.** $(6;1)$

Câu 42. Trong hệ tọa độ *Oxy*, cho $A(-3;1), B(1;4),\ C(5;3)$. Tìm tọa độ điểm *D* sao cho *ABCD* là hình bình hành.

A. $D(-1;0)$ **B.** $D(1;0)$ **C.** $D(0;-1)$ **D.** $D(0;1)$

Câu 43. Trong hệ tọa độ *Oxy*, cho $A(2;-3), B(3;4)$. Tìm tọa độ điểm *M* trên trục hoành sao cho *A, B, M* thẳng hàng.

A. $M(1;0)$ **B.** $M(4;0)$ **C.** $M\left(-\frac{5}{3};0\right)$ **D.** $M\left(\frac{17}{7};0\right)$

Câu 44. Trong hệ tọa độ *Oxy*, cho $A(2;1); B(6;-1)$. Tìm điểm *M* trên *Ox* sao cho *A, B, M* thẳng hàng.

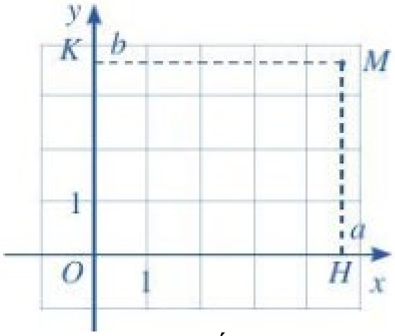
A. $M(2;0)$ **B.** $M(8;0)$ **C.** $M(-4;0)$ **D.** $M(4;0)$

Bài 1. TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ

• |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

A. LÝ THUYẾT

I. Tọa độ của một điểm

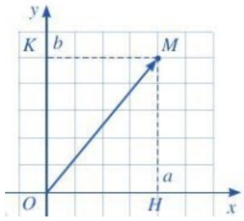


- Từ M kẻ đường thẳng vuông góc với trục hoành và cắt trục hoành tại điểm H ứng với số a. Số a là hoành độ của điểm M.
- Từ M kẻ đường thẳng vuông góc với trục tung và cắt trục tung tại điểm K ứng với số b. Số b là tung độ của điểm M.

Cặp số $(a;b)$ là toạ độ của điểm M trong mặt phẳng toạ độ Oxy. Ta kí hiệu là $M(a;b)$.

II. Tọa độ của một vectơ

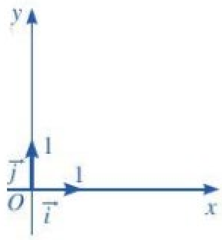
Toạ độ của điểm M được gọi là toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$.



Nếu $\overrightarrow{OM}$ có toạ độ $(a;b)$ thì ta viết $\overrightarrow{OM}=(a;b)$, trong đó a gọi là hoành độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ và b gọi là tung độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$

Chú ý: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, ta có:

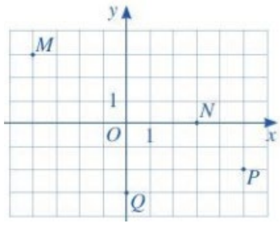
- $\overrightarrow{OM}=(a;b) \Leftrightarrow M(a;b)$.



- Vectơ $\vec{i}$ có điểm gốc là O và có toạ độ $(1;0)$ gọi là vectơ đơn vị trên trục Ox.

Vectơ $\vec{j}$ có điểm gốc là O và có tọa độ $(0;1)$ gọi là vectơ đơn vị trên trục Oy

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm M,N,P,Q. Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}$.



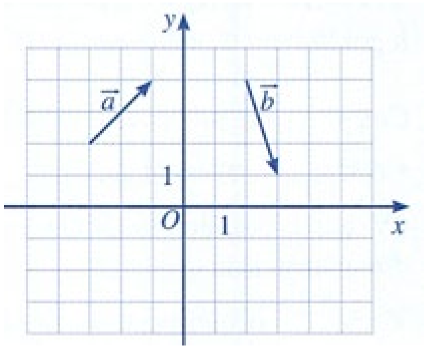
Giải

Từ hình trên ta có: $M(-4;3), N(3;0), P(5;-2), Q(0;-3)$.

Do đó: $\overrightarrow{OM}=(-4;3), \overrightarrow{ON}=(3;0)\ \ \overrightarrow{OP}=(5;-2), \overrightarrow{OQ}=(0;-3)$

Với mỗi vectơ $\vec{u}$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy, toạ độ của vectơ $\vec{u}$ là toạ độ của điểm A sao cho $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$. Nếu $\vec{u}$ có toạ độ $(a;b)$ thì ta viết $\vec{u}=(a;b)$, trong đó a gọi là hoành độ của vectơ $\vec{u}$ và b gọi là tung độ của vectơ $\vec{u}$.

Ví dụ 2. Tìm toạ độ của các vectơ $\vec{a},\vec{b}$ ở hình

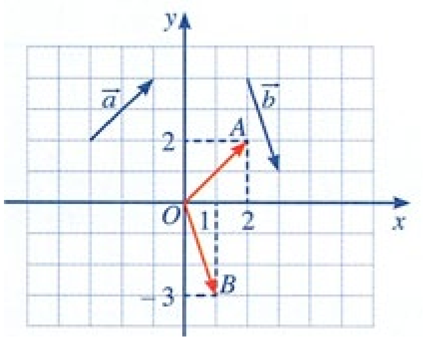


Giải

Trong hình, ta có:

+) $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ và $A(2;2)$; toạ độ vectơ $\overrightarrow{OA}$ chính là toạ độ điểm A nên $\vec{a}=(2;2)$.

+) $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ và $B(1;-3)$; toạ độ vectơ $\overrightarrow{OB}$ chính là toạ độ điểm B nên $\vec{b}=(1;-3)$.



Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nếu $\vec{u}=(a;b)$ thì $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}$. Ngược lại, nếu $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}$ thì $\vec{u}=(a;b)$.

Chú ý: Với $\vec{a}=(x_1;y_1)$ và $\vec{b}=(x_2;y_2)$, ta có: $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\y_1=y_2\end{cases}$. Như vậy, mỗi vectơ hoàn toàn được xác định khi biết tọa độ của nó.

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $A(1;2)$ và vectơ $\vec{u}=(3;-4)$.

a) Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{OA}$ qua vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$.

b) Biểu diễn vectơ $\vec{u}$ qua vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$.

Giải

a) Vì điểm A có toạ độ là $(1;2)$ nên $\overrightarrow{OA}=(1;2)$. Do đó:

$\overrightarrow{OA}=1\vec{i}+2\vec{j}=\vec{i}+2\vec{j}$.

b) Vì $\vec{u}=(3;-4)$ nên $\vec{u}=3\vec{i}+(-4)\vec{j}=3\vec{i}-4\vec{j}$.

III. Liên hệ giữa tọa độ của điểm và tọa độ của vectơ

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai điểm $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A)$.

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho ba điểm $A(1;1), B(4;3), C(-1;-2)$ không thẳng hàng.

a) Tìm toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm toạ độ của điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Giải

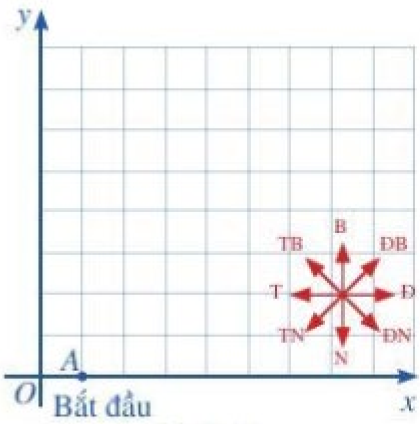
a) Ta có: $\overrightarrow{AB}=(4-1;3-1)$. Vậy $\overrightarrow{AB}=(3;2)$.

b) Gọi tọa độ của điểm D là $\left(x_D;y_D\right)$, ta có: $\overrightarrow{DC}=\left(-1-x_D;-2-y_D\right)$. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{DC}=(3;2)\Leftrightarrow\begin{cases}-1-x_D=3\\-2-y_D=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=-4\\y_D=-4\end{cases}$$

Vậy $D(-4;-4)$.

Ví dụ 5. Trong một bài luyện tập của các cầu thủ bóng nước, huấn luyện viên cho các cầu thủ di chuyển theo ba đoạn liên tiếp. Đoạn thứ nhất di chuyển về hướng Đông Bắc với quãng đường là $20m$; đoạn thứ hai di chuyển về hướng Tây Bắc với quãng đường là $10m$ và đoạn thứ ba di chuyển theo hướng Đông Bắc với quãng đường $5m$.

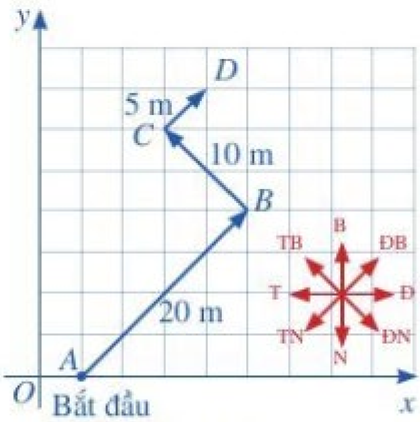


a) Vẽ các vectơ biểu diễn sự di chuyển của các cầu thủ trong hệ trục toạ độ Oxy với vị trí bắt đầu như hình, trong đó ta quy ước độ dài đường chéo của mỗi ô vuông là $5m$.

b) Tìm toạ độ của các vectơ trên.

Giải

a) Trong hình, ta thấy các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}$ lần lượt biểu diễn sự di chuyển theo đoạn thứ nhất; đoạn thứ hai; đoạn thứ ba của các cầu thủ.



b) Do độ dài đường chéo của mỗi ô vuông là $5m$ nên độ dài cạnh của mỗi ô vuông là $\frac{5\sqrt{2}}{2}m$. Dựa vào số ô vuông, ta có:

$A\left(\frac{5\sqrt{2}}{2};0\right)$; $B\left(\frac{25\sqrt{2}}{2};10\sqrt{2}\right)$;

$C\left(\frac{15\sqrt{2}}{2};15\sqrt{2}\right)$; $D\left(10\sqrt{2};\frac{35\sqrt{2}}{2}\right)$.

Do đó

$\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{25\sqrt{2}}{2}-\dfrac{5\sqrt{2}}{2};10\sqrt{2}-0\right)\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(10\sqrt{2};10\sqrt{2})$

$\overrightarrow{BC}=\left(\dfrac{15\sqrt{2}}{2}-\dfrac{25\sqrt{2}}{2};15\sqrt{2}-10\sqrt{2}\right)\Rightarrow \overrightarrow{BC}=(-5\sqrt{2};5\sqrt{2})$

$\overrightarrow{CD}=\left(10\sqrt{2}-\dfrac{15\sqrt{2}}{2};\dfrac{35\sqrt{2}}{2}-15\sqrt{2}\right)\Rightarrow \overrightarrow{CD}=\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2};\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right).$

Tìm hiểu thêm

Chứng minh công thức tính toạ độ của vectơ qua tọa độ của điểm đầu và điểm cuối

Trong Mục III, ta đã phát biểu khẳng định sau:

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai điểm $A\left(x_A;y_A\right)$ và $B\left(x_B;y_B\right)$. Ta có

$$\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A;y_B-y_A\right).$$

Khẳng định trên có thể chứng minh như sau:

Vì $\overrightarrow{OA}=\left(x_A;y_A\right)$ nên $\overrightarrow{OA}=x_A\vec{i}+y_A\vec{j}$.

Vì $\overrightarrow{OB}=\left(x_B;y_B\right)$ nên $\overrightarrow{OB}=x_B\vec{i}+y_B\vec{j}$

Do đó

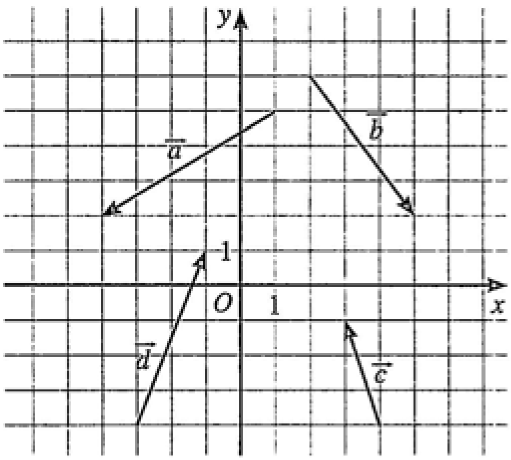
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\left(x_B\vec{i}+y_B\vec{j}\right)-\left(x_A\vec{i}+y_A\vec{j}\right)=\left(x_B\vec{i}-x_A\vec{i}\right)+\left(y_B\vec{j}-y_A\vec{j}\right)=\left(x_B-x_A\right)\vec{i}+\left(y_B-y_A\right)\vec{j}$

Vậy $\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A;y_B-y_A\right)$.

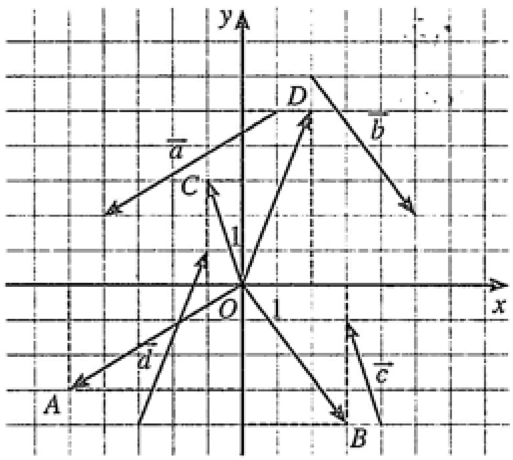
B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1 . Tìm toạ độ của vectơ

Câu 1 Tìm toạ độ của các vectơ trong Hình 2.



Hình 2



Hình 3

Giải

Trong Hình 3 , ta có:

- Vẽ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, ta có: $A(-5;-3)$ nên $\vec{a}=(-5;-3)$.
- Vẽ $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, ta có: $B(3;-4)$ nên $\vec{b}=(3;-4)$.
- Vẽ $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, ta có: $C(-1;3)$ nên $\vec{c}=(-1;3)$.
- Vẽ $\overrightarrow{OD}=\vec{d}$, ta có: $D(2;5)$ nên $\vec{d}=(2;5)$.

Câu 1. Tìm toạ độ của các vectơ sau:

a) $\vec{a}=-2\vec{i}$

b) $\vec{b}=3\vec{j}$;

c) $\vec{c}=-4\vec{i}+\vec{j}$

d) $\vec{d}=\sqrt{5}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$.

Giải

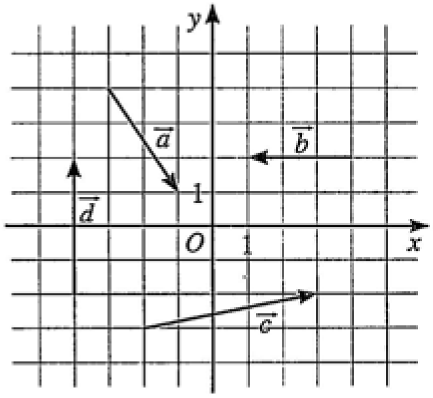
a) $\vec{a}=(-2;0)$;

b) $\vec{b}=(0;3)$

c) $\vec{c}=(-4;1)$;

d) $\vec{d}=\left(\sqrt{5};\frac{1}{2}\right)$.

Câu 2. Tìm toạ độ của các vectơ trong Hình 4 .



Hình 4

Lời giải

$\vec{a}=(2;-3),\vec{b}=(-3;0),\vec{c}=(5;1),\vec{d}=(0;4)$.

Câu 3. Viết tọa độ của các vectơ sau:

a) $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j};\ \vec{b}=\frac{1}{3}\vec{i}-5\vec{j};\ \vec{c}=3\vec{i};\ \vec{d}=-2\vec{j}$.

b) $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j};\ \vec{b}=\frac{1}{2}\vec{i}+\vec{j};\ \vec{c}=-\vec{i}+\frac{3}{2}\vec{j};\ \vec{d}=-4\vec{j};\ \vec{e}=3\vec{i}$

Lời giải

a) $\vec{a}=(2;3);\vec{b}=\left(\frac{1}{3};-5\right);\vec{c}=(3;0);\vec{d}=(0;-2)$

b) $\vec{a}=(1;-3);\vec{b}=\left(\frac{1}{2};1\right);\vec{c}=\left(-1;\frac{3}{3}\right);\vec{d}=(0;-4);\vec{e}(3;0)$

Câu 4. Viết dưới dạng $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ khi biết tọa độ của vectơ $\vec{u}$ là:

a) $\vec{u}=(2;-3);\ \vec{u}=(-1;4);\ \vec{u}=(2;0);\ \vec{u}=(0;-1)$.

b) $\vec{u}=(1;3);\ \vec{u}=(4;-1);\ \vec{u}=(1;0);\ \vec{u}=(0;0)$.

Lời giải

a) Ta có: $\vec{u}=(2;-3)\Rightarrow\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j};\ \vec{u}=(-1;4)\Rightarrow\vec{u}=-\vec{i}+4\vec{j};\vec{u}=(2;0)\Rightarrow\vec{u}=2\vec{i}+0\vec{j};\ \vec{u}=(0;-1)\Rightarrow\vec{u}=0\vec{i}-\vec{j}$

b) Ta có: $\vec{u}=(1;3)\Rightarrow\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j};\ \vec{u}=(4;-1)\Rightarrow\vec{u}=4\vec{i}-\vec{j};\vec{u}=(1;0)\Rightarrow\vec{u}=\vec{i}+0\vec{j};\ \vec{u}=(0;0)\Rightarrow\vec{u}=0\vec{i}+0\vec{j}$

.

Dạng 2 . Tìm điều kiện để hai vectơ bằng nhau, chứng minh hai vectơ bằng nhau

Câu 5. Tìm các số thực a và b sao cho mỗi cặp vectơ sau bằng nhau:

a) $\vec{m}=(3a-1;2b+1)$ và $\vec{n}=(-4;2)$;
b) $\vec{u}=(2a-1;-3)$ và $\vec{v}=(3;4b+1)$;
c) $\vec{x}=(a+b;-2a+3b)$ và $\vec{y}=(2a-3;4b)$.

Giải

a) $\vec{m}=\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases}3a-1=-4\\2b+1=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-1\\b=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

b) $\vec{u}=\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases}2a-1=3\\-3=4b+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\b=-1\end{cases}$

c) $\vec{x}=\vec{y} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b=2a-3\\-2a+3b=4b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a-b=3\\b=-2a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3a=3\\b=-2a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=-2.\end{cases}$

Câu 6. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho bốn điểm $A(-2;1), B(2;3), C(1;0)$,

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(4;2), \overrightarrow{DC}=(4;2)$. Suy ra $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

Câu 7. Tìm các số thực a và b sao cho mỗi cặp vectơ sau bằng nhau:
a) $\vec{m}=(2a+3;b-1)$ và $\vec{n}=(1;-2)$;
b) $\vec{u}=(3a-2;5)$ và $\vec{v}=(5;2b+1)$;
c) $\vec{x}=(2a+b;2b)$ và $\vec{y}=(3+2b;b-3a)$.

Lời giải

a) $a=-1, b=-1$.

b) $a=\dfrac{7}{3}, b=2$.

c) $a=\dfrac{3}{5}, b=\dfrac{-9}{5}$.

Dạng 3. Tìm toạ độ của một điểm thoả mãn điều kiện cho trước

Câu 8. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho ba điểm $A(2;3), B(-1;1), C(3;-1)$.

a) Tìm toạ độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}$.

b) Tìm tọa độ trung điểm N của đoạn thẳng AC. Chứng minh $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{NM}$.

Giải

a) Giả sử $M(x;y)$. Ta có: $\overrightarrow{AM}=(x-2;y-3), \overrightarrow{BC}=(4;-2)$.

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases}x-2=4\\y-3=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=6\\y=1.\end{cases}$ Vậy $M(6;1)$.

b) Giả sử $N(x;y)$. Ta có: $\overrightarrow{AN}=(x-2;y-3), \overrightarrow{NC}=(3-x;-1-y)$.
Vì N là trung điểm của đoạn thẳng AC nên ta có:
Ta có: $\overrightarrow{BN}=\left(\dfrac{7}{2};0\right), \overrightarrow{NM}=\left(\dfrac{7}{2};0\right)$. Suy ra $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{NM}$.

Câu 9. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC. Các điểm $M(1;-2)$, $N(4;-1)$ và $P(6;2)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Tìm toạ độ của các điểm A, B, C.

Giải

Vì M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB nên tứ giác $ANMP$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{PM}$. Giả sử $A(x_A;y_A)$.

Ta có: $\overrightarrow{AN}=(4-x_A;-1-y_A); \overrightarrow{PM}=(-5;-4)$.

Suy ra: $\begin{cases} 4-x_A=-5 \\ -1-y_A=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A=9 \\ y_A=3. \end{cases}$ Vậy $A(9;3)$.

Tương tự, từ $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{CM}=\overrightarrow{NP}$, ta tính được $B(3;1), C(-1;-5)$.

Câu 10. Cho ba điểm $A(1;-2), B(2;3), C(-1;-2)$.

a) Tìm tọa độ điểm D đối xứng với A qua C.

b) Tìm tọa độ điểm E là đỉnh thứ tư của hình bình hành có 3 đỉnh là A, B, C.

c) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Lời giải

a) D đối xứng với A qua C hay C là trung điểm của AD

$\Rightarrow \begin{cases} x_D=2x_C-x_A=-3 \\ y_D=2y_C-y_A=-2 \end{cases} \Rightarrow D(-3;-2)$.

b) $ABCE$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow (x_E-1; y_E+2)=(-3;-5) \Leftrightarrow \begin{cases} x_E-1=-3 \\ y_E+2=-5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_E=-2 \\ y_E=-7 \end{cases} \Rightarrow E(-2;-7)$.

c) G là trọng tâm tam giác $ABC \Leftrightarrow \begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{2}{3} \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=-\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Toạ độ của vectơ $\vec{u}=-3\vec{i}+2\vec{j}$ là:

A. $(-3;2)$.

B. $(2;-3)$.

C. $(-3\vec{i};2\vec{j})$.

D. $(3;2)$.

Lời giải

Chọn A

Câu 2. Tọa độ của vectơ $\vec{u}=5\vec{j}$ là:

A. $(5;0)$.

B. $(5;\vec{j})$.

C. $(0;5\vec{j})$.

D. $(0;5)$.

Lời giải

Chọn D

Câu 3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho $A(2;-5)$. Toạ độ của vecto $\overrightarrow{OA}$ là:

A. $(2;5)$.

B. $(2;-5)$.

C. $(-2;-5)$.

D. $(-2;5)$.

Lời giải

Chọn B

Câu 4. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho $A(-1;3), B(2;-1)$. Tọ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là:

A. $(1;-4)$.

B. $(-3;4)$.

C. $(3;-4)$.

D. $(1;-2)$.

Lời giải

Chọn C

Câu 5. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho $\vec{u}=(-2;-4), \vec{v}=(2x-y;y)$. Hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ bằng nhau nếu:

A. $\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=1 \\ y=4. \end{cases}$

D. $\begin{cases} x=-3 \\ y=4 \end{cases}$

Lời giải

Chọn B

Câu 6. Cho hình bình hành $ABCD$ có $A(-1;-2)$, $B(3;2), C(4;-1)$. Toạ độ của đỉnh D là:

A. $(8;3)$.

B. $(3;8)$.

C. $(-5;0)$.

D. $(0;-5)$.

Lời giải

Chọn D

Câu 7. Trên trục $x'Ox$ cho bốn điểm *A, B, C, D* có tọa độ lần lượt là $3;5;-7;9$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\overline{AB}=2$ **B.** $\overline{AC}=-10$ **C.** $\overline{CD}=-16$ **D.** $\overline{AB}+\overline{AC}=-8$

Lời giải

Đáp án C

Ta có: $\overline{CD}=x_D-x_C=9-(-7)=16$

Câu 8. Trên trục $x'Ox$ cho tọa độ các điểm *A, B* lần lượt là *a, b*. Khi đó tọa độ điểm A' đối xứng với *A* qua *B* là:

A. $b-a$ **B.** $\dfrac{a+b}{2}$ **C.** $2a-b$ **D.** $2b-a$

Lời giải

Đáp án D

A' đối xứng với *A* qua *B* nên *B* là trung điểm của $AA' \Rightarrow x_{A'}+x_A=2x_B \Leftrightarrow x_{A'}=2b-a$

Câu 9. Cho 4 điểm *A, B, C, D* trên trục $\left(O;\vec{i}\right)$ thỏa mãn $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$. Khi sso mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\frac{2}{\overline{AC}} = \frac{1}{\overline{AB}} + \frac{1}{\overline{AD}}$ **B.** $\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{DA}}$ **C.** $\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}$ **D.** $\frac{2}{\overline{AD}} = \frac{1}{\overline{AB}} + \frac{1}{\overline{AC}}$

Lời giải

Gọi *a, b, c, d* lần lượt là tọa độ của *A, B, C,* ***D***. Ta có:

$+\ \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \Leftrightarrow (c-b)(b-d) = (b-c)(a-d)$

$\Leftrightarrow ac + bd + bc + ad = 2ab + 2cd = (a+b)(c+d) = 2(ad+cb)$

$+\ \frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \frac{2}{b-c} = \frac{1}{c-a} + \frac{1}{d-a} \Leftrightarrow (a+b)(c+d) = 2(ab+cd)$

Đáp án C

Câu 10. Trên trục $x'Ox$ cho 3 điểm *A, B, C* có tọa độ lần lượt là $2;1;-2$. Khi đó tọa độ điểm *M* nguyên dương thỏa mãn $\frac{1}{MA} = \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}$ là:

A. 0 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Đáp án B

Gọi tọa độ điểm *M* là $x \Rightarrow \frac{1}{2-x} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{-2-x} \Rightarrow -x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x = 4$

Câu 11. Trong hệ trục tọa độ $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, tọa độ của véc tơ $\overrightarrow{2i} + \overrightarrow{3j}$ là:

A. $(2;3)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;0)$. **D.** $(3;2)$.

Lời giải

Chọn A

Tọa độ của véc tơ $\overrightarrow{2i} + \overrightarrow{3j}$ là: $(2;3)$.

Câu 12. Trên mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho vectơ $\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$. Tọa độ của vectơ $\vec{u}$ là

A. $\vec{u} = (3;-4)$. **B.** $\vec{u} = (3;4)$. **C.** $\vec{u} = (-3;-4)$. **D.** $\vec{u} = (-3;4)$.

Lời giải

Chọn A

$\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j} \Rightarrow \vec{u} = (3;-4)$.

Câu 13. Trong hệ tọa độ Oxy cho $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$. Tọa độ của vecto $\vec{u}$ là

A. $\vec{u} = \left(\frac{1}{2};5\right)$. **B.** $\vec{u} = \left(\frac{1}{2};-5\right)$. **C.** $\vec{u} = (-1;10)$. **D.** $\vec{u} = (1;-10)$.

Lời giải

Chọn B

Có $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j} \Rightarrow \vec{u} = \left(\frac{1}{2};-5\right)$.

Câu 14. Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho hai điểm $M(1;1)$, $N(4;-1)$. Tính độ dài véctơ $\overrightarrow{MN}$.

A. $\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{13}$. **B.** $\left|\overrightarrow{MN}\right|=5$. **C.** $\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{29}$. **D.** $\left|\overrightarrow{MN}\right|=3$.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{MN}=(3;-2)\Rightarrow\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$.

Câu 15. Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2;-1),B(4;3)$. Tọa độ của véctơ $\overrightarrow{AB}$ bằng

A. $\overrightarrow{AB}=(8;-3)$. **B.** $\overrightarrow{AB}=(-2;-4)$. **C.** $\overrightarrow{AB}=(2;4)$. **D.** $\overrightarrow{AB}=(6;2)$.

Lời giải

Chọn C

$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(2;4)$.

Câu 16. Trong hệ trục toạ độ Oxy, toạ độ của vectơ $\vec{a}=8\vec{j}-3\vec{i}$ bằng

A. $\vec{a}=(-3;8)$. **B.** $\vec{a}=(3;-8)$. **C.** $\vec{a}=(8;3)$. **D.** $\vec{a}=(8;-3)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\vec{a}=8\vec{j}-3\vec{i}=-3\vec{i}+8\vec{j}\Rightarrow\vec{a}=(-3;8)$.

Câu 17. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $B(-1;3)$ và $C(3;1)$. Độ dài vectơ $\overrightarrow{BC}$ bằng

A. 6. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** 2. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{BC}=(4;-2)\Rightarrow\left|\overrightarrow{BC}\right|=BC=\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$. Vậy $\left|\overrightarrow{BC}\right|=2\sqrt{5}$.

Câu 18. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho điểm $A(1;3)$ và $B(0;6)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}=(5;-3)$. **B.** $\overrightarrow{AB}=(1;-3)$. **C.** $\overrightarrow{AB}=(3;-5)$. **D.** $\overrightarrow{AB}=(-1;3)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A)=(-1;3)$.

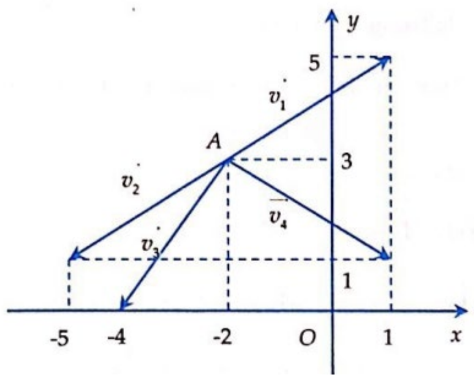
Câu 19. Vectơ $\vec{a}=(5;0)$ biểu diễn dạng $\vec{a}=x.\vec{i}+y.\vec{j}$ được kết quả nào sau đây?

A. $\vec{a}=5\vec{i}-\vec{j}$ **B.** $\vec{a}=5\vec{i}$ **C.** $\vec{a}=\vec{i}-5\vec{j}$ **D.** $\vec{a}=-\vec{i}+5\vec{j}$

Lời giải

Đáp án B

Câu 20. Cho điểm $A(-2;3)$ và vectơ $\overrightarrow{AM}=3\vec{i}-2\vec{j}$.Vectơ nào trong hình là vectơ $\overrightarrow{AM}$?



A. $\overrightarrow{V_1}$ **B.** $\overrightarrow{V_2}$ **C.** $\overrightarrow{V_3}$ **D.** $\overrightarrow{V_4}$

Lời giải

Đáp án D

Ta có: $\overrightarrow{V_4} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$

Câu 21. Trong các cặp vectơ sau, cặp vectơ nào không cùng phương?

A. $\vec{a} = (2;3); \vec{b} = (-10;-15)$ **B.** $\vec{u} = (0;5); \vec{v} = (0;8)$

C. $\vec{m} = (-2;1); \vec{n} = (-6;3)$ **D.** $\vec{c} = (3;4); \vec{d} = (6;9)$

Lời giải

Ta có: $\frac{3}{6} \neq \frac{4}{9} \Rightarrow \vec{c}$ và $\vec{d}$ không cùng phương.

Đáp án D

Câu 22. Trong các cặp vectơ sau, cặp vectơ nào không cùng phương?

A. $\vec{a} = (2;3), \vec{b} = (6;9)$ **B.** $\vec{u} = (0;5), \vec{v} = (0;-1)$

C. $\vec{m} = (-2;1), \vec{b} = (1;2)$ **D.** $\vec{c} = (3;4), \vec{d} = (-6;-8)$

Lời giải

Đáp án C

Câu 23. Cho $\vec{u} = (m^2+3;2m), \vec{v} = (5m-3;m^2)$. Vectơ $\vec{u} = \vec{v}$ khi và chỉ khi m thuộc tập hợp:

A. $\{2\}$ **B.** $\{0;2\}$ **C.** $\{0;2;3\}$ **D.** $\{3\}$

Lời giải

Đáp án A

Theo bài ra $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+3 = 5m-3 \\ 2m = m^2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$

Câu 24. Cho 2 vectơ $\vec{u} = (2m-1)\vec{i} + (3-m)\vec{j}$ và $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$. Tìm m để hai vectơ cùng phương.

A. $m = \frac{5}{11}$ **B.** $m = \frac{11}{5}$ **C.** $m = \frac{9}{8}$ **D.** $m = \frac{8}{9}$

Lời giải

Để 2 vectơ cùng phương thì $\frac{2m-1}{2} = \frac{3-m}{3} \Leftrightarrow m = \frac{9}{8}$.

Đáp án C

Câu 25. Trong mặt phẳng *Oxy*, cho $A(m-1;2);B(2;5-2m);C(m-3;4)$. Tìm *m* để *A, B, C* thẳng hàng.

A. $m=3$ **B.** $m=2$ **C.** $m=-2$ **D.** $m=1$

Lời giải

A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \dfrac{3-m}{m-5}=\dfrac{3-2m}{2m-1}\Leftrightarrow (3-m)(2m-1)=(3-2m)(m-5)\Leftrightarrow m=2$

Đáp án B

Câu 26. Cho $\vec{a}=(4;-m),\vec{v}=(2m+6;1)$. Tập giá trị của *m* để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương là:

A. $\{-1;1\}$ **B.** $\{-1;2\}$ **C.** $\{-2;-1\}$ **D.** $\{-2;1\}$

Lời giải

Đáp án C

$\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}$ $\Leftrightarrow \vec{a}=k\vec{b}\Rightarrow \begin{cases}4=k(2m+6)\\-m=k\end{cases}\Rightarrow \left[\begin{array}{l}m=-1\\m=-2\end{array}\right.$

Câu 27. Cho 4 điểm $A(1;-2),B(0;3),C(-3;4),\ D(-1;8)$. Ba điểm nào trong bốn điểm dã cho thẳng hàng?

A. *A, B, C* **B.** *B, C, D* **C.** *A, B, D* **D.** *A, C, D*

Lời giải

Đáp án C

Ta có:

$\overrightarrow{AB}=(-1;5),\overrightarrow{DA}=(2;-10)\Rightarrow \overrightarrow{DA}=-2\overrightarrow{AB}\Rightarrow$ *A, B, D* thẳng hàng.

Câu 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, $\vec{a}=(5;2)$, $\vec{b}=(10;6-2x)$. Tìm x để $\vec{a};\vec{b}$ cùng phương?

A. 1. **B.** -1. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\vec{a};\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi: $\dfrac{10}{5}=\dfrac{6-2x}{2}\Leftrightarrow x=1$. Chọn đáp án **A.**

Câu 29. Trong hệ trục *Oxy*, cho 4 điểm $A(3;-2),B(7;1),C(0;1),D(-8;-5)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$ đối nhau **B.** $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$ ngược hướng

C. $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$ cùng hướng **D.** *A, B, C, D* thẳng hàng

Lời giải

$\overrightarrow{AB}=(4;3),\overrightarrow{CD}=(-8;-6)\Rightarrow \overrightarrow{AB}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ nên $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$ ngược hướng

Đáp án B

Câu 30. Cho 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai vectơ nào sau đây cùng phương?

A. $\vec{u}=2\vec{a}+\vec{b}$ và $\vec{v}=\dfrac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}$ **B.** $\vec{u}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+3\vec{b}$ và $\vec{v}=2\vec{a}-9\vec{b}$

C. $\vec{u}=\dfrac{3}{5}\vec{a}+3\vec{b}$ và $\vec{v}=2\vec{a}-\dfrac{3}{5}\vec{b}$ **D.** $\vec{u}=2\vec{a}-\dfrac{3}{2}\vec{b}$ và $\vec{v}=-\dfrac{1}{3}\vec{a}-\dfrac{1}{4}\vec{b}$

Lời giải

Đáp án D

$2\vec{u}=4\vec{a}-3\vec{b},-12\vec{v}=4\vec{a}-3\vec{b}\Rightarrow\vec{u}=-6\vec{v}$

Câu 31. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho $A(m-1;2),B(2;5-2m)$ và $C(m-3;4)$. Tìm giá trị m để A, B, C thẳng hàng.

A. $m=-2$.

B. $m=2$.

C. $m=1$.

D. $m=3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3-m;3-2m),\overrightarrow{AC}=(-2;2)$

Do A, B, C thẳng hàng nên tồn tại số thực k sao cho $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\begin{cases}3-m=-2k\\3-2m=2k\end{cases}\Rightarrow m=2$.

Câu 32. Cho $A(-1;1),B(1;3),C(-2;0)$. Tìm x sao cho $\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{BC}$

A. $x=\frac{2}{3}$ **B.** $x=-\frac{2}{3}$ **C.** $x=\frac{3}{2}$ **D.** $x=-\frac{3}{2}$

Lời giải

Đáp án D

Ta có:

$\overrightarrow{AB}=(2;2),\overrightarrow{BC}=(-3;-3)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\Rightarrow x=-\frac{2}{3}$

Câu 33. Cho $\vec{A}=(3;-2),\vec{B}=(-5;4),\vec{C}=\left(\frac{1}{3};0\right)$. Tìm $\vec{x}$ thỏa mãn $\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AC}$.

A. $x=3$ **B.** $x=-3$ **C.** $x=2$ **D.** $x=-4$

Lời giải

$\overrightarrow{AB}=(-8;6);\overrightarrow{AC}=\left(\frac{-8}{3};2\right)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$.

Đáp án A

Câu 34. Vectơ $\vec{a}=(2;-1)$ biểu diễn dưới dạng $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$ được kết quả nào sau đây?

A. $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}$ **B.** $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}$ **C.** $\vec{a}=-2\vec{i}+\vec{j}$ **D.** $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}$

Lời giải

Ta có: $\vec{a}=(2;-1)\Leftrightarrow\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}$

Đáp án A

Câu 35. Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy*, cho ΔABC có $M(2;3),N(0;4),P(-1;6)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh *BC, CA, AB***.** Tìm tọa độ đỉnh ***A*.**

A. $A(1;5)$ **B.** $A(-3;7)$ **C.** $A(-2;-7)$ **D.** $A(1;-10)$

Lời giải

Đáp án B

Gọi $A(x;y)$, ta có: $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=-2 \\ y-6=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=7 \end{cases} \Rightarrow A(-3;7)$

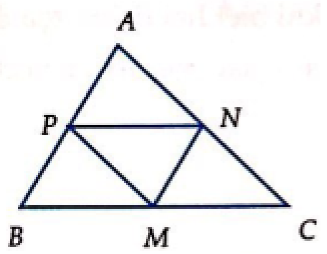
$\Rightarrow \overline{OM_1}=3, \overline{OM_2}=-4, \overline{OM_1}+\overline{OM_2}=2\overline{OI}=(3;-4)$, với I là trung điểm của M_1M_2

Câu 36. Trong hệ tọa độ Oxy, cho $M(2;0);N(2;2);P(-1;3)$ lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB của ΔABC .Tọa độ điểm B là:

A. $B(1;1)$ **B.** $B(-1;-1)$ **C.** $B(-1;1)$ **D.** $B(1;-1)$

Lời giải

Ta có $BPMN$ là hình bình hành nên



$\begin{cases} x_B+x_N=x_P+x_M \\ y_B+y_N=y_P+y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B+2=(-1)+2 \\ y_B+2=3+0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B=-1 \\ y_B=1 \end{cases}$

Đáp án C

Câu 37. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(-1;1), B(1;3), C(5;2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

A. $(3;0)$. **B.** $(5;0)$. **C.** $(7;0)$. **D.** $(5;-2)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $D(x,y)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;2)$, $\overrightarrow{DC}=(5-x;2-y)$.

$ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-x=2 \\ 2-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$.

Vậy $D(3;0)$.

Câu 38. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(-2;3)$, $B(0;4)$, $C(5;-4)$. Tọa độ đỉnh D là

A. $(3;\sqrt{2})$. **B.** $(3;7)$. **C.** $(\sqrt{7};2)$. **D.** $(3;-5)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $D(x;y)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;1)$, $\overrightarrow{DC}=(5-x;-4-y)$

$ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-x=2 \\ -4-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-5 \end{cases}$. Vậy $D(3;-5)$.

Câu 39. Trong mặt phẳng Oxy ;cho hai điểm $A(1;4), B(-4;2)$. Tọa độ giao điểm của đường thẳng đi qua hai điểm A,B với trục hoành là

A. $(-9;0)$. **B.** $(0;9)$. **C.** $(9;0)$. **D.** $(0;-9)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(m;0)$ là giao điểm của đường thẳng AB và trục hoành. Khi đó; A,B,M thẳng hàng.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-5;-2),\overrightarrow{AM}=(m-1;-4)$.

A,B,M thẳng hang $\Leftrightarrow \dfrac{m-1}{-5}=\dfrac{-4}{-2}\Leftrightarrow m=-9$.

Vậy $M(-9;0)$.

Câu 40. Trong hệ tọa độ Oxy, cho 3 điểm $A(2;1);B(0;-3);C(3;1)$. Tìm tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành.

A. $D(5;5)$ **B.** $D(5;-2)$ **C.** $D(5;-4)$ **D.** $D(-1;-4)$

Lời giải

Gọi $D(x;y)$. Ta có: $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2=3\\y-1=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=5\end{cases}\Rightarrow D(5;5)$

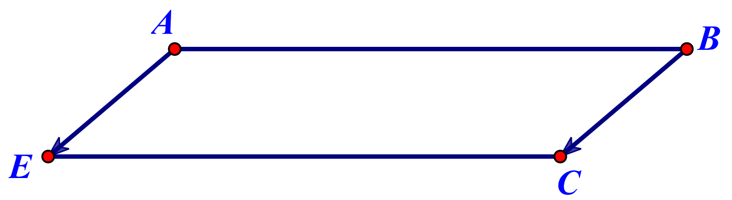
Đáp án A

Câu 41. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $A(2;1),B(-1;2),C(3;0)$. Tứ giác $ABCE$ là hình bình hành khi tọa độ E là cặp số nào sau đây?

A. $(6;-1)$ **B.** $(0;1)$ **C.** $(1;6)$ **D.** $(6;1)$

Lời giải

Chọn A



Gọi $E(x;y)$.

Tứ giác $ABCE$ là hình bình hành $\Leftrightarrow\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2=4\\y-1=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\y=-1\end{cases}$

Vậy $E(6;-1)$.

Câu 42. Trong hệ tọa độ Oxy, cho $A(-3;1),B(1;4),\ C(5;3)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

A. $D(-1;0)$ **B.** $D(1;0)$ **C.** $D(0;-1)$ **D.** $D(0;1)$

Lời giải

Đáp án B

$\overrightarrow{AB}=(4;3),\overrightarrow{DC}=(5-x;3-y)$ với $D(x;y)$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}5-x=4\\3-y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}\Rightarrow D(1;0)$

Câu 43. Trong hệ tọa độ Oxy, cho $A(2;-3),B(3;4)$. Tìm tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho A, B, M thẳng hàng.

A. $M(1;0)$ **B.** $M(4;0)$ **C.** $M\left(-\frac{5}{3};0\right)$ **D.** $M\left(\frac{17}{7};0\right)$

Lời giải

Đáp án D

$M \in Ox \Rightarrow M(x;0), \overrightarrow{AB}=(1;7), \overrightarrow{AM}=(m-2;3)$

Để *A, B, M* thẳng hàng $\Leftrightarrow \frac{m-2}{1}=\frac{3}{7} \Leftrightarrow m=\frac{17}{7}$

Câu 44. Trong hệ tọa độ *Oxy*, cho $A(2;1); B(6;-1)$. Tìm điểm *M* trên *Ox* sao cho *A, B, M* thẳng hàng.

A. $M(2;0)$ **B.** $M(8;0)$ **C.** $M(-4;0)$ **D.** $M(4;0)$

Lời giải

$M \in Ox \Rightarrow M(x;0), \overrightarrow{AB}=(4;-2), \overrightarrow{AM}=(x-2;-1)$

Để *A, B, M* thẳng hàng $\Rightarrow \frac{x-2}{4}=\frac{1}{2} \Rightarrow x=4$

Đáp án D

Bài 2. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

• |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. Biểu thức tọa độ của phép cộng hai vectơ, phép trừ hai vectơ, phép nhân một số với một vectơ

Nếu $\vec{u}=(x_1;y_1)$ và $\vec{v}=(x_2;y_2)$ thì

$\vec{u}+\vec{v}=(x_1+x_2;y_1+y_2)$

$\vec{u}-\vec{v}=(x_1-x_2;y_1-y_2)$

$k\vec{u}=(kx_1;ky_1),k\in\mathbb{R}$.

Nhận xét: Hai vectơ $\vec{u}=(x_1;y_1),\vec{v}=(x_2;y_2)(\vec{v}\neq\vec{0})$ cùng phương khi và chỉ khi có một số thực k sao cho $x_1=kx_2$ và $y_1=ky_2$.

Ví dụ 1. Cho $\vec{u}=(2;-1),\vec{v}=(1;5)$. Tìm tọa độ của mỗi vectơ sau:

a) $\vec{u}+\vec{v}$;

b) $\vec{u}-\vec{v}$.

Giải

Do $\vec{u}=(2;-1),\vec{v}=(1;5)$ nên ta có:

a) $\vec{u}+\vec{v}=(2+1;-1+5)$. Vậy $\vec{u}+\vec{v}=(3;4)$.

b) $\vec{u}-\vec{v}=(2-1;-1-5)$. Vậy $\vec{u}-\vec{v}=(1;-6)$.

Ví dụ 2. Cho $\vec{a}=(-2;3),\vec{b}=(2;1),\vec{c}=(1;2)$. Tính tọa độ của mỗi vectơ sau: $3\vec{a};2\vec{a}-\vec{b};\vec{a}+2\vec{b}-\frac{3}{2}\vec{c}$.

Giải

Do $\vec{a}=(-2;3),\vec{b}=(2;1),\vec{c}=(1;2)$ nên ta có:

+) $3\vec{a}=(3\cdot(-2);3.3)$. Vậy $3\vec{a}=(-6;9)$.

+) $2\vec{a}=(-4;6)$.

Do đó $2\vec{a}-\vec{b}=(-4-2;6-1)$, vì vậy $2\vec{a}-\vec{b}=(-6;5)$.

+) $2\vec{b}=(4;2),\vec{a}+2\vec{b}=(2;5)$ và $-\frac{3}{2}\vec{c}=\left(-\frac{3}{2};-3\right)$.

Do đó $\vec{a}+2\vec{b}-\frac{3}{2}\vec{c}=\left(\frac{1}{2};2\right)$.

Ví dụ 3. Cho ba điểm $A(-1;-3),B(2;3)$ và $C(3;5)$. Chứng minh ba điểm A,B,C thẳng hàng.

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(3;6),\overrightarrow{BC}=(1;2)$. Suy ra $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{BC}$. Vậy ba điểm A,B,C thẳng hàng.

II. Tọa độ trung điểm đoạn thẳng và tọa độ trọng tâm tam giác

Cho hai điểm $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$. Nếu $M(x_M;y_M)$ là trung điểm đoạn thẳng AB thì

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2};y_M=\frac{y_A+y_B}{2}.$$

Cho tam giác ABC có $A(x_A;y_A),B(x_B;y_B),C(x_C;y_C)$. Nếu $G(x_G;y_G)$ là trọng tâm tam giác ABC thì

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3};y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}.$$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có $A(-2;1),B(2;5),C(5;2)$. Tìm toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB và trọng tâm G của tam giác ABC.

Giải

Do $M(x_M;y_M)$ là trung điểm đoạn thẳng AB nên

$x_M = \frac{-2+2}{2} = 0; y_M = \frac{1+5}{2} = 3.$

Vậy $M(0;3)$.

Do $G(x_G; y_G)$ là trọng tâm tam giác ABC nên $x_G = \frac{(-2)+2+5}{3}; y_G = \frac{1+5+2}{3}$. Vậy $G\left(\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

III. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Nếu $\vec{u} = (x_1; y_1)$ và $\vec{v} = (x_2; y_2)$ thì $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2$.

Nhận xét

a) Nếu $\vec{a} = (x; y)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

b) Nếu $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ thì $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

c) Với hai vectơ $\vec{u} = (x_1; y_1)$ và $\vec{v} = (x_2; y_2)$ khác $\vec{0}$, ta có:

- $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

$\cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$.

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;2), B(1;-1), C(8;0)$.

a) Tính $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ và $\cos\widehat{ABC}$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

c) Giải tam giác ABC.

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{BA} = (1;3), \overrightarrow{BC} = (7;1)$. Do đó $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \cdot 7 + 3 \cdot 1 = 10$.

Mặt khác, ta cũng có:

$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}, |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50},$

$\cos\widehat{ABC} = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{10}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{50}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$

b) Do $\overrightarrow{AB} = (-1;-3)$ và $\overrightarrow{AC} = (6;-2)$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1) \cdot 6 + (-3) \cdot (-2) = 0$. Vậy $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

c) Do $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ nên $\widehat{BAC} = 90^\circ$, tức là tam giác ABC vuông tại A. Mà $\cos\widehat{ABC} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ nên $\widehat{ABC} \approx 63^\circ$.

Vì thế $\widehat{ACB} \approx 90^\circ - 63^\circ = 27^\circ$.

Mặt khác, ta có: $AB = |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{10}$,

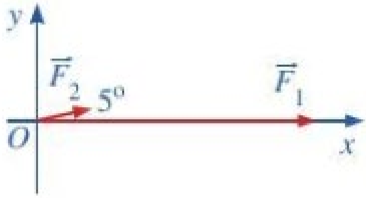
$BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}, CA = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 - (\sqrt{10})^2} = 2\sqrt{10}$

Ví dụ 6. Một chiếc xe ô tô con bị mắc kẹt trong bùn lầy. Để kéo xe ra, người ta dùng xe tải kéo bằng cách gắn một đầu dây cáp kéo xe vào đầu xe ô tô con và móc đầu còn lại vào phía sau của xe tải kéo. Khi kéo, xe tải tạo ra một lực $\overrightarrow{F_1}$ có độ lớn (cường độ) là $2000\,N$ theo phương ngang lên xe ô tô con.

Ngoài ra, có thêm một người đẩy phía sau xe ô tô con, tạo ra lực $\overrightarrow{F_2}$ có độ lớn là $300\,N$ lên xe. Các lực này được biểu diễn bằng vectơ như hình sao cho $\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}\right) = 5^\circ$. Độ lớn lực tổng hợp tác động lên xe ô tô con là bao nhiêu Newton (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Giải

Chọn hệ trục toạ độ Oxy như hình bên, mỗi đơn vị trên trục ứng với $1N$.



Ta có:

- $\vec{F_1} = (2000;0)$;
- $\left(\vec{F_1}, \vec{F_2}\right) = 5^\circ$ nên toạ độ của $\vec{F_2}$ là:

$\vec{F_2} = \left(300 \cdot \cos 5^\circ; 300 \cdot \sin 5^\circ\right)$.

Do đó, lực $\vec{F}$ tổng hợp các lực tác động lên xe ô tô con có toạ độ là:
$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = \left(2000 + 300 \cdot \cos 5^\circ; 300 \cdot \sin 5^\circ\right)$.

Độ lớn lực tổng hợp $\vec{F}$ tác động lên xe ô tô con là:
$|\vec{F}| = \sqrt{\left(2000 + 300 \cdot \cos 5^\circ\right)^2 + \left(300 \cdot \sin 5^\circ\right)^2} \approx 2299(N)$.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1. TRỤC TỌA ĐỘ

Câu 1. Trên trục $x'Ox$ cho 2 điểm *A, B* có tọa độ lần lượt là -2 và 5.

a) Tìm tọa độ của $\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm tọa độ trung điểm *I* của đoạn thẳng ***AB*.**

c) Tìm tọa độ của điểm *M* sao cho $2\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

d) Tìm tọa độ điểm *N* sao cho $2\overline{NA} + 3\overline{NB} = -1$.

Câu 2. Trên trục $x'Ox$ cho 2 điểm *A, B* có tọa độ lần lượt là -3 và 1.

a) Tìm tọa độ của điểm *M* sao cho $3\overline{MA} - 2\overline{MB} = 1$.

Tìm tọa độ điểm *N* sao cho $\overline{NA} + 3\overline{NB} = \overline{AB}$.

Câu 3. Trên trục $x'Ox$ cho 4 điểm $A(-2), B(2), C(1), D(6)$.

a) Chứng minh rằng $\dfrac{1}{\overline{AC}} + \dfrac{1}{\overline{AD}} = \dfrac{2}{\overline{AB}}$.

b) Gọi *I* là trung điểm của đoạn AB. Chứng minh rằng $\overline{IC}.\overline{ID} = \overline{IA}^2$.

Gọi *J* là trung điểm của *CD*. Chứng minh rằng $\overline{AC}.\overline{AD} = \overline{AB}.\overline{AJ}$.

Câu 4. Trên trục $x'Ox$ cho 3 điểm *A, B, C* có tọa độ lần lượt là *a, b, c*.

a) Tìm tọa độ trung điểm *I* của *AB***.**

b) Tìm tọa độ điểm *M* sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

c) Tìm tọa độ điểm *N* sao cho $2\overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{NC}$.

Câu 5. Trên trục $x'Ox$ cho 4 điểm *A, B, C, D* tùy ý.

a) Chứng minh rằng: $\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AC}.\overline{DB} + \overline{DA}.\overline{BC} = 0$.

b) Gọi *I, J, K, L* lần lượt là trung điểm của các đoạn *AC, BD, AB, CD***.** Chứng minh rằng các đoạn *IJ và KL* có chung trung điểm.

DẠNG 2. TỌA ĐỘ VÉC TƠ

Câu 6. Cho $\vec{a} = (1; -2)$; $\vec{b} = (0;3)$ tìm tọa độ của các vectơ sau:

a) $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}$; $\vec{y}=\vec{a}-\vec{b}$; $\vec{z}=2\vec{a}-3\vec{b}$.

b) $\vec{u}=3\vec{a}-2\vec{b}$; $\vec{v}=2+\vec{b}$; $\vec{w}=4\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$.

Câu 7. Cho $\vec{a}=(2;0)$; $\vec{b}=\left(-1;\frac{1}{2}\right)$; $\vec{c}=(4;-6)$.

a) Tìm tọa độ của vectơ $\vec{d}=2\vec{a}-3\vec{b}+5\vec{c}$.

b) Tìm 2 số *m, n* sao cho $m\vec{a}+\vec{b}-n\vec{c}=\vec{0}$.

c) Biểu diễn vectơ $\vec{c}$ theo $\vec{a},\vec{b}$.

DẠNG 3. TỌA ĐỘ ĐIỂM

Câu 8. Cho hai điểm $A(3;-5), B(1;0)$.

a) Tìm tọa độ điểm C sao cho: $\overrightarrow{OC}=-3\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm điểm D đối xứng với A qua C.

c) Tìm điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k=-3$.

Câu 9. Cho ba điểm $A(-1;1), B(1;3), C(-2;0)$.

a) Chứng minh ba điểm A,B,C thẳng hàng.

b) Tìm các tỉ số mà điểm A chia đoạn BC, điểm B chia đoạn AC, điểm C chia đoạn AB.

Câu 10. Cho ba điểm $A(1;-2), B(0;4), C(3;2)$.

a) Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$.

b) Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.

c) Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$.

d) Tìm tọa độ điểm N sao cho $\overrightarrow{AN}+2\overrightarrow{BN}-4\overrightarrow{CN}=\vec{0}$.

Câu 11. Cho ba điểm $A(-1;1), B(2;1), C(-1;-3)$.

a) CMR: Tồn tại tam giác ABC.

b) Tính chu vi tam giác.

c) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

d) Xác định điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

e) Tìm điểm M thuộc trục Ox sao cho M cách đều A, B.

f) Tìm điểm N thuộc trục Oy sao cho N cách đều B, C.

Câu 12. Cho tam giác ABC có $A(4;1), B(2;4), C(2;-2)$.

a) Tính chu vi tam giác.

b) Xác định điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

c) Xác định tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

d) Xác định tọa độ trực tâm H của tam giác.

e) Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Câu 13. Cho $A(1;3), B(2;5)$ và $C(4;-1)$.

a) Tìm chu vi của tam giác ABC.

b) Tìm tọa độ trung điểm của các đoạn thẳng AB, AC.

c) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

d) Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

e) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác.

f) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

DẠNG 4. ỨNG DỤNG

Câu 14. Trong mặt phẳng Oxy cho $A(1;1), B(2;4), C(10;-2)$

a). Chứng minh rằng ABC là tam giác vuông.

b). Tính $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ suy ra cosB

Câu 15. Cho ba điểm $A\left(4\sqrt{3};-1\right)$, $B(0;3)$, $C\left(8\sqrt{3};3\right)$.

a) Tìm đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCD$.

b) Tìm $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$

Câu 16. Cho $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$ và $\vec{v} = k\vec{i} - 4\vec{j}$. Tìm k để

a) $\vec{u} \perp \vec{v}$ b) $\left|\vec{u}\right| = \left|\vec{v}\right|$

Câu 17. Cho các véc-tơ $\vec{a} = (-2;3)$, $\vec{b} = (4;1)$.

a) Tìm các số k và m sao cho $\vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b}$ vuông góc với véc-tơ $\vec{a} + \vec{b}$.

b) Tìm véc-tơ $\vec{d}$ biết $\vec{a}.\vec{d} = 4$ và $\vec{b}.\vec{d} = -2$.

Câu 18. Tính góc giữa hai véc-tơ và $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong các trường hợp sau

a) $\vec{a} = (1;-2)$, $\vec{b} = (-2;-6)$

b) $\vec{a} = (-3;4)$, $\vec{b} = (4;3)$.

c) $\vec{a} = (2;5)$, $\vec{b} = (3;-7)$.

Câu 19. Cho $\vec{u} = (4;1)$ và $\vec{v} = (1;4)$.

a) Tìm m để $\vec{a} = \vec{u} + m.\vec{v}$ vuông góc với trục hoành.

b) Tìm n để $\vec{b} = n.\vec{u} + \vec{v}$ tạo với véc-tơ $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j}$ một góc 45°.

Câu 20. Cho các điểm $A\left(4\sqrt{3};-1\right)$, $B(0;3)$, $C\left(8\sqrt{3};3\right)$.

a) Tính các cạnh của tam giác ABC.

b) Tính các góc của tam giác ABC.

Câu 21. Cho tam giác ABC có ba đỉnh $A(-3;0)$, $B(3;0)$, $C(2;6)$. Tìm tọa độ trọng tâm G và trực tâm H của tam giác.

Câu 22. Cho điểm $A(1;1)$, $B(2;4)$ và $C(10;-2)$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông tại A.

b) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ và tính $\cos B$, $\cos C$.

Câu 23. Cho hai điểm $A(2;4)$ và $B(1;1)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho tam giác ABC là tam giác vuông cân tại B.

Câu 24. Cho bốn điểm $A(7;-3)$, $B(8;4)$, $C(1;5)$, $D(0;-2)$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

Câu 25. Biết $A(1;-1)$ và $B(3;0)$ là hai đỉnh của hình vuông $ABCD$. Tìm tọa độ các đỉnh C và D.

Câu 26. Cho tam giác ABC với $A(2;4)$, $B(-3;1)$, $C(3;-1)$.

a) Tìm điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

b) Tìm chân A' của đường cao vẽ từ đỉnh A của tam giác ABC.

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trên trục $x'Ox$ cho 2 điểm *A, B* lần lượt có tọa độ là *a, b. M* là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}, k \neq 1$. Khi đó tọa độ của điểm *M* là:

A. $\frac{ka-b}{k-1}$ **B.** $\frac{kb-a}{k-1}$ **C.** $\frac{a-kb}{k+1}$ **D.** $\frac{kb+a}{k-1}$

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$ và $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j}$. Tính tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$

A. $\vec{a}.\vec{b} = -30$. **B.** $\vec{a}.\vec{b} = 3$. **C.** $\vec{a}.\vec{b} = 30$. **D.** $\vec{a}.\vec{b} = 43$.

Câu 3. Trên trục $(O;\vec{i})$ cho ba điểm *A, B,* **C.** Nếu biết $\overline{AB} = 5, \overline{AC} = 7$ thì $\overline{CB}$ bằng:

A. -2 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 3

Câu 4. Tên trục $(O;\vec{i})$ cho hai điểm *A, B* lần lượt có tọa độ 1 và 5. Khi đó tọa độ điểm *M* thỏa mãn $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ là:

A. 10 **B.** 11 **C.** 12 **D.** 13

Câu 5. Trên trục $x'Ox$ có vectơ đơn vị $\vec{i}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. x_A là tọa độ điểm $A \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = x_A.\vec{i}$

B. x_B, x_C là tọa độ của điểm *B* và *C* thì $\overline{BC} = x_B - x_C$

C. $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$

D. *M* là trung điểm của *AB* $\Leftrightarrow \overline{OM} = \frac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2}$

Câu 6. Trên trục $x'Ox$, cho tọa độ của *A, B* lần lượt là $-2;3$. Khi đó tọa độ điểm *M* thỏa mãn: $OM^2 = \overline{MA}.\overline{MB}$ là:

A. 6 **B.** $\sqrt{6}$ **C.** -6 **D.** 4

Câu 7. Trên trục $(O;\vec{i})$ tìm tọa độ *x* của điểm *M* sao cho $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$, với *A, C* có tọa độ tương ứng là -1 và 3

A. $x = \frac{5}{3}$ **B.** $x = \frac{2}{3}$ **C.** $x = \frac{2}{5}$ **D.** $x = \frac{5}{2}$

Câu 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{u} = (3;4)$ và $\vec{v} = (-8;6)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $|\vec{u}| = |\vec{v}|$. **B.** $M\left(0;-\frac{1}{2}\right)$. và $\vec{v}$ cùng phương.

C. $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$. **D.** $\vec{u} = -\vec{v}$.

Câu 9. Trong mp Oxy cho $A(4;6)$, $B(1;4)$, $C\left(7;\frac{3}{2}\right)$. Khảng định nào sau đây sai

A. $\overrightarrow{AB} = (-3;-2)$, $\overrightarrow{AC} = \left(3;-\frac{9}{2}\right)$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$.

C. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{13}$. **D.** $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

Câu 10. Cho các vectơ $\vec{a} = (1;-2)$, $\vec{b} = (-2;-6)$. Khi đó góc giữa chúng là

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 135°.

Câu 11. Cho $\overrightarrow{OM} = (-2;-1)$, $\overrightarrow{ON} = (3;-1)$. Tính góc của $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right)$

A. 135°. **B.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** -135°. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 12. Trong mặt phẳng Oxy cho $\vec{a} = (1;3)$, $\vec{b} = (-2;1)$. Tích vô hướng của 2 vectơ $\vec{a}.\vec{b}$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 13. Cặp vectơ nào sau đây vuông góc?

A. $\vec{a} = (2;-1)$ và $\vec{b} = (-3;4)$. **B.** $\vec{a} = (3;-4)$ và $\vec{b} = (-3;4)$.

C. $\vec{a} = (-2;-3)$ và $\vec{b} = (-6;4)$. **D.** $\vec{a} = (7;-3)$ và $\vec{b} = (3;-7)$.

Câu 14. Cho 2 vec tơ $\vec{a} = (a_1;a_2)$, $\vec{b} = (b_1;b_2)$, tìm biểu thức sai:

A. $\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2$. **B.** $\vec{a}.\vec{b} = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

C. $\vec{a}.\vec{b} = \dfrac{1}{2}\left[\overrightarrow{a^2} + \overrightarrow{b^2} - \left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2\right]$. **D.** $\vec{a}.\vec{b} = \dfrac{1}{2}\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2 - \overrightarrow{a^2} - \overrightarrow{b^2}\right]$.

Câu 15. Cho tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(-1;1)$, $C(5;-1)$.Tính $\cos A$

A. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{-1}{\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{-2}{\sqrt{5}}$.

Câu 16. Trong mặt phẳng $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ cho 2 vectơ : $\vec{a} = 3\vec{i} + 6\vec{j}$ và $\vec{b} = 8\vec{i} - 4\vec{j}$. Kết luận nào sau đây sai?

A. $\vec{a}.\vec{b} = 0$. **B.** $\vec{a} \perp \vec{b}$. **C.** $\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right| = 0$. **D.** $\left|\vec{a}.\vec{b}\right| = 0$.

Câu 17. Trong mặt phẳng Oxy cho $A(1;2)$, $B(4;1)$, $C(5;4)$. Tính $\widehat{BAC}$?

A. 60°. **B.** 45°. **C.** 90°. **D.** 120°.

Câu 18. Cho các vectơ $\vec{a} = (1;-3)$, $\vec{b} = (2;5)$. Tính tích vô hướng của $\vec{a}\left(\vec{a} + 2\vec{b}\right)$

A. 16. **B.** 26. **C.** 36. **D.** -16.

Câu 19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba vectơ $\vec{a} = (-2;3)$, $\vec{b} = (4;1)$ và $\vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b}$ với k, $m \in \mathbb{R}$. Biết rằng vectơ $\vec{c}$ vuông góc với vectơ $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2k = 2m$ **B.** $3k = 2m$ **C.** $2k + 3m = 0$ **D.** $3k + 2m = 0$.

Câu 20. Trên trục $\left(O;\vec{i}\right)$ cho 4 điểm *A, B, C, D* có tọa độ lần lượt là *a, b, c, d*. Gọi *E, F, G, H* (có tọa độ lần lượt là *e, f, g, h*) theo thứ tự là trung điểm của *AB, BC*, *CD, DA.* Xét các mệnh đề:

I. $e + f + g + h = a + b + c + d$

II. $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}$

III. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$

Trong các mệnh đề trên mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ I **B.** II và III **C.** I, II, III **D.** Chỉ III

Câu 21. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{a} = (2;-1)$ và $\vec{b} = (-3;4)$. Khẳng định nào sau đây là **sai?**

A. Tích vô hướng của hai vectơ đã cho là -10. **B.** Độ lớn của vectơ $\vec{a}$ là $\sqrt{5}$.

C. Độ lớn của vectơ $\vec{b}$ là 5. **D.** Góc giữa hai vectơ là 90°.

Câu 22. Cho tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(-1;1)$, $C(5;-1)$.Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

A. 7. **B.** 5. **C.** -7. **D.** -5.

Câu 23. Trong mặt phẳng Oxy cho $A(-1;1)$, $B(1;3)$, $C(1;-1)$. Khẳng định nào sau đây đúng.

A. $\overrightarrow{AB}=(4;2)$, $\overrightarrow{BC}=(2;-4)$. **B.** $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$.

C. Tam giác ABC vuông cân tại A. **D.** Tam giác ABC vuông cân tại B.

Câu 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(3;-1)$, $B(2;10)$, $C(-4;2)$ Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=40$ **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-40$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=26$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-26$

Câu 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(3;-1)$ và $B(2;10)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}$

A. $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=-4$. **B.** $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=0$. **C.** $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=4$. **D.** $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=16$.

Câu 26. Trên trục (Δ) cho bốn điểm *A, B, C, D* bất kì. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $\overline{AB}.\overline{CD}+\overline{AC}.\overline{DB}+\overline{AD}.\overline{BC}=0$ **B.** $\overline{AB}.\overline{DB}+\overline{AC}.\overline{BC}+\overline{AD}.\overline{CD}=0$

C. $\overline{AB}.\overline{AC}+\overline{AD}.\overline{BC}+\overline{BC}.\overline{CD}=0$ **D.** $\overline{BD}.\overline{BC}+\overline{AD}.\overline{AC}+\overline{CB}.\overline{CA}=0$

Câu 27. Trên trục $(O;\vec{i})$ cho ba điểm *A, B, C* có tọa độ lần lượt là $-5;2;4$. Khi đó tọa độ điểm *M* thảo mãn $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ là:

A. $\dfrac{10}{3}$ **B.** $\dfrac{10}{9}$ **C.** $\dfrac{5}{3}$ **D.** $\dfrac{5}{4}$

Câu 28. Trên trục $x'Ox$ cho tọa độ các điểm *B, C* lần lượt là $m-2$ và m^2+3m+2. Tìm *m* để đoạn thẳng *BC* có độ dài nhỏ nhất.

A. $m=2$ **B.** $m=1$ **C.** $m=-1$ **D.** $m=-2$

Câu 29. Trên trục $x'Ox$ cho 4 điểm *A, B, C,* ***D.*** Gọi *I, J, K, L* lần lượt là trung điểm của *AC, DB, AD,* ***BC.*** Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{IJ}$ **B.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{KI}$

C. Trung điểm các đoạn *IJ* và *KL* trùng nhau **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{IK}$

Câu 30. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(-3;2)$ và $\vec{b}=(-1;-7)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{c}$ biết $\vec{c}.\vec{a}=9$ và $\vec{c}.\vec{b}=-20$

A. $\vec{c}=(-1;-3)$ **B.** $\vec{c}=(-1;3)$ **C.** $\vec{c}=(1;-3)$ **D.** $\vec{c}=(1;3)$

Câu 31. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba vectơ $\vec{a}=(1;2)$, $\vec{b}=(4;3)$ và $\vec{c}=(2;3)$.

Tính $P=\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})$.

A. $P=0$ **B.** $P=18$ **C.** $P=20$ **D.** $P=28$

Câu 32. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(-2;-1)$ và $\vec{b}=(4;-3)$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

A. $\cos(\vec{a},\vec{b})=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ **B.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ **C.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{1}{2}$

Câu 33. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;2)$ và $B(-3;1)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục tung sao cho tam giác ABC vuông tại A.

A. $C(0;6)$. **B.** $C(5;0)$. **C.** $C(3;1)$. **D.** $C(0;-6)$.

Câu 34. Tìm x để hai vectơ $\vec{a}=(x;2)$ và $\vec{b}=(2;-3)$ có giá vuông góc với nhau.

A. 3. **B.** 0. **C.** -3. **D.** 2.

Câu 35. Cho tam giác ABC có $A(-1;2),B(0;3),C(5;-2)$. Tìm tọa độ chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC.

A. $(0;3)$. **B.** $(0;-3)$. **C.** $(3;0)$. **D.** $(-3;0)$.

Câu 36. Trên trục $x'Ox$ cho 4 điểm $A, B, C,$ ***D.*** Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $\overline{DA}^2.\overline{BC}+\overline{DB}^2.\overline{CA}+\overline{DC}^2.\overline{AB}+\overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB}=0$

B. $\overline{DA}^2.\overline{BC}+\overline{DB}^2.\overline{CA}+\overline{DC}^2.\overline{AB}=0$

C. $\overline{AB}^2.\overline{BC}+\overline{CD}^2.\overline{DB}+\overline{DB}^2.\overline{CA}=0$

D. $\overline{DA}.\overline{BC}+\overline{DB}.\overline{CA}+\overline{CD}.\overline{AB}+\overline{BC}.\overline{AB}=0$

Câu 37. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{u}=(1;2)$ và $\vec{v}=(4m;2m-2)$. Tìm m để vectơ $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

A. $m=\frac{1}{2}$. **B.** $m=-\frac{1}{2}$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

Câu 38. Xác định tọa độ của vectơ $\vec{c}=\vec{a}+3\vec{b}$ biết $\vec{a}=(2;-1),\vec{b}=(3;4)$

A. $\vec{c}=(11;11)$ **B.** $\vec{c}=(11;-13)$ **C.** $\vec{c}=(11;13)$ **D.** $\vec{c}=(7;13)$

Câu 39. Cho $\vec{a}=(2;1),\vec{b}=(3;4),\vec{c}=(-7;2)$. Tìm vectơ $\vec{x}$ sao cho $\vec{x}-2\vec{a}=\vec{b}-3\vec{c}$.

A. $\vec{x}=(28;2)$ **B.** $\vec{x}=(13;5)$ **C.** $\vec{x}=(16;4)$ **D.** $\vec{x}=(28;0)$

Câu 40. Xác định tọa độ vectơ $\vec{c}=5\vec{a}-2\vec{b}$ biết $\vec{a}=(3;-2),\vec{b}=(1;4)$

A. $\vec{c}=(2;-11)$ **B.** $\vec{c}=(-2;11)$ **C.** $\vec{c}=(2;11)$ **D.** $\vec{c}=(11;2)$

Câu 41. Cho $\vec{a}=(3;-1),\vec{b}=(0;4),\vec{c}=(5;3)$. Tìm vectơ $\vec{x}$ sao cho $\vec{x}-\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}=\vec{0}$.

A. $(18;0)$ **B.** $(-8;18)$ **C.** $(8;18)$ **D.** $(8;-18)$

Câu 42. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $(O;\vec{i},\vec{j})$, cho hai vectơ $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}$ và $\vec{b}=(-4;2)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng. **B.** $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

C. $\vec{a}=(-1;2)$. **D.** $\vec{a}=(2;1)$.

Câu 43. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $B(-1;3)$ và $C(3;1)$. Tìm tọa độ điểm A sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

A. $A(0;0)$ hoặc $A(2;-4)$. **B.** $A(0;0)$ hoặc $A(2;4)$.

C. $A(0;0)$ hoặc $A(-2;-4)$. **D.** $A(0;0)$ hoặc $A(-2;4)$.

Câu 44. Cho véc tơ $\vec{a}(1;-2)$. Với giá trị nào của y thì véc tơ $\vec{b}=(3;y)$ tạo với véctơ $\vec{a}$ một góc 45°

A. $y=-9$. **B.** $\left[\begin{array}{l}y=-1\\y=9\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}y=1\\y=-9\end{array}\right.$. **D.** $y=-1$.

Câu 45. Cho hai vecto $\vec{a}$, $\vec{b}$ sao cho $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=2$ và hai véc tơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $120°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $30°$.

Câu 46. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $\vec{a}=(2;1)$, $\vec{b}=(3;4)$, $\vec{c}=(7;2)$. Cho biết $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ khi đó.

A. $m=\frac{22}{5}$; $n=\frac{3}{5}$. **B.** $m=-\frac{22}{5}$; $n=-\frac{3}{5}$. **C.** $m=\frac{1}{5}$; $n=\frac{-3}{5}$. **D.** $m=\frac{22}{5}$; $n=\frac{-3}{5}$.

Câu 47. Trong mặt phẳng Oxy, cho các điểm $A(4;2), B(-2;1), C(0;3), M(-3;7)$. Giả sử $\overrightarrow{AM}=x.\overrightarrow{AB}+y.\overrightarrow{AC}\,(x,y\in\mathbb{R})$. Khi đó $x+y$ bằng

A. $\frac{12}{5}$. **B.** 5. **C.** $-\frac{12}{5}$. **D.** -5.

Câu 48. Trong mặt phẳng Oxy ;cho các véc tơ $\vec{a}=(2;-1);\vec{b}=(0;4)$ và $\vec{c}=(3;3)$. Gọi m và n là hai số thực sao cho $\vec{c}=m\vec{a}-n\vec{b}$. Tính giá trị biểu thức $P=m^2+n^2$.

A. $P=\frac{225}{64}$. **B.** $P=\frac{100}{81}$. **C.** $P=\frac{97}{64}$. **D.** $P=\frac{193}{64}$.

Câu 49. Cho $\vec{a}=(2;\,1)$, $\vec{b}=(-3;\,4)$, $\vec{c}=(-4;\,9)$. Hai số thực m, n thỏa mãn $m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{c}$. Tính m^2+n^2?

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 50. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{a}=(2;1);\vec{b}=(3;4);\vec{c}(7;2)$. Tìm m, n để $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$.

A. $m=-\frac{22}{5}, n=-\frac{3}{5}$ **B.** $m=\frac{1}{5}, n=-\frac{3}{5}$ **C.** $m=\frac{22}{5}, n=-\frac{3}{5}$ **D.** $m=\frac{22}{5}, n=\frac{3}{5}$

Câu 51. Cho các vectơ $\vec{a}=(4;-2), \vec{b}=(-1;-1)$, $\vec{c}=(2;5)$ Phân tích vectơ $\vec{a}$ và $\vec{c}$ ta được:

A. $\vec{b}=-\frac{1}{8}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{c}$ **B.** $\vec{b}=\frac{1}{8}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{c}$ **C.** $\vec{b}=-\frac{1}{8}\vec{a}-4\vec{c}$ **D.** $\vec{b}=-\frac{1}{8}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{c}$

Câu 52. Cho vectơ $\vec{a}=(2;1), \vec{b}=(3;4)$, $\vec{c}=(7;2)$. Khi đó $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{c}$. Tính tổng $m+n$ bằng:

A. 5 **B.** $3{,}8$ **C.** -5 **D.** $-3{,}8$

Câu 53. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho 4 điểm $A(1;-2), B(0;3), C(-3;4), D(-1;8)$. Phân tích $\overrightarrow{CD}$ qua $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ **C.** $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ **D.** $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Câu 54. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC biết $A(2;-3), B(4;7), C(1;5)$. Tọa độ trọng tâm G của ΔABC là

A. $(7;15)$. **B.** $\left(\frac{7}{3};5\right)$. **C.** $(7;9)$. **D.** $\left(\frac{7}{3};3\right)$.

Câu 55. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(2;-3), B(4;7)$. Tìm tọa độ trung điểm I của AB.

A. $(3;2)$. **B.** $(2;10)$. **C.** $(6;4)$. **D.** $(8;-21)$.

Câu 56. Cho ΔABC có $A(4;9)$, $B(3;7)$, $C(x-1;y)$. Để $G(x;y+6)$ là trọng tâm ΔABC thì giá trị x và y là

A. $x=3,\ y=1$. **B.** $x=-3,\ y=-1$. **C.** $x=-3,\ y=1$. **D.** $x=3,\ y=-1$.

Câu 57. Trong hệ tọa độ *Oxy*, cho $A(2;-3);B(4;7)$. Tìm tọa độ trung điểm *I* của đoạn ***AB.***

A. $I(6;4)$ **B.** $I(2;10)$ **C.** $I(3;2)$ **D.** $I(8;-21)$

Câu 58. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;1)$, $B(-1;-2)$, $C(-3;2)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

A. $G\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$. **B.** $G\left(-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$. **C.** $G\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. **D.** $G\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Câu 59. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có ba đỉnh $A(-1;2)$, $B(2;0)$, $C(-3;1)$. Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC là

A. $G\left(-\frac{2}{3};1\right)$. **B.** $G\left(\frac{2}{3};-1\right)$. **C.** $G\left(-\frac{4}{3};1\right)$. **D.** $G\left(\frac{4}{3};-1\right)$.

Câu 60. Trong hệ tọa độ *Oxy*, cho $A(-4;1);B(2;4);C(2;-2)$. Tìm tọa độ điểm *D* sao cho C là trọng tâm ΔABD

A. $D(8;11)$ **B.** $D(12;11)$ **C.** $D(8;-11)$ **D.** $D(-8;-11)$

Câu 61. Trong hệ tọa độ *Oxy*, cho ΔABC có $A(3;5)$, $B(1;2), C(5;2)$. Tìm tọa độ trọng tâm *G* của tam giác.

A. $G(-3;4)$ **B.** $G(4;0)$ **C.** $G(2;3)$ **D.** $G(3;3)$

Câu 62. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho bốn điểm $A(3;-5), B(-3;3), C(-1;-2), D(5;-10)$. Hỏi $G\left(\frac{1}{3};-3\right)$ là trọng tâm của tam giác nào dưới đây?

A. ABC. **B.** BCD. **C.** ACD. **D.** ABD.

Câu 63. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $D(3;4), E(6;1), F(7;3)$ lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CA .Tính tổng tung độ ba đỉnh của tam giác ABC.

A. $\frac{16}{3}$. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** 8. **D.** 16.

Câu 64. Cho tam giác ABC. Biết trung điểm của các cạnh BC, CA, AB có tọa độ lần lượt là $M(1;-1)$, $N(3;2)$, $P(0;-5)$. Khi đó tọa độ của điểm A là:

A. $(2;-2)$. **B.** $(5;1)$. **C.** $(\sqrt{5};0)$. **D.** $(2;\sqrt{2})$.

Câu 65. Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho ΔMNP có $M(1;-1);N(5;-3)$ và *P* thuộc trục *Oy*. Trọng tâm *G* của tam giác nằm trên trục *Ox*. Tọa độ của điểm *P* là:

A. $P(0;4)$ **B.** $P(2;0)$ **C.** $P(2;4)$ **D.** $P(0;2)$

Câu 66. Trong hệ tọa độ *Oxy*, cho $M(3;-4)$. Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của *M* trên *Ox*, *Oy*. Khẳng định nào đúng?

A. $\overline{OM_1} = -3$ **B.** $\overline{OM_2} = 4$

C. $\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2} = (-3;4)$ **D.** $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = (3;-4)$

Câu 67. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác MNP có $M(1;\ -1)$, $N(5;\ -3)$ và P là điểm thuộc trục Oy, trọng tâm G của tam giác MNP nằm trên trục Ox. Tọa độ điểm P là

A. $(2;\ 4)$. **B.** $(0;\ 4)$. **C.** $(0;\ 2)$. **D.** $(2;\ 0)$.

Câu 68. Trên mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai điểm $A(1;1), B(2;4)$. Tìm tọa độ điểm M để tứ giác $OBMA$ là một hình bình hành.

A. $M(-3;-3)$. **B.** $M(3;-3)$. **C.** $M(3;3)$. **D.** $M(-3;3)$.

Câu 69. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(2;5), B(1;1), C(3;3)$, một điểm E thỏa mãn $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$. Tọa độ của E là

A. $(-3;3)$. **B.** $(-3;-3)$. **C.** $(3;-3)$. **D.** $(-2;-3)$.

Câu 70. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có trọng tâm $G\left(\frac{2}{3};\ 0\right)$, biết $M(1;-1)$ là trung điểm của cạnh BC. Tọa độ đỉnh A là

A. $(2;\ 0)$. **B.** $(-2;\ 0)$. **C.** $(0;-2)$. **D.** $(0;\ 2)$.

Câu 71. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(2;3)$, $B(-2;1)$. Điểm C thuộc tia Ox sao cho tam giác ABC vuông tại C có tọa độ là:

A. $C(3;0)$. **B.** $C(-3;0)$. **C.** $C(-1;0)$. **D.** $C(2;0)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có : $C \in Ox \Rightarrow C(x;0)$. Khi đó : $\overrightarrow{AC} = (x-2;-3)$; $\overrightarrow{BC} = (x+2;-1)$.

Tam giác ABC vuông tại $C \Rightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Vậy $C(-1;0)$ hoặc $C(1;0)$.

~!Câu 72. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(3;3)$, $B(-1;-9)$, $C(5;-1)$. Gọi I là trung điểm của AB. Tìm tọa độ M sao cho $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CI}$.

A. $(5;4)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-6;-1)$. **D.** $(2;1)$.

Câu 73. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho ΔABC có $A(-3;3), B(1;4), C(2;-5)$. Tọa độ điểm M thỏa mãn $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{CM}$ là:

A. $M\left(\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right)$ **B.** $M\left(-\frac{1}{6};-\frac{5}{6}\right)$ **C.** $M\left(\frac{1}{6};-\frac{5}{6}\right)$ **D.** $M\left(\frac{5}{6};-\frac{1}{6}\right)$

Câu 74. Trong hệ tọa độ Oxy, cho $A(2;1), B(1;-3)$. Tìm tọa độ giao điểm I của hai đường chéo hình bình hành $OABC$.

A. $I\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ **B.** $I\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$ **C.** $I(2;6)$ **D.** $I\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$

Câu 75. Trong hệ tọa độ Oxy, cho $A(1;3), B(4;0)$. Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

A. $M(1;18)$ **B.** $M(-1;18)$ **C.** $M(-18;1)$ **D.** $M(1;-18)$

Câu 76. Trong hệ tọa độ Oxy, cho 3 điểm $A(2;5); B(1;1); C(3;3)$. Tìm điểm E thuộc mặt phẳng tọa độ thỏa mãn $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$?

A. $E(3;-3)$ **B.** $E(-3;3)$ **C.** $E(-3;-3)$ **D.** $E(-2;-3)$

Câu 77. Trong hệ tọa độ *Oxy*, cho ΔABC có $A(3;4), B(2;1), C(-1;-2)$. Tìm điểm *M* có tung độ dương trên đường thẳng *BC* sao cho $S_{ABC} = 3S_{ABM}$.

A. $M(2;2)$ **B.** $M(3;2)$ **C.** $M(-3;2)$ **D.** $M(3;3)$

Câu 78. Trong hệ tọa độ *Oxy*, cho 3 điểm $A(-1;-1), B(0;1), C(3;0)$. Xác định tọa độ giao điểm *I* của *AD* và *BG* với *D* thuộc *BC* và $2BD = 5DC$, *G* là trọng tâm ΔABC

A. $I\left(\frac{5}{9};1\right)$ **B.** $I\left(\frac{1}{9};1\right)$ **C.** $I\left(\frac{35}{9};2\right)$ **D.** $I\left(\frac{35}{9};1\right)$

Câu 79. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có ba đỉnh $A(-1;2)$, $B(2;0)$, $C(-3;1)$. Toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác ABC là

A. $I\left(\frac{11}{14};\frac{13}{14}\right)$. **B.** $I\left(\frac{11}{14};-\frac{13}{14}\right)$. **C.** $I\left(-\frac{11}{14};\frac{13}{14}\right)$. **D.** $I\left(-\frac{11}{14};-\frac{13}{14}\right)$.

Câu 80. Tam giác ABC có đỉnh $A(-1;2)$, trực tâm $H(3;0)$, trung điểm của BC là $M(6;1)$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

A. 5. **B.** $\sqrt{5}$ **C.** 3. **D.** 4.

Bài 2. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. Biểu thức tọa độ của phép cộng hai vectơ, phép trừ hai vectơ, phép nhân một số với một vectơ

Nếu $\vec{u}=(x_1;y_1)$ và $\vec{v}=(x_2;y_2)$ thì

$\vec{u}+\vec{v}=(x_1+x_2;y_1+y_2)$

$\vec{u}-\vec{v}=(x_1-x_2;y_1-y_2)$

$k\vec{u}=(kx_1;ky_1),\ k\in\mathbb{R}.$

Nhận xét: Hai vectơ $\vec{u}=(x_1;y_1),\vec{v}=(x_2;y_2)(\vec{v}\neq\vec{0})$ cùng phương khi và chỉ khi có một số thực k sao cho $x_1=kx_2$ và $y_1=ky_2$.

Ví dụ 1. Cho $\vec{u}=(2;-1),\vec{v}=(1;5)$. Tìm tọa độ của mỗi vectơ sau:

a) $\vec{u}+\vec{v}$;

b) $\vec{u}-\vec{v}$.

Giải

Do $\vec{u}=(2;-1),\vec{v}=(1;5)$ nên ta có:

a) $\vec{u}+\vec{v}=(2+1;-1+5)$. Vậy $\vec{u}+\vec{v}=(3;4)$.

b) $\vec{u}-\vec{v}=(2-1;-1-5)$. Vậy $\vec{u}-\vec{v}=(1;-6)$.

Ví dụ 2. Cho $\vec{a}=(-2;3),\vec{b}=(2;1),\vec{c}=(1;2)$. Tính tọa độ của mỗi vectơ sau: $3\vec{a};2\vec{a}-\vec{b};\vec{a}+2\vec{b}-\frac{3}{2}\vec{c}$.

Giải

Do $\vec{a}=(-2;3),\vec{b}=(2;1),\vec{c}=(1;2)$ nên ta có:

+) $3\vec{a}=(3\cdot(-2);3.3)$. Vậy $3\vec{a}=(-6;9)$.

+) $2\vec{a}=(-4;6)$.

Do đó $2\vec{a}-\vec{b}=(-4-2;6-1)$, vì vậy $2\vec{a}-\vec{b}=(-6;5)$.

+) $2\vec{b}=(4;2),\vec{a}+2\vec{b}=(2;5)$ và $-\frac{3}{2}\vec{c}=\left(-\frac{3}{2};-3\right)$.

Do đó $\vec{a}+2\vec{b}-\frac{3}{2}\vec{c}=\left(\frac{1}{2};2\right)$.

Ví dụ 3. Cho ba điểm $A(-1;-3),B(2;3)$ và $C(3;5)$. Chứng minh ba điểm A,B,C thẳng hàng.

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(3;6),\overrightarrow{BC}=(1;2)$. Suy ra $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{BC}$. Vậy ba điểm A,B,C thẳng hàng.

II. Tọa độ trung điểm đoạn thẳng và tọa độ trọng tâm tam giác

Cho hai điểm $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$. Nếu $M(x_M;y_M)$ là trung điểm đoạn thẳng AB thì

$x_M=\frac{x_A+x_B}{2};y_M=\frac{y_A+y_B}{2}.$

Cho tam giác ABC có $A(x_A;y_A),B(x_B;y_B),C(x_C;y_C)$. Nếu $G(x_G;y_G)$ là trọng tâm tam giác ABC thì

$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3};y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}.$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có $A(-2;1),B(2;5),C(5;2)$. Tìm toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB và trọng tâm G của tam giác ABC.

Giải

Do $M(x_M;y_M)$ là trung điểm đoạn thẳng AB nên

$x_M = \dfrac{-2+2}{2} = 0; y_M = \dfrac{1+5}{2} = 3.$

Vậy $M(0;3)$.

Do $G(x_G;y_G)$ là trọng tâm tam giác ABC nên $x_G = \dfrac{(-2)+2+5}{3}; y_G = \dfrac{1+5+2}{3}$. Vậy $G\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{8}{3}\right)$.

III. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Nếu $\vec{u} = (x_1;y_1)$ và $\vec{v} = (x_2;y_2)$ thì $\vec{u}\cdot\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2$.

Nhận xét

a) Nếu $\vec{a} = (x;y)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{x^2+y^2}$.

b) Nếu $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$ thì $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

c) Với hai vectơ $\vec{u} = (x_1;y_1)$ và $\vec{v} = (x_2;y_2)$ khác $\vec{0}$, ta có:

- $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

$\cdot \cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;2), B(1;-1), C(8;0)$.

a) Tính $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ và $\cos\widehat{ABC}$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

c) Giải tam giác ABC.

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{BA} = (1;3), \overrightarrow{BC} = (7;1)$. Do đó $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 1\cdot 7 + 3\cdot 1 = 10$.

Mặt khác, ta cũng có:

$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}, |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{7^2+1^2} = \sqrt{50},$

$\cos\widehat{ABC} = \cos(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) = \dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|} = \dfrac{10}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{50}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}.$

b) Do $\overrightarrow{AB} = (-1;-3)$ và $\overrightarrow{AC} = (6;-2)$ nên $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (-1)\cdot 6 + (-3)\cdot(-2) = 0$. Vậy $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

c) Do $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ nên $\widehat{BAC} = 90^\circ$, tức là tam giác ABC vuông tại A. Mà $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ nên $\widehat{ABC} \approx 63^\circ$.

Vì thế $\widehat{ACB} \approx 90^\circ - 63^\circ = 27^\circ$.

Mặt khác, ta có: $AB = |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{10}$,

$BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}, CA = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 - (\sqrt{10})^2} = 2\sqrt{10}$

Ví dụ 6. Một chiếc xe ô tô con bị mắc kẹt trong bùn lầy. Để kéo xe ra, người ta dùng xe tải kéo bằng cách gắn một đầu dây cáp kéo xe vào đầu xe ô tô con và móc đầu còn lại vào phía sau của xe tải kéo. Khi kéo, xe tải tạo ra một lực $\overrightarrow{F_1}$ có độ lớn (cường độ) là $2000\,N$ theo phương ngang lên xe ô tô con.

Ngoài ra, có thêm một người đẩy phía sau xe ô tô con, tạo ra lực $\overrightarrow{F_2}$ có độ lớn là $300\,N$ lên xe. Các lực này được biểu diễn bằng vectơ như hình sao cho $\left(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}\right) = 5^\circ$. Độ lớn lực tổng hợp tác động lên xe ô tô con là bao nhiêu Newton (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Giải

Chọn hệ trục toạ độ Oxy như hình bên, mỗi đơn vị trên trục ứng với $1N$.

Ta có:

- $\vec{F_1}=(2000;0)$;
- $\left(\vec{F_1},\vec{F_2}\right)=5^\circ$ nên toạ độ của $\vec{F_2}$ là:

$\vec{F_2}=\left(300\cdot\cos 5^\circ;300\cdot\sin 5^\circ\right)$.

Do đó, lực $\vec{F}$ tổng hợp các lực tác động lên xe ô tô con có toạ độ là:
$\vec{F}=\vec{F_1}+\vec{F_2}=\left(2000+300\cdot\cos 5^\circ;300\cdot\sin 5^\circ\right)$.

Độ lớn lực tổng hợp $\vec{F}$ tác động lên xe ô tô con là:
$|\vec{F}|=\sqrt{\left(2000+300\cdot\cos 5^\circ\right)^2+\left(300\cdot\sin 5^\circ\right)^2}\approx 2299(N)$.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1. TRỤC TỌA ĐỘ

Câu 1. Trên trục $x'Ox$ cho 2 điểm *A, B* có tọa độ lần lượt là -2 và 5.

a) Tìm tọa độ của $\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm tọa độ trung điểm *I* của đoạn thẳng ***AB.***

c) Tìm tọa độ của điểm *M* sao cho $2\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

d) Tìm tọa độ điểm *N* sao cho $2\overline{NA}+3\overline{NB}=-1$.

Lời giải

a) Tọa độ của $\overrightarrow{AB}$:

Ta có: $x_A=-2;\ x_B=5\Rightarrow \overline{AB}=x_B-x_A=7\Rightarrow \overrightarrow{AB}=7\vec{i}$ ($\vec{i}$ là vectơ đơn vị)

b) Vì *I* là trung điểm của đoạn AB nên tọa độ của *I* là :

$x_I=\dfrac{-2+5}{2}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow x_I=\dfrac{3}{2}$

c) $M(m)$ là điểm xác định bởi hệ thức: $2\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}=2,5\overrightarrow{BM}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\vec{i}=2,5.\overrightarrow{BM}.\vec{i}\Leftrightarrow -2-m=2,5(m-5)\Leftrightarrow 3,5m=10,5\Leftrightarrow m=3\Rightarrow x_m=3$

d) $N(n)$ là điểm xác định bởi hệ thức: $2\overline{NA}+3\overline{NB}=-1\Leftrightarrow 5\overline{NA}-3\overline{NA}+3\overline{NB}=-1$

$\Leftrightarrow 5\overline{NA}+3\overline{AB}=-1\Leftrightarrow 5\overline{NA}=-1-3.7=-22\Leftrightarrow \overline{NA}=-\dfrac{22}{5}\Leftrightarrow -2-n=-\dfrac{22}{5}\Leftrightarrow N=\dfrac{12}{5}$.

Câu 2. Trên trục $x'Ox$ cho 2 điểm *A, B* có tọa độ lần lượt là -3 và 1.

a) Tìm tọa độ của điểm *M* sao cho $3\overline{MA}-2\overline{MB}=1$.

Tìm tọa độ điểm *N* sao cho $\overline{NA}+3\overline{NB}=\overline{AB}$.

Lời giải

Trên trục $x'Ox$ cho 2 điểm *A, B* có tọa độ lần lượt là -3 và $1\Rightarrow A(-3);B(1)\Rightarrow \overline{AB}=4$

a) Tọa độ điểm *M* sao cho $3\overline{MA}-2\overline{MB}=1\Leftrightarrow \overline{MA}+2\left(\overline{MA}-\overline{MB}\right)=1$

$\Leftrightarrow \overline{MA} = 1 + 2\overline{AB} = 9 \Leftrightarrow -3 - m = 9 \Rightarrow m = -12 \Rightarrow M(-12)$

b) Tọa độ điểm N sao cho $\overline{NA} + 3\overline{NB} = \overline{AB} \Leftrightarrow \overline{NA} - \overline{NB} + 4\overline{NB} = 4$

$\Leftrightarrow 4\overline{NB} = 4 + \overline{AB} = 8 \Leftrightarrow \overline{NB} = 2 \Leftrightarrow 1 - n = 2 \Rightarrow n = -1 \Rightarrow N(-1)$

Câu 3. Trên trục $x'Ox$ cho 4 điểm $A(-2), B(2), C(1), D(6)$.

a) Chứng minh rằng $\dfrac{1}{\overline{AC}} + \dfrac{1}{\overline{AD}} = \dfrac{2}{\overline{AB}}$.

b) Gọi I là trung điểm của đoạn AB. Chứng minh rằng $\overline{IC}.\overline{ID} = \overline{IA}^2$.

Gọi J là trung điểm của CD. Chứng minh rằng $\overline{AC}.\overline{AD} = \overline{AB}.\overline{AJ}$.

Lời giải

Trên trục $x'Ox$ cho 4 điểm $A(-2; \overline{AD} = 6), B(2), C(1), D(6) \Rightarrow \overline{AC} = 3; \overline{AB} = 4$

a) **Ta có** $\dfrac{1}{\overline{AC}} = \dfrac{1}{\overline{AD}} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{\overline{AB}}$

b) $I(i)$ là trung điểm của $AB \Rightarrow i = \dfrac{-2+2}{2} = 0 \Rightarrow \overline{IA} = 2; \overline{IC} = 1; \overline{ID} = 4$

$\Rightarrow \overline{IC}.\overline{ID} = 1.4 = 2^2 = \overline{IA}^2$

c) $I(j)$ là trung điểm của $CD \Rightarrow j = \dfrac{1+4}{2} = \dfrac{5}{2} \Rightarrow \overline{\text{AJ}} = \dfrac{9}{2}$

Ta có: $\left.\begin{array}{l} \overline{AC}.\overline{AD} = 3.6 = 18 \\ \overline{AB}.\overline{AJ} = 4.\dfrac{9}{2} = 18 \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{AC}.\overline{AD} = \overline{AB}.\overline{AJ}$

Câu 4. Trên trục $x'Ox$ cho 3 điểm *A, B, C* có tọa độ lần lượt là *a, b, c*.

a) Tìm tọa độ trung điểm *I* của *AB***.**

b) Tìm tọa độ điểm *M* sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

c) Tìm tọa độ điểm *N* sao cho $2\overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{NC}$.

Lời giải

Trên trục $x'Ox$ cho 3 điểm *A, B, C* có tọa độ lần lượt là *a, b, c*

a) Tọa độ trung điểm $I(i)$ *cảu AB:* $i = \dfrac{a+b}{2}$

b) Tọa độ điểm $M(m)$ thỏa mãn: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow a - m = c - b \Rightarrow m = a + b - c$

c) Tọa độ điểm $N(n)$ thỏa mãn: $2\overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{NC} \Rightarrow \left(2\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{NB}\right) - \left(\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC}\right) = 2\overrightarrow{NC}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{NC} \Rightarrow \overrightarrow{NC} = \dfrac{2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{2} \Rightarrow n - c = a - b + \dfrac{c-b}{2} \Rightarrow n = a - \dfrac{3b}{2} + \dfrac{3a}{2}$

Câu 5. Trên trục $x'Ox$ cho 4 điểm *A, B, C, D* tùy ý.

a) Chứng minh rằng: $\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AC}.\overline{DB} + \overline{DA}.\overline{BC} = 0$.

b) Gọi *I, J, K, L* lần lượt là trung điểm của các đoạn *AC, BD, AB, CD***.** Chứng minh rằng các đoạn *IJ và KL* có chung trung điểm.

Lời giải

Gọi a, b, c, d lần lượt là tọa độ các điểm A, B, C, D.

a) Ta có: $\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AC}.\overline{DB} + \overline{AD}.\overline{BC}$

$=(b-a)(d-c)+(c-a)(b-d)+(d-a)(c-b)$
$=(bd-bc-ad+ac)+(bc-cd-ab-ad)+(dc-bd-ac+ab)=0$

b) $I(i),J(j)K(k),L(l)$ lần lượt là trung điểm của các đoạn AC,BD,AB,CD

$\Rightarrow i=\dfrac{a+c}{2};\mathrm{j}=\dfrac{b+d}{2};\mathrm{k}=\dfrac{a+b}{2};\mathrm{l}=\dfrac{c+d}{2}$

Khi đó, trung điểm của *IJ* có tọa độ là: $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a+c}{2}+\dfrac{b+d}{2}\right)$

Trung điểm của *KL* có tọa độ là: $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{c+d}{2}\right)$

Vậy hai trung điểm có cùng tọa độ bằng $\dfrac{1}{4}(a+b+c+d)$ nên chúng trùng nhau.

DẠNG 2. TỌA ĐỘ VÉC TƠ

Câu 6. Cho $\vec{a}=(1;-2);\ \vec{b}=(0;3)$ tìm tọa độ của các vectơ sau:

a) $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}\ ;\ \vec{y}=\vec{a}-\vec{b}\ ;\ \vec{z}=2\vec{a}-3\vec{b}.$

b) $\vec{u}=3\vec{a}-2\vec{b}\ ;\ \vec{v}=2+\vec{b}\ ;\ \vec{w}=4\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}.$

Lời giải

a) $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}=(1+0;-2+3)=(1;1),\ \vec{y}=\vec{a}-\vec{b}=(1-0;-2-3)=(1;-5),$
$\vec{z}=2\vec{a}-3\vec{b}=(3.1+3.0;2.(-2)-3.3)=(2;-13).$

b) $\vec{u}=3\vec{a}-2\vec{b}=(3;-12),\vec{u}=2\vec{a}+\vec{b}=(2;-1),\overrightarrow{\mathrm{w}}=4\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}=4\left(3;-\dfrac{11}{2}\right)$

Câu 7. Cho $\vec{a}=(2;0);\ \vec{b}=\left(-1;\dfrac{1}{2}\right);\ \vec{c}=(4;-6)$.

a) Tìm tọa độ của vectơ $\vec{d}=2\vec{a}-3\vec{b}+5\vec{c}.$

b) Tìm 2 số *m, n* sao cho $m\vec{a}+\vec{b}-n\vec{c}=\vec{0}.$

c) Biểu diễn vectơ $\vec{c}$ theo $\vec{a},\vec{b}.$

Lời giải

a) $\vec{d}=2\vec{a}-3\vec{b}+5\vec{c}=\left(2.2-3.(-1)+5.4;2.0-3.\dfrac{1}{2}+5.(6)\right)=\left(27;-\dfrac{63}{2}\right)$

b) Ta có: $m\vec{a}+\vec{b}-n\vec{c}=\vec{0}\Rightarrow m.2\vec{i}+\left(-\vec{i}+\dfrac{1}{2}\vec{j}\right)-n\left(4\vec{i}-6\vec{j}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}2m-1-4n=0\\ \dfrac{1}{2}+6n=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\dfrac{1}{3}\\ n=-\dfrac{1}{12}\end{cases}$

c) Giả sử: $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}\ (x;y\in R)$ ta có: $\begin{cases}4=x.2+y(-1)\\ -6=x.0+y.\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=8\\ y=-12\end{cases}$

Vậy $\vec{c}=8\vec{a}-12\vec{b}$

DẠNG 3. TỌA ĐỘ ĐIỂM

Câu 8. Cho hai điểm $A(3;-5), B(1;0)$.

a) Tìm tọa độ điểm C sao cho: $\overrightarrow{OC}=-3\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm điểm D đối xứng với A qua C.

c) Tìm điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k=-3$.

Lời giải.

a) Gọi $C(x_C;y_C)$.

Theo bài $\overrightarrow{OC}=-3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (x_C;y_C)=-3(-2;5)=(6;-15)\Rightarrow C(6;-15)$

b) D đối xứng với A qua C hay C là trung điểm của $AD \Rightarrow \begin{cases} x_C=\dfrac{x_A+x_D}{2} \\ y_C=\dfrac{y_A+y_D}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D=2x_C-x_A=2.6-3=12 \\ y_D=2y_C-y_A=2(-15)-(-5)=-25 \end{cases} \Rightarrow D(12;-25)$.

c) M chia đoạn AB theo tỉ số $k=-3 \Rightarrow \begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+3x_B}{1+3}=\dfrac{3+3.1}{4}=\dfrac{3}{2} \\ y_M=\dfrac{y_A+3y_B}{1+3}=\dfrac{-5+3.0}{4}=-\dfrac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{5}{4}\right)$.

Câu 9. Cho ba điểm $A(-1;1), B(1;3), C(-2;0)$.

a) Chứng minh ba điểm A,B,C thẳng hàng.

b) Tìm các tỉ số mà điểm A chia đoạn BC, điểm B chia đoạn AC, điểm C chia đoạn AB.

Lời giải:

a) Từ tọa độ các điểm ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(2;2) \\ \overrightarrow{BC}=(-3;-3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BC}=-\dfrac{3}{2}.\overrightarrow{AB}$ nên 3 điểm A, B và C thẳng hàng.

b) Ta có:

+ $\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(2;2) \\ \overrightarrow{AC}=(-1;-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB}=-2.\overrightarrow{AC} \Rightarrow$ A chia đoạn BC theo tỉ số $k=-2$.

+ $\begin{cases} \overrightarrow{BA}=(-2;-2) \\ \overrightarrow{AC}=(-3;-3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BA}=\dfrac{2}{3}.\overrightarrow{BC} \Rightarrow$ B chia đoạn AC theo tỉ số $k=\dfrac{2}{3}$.

+ $\begin{cases} \overrightarrow{CA}=(1;1) \\ \overrightarrow{CB}=(3;3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{CA}=\dfrac{1}{3}.\overrightarrow{CB} \Rightarrow$ C chia đoạn AB theo tỉ số $k=\dfrac{1}{3}$.

Câu 10. Cho ba điểm $A(1;-2), B(0;4), C(3;2)$.

a) Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$.

b) Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.

c) Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$.

d) Tìm tọa độ điểm N sao cho $\overrightarrow{AN}+2\overrightarrow{BN}-4\overrightarrow{CN}=\vec{0}$.

Lời giải:

a) $\overrightarrow{AB}=(-1;6), \overrightarrow{AC}=(2;4), \overrightarrow{BC}=(3;-2)$.

b) I là trung điểm của $AB \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{1}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow I\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

c) Ta có: $\overrightarrow{CM} = (x_M - 3; y_M - 2)$, $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = 2(-1;6) - 3(2;4) = (-8;0)$

$\Rightarrow \overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M - 3 = -8 \\ y_M - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -5 \\ y_M = 2 \end{cases} \Rightarrow M(-5;2)$.

d) $\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{BN} - 4\overrightarrow{CN} = \vec{0} \Rightarrow (x_N - 1; y_N + 2) + 2(x_N; y_N - 4) - 4(x_N - 3; y_N - 2) = (0;0)$

$\Leftrightarrow (-x_N + 11; -y_N + 2) = (0;0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = 11 \\ y_N = 2 \end{cases} \Rightarrow N(11;2)$.

Câu 11. Cho ba điểm $A(-1;1), B(2;1), C(-1;-3)$.

a) CMR: Tồn tại tam giác ABC.

b) Tính chu vi tam giác.

c) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

d) Xác định điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

e) Tìm điểm M thuộc trục Ox sao cho M cách đều A, B.

f) Tìm điểm N thuộc trục Oy sao cho N cách đều B, C.

Lời giải.

a) Ta có phương trình đường thẳng AB: $y = ax + b$

$\begin{cases} A \in d \\ B \in d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -a + b \\ 1 = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow d: y = 1$

Do C không thuộc d nên ba điểm A, B, C không thẳng hàng, tức là tam giác tồn tại.

b) Ta có $\overrightarrow{AB} = (3;0)$, $\overrightarrow{BC} = (-3;-4)$, $\overrightarrow{AC} = (0;-4)$

$\Rightarrow AB = 3;\ BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5;\ AC = 4 \Rightarrow P_{ABC} = 3 + 5 + 4 = 12$.

c) Tọa độ trọng tâm G: $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = 0 \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(0; -\dfrac{1}{3}\right)$.

d) Gọi $D(x; y)$, $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - x = 3 \\ -3 - y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow D(-4;-3)$.

e) Phương trình trung trực của đoạn thẳng AB là $x = \dfrac{1}{2}$. M là giao của trung trực này với trục Ox hay $M\left(\dfrac{1}{2};0\right)$.

f) Gọi $N(0; x) \Rightarrow \begin{cases} CN^2 = 1 + (x+3)^2 \\ BN^2 = 2^2 + (1-x)^2 \end{cases}$.

N cách đều B và C khi $CN^2 = BN^2 \Leftrightarrow 1 + (x+3)^2 = 2^2 + (1-x)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 10 = x^2 - 2x + 5 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{8} \Rightarrow N\left(0; -\dfrac{5}{8}\right)$.

Câu 12. Cho tam giác ABC có $A(4;1), B(2;4), C(2;-2)$.

a) Tính chu vi tam giác.
b) Xác định điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
c) Xác định tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.
d) Xác định tọa độ trực tâm H của tam giác.
e) Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;3)$, $\overrightarrow{BC}=(0;-6)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;-3)$

$\Rightarrow AB=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$; $BC=6$, $AC=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$ $\Rightarrow P_{ABC}=2\sqrt{13}$

b) Gọi $D(x;y)$, $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ $\Leftrightarrow \begin{cases}2-x=-2\\-2-y=3\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\y=-5\end{cases} \Rightarrow D(4;-5)$.

c) Tọa độ trọng tâm G của tam giác $x_G=\dfrac{4+2+2}{3}=\dfrac{8}{3}$; $y_G=\dfrac{1+4-2}{3}=1$ $\Rightarrow G\left(\dfrac{8}{3};1\right)$.

d) Ta có phương trình đường thẳng AC: $y=\dfrac{3}{2}x-5$. Suy ra đường cao BF qua B và vuông góc với AC là $y=\dfrac{-2}{3}(x-2)+4 \Leftrightarrow y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{16}{3}$.

Phương trình đường thẳng AB là $y=-\dfrac{3}{2}x+7$ suy ra đường cao CK đi qua C và vuông góc với AB là $y=\dfrac{2}{3}(x-2)-2 \Leftrightarrow y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{10}{3}$.

Tọa độ trực tâm H là giao điểm của BF và CK nên $\begin{cases}y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{10}{3}\\y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{16}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{13}{2}\\y=1\end{cases} \Rightarrow H\left(\dfrac{13}{2};1\right)$.

e) Trung điểm đoạn AB và BC lần lượt là $M\left(3;\dfrac{5}{2}\right)$, $N(2;1)$

Phương trình trung trực của AB đi qua M và vuông góc với AB là: $y=\dfrac{2}{3}(x-3)+\dfrac{5}{2}$.

Phương trình trung trực của BC là $y=1$

Tâm đường tròn ngoại tiếp I là giao điểm của hai trung trực nên $I\left(\dfrac{3}{4};1\right)$.

Câu 13. Cho $A(1;3), B(2;5)$ và $C(4;-1)$.

a) Tìm chu vi của tam giác ABC.
b) Tìm tọa độ trung điểm của các đoạn thẳng AB, AC.
c) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.
d) Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
e) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác.
f) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;2)$, $\overrightarrow{BC}=(2;-6)$, $\overrightarrow{AC}=(3;-4)$

$\Rightarrow AB=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$; $BC=\sqrt{2^2+6^2}=\sqrt{40}$; $AC=\sqrt{3^2+4^2}=5 \Rightarrow P_{ABC}=\sqrt{5}+5+\sqrt{40}$.

b) Tọa độ trung điểm M của đoạn AB: $x_M = \dfrac{1+2}{2} = \dfrac{3}{2}$; $y_M = \dfrac{3+5}{2} = 4 \Rightarrow M\left(\dfrac{3}{2};4\right)$

Trung điểm của N của đoạn AC: $x_n = \dfrac{1+4}{2} = \dfrac{5}{2}$; $y_N = \dfrac{3-1}{2} = 1 \Rightarrow N\left(\dfrac{5}{2};1\right)$

c) Tọa độ trọng tâm G tương tự như các bài toán trước $G\left(\dfrac{7}{3};\dfrac{7}{3}\right)$.

d) Gọi $D(x;y)$, $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x=1 \\ -1-y=2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases} \Rightarrow D(3;-3)$.

e) Ta có phương trình đường thẳng AB: $y = 2x+1$. Suy ra đường cao CH là $y = -\dfrac{1}{2}(x-4)-1$.

Phương trình đường thẳng AC là $y = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{13}{3}$. Suy ra đường cao BE là $y = \dfrac{3}{4}(x-2)+5$

Tọa độ trực tâm H thỏa mãn $\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}(x-4)-1. \\ y = \dfrac{3}{4}(x-2)+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow H(-2;2)$.

f) Phương trình trung trực của AB đi qua M và vuông góc với AB là: $y = -\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)+4$.

Phương trình trung trực của BC là: $y = \dfrac{3}{4}\left(x-\dfrac{5}{2}\right)+1$

Tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp I là giao điểm của hai trung trực nên thỏa mãn $\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)+4. \\ y = \dfrac{3}{4}\left(x-\dfrac{5}{2}\right)+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{9}{2} \\ y = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(\dfrac{9}{2};\dfrac{5}{2}\right)$.

DẠNG 4. ỨNG DỤNG

Câu 14. Trong mặt phẳng Oxy cho $A(1;1), B(2;4), C(10;-2)$

a). Chứng minh rằng ABC là tam giác vuông.

b). Tính $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ suy ra cosB

Lời giải

a). $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB = \sqrt{10}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = AC = \sqrt{90}$, $\left|\overrightarrow{BC}\right| = BC = \sqrt{100}$

Có $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 100 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

b). Có $\overrightarrow{BA} = (-1;-3)$, $\overrightarrow{BC} = (8;-6)$ $\Rightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = (-1).8 + (-3)(-6) = 10$

Ngoài ra $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$

$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \dfrac{10}{\sqrt{10}.\sqrt{100}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Câu 15. Cho ba điểm $A(4\sqrt{3};-1)$, $B(0;3)$, $C(8\sqrt{3};3)$.

a) Tìm đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCD$.

b) Tìm $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$

Lời giải

a) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

Gọi tọa độ điểm D là $D(x;y)$ thì $\overrightarrow{AD}=\left(x-4\sqrt{3};y+1\right)$, $\overrightarrow{BC}=\left(8\sqrt{3};0\right)$

Từ đó suy ra $x=12\sqrt{3}$, $y=-1$. Vậy ta có $D\left(12\sqrt{3};-1\right)$.

b) Ta có $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\left[\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right)^2-\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)^2\right]=\frac{1}{4}(64-448)=-\frac{187}{2}$;

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}^2=192$.

Câu 16. Cho $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{i}-5\vec{j}$ và $\vec{v}=k\vec{i}-4\vec{j}$. Tìm k để

a) $\vec{u}\perp\vec{v}$ b) $\left|\vec{u}\right|=\left|\vec{v}\right|$

Lời giải.

Ta có $\vec{u}=\left(\frac{1}{2};-5\right)$, $\vec{v}=(k;-4)$

a) $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\frac{1}{2}.k+(-5).(-4)=0\Leftrightarrow k=-40$.

b) Ta có $\left|\vec{u}\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+25}=\frac{1}{2}\sqrt{101}$, $\left|\vec{v}\right|=\sqrt{k^2+16}$.

Do đó $\left|\vec{u}\right|=\left|\vec{v}\right|\Leftrightarrow\sqrt{k^2+16}=\frac{1}{2}\sqrt{101}\Leftrightarrow k^2+16=\frac{101}{4}\Leftrightarrow k^2=\frac{37}{4}\Leftrightarrow k=\pm\frac{\sqrt{37}}{2}$.

Câu 17. Cho các véc-tơ $\vec{a}=(-2;3)$, $\vec{b}=(4;1)$.

a) Tìm các số k và m sao cho $\vec{c}=k\vec{a}+m\vec{b}$ vuông góc với véc-tơ $\vec{a}+\vec{b}$.

b) Tìm véc-tơ $\vec{d}$ biết $\vec{a}.\vec{d}=4$ và $\vec{b}.\vec{d}=-2$.

Lời giải.

a) Ta có $\vec{c}=k.\vec{a}+m.\vec{b}=(-2k+4m;3k+m)$

Để $\vec{c}\perp\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\Leftrightarrow\vec{c}.\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=0\Leftrightarrow 2(-2k+4m)+4(3k+m)=0\Leftrightarrow 2k+3m=0$

Vậy với $2k+3m=0$ thì $\vec{c}\perp\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.

b) Gọi $\vec{d}=(x;y)$

Khi đó từ $\vec{a}.\vec{d}=4$ và $\vec{b}.\vec{d}=-2$, ta có hệ phương trình và $\begin{cases}-2x+3y=4\\4x+y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{5}{7}\\y=\frac{6}{7}\end{cases}$.

Vậy và $\vec{d}=\left(-\frac{5}{7};\frac{6}{7}\right)$.

Câu 18. Tính góc giữa hai véc-tơ và $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong các trường hợp sau

a) $\vec{a}=(1;-2)$, $\vec{b}=(-2;-6)$

b) $\vec{a}=(-3;4)$, $\vec{b}=(4;3)$.

c) $\vec{a}=(2;5)$, $\vec{b}=(3;-7)$.

Lời giải.

a) Áp dụng công thức $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\frac{1.(-2)+(-2).(-6)}{\sqrt{1+4}.\sqrt{4+36}}=\frac{10}{\sqrt{200}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

Vậy $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=45^\circ$.

b) Ta có $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\frac{(-3).4+4.3}{\sqrt{9+16}.\sqrt{16+9}}=\frac{0}{25}=0$,

Vậy $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=90^\circ$.

c) Ta có $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\frac{2.3+5.(-7)}{\sqrt{4+25}.\sqrt{9+49}}=\frac{-29}{29\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

Vậy $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=135^\circ$.

Câu 19. Cho $\vec{u}=(4;1)$ và $\vec{v}=(1;4)$.

a) Tìm m để $\vec{a}=\vec{u}+m.\vec{v}$ vuông góc với trục hoành.

b) Tìm n để $\vec{b}=n.\vec{u}+\vec{v}$ tạo với véc-tơ $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}$ một góc 45°.

Lời giải.

a) Ta có $\vec{i}=(1;0)$, $\vec{a}=(4+m;1+4m)$.

Véc-tơ $\vec{a}$ vuông góc với trục hoành khi và chỉ khi $\vec{a}.\vec{i}=0 \Leftrightarrow 4+m=0 \Leftrightarrow m=-4$

b) Ta có $\vec{b}=(4n+1;n+4)$, $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}=(1;1)$.

Góc giữa hai véc-tơ $\vec{b}$, $\vec{c}$ là 45° khi

$$\cos 45^\circ=\frac{(4n+1)+(n+4)}{\sqrt{2}.\sqrt{(4n+1)^2+(n+4)^2}} \Leftrightarrow \frac{5(n+1)}{\sqrt{2}.\sqrt{17n^2+16n+17}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 5(n+1)=\sqrt{17n^2+16n+17} \Leftrightarrow \begin{cases} n+1\geq 0 \\ 25n^2+50n+25=17n^2+16n+17 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n\geq -1 \\ 4n^2+17n+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow n=-\frac{1}{4}.$$

Vậy $n=-\frac{1}{4}$.

Câu 20. Cho các điểm $A\left(4\sqrt{3};-1\right)$, $B(0;3)$, $C\left(8\sqrt{3};3\right)$.

a) Tính các cạnh của tam giác ABC.

b) Tính các góc của tam giác ABC.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AB}=\left(-4\sqrt{3};4\right)\Rightarrow AB=\sqrt{48+16}=8$.

$\overrightarrow{BC}=\left(8\sqrt{3};0\right)\Rightarrow BC=8\sqrt{3}$

$\overrightarrow{CA}=\left(-4\sqrt{3};-4\right)\Rightarrow AB=8$

b) Ta có $\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2.AB.AC}=\frac{128-192}{128}=-\frac{1}{2}$.

Suy ra $\widehat{A}=120^\circ$ và vì tam giác cân tại A nên $\widehat{B}=\widehat{C}=30^\circ$.

Câu 21. Cho tam giác ABC có ba đỉnh $A(-3;0)$, $B(3;0)$, $C(2;6)$. Tìm tọa độ trọng tâm G và trực tâm H của tam giác.

Lời giải.

Trọng tâm G có tọa độ $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{2}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = 2 \end{cases}$. Vậy $G\left(\dfrac{2}{3};2\right)$.

Gọi $H(x;y)$ là trực tâm ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(2-3)+(y-0)(6-0)=0 \\ (x-3)(-3-2)+(y-0)(0-6)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+6y=3 \\ -5x-6y=-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\dfrac{5}{6} \end{cases}.$$

Vậy $H\left(2;\dfrac{5}{6}\right)$.

Câu 22. Cho điểm $A(1;1)$, $B(2;4)$ và $C(10;-2)$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông tại A.

b) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ và tính $\cos B$, $\cos C$.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;3)$ và $\overrightarrow{AC} = (9;-3)$ nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 9-9=0$.

Vậy tam giác ABC vuông tại A.

b) Ta có $\overrightarrow{BA} = (-1;-3)$, $\overrightarrow{BC} = (8;-6)$. Do đó $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = -8+8=10$.

$BA = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$, $BC = \sqrt{8^2+6^2} = 10$, mà $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = BA.BC.\cos B$

Suy ra $10 = \sqrt{10}.\cos B$. Vậy $\cos B = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Tương tự ta có $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 90 \Rightarrow \cos C = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

Câu 23. Cho hai điểm $A(2;4)$ và $B(1;1)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho tam giác ABC là tam giác vuông cân tại B.

Lời giải.

Gọi $C(x;y)$ thì $\overrightarrow{BA} = (1;3)$ và $\overrightarrow{BC} = (x-1;y-1)$.

Điều kiện tam giác ABC vuông cân tại B là

$$\begin{cases} \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ BA = BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1.(x-1)+3.(y-1)=0 \\ 1^2+3^2 = (x-1)^2+(y-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4-y \\ (3-3y)^2+(y-1)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-y \\ 10y^2-20y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0 \\ x=4 \end{cases} \\ \begin{cases} y=2 \\ x=-2 \end{cases} \end{array}\right..$$

Vậy có hai điểm C có tọa độ $(4;0)$, $(-2;2)$.

Câu 24. Cho bốn điểm $A(7;-3)$, $B(8;4)$, $C(1;5)$, $D(0;-2)$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

Lời giải.

Ta chứng minh $ABCD$ là hình thoi có một góc vuông.

$\overrightarrow{AB}=(1;7)\Rightarrow AB=\sqrt{1^2+7^2}=5\sqrt{2}$

$\overrightarrow{BC}=(-7;1)\Rightarrow BC=5\sqrt{2}$

$\overrightarrow{CD}=(-1;-7)\Rightarrow CD=5\sqrt{2}$

$\overrightarrow{DA}=(7;-1)\Rightarrow CD=5\sqrt{2}$

Vậy $AB=BC=CD=DA=5\sqrt{2}$ và vì A,B,C,D phân biệt nên $ABCD$ là hình thoi.

Mặt khác $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=1.(-7)+7.1=0$ nên $AB\perp BC$

Vậy $ABCD$ là hình vuông.

Câu 25. Biết $A(1;-1)$ và $B(3;0)$ là hai đỉnh của hình vuông $ABCD$. Tìm tọa độ các đỉnh C và D.

Lời giải.

Gọi $C(x;y)$. Khi đó $\overrightarrow{AB}=(2;1)$, $\overrightarrow{BC}=(x-3;y)$.

Điều kiện $ABCD$ là hình vuông ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}\\ AB=BC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(x-3)+1.y=0\\ (x-3)^2+y^2=5\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}y=2(3-x)\\ 5(x-3)^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2(3-x)\\ (x-3)^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=4\\ y=-2\end{cases}\\ \begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}\end{array}\right.$.

Với $C(4;-2)$ ta tính được đỉnh $D(2;-3)$.

Với $C(2;2)$ ta tính được đỉnh $D(0;1)$.

Câu 26. Cho tam giác ABC với $A(2;4)$, $B(-3;1)$, $C(3;-1)$.

a) Tìm điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
b) Tìm chân A' của đường cao vẽ từ đỉnh A của tam giác ABC.

Lời giải.

a) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D-2=3+3\\ y_D-4=-1-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=8\\ y_D=2\end{cases}$.

Vậy $D(8;2)$.

b) Gọi $A'(x;y)$ là chân đường cao AA' của tam giác ABC.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AA'}\perp BC\\ A'\in BC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BA'}=k.\overrightarrow{BC}\end{cases}$.

Mà $\overrightarrow{AA'}=(x-2;y-4)$, $\overrightarrow{BC}=(6;-2)$, $\overrightarrow{BA'}=(x+3;y-1)$ nên $\begin{cases}6x-2y=4\\ -2x-6y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{5}\\ y=-\dfrac{1}{5}\end{cases}$.

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trên trục $x'Ox$ cho 2 điểm *A, B* lần lượt có tọa độ là *a, b*. *M* là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}, k\neq 1$. Khi đó tọa độ của điểm *M* là:

A. $\dfrac{ka-b}{k-1}$ **B.** $\dfrac{kb-a}{k-1}$ **C.** $\dfrac{a-kb}{k+1}$ **D.** $\dfrac{kb+a}{k-1}$

Lời giải

Gọi x là độ của điểm M.

Ta có: $\overline{MA} = k\overline{MB} \Leftrightarrow a - x = k(b - x) \Leftrightarrow (k-1)x = kb - a \Leftrightarrow x = \dfrac{kb-a}{k-1}, k \neq 1$

Đáp án B.

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$ và $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j}$. Tính tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$

A. $\vec{a}.\vec{b} = -30$. **B.** $\vec{a}.\vec{b} = 3$. **C.** $\vec{a}.\vec{b} = 30$. **D.** $\vec{a}.\vec{b} = 43$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết suy ra $\vec{a} = (4;6)$ và $\vec{b} = (3;-7)$

Suy ra $\vec{a}.\vec{b} = 4.3 + 6.(-7) = -30$

Câu 3. Trên trục $(O;\vec{i})$ cho ba điểm *A, B*, **C.** Nếu biết $\overline{AB} = 5, \overline{AC} = 7$ thì $\overline{CB}$ bằng:

A. -2 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 3

Lời giải

Ta có: $\overline{CB} = \overline{AB} - \overline{AC} = 5 - 7 = -2$

Đáp án A.

Câu 4. Tên trục $(O;\vec{i})$ cho hai điểm *A, B* lần lượt có tọa độ 1 và 5. Khi đó tọa độ điểm *M* thỏa mãn $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ là:

A. 10 **B.** 11 **C.** 12 **D.** 13

Lời giải

Đáp án D

$2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow 2(x_A - x_M) = 3(x_B - x_M) \Leftrightarrow x_M = 13$

Câu 5. Trên trục $x'Ox$ có vectơ đơn vị $\vec{i}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. x_A là tọa độ điểm $A \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = x_A.\vec{i}$

B. x_B, x_C là tọa độ của điểm *B* và *C* thì $\overline{BC} = x_B - x_C$

C. $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$

D. *M* là trung điểm của *AB* $\Leftrightarrow \overline{OM} = \dfrac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2}$

Lời giải

Đáp án B

Ta có $\overline{BC} = x_B - x_C$

Câu 6. Trên trục $x'Ox$, cho tọa độ của *A, B* lần lượt là $-2;3$. Khi đó tọa độ điểm *M* thỏa mãn: $OM^2 = \overline{MA}.\overline{MB}$ là:

A. 6 **B.** $\sqrt{6}$ **C.** -6 **D.** 4

Lời giải

Đáp án C

Gọi *M* có tọa độ là $x \Rightarrow x^2 = (-2-x)(3-x) \Rightarrow x = -6$

Câu 7. Trên trục $(O;\vec{i})$ tìm tọa độ x của điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$, với A, C có tọa độ tương ứng là -1 và 3

A. $x=\frac{5}{3}$ **B.** $x=\frac{2}{3}$ **C.** $x=\frac{2}{5}$ **D.** $x=\frac{5}{2}$

Lời giải

Từ $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}+2\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OM}\right)=0$.

Hay $-1-x+2(3-x)=0\Leftrightarrow 3x=5\Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$

Đáp án A.

Câu 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{u}=(3;4)$ và $\vec{v}=(-8;6)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $|\vec{u}|=|\vec{v}|$. **B.** $M\left(0;-\frac{1}{2}\right)$. và $\vec{v}$ cùng phương.

C. $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$. **D.** $\vec{u}=-\vec{v}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\vec{u}.\vec{v}=3.(-8)+4.6=0$ suy ra $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

Câu 9. Trong mp Oxy cho $A(4;6)$, $B(1;4)$, $C\left(7;\frac{3}{2}\right)$. Khảng định nào sau đây sai

A. $\overrightarrow{AB}=(-3;-2)$, $\overrightarrow{AC}=\left(3;-\frac{9}{2}\right)$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$.

C. $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{13}$. **D.** $\left|\overrightarrow{BC}\right|=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Phương án A: $\overrightarrow{AB}=(-3;-2)$, nên loại **A.**

Phương án B: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ nên loại **B.**

Phương án C: $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{13}$ nên loại **C.** $\overrightarrow{AC}=\left(3;-\frac{9}{2}\right)$

Phương án D: Ta có $\overrightarrow{BC}=\left(6;-\frac{5}{2}\right)$ suy ra $BC=\sqrt{6^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{13}{2}$ nên chọn **D.**

Câu 10. Cho các vectơ $\vec{a}=(1;-2)$, $\vec{b}=(-2;-6)$. Khi đó góc giữa chúng là

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 135°.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\vec{a}=(1;-2)$, $\vec{b}=(-2;-6)$, suy ra $\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\frac{10}{\sqrt{5}.\sqrt{40}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\left(\vec{a};\vec{b}\right)=45^\circ$.

Câu 11. Cho $\overrightarrow{OM}=(-2;-1)$, $\overrightarrow{ON}=(3;-1)$. Tính góc của $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right)$

A. 135°. **B.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** -135°. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\cos\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right)=\dfrac{\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|.\left|\overrightarrow{ON}\right|}=\dfrac{-5}{\sqrt{5}.\sqrt{10}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right)=135^{\circ}$.

Câu 12. Trong mặt phẳng Oxy cho $\vec{a}=(1;3),\vec{b}=(-2;1)$. Tích vô hướng của 2 vectơ $\vec{a}.\vec{b}$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\vec{a}=(1;3),\vec{b}=(-2;1)$, suy ra $\vec{a}.\vec{b}=1.(-2)+3.1=1$.

Câu 13. Cặp vectơ nào sau đây vuông góc?

A. $\vec{a}=(2;-1)$ và $\vec{b}=(-3;4)$. **B.** $\vec{a}=(3;-4)$ và $\vec{b}=(-3;4)$.

C. $\vec{a}=(-2;-3)$ và $\vec{b}=(-6;4)$. **D.** $\vec{a}=(7;-3)$ và $\vec{b}=(3;-7)$.

Lời giải

Chọn C

Phương án A: $\vec{a}.\vec{b}=2.(-3)+(-1).4=-10\neq0$ suy ra A sai.

Phương án B: $\vec{a}.\vec{b}=3.(-3)+(-4).4\neq0$ suy ra B sai.

Phương án C: $\vec{a}.\vec{b}=-2.(-6)-3.4=0\Rightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$ suy ra C đúng.

Phương án D: $\vec{a}.\vec{b}=7.3+(-3).(-7)=42\neq0$ suy ra D sai.

Câu 14. Cho 2 vec tơ $\vec{a}=(a_1;a_2),\vec{b}=(b_1;b_2)$, tìm biểu thức sai:

A. $\vec{a}.\vec{b}=a_1.b_1+a_2.b_2$. **B.** $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

C. $\vec{a}.\vec{b}=\dfrac{1}{2}\left[\vec{a}^2+\vec{b}^2-\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2\right]$. **D.** $\vec{a}.\vec{b}=\dfrac{1}{2}\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2-\vec{a}^2-\vec{b}^2\right]$.

Lời giải

Chọn C

Phương án A: biểu thức tọa độ tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}=a_1.b_1+a_2.b_2$ nên loại A

Phương án B: Công thức tích vô hướng của hai véc tơ $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ nên loại B

Phương án C: $\dfrac{1}{2}\left[\vec{a}^2+\vec{b}^2-\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2\right]=\dfrac{1}{2}\left[\vec{a}^2+\vec{b}^2-\left(\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\vec{b}\right)\right]=-\vec{a}\vec{b}$ nên chọn **C.**

Câu 15. Cho tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(-1;1)$, $C(5;-1)$.Tính $\cos A$

A. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{-1}{\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{-2}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;-1)$, $\overrightarrow{AC}=(4;-3)$ suy ra

$\cos A=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC}=\dfrac{(-2).4+(-1).(-3)}{\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}.\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{25}}=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 16. Trong mặt phẳng $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ cho 2 vectơ : $\vec{a}=3\vec{i}+6\vec{j}$ và $\vec{b}=8\vec{i}-4\vec{j}$. Kết luận nào sau đây sai?

A. $\vec{a}.\vec{b}=0$. **B.** $\vec{a}\perp\vec{b}$. **C.** $\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|=0$. **D.** $\left|\vec{a}.\vec{b}\right|=0$.

Lời giải

Chọn C

$\vec{a}=(3;6);\vec{b}=(8;-4)$

Phương án A: $\vec{a}.\vec{b}=24-24=0$ nên loại A

Phương án B: $\vec{a}.\vec{b}=0$ suy ra $\vec{a}$ vuông góc $\vec{b}$ nên loại B

Phương án C: $|\vec{a}|.|\vec{b}|=\sqrt{3^2+6^2}.\sqrt{8^2+(-4)^2}\neq 0$ nên chọn **C.**

Câu 17. Trong mặt phẳng Oxy cho $A(1;2), B(4;1), C(5;4)$. Tính $\widehat{BAC}$?

A. 60°. **B.** 45°. **C.** 90°. **D.** 120°.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;-1)$, $\overrightarrow{AC}=(4;2)$ suy ra $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC}=\dfrac{10}{\sqrt{10}.\sqrt{20}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=45^\circ$.

Câu 18. Cho các vectơ $\vec{a}=(1;-3)$, $\vec{b}=(2;5)$. Tính tích vô hướng của $\vec{a}\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)$

A. 16. **B.** 26. **C.** 36. **D.** -16.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\vec{a}.\vec{a}=10$, $\vec{a}.\vec{b}=-13$ suy ra $\vec{a}\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)=-16$.

Câu 19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba vectơ $\vec{a}=(-2;3)$, $\vec{b}=(4;1)$ và $\vec{c}=k\vec{a}+m\vec{b}$ với $k,\ m\in\mathbb{R}$. Biết rằng vectơ $\vec{c}$ vuông góc với vectơ $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2k=2m$ **B.** $3k=2m$ **C.** $2k+3m=0$ **D.** $3k+2m=0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases}\vec{c}=k\vec{a}+m\vec{b}=(-2k+4m;3k+m)\\ \vec{a}+\vec{b}=(2;4)\end{cases}$.

Để $\vec{c}\perp\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\Leftrightarrow\vec{c}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=0\Leftrightarrow 2(-2k+4m)+4(3k+m)=0\Leftrightarrow 2k+3m=0.$

Câu 20. Trên trục $\left(O;\vec{i}\right)$ cho 4 điểm *A, B, C, D* có tọa độ lần lượt là *a, b, c, d*. Gọi *E, F, G, H* (có tọa độ lần lượt là *e, f, g, h*) theo thứ tự là trung điểm của *AB*, *BC*, *CD*, ***DA***. Xét các mệnh đề:

I. $e+f+g+h=a+b+c+d$

II. $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH}$

III. $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$

Trong các mệnh đề trên mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ I **B.** II và III **C.** I, II, III **D.** Chỉ III

Lời giải

+ Áp dụng công thức tọa độ trung điểm $\Rightarrow I$ đúng.

+ Lấy E làm gốc trục thì $x_E=e=0\Rightarrow g=f+h\Rightarrow$ II đúng.

+ $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CE}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}\right)$ chỉ bằng $\vec{0}$ khi B là trung điểm của AB nên III sai.

Đáp án B

Câu 21. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{a}=(2;-1)$ và $\vec{b}=(-3;4)$. Khẳng định nào sau đây là **sai?**

A. Tích vô hướng của hai vectơ đã cho là -10. **B.** Độ lớn của vectơ $\vec{a}$ là $\sqrt{5}$.

C. Độ lớn của vectơ $\vec{b}$ là 5. **D.** Góc giữa hai vectơ là 90°.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$ nên B đúng.

$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$ nên C đúng.

$\vec{a}.\vec{b}=2.(-3)+(-1).4=-10\neq 0$ nên A đúng, D sai.

Câu 22. Cho tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(-1;1)$, $C(5;-1)$.Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

A. 7. **B.** 5. **C.** -7. **D.** -5.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(-2).4+(-1).(-3)=-5$.

Câu 23. Trong mặt phẳng Oxy cho $A(-1;1)$, $B(1;3)$, $C(1;-1)$. Khẳng định nào sau đây đúng.

A. $\overrightarrow{AB}=(4;2)$, $\overrightarrow{BC}=(2;-4)$. **B.** $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$.

C. Tam giác ABC vuông cân tại A. **D.** Tam giác ABC vuông cân tại B.

Lời giải

Chọn C

Phương án A: do $\overrightarrow{AB}=(2;2)$ nên loại **A.**

Phương án B: $\overrightarrow{AB}=(2;2)$, $\overrightarrow{BC}=(0;-4)$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-8$ suy ra $\overrightarrow{AB}$ không vuông góc $\overrightarrow{BC}$ nên loại **B.**

Phương án C: Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;2)$, $\overrightarrow{AC}=(2;-2)$, $\overrightarrow{BC}=(0;-4)$, suy ra $AB=AC=\sqrt{8}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ .Nên Tam giác ABC vuông cân tại A .Do đó chọn **C.**

Câu 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(3;-1)$, $B(2;10)$, $C(-4;2)$ Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=40$ **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-40$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=26$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-26$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;11)$, $\overrightarrow{AC}=(-7;3)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(-1).(-7)+11.3=40$

Câu 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(3;-1)$ và $B(2;10)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}$

A. $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=-4$. **B.** $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=0$. **C.** $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=4$. **D.** $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=16$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AO}=(-3;1)$, $\overrightarrow{OB}=(2;10)$.Suy ra $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=-3.2+1.10=4$.

Câu 26. Trên trục (Δ) cho bốn điểm *A, B, C, D* bất kì. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $\overline{AB}.\overline{CD}+\overline{AC}.\overline{DB}+\overline{AD}.\overline{BC}=0$ **B.** $\overline{AB}.\overline{DB}+\overline{AC}.\overline{BC}+\overline{AD}.\overline{CD}=0$

C. $\overline{AB}.\overline{AC}+\overline{AD}.\overline{BC}+\overline{BC}.\overline{CD}=0$ **D.** $\overline{BD}.\overline{BC}+\overline{AD}.\overline{AC}+\overline{CB}.\overline{CA}=0$

Lời giải

Chọn gốc tọa độ $O\equiv A\Rightarrow x_A=0, x_B=\overrightarrow{AB}, x_C=\overrightarrow{AC}, x_D=\overrightarrow{AD}$

Từ đáp án A: $VT=x_B\left(x_D-x_C\right)+x_C\left(x_B-x_D\right)+x_D\left(x_C-x_B\right)=0$

Đáp án A

Câu 27. Trên trục $\left(O;\vec{i}\right)$ cho ba điểm *A, B, C* có tọa độ lần lượt là $-5;2;4$. Khi đó tọa độ điểm *M* thảo mãn $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ là:

A. $\frac{10}{3}$ **B.** $\frac{10}{9}$ **C.** $\frac{5}{3}$ **D.** $\frac{5}{4}$

Lời giải

Đáp án B

$$2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\left(-5-x_M\right)+3\left(4-x_M\right)+4\left(2-x_M\right)=0\Leftrightarrow x_M=\frac{10}{9}$$

Câu 28. Trên trục $x'Ox$ cho tọa độ các điểm *B, C* lần lượt là $m-2$ và m^2+3m+2. Tìm *m* để đoạn thẳng *BC* có độ dài nhỏ nhất.

A. $m=2$ **B.** $m=1$ **C.** $m=-1$ **D.** $m=-2$

Lời giải

Đáp án C

$BC=\left|\overline{BC}\right|=\left|m^2+2m+4\right|=\left(m+1\right)^2+3\geq 3\ \forall \mathrm{m}\in\mathbb{R}$. *BC* nhỏ nhất khi $m+1=0\Leftrightarrow m=-1$

Câu 29. Trên trục $x'Ox$ cho 4 điểm *A, B, C,* ***D.*** Gọi *I, J, K, L* lần lượt là trung điểm của *AC, DB, AD, BC.* Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{IJ}$ **B.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{KI}$

C. Trung điểm các đoạn *IJ* và *KL* trùng nhau **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{IK}$

Lời giải

Đáp án D

Ta có:

$$x_D-x_A+x_B-x_C=x_B+x_D-\left(x_A+x_C\right)=2x_J-2x_I=2\left(x_J-x_I\right)$$

Là tọa độ của $2\overrightarrow{IJ}$ nên A đúng.

Tương tự:

$\left(x_C-x_A\right)+\left(x_B-x_D\right)=2\left(x_L-x_K\right)$ là tọa độ của $2\overrightarrow{KL\Rightarrow}$ B đúng.

Gọi *E, F* là trung điểm của *IJ* và *KL*

$$\begin{matrix} x_E=\frac{1}{2}\left(x_I+x_J\right)=\frac{1}{4}\left(x_A+x_C\right)+\frac{1}{4}\left(x_D+x_B\right) \\ x_F=\frac{1}{2}\left(x_K+x_L\right)=\frac{1}{4}\left(x_A+x_D\right)+\frac{1}{4}\left(x_C+x_B\right) \end{matrix}\Rightarrow x_E=x_F\Rightarrow \text{C đúng.}$$

Vậy đáp án D sai.

Câu 30. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(-3;2)$ và $\vec{b}=(-1;-7)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{c}$ biết $\vec{c}.\vec{a}=9$ và $\vec{c}.\vec{b}=-20$

A. $\vec{c}=(-1;-3)$ **B.** $\vec{c}=(-1;3)$ **C.** $\vec{c}=(1;-3)$ **D.** $\vec{c}=(1;3)$

Lời giải

Chọn B

Gọi $\vec{c}=(x;y)$

Ta có $\begin{cases}\vec{c}.\vec{a}=9\\ \vec{c}.\vec{b}=-20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3x+2y=9\\ -x-7y=-20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\ y=3\end{cases} \longrightarrow \vec{c}=(-1;3)$

Câu 31. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba vectơ $\vec{a}=(1;2)$, $\vec{b}=(4;3)$ và $\vec{c}=(2;3)$.

Tính $P=\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})$.

A. $P=0$ **B.** $P=18$ **C.** $P=20$ **D.** $P=28$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\vec{b}+\vec{c}=(6;6)$. Suy ra $P=\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=1.6+2.6=18$.

Câu 32. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(-2;-1)$ và $\vec{b}=(4;-3)$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

A. $\cos(\vec{a},\vec{b})=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ **B.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ **C.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\frac{-2.4+(-1).(-3)}{\sqrt{4+1}.\sqrt{16+9}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

Câu 33. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;2)$ và $B(-3;1)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục tung sao cho tam giác ABC vuông tại A.

A. $C(0;6)$. **B.** $C(5;0)$. **C.** $C(3;1)$. **D.** $C(0;-6)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $C\in Oy$ nên $C(0;c)$ và $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-4;-1)\\ \overrightarrow{AC}=(-1;c-2)\end{cases}$.

Tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow (-4).(-1)+(-1)(c-2)=0 \Leftrightarrow c=6$.

Vậy $C(0;6)$.

Câu 34. Tìm x để hai vectơ $\vec{a}=(x;2)$ và $\vec{b}=(2;-3)$ có giá vuông góc với nhau.

A. 3. **B.** 0. **C.** -3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Vectơ $\vec{a}=(x;2)$ và $\vec{b}=(2;-3)$ có giá vuông góc với nhau $\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}=0 \Leftrightarrow 2x-6=0 \Leftrightarrow x=3$

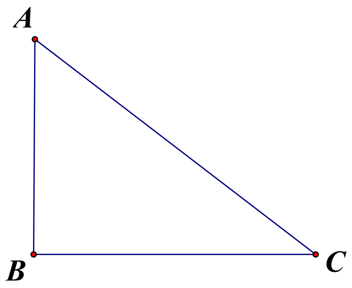
Vậy $x=3$.

Câu 35. Cho tam giác ABC có $A(-1;2), B(0;3), C(5;-2)$. Tìm tọa độ chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC.

A. $(0;3)$. **B.** $(0;-3)$. **C.** $(3;0)$. **D.** $(-3;0)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;1); \overrightarrow{AC}=(6;-4); \overrightarrow{BC}=(5;-5)$.

Nhận thấy rằng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=1.5+1.(-5)=0$ nên tam giác ABC vuông tại B.

Vậy chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC trùng với đỉnh $B(0;3)$.

Câu 36. Trên trục $x'Ox$ cho 4 điểm *A, B, C,* ***D.*** Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $\overline{DA}^2.\overline{BC}+\overline{DB}^2.\overline{CA}+\overline{DC}^2.\overline{AB}+\overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB}=0$

B. $\overline{DA}^2.\overline{BC}+\overline{DB}^2.\overline{CA}+\overline{DC}^2.\overline{AB}=0$

C. $\overline{AB}^2.\overline{BC}+\overline{CD}^2.\overline{DB}+\overline{DB}^2.\overline{CA}=0$

D. $\overline{DA}.\overline{BC}+\overline{DB}.\overline{CA}+\overline{CD}.\overline{AB}+\overline{BC}.\overline{AB}=0$

Lời giải

Đáp án A

Chọn *D* là gốc tọa độ và *a, b, c* lần lượt là tọa độ của *A, B,* ***C.***

Ta có:

$$\overline{DA}^2.\overline{CB}+\overline{DB}^2.\overline{CA}+\overline{DC^2}.\overline{AB}+\overline{AB}.\overline{CA}.\overline{AB}=0$$
$$=a^2(c-b)+b^2(c-a)+c^2(b-a)+(c-b)(a-c)(b-a)$$
$$=a^2c-a^2b+b^2a-b^2c+c^2b-c^2a+c^2b-c^2a+abc-c^2b-b^2a+b^2c-a^2c+c^2a+a^2b-abc=0$$

Câu 37. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{u}=(1;2)$ và $\vec{v}=(4m;2m-2)$. Tìm m để vectơ $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

A. $m=\frac{1}{2}$. **B.** $m=-\frac{1}{2}$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

Lời giải

Chọn A

Hai vectơ $\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0 \Leftrightarrow 4m+2.(2m-2)=0 \Leftrightarrow 8m-4=0 \Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$.

Câu 38. Xác định tọa độ của vectơ $\vec{c}=\vec{a}+3\vec{b}$ biết $\vec{a}=(2;-1),\vec{b}=(3;4)$

A. $\vec{c}=(11;11)$ **B.** $\vec{c}=(11;-13)$ **C.** $\vec{c}=(11;13)$ **D.** $\vec{c}=(7;13)$

Lời giải

$\vec{c}=\vec{a}+3\vec{b}=(2;-1)+(9;12)=(11;11)$

Đáp án A

Câu 39. Cho $\vec{a}=(2;1),\vec{b}=(3;4),\vec{c}=(-7;2)$. Tìm vectơ $\vec{x}$ sao cho $\vec{x}-2\vec{a}=\vec{b}-3\vec{c}$.

A. $\vec{x}=(28;2)$ **B.** $\vec{x}=(13;5)$ **C.** $\vec{x}=(16;4)$ **D.** $\vec{x}=(28;0)$

Lời giải

$\vec{x}-2\vec{a}=\vec{b}-3\vec{c}\Leftrightarrow\vec{x}=2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}=(28;0)$

Đáp án D

Câu 40. Xác định tọa độ vectơ $\vec{c}=5\vec{a}-2\vec{b}$ biết $\vec{a}=(3;-2),\vec{b}=(1;4)$

A. $\vec{c}=(2;-11)$ **B.** $\vec{c}=(-2;11)$ **C.** $\vec{c}=(2;11)$ **D.** $\vec{c}=(11;2)$

Lời giải

Đáp án D

$\vec{c}=3(3;-2)+2(1;4)=(11;2)$

Câu 41. Cho $\vec{a}=(3;-1),\vec{b}=(0;4),\vec{c}=(5;3)$. Tìm vectơ $\vec{x}$ sao cho $\vec{x}-\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}=\vec{0}$.

A. $(18;0)$ **B.** $(-8;18)$ **C.** $(8;18)$ **D.** $(8;-18)$

Lời giải

Đáp án A

$\vec{x}-\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{x}=\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}=(18;0)$

Câu 42. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $(O;\vec{i},\vec{j})$, cho hai vectơ $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}$ và $\vec{b}=(-4;2)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng. **B.** $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

C. $\vec{a}=(-1;2)$. **D.** $\vec{a}=(2;1)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}\Rightarrow\vec{a}=(2;-1)\Rightarrow\vec{b}=-2\vec{a}$

$\Rightarrow\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

Câu 43. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $B(-1;3)$ và $C(3;1)$. Tìm tọa độ điểm A sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

A. $A(0;0)$ hoặc $A(2;-4)$. **B.** $A(0;0)$ hoặc $A(2;4)$.

C. $A(0;0)$ hoặc $A(-2;-4)$. **D.** $A(0;0)$ hoặc $A(-2;4)$.

Lời giải

Chọn B

Tìm tọa độ điểm A sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Gọi $A(x;y)$. Tam giác ABC vuông cân tại $A\Leftrightarrow\begin{cases}AB=AC\\AB\perp AC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}AB^2=AC^2\\\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(-1-x)^2+(3-y)^2=(3-x)^2+(1-y)^2\\(-1-x)(3-x)+(3-y)(1-y)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x=y\\x^2+y^2-2x-4y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x=y\\x^2-2x=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x=y\\\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0,\ y=0\\x=2,\ y=4\end{array}\right..$$

Vậy $A(0;0)$ hoặc $A(2;4)$.

Câu 44. Cho véc tơ $\vec{a}(1;-2)$. Với giá trị nào của y thì véc tơ $\vec{b}=(3;y)$ tạo với véctơ $\vec{a}$ một góc 45°

A. $y=-9$. **B.** $\left[\begin{array}{l}y=-1\\y=9\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}y=1\\y=-9\end{array}\right.$. **D.** $y=-1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{3-2y}{\sqrt{5}.\sqrt{9+y^2}}$.

Góc giữa hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 45° suy ra $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{3-2y}{\sqrt{5}.\sqrt{9+y^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (1).

$$(1)\Leftrightarrow \sqrt{90+10y^2}=6-4y \Leftrightarrow \begin{cases}6-4y\ge 0\\90+10y^2=(6-4y)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y\le \dfrac{3}{2}\\y^2-8y-9=0\end{cases} \Leftrightarrow y=-1.$$

Câu 45. Cho hai vecto $\vec{a}$, $\vec{b}$ sao cho $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{2}$, $\left|\vec{b}\right|=2$ và hai véc tơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. 120°. **B.** 60°. **C.** 90°. **D.** 30°.

Lời giải

Chọn C

Vì hai véc tơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}$ vuông góc với nhau nên

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right).\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)=0 \Leftrightarrow 2\vec{a}^2-\vec{b}^2+\vec{a}.\vec{b}=0 \Leftrightarrow 2.\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2.\left(\sqrt{2}\right)^2-2^2+\sqrt{2}.2.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0 \Leftrightarrow \cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0 \Leftrightarrow \left(\vec{a},\vec{b}\right)=90^\circ.$$

Câu 46. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $\vec{a}=(2;1)$, $\vec{b}=(3;4)$, $\vec{c}=(7;2)$. Cho biết $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ khi đó.

A. $m=\dfrac{22}{5};\ n=\dfrac{3}{5}$. **B.** $m=-\dfrac{22}{5};\ n=-\dfrac{3}{5}$. **C.** $m=\dfrac{1}{5};\ n=\dfrac{-3}{5}$. **D.** $m=\dfrac{22}{5};\ n=\dfrac{-3}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $m\vec{a}+n\vec{b}=(2m+3n;m+4n)$.

Có $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases}2m+3n=7\\m+4n=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=\dfrac{22}{5}\\n=\dfrac{-3}{5}\end{cases}$.

Câu 47. Trong mặt phẳng Oxy, cho các điểm $A(4;2), B(-2;1), C(0;3), M(-3;7)$. Giả sử $\overrightarrow{AM} = x.\overrightarrow{AB} + y.\overrightarrow{AC} (x, y \in \mathbb{R})$. Khi đó $x+y$ bằng

A. $\frac{12}{5}$. **B.** 5. **C.** $-\frac{12}{5}$. **D.** -5.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{AM}(-7;5)$, $\overrightarrow{AB}(-6;-1), \overrightarrow{AC}(-4;1)$.

Giả sử $\overrightarrow{AM} = x.\overrightarrow{AB} + y.\overrightarrow{AC} (x, y \in \mathbb{R})$.

Hệ phương trình $\begin{cases} 6x+4y=7 \\ x-y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{13}{10} \\ y=\frac{37}{10} \end{cases}$.

Câu 48. Trong mặt phẳng Oxy ;cho các véc tơ $\vec{a}=(2;-1); \vec{b}=(0;4)$ và $\vec{c}=(3;3)$. Gọi m và n là hai số thực sao cho $\vec{c}=m\vec{a}-n\vec{b}$. Tính giá trị biểu thức $P=m^2+n^2$.

A. $P=\frac{225}{64}$. **B.** $P=\frac{100}{81}$. **C.** $P=\frac{97}{64}$. **D.** $P=\frac{193}{64}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $m\vec{a}-n\vec{b}=(2m;-m-4n)$.

Khi đó $\vec{c}=m\vec{a}-n\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m=3 \\ -m-4n=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\frac{3}{2} \\ n=\frac{-9}{8} \end{cases}$.

Vậy $P=m^2+n^2=\frac{225}{64}$.

Câu 49. Cho $\vec{a}=(2;\ 1)$, $\vec{b}=(-3;\ 4)$, $\vec{c}=(-4;\ 9)$. Hai số thực m, n thỏa mãn $m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{c}$. Tính m^2+n^2?

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-3n=-4 \\ m+4n=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=2 \end{cases}$.

Câu 50. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{a}=(2;1); \vec{b}=(3;4); \vec{c}(7;2)$. Tìm m, n để $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$.

A. $m=-\frac{22}{5}, n=-\frac{3}{5}$ **B.** $m=\frac{1}{5}, n=-\frac{3}{5}$ **C.** $m=\frac{22}{5}, n=-\frac{3}{5}$ **D.** $m=\frac{22}{5}, n=\frac{3}{5}$

Lời giải

Ta có $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+3n=7 \\ m+4n=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\frac{22}{5} \\ n=-\frac{3}{5} \end{cases}$

Đáp án C

Câu 51. Cho các vectơ $\vec{a}=(4;-2), \vec{b}=(-1;-1)$, $\vec{c}=(2;5)$ Phân tích vectơ $\vec{a}$ và $\vec{c}$ ta được:

A. $\vec{b}=-\frac{1}{8}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{c}$ **B.** $\vec{b}=\frac{1}{8}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{c}$ **C.** $\vec{b}=-\frac{1}{8}\vec{a}-4\vec{c}$ **D.** $\vec{b}=-\frac{1}{8}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{c}$

Lời giải

Đáp án A

Giả sử $\vec{b}=m\vec{a}+n\vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases}-1=4m+2n\\-1=-2m+5n\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=-\frac{1}{8}\\m=-\frac{1}{4}\end{cases}$

Câu 52. Cho vectơ $\vec{a}=(2;1),\vec{b}=(3;4),\ \vec{c}=(7;2)$. Khi đó $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{c}$. Tính tổng $m+n$ bằng:

A. 5 **B.** $3,8$ **C.** -5 **D.** $-3,8$

Lời giải

Đáp án B

$\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases}7=2m+3n\\2=m+4n\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=4,4\\n=-0\end{cases} \Rightarrow m+n=3,8$

Câu 53. Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho 4 điểm $A(1;-2),B(0;3),C(-3;4),\mathrm{D}(-1;8)$. Phân tích $\overrightarrow{CD}$ qua $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ **C.** $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ **D.** $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Lời giải

Đáp án B

$\overrightarrow{CD}=(2;4),\overrightarrow{AB}=(-1;5),\overrightarrow{AC}=(-4;6),\overrightarrow{CD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-x-4y=2\\5x+6y=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

Câu 54. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC biết $A(2;-3),B(4;7),C(1;5)$. Tọa độ trọng tâm G của ΔABC là

A. $(7;15)$. **B.** $\left(\frac{7}{3};5\right)$. **C.** $(7;9)$. **D.** $\left(\frac{7}{3};3\right)$.

Lời giải

Chọn D

Do G là trọng tâm ΔABC nên $\begin{cases}x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}\\y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_G=\frac{7}{3}\\y_G=3\end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{7}{3};3\right)$.

Câu 55. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(2;-3),B(4;7)$. Tìm tọa độ trung điểm I của AB.

A. $(3;2)$. **B.** $(2;10)$. **C.** $(6;4)$. **D.** $(8;-21)$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức: I là trung điểm của đoạn thẳng AB: $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$

Do đó: $\begin{cases} x_I = \dfrac{2+4}{2} = 3 \\ y_I = \dfrac{-3+7}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow I(3;2)$.

Câu 56. Cho ΔABC có $A(4;9)$, $B(3;7)$, $C(x-1;y)$. Để $G(x;y+6)$ là trọng tâm ΔABC thì giá trị x và y là

A. $x=3,\ y=1$. **B.** $x=-3,\ y=-1$. **C.** $x=-3,\ y=1$. **D.** $x=3,\ y=-1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có : $\begin{cases} 3x = 4+3+x-1 \\ 3(y+6) = 9+7+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$.

Câu 57. Trong hệ tọa độ *Oxy*, cho $A(2;-3); B(4;7)$. Tìm tọa độ trung điểm *I* của đoạn ***AB.***

A. $I(6;4)$ **B.** $I(2;10)$ **C.** $I(3;2)$ **D.** $I(8;-21)$

Lời giải

Ta có $I\left(\dfrac{2+4}{2};\dfrac{-3+7}{2}\right) = (3;2)$.

Đáp án C

Câu 58. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;1)$, $B(-1;-2)$, $C(-3;2)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

A. $G\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$. **B.** $G\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)$. **C.** $G\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$. **D.** $G\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là $G\left(\dfrac{2-1-3}{3};\dfrac{1-2+2}{3}\right) \Rightarrow G\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

Câu 59. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có ba đỉnh $A(-1;2)$, $B(2;0)$, $C(-3;1)$. Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC là

A. $G\left(-\dfrac{2}{3};1\right)$. **B.** $G\left(\dfrac{2}{3};-1\right)$. **C.** $G\left(-\dfrac{4}{3};1\right)$. **D.** $G\left(\dfrac{4}{3};-1\right)$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $G(x;y)$ khi đó: $\begin{cases} x = \dfrac{-1+2-3}{3} \\ y = \dfrac{2+0+1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3} \\ y = 1 \end{cases}$.

Suy ra: $G\left(-\frac{2}{3};1\right)$.

Câu 60. Trong hệ tọa độ *Oxy*, cho $A(-4;1);B(2;4);C(2;-2)$. Tìm tọa độ điểm *D* sao cho C là trọng tâm ΔABD

A. $D(8;11)$ **B.** $D(12;11)$ **C.** $D(8;-11)$ **D.** $D(-8;-11)$

Lời giải

Gọi $D(x;y)$. C là trọng tâm ΔABD khi đó: $\begin{cases} 2=\dfrac{-4+2+x}{3} \\ -2=\dfrac{1+4+y}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=-11 \end{cases} \Rightarrow D(8;-11)$

Đáp án C

Câu 61. Trong hệ tọa độ *Oxy*, cho ΔABC có $A(3;5)$, $B(1;2)$, $C(5;2)$. Tìm tọa độ trọng tâm *G* của tam giác.

A. $G(-3;4)$ **B.** $G(4;0)$ **C.** $G(2;3)$ **D.** $G(3;3)$

Lời giải

Đáp án D

Ta có $G=\left(\frac{3+1+5}{3};\frac{5+2+2}{3}\right)=(3;3)$

Câu 62. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho bốn điểm $A(3;-5), B(-3;3), C(-1;-2), D(5;-10)$. Hỏi $G\left(\frac{1}{3};-3\right)$ là trọng tâm của tam giác nào dưới đây?

A. ABC. **B.** BCD. **C.** ACD. **D.** ABD.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy $\overrightarrow{BC}=(2;-5), \overrightarrow{BD}=(8;-13)$ nên chúng không cùng phương $\Rightarrow B,C,D$ là 3 đỉnh của một tam giác.

Mặt khác, ta lại có $\begin{cases} \dfrac{x_B+x_C+x_D}{3}=\dfrac{-3-1+5}{3}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{y_B+y_C+y_D}{3}=\dfrac{3-2-10}{3}=-3 \end{cases}$

Vậy $G\left(\frac{1}{3};-3\right)$ là trọng tâm của tam giác BCD

Câu 63. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $D(3;4), E(6;1), F(7;3)$ lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CA. Tính tổng tung độ ba đỉnh của tam giác ABC.

A. $\frac{16}{3}$. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** 8. **D.** 16.

Lời giải

Chọn C

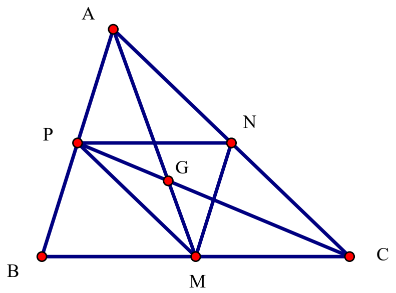
Ta có $\begin{cases} y_A + y_B = 2y_D = 2.4 = 8 \\ y_A + y_C = 2y_F = 2.3 = 6 \Rightarrow 2\left(y_A + y_B + y_C\right) = 8 + 6 + 2 = 16 \\ y_B + y_C = 2y_E = 2.1 = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow y_A + y_B + y_C = 8$. Chọn **C.**

Câu 64. Cho tam giác ABC. Biết trung điểm của các cạnh BC, CA, AB có tọa độ lần lượt là $M\left(1;-1\right)$, $N\left(3;2\right)$, $P\left(0;-5\right)$. Khi đó tọa độ của điểm A là:

A. $\left(2;-2\right)$. **B.** $\left(5;1\right)$. **C.** $\left(\sqrt{5};0\right)$. **D.** $\left(2;\sqrt{2}\right)$.

Lời giải



Chọn A

Có tam giác ΔABC và ΔMNP có cùng trọng tâm G.

Có $G\left(\frac{4}{3};-\frac{4}{3}\right)$, $\overrightarrow{GM} = \left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$, gọi $A\left(x;y\right)$.

Có $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3} - x = -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} - y = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$. Vậy $A\left(2;-2\right)$.

Câu 65. Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho ΔMNP có $M\left(1;-1\right); N\left(5;-3\right)$ và *P* thuộc trục *Oy*. Trọng tâm *G* của tam giác nằm trên trục *Ox*. Tọa độ của điểm *P* là:

A. $P\left(0;4\right)$ **B.** $P\left(2;0\right)$ **C.** $P\left(2;4\right)$ **D.** $P\left(0;2\right)$

Lời giải

Đáp án C

Ta có *P* thuộc $Oy \Rightarrow \left(0;y\right)$, *G* thuộc trục $Ox \Rightarrow G\left(x;0\right)$

Vì *G* là trọng tâm $\Delta MNP \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1+5+0}{3} \\ 0 = \frac{-1-3+y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$

Câu 66. Trong hệ tọa độ *Oxy*, cho $M\left(3;-4\right)$. Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của *M* trên *Ox*, *Oy*. Khẳng định nào đúng?

A. $\overline{OM_1} = -3$ **B.** $\overline{OM_2} = 4$

C. $\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2} = \left(-3;4\right)$ **D.** $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = \left(3;-4\right)$

Lời giải

Đáp án D

Ta có $M_1(3;0), M_2(0;-4)$

Câu 67. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác MNP có $M(1;\ -1)$, $N(5;\ -3)$ và P là điểm thuộc trục Oy, trọng tâm G của tam giác MNP nằm trên trục Ox. Tọa độ điểm P là

A. $(2;\ 4)$. **B.** $(0;\ 4)$. **C.** $(0;\ 2)$. **D.** $(2;\ 0)$.

Lời giải

Chọn B

$P \in Oy \Rightarrow P(0;\ y)$.

$G \in Ox \Rightarrow G(x;\ 0)$.

Điểm G là trọng tâm của tam giác MNP $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1+5+0}{3} \\ 0 = \dfrac{(-1)+(-3)+y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$.

Câu 68. Trên mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai điểm $A(1;1), B(2;4)$. Tìm tọa độ điểm M để tứ giác $OBMA$ là một hình bình hành.

A. $M(-3;-3)$. **B.** $M(3;-3)$. **C.** $M(3;3)$. **D.** $M(-3;3)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x;y)$. Khi đó $\overrightarrow{OB}(2;4), \overrightarrow{AM}(x-1;y+1)$

Tứ giác $OBMA$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=2 \\ y+1=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$

Vậy $M(3;3)$

Câu 69. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(2;5), B(1;1), C(3;3)$, một điểm E thỏa mãn $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$. Tọa độ của E là

A. $(-3;3)$. **B.** $(-3;-3)$. **C.** $(3;-3)$. **D.** $(-2;-3)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{AB}(-1;-4)$; $\overrightarrow{AC}(1;-2)$. Gọi $E(x;y)$.

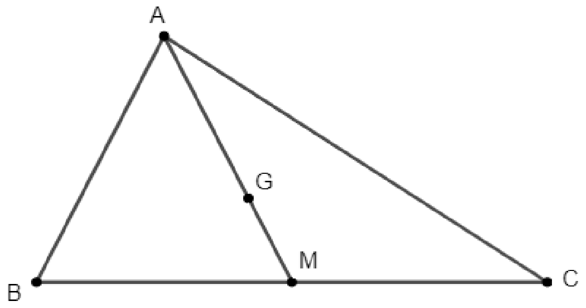
$\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 3(-1) - 2.1 \\ y-5 = 3(-4) - 2(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-3 \end{cases} \Rightarrow E(-3;-3)$

Câu 70. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có trọng tâm $G\left(\dfrac{2}{3};\ 0\right)$, biết $M(1;-1)$ là trung điểm của cạnh BC. Tọa độ đỉnh A là

A. $(2;\ 0)$. **B.** $(-2;\ 0)$. **C.** $(0;-2)$. **D.** $(0;\ 2)$.

Lời giải

Chọn B



Gọi $A(x_A;y_A)$. Ta tính được $\overrightarrow{AM}=(1-x_A;-1-y_A)$, $\overrightarrow{GM}=\left(\frac{1}{3};-1\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{GM}\Leftrightarrow\begin{cases}1-x_A=1\\-1-y_A=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_A=0\\y_A=2\end{cases}$. Vậy $A(0;\ 2)$.

Câu 71. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(2;3)$, $B(-2;1)$. Điểm C thuộc tia Ox sao cho tam giác ABC vuông tại C có tọa độ là:

A. $C(3;0)$. **B.** $C(-3;0)$. **C.** $C(-1;0)$. **D.** $C(2;0)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có : $C\in Ox\Rightarrow C(x;0)$. Khi đó : $\overrightarrow{AC}=(x-2;-3)$; $\overrightarrow{BC}=(x+2;-1)$.

Tam giác ABC vuông tại $C\Rightarrow\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow x^2-4+3=0\Leftrightarrow x=\pm1$.

Vậy $C(-1;0)$ hoặc $C(1;0)$.

Câu 72. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(3;3)$, $B(-1;-9)$, $C(5;-1)$. Gọi I là trung điểm của AB. Tìm tọa độ M sao cho $\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CI}$.

A. $(5;4)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-6;-1)$. **D.** $(2;1)$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $M(x;y)$. Ta có $I(1;-3),\overrightarrow{CI}(-4;-2),\overrightarrow{AM}=(x-3;y-3)$.

$\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CI}\Leftrightarrow\begin{cases}x-3=2\\y-3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=4\end{cases}$. Vậy $M(5;4)$.

Câu 73. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC có $A(-3;3),B(1;4),C(2;-5)$. Tọa độ điểm M thỏa mãn $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{CM}$ là:

A. $M\left(\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right)$ **B.** $M\left(-\frac{1}{6};-\frac{5}{6}\right)$ **C.** $M\left(\frac{1}{6};-\frac{5}{6}\right)$ **D.** $M\left(\frac{5}{6};-\frac{1}{6}\right)$

Lời giải

Đáp án C

Ta có $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{CM}\Leftrightarrow\begin{cases}2(-3-x_M)-(2-1)=4(x_M-2)\\2(3-y_M)-(5-4)=4(y_M+5)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=\frac{1}{6}\\y_M=-\frac{5}{6}\end{cases}\Rightarrow M\left(\frac{1}{6};-\frac{5}{6}\right)$

Câu 74. Trong hệ tọa độ Oxy, cho $A(2;1), B(1;-3)$. Tìm tọa độ giao điểm I của hai đường chéo hình bình hành $OABC$.

A. $I\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ **B.** $I\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$ **C.** $I(2;6)$ **D.** $I\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$

Lời giải

Đáp án D

I là trung điểm của $OB = I\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$

Câu 75. Trong hệ tọa độ Oxy, cho $A(1;3), B(4;0)$. Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

A. $M(1;18)$ **B.** $M(-1;18)$ **C.** $M(-18;1)$ **D.** $M(1;-18)$

Lời giải

Đáp án D

Ta có

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}(1-x_M)+(4-x_M)-3(2-x_M)=0\\ 3-y_M+(0-y_M)-3(-5-y_M)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_M=1\\ y_M=-18\end{cases}$$

Câu 76. Trong hệ tọa độ Oxy, cho 3 điểm $A(2;5);B(1;1);C(3;3)$. Tìm điểm E thuộc mặt phẳng tọa độ thỏa mãn $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$?

A. $E(3;-3)$ **B.** $E(-3;3)$ **C.** $E(-3;-3)$ **D.** $E(-2;-3)$

Lời giải

Gọi $E(x;y) \Rightarrow \overrightarrow{AE}=(x-2;y-5), \overrightarrow{AB}=(-1;-4), \overrightarrow{AC}=(1;-2)$

$$\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases}x-2=-5\\ y-5=-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-3\\ y=-3\end{cases} \Rightarrow E(-3;-3)$$

Đáp án C

Câu 77. Trong hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có $A(3;4), B(2;1), C(-1;-2)$. Tìm điểm M có tung độ dương trên đường thẳng BC sao cho $S_{ABC}=3S_{ABM}$.

A. $M(2;2)$ **B.** $M(3;2)$ **C.** $M(-3;2)$ **D.** $M(3;3)$

Lời giải

Gọi $M(x;y)$. Ta có: $S_{ABC}=3S_{ABM} \Leftrightarrow BC=3BM \Rightarrow \overrightarrow{BC}=\pm 3\overrightarrow{BM}$

$\overrightarrow{BM}=(x-2;y-1); \overrightarrow{BC}=(-3;3)$

- TH1: $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BM} \Rightarrow \begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}$ (loại)

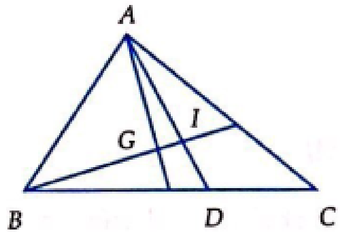
- TH2: $\overrightarrow{BC}=-3\overrightarrow{BM} \Rightarrow \begin{cases}x=3\\ y=2\end{cases}$ (nhận) $\Rightarrow M(3;2)$

Đáp án B

Câu 78. Trong hệ tọa độ Oxy, cho 3 điểm $A(-1;-1), B(0;1), C(3;0)$. Xác định tọa độ giao điểm I của AD và BG với D thuộc BC và $2BD=5DC$, G là trọng tâm ΔABC

A. $I\left(\frac{5}{9};1\right)$ **B.** $I\left(\frac{1}{9};1\right)$ **C.** $I\left(\frac{35}{9};2\right)$ **D.** $I\left(\frac{35}{9};1\right)$

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;2),\overrightarrow{AC}=(4;1)\Rightarrow \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

Ta có $2\overrightarrow{BD}=5\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow \begin{cases}2x_D=5(3-x_D)\\2(y_D-1)=5(-y_D)\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}x_D=\dfrac{15}{7}\\y_D=\dfrac{2}{7}\end{cases}\Rightarrow D\left(\frac{15}{7};\frac{2}{7}\right)$

Trọng tâm $G\left(\frac{2}{3};0\right)$. Gọi $I(x;y)$ là giao điểm của AD và BG

Ta có $\overrightarrow{AI}=(x+1;y+1),\overrightarrow{AD}=\left(\frac{22}{7};\frac{9}{7}\right)$ cùng phương $\Rightarrow \dfrac{7(x+1)}{22}=\dfrac{7(y+1)}{9}\Leftrightarrow 9x-22y-13=0$

Ta lại có $\overrightarrow{BI}=(x;y-1),\overrightarrow{BG}=\left(-\frac{1}{3};0\right)$ cùng phương $\Rightarrow$ tồn tại số $k\in\mathbb{R}$

$\overrightarrow{BI}=k\overrightarrow{BG}\Rightarrow y=1\Rightarrow I\left(\frac{35}{9};1\right)$

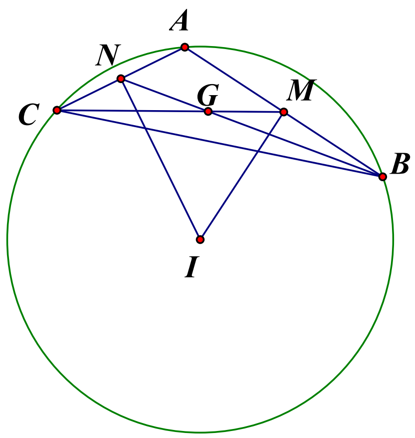
Đáp án D

Câu 79. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có ba đỉnh $A(-1;2)$, $B(2;0)$, $C(-3;1)$. Toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác ABC là

A. $I\left(\frac{11}{14};\frac{13}{14}\right)$. **B.** $I\left(\frac{11}{14};-\frac{13}{14}\right)$. **C.** $I\left(-\frac{11}{14};\frac{13}{14}\right)$. **D.** $I\left(-\frac{11}{14};-\frac{13}{14}\right)$.

Lời giải

Chọn D



Giả sử $I\left(a;b\right)$ khi đó: $\begin{cases}\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}=0\\\overrightarrow{IN}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\ (*)$

$M\left(\dfrac{1}{2};1\right)$, $N\left(-2;\dfrac{3}{2}\right)$ lần lượt là trung điểm AB, AC.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=\left(3;-2\right)$, $\overrightarrow{AC}=\left(-2;-1\right)$, $\overrightarrow{IM}=\left(\dfrac{1}{2}-a;1-b\right)$, $\overrightarrow{IN}=\left(-2-a;\dfrac{3}{2}-b\right)$.

Do đó: $\begin{cases}3\left(\dfrac{1}{2}-a\right)-2\left(1-b\right)=0\\-2\left(-2-a\right)-1\left(\dfrac{3}{2}-b\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{11}{14}\\b=-\dfrac{13}{14}\end{cases}$.

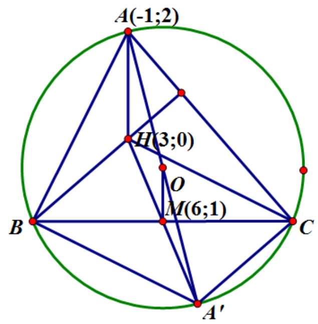
Suy ra: $I\left(-\dfrac{11}{14};-\dfrac{13}{14}\right)$.

Câu 80. Tam giác ABC có đỉnh $A\left(-1;2\right)$, trực tâm $H\left(3;0\right)$, trung điểm của BC là $M\left(6;1\right)$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

A. 5. **B.** $\sqrt{5}$ **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Kẻ đường kính AA' của đường tròn khi đó ta có $\widehat{ABA'}=\widehat{ACA'}=90^\circ$ hay $A'B\perp AB$ và $A'C\perp AC$.

Vì H là trực tâm của tam giác ABC nên $BH\perp AC$ và $CH\perp AB\Rightarrow BH\parallel A'C$ và $CH\parallel A'B$, do đó $A'BHC$ là hình bình hành. Mà điểm M là trung điểm của đường chéo BC nên nó cũng là trung điểm của $A'H$. Từ đó suy ra OM là đường trung bình của tam giác AHA' nên: $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OM}\Leftrightarrow\begin{cases}4=2\left(6-x_O\right)\\-2=2\left(1-y_O\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_O=4\\y_O=2\end{cases}\Leftrightarrow O\left(4;2\right)$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có độ dài bằng $OA=\sqrt{\left(-1-4\right)^2+\left(2-2\right)^2}=5$.

Bài 3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

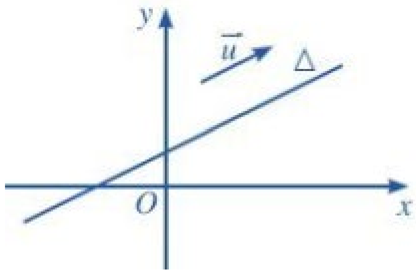
- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. Phương trình tham số của đường thẳng

1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

Vectơ $\vec{u}$ được gọi là vectơ chi phương của đường thẳng Δ nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ.

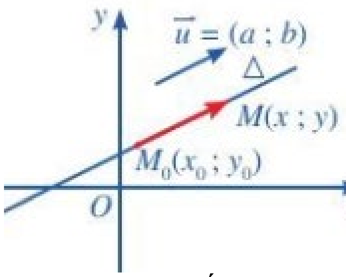


Nhận xét

- Nếu $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của Δ thì $k\vec{u}(k \neq 0)$ cũng là một vectơ chỉ phương của Δ.
- Một đường thẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vectơ chỉ phương của đường thẳng đó.

2. Phương trình tham số của đường thẳng

Hệ $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$, trong đó t là tham số, được gọi là phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua $M_0\left(x_0; y_0\right)$ và nhận $\vec{u} = (a; b)(\vec{u} \neq \vec{0})$ làm vectơ chỉ phương.



Nhận xét: Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số là $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}\left(a^2 + b^2 > 0\right), t$ là tham số.

- Với mỗi giá trị cụ thể của t, ta xác định được một điểm trên đường thẳng Δ. Ngược lại, với mỗi điểm trên đường thẳng Δ, ta xác định được một giá trị cụ thể của t.
- Vectơ $\vec{u} = (a; b)$ là một vectơ chỉ phương của Δ.

Ví dụ 1.

a) Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(-1; 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \left(2; \frac{1}{2}\right)$.

b) Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số là $\begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = 8 - 2t \end{cases}$. Chỉ ra tọa độ một vectơ chỉ phương của Δ và một điểm thuộc đường thẳng Δ.

Giải

a) Phương trình tham số của đường thẳng Δ là:

$\begin{cases} x=-1+2t \\ y=3+\dfrac{1}{2}t \end{cases}$ (t là tham số).

b) Toạ độ của một vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}=(3;-2)$.

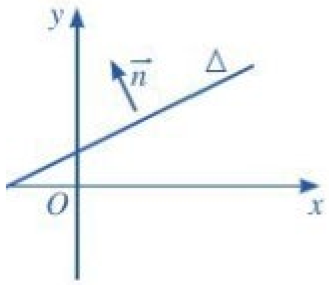
Ứng với $t=0$ ta có $\begin{cases} x=(-5)+3.0=-5 \\ y=8-2\cdot 0=8. \end{cases}$

Điểm $B(-5;8)$ thuộc đường thẳng Δ.

II. Phương trình tổng quát của đường thẳng

1. Vectơ pháp tuyến của đường thẳng

Vectơ $\vec{n}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ nếu $\vec{n}\neq\vec{0}$ và giá của vectơ $\vec{n}$ vuông góc với Δ.

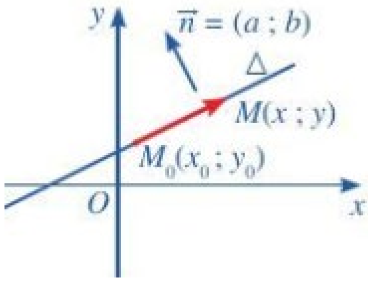


Nhận xét

- Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của Δ thì $k\vec{n}(k\neq 0)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của Δ.
- Một đường thẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vectơ pháp tuyến của đường thẳng đó.
- Nếu đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(a;b)$ thì vectơ $\vec{n}=(-b;a)$ là một vectơ pháp tuyến của Δ.

2. Phương trình tổng quát của đường thẳng

Phương trình $ax+by+c=0(a$ và b không đồng thời bằng 0) được gọi là phương trình tổng quát của đường thẳng.



Nhận xét

- Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0\right)$ và nhận $\vec{n}=(a;b)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là:

$a\left(x-x_0\right)+b\left(y-y_0\right)=0 \Leftrightarrow ax+by+\left(-ax_0-by_0\right)=0.$

- Mỗi phương trình $ax+by+c=0$ (a và b không đồng thời bằng 0) đều xác định một đường thẳng Δ trên mặt phẳng toạ độ nhận một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a;b)$.

Ví dụ 2. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(-2;4)$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;2)$.

Giải

Phương trình tổng quát của đường thẳng Δ là

$3\left(x+2\right)+2\left(y-4\right)=0$

$\Leftrightarrow 3x+2y-2=0$

3. Những dạng đặc biệt của phương trình tổng quát

Nhận xét

- Đường thẳng Δ có phương trình tổng quát $ax+by+c=0$ (a hoặc b khác 0) là đồ thị hàm số bậc nhất khi và chỉ khi $a\neq 0$ và $b\neq 0$.
- Phương trình trục hoành là $y=0$, phương trình trục tung là $x=0$.

III. Lập phương trình đường thẳng

Khi lập phương trình đường thẳng, ta thường gặp ba trường hợp như sau:
- Lập phương trình đường thẳng đi qua một điểm cho trước và biết vectơ pháp tuyến.
- Lập phương trình đường thẳng đi qua một điểm cho trước và biết vectơ chỉ phương.
- Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cho trước.

1. Lập phương trình đường thẳng đi qua một điểm và biết vectơ pháp tuyến

Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0\right)$ và nhận $\vec{n}=(a;b)(\vec{n}\neq\vec{0})$ làm vectơ pháp tuyến là $a\left(x-x_0\right)+b\left(y-y_0\right)=0$.

2. Lập phương trình đường thẳng đi qua một điểm và biết vectơ chỉ phương

Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0\right)$ và nhận $\vec{u}=(a;b)$ $(\vec{u}\neq\vec{0})$ làm vectơ chỉ phương là $\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\end{cases}$ (là tham số).

Nếu $a\neq 0$ và $b\neq 0$ thì ta còn có thể viết phương trình của đường thẳng Δ ở dạng:
$\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}$.

3. Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm

Đường thẳng Δ đi quahai điểm $A\left(x_0;y_0\right),B\left(x_1;y_1\right)$ nên nhận vectơ $\overrightarrow{AB}=\left(x_1-x_0;y_1-y_0\right)$ làm vectơ chỉ phương. Do đó, phương trình tham số của đường thẳng Δ là:
$\begin{cases}x=x_0+(x_1-x_0)t\\ y=y_0+(y_1-y_0)t\end{cases}$ (t là tham số).

Nếu $x_1-x_0\neq 0$ và $y_1-y_0\neq 0$ thì ta còn có thể viết phương trình của đường thẳng Δ ở dạng:
$\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}$.

Ví dụ 3. Lập phương trình đường thẳng Δ thoả mãn mỗi điều kiện sau:
a) Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-2;-3)$ và có $\vec{n}=(2;5)$ là vectơ pháp tuyến;
b) Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(3;-5)$ và có $\vec{u}=(2;-4)$ là vectơ chỉ phương;
c) Đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(-3;4)$ và $B(1;-1)$.

Giải

a) Phương trình Δ là $2(x+2)+5(y+3)=0\Leftrightarrow 2x+5y+19=0$.

b) Phương trình Δ là $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+5}{-4}\Leftrightarrow 4x+2y-2=0\Leftrightarrow 2x+y-1=0$.

c) Phương trình Δ là $\dfrac{x+3}{1-(-3)}=\dfrac{y-4}{(-1)-4}\Leftrightarrow\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-4}{-5}\Leftrightarrow 5x+4y-1=0$.

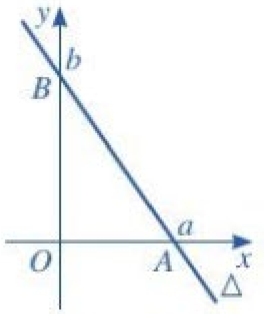
Ví dụ 4. Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(a;0)$ và $B(0;b)$ với $a^2+b^2>0$

Giải

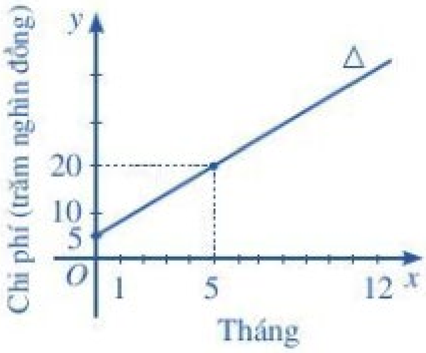
Đường thẳng Δ đi qua hai điểm A,B nên có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB}=(-a;b)$. Suy ra Δ nhận vectơ $\vec{n}=(b;a)$ làm vectơ pháp tuyến. Vậy đường thẳng Δ có phương trình tổng quát là:
$b(x-a)+a(y-0)=0$ hay $bx+ay-ab=0$ (1)

Chú ý: Trong trường hợp $ab\neq 0$, chia hai vế của phương trình (1) cho ab ta được:
$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

Phương trình dạng (2) được gọi là phương trình đường thẳng theo đoạn chắn, đường thẳng này cắt Ox và Oy lần lượt tại $A(a;0)$ và $B(0;b)$



Ví dụ 5. Đường thẳng Δ ở hình biểu thị tổng chi phí lắp đặt và tiền cước sử dụng dịch vụ Internet (đơn vị: trăm nghìn đồng) theo thời gian của một gia đình (đơn vị: tháng).



a) Viết phương trình của đường thẳng Δ.
b) Cho biết giao điểm của đường thẳng Δ với trục tung trong tình huống này có ý nghĩa gì.
c) Tính tổng chi phí lắp đặt và sử dụng Internet trong 12 tháng đầu tiên.
Giải
a) Đường thẳng Δ đi qua hai điểm lần lượt có tọa độ $(0;5)$ và $(5;20)$ nên Δ có phương trình là:
$\frac{x-0}{5-0}=\frac{y-5}{20-5} \Leftrightarrow \frac{x}{5}=\frac{y-5}{15} \Leftrightarrow \frac{x}{1}=\frac{y-5}{3} \Leftrightarrow 3x-y+5=0 \Leftrightarrow y=3x+5$.
b) Giao điểm của đường thẳng Δ với trục Oy ứng với $x=0$. Thời điểm $x=0$ cho biết mức phí ban đầu lắp đặt để sử dụng Internet. Khi $x=0$ thì $y=5$, vì vậy chi phí lắp đặt ban đầu là 500000 đồng.
c) 12 tháng đầu tiên ứng với $x=12$. Do đó: $y=3\cdot 12+5=41$.
Vậy tổng chi phí lắp đặt và sử dụng Internet trong 12 tháng đầu tiên là 4100000 đồng.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng

Tìm một điểm $I\left(x_0;y_0\right)$ thuộc đường thẳng.

Tìm một VTPT $\vec{n}\left(a;b\right)$ của đường thẳng.

Viết phương trình $a\left(x-x_0\right)+b\left(y-y_0\right)=0$ rồi suy ra dạng tổng quát $ax+by+c=0$.

Hoặt viết phương trình tổng quát $ax+by+c=0$, tìm c nhờ đường thẳng đã cho đi qua điểm I

Đặc biệt

- $d'//d: ax+by+c=0 \Rightarrow d': ax+by+c'=0$ (với $c\neq c'$).
- $d'' \perp d: ax+by+c=0 \Rightarrow d'': bx-ay+c''=0$.
- $y=kx+m \Rightarrow kx-y+m=0$.
- $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \Rightarrow bx+ay-ab=0$.

Câu 1. Viết phương trình tổng quát của

a) Đường thẳng Ox b) Đường thẳng Oy c) Các đường phân giác của góc xOy

Câu 2. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng

a) Đi qua $M\left(x_0;y_0\right)$ và song song với Ox.

b) Đi qua $M\left(x_0;y_0\right)$ và vuông góc với Ox.

c) Đi qua $M\left(x_0;y_0\right)$ khác gốc O và điểm O.

Câu 3. Cho hai điểm $M_1\left(x_1;y_1\right)$, $M_2\left(x_2;y_2\right)$. Lập phương trình tổng quát của

a) Đường thẳng đi qua M_1, M_2.

b) Đường trung trực của đoạn thẳng M_1M_2.

Câu 4. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua hai điểm $A\left(a;0\right)$ và $B\left(0;b\right)$ với $a\neq 0$ và $b\neq 0$ có phương trình theo đoạn chắn là $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Câu 5. Một đường thẳng đi qua điểm $M\left(5;-3\right)$ cắt trục Ox và Oy lần lượt tại A và B sao cho M là trung điểm của AB. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đó.

Câu 6. Cho đường thẳng Δ có phương trình $Ax+By+C=0$ và điểm $M_0\left(x_0;y_0\right)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M_0 và

a) Song song với dường thẳng Δ.

b) Vuông góc với đường thẳng Δ.

Câu 7. Lập phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua $M\left(3;4\right)$ và có VTPT $\vec{n}=\left(-2;1\right)$

Câu 8. Lập phương trình tổng quát của đường thẳng

a) qua $A\left(2;0\right)$ và $B\left(0;3\right)$.

b) qua $M\left(-5;-8\right)$ và có hệ số góc $k=-3$.

Câu 9. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d

a) qua $M\left(-1;-4\right)$ và song song với đường thẳng $3x+5y-2=0$.

b) qua $N\left(1;1\right)$ và vuông góc với đường thẳng $2x+3y+7=0$.

Câu 10. Cho hai điểm $P\left(4;0\right)$ và $Q\left(0;-2\right)$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng

a) Qua điểm S và song song với đường thẳng PQ.

b) Trung trực của PQ.

Câu 11. Viết phương trình các đường trung trực của tam giác ABC biết $M\left(-1;1\right)$, $N\left(1;9\right)$, $P\left(9;1\right)$ là các trung điểm ba cạnh của tam giác.

Câu 12. Cho điểm $M\left(1;2\right)$. Hãy lập phương trình của đường thẳng đi qua điểm M và chắn trên hai trục tọa độ hai đoạn thẳng có độ dài bằng nhau.

Câu 13. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M\left(2;5\right)$ và cách đều hai điểm $P\left(-1;2\right)$, $Q\left(5;4\right)$.

Câu 14. Đường thẳng $d:2x-y+8=0$ cắt các trục tọa độ Ox và Oy lần lượt tại các điểm A và B. Gọi M là điểm chia đoạn AB theo tỉ số -3. Viết phương trình đường thẳng đi qua M và vuông góc với d.

Câu 15. Cho đường thẳng $d_1: 2x - y - 2 = 0$; $d_2: x + y + 3 = 0$ và điểm $M(3;0)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M, cắt d_1 và d_2 lần lượt tại A và B sao cho M là trung điểm của đoạn AB.

Câu 16. Cho tam giác ABC biết $A(2;\ 1)$, $B(-1;\ 0)$, $C(0;\ 3)$

a)Viết phương trình tổng quát của đường cao AH.

b)Viết phương trình tổng quát đường trung trực của đoạn thẳng AB.

c)Viết phương trình tổng quát đường thẳng BC.

d)Viết phương trình tổng quát đường thẳng qua A và song song với BC.

Dạng 2. Phương trình tham số của đường thẳng

Tìm một điểm $I(x_0; y_0)$ thuộc đường thẳng.

Tìm một VTPT $\vec{n}(a;b)$ của đường thẳng.

Phương trình tham số: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + at \end{cases}, (a^2 + b^2 \neq 0)$.

Đặc biệt, d qua A, B thì có VTPT $\vec{u}(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

d' $\perp$ d: ax + by + c = 0 thì VTPT $\vec{u'}(a;b)$.

d" // d: ax + by + c = 0 thì VTPT $\vec{u''} = (-b;a)$ hay (b; –a).

d có hệ số góc k' thì VTPT $\vec{u} = (1;k)$.

Câu 17. Viết phương trình tham số của đường thẳng qua:

a) $M_0(x_0; y_0)$ và vuông góc với đường thẳng $Ax + By + C = 0$.

b) $M_0(x_0; y_0)$ và song song với đường thẳng $Ax + By + C = 0$.

Câu 18. Lập phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(2;1)$ và có VTCP $\vec{u} = (3;7)$.

Câu 19. Lập phương trình tham số của đường thẳng d:

a)Đi qua điểm $M(5;1)$ và có hệ số góc $k = 8$.

b)Đi qua hai điểm $A(3;4)$ và $B(4;2)$.

Câu 20. Viết phương trình tham số của đường thẳng:

a) $2x + 3y - 6 = 0$.

b) $y = -4x + 5$.

Câu 21. Viết phương trình tham số của đường thẳng:

a) $d: x = 3$.

b)d: $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y+1}{-3}$.

Dạng 3. Phương trình chính tắc của đường thẳng

Tìm một điểm $I(x_0; y_0)$ thuộc đường thẳng.

Tìm một VTCP $\vec{n}(a;b)$ của đường thẳng.

Nếu a, b ≠ 0 thì có dạng chính tắc: $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}$.

d' ⊥ d: ax + by + c = 0 thì VTCP $\overrightarrow{u'}=(a;b)$.

d" // d: ax + by + c = 0 thì VTCP $\overrightarrow{u''}=(-b;a)$ *hay (b; –a).*

d có hệ số góc k' thì VTCP $\vec{u}=(1;k)$.

Câu 22. Lập phương trình chính tắc của đường thẳng:

a)Qua $A(-4;1)$ và $B(1;4)$.

b)Qua $A(4;1)$ và $B(4;2)$.

Câu 23. Cho điểm $A(-5;2)$ và đường thẳng d: $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{-2}$. Lập phương trình chính tắc của đường thẳng d':

a)Qua A và song song với d.

b)Qua A và vuông góc với d.

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Xác định véctơ chỉ phương, véc tơ pháp tuyến của đường thẳng, hệ số góc của đường thẳng

Câu 1. Trong mặt phẳng Oxy, đường thẳng $(d): ax+by+c=0,\ (a^2+b^2\neq 0)$. Vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng (d)?

A. $\vec{n}=(a;-b)$. **B.** $\vec{n}=(b;a)$. **C.** $\vec{n}=(b;-a)$. **D.** $\vec{n}=(a;b)$.

Câu 2. Cho đường thẳng d có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a;b)$, $a,b\in\mathbb{R}$. Xét các khẳng định sau:

1. Nếu $b=0$ thì đường thẳng d không có hệ số góc.

2. Nếu $b\neq 0$ thì hệ số góc của đường thẳng d là $\frac{a}{b}$.

3. Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(b;-a)$.

4. Vectơ $k\vec{n}$, $k\in\mathbb{R}$ là vectơ pháp tuyến của d.

Có bao nhiêu khẳng định **sai**?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x-2y+3=0$. Vectơ pháp tuyến của đường thẳng d là

A. $\vec{n}=(1;-2)$ **B.** $\vec{n}=(2;1)$ **C.** $\vec{n}=(-2;3)$ **D.** $\vec{n}=(1;3)$

Câu 4. Cho đường thẳng $(d): 3x+2y-10=0$. Véc tơ nào sau đây là véctơ chỉ phương của (d)?

A. $\vec{u}=(3;2)$. **B.** $\vec{u}=(3;-2)$. **C.** $\vec{u}=(2;-3)$. **D.** $\vec{u}=(-2;-3)$.

Câu 5. Cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=5-\frac{1}{2}t\\ y=-3+3t\end{cases}$ một vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ có tọa độ

A. $(5;-3)$. **B.** $(6;1)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};3\right)$. **D.** $(-5;3)$.

Câu 6. Trong hệ trục tọa độ Oxy, Véctơ nào là một véctơ pháp tuyến của đường thẳng $d:\begin{cases}x=-2-t\\y=-1+2t\end{cases}$?

A. $\vec{n}(-2;-1)$. **B.** $\vec{n}(2;-1)$. **C.** $\vec{n}(-1;2)$. **D.** $\vec{n}(1;2)$.

Câu 7. Vectơ chỉ phương của đường thẳng $d:\begin{cases}x=1-4t\\y=-2+3t\end{cases}$ là:

A. $\vec{u}=(-4;3)$. **B.** $\vec{u}=(4;3)$. **C.** $\vec{u}=(3;4)$. **D.** $\vec{u}=(1;-2)$.

Câu 8. Vector nào dưới đây là 1 vector chỉ phương của đường thẳng song song với trục Ox:

A. $\vec{u}=(1;0)$. **B.** $\vec{u}=(1;-1)$. **C.** $\vec{u}=(1;1)$. **D.** $\vec{u}=(0;1)$.

Câu 9. Cho đường thẳng $d:7x+3y-1=0$. Vectơ nào sau đây là Vectơ chỉ phương của *d*?

A. $\vec{u}=(7;3)$. **B.** $\vec{u}=(3;7)$. **C.** $\vec{u}=(-3;7)$. **D.** $\vec{u}=(2;3)$.

Câu 10. Cho đường thẳng $d:2x+3y-4=0$. Véctơ nào sau đây là véctơ pháp tuyến của đường thẳng d?

A. $\overrightarrow{n_1}=(3;2)$. **B.** $\overrightarrow{n_1}=(-4;-6)$. **C.** $\overrightarrow{n_1}=(2;-3)$. **D.** $\overrightarrow{n_1}=(-2;3)$.

Câu 11. Cho đường thẳng $d:\ 5x+3y-7=0.$ Vectơ nào sau đây là một vec tơ chỉ phương của đường thẳng d?

A. $\overrightarrow{n_1}=(3;5)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(3;-5)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=(5;3)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(-5;-3)$.

Câu 12. Cho đường thẳng $\Delta:x-2y+3=0$. Véc tơ nào sau đây **không là** véc tơ chỉ phương của Δ?

A. $\vec{u}=(4;-2)$. **B.** $\vec{v}=(-2;-1)$. **C.** $\vec{m}=(2;1)$. **D.** $\vec{q}=(4;2)$.

Câu 13. Cho hai điểm $A=(1;2)$ và $B=(5;4)$. Vectơ pháp tuyến của đường thẳng AB là

A. $(-1;-2)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-2;1)$. **D.** $(-1;2)$.

Câu 14. Cho đường thẳng $d:7x+3y-1=0$. Vectơ nào sau đây là Vectơ chỉ phương của đường thẳng *d*?

A. $\vec{u}=(7;3)$. **B.** $\vec{u}=(3;7)$. **C.** $\vec{u}=(-3;7)$. **D.** $\vec{u}=(2;3)$.

Câu 15. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của $d:x-2y+2018=0$?

A. $\vec{n}_1(0;-2)$. **B.** $\vec{n}_3(-2;0)$. **C.** $\vec{n}_4(2;1)$. **D.** $\vec{n}_2(1;-2)$.

Câu 16. Vectơ nào trong các vectơ dưới đây là vectơ pháp tuyến của đường thẳng $y+2x-1=0$?

A. $(2;-1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-2;1)$. **D.** $(-2;-1)$.

Câu 17. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $d:2x-y+1=0$, một véctơ pháp tuyến của d là

A. $(-2;-1)$. **B.** $(2;-1)$. **C.** $(-1;-2)$. **D.** $(1;-2)$.

Câu 18. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $d:2x-3y+4=0$. Vectơ nào sau đây là một vectơ chỉ phương của *d*.

A. $\overrightarrow{u_4}=(3;-2)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(2;3)$.

C. $\overrightarrow{u_1}=(2;-3)$. **D.** $\overrightarrow{u_3}=(3;2)$

Câu 19. Vectơ nào sau đây là một Vectơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta:6x-2y+3=0$?

A. $\vec{u}(1;3)$. **B.** $\vec{u}(6;2)$. **C.** $\vec{u}(-1;3)$. **D.** $\vec{u}(3;-1)$.

Câu 20. Cho hai điểm $M(2;3)$ và $N(-2;5)$. Đường thẳng MN có một vectơ chỉ phương là:

A. $\vec{u}=(4;2)$. **B.** $\vec{u}=(4;-2)$. **C.** $\vec{u}=(-4;-2)$. **D.** $\vec{u}=(-2;4)$.

Câu 21. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x-2y+1=0$. Một vectơ chỉ phương của đường thẳng d là

A. $\vec{u}=(1;-2)$. **B.** $\vec{u}=(2;1)$. **C.** $\vec{u}=(2;-1)$. **D.** $\vec{u}=(1;2)$.

Câu 22. Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;-1)$. Trong các vectơ sau, vectơ nào là một vectơ pháp tuyến của d?

A. $\overrightarrow{n_1}=(-1;2)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(1;-2)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=(-3;6)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(3;6)$.

Câu 23. Đường thẳng d có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(4;-2)$. Trong các vectơ sau, vectơ nào là một vectơ chỉ phương của d?

A. $\overrightarrow{u_1}=(2;-4)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(-2;4)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(1;2)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(2;1)$.

Câu 24. Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(3;-4)$. Đường thẳng Δ vuông góc với d có một vectơ pháp tuyến là:

A. $\overrightarrow{n_1}=(4;3)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(-4;-3)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=(3;4)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(3;-4)$.

Câu 25. Đường thẳng d có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(-2;-5)$. Đường thẳng Δ vuông góc với d có một vectơ chỉ phương là:

A. $\overrightarrow{u_1}=(5;-2)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(-5;2)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(2;5)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(2;-5)$.

Câu 26. Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(3;-4)$. Đường thẳng Δ song song với d có một vectơ pháp tuyến là:

A. $\overrightarrow{n_1}=(4;3)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(-4;3)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=(3;4)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(3;-4)$.

Câu 27. Đường thẳng d có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(-2;-5)$. Đường thẳng Δ song song với d có một vectơ chỉ phương là:

A. $\overrightarrow{u_1}=(5;-2)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(-5;-2)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(2;5)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(2;-5)$.

Câu 28. Cho đường thẳng $d: 3x+5y+2018=0$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. d có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(3;5)$. **B.** d có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(5;-3)$.

C. d có hệ số góc $k=\dfrac{5}{3}$. **D.** d song song với đường thẳng $\Delta: 3x+5y=0$.

Câu 29. Cho đường thẳng $(d): x-7y+15=0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. (d) có hệ số góc $k=\dfrac{1}{7}$ **B.** (d) đi qua hai điểm $M\left(-\dfrac{1}{3};2\right)$ và $M(5;0)$

C. $\vec{u}=(-7;1)$ là vecto chỉ phương của (d) **D.** (d) đi qua gốc tọa độ

Dạng 2. Viết phương trình đường thẳng (tổng quát, tham số, chính tắc)

Câu 30. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-2;3)$ và $B(4;-1)$. Phương trình nào sau đây là phương trình đường thẳng AB?

A. $x+y-3=0$. **B.** $y=2x+1$. **C.** $\frac{x-4}{6}=\frac{y-1}{-4}$. **D.** $\begin{cases}x=1+3t\\y=1-2t\end{cases}$.

Câu 31. Phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm $A(2;-1)$ và $B(2;5)$ là

A. $\begin{cases}x=2t\\y=-6t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=2+t\\y=5+6t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1\\y=2+6t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=2\\y=-1+6t\end{cases}$.

Câu 32. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai điểm $A(3;-1)$ và $B(-6;2)$. Phương trình nào dưới đây không phải là phương trình tham số của đường thẳng AB?

A. $\begin{cases}x=3+3t\\y=-1-t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=3+3t\\y=-1+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-3t\\y=t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-6-3t\\y=2+t\end{cases}$.

Câu 33. Phương trình tham số của đường thẳng qua $M(1;-2)$, $N(4;3)$ là

A. $\begin{cases}x=4+t\\y=3-2t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1+5t\\y=-2-3t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=3+3t\\y=4+5t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+3t\\y=-2+5t\end{cases}$.

Câu 34. Phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm $A(3;-1), B(-6;2)$ là

A. $\begin{cases}x=-1+3t\\y=2t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=3+3t\\y=-1-t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=3+3t\\y=-6-t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3+3t\\y=-1+t\end{cases}$.

Câu 35. Trong mặt phẳng tọa độ, cho hai điểm $A(3;0), B(0;2)$ và đường thẳng $d: x+y=0$. Lập phương trình tham số của đường thẳng Δ qua A và song song với d.

A. $\begin{cases}x=t\\y=3-t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=t\\y=3+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-t\\y=3-t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-t\\y=3+t\end{cases}$.

Câu 36. Cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases}x=5+t\\y=-9-2t\end{cases}$. Phương trình tổng quát của đường thẳng d là

A. $2x+y-1=0$. **B.** $-2x+y-1=0$. **C.** $x+2y+1=0$. **D.** $2x+3y-1=0$.

Câu 37. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(1;2)$. Gọi A,B là hình chiếu của M lên Ox,Oy. Viết phương trình đường thẳng AB.

A. $x+2y-1=0$. **B.** $2x+y+2=0$. **C.** $2x+y-2=0$. **D.** $x+y-3=0$.

Câu 38. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=3-5t\\y=1+4t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. Phương trình tổng quát của đường thẳng d là

A. $4x-5y-7=0$.. **B.** $4x+5y-17=0$.. **C.** $4x-5y-17=0$.. **D.** $4x+5y+17=0$.

Câu 39. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường thẳng d cắt hai trục Ox và Oy lần lượt tại hai điểm $A(a;0)$ và $B(0;b)$ $(a\neq 0; b\neq 0)$. Viết phương trình đường thẳng d.

A. $d:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$. **B.** $d:\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$. **C.** $d:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. **D.** $d:\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$..

Câu 40. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(0;4), B(-6;0)$ là:

A. $\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1$. **B.** $\frac{x}{4}+\frac{y}{-6}=1$. **C.** $\frac{-x}{4}+\frac{y}{-6}=1$. **D.** $\frac{-x}{6}+\frac{y}{4}=1$.

Câu 41. Phương trình đường thẳng d đi qua $A(1;-2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: 3x-2y+1=0$ là:

A. $3x-2y-7=0$. **B.** $2x+3y+4=0$. **C.** $x+3y+5=0$. **D.** $2x+3y-3=0$.

Câu 42. Cho đường thẳng $d: 8x-6y+7=0$. Nếu đường thẳng Δ đi qua gốc tọa độ và vuông góc với đường thẳng *d* thì Δ có phương trình là

A. $4x-3y=0$. **B.** $4x+3y=0$. **C.** $3x+4y=0$. **D.** $3x-4y=0$.

Câu 43. Đường thẳng đi qua điểm $A(1;11)$ và song song với đường thẳng $y=3x+5$ có phương trình là

A. $y=3x+11$. **B.** $y=(-3x+14)$. **C.** $y=3x+8$. **D.** $y=x+10$.

Câu 44. Lập phương trình đường đi qua $A(2;5)$ và song song với đường thẳng $(d): y=3x+4$?

A. $(\Delta): y=3x-2$. **B.** $(\Delta): y=3x-1$. **C.** $(\Delta): y=-\frac{1}{3}x-1$. **D.** $(\Delta): y=-3x-1$.

Câu 45. Trong hệ trục Oxy, đường thẳng d qua $M(1;1)$ và song song với đường thẳng $d': x+y-1=0$ có phương trình là

A. $x+y-1=0$. **B.** $x-y=0$. **C.** $-x+y-1=0$. **D.** $x+y-2=0$.

Câu 46. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua điểm $I(-1;2)$ và vuông góc với đường thẳng có phương trình $2x-y+4=0$.

A. $x+2y=0$. **B.** $x+2y-3=0$. **C.** $x+2y+3=0$. **D.** $x-2y+5=0$.

Câu 47. Trong hệ trục tọa độ Trong hệ trục tọa độ Oxy cho hai điểm $M(1;0)$ và $N(0;2)$. Đường thẳng đi qua $A\left(\frac{1}{2};1\right)$ và song song với đường thẳng MN có phương trình là

A. Không tồn tại đường thẳng như đề bài yêu cầu.

B. $2x+y-2=0$.

C. $4x+y-3=0$.

D. $2x-4y+3=0$.

Câu 48. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(2;0)$, $B(0;3)$ và $C(-3;-1)$. Đường thẳng đi qua điểm B và song song với AC có phương trình tham số là:

A. $\begin{cases} x=5t \\ y=3+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=5 \\ y=1+3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=t \\ y=3-5t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=3+5t \\ y=t \end{cases}$.

Câu 49. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(3;2)$, $P(4;0)$ và $Q(0;-2)$. Đường thẳng đi qua điểm A và song song với PQ có phương trình tham số là:

A. $\begin{cases} x=3+4t \\ y=2-2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=3-2t \\ y=2+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-2+t \end{cases}$.

Câu 50. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành $ABCD$ có đỉnh $A(-2;1)$ và phương trình đường thẳng chứa cạnh CD là $\begin{cases} x=1+4t \\ y=3t \end{cases}$. Viết phương trình tham số của đường thẳng chứa cạnh AB.

A. $\begin{cases} x=-2+3t \\ y=-2-2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-2-4t \\ y=1-3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-2-3t \\ y=1-4t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-2-3t \\ y=1+4t \end{cases}$.

Câu 51. Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(-3;5)$ và song song với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

A. $\begin{cases} x=-3+t \\ y=5-t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-3+t \\ y=5+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=3+t \\ y=-5+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=5-t \\ y=-3+t \end{cases}$.

Câu 52. Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(4;-7)$ và song song với trục Ox.

A. $\begin{cases} x=1+4t \\ y=-7t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=4 \\ y=-7+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-7+t \\ y=4 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=t \\ y=-7 \end{cases}$.

Câu 53. Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;2)$ và song song với đường thẳng $\Delta: 2x+3y-12=0$ có phương trình tổng quát là:

A. $2x+3y-8=0$. **B.** $2x+3y+8=0$. **C.** $4x+6y+1=0$. **D.** $4x-3y-8=0$.

Câu 54. Phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua O và song song với đường thẳng $\Delta: 6x-4x+1=0$ là:

A. $3x-2y=0.$ **B.** $4x+6y=0.$ **C.** $3x+12y-1=0.$ **D.** $6x-4y-1=0.$

Câu 55. Đường thẳng d đi qua điểm $M(-1;2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: 2x+y-3=0$ có phương trình tổng quát là:

A. $2x+y=0$. **B.** $x-2y-3=0$. **C.** $x+y-1=0$. **D.** $x-2y+5=0$.

Câu 56. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(4;-3)$ và song song với đường thẳng $d: \begin{cases} x=3-2t \\ y=1+3t \end{cases}$.

A. $3x+2y+6=0$. **B.** $-2x+3y+17=0$.
C. $3x+2y-6=0$. **D.** $3x-2y+6=0$.

Câu 57. Cho tam giác ABC có $A(2;0)$, $B(0;3)$, $C(-3;1)$. Đường thẳng d đi qua B và song song với AC có phương trình tổng quát là:

A. $5x-y+3=0$. **B.** $5x+y-3=0$. **C.** $x+5y-15=0$. **D.** $x-15y+15=0$.

Câu 58. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua điểm $M(-1;0)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=t \\ y=-2t \end{cases}$.

A. $2x+y+2=0$. **B.** $2x-y+2=0$. **C.** $x-2y+1=0$. **D.** $x+2y+1=0$.

Câu 59. Đường thẳng d đi qua điểm $M(-2;1)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1-3t \\ y=-2+5t \end{cases}$ có phương trình tham số là:

A. $\begin{cases} x=-2-3t \\ y=1+5t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-2+5t \\ y=1+3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1-3t \\ y=2+5t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+5t \\ y=2+3t \end{cases}$.

Câu 60. Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $A(-1;2)$ và song song với đường thẳng $\Delta: 3x-13y+1=0$.

A. $\begin{cases} x=-1+13t \\ y=2+3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+13t \\ y=-2+3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-1-13t \\ y=2+3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+3t \\ y=2-13t \end{cases}$.

Câu 61. Viết phương trình tham số của đường thẳng d qua điểm $A(-1;2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: 2x-y+4=0$.

A. $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2-t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=t \\ y=4+2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \end{cases}$.

Câu 62. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua điểm $M(-2;-5)$ và song song với đường phân giác góc phần tư thứ nhất.

A. $x+y-3=0$. **B.** $x-y-3=0$. **C.** $x+y+3=0$. **D.** $2x-y-1=0$.

Câu 63. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua điểm $M(3;-1)$ và vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ hai.

A. $x+y-4=0$. **B.** $x-y-4=0$. **C.** $x+y+4=0$. **D.** $x-y+4=0$.

Câu 64. Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(-4;0)$ và vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ hai.

A. $\begin{cases} x=t \\ y=-4+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-4+t \\ y=-t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=t \\ y=4+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=t \\ y=4-t \end{cases}$.

Câu 65. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua điểm $M(-1;2)$ và song song với trục Ox.

A. $y+2=0$. **B.** $x+1=0$. **C.** $x-1=0$. **D.** $y-2=0$.

Câu 66. Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(6;-10)$ và vuông góc với trục Oy.

A. $\begin{cases} x=10+t \\ y=6 \end{cases}$. **B.** $d: \begin{cases} x=2+t \\ y=-10 \end{cases}$. **C.** $d: \begin{cases} x=6 \\ y=-10-t \end{cases}$. **D.** $d: \begin{cases} x=6 \\ y=-10+t \end{cases}$.

Câu 67. Đường trung trực của đoạn AB với $A(1;-4)$ và $B(5;2)$ có phương trình là:

A. $2x+3y-3=0.$ **B.** $3x+2y+1=0.$ **C.** $3x-y+4=0.$ **D.** $x+y-1=0.$

Câu 68. Đường trung trực của đoạn AB với $A(4;-1)$ và $B(1;-4)$ có phương trình là:

A. $x+y=1.$ **B.** $x+y=0.$ **C.** $y-x=0.$ **D.** $x-y=1.$

Câu 69. Đường trung trực của đoạn AB với $A(1;-4)$ và $B(1;2)$ có phương trình là:

A. $y+1=0.$ **B.** $x+1=0.$ **C.** $y-1=0.$ **D.** $x-4y=0.$

Câu 70. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $I(1;-1)$ và hai đường thẳng $d_1: x+y-3=0, d_2: x-2y-6=0$. Hai điểm A, B lần lượt thuộc hai đường thẳng d_1, d_2 sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Đường thẳng AB có một véctơ chỉ phương là

A. $\overrightarrow{u_1}=(1;2)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(2;1)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(1;-2)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(2;-1)$.

Bài 3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

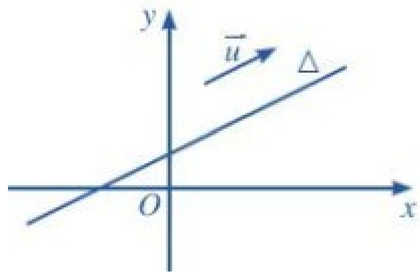
- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. Phương trình tham số của đường thẳng

1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

Vectơ $\vec{u}$ được gọi là vectơ chi phương của đường thẳng Δ nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ.

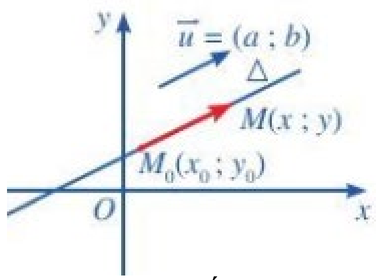


Nhận xét

- Nếu $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của Δ thì $k\vec{u}(k \neq 0)$ cũng là một vectơ chỉ phương của Δ.
- Một đường thẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vectơ chỉ phương của đường thẳng đó.

2. Phương trình tham số của đường thẳng

Hệ $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$, trong đó t là tham số, được gọi là phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua $M_0\left(x_0; y_0\right)$ và nhận $\vec{u} = (a; b)(\vec{u} \neq \vec{0})$ làm vectơ chỉ phương.



Nhận xét: Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số là
$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}\left(a^2 + b^2 > 0\right), t$ là tham số.

- Với mỗi giá trị cụ thể của t, ta xác định được một điểm trên đường thẳng Δ. Ngược lại, với mỗi điểm trên đường thẳng Δ, ta xác định được một giá trị cụ thể của t.
- Vectơ $\vec{u} = (a; b)$ là một vectơ chỉ phương của Δ.

Ví dụ 1.

a) Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(-1; 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \left(2; \frac{1}{2}\right)$.

b) Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số là $\begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = 8 - 2t \end{cases}$. Chỉ ra tọa độ một vectơ chỉ phương của Δ và một điểm thuộc đường thẳng Δ.

Giải

a) Phương trình tham số của đường thẳng Δ là:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 + \frac{1}{2}t \end{cases}$$ (t là tham số).

b) Toạ độ của một vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (3;-2)$.

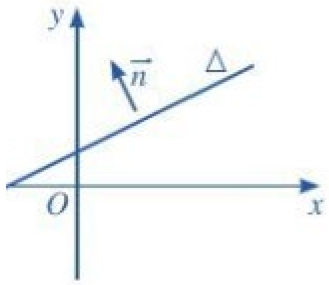
Ứng với $t = 0$ ta có $\begin{cases} x = (-5) + 3.0 = -5 \\ y = 8 - 2 \cdot 0 = 8. \end{cases}$

Điểm $B(-5;8)$ thuộc đường thẳng Δ.

II. Phương trình tổng quát của đường thẳng

1. Vectơ pháp tuyến của đường thẳng

Vectơ $\vec{n}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ nếu $\vec{n} \neq \vec{0}$ và giá của vectơ $\vec{n}$ vuông góc với Δ.

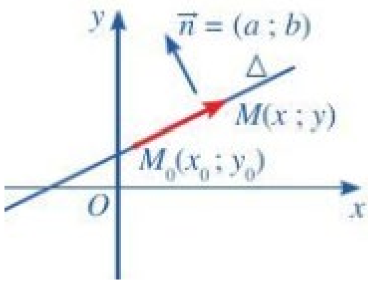


Nhận xét

- Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của Δ thì $k\vec{n}(k \neq 0)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của Δ.
- Một đường thẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vectơ pháp tuyến của đường thẳng đó.
- Nếu đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (a;b)$ thì vectơ $\vec{n} = (-b;a)$ là một vectơ pháp tuyến của Δ.

2. Phương trình tổng quát của đường thẳng

Phương trình $ax + by + c = 0$(a và b không đồng thời bằng 0) được gọi là phương trình tổng quát của đường thẳng.



Nhận xét

- Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ và nhận $\vec{n} = (a;b)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là:

$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow ax + by + (-ax_0 - by_0) = 0.$

- Mỗi phương trình $ax + by + c = 0$ (a và b không đồng thời bằng 0) đều xác định một đường thẳng Δ trên mặt phẳng toạ độ nhận một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a;b)$.

Ví dụ 2. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(-2;4)$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3;2)$.

Giải

Phương trình tổng quát của đường thẳng Δ là

$3(x+2) + 2(y-4) = 0$

$\Leftrightarrow 3x + 2y - 2 = 0$

3. Những dạng đặc biệt của phương trình tổng quát

Nhận xét

- Đường thẳng Δ có phương trình tổng quát $ax+by+c=0$ (a hoặc b khác 0) là đồ thị hàm số bậc nhất khi và chỉ khi $a \neq 0$ và $b \neq 0$.
- Phương trình trục hoành là $y=0$, phương trình trục tung là $x=0$.

III. Lập phương trình đường thẳng

Khi lập phương trình đường thẳng, ta thường gặp ba trường hợp như sau:
- Lập phương trình đường thẳng đi qua một điểm cho trước và biết vectơ pháp tuyến.
- Lập phương trình đường thẳng đi qua một điểm cho trước và biết vectơ chỉ phương.
- Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cho trước.

1. Lập phương trình đường thẳng đi qua một điểm và biết vectơ pháp tuyến

Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0\right)$ và nhận $\vec{n}=(a;b)(\vec{n}\neq\vec{0})$ làm vectơ pháp tuyến là $a\left(x-x_0\right)+b\left(y-y_0\right)=0$.

2. Lập phương trình đường thẳng đi qua một điểm và biết vectơ chỉ phương

Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0\right)$ và nhận $\vec{u}=(a;b)$ $(\vec{u}\neq\vec{0})$ làm vectơ chỉ phương là $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}$ (là tham số).

Nếu $a\neq 0$ và $b\neq 0$ thì ta còn có thể viết phương trình của đường thẳng Δ ở dạng:
$\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}$.

3. Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm

Đường thẳng Δ đi quahai điểm $A\left(x_0;y_0\right),B\left(x_1;y_1\right)$ nên nhận vectơ $\overrightarrow{AB}=\left(x_1-x_0;y_1-y_0\right)$ làm vectơ chỉ phương. Do đó, phương trình tham số của đường thẳng Δ là:
$\begin{cases} x=x_0+(x_1-x_0)t \\ y=y_0+(y_1-y_0)t \end{cases}$ (t là tham số).

Nếu $x_1-x_0\neq 0$ và $y_1-y_0\neq 0$ thì ta còn có thể viết phương trình của đường thẳng Δ ở dạng:
$\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}$.

Ví dụ 3. Lập phương trình đường thẳng Δ thoả mãn mỗi điều kiện sau:
a) Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-2;-3)$ và có $\vec{n}=(2;5)$ là vectơ pháp tuyến;
b) Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(3;-5)$ và có $\vec{u}=(2;-4)$ là vectơ chỉ phương;
c) Đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(-3;4)$ và $B(1;-1)$.

Giải

a) Phương trình Δ là $2(x+2)+5(y+3)=0 \Leftrightarrow 2x+5y+19=0$.

b) Phương trình Δ là $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+5}{-4} \Leftrightarrow 4x+2y-2=0 \Leftrightarrow 2x+y-1=0$.

c) Phương trình Δ là $\dfrac{x+3}{1-(-3)}=\dfrac{y-4}{(-1)-4} \Leftrightarrow \dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-4}{-5} \Leftrightarrow 5x+4y-1=0$.

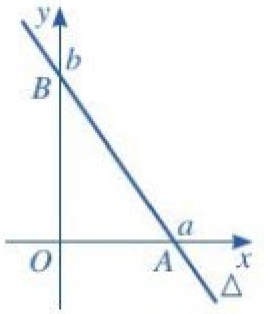
Ví dụ 4. Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(a;0)$ và $B(0;b)$ với $a^2+b^2>0$

Giải

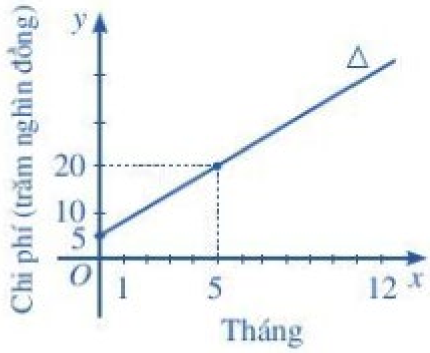
Đường thẳng Δ đi qua hai điểm A,B nên có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB}=(-a;b)$. Suy ra Δ nhận vectơ $\vec{n}=(b;a)$ làm vectơ pháp tuyến. Vậy đường thẳng Δ có phương trình tổng quát là:
$b(x-a)+a(y-0)=0$ hay $bx+ay-ab=0$ (1)

Chú ý: Trong trường hợp $ab\neq 0$, chia hai vế của phương trình (1) cho ab ta được:
$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

Phương trình dạng (2) được gọi là phương trình đường thẳng theo đoạn chắn, đường thẳng này cắt Ox và Oy lần lượt tại $A(a;0)$ và $B(0;b)$



Ví dụ 5. Đường thẳng Δ ở hình biểu thị tổng chi phí lắp đặt và tiền cước sử dụng dịch vụ Internet (đơn vị: trăm nghìn đồng) theo thời gian của một gia đình (đơn vị: tháng).



a) Viết phương trình của đường thẳng Δ.
b) Cho biết giao điểm của đường thẳng Δ với trục tung trong tình huống này có ý nghĩa gì.
c) Tính tổng chi phí lắp đặt và sử dụng Internet trong 12 tháng đầu tiên.
Giải
a) Đường thẳng Δ đi qua hai điểm lần lượt có tọa độ $(0;5)$ và $(5;20)$ nên Δ có phương trình là:
$\frac{x-0}{5-0}=\frac{y-5}{20-5} \Leftrightarrow \frac{x}{5}=\frac{y-5}{15} \Leftrightarrow \frac{x}{1}=\frac{y-5}{3} \Leftrightarrow 3x-y+5=0 \Leftrightarrow y=3x+5.$
b) Giao điểm của đường thẳng Δ với trục Oy ứng với $x=0$. Thời điểm $x=0$ cho biết mức phí ban đầu lắp đặt để sử dụng Internet. Khi $x=0$ thì $y=5$, vì vậy chi phí lắp đặt ban đầu là 500000 đồng.
c) 12 tháng đầu tiên ứng với $x=12$. Do đó: $y=3\cdot 12+5=41$.
Vậy tổng chi phí lắp đặt và sử dụng Internet trong 12 tháng đầu tiên là 4100000 đồng.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng

Tìm một điểm $I(x_0;y_0)$ thuộc đường thẳng.

Tìm một VTPT $\vec{n}(a;b)$ của đường thẳng.

Viết phương trình $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ rồi suy ra dạng tổng quát $ax+by+c=0$.

Hoặt viết phương trình tổng quát $ax+by+c=0$, tìm c nhờ đường thẳng đã cho đi qua điểm I

Đặc biệt

- $d'//d: ax+by+c=0 \Rightarrow d': ax+by+c'=0$ (với $c\neq c'$).
- $d''\perp d: ax+by+c=0 \Rightarrow d'': bx-ay+c''=0$.
- $y=kx+m \Rightarrow kx-y+m=0$.
- $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \Rightarrow bx+ay-ab=0$.

Câu 1. Viết phương trình tổng quát của

a) Đường thẳng Ox b) Đường thẳng Oy c) Các đường phân giác của góc xOy

Lời giải

a) Đường thẳng Ox đi qua gốc tọa độ O và có VTPT $\vec{j}=(0;1)$ nên có phương trình

$0(x-0)+1(y-0)=0 \Leftrightarrow y=0$.

b) Đường thẳng Oy đi qua gốc tọa độ O và có VTPT $\vec{i}=(1;0)$ nên có phương trình

$1(x-0)+0(y-0)=0 \Leftrightarrow x=0$.

c) Phân giác của góc phần tư thứ I và II đi qua gốc tọa độ O và hợp thành với trục hoành góc nhọn $45°$ nên có hai phương trình $y=(\tan 45°)x \Leftrightarrow x-y=0$ và $y=(\tan 135°)x \Leftrightarrow x+y=0$.

Câu 2. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng

a) Đi qua $M(x_0;y_0)$ và song song với Ox.

b) Đi qua $M(x_0;y_0)$ và vuông góc với Ox.

c) Đi qua $M(x_0;y_0)$ khác gốc O và điểm O.

Lời giải

a) Đường thẳng đi qua $M(x_0;y_0)$ và song song với Ox có VTPT $\vec{j}=(0;1)$ nên có phương trình: $0(x-x_0)+1(y-y_0)=0 \Leftrightarrow y-y_0=0$ với điều kiện $M \notin Ox \Leftrightarrow y_0 \neq 0$.

b) Đường thẳng đi qua $M(x_0;y_0)$ và vuông góc với Ox có VTPT $\vec{i}=(1;0)$ nên có phương trình: $1(x-x_0)+0(y-y_0)=0 \Leftrightarrow x-x_0=0$ với điều kiện $M \notin Ox \Leftrightarrow x_0 \neq 0$.

c) Đường thẳng OM đi qua O nên có phương trình dạnh $ax+by=0$, $a^2+b^2 \neq 0$. Đường thẳng đi qua điểm $M(x_0;y_0)$ nên $ax_0+by_0=0$. Chọn $a=y_0$, $b=-x_0$ thỏa điềuu kiện $a^2+b^2=x_0^2+y_0^2 \neq 0$ nên có phương trình $y_0x-x_0y=0$.

Câu 3. Cho hai điểm $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$. Lập phương trình tổng quát của

a) Đường thẳng đi qua M_1, M_2.

b) Đường trung trực của đoạn thẳng M_1M_2.

Lời giải

a) Đường thẳng đi qua điểm M_1, M_2 có VTCP $\vec{u}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1)$ nên VTPT $\vec{n}=(y_2-y_1;-(x_2-x_1))$ có phương trình $(y_2-y_1)(x-x_1)-(x_2-x_1)(y-y_1)=0$.

Đặc biệt, nếu $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ thì có phương trình chính tắc là $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

b) Đường trung trực của đoạn M_1M_2 đi qua trung điểm $M_0\left(\dfrac{x_1+x_2}{2};\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$ và có VTPT là $\overrightarrow{M_1M_2}$ nên có phương trình $(x_2-x_1)\left(x-\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)+(y_2-y_1)\left(y-\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow 2(x_2-x_1)x+2(y_2-y_1)y-x_2^2+x_1^2+y_1^2-y_2^2=0$.

Câu 4. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua hai điểm $A(a;0)$ và $B(0;b)$ với $a \neq 0$ và $b \neq 0$ có phương trình theo đoạn chắn là $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Lời giải

Vì $\overrightarrow{AB}=(-a;b)$ nên $\vec{n}=(b;a)$ vuông góc với AB là VTPT.

Đường thẳng cần tìm có phương trình $b(x-a)+a(y-0)=0$ hay $bx+ay=ab$.

Chia cả hai vế cho ab ta được $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Câu 5. Một đường thẳng đi qua điểm $M(5;-3)$ cắt trục Ox và Oy lần lượt tại A và B sao cho M là trung điểm của AB. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đó.

Lời giải

Giả sử $A=(a;0)$, $B=(0;b)$. Vì $M(5;-3)$ là trung điểm của AB nên $\begin{cases} 5=\frac{a+0}{2} \\ -3=\frac{0+b}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=10 \\ b=-6 \end{cases}$

Phương trình của đường thẳng đi qua A, B là $\frac{x}{10}+\frac{y}{-6}=1$ hay $3x-5y-30=0$.

Câu 6. Cho đường thẳng Δ có phương trình $Ax+By+C=0$ và điểm $M_0(x_0;y_0)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M_0 và

a) Song song với dường thẳng Δ.

b) Vuông góc với đường thẳng Δ.

Lời giải

a) Δ có VTPT $\vec{n}=(A;B)$.

Vì $\Delta'//\Delta$ nên chọn VTPT $\overrightarrow{n'}=\vec{n}=(A;B)$.

$\Rightarrow \Delta': A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \Leftrightarrow Ax+By-(Ax_0+By_0)=0$.

b) Vì $\Delta' \perp \Delta$ nên chọn VTPT $\overrightarrow{n''}=(B;-A)$.

$\Rightarrow \Delta'': B(x-x_0)-A(y-y_0)=0 \Leftrightarrow Bx+Ay-(Bx_0-Ay_0)=0$.

Câu 7. Lập phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua $M(3;4)$ và có VTPT $\vec{n}=(-2;1)$

Lời giải

Đường thẳng d đi qua $M(3;4)$ và có VTPT $\vec{n}=(-2;1)$.

Phương trình tổng quát của d có dạng $Ax+By+C=0$. Thay $A=-2$, $B=1$ vào ta có: $-2x+y+C=0$.

$M \in d \Rightarrow -6+4+C=0 \Rightarrow C=2$.

Vậy phương trình tổng quát của đường thẳng d là: $-2x+y+2=0$ hay $2x-y-2=0$.

Câu 8. Lập phương trình tổng quát của đường thẳng

a) qua $A(2;0)$ và $B(0;3)$.

b) qua $M(-5;-8)$ và có hệ số góc $k=-3$.

Lời giải

a) Phương trình theo đoạn chắn $\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}=1 \Leftrightarrow 3x-2y-6=0$

b) Phương trình theo hệ số góc: $y=kx+m=-3x+m$.

Đường thẳng đi qua $M(-5;-8)$ nên $-8=15+m \Leftrightarrow m=-23$.

Do đó phương trình tổng quát: $y=-3x-23 \Leftrightarrow 3x+y+23=0$.

Câu 9. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d

a) qua $M(-1;-4)$ và song song với đường thẳng $3x+5y-2=0$.

b) qua $N(1;1)$ và vuông góc với đường thẳng $2x+3y+7=0$.

Lời giải

a) VTPT của đường thẳng $3x+5y-2=0$ cũng là VTPT của đường thẳng d nên phương trình của d có dạng $3x+5y+c=0$ $(c \neq -2)$.

Vì d đi qua điểm $M(-1;-4)$ nên $-3-20+c=0 \Rightarrow c=23$.

Vậy phương trình tổng quát của $d: 3x+5y+23=0$.

b) Đường thẳng d vuông góc với đường thẳng $2x+3y+7=0$ nên lấy VTCP $(3;-2)$ làm VTPT của d

$\Rightarrow d: 3(x-1)-2(y-1)=0 \Leftrightarrow 3x-2y-1=0$.

Câu 10. Cho hai điểm $P(4;0)$ và $Q(0;-2)$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng

a) Qua điểm S và song song với đường thẳng PQ.

b) Trung trực của PQ.

Lời giải

a) Đường thẳng PQ có phương trình theo đoạn chắn là $\frac{x}{4}+\frac{y}{-2}=1 \Leftrightarrow x-2y-4=0$.

Đường thẳng d song song với PQ có phương trình $x-2y+c=0$ với $c \neq 4$.

Vì d qua A nên $3-2.2+c=0 \Rightarrow c=1$.

Vậy phương trình của đường thẳng $d: x-2y+1=0$.

b) Đường trung trực của đoạn PQ đi qua trung điểm I của PQ là $I(2;-1)$ và vuông góc với đường thẳng PQ nên nhận $\overrightarrow{PQ}=(-4;-2)$ là VTPT. Phương trình đường trung trực của PQ là $-4(x-2)-2(y+1)=0 \Leftrightarrow 2x+y-3=0$.

Câu 11. Viết phương trình các đường trung trực của tam giác ABC biết $M(-1;1)$, $N(1;9)$, $P(9;1)$ là các trung điểm ba cạnh của tam giác.

Lời giải

Giả sử M,N,P theo thứ tự đó là trung điểm các cạnh AB, AC và BC của tam giác ABC.

Ta có $\overrightarrow{MN}=(2;8)$; $\overrightarrow{NP}=(8;-8)$; $\overrightarrow{MP}=(10;0)$.

Đường trung trực của cạnh BC đi qua P nhận $\overrightarrow{MN}$ làm véc tơ chỉ phương nên có phương trình $2(x-9)+8(y-1)=0$ hay $x+4y-13=0$.

Tương tự, ta được phương trình các đường trung trực các cạnh AB, AC lần lượt là $x-y+2=0$ và $x-1=0$.

Câu 12. Cho điểm $M(1;2)$. Hãy lập phương trình của đường thẳng đi qua điểm M và chắn trên hai trục tọa độ hai đoạn thẳng có độ dài bằng nhau.

Lời giải

• Xét d qua gốc O thì $d: y=kx \Rightarrow y=2x$.

• Xét d không qua gốc O thì $a,b\neq 0$ khi đó $d:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Theo giả thiết thì $|a|=|b|$.

+ Nếu $b=a$ thì $d: x+y=a$. Vì d qua điểm $M(1;2)$ nên $a=3$, do đó $d: x+y=3$.

+ Nếu $b=-a$ thì $d: x-y=a$. Vì d qua điểm $M(1;2)$ nên $a=-1$, do đó $d: x-y=-1$.

Vậy có 3 đường thẳng: $2x-y=0$, $x+y-3=0$, $x-y+1=0$.

Câu 13. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(2;5)$ và cách đều hai điểm $P(-1;2)$, $Q(5;4)$.

Lời giải

Xét $d//PQ$ thì thỏa mãn điều kiện cách đều P và Q.

VTCP $\overrightarrow{PQ}=(6;2)$ nên $d:\begin{cases}x=2+3t\\ y=5+t\end{cases}$

Xét d' không song song với PQ, để d' cách đều P,Q thì d' đi qua trung điểm $I(2;3)$ của PQ

VTCP $\overrightarrow{MI}=(0;-2)$ nên $d':\begin{cases}x=2\\ y=5-2t\end{cases}$.

Câu 14. Đường thẳng $d: 2x-y+8=0$ cắt các trục tọa độ Ox và Oy lần lượt tại các điểm A và B. Gọi M là điểm chia đoạn AB theo tỉ số -3. Viết phương trình đường thẳng đi qua M và vuông góc với d.

Lời giải

Cho $x=0\Rightarrow y=8$, $y=0\Rightarrow x=-4$. Do đó $A(-4;0)$, $B(0;8)$.

Gọi $M(x_0;y_0)$ thì $x_0=\frac{x_1-kx_2}{1-k}=\frac{-4-0}{4}=-1$. Vậy $M(-1;6)$.

VTCP của $d: 2x-y+8=0$ là $\vec{u}=(1;2)$. Do đó phương trình đường thẳng d' qua điểm M và vuông góc với d là $d': 1(x+1)+2(y-6)=0$ hay $x+2y-11=0$.

Câu 15. Cho đường thẳng $d_1: 2x-y-2=0$; $d_2: x+y+3=0$ và điểm $M(3;0)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M, cắt d_1 và d_2 lần lượt tại A và B sao cho M là trung điểm của đoạn AB.

Lời giải

$A(x_A;y_A)\in d_1 \Rightarrow y_A=2x_A-2$.

$B(x_B;y_B)\in d_2 \Rightarrow y_B=-x_B-3$.

Vì M là trung điểm của AB nên:

$$\begin{cases} x_A+x_B=2x_M \\ y_A+y_B=2y_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A+x_B=6 \\ 2x_A-2-x_B-3=0 \end{cases} \Rightarrow x_A=\frac{11}{3} \Rightarrow y_A=\frac{16}{3}.$$

Vậy A = $\left(\frac{11}{3};\frac{16}{3}\right)$.

Đường thẳng Δ là đường thẳng qua A và M. Từ đó suy ra Δ: 8x – y – 24 = 0.

Câu 16. Cho tam giác ABC biết $A(2;\ 1)$, $B(-1;\ 0)$, $C(0;\ 3)$

a)Viết phương trình tổng quát của đường cao AH.

b)Viết phương trình tổng quát đường trung trực của đoạn thẳng AB.

c)Viết phương trình tổng quát đường thẳng BC.

d)Viết phương trình tổng quát đường thẳng qua A và song song với BC.

Lời giải.

a)Ta có đường cao AH đi qua A và nhận $\overrightarrow{BC}(1;3)$ là VTPT nên có phương trình tổng quát là $1.(x-2)+3.(y-1)=0$ hay $x+3y-5=0$.

b)Gọi I là trung điểm AB khi đó $x_1=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{1}{2}$, $y_1=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. Đường trung trực đoạn thẳng AB đi qua I và nhận $\overrightarrow{AB}(-3;-1)$ làm VTPT nên có phương trình tổng quát là:

$-3.\left(x-\frac{1}{2}\right)-1.\left(y-\frac{1}{2}\right)=0$ hay $3x+y+2=0$.

c)Phương trình tổng quát của đường thẳng BC có dạng $\frac{x}{-1}+\frac{y}{3}=1$ hay $3x-y+3=0$.

d)Đường thẳng BC có VTPT là $\vec{n}(3;-1)$ do đó vì đường thẳng cần tìm song song với đường thẳng AB nên nhận $\vec{n}(3;-1)$ làm VTPT do đó có phương trình tổng quát là:

$3.(x-2)-1.(y-1)=0$ hay $3x-y-5=0$.

Dạng 2. Phương trình tham số của đường thẳng

Tìm một điểm $I(x_0;y_0)$ thuộc đường thẳng.

Tìm một VTPT $\vec{n}(a;b)$ của đường thẳng.

Phương trình tham số: $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+at \end{cases}, \left(a^2+b^2\neq 0\right)$.

Đặc biệt, d qua A, B thì có VTPT $\vec{u}(x_B-x_A;y_B-y_A)$.

d’ ⊥ d: ax + by + c = 0 thì VTPT $\vec{u'}(a;b)$.

d” // d: ax + by + c = 0 thì VTPT $\vec{u''}=(-b;a)$ hay (b; –a).

d có hệ số góc k’ thì VTPT $\vec{u}=(1;k)$.

Câu 17. Viết phương trình tham số của đường thẳng qua:

a) $M_0(x_0;y_0)$ và vuông góc với đường thẳng $Ax+By+C=0$.

b) $M_0(x_0;y_0)$ và song song với đường thẳng $Ax + By + C = 0$.

Lời giải.

Đường thẳng $Ax + By + C = 0$ có VTPT $\vec{n} = (A;B)$, VTCP $\vec{u} = (-B;A)$.

a)Đường thẳng vuông góc với đường thẳng $Ax + By + C = 0$ có VTPT là $\vec{u} = (A;B)$. Vậy phương trìnhm tha số của đường thẳng là: $\begin{cases} x = x_0 + At \\ y = y_0 + Bt \end{cases}$.

b)Đường thẳng song song với đường thẳng $Ax + By + C = 0$ có VTCP là $\vec{u} = (-B;A)$. Vậy phương trình tham số của đường thẳng là: $\begin{cases} x = x_0 - Bt \\ y = y_0 + At \end{cases}$.

Câu 18. Lập phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(2;1)$ và có VTCP $\vec{u} = (3;7)$.

Lời giải.

Phường trình tham số của d là $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 7t \end{cases}$.

Câu 19. Lập phương trình tham số của đường thẳng d:

a)Đi qua điểm $M(5;1)$ và có hệ số góc $k = 8$.

b)Đi qua hai điểm $A(3;4)$ và $B(4;2)$.

Lời giải.

a) d có hệ số góc $k = 8$ nên có VTCP $\vec{u} = (1;8)$. Vậy phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 + 8t \end{cases}$.

b) d đi qua A và B nên d có VTCP $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1;-2)$. Vậy phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 - 2t \end{cases}$.

Câu 20. Viết phương trình tham số của đường thẳng:

a) $2x + 3y - 6 = 0$.

b) $y = -4x + 5$.

Lời giải.

a) $d: 2x + 3y\text{n}6 = 0$ có VTPT $\vec{n} = (2;3) \Rightarrow$ VTCP $\vec{u} = (-3;2)$.

Cho $x = 0$ thì $y = 2$ nên d đi qua điểm $M(0;2)$.

Vậy phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x = -3t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$.

b) $y = -4x + 5$ có hệ số $k = -4$ nên có VTCP $\vec{u} = (1;-4)$.

Cho $x=0 \Rightarrow y=5$ nên d đi qua $I(0;5)$.

Vậy phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x=t \\ y=5-4t \end{cases}$.

Câu 21. Viết phương trình tham số của đường thẳng:

a) $d: x = 3$.

b)d: $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y+1}{-3}$.

Lời giải.

a) $d: x\text{-}3=0$ đi qua $I(3;0)$ và có VTCP $\vec{u}=(0;1)$.

Vậy phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x=3 \\ y=t \end{cases}$.

b)Đặt $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y+1}{-3}=t$ thì $x-2=5t$, $y+1=\text{-}3t$.

Vậy phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x=2+5t \\ y=-1-3t \end{cases}$.

Dạng 3. Phương trình chính tắc của đường thẳng

Tìm một điểm $I(x_0;y_0)$ thuộc đường thẳng.

Tìm một VTCP $\vec{n}(a;b)$ của đường thẳng.

Nếu a, b ≠ 0 thì có dạng chính tắc: $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}$.

d' ⊥ d: ax + by + c = 0 thì VTCP $\vec{u'}=(a;b)$.

d'' // d: ax + by + c = 0 thì VTCP $\vec{u''}=(-b;a)$ *hay (b; –a).*

d có hệ số góc k' thì VTCP $\vec{u}=(1;k)$.

Câu 22. Lập phương trình chính tắc của đường thẳng:

a)Qua $A(\text{-}4;1)$ và $B(1;4)$.

b)Qua $A(4;1)$ và $B(4;2)$.

Lời giải.

a)VTCP $\overrightarrow{AB}=(5;3)$ nên có phương trình tham số Δ: $\begin{cases} x=-4+5t \\ y=1+3t \end{cases}$.

Vì a, b ≠ 0 nên có phương trình chính tắc Δ: $\dfrac{x+4}{5}=\dfrac{y-1}{3}$.

b)VTCP $\overrightarrow{AB}=(0;1)$ nên có phương trình tham số Δ: $\begin{cases} x=4 \\ y=1+t \end{cases}$.

Vì a = 0 không có phương trình chính tắc.

Câu 23. Cho điểm $A(-5;2)$ và đường thẳng d: $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{-2}$. Lập phương trình chính tắc của đường thẳng d':

a)Qua A và song song với d.

b)Qua A và vuông góc với d.

Lời giải.

a)d có VTCP $\vec{u}=(1;-2)$ cũng là VTCP của d'. Vậy d': $\frac{x+5}{1}=\frac{y-2}{-2}$.

b)d vuông góc với d' nên có VTCP là $A(2;1)$.

Vậy d': $\frac{x+5}{2}=\frac{y-2}{1}$.

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Xác định véctơ chỉ phương, véc tơ pháp tuyến của đường thẳng, hệ số góc của đường thẳng

Câu 1. Trong mặt phẳng Oxy, đường thẳng $(d): ax+by+c=0,\ (a^2+b^2\neq 0)$. Vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng (d)?

A. $\vec{n}=(a;-b)$. **B.** $\vec{n}=(b;a)$. **C.** $\vec{n}=(b;-a)$. **D.** $\vec{n}=(a;b)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có một vectơ pháp tuyến của đường thẳng (d) là $\vec{n}=(a;b)$.

Do đó chọn đáp án **D.** $\vec{n_1}=(-a;b)$.

Câu 2. Cho đường thẳng d có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a;b)$, $a,b\in\mathbb{R}$. Xét các khẳng định sau:

1. Nếu $b=0$ thì đường thẳng d không có hệ số góc.

2. Nếu $b\neq 0$ thì hệ số góc của đường thẳng d là $\frac{a}{b}$.

3. Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(b;-a)$.

4. Vectơ $k\vec{n}$, $k\in\mathbb{R}$ là vectơ pháp tuyến của d.

Có bao nhiêu khẳng định **sai**?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B.

d có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a;b)\Rightarrow$ phương trình $d: ax+by+c=0$.

Nếu $b=0$ thì đường thẳng $d: ax+c=0$ không có hệ số góc $\Rightarrow$ khẳng định 1 đúng.

Nếu $b\neq 0$ thì đường thẳng $d: y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ có hệ số góc là $-\frac{a}{b}\Rightarrow$ khẳng định 2 sai.

Với $\vec{u}=(b;-a)\Rightarrow \vec{u}.\vec{n}=0\Rightarrow \vec{u}\perp\vec{n}\Rightarrow\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của $d\Rightarrow$ khẳng định 3 đúng.

Chọn $k=0\in\mathbb{R}\Rightarrow k\vec{n}=(0;0)$ không phải là vectơ pháp tuyến của $d\Rightarrow$ khẳng định 4 sai.

Vậy có 2 mệnh đề sai.

Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x-2y+3=0$. Vectơ pháp tuyến của đường thẳng d là

A. $\vec{n}=(1;-2)$ **B.** $\vec{n}=(2;1)$ **C.** $\vec{n}=(-2;3)$ **D.** $\vec{n}=(1;3)$

Lời giải

Chọn A.

Câu 4. Cho đường thẳng $(d): 3x+2y-10=0$. Véc tơ nào sau đây là véctơ chỉ phương của (d)?

A. $\vec{u}=(3;2)$. **B.** $\vec{u}=(3;-2)$. **C.** $\vec{u}=(2;-3)$. **D.** $\vec{u}=(-2;-3)$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng (d) có một véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;2)$ nên (d) có một véctơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;-3)$.

Câu 5. Cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=5-\frac{1}{2}t \\ y=-3+3t \end{cases}$ một vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ có tọa độ

A. $(5;-3)$. **B.** $(6;1)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};3\right)$. **D.** $(-5;3)$.

Lời giải

Chọn B

$\Delta: \begin{cases} x=5-\frac{1}{2}t \\ y=-3+3t \end{cases}$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=\left(-\frac{1}{2};3\right)$ suy ra có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left(3;\frac{1}{2}\right)$. Do đó đường thẳng Δ cũng có một vectơ pháp tuyến có tọa độ $(6;1)$.

Câu 6. Trong hệ trục tọa độ Oxy, Véctơ nào là một véctơ pháp tuyến của đường thẳng $d: \begin{cases} x=-2-t \\ y=-1+2t \end{cases}$?

A. $\vec{n}(-2;-1)$. **B.** $\vec{n}(2;-1)$. **C.** $\vec{n}(-1;2)$. **D.** $\vec{n}(1;2)$.

Lời giải

Chọn A

Một VTCP của đường thẳng d là $\vec{u}(-1;2)$ $\Rightarrow$ một VTPT của d là $\vec{n}(-2;-1)$.

Câu 7. Vectơ chỉ phương của đường thẳng $d: \begin{cases} x=1-4t \\ y=-2+3t \end{cases}$ là:

A. $\vec{u}=(-4;3)$. **B.** $\vec{u}=(4;3)$. **C.** $\vec{u}=(3;4)$. **D.** $\vec{u}=(1;-2)$.

Lời giải

Chọn A.

Đường thẳng $d: \begin{cases} x=1-4t \\ y=-2+3t \end{cases}$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(-4;3)$.

Câu 8. Vector nào dưới đây là 1 vector chỉ phương của đường thẳng song song với trục Ox:

A. $\vec{u}=(1;0)$. **B.** $\vec{u}=(1;-1)$. **C.** $\vec{u}=(1;1)$. **D.** $\vec{u}=(0;1)$.

Lời giải

Chọn A

Vector $\vec{i}=(1;0)$ là một vector chỉ phương của trục Ox

Các đường thẳng song song với trục Ox có 1 vector chỉ phương là $\vec{u}=\vec{i}=(1;0)$

Câu 9. Cho đường thẳng $d: 7x+3y-1=0$. Vectơ nào sau đây là Vectơ chỉ phương của d?

A. $\vec{u}=(7;3)$. **B.** $\vec{u}=(3;7)$. **C.** $\vec{u}=(-3;7)$. **D.** $\vec{u}=(2;3)$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng d có 1 VTPT là $\vec{n}=(7;3)$ nên d có 1 VTCP là $\vec{u}=(-3;7)$.

Câu 10. Cho đường thẳng $d: 2x+3y-4=0$. Véctơ nào sau đây là véctơ pháp tuyến của đường thẳng d?

A. $\overrightarrow{n_1}=(3;2)$. **B.** $\overrightarrow{n_1}=(-4;-6)$. **C.** $\overrightarrow{n_1}=(2;-3)$. **D.** $\overrightarrow{n_1}=(-2;3)$.

Lời giải

Chọn B

Véctơ pháp tuyến của đường thẳng d: $\overrightarrow{n_1}=(-4;-6)$.

Câu 11. Cho đường thẳng d: $5x+3y-7=0$. Vectơ nào sau đây là một vec tơ chỉ phương của đường thẳng d?

A. $\overrightarrow{n_1}=(3;5)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(3;-5)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=(5;3)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(-5;-3)$.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng d: $5x+3y-7=0$ có vec tơ pháp tuyến là: $\vec{n}=(5;3)$.

Ta có: $\vec{n}.\overrightarrow{n_2}=0$.

$\Rightarrow d$ có một vec tơ chỉ phương là $\overrightarrow{n_2}=(3;-5)$.

Câu 12. Cho đường thẳng $\Delta: x-2y+3=0$. Véc tơ nào sau đây **không là** véc tơ chỉ phương của Δ?

A. $\vec{u}=(4;-2)$. **B.** $\vec{v}=(-2;-1)$. **C.** $\vec{m}=(2;1)$. **D.** $\vec{q}=(4;2)$.

Lời giải

Chọn A

Nếu $\vec{u}$ là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ thì $k.\vec{u}, \forall k \neq 0$ cũng là véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

Từ phương trình đường thẳng Δ ta thấy đường thẳng Δ có một véc tơ chỉ phương có toạ độ là $(2;1)$. Do đó véc tơ $\vec{u}=(4;-2)$ không phải là véc tơ chỉ phương của Δ.

Câu 13. Cho hai điểm $A=(1;2)$ và $B=(5;4)$. Vectơ pháp tuyến của đường thẳng AB là

A. $(-1;-2)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-2;1)$. **D.** $(-1;2)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;2)=2(2;1)$ suy ra vectơ pháp tuyến của đường thẳng AB là $\overrightarrow{n_{AB}}=(-1;2)$.

Câu 14. Cho đường thẳng $d: 7x+3y-1=0$. Vectơ nào sau đây là Vectơ chỉ phương của đường thẳng d?

A. $\vec{u}=(7;3)$. **B.** $\vec{u}=(3;7)$. **C.** $\vec{u}=(-3;7)$. **D.** $\vec{u}=(2;3)$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng d có 1 VTPT là $\vec{n}=(7;3)$ nên d có 1 VTCP là $\vec{u}=(-3;7)$

Câu 15. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của $d: x-2y+2018=0$?

A. $\vec{n}_1(0;-2)$. **B.** $\vec{n}_3(-2;0)$. **C.** $\vec{n}_4(2;1)$. **D.** $\vec{n}_2(1;-2)$.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng $d: x-2y+2018=0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_2(1;-2)$.

Câu 16. Vectơ nào trong các vectơ dưới đây là vectơ pháp tuyến của đường thẳng $y+2x-1=0$?

A. $(2;-1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-2;1)$. **D.** $(-2;-1)$.

Lời giải

Chọn D.

$(d): y+2x-1=0 \Leftrightarrow 2x+y-1=0$; (d) có VTPT là $\vec{n}=(2;1)$ hay $\vec{n}'=(-2;-1)$

Câu 17. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $d: 2x-y+1=0$, một véctơ pháp tuyến của d là

A. $(-2;-1)$. **B.** $(2;-1)$. **C.** $(-1;-2)$. **D.** $(1;-2)$.

Lời giải

Chọn B

Một véctơ pháp tuyến của đường thẳng d là $\vec{n}=(2;-1)$.

Câu 18. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $d: 2x-3y+4=0$. Vectơ nào sau đây là một vectơ chỉ phương của *d*.

A. $\overrightarrow{u_4}=(3;-2)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(2;3)$.

C. $\overrightarrow{u_1}=(2;-3)$. **D.** $\overrightarrow{u_3}=(3;2)$

Lời giải

Chọn D

Ta thấy đường thẳng d có một vectơ pháp tuyến là $(2;-3)$. Do đó $\overrightarrow{u_3}=(3;2)$ là một vectơ chỉ phương của *d*.

Câu 19. Vectơ nào sau đây là một Vectơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta: 6x-2y+3=0$?

A. $\vec{u}(1;3)$. **B.** $\vec{u}(6;2)$. **C.** $\vec{u}(-1;3)$. **D.** $\vec{u}(3;-1)$.

Lời giải

Chọn A

+) Một véctơ pháp tuyến của đường thẳng Δ là $\vec{n}(6;-2)$ nên véctơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}(1;3)$.

Câu 20. Cho hai điểm $M(2;3)$ và $N(-2;5)$. Đường thẳng MN có một vectơ chỉ phương là:

A. $\vec{u}=(4;2)$. **B.** $\vec{u}=(4;-2)$. **C.** $\vec{u}=(-4;-2)$. **D.** $\vec{u}=(-2;4)$.

Lời giải

Chọn B

$\overrightarrow{MN}=(-4;2)$. Do đó vectơ chỉ phương của MN là $\vec{u}=(4;-2)$.

Câu 21. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x-2y+1=0$. Một vectơ chỉ phương của đường thẳng d là

A. $\vec{u}=(1;-2)$. **B.** $\vec{u}=(2;1)$. **C.** $\vec{u}=(2;-1)$. **D.** $\vec{u}=(1;2)$.

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng $d: x-2y+1=0$. có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-2) \Rightarrow$ Vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(2;1)$.

Câu 22. Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;-1)$. Trong các vectơ sau, vectơ nào là một vectơ pháp tuyến của d?

A. $\overrightarrow{n_1}=(-1;2)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(1;-2)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=(-3;6)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(3;6)$.

Lời giải

Đường thẳng d có VTCP: $\vec{u}(2;-1) \longrightarrow$ VTPT $\vec{n}(1;2)$ hoặc $3\vec{n}=(3;6)$. **Chọn D.**

Câu 23. Đường thẳng d có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(4;-2)$. Trong các vectơ sau, vectơ nào là một vectơ chỉ phương của d?

A. $\overrightarrow{u_1}=(2;-4)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(-2;4)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(1;2)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(2;1)$.

Lời giải

Đường thẳng d có VTPT: $\vec{n}(4;-2) \longrightarrow$ VTCP $\vec{u}(2;4)$ hoặc $\frac{1}{2}\vec{u}=(1;2)$. **Chọn C.**

Câu 24. Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(3;-4)$. Đường thẳng Δ vuông góc với d có một vectơ pháp tuyến là:

A. $\overrightarrow{n_1}=(4;3)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(-4;-3)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=(3;4)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(3;-4)$.

Lời giải

$\begin{cases}\vec{u}_d=(3;-4)\\ \Delta \perp d\end{cases} \longrightarrow \vec{n}_\Delta=\vec{u}_d=(3;-4)$. **Chọn D.**

Câu 25. Đường thẳng d có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(-2;-5)$. Đường thẳng Δ vuông góc với d có một vectơ chỉ phương là:

A. $\overrightarrow{u_1}=(5;-2)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(-5;2)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(2;5)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(2;-5)$.

Lời giải

$\begin{cases}\vec{n}_d=(-2;-5)\\ \Delta \perp d\end{cases} \longrightarrow \vec{u}_\Delta=\vec{n}_d=(-2;-5)$ hay chọn $-\vec{n}_\Delta=(2;5)$. **Chọn C.**

Câu 26. Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(3;-4)$. Đường thẳng Δ song song với d có một vectơ pháp tuyến là:

A. $\overrightarrow{n_1}=(4;3)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(-4;3)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=(3;4)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(3;-4)$.

Lời giải

$\begin{cases}\vec{u}_d=(3;-4)\\ \Delta \parallel d\end{cases} \longrightarrow \vec{u}_\Delta=\vec{u}_d=(3;-4) \longrightarrow \vec{n}_\Delta=(4;3)$. **Chọn A.**

Câu 27. Đường thẳng d có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(-2;-5)$. Đường thẳng Δ song song với d có một vectơ chỉ phương là:

A. $\overrightarrow{u_1}=(5;-2)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(-5;-2)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(2;5)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(2;-5)$.

Lời giải

$\begin{cases} \vec{n}_d = (-2;-5) \\ \Delta \parallel d \end{cases} \longrightarrow \vec{n}_\Delta = \vec{u}_d = (-2;-5) \longrightarrow \vec{u}_\Delta = (5;-2)$. **Chọn A.**

Câu 28. Cho đường thẳng $d: 3x+5y+2018=0$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. d có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(3;5)$.

B. d có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(5;-3)$.

C. d có hệ số góc $k=\dfrac{5}{3}$.

D. d song song với đường thẳng $\Delta: 3x+5y=0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $d: 3x+5y+2018=0 \Leftrightarrow d: y=-\dfrac{3}{5}x-\dfrac{2018}{5}$, nên d có hệ số góc $k=-\dfrac{3}{5}$.

Câu 29. Cho đường thẳng $(d): x-7y+15=0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. (d) có hệ số góc $k=\dfrac{1}{7}$

B. (d) đi qua hai điểm $M\left(-\dfrac{1}{3};2\right)$ và $M(5;0)$

C. $\vec{u}=(-7;1)$ là vecto chỉ phương của (d)

D. (d) đi qua gốc tọa độ

Lời giải

Chọn A

Ta có $(d): x-7y+15=0$ hay $y=\dfrac{1}{7}x+\dfrac{15}{7}$

Suy ra hệ số góc của đường thẳng là $k=\dfrac{1}{7}$ (đúng)

Dạng 2. Viết phương trình đường thẳng (tổng quát, tham số, chính tắc)

Câu 30. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-2;3)$ và $B(4;-1)$. Phương trình nào sau đây là phương trình đường thẳng AB?

A. $x+y-3=0$.

B. $y=2x+1$.

C. $\dfrac{x-4}{6}=\dfrac{y-1}{-4}$.

D. $\begin{cases} x=1+3t \\ y=1-2t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Bốn phương trình đã cho trong bốn phương án đều là phương trình của đường thẳng.

Thay lần lượt tọa độ của A, B vào từng phương án ta thấy tọa độ của cả A và B đều thỏa phương án D.

Câu 31. Phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm $A(2;-1)$ và $B(2;5)$ là

A. $\begin{cases} x=2t \\ y=-6t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x=2+t \\ y=5+6t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x=1 \\ y=2+6t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x=2 \\ y=-1+6t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(0;6)$.

Phương trình đường thẳng AB đi qua A và có vecto chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(0;6)$ là $\begin{cases} x=2 \\ y=-1+6t \end{cases}$

Câu 32. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai điểm $A(3;-1)$ và $B(-6;2)$. Phương trình nào dưới đây không phải là phương trình tham số của đường thẳng AB?

A. $\begin{cases}x=3+3t\\y=-1-t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=3+3t\\y=-1+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-3t\\y=t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-6-3t\\y=2+t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn B.

• **Cách 1:** Thay tọa độ các điểm A, B lần lượt vào các phương trình trong các phương án trên thì thấy phương án B không thỏa mãn.

• **Cách 2:** Nhận thấy rằng các phương trình ở các phương án A, C, D thì vectơ chỉ phương của các đường thẳng đó cùng phương, riêng chỉ có phương án B thì không. Do đó lựa chọn **B.**

Câu 33. Phương trình tham số của đường thẳng qua $M(1;-2)$, $N(4;3)$ là

A. $\begin{cases}x=4+t\\y=3-2t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1+5t\\y=-2-3t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=3+3t\\y=4+5t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+3t\\y=-2+5t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng có véctơ chỉ phương là $\overrightarrow{MN}=(3;5)$ và đi qua $M(1;-2)$ nên có phương trình tham số là $\begin{cases}x=1+3t\\y=-2+5t\end{cases}$.

Câu 34. Phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm $A(3;-1),B(-6;2)$ là

A. $\begin{cases}x=-1+3t\\y=2t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=3+3t\\y=-1-t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=3+3t\\y=-6-t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3+3t\\y=-1+t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-9;3)\Rightarrow \overrightarrow{u_{AB}}=(3;-1)$.

Suy ra phương trình tham số của đường thẳng AB là $\begin{cases}x=3+3t\\y=-1-t\end{cases}$.

Câu 35. Trong mặt phẳng tọa độ, cho hai điểm $A(3;0),B(0;2)$ và đường thẳng $d:x+y=0$. Lập phương trình tham số của đường thẳng Δ qua A và song song với d.

A. $\begin{cases}x=t\\y=3-t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=t\\y=3+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-t\\y=3-t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-t\\y=3+t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có Δ song song với d nên $\Delta: x+y+C=0\,(C\neq 0)$.

Δ qua $A(3;0)$, suy ra $3+0+C=0\Leftrightarrow C=-3$ (nhận)

Như vậy $\Delta: x+y-3=0$

Vậy Δ có phương trình tham số: $\begin{cases}x=t\\y=3-t\end{cases}$.

Câu 36. Cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases}x=5+t\\y=-9-2t\end{cases}$. Phương trình tổng quát của đường thẳng d là

A. $2x+y-1=0$. **B.** $-2x+y-1=0$. **C.** $x+2y+1=0$. **D.** $2x+3y-1=0$.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng $(d):\begin{cases}x=5+t\\y=-9-2t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=x-5\\y=-9-2t\end{cases}\Rightarrow y=-9-2(x-5)\Leftrightarrow 2x+y-1=0$.

Câu 37. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(1;2)$. Gọi A,B là hình chiếu của M lên Ox,Oy. Viết phương trình đường thẳng AB.

A. $x+2y-1=0$. **B.** $2x+y+2=0$. **C.** $2x+y-2=0$. **D.** $x+y-3=0$.

Lời giải:

Chọn C.

Ta có hình chiếu của điểm $M(1;2)$ lên Ox,Oy lần lượt là A(1;0) và B(0;2). Do đó phương trình đường thẳng AB là $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}=1\Leftrightarrow 2x+y-2=0$.

Câu 38. Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=3-5t\\y=1+4t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$. Phương trình tổng quát của đường thẳng *d* là

A. $4x-5y-7=0.$. **B.** $4x+5y-17=0.$. **C.** $4x-5y-17=0.$. **D.** $4x+5y+17=0.$

Lời giải

Chọn B.

$$d:\begin{cases}x=3-5t\\y=1+4t\end{cases}(t\in\mathbb{R})\Leftrightarrow\begin{cases}t=\dfrac{3-x}{5}\\t=\dfrac{y-1}{4}\end{cases}\Rightarrow\frac{3-x}{5}=\frac{y-1}{4}\Leftrightarrow 4x+5y-17=0$$

Câu 39. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường thẳng *d* cắt hai trục Ox và Oy lần lượt tại hai điểm $A(a;0)$ và $B(0;b)$ $(a\neq 0;b\neq 0)$. Viết phương trình đường thẳng *d*.

A. $d:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$. **B.** $d:\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$. **C.** $d:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. **D.** $d:\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1.$.

Lời giải

Phương trình đoạn chắn của đường thẳng $d:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Câu 40. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(0;4),B(-6;0)$ là:

A. $\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1$. **B.** $\frac{x}{4}+\frac{y}{-6}=1$. **C.** $\frac{-x}{4}+\frac{y}{-6}=1$. **D.** $\frac{-x}{6}+\frac{y}{4}=1$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $M(a;0),N(0;b)$ với $a,b\neq 0$ là $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Áp dụng phương trình trên ta chọn phương án D.

Câu 41. Phương trình đường thẳng d đi qua $A(1;-2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta:3x-2y+1=0$ là:

A. $3x-2y-7=0$. **B.** $2x+3y+4=0$. **C.** $x+3y+5=0$. **D.** $2x+3y-3=0$.

Lời giải

Chọn B

Do $d\perp\Delta\Rightarrow\overrightarrow{n_d}(2;3)$

Mà đường thẳng d đi qua $A(1;-2)$ nên ta có phương trình: $2(x-1)+3(y+2)=0 \Leftrightarrow 2x+3y+4=0$.

Vậy phương trình đường thẳng $d: 2x+3y+4=0$.

Câu 42. Cho đường thẳng $d: 8x-6y+7=0$. Nếu đường thẳng Δ đi qua gốc tọa độ và vuông góc với đường thẳng *d* thì Δ có phương trình là

A. $4x-3y=0$. **B.** $4x+3y=0$. **C.** $3x+4y=0$. **D.** $3x-4y=0$.

Lời giải

Chọn C

Vì Δ vuông góc với đường thẳng $d: 8x-6y+7=0$ nên phương trình $\Delta: 6x+8y+C=0$

Mà Δ đi qua gốc tọa độ nên ta có: $6.0+8.0+C=0 \Leftrightarrow C=0$.

Vậy phương trình $\Delta: 6x+8y=0$ hay $\Delta: 3x+4y=0$

Câu 43. Đường thẳng đi qua điểm $A(1;11)$ và song song với đường thẳng $y=3x+5$ có phương trình là

A. $y=3x+11$. **B.** $y=(-3x+14)$. **C.** $y=3x+8$. **D.** $y=x+10$.

Lời giải

Chọn C

Gọi (d) là đường thẳng cần tìm. Vì (d) song song với đường thẳng $y=3x+5$ nên (d) có phương trình $y=3x+a$, $a \neq 5$.

Vì (d) đi qua điểm $A(1;11)$ nên ta có $11=3\cdot1+a \Rightarrow a=8$.

Vậy phương trình đường thẳng (d) cần tìm là $y=3x+8$.

Câu 44. Lập phương trình đường đi qua $A(2;5)$ và song song với đường thẳng $(d): y=3x+4$?

A. $(\Delta): y=3x-2$. **B.** $(\Delta): y=3x-1$. **C.** $(\Delta): y=-\frac{1}{3}x-1$. **D.** $(\Delta): y=-3x-1$.

Lời giải

Chọn B

Gọi (Δ) là đường thẳng cần tìm.

+) $(\Delta)//(d): y=3x+4$. Suy ra phương trình (Δ) có dạng $y=3x+b$, $b \neq 4$.

Có $A(2;5) \in \Delta \Leftrightarrow 5=6+b \Leftrightarrow b=-1$ (thoả $b \neq 4$)

Vậy $(\Delta): y=3x-1$.

Câu 45. Trong hệ trục Oxy, đường thẳng d qua $M(1;1)$ và song song với đường thẳng $d': x+y-1=0$ có phương trình là

A. $x+y-1=0$. **B.** $x-y=0$. **C.** $-x+y-1=0$. **D.** $x+y-2=0$.

Lời giải

Chọn D

Do đường thẳng d song song với đường thẳng $d': x+y-1=0$ nên đường thẳng d nhận véc tơ $\vec{n}=(1;1)$ làm véc tơ pháp tuyến.

Khi đó đường thẳng d qua $M(1;1)$ và nhận véc tơ $\vec{n}=(1;1)$ làm véc tơ pháp tuyến có phương trình là $x+y-2=0$.

Câu 46. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua điểm $I(-1;2)$ và vuông góc với đường thẳng có phương trình $2x-y+4=0$.

A. $x+2y=0$. **B.** $x+2y-3=0$. **C.** $x+2y+3=0$. **D.** $x-2y+5=0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có đường thẳng vuông góc với $2x-y+4=0$ có phương trình $x+2y+m=0$, mà đường thẳng này đi qua điểm $I(-1;2)$, suy ra $-1+2.2+m=0 \Leftrightarrow m=-3$.

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình $x+2y-3=0$.

Câu 47. Trong hệ trục tọa độ Trong hệ trục tọa độ Oxy cho hai điểm $M(1;0)$ và $N(0;2)$. Đường thẳng đi qua $A\left(\frac{1}{2};1\right)$ và song song với đường thẳng MN có phương trình là

A. Không tồn tại đường thẳng như đề bài yêu cầu.

B. $2x+y-2=0$.

C. $4x+y-3=0$.

D. $2x-4y+3=0$.

Lời giải

Chọn A

Có $\overrightarrow{MN}=(-1;2)$.

Đường thẳng (d) đi qua $A\left(\frac{1}{2};1\right)$ nhận $\overrightarrow{MN}=(-1;2)$ làm vec tơ chỉ phương:

$(d):2\left(x-\frac{1}{2}\right)+y-1=0 \Leftrightarrow 2x+y-2=0 (1)$.

Thử lại: thay tọa độ của M vào (1) thì nghiệm đúng (1). Suy ra loại (1).

Vậy không tồn tại đường thẳng như đề bài yêu cầu.

Câu 48. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(2;0)$, $B(0;3)$ và $C(-3;-1)$. Đường thẳng đi qua điểm B và song song với AC có phương trình tham số là:

A. $\begin{cases} x=5t \\ y=3+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=5 \\ y=1+3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=t \\ y=3-5t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=3+5t \\ y=t \end{cases}$.

Lời giải

Gọi d là đường thẳng qua B và song song với AC. Ta có

$\begin{cases} B(0;3)\in d \\ \vec{u}_d=\overrightarrow{AC}=(-5;-1)=-1.(5;1) \end{cases} \longrightarrow d:\begin{cases} x=5t \\ y=3+t \end{cases} (t\in\mathbb{R}) \longrightarrow$ **Chọn A.**

Câu 49. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(3;2)$, $P(4;0)$ và $Q(0;-2)$. Đường thẳng đi qua điểm A và song song với PQ có phương trình tham số là:

A. $\begin{cases} x=3+4t \\ y=2-2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=3-2t \\ y=2+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-2+t \end{cases}$.

Lời giải

Gọi d là đường thẳng qua A và song song với PQ.

Ta có: $\begin{cases} A(3;2)\in d \\ \vec{u}_d=\overrightarrow{PQ}=(-4;-2)=-2(2;1) \end{cases} \to d:\begin{cases} x=3+2t \\ y=2+t \end{cases}$

$\xrightarrow{t=-2} M(-1;0)\in d \to d:\begin{cases} x=-1+2t \\ y=t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$. **Chọn C.**

Câu 50. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành $ABCD$ có đỉnh $A(-2;1)$ và phương trình đường thẳng chứa cạnh CD là $\begin{cases} x=1+4t \\ y=3t \end{cases}$. Viết phương trình tham số của đường thẳng chứa cạnh AB.

A. $\begin{cases} x=-2+3t \\ y=-2-2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-2-4t \\ y=1-3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-2-3t \\ y=1-4t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-2-3t \\ y=1+4t \end{cases}$.

Lời giải

$\begin{cases} A(-2;1)\in AB,\ \vec{u}_{CD}=(4;3) \\ AB \parallel CD \to \vec{u}_{AB}=-\vec{u}_{CD}=(-4;-3) \end{cases} \longrightarrow AB:\begin{cases} x=-2-4t \\ y=1-3t \end{cases}(t\in\mathbb{R})$. **Chọn B.**

Câu 51. Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(-3;5)$ và song song với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

A. $\begin{cases} x=-3+t \\ y=5-t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-3+t \\ y=5+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=3+t \\ y=-5+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=5-t \\ y=-3+t \end{cases}$.

Lời giải

Góc phần tư (I) : $x-y=0 \longrightarrow VTCP:\vec{u}(1;1)=\vec{u}_d \longrightarrow d:\begin{cases} x=-3+t \\ y=5+t \end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

Chọn B.

Câu 52. Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(4;-7)$ và song song với trục Ox.

A. $\begin{cases} x=1+4t \\ y=-7t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=4 \\ y=-7+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-7+t \\ y=4 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=t \\ y=-7 \end{cases}$.

Lời giải

$\vec{u}_{Ox}=(1;0) \longrightarrow \vec{u}_d=(1;0) \longrightarrow d:\begin{cases} x=4+t \\ y=-7 \end{cases} \xrightarrow{t=-4} A(0;-7)\in d \to d:\begin{cases} x=t \\ y=-7 \end{cases}$.

Chọn D.

Câu 53. Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;2)$ và song song với đường thẳng $\Delta: 2x+3y-12=0$ có phương trình tổng quát là:

A. $2x+3y-8=0$. **B.** $2x+3y+8=0$. **C.** $4x+6y+1=0$. **D.** $4x-3y-8=0$.

Lời giải

$\begin{cases} M(1;2)\in d \\ d \parallel \Delta: 2x+3y-12=0 \end{cases} \to \begin{cases} M(1;2)\in d \\ d: 2x+3y+c=0\ (c\neq -12) \end{cases}$

$\to 2.1+3.2+c=0 \Leftrightarrow c=-8$. Vậy $d: 2x+3y-8=0$. **Chọn A.**

Câu 54. Phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua O và song song với đường thẳng $\Delta: 6x-4x+1=0$ là:

A. $3x-2y=0$. **B.** $4x+6y=0$. **C.** $3x+12y-1=0$. **D.** $6x-4y-1=0$.

Lời giải

$\begin{cases} O(0;0)\in d \\ d \parallel \Delta: 6x-4x+1=0 \end{cases} \to \begin{cases} O(0;0)\in d \\ d: 6x-4x+c=0\ (c\neq 1) \end{cases} \longrightarrow 6.0-4.0+c=0 \Leftrightarrow c=0.$

Vậy $d: 6x-4y=0 \Leftrightarrow d: 3x-2y=0$. **Chọn A.**

Câu 55. Đường thẳng d đi qua điểm $M(-1;2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: 2x+y-3=0$ có phương trình tổng quát là:

A. $2x+y=0$. **B.** $x-2y-3=0$. **C.** $x+y-1=0$. **D.** $x-2y+5=0$.

Lời giải

$$\begin{cases} M(-1;2)\in d \\ d\perp\Delta: 2x+y-3=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} M(-1;2)\in d \\ d: x-2y+c=0 \end{cases} \longrightarrow -1-2.2+c=0 \Leftrightarrow c=5.$$

Vậy $d: x-2y+5=0$. **Chọn D.**

Câu 56. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(4;-3)$ và song song với đường thẳng $d: \begin{cases} x=3-2t \\ y=1+3t \end{cases}$.

A. $3x+2y+6=0$. **B.** $-2x+3y+17=0$.

C. $3x+2y-6=0$. **D.** $3x-2y+6=0$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} A(4;-3)\in d \\ \vec{u}_d=(-2;3) \\ \Delta \parallel d \end{cases} \to \begin{cases} A(4;-3)\in d \\ \vec{u}_\Delta=(-2;3)\to \vec{n}_\Delta=(3;2) \end{cases}$

$\to \Delta: 3(x-4)+2(y+3)=0 \Leftrightarrow \Delta: 3x+2y-6=0.$

Câu 57. Cho tam giác ABC có $A(2;0)$, $B(0;3)$, $C(-3;1)$. Đường thẳng d đi qua B và song song với AC có phương trình tổng quát là:

A. $5x-y+3=0$. **B.** $5x+y-3=0$. **C.** $x+5y-15=0$. **D.** $x-15y+15=0$.

Lời giải

$$\begin{cases} B(0;3)\in d \\ \vec{u}_{AC}=\overrightarrow{AC}=(-5;1) \\ d\parallel AC \end{cases} \to \begin{cases} B(0;3)\in d \\ \vec{n}_d=(1;5) \end{cases}$$

$\to d: 1(x-0)+5(y-3)=0 \Leftrightarrow d: x+5y-15=0.$

Câu 58. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua điểm $M(-1;0)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=t \\ y=-2t \end{cases}$.

A. $2x+y+2=0$. **B.** $2x-y+2=0$. **C.** $x-2y+1=0$. **D.** $x+2y+1=0$.

Lời giải

$$\begin{cases} M(-1;0)\in d \\ \vec{u}_\Delta=(1;-2) \\ d\perp\Delta \end{cases} \to \begin{cases} M(-1;0)\in d \\ \vec{n}_d=(1;-2) \end{cases} \to d: 1(x+1)-2(y-0)=0 \Leftrightarrow d: x-2y+1=0.$$

Chọn C.

Câu 59. Đường thẳng d đi qua điểm $M(-2;1)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1-3t \\ y=-2+5t \end{cases}$ có phương trình tham số là:

A. $\begin{cases} x=-2-3t \\ y=1+5t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-2+5t \\ y=1+3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1-3t \\ y=2+5t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+5t \\ y=2+3t \end{cases}$.

Lời giải

$$\begin{cases} M(-2;1) \in d \\ \vec{u}_\Delta = (-3;5) \\ d \perp \Delta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M(-2;1) \in d \\ \vec{n}_d = (-3;5) \rightarrow \vec{u}_d = (5;3) \end{cases} \rightarrow d: \begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 1 + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$ **Chọn B.**

Câu 60. Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $A(-1;2)$ và song song với đường thẳng $\Delta: 3x - 13y + 1 = 0$.

A. $\begin{cases} x = -1 + 13t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 1 + 13t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = -1 - 13t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 13t \end{cases}$.

Lời giải

$$\begin{cases} A(-1;2) \in d \\ \vec{n}_\Delta = (3;-13) \\ d \parallel \Delta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A(-1;2) \in d \\ \vec{n}_d = (3;-13) \rightarrow \vec{u}_d = (13;3) \end{cases} \rightarrow d: \begin{cases} x = -1 + 13t \\ y = 2 + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$ **Chọn A.**

Câu 61. Viết phương trình tham số của đường thẳng d qua điểm $A(-1;2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: 2x - y + 4 = 0$.

A. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = t \\ y = 4 + 2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases}$.

Lời giải

$$\begin{cases} A(-1;2) \in d \\ \vec{n}_\Delta = (2;-1) \\ d \perp \Delta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A(-1;2) \in d \\ \vec{u}_d = (2;-1) \end{cases} \rightarrow d: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$ **Chọn A.**

Câu 62. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua điểm $M(-2;-5)$ và song song với đường phân giác góc phần tư thứ nhất.

A. $x + y - 3 = 0$. **B.** $x - y - 3 = 0$. **C.** $x + y + 3 = 0$. **D.** $2x - y - 1 = 0$.

Lời giải

$$\begin{cases} M(-2;-5) \in d \\ (\mathrm{I}): x - y = 0\ (\Delta) \\ d \parallel \Delta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M(-2;-5) = 0 \\ d: x - y + c = 0\ (c \neq 0) \end{cases} \rightarrow -2 - (-5) + c = 0 \Leftrightarrow c = -3.$$

Vậy $d: x - y - 3 = 0.$ **Chọn B.**

Câu 63. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua điểm $M(3;-1)$ và vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ hai.

A. $x + y - 4 = 0$. **B.** $x - y - 4 = 0$. **C.** $x + y + 4 = 0$. **D.** $x - y + 4 = 0$.

Lời giải

$$\begin{cases} M(3;-1) \in d \\ (\mathrm{II}): x + y = 0\ (\Delta) \\ d \perp \Delta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M(3;-1) \\ d: x - y + c = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow 3 - (-1) + c = 0 \Leftrightarrow c = -4 \rightarrow d: x - y - 4 = 0.$$

Câu 64. Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(-4;0)$ và vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ hai.

A. $\begin{cases} x = t \\ y = -4+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = -4+t \\ y = -t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = t \\ y = 4+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = t \\ y = 4-t \end{cases}$.

Lời giải

$$\begin{cases} M(-4;0) \in d \\ (\text{II}): x+y=0\ (\Delta) \to \vec{n}_\Delta = (1;1) \\ d \perp \Delta \to \vec{u}_d = (1;1) \end{cases} \to \begin{cases} x = -4+t \\ y = t \end{cases} \xrightarrow{t=4} A(0;4) \in d$$

$$\to d: \begin{cases} x = t \\ y = 4+t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

Câu 65. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua điểm $M(-1;2)$ và song song với trục Ox.

A. $y+2=0$. **B.** $x+1=0$. **C.** $x-1=0$. **D.** $y-2=0$.

Lời giải

$$\begin{cases} M(-1;2) \in d \\ d \parallel Ox: y=0 \end{cases} \longrightarrow d: y=2.$$ **Chọn D.**

Câu 66. Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(6;-10)$ và vuông góc với trục Oy.

A. $\begin{cases} x = 10+t \\ y = 6 \end{cases}$. **B.** $d: \begin{cases} x = 2+t \\ y = -10 \end{cases}$. **C.** $d: \begin{cases} x = 6 \\ y = -10-t \end{cases}$. **D.** $d: \begin{cases} x = 6 \\ y = -10+t \end{cases}$.

Lời giải

$$\begin{cases} M(6;-10) \in d \\ d \perp Oy: x=0 \to \vec{u}_d = (1;0) \end{cases} \longrightarrow d: \begin{cases} x = 6+t \\ y = -10 \end{cases} \xrightarrow{t=-4} A(2;-10) \in d$$

$$\to d: \begin{cases} x = 2+t \\ y = -10 \end{cases}.$$

Câu 67. Đường trung trực của đoạn AB với $A(1;-4)$ và $B(5;2)$ có phương trình là:

A. $2x+3y-3=0$. **B.** $3x+2y+1=0$. **C.** $3x-y+4=0$. **D.** $x+y-1=0$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của AB và d là trung trực đoạn AB. Ta có

$$\begin{cases} A(1;-4), B(5;2) \to I(3;-1) \in d \\ d \perp AB \to \vec{n}_d = \overrightarrow{AB} = (4;6) = 2(2;3) \end{cases} \longrightarrow d: 2x+3y-3=0.$$ **Chọn A.**

Câu 68. Đường trung trực của đoạn AB với $A(4;-1)$ và $B(1;-4)$ có phương trình là:

A. $x+y=1$. **B.** $x+y=0$. **C.** $y-x=0$. **D.** $x-y=1$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của AB và d là trung trực đoạn AB. Ta có

$$\begin{cases} A(4;-1), B(1;-4) \to I\left(\frac{5}{2};-\frac{5}{2}\right) \in d \\ d \perp AB \to \vec{n}_d = \overrightarrow{AB} = (-3;-3) = -3(1;1) \end{cases} \longrightarrow d: x+y=0.$$ **Chọn B.**

Câu 69. Đường trung trực của đoạn AB với $A(1;-4)$ và $B(1;2)$ có phương trình là:

A. $y+1=0$. **B.** $x+1=0$. **C.** $y-1=0$. **D.** $x-4y=0$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của AB và d là trung trực đoạn AB. Ta có

$$\begin{cases} A(1;-4), B(1;2) \rightarrow I(1;-1) \in d \\ d \perp AB \rightarrow \vec{n}_d = \overrightarrow{AB} = (0;6) = 6(0;1) \end{cases} \longrightarrow d: y+1=0.$$ **Chọn A.**

Câu 70. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $I(1;-1)$ và hai đường thẳng $d_1: x+y-3=0, d_2: x-2y-6=0$. Hai điểm A, B lần lượt thuộc hai đường thẳng d_1, d_2 sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Đường thẳng AB có một véctơ chỉ phương là

A. $\overrightarrow{u_1} = (1;2)$. **B.** $\overrightarrow{u_2} = (2;1)$. **C.** $\overrightarrow{u_3} = (1;-2)$. **D.** $\overrightarrow{u_4} = (2;-1)$.

Lời giải

Chọn A

Vì $A \in d_1$, giả sử $A(a;3-a)$; Vì $B \in d_2$, giả sử $B(2b+6;b)$

I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\begin{cases} \dfrac{a+2b+6}{2} = 1 \\ \dfrac{3-a+b}{2} = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=-4 \\ a-b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases} \Rightarrow A(2;1); B(0;-3) \Rightarrow \overrightarrow{BA} = (2;4) \Rightarrow \overrightarrow{BA} = 2.\overrightarrow{u_1}$.

Vậy đường thẳng AB có một véctơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1} = (1;2)$.

• |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Trong mặt phẳng toạ độ, cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 lần lượt có vectở chỉ phương là $\vec{u}_1,\vec{u}_2$. Khi đó

a) Δ_1 cắt Δ_2 khi và chỉ khi $\vec{u}_1,\vec{u}_2$ không cùng phương.

b) Δ_1 song song với Δ_2 khi và chỉ khi $\vec{u}_1,\vec{u}_2$ cùng phương và có một điểm thuộc một đường thẳng mà không thuộc đường thẳng còn lại.

c) Δ_1 trùng với Δ_2 khi và chỉ khi $\vec{u}_1,\vec{u}_2$ cùng phương và có một điểm thuộc cả hai đường thẳng đó.

Chú ý

- Δ_1 vuông góc với Δ_2 khi và chỉ khi $\vec{u}_1,\vec{u}_2$ vuông góc với nhau.
- Khi xét vị trí tương đối của hai đường thẳng, có thể dựa vào cặp vectơ pháp tuyến của hai đường thẳng đó.

Ví dụ 1. Xét vị trí tương đối của mỗi cặp đường thẳng sau

a) $\Delta_1: 2x-y+1=0$ và $\Delta_2: -x+2y+2=0$.

b) $\Delta_3: x-y-1=0$ và $\Delta_4: \begin{cases} x=1+2t \\ y=3+2t \end{cases}$

Giải

a) Đường thẳng Δ_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1=(1;2)$, đường thẳng Δ_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2=(-2;-1)$. Do $\frac{1}{-2}\neq\frac{2}{-1}$ nên $\vec{u}_1,\vec{u}_2$ không cùng phương, suy ra Δ_1 cắt Δ_2.

b) Đường thẳng Δ_3,Δ_4 lần lượt có vectơ chỉ phương $\vec{u}_3=(1;1),\vec{u}_4=(2;2)$. Suy ra $\vec{u}_4=2\vec{u}_3$. Chọn $t=0$, ta có điểm $M(1;3)\in\Delta_4$. Do $1-3-1\neq 0$ nên $M(1;3)\notin\Delta_3$. Vậy Δ_3 song song với Δ_4.

Ta có thể xét vị trí tương đối của hai đường thẳng dựa vào số giao điểm của chúng.

Nhận xét: Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có phương trình lần lượt là $a_1x+b_1y+c_1=0$; $a_2x+b_2y+c_2=0$.

Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Khi đó

a) Δ_1 cắt Δ_2 khi và chỉ khi hệ (I) có nghiệm duy nhất.

b) Δ_1 song song với Δ_2 khi và chỉ khi hệ (I) vô nghiệm.

c) Δ_1 trùng với Δ_2 khi và chỉ khi hệ (I) có vô số nghiệm.

Ví dụ 2. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

$\Delta_1: x-2y+1=0$; $\Delta_2: 2x-4y+2=0$.

Giải

Tọa độ giao điểm của đường thẳng Δ_1 và đường thẳng Δ_2 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-2y+1=0 \\ 2x-4y+2=0 \end{cases}$$

Hệ trên có vô số nghiệm.

Như vậy, Δ_1 và Δ_2 có vô số điểm chung, tức là Δ_1 trùng với Δ_2.

II. Góc giữa hai đường thẳng

Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tạo thành bốn góc.

- Nếu hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 không vuông góc với nhau thì góc nhọn trong bốn góc tạo thành được gọi là góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.
- Nếu hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 vuông góc với nhau thì ta nói góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 bằng 90°.

Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 được kí hiệu là $\left(\widehat{\Delta_1,\Delta_2}\right)$ hoặc $\left(\Delta_1,\Delta_2\right)$.

Quy ước: Khi Δ_1 song song hoặc trùng với Δ_2, ta nói góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 bằng 0°.

Nhận xét: Góc giữa hai đường thẳng luôn bé hơn hoặc bằng 90°, tức là $\left(\Delta_1,\Delta_2\right)\le 90^\circ$.

Trong mặt phẳng toạ độ, cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1=\left(a_1;b_1\right),\vec{u}_2=\left(a_2;b_2\right)$. Ta có: $\cos\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=\dfrac{\left|a_1a_2+b_1b_2\right|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$.

Nhận xét

- $\Delta_1\perp\Delta_2 \Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2=0$.
- Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1,\vec{n}_2$. Ta cũng có:

$\cos\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=\left|\cos\left(\vec{n}_1,\vec{n}_2\right)\right|=\dfrac{\left|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right|\cdot\left|\vec{n}_2\right|}$.

Ví dụ 3. Tính số đo góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 trong mỗi trường hợp sau:

a) $\Delta_1:\begin{cases}x=-1+\sqrt{3}t_1\\ y=1+t_1\end{cases}$ và $\Delta_2:\begin{cases}x=-1+\sqrt{3}t_2\\ y=4-t_2\end{cases}$

b) $\Delta_1:3x+y-10=0$ và $\Delta_2:-2x+y-7=0$.

Giải

a) Δ_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1=(\sqrt{3};1)$.

Δ_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2=(\sqrt{3};-1)$.

Do đó, ta có: $\cos\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=\dfrac{|\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+1\cdot(-1)|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{2}$. Vậy $\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=60^\circ$.

b) Δ_1 có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1=(3;1),\Delta_2$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2=(-2;1)$. Do đó, ta có:

$\cos\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=\left|\cos\left(\vec{n}_1,\vec{n}_2\right)\right|=\dfrac{\left|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right|\cdot\left|\vec{n}_2\right|}=\dfrac{|3\cdot(-2)+1\cdot1|}{\sqrt{3^2+1^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Vậy $\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=45^\circ$.

III. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $ax+by+c=0$ $\left(a^2+b^2>0\right)$ và điểm $M\left(x_0;y_0\right)$. Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ, kí hiệu là $d(M,\Delta)$, được tính bởi công thức sau:

$$d(M,\Delta)=\frac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Chú ý: Nếu $M\in\Delta$ thì $d(M,\Delta)=0$.

Ví dụ 4. Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau:

a) $M(-2;1)$ và $\Delta: 2x-3y+5=0$.

b) $M(1;-3)$ và $\Delta: \begin{cases} x=-2+3t \\ y=2-4t \end{cases}$

Giải

a) Ta có:

$$d(M,\Delta)=\frac{|2\cdot(-2)-3\cdot 1+5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$$

b) Đường thẳng Δ đi qua điểm $N(-2;2)$, có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(4;3)$. Phương trình tổng quát của đường thẳng Δ là

$4(x+2)+3(y-2)=0$ hay $4x+3y+2=0$.

$$\Rightarrow d(M,\Delta)=\frac{|4\cdot 1+3\cdot(-3)+2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{3}{5}.$$

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng $\Delta_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ *và* $\Delta_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ *ta xét số nghiệm của hệ phương trình* $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$.

□*Hệ có một nghiệm:* Δ_1 *cắt* Δ_2.

□*Hệ vô nghiệm:* $\Delta_1 // \Delta_2$.

□*Hệ có vô số nghiệm:* $\Delta_1 \equiv \Delta_2$.

Đặc biệt: Nếu $a_2b_2c_2 \neq 0$ *thì:*

Δ_1 *cắt* $\Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$, $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$, $\Delta_1 = \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$.

Để tìm giao điểm của 2 đường thẳng ta giải hệ phương trình trên.

Tìm hình chiếu của điểm A lên đường thẳng d.

Cách 1: lập phương trình đường thẳng d' qua A vuông góc với d. Hình chiếu H là giao điểm của d và d'.

Cách 2: điểm H thuộc d có tọa độ theo tham số t (hoặc x, hoặc y), cho điều kiện $AH \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{u}=0$ *để tìm t.*

Tìm điểm đối xứng A' của A qua đường thẳng d: tìm hình chiếu H, dùng công thức tọa độ trung điểm để suy ra A'.

Tìm đường thẳng d' đối xứng của đường thẳng d qua điểm I cho trước.

Cách 1: d' song song hoặc trùng với d nên có cùng VTPT. Lấy điểm A thuộc d rồi tìm điểm B đối xứng qua I thì B thuộc d'.

Cách 2: Lấy M(x; y) bất kỳ thuộc d. Gọi M'(x'; y') là điểm đối xứng của M qua I, ta có:

$x+x'=2x_0$, $y+y'=2y_0 \Rightarrow x=2x_0-x'$, $y=2y_0-y'$.

Thế vào phương trình d thành phương trình d'.

Câu 1. Xét vị trí tương đối và tìm giao điểm nếu có của hai đường thẳng:

a) $2x-5y+3=0$ và $5x+2y-3=0$.

b) $x-3y+4=0$ và $0,5x-1,5y+4=0$.

c) $10x+2y-3=0$ và $5x+y-1,5=0$.

Câu 2. Xét vị trí tương đối và tìm giao điểm nếu có của cặp đường thẳng:

a) $d: \begin{cases} x=-1-5t \\ y=2+4t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x=-6+5t' \\ y=2-4t' \end{cases}$.

b) $d:\begin{cases}x=1-4t\\y=2+2t\end{cases}$ và $d': 2x+4y-10=0$.

c) $d:\begin{cases}x=-2+t\\y=2+2t\end{cases}$ và $d': \frac{x}{1}=\frac{y-3}{-2}$

Câu 3. Biện luận theo tham số m vị trí tương đối của hai đường thẳng:
$mx+y+2=0$ và $x+my+m-1=0$.

Câu 4. Với giá trị nào của tham số m thì hai đường thẳng sau đây vuông góc $\Delta_1: mx+y+8=0$ và $\Delta_2: x-y+m=0$.

Câu 5. Tìm m để ba đường thẳng sau đây đồng quy:
$d_1: 2x+y-4=0$, $d_2: 5x-2y+3=0$ và $d_3: mx+3y-2=0$.

Câu 6. Cho hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=x_1+at\\y=y_1+bt\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=x_2+ct'\\y=y_2+dt'\end{cases}$ (x_1, x_2, y_1, y_2 là các hằng số). Tìm điều kiện của a, b, c, d để hai đường thẳng d_1 và d_2:

a)Cắt nhau.

b)Song song với nhau.

c)Vuông góc với nhau.

Câu 7. Cho đường thẳng d đi qua hai điểm phân biệt $M_1(x_1;x_2)$ và $M_2(x_2;y_2)$. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để đường thẳng $Ax+By+C=0$ song song với d là $Ax_1+By_1+C=Ax_2+By_2+C\neq 0$.

Câu 8. Cho hai đường thẳng:
$\Delta_1: (m+1)x-2y-m-1=0$; $\Delta_2: x+(m-1)y-m^2=0$.

a)Tìm tọa độ giao điểm của Δ_1 và Δ_2.

b)Tìm điều kiện của m để giao điểm đó nằm trên trục Oy.

Câu 9. Cho đường thẳng $\Delta: 3x-y+1=0$ và điểm $I(1;2)$. Tìm phương trình đường thẳng Δ’ đối xứng với Δ qua điểm I.

Câu 10. Cho hai đường thẳng $d_1: x+y-1=0$ và $d_2: x-3y+3=0$. Hãy lập phương trình của đường thẳng d_3 đối xứng với d_1 qua d_2.

Câu 11. Cho đường thẳng Δ: $ax+by+c=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ’ đối xứng với đường thẳng Δ:

a)Qua trục hoành.

b)Qua trục tung.

c)Qua gốc tọa độ.

Câu 12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(-1;2)$ và hai đường thẳng d_1: $x+2y+1=0$, d_2: $2x+y+2=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và cắt d_1 tại A, cắt d_2 tại B sao cho $MA=2MB$.

Câu 13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;1)$ và tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4.

Câu 14. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phuong trình đường Δ thẳng song song với đường thẳng d: $2x-y+2015=0$ và cắt hai trục tọa độ tại M và N sao cho $MN=3\sqrt{5}$.

Câu 15. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $M(3;2)$ và cắt tia Ox tại A, cắt tia Oy tại B sao cho $OA+OB=12$.

Dạng 2. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Để tính khoảng cách từ điểm $M(x_0;y_0)$ đến đường thẳng Δ: ax + by + c = 0 ta dùng công thức:

$$d\left(M_0,\Delta = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

Câu 16. Cho đường thẳng Δ: $5x+3y-5=0$.

a)Tính khoảng cách từ điểm $A(-1;3)$ đến đường thẳng Δ.

b)Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng song song Δ và Δ’: $5x+3y+8=0$.

Câu 17. Cho ba điểm $A(2;0),B(3;4)$ và $P(1;1)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua P đồng thời cách đều A và B.

Câu 18. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng Δ cách điểm $A(1;1)$ một hoảng bằng 2 vá cách điểm $B(2;3)$ một khoảng bằng 4.

Câu 19. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-2;4),B(3;5)$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ đi qua điểm $I(0;1)$ sao cho khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ gấp hai lần khoảng cách từ B đến Δ.

Câu 20. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng Δ song song với đường thẳng $d:3x-4y+1=0$ và cách d một khoảng bằng 1.

Câu 21. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d:x-\sqrt{3}y-2=0$ và hai điểm phân biệt $A(1;\sqrt{3})$, B không thuộc d. Viết phương trình đường thẳng AB, biết rằng khoảng cách từ B đến giao điểm của đường thẳng AB với d bằng hai lần khoảng cách từ điểm B đến d.

Dạng 3: Góc giữa hai đường thẳng

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1;\Delta_2$ có phương trình $\Delta_1: a_1x+b_1y+c_1=0, \left(a_1^2+b_1^2\neq 0\right)$, $\Delta_2: a_2x+b_2y+c_2=0, \left(a_2^2+b_2^2\neq 0\right)$ được xác định bởi công thức $\cos\left(\Delta_1;\Delta_2\right)=\dfrac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$.

Để xác định góc giữa hai đường thẳng ta chỉ cần biết véctơ chỉ phương (hoặc véctơ pháp tuyến) của chúng: $\cos\left(\Delta_1;\Delta_2\right)=\left|\cos\left(\vec{u}_1;\vec{u}_2\right)\right|=\left|\cos\left(\vec{n}_1;\vec{n}_2\right)\right|$.

Câu 22. Xác định góc giữa hai đường thẳng sau: $\Delta_1: 3x-2y+1=0$ và $\Delta_2: \begin{cases} x=t \\ y=7-5t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

Câu 23. Tìm m để góc hợp bởi hai đường thẳng $\Delta_1: \sqrt{3}x-y+7=0$ và $\Delta_2: mx+y+1=0$ một góc bằng 30^0.

Câu 24. Cho đường thẳng $d:3x-2y+1=0$ và $M(1;2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và tạo với d một góc 45^0.

Câu 25. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: 2x-y-2=0$ và điểm $I(1;1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ cách điểm I một khoảng bằng $\sqrt{10}$ và tạo với đường thẳng d một góc bằng 45^0.

Câu 26. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(0;1)$ và hai đường thẳng $d_1: x-7y+17=0$, $d_2: x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M và tạo với d_1, d_2 một tam giác cân tại giao điểm của d_1 và d_2.

Dạng 4. Tìm điểm thỏa mãn điều kiện cho trước.

Để xác định tọa độ điểm thuộc đường thẳng ta dựa vào nhận xét sau :

Điểm A thuộc đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ (hoặc $\Delta: \dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b}$) có tọa độ dạng $A(x_0+at; y_0+bt)$.

Câu 27. Cho đường thẳng $\Delta: 4x-3y+5=0$.

a. Tìm tọa độ điểm A thuộc đường thẳng Δ và cách gốc tọa độ một khoảng bằng 4.

b. Tìm điểm B thuộc đường thẳng Δ và cách đều hai điểm $E(5;0), F(3;-2)$.

Câu 28. Cho đường thẳng $d: x-2y+4=0$ và điểm $A(4;1)$.

a. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A lên d.

b. Tìm tọa độ điểm A' đối xứng của A qua d.

Câu 29. Với điều kiện nào thì các điểm $M(x_1, y_1)$ và $N(x_2; y_2)$ đối xứng nhau qua đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$?

Câu 30. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(0;2)$ và đường thẳng $d: x-2y+2=0$. Tìm trên đường thẳng d hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông ở B và thỏa mãn $AB = 2BC$.

Câu 31. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;1), B(4;-3)$ và dr $d: x-2y-1=0$. Tìm tọa độ điểm C thuộc d sao cho khoảng cách từ C đến đường thẳng AB bằng 6.

Câu 32. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x-3y-6=0$ và điểm $N(3;4)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc d sao cho tam giác OMN có diện tích vằng $\dfrac{15}{2}$ (với O là gốc tọa độ)

Dạng 5. Các yếu tố về tam giác.

Câu 33. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có tọa độ đỉnh $A(1;0)$ và hai đường thẳng chứa các đường cao kẻ từ B, C có phương trình lần lượt là : $d_1: x-2y+1=0, d_2: 3x+y-1=0$. Tìm tọa độ đỉnh B và C.

Câu 34. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình cạnh $BC: x+y-9=0$, đường cao qua đỉnh B và C lần lượt có phương trình $d_1: x+2y-13=0; d_2: 7x+5y-49=0$. Tìm tọa độ đỉnh A.

Câu 35. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;3)$ và hai đường trung tuyến là $BB': x-2y+1=0, CC': y-1=0$. Xác định tọa độ đỉnh B và C.

Câu 36. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ với Oxy, cho tam giác ABC biết phương trình cạnh $BC: x-2y=5=0$, phương trình đường trung tuyến $BB': y-2=0$ và phương trình đường trung tuyến $CC': 2x-y-2=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác.

Câu 37. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;5), B(-4;-5)$ và $C(4;-1)$. Viết phương trình đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc A.

Câu 38. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;-4)$ và hai đường phân giác trong của góc B và C có phương trình lần lượt là $d_1: x+y-2=0, d_2: x-3y-6=0$. Tìm tọa độ điểm B và C.

Câu 39. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC biết trung điểm các cạnh AB, BC và CA lần lượt là : $M(-1;1), N(0;-3)$ và $P(3;-1)$. Viết phương trình đường trung trục của đoạn BC.

Câu 40. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-2;4), B(4;1)$ và $C(-2;-1)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác.

Câu 41. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có các đường trung bình nằm trên các đường thẳng có phương trình $d_1: 2x-y+1=0, d_2: x+4y-13=0, d_3: x-3y-1=0$. Viết phương trình cạnh AB.

Câu 42. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có hai đường trung bình kẻ từ trung điểm M của AB nằm trên các đường thẳng có phương trình $d_1: x-4y+7=0, d_2: 3x-2y-9=0$ và tọa độ điểm $B(7;1)$. Tìm tọa độ điểm C.

Câu 43. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $C(4;-1)$, đường cao và trung tuyến kẻ từ đỉnh A có phương trình lần lượt là $d_1: 2x-3y+12=0, d_2: 2x+3y=0$. Tìm tọa độ điểm B.

Câu 44. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;1)$, đường cao qua đỉnh B và đường trung tuyến qua đỉnh C lần lượt có phương trình $d_1: x-3y-7=0, d_2: x+y+1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B và C.

Dạng 6. Các yếu tố về tứ giác.

Câu 45. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(10;5)$, $B(15;-5), D(-20;0)$ là các đỉnh của hình thang cân $ABCD$ trong đó AB song song với CD. Tìm tọa độ điểm C.

Câu 46. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang cân $ABCD$ với AB song song CD và $AB < CD$. Biết các đỉnh $A(0;2), D(-2;2)$, giao điểm I của hai đường chéo AC và BD nằm trên các đường thẳng $d: x+y-4=0$ sao cho $\widehat{AID}=45^0$. Tìm tọa độ điểm B và C.

Câu 47. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành $ABCD$, biết hai đường chéo AC và CD lần lượt nằm trên hai đường thẳng $d_1: x-3y+9=0,\ d_2: x+3y-3=0$ và phương trình đường thẳng $AB: x-y+9=0$. Tìm tọa độ điểm C.

Câu 48. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: x-y-4=0,\ d_2: 2x+y-2=0$, và hai điểm $A(7;5)$, $B(2;3)$. Tìm điểm trên đường thẳng d_1 và điểm trên đường thẳng d_2 sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Câu 49. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi $ABCD$ có $A(0;-1), B(2;1)$ và tâm I thuộc đường thẳng $d: x+y-1=0$. Tìm tọa độ điểm C.

Câu 50. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi $ABCD$ có phương trình cạnh

$AB: x-2y+4=0$, phương trình cạnh $AD: 2x-y+2=0$. Điểm $M(2;2)$ thuộc đường thẳng BD. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi.

Câu 51. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm $I\left(\frac{1}{2};0\right)$.

Phương trình đường thẳng $AB: x-2y+2=0$ và $AB=2AD$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật, biết đỉnh A có hoành độ âm.

Câu 52. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm $I(6;2)$ là giao điểm của hai đường thẳng AC và BD. Điểm $M(1;5)$ thuộc đường thẳng AB và trung điểm E của cạnh CD thuộc đường thẳng $d: x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng AB.

Câu 53. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có $A(1;1)$ và $M(4;2)$ là trung điểm cạnh BC. Tìm tọa độ điểm B.

Câu 54. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ trong đó thuộc đường thẳng $d_1: x+y-1=0$ và C, D nằm trên đường thẳng $d_2: 2x-y+3=0$. Tìm tọa độ điểm C, biết hình vuông có diện tích bằng 5 và có hoành độ dương.

Dạng 7: Câu toán cực trị

Câu 55. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x+2y-4=0$ và điểm $A(1;4)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc d sao cho MA nhỏ nhất.

Câu 56. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;4)$ và $B(3;5)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A và cách B một khoảng lớn nhất.

Câu 57. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x+2y-4=0$ và $A(1;4)$, $B(8;3)$. Tìm điểm M thuộc d sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất.

Câu 58. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x+2y-4=0$ và hai điểm $A(1;4)$, $B(8;3)$. Tìm điểm M thuộc d sao cho tam giác ABM có chu vi nhỏ nhất.

Câu 59. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x+2y-4=0$ và hai điểm $A(1;4)$, $B(3;2)$. Tìm điểm M thuộc d sao cho $|MA-MB|$ lớn nhất.

Câu 60. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x+2y-4=0$ và hai điểm $A(1;4)$, $B(9;0)$. Tìm điểm M thuộc d sao cho $\left|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất.

Câu 61. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x+2y-4=0$ và hai điểm $A(1;4)$, $B\left(8;\frac{1}{2}\right)$. Tìm điểm M thuộc d sao cho $5MA^2+2MB^2$ nhỏ nhất.

Câu 62. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x-2y-2=0$ và hai điểm $A(3;4)$, $B(-1;2)$. Tìm điểm M thuộc d sao cho MA^2-2MB^2 lớn nhất.

Câu 63. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(2;1)$. Lấy điểm B thuộc Ox có hoành độ không âm và điểm C thuộc Oy có tung độ không âm sao cho tam giác ABC vuông tại A. Tìm tọa

độ điểm B và C sao cho diện tích tam giác ABC.

a)Lớn nhất

b) Nhỏ nhất.

Câu 64. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng đi qua $M(3;2)$ cắt tia Ox tại A và tia Oy tại B sao cho diện tích tam giác OAB đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 65. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng d đi qua $M(4;1)$ và cắt chiều dương các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho $OA+OB$ nhỏ nhất.

Câu 66. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng d đi qua $M(3;1)$ và cắt chiều dương các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho $12OA+9OB$ nhỏ nhất.

Câu 67. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng d đi qua $M(-4;3)$ và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B khác O sao cho $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất.

Câu 68. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng d đi qua $M(2;-1)$ và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B khác O sao cho $\frac{9}{OA^2}+\frac{4}{OB^2}$ nhỏ nhất.

Câu 69. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(0;2)$ và hai đường d_1: $3x+y+2=0$, d_2: $x-3y+4=0$. Gọi A là giao điểm của d_1 và d_2. Viết phương trình đường thẳng d đi qua M và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại B, C (B và C khác A) sao cho $\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 70. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(1;1)$, $B(3;2)$ và $C(7;10)$. Viết phương trình đường thẳng d qua A sao cho tổng khoảng cách từ B và C đến d là lớn nhất.

Câu 71. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có phương trình cạnh AB: $x+2y-2=0$, phương trình cạnh AC: $2x+y+1=0$, điểm $M(1;2)$ thuộc đoạn BC. Tìm tọa độ điểm D sao cho $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}$ có giá trị nhỏ nhất.

Câu 72. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(0;1)$, $B(2;-1)$ và hai đường thẳng có phương trình d_1: $(m-1)x+(m-2)y+2-m=0$, d_2: $(2-m)x+(m-1)y+3m-5=0$. Chứng minh d_1 và d_2 luôn cắt nhau tại P. Tìm m sao cho $PA+PB$ lớn nhất.

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Câu 1. Có bao nhiêu cặp đường thẳng song song trong các đường thẳng sau?

$$(d_1): y=-\frac{1}{\sqrt{2}}x-2;\ (d_2): y=-\frac{1}{2}x+3;\ (d_3): y=\frac{1}{2}x+3;\ (d_4): y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x-2$$

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 2. Phương trình nào sau đây là phương trình đường thẳng **không** song song với đường thẳng $d: y=3x-2$

A. $-3x+y=0$. **B.** $3x-y-6=0$.

C. $3x-y+6=0$. **D.** $3x+y-6=0$.

Câu 3. Trong mặt phẳng Oxy, đường thẳng $d: x-2y-1=0$ song song với đường thẳng có phương trình nào sau đây?

A. $x+2y+1=0$. **B.** $2x-y=0$. **C.** $-x+2y+1=0$. **D.** $-2x+4y-1=0$.

Câu 4. Cho các đường thẳng sau.

$d_1: y=\frac{3}{\sqrt{3}}x-2$ $d_2: y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+1$ $d_3: y=-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)x+2$ $d_4: y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-1$

Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

A. d_2, d_3, d_4 song song với nhau. **B.** d_2 và d_4 song song với nhau.

C. d_1 và d_4 vuông góc với nhau. **D.** d_2 và d_3 song song với nhau.

Câu 5. Tìm các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=(m^2-3)x+3m+1$ song song với đường thẳng $y=x-5$.

A. $m=\pm 2$. **B.** $m=\pm\sqrt{2}$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=2$.

Câu 6. Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $x-3y-6=0$ và $3x+4y-1=0$ là

A. $\left(\frac{27}{13};-\frac{17}{13}\right)$. **B.** $(-27;17)$. **C.** $\left(-\frac{27}{13};\frac{17}{13}\right)$. **D.** $(27;-17)$.

Câu 7. Cho đường thẳng $d_1: 2x+3y+15=0$ và $d_2: x-2y-3=0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. d_1 và d_2 cắt nhau và không vuông góc với nhau.

B. d_1 và d_2 song song với nhau.

C. d_1 và d_2 trùng nhau.

D. d_1 và d_2 vuông góc với nhau.

Câu 8. Hai đường thẳng $d_1: mx+y=m-5, d_2: x+my=9$ cắt nhau khi và chỉ khi

A. $m\neq -1$. **B.** $m\neq 1$. **C.** $m\neq \pm 1$. **D.** $m\neq 2$.

Câu 9. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng

$d_1: 3x+4y+10=0$ và $d_2: (2m-1)x+m^2y+10=0$ trùng nhau?

A. $m\pm 2$. **B.** $m=\pm 1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-2$.

Câu 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng có phương trình $d_1: mx+(m-1)y+2m=0$ và $d_2: 2x+y-1=0$. Nếu d_1 song song d_2 thì:

A. $m=2$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=1$.

Câu 11. Tìm m để hai đường thẳng $d_1: 2x-3y+4=0$ và $d_2: \begin{cases} x=2-3t \\ y=1-4mt \end{cases}$ cắt nhau.

A. $m\neq -\frac{1}{2}$. **B.** $m\neq 2$. **C.** $m\neq \frac{1}{2}$. **D.** $m=\frac{1}{2}$.

Câu 12. Với giá trị nào của a thì hai đường thẳng

$d_1: 2x-4y+1=0$ và $d_2: \begin{cases} x=-1+at \\ y=3-(a+1)t \end{cases}$ vuông góc với nhau?

A. $a=-2$. **B.** $a=2$. **C.** $a=-1$. **D.** $a=1$.

Câu 13. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng

$d_1:\begin{cases}x=-2+2t\\y=-3t\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=2+mt\\y=-6+(1-2m)t\end{cases}$ trùng nhau?

A. $m=\dfrac{1}{2}$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=2$. **D.** $m\neq\pm2$.

Câu 14. Tìm tất cả các giá trị của m để hai đường thẳng

$d_1:\begin{cases}x=2+2t\\y=1+mt\end{cases}$ và $d_2:4x-3y+m=0$ trùng nhau.

A. $m=-3$. **B.** $m=1$. **C.** $m=\dfrac{4}{3}$. **D.** $m\in\varnothing$.

Câu 15. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng

$d_1:2x+y+4-m=0$ và $d_2:(m+3)x+y+2m-1=0$ song song?

A. $m=1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=3$.

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị của m để hai đường thẳng

$\Delta_1:2x-3my+10=0$ và $\Delta_2:mx+4y+1=0$ cắt nhau.

A. $1<m<10$. **B.** $m=1$. **C.** Không có m. **D.** Với mọi m.

Câu 17. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng

$\Delta_1:mx+y-19=0$ và $\Delta_2:(m-1)x+(m+1)y-20=0$ vuông góc?

A. Với mọi m. **B.** $m=2$. **C.** Không có m. **D.** $m=\pm1$.

Câu 18. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng

$d_1:3mx+2y+6=0$ và $d_2:(m^2+2)x+2my+6=0$ cắt nhau?

A. $m\neq-1$. **B.** $m\neq1$. **C.** $m\in\mathbb{R}$. **D.** $m\neq1$ và $m\neq-1$.

Câu 19. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng

$d_1:2x-3y-10=0$ và $d_2:\begin{cases}x=2-3t\\y=1-4mt\end{cases}$ vuông góc?

A. $m=\dfrac{1}{2}$. **B.** $m=\dfrac{9}{8}$. **C.** $m=-\dfrac{9}{8}$. **D.** $m=-\dfrac{5}{4}$.

Câu 20. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng

$d_1:4x-3y+3m=0$ và $d_2:\begin{cases}x=1+2t\\y=4+mt\end{cases}$ trùng nhau?

A. $m=-\dfrac{8}{3}$. **B.** $m=\dfrac{8}{3}$. **C.** $m=-\dfrac{4}{3}$. **D.** $m=\dfrac{4}{3}$.

Câu 21. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng

$d_1:3mx+2y-6=0$ và $d_2:(m^2+2)x+2my-3=0$ song song?

A. $m=1$; $m=-1$. **B.** $m\in\varnothing$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-1$.

Câu 22. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng

$d_1:\begin{cases}x=8-(m+1)t\\y=10+t\end{cases}$ và $d_2:mx+2y-14=0$ song song?

A. $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-2\end{array}\right.$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-2$. **D.** $m\in\varnothing$.

Câu 23. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng
$d_1:(m-3)x+2y+m^2-1=0$ và $d_2:-x+my+m^2-2m+1=0$ cắt nhau?

A. $m\neq 1$. **B.** $\begin{cases}m\neq 1\\ m\neq 2\end{cases}$. **C.** $m\neq 2$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m\neq 1\\ m\neq 2\end{array}\right.$.

Câu 24. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng
$\Delta_1:\begin{cases}x=m+2t\\ y=1+\left(m^2+1\right)t\end{cases}$ và $\Delta_2:\begin{cases}x=1+mt\\ y=m+t\end{cases}$ trùng nhau?

A. Không có m. **B.** $m=\dfrac{4}{3}$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-3$.

Câu 25. Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $7x-3y+16=0$ và $x+10=0$.

A. $(-10;-18)$. **B.** $(10;18)$. **C.** $(-10;18)$. **D.** $(10;-18)$.

Câu 26. Tìm toạ độ giao điểm của hai đường thẳng
$d_1:\begin{cases}x=-3+4t\\ y=2+5t\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=1+4t'\\ y=7-5t'\end{cases}$.

A. $(1;7)$. **B.** $(-3;2)$. **C.** $(2;-3)$. **D.** $(5;1)$.

Câu 27. Cho hai đường thẳng $d_1:2x+3y-19=0$ và $d_2:\begin{cases}x=22+2t\\ y=55+5t\end{cases}$. Tìm toạ độ giao điểm của hai đường thẳng đã cho.

A. $(2;5)$. **B.** $(10;25)$. **C.** $(-1;7)$. **D.** $(5;2)$.

Câu 28. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-2;0)$, $B(1;4)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=-t\\ y=2-t\end{cases}$. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng AB và d.

A. $(2;0)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(0;-2)$.

Câu 29. Xác định a để hai đường thẳng $d_1:ax+3y-4=0$ và $d_2:\begin{cases}x=-1+t\\ y=3+3t\end{cases}$ cắt nhau tại một điểm nằm trên trục hoành.

A. $a=1$. **B.** $a=-1$. **C.** $a=2$. **D.** $a=-2$.

Câu 30. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hai đường thẳng $d_1:4x+3my-m^2=0$ và $d_2:\begin{cases}x=2+t\\ y=6+2t\end{cases}$ cắt nhau tại một điểm thuộc trục tung.

A. $m=0$ hoặc $m=-6$. **B.** $m=0$ hoặc $m=2$.
C. $m=0$ hoặc $m=-2$. **D.** $m=0$ hoặc $m=6$.

Câu 31. Cho ba đường thẳng $d_1:3x-2y+5=0$, $d_2:2x+4y-7=0$, $d_3:3x+4y-1=0$. Phương trình đường thẳng d đi qua giao điểm của d_1 và d_2, và song song với d_3 là:

A. $24x+32y-53=0$. **B.** $24x+32y+53=0$.
C. $24x-32y+53=0$. **D.** $24x-32y-53=0$.

Câu 32. Lập phương trình của đường thẳng Δ đi qua giao điểm của hai đường thẳng $d_1:x+3y-1=0$, $d_2:x-3y-5=0$ và vuông góc với đường thẳng $d_3:2x-y+7=0$.

A. $3x+6y-5=0$. **B.** $6x+12y-5=0$.
C. $6x+12y+10=0$. **D.** $x+2y+10=0$.

Câu 33. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ba đường thẳng lần lượt có phương trình $d_1: 3x-4y+15=0$, $d_2: 5x+2y-1=0$ và $d_3: mx-(2m-1)y+9m-13=0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để ba đường thẳng đã cho cùng đi qua một điểm.

A. $m=\frac{1}{5}$. **B.** $m=-5$. **C.** $m=-\frac{1}{5}$. **D.** $m=5$.

Câu 34. Nếu ba đường thẳng

$d_1:\ 2x+y-4=0$, $d_2: 5x-2y+3=0$ và $d_3: mx+3y-2=0$

đồng quy thì m nhận giá trị nào sau đây?

A. $\frac{12}{5}$. **B.** $-\frac{12}{5}$. **C.** 12. **D.** -12.

Câu 35. Với giá trị nào của m thì ba đường thẳng $d_1: 3x-4y+15=0$, $d_2: 5x+2y-1=0$ và $d_3: mx-4y+15=0$ đồng quy?

A. $m=-5$. **B.** $m=5$. **C.** $m=3$. **D.** $m=-3$.

Câu 36. Với giá trị nào của m thì ba đường thẳng $d_1: 2x+y-1=0$, $d_2: x+2y+1=0$ và $d_3: mx-y-7=0$ đồng quy?

A. $m=-6$. **B.** $m=6$. **C.** $m=-5$. **D.** $m=5$.

Câu 37. Đường thẳng $d: 51x-30y+11=0$ đi qua điểm nào sau đây?

A. $M\left(-1;-\frac{4}{3}\right)$. **B.** $N\left(-1;\frac{4}{3}\right)$. **C.** $P\left(1;\frac{3}{4}\right)$. **D.** $Q\left(-1;-\frac{3}{4}\right)$.

Dạng 2. Góc của hai đường thẳng

Câu 38. Tính góc giữa hai đường thẳng $\Delta: x-\sqrt{3}y+2=0$ và $\Delta': x+\sqrt{3}y-1=0$.

A. 90°. **B.** 120°. **C.** 60°. **D.** 30°.

Câu 39. Góc giữa hai đường thẳng $a: \sqrt{3}x-y+7=0$ và $b: x-\sqrt{3}y-1=0$ là:

A. 30°. **B.** 90°. **C.** 60°. **D.** 45°.

Câu 40. Cho hai đường thẳng $d_1: 2x+5y-2=0$ và $d_2: 3x-7y+3=0$. Góc tạo bởi đường thẳng d_1 và d_2 bằng

A. 30^0. **B.** 135^0. **C.** 45^0. **D.** 60^0.

Câu 41. Tìm côsin góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1: 2x+y-1=0$ và $\Delta_2: \begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \end{cases}$

A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **B.** $\frac{3}{10}$. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

Câu 42. Tìm góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1: x-2y+15=0$ và $\Delta_2: \begin{cases} x=2-t \\ y=4+2t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

A. 5°. **B.** 60°. **C.** 0°. **D.** 90°.

Câu 43. Tìm cosin góc giữa 2 đường thẳng $d_1: x+2y-7=0, d_2: 2x-4y+9=0$.

A. $\frac{3}{\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Câu 44. Tính góc giữa hai đường thẳng $\Delta: x-\sqrt{3}y+2=0$ và $\Delta': x+\sqrt{3}y-1=0$?

A. 90°. **B.** 120°. **C.** 60°. **D.** 30°.

Câu 45. Tính góc tạo bởi giữa hai đường thẳng

$d_1: 2x-y-10=0$ và $d_2: x-3y+9=0$.

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 135°.

Câu 46. Tính góc tạo bởi giữa hai đường thẳng

$d_1: 7x-3y+6=0$ và $d_2: 2x-5y-4=0$.

A. $\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{3}$. **C.** $\frac{2\pi}{3}$. **D.** $\frac{3\pi}{4}$.

Câu 47. Tính góc tạo bởi giữa hai đường thẳng $d_1: 2x+2\sqrt{3}y+5=0$ và $d_2: y-6=0$.

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Câu 48. Tính góc tạo bởi giữa hai đường thẳng $d_1: x+\sqrt{3}y=0$ và $d_2: x+10=0$.

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Câu 49. Tính góc tạo bởi giữa hai đường thẳng

$d_1: 6x-5y+15=0$ và $d_2: \begin{cases} x=10-6t \\ y=1+5t \end{cases}$.

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Câu 50. Cho đường thẳng $d_1: x+2y-7=0$ và $d_2: 2x-4y+9=0$. Tính cosin của góc tạo bởi giữa hai đường thẳng đã cho.

A. $-\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Câu 51. Cho đường thẳng $d_1: x+2y-2=0$ và $d_2: x-y=0$. Tính cosin của góc tạo bởi giữa hai đường thẳng đã cho.

A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 52. Cho đường thẳng $d_1: 10x+5y-1=0$ và $d_2: \begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \end{cases}$. Tính cosin của góc tạo bởi giữa hai đường thẳng đã cho.

A. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **D.** $\frac{3}{10}$.

Câu 53. Cho đường thẳng $d_1: 3x+4y+1=0$ và $d_2: \begin{cases} x=15+12t \\ y=1+5t \end{cases}$.

Tính cosin của góc tạo bởi giữa hai đường thẳng đã cho.

A. $\frac{56}{65}$. **B.** $-\frac{33}{65}$. **C.** $\frac{6}{65}$. **D.** $\frac{33}{65}$.

Câu 54. Xác định tất cả các giá trị của a để góc tạo bởi đường thẳng $\begin{cases} x = 9 + at \\ y = 7 - 2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ và đường thẳng $3x + 4y - 2 = 0$ bằng $45°$.

A. $a = 1$, $a = -14$. **B.** $a = \frac{2}{7}$, $a = -14$. **C.** $a = -2$, $a = -14$. **D.** $a = \frac{2}{7}$, $a = 14$.

Câu 55. Đường thẳng Δ đi qua giao điểm của hai đường thẳng $d_1 : 2x + y - 3 = 0$ và $d_2 : x - 2y + 1 = 0$ đồng thời tạo với đường thẳng $d_3 : y - 1 = 0$ một góc 45^0 có phương trình:

A. $x + (1 - \sqrt{2})y = 0$ hoặc $\Delta : x - y - 1 = 0$. **B.** $\Delta : x + 2y = 0$ hoặc $\Delta : x - 4y = 0$.
C. $\Delta : x - y = 0$ hoặc $\Delta : x + y - 2 = 0$. **D.** $\Delta : 2x + 1 = 0$ hoặc $y + 5 = 0.$.

Câu 56. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, có bao nhiêu đường thẳng đi qua điểm $A(2;0)$ và tạo với trục hoành một góc $45°$?

A. Có duy nhất. **B.** 2.
C. Vô số. **D.** Không tồn tại.

Câu 57. Đường thẳng Δ tạo với đường thẳng $d : x + 2y - 6 = 0$ một góc 45^0. Tìm hệ số góc k của đường thẳng Δ.

A. $k = \frac{1}{3}$ hoặc $k = -3$. **B.** $k = \frac{1}{3}$ hoặc $k = 3$.

C. $k = -\frac{1}{3}$ hoặc $k = -3$. **D.** $k = -\frac{1}{3}$ hoặc $k = 3$.

Câu 58. Biết rằng có đúng hai giá trị của tham số k để đường thẳng $d : y = kx$ tạo với đường thẳng $\Delta : y = x$ một góc 60^0. Tổng hai giá trị của k bằng:

A. -8. **B.** -4. **C.** -1. **D.** -1.

Câu 59. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(1;-1)$ và hai đường thẳng có phương trình $(d_1) : x - y - 1 = 0, (d_2) : 2x + y - 5 = 0$. Gọi A là giao điểm của hai đường thẳng trên. Biết rằng có hai đường thẳng (d) đi qua M cắt hai đường thẳng trên lần lượt tại hai điểm B, C sao cho ABC là tam giác có $BC = 3AB$ có dạng: $ax + y + b = 0$ và $cx + y + d = 0$, giá trị của $T = a + b + c + d$ là

A. $T = 5$. **B.** $T = 6$. **C.** $T = 2$. **D.** $T = 0$.

Dạng 3. Khoảng cách

Câu 60. Khoảng cách từ điểm $A(1;1)$ đến đường thẳng $5x - 12y - 6 = 0$ là

A. 13. **B.** -13. **C.** -1. **D.** 1.

Câu 61. Khoảng cách từ điểm $M(5;-1)$ đến đường thẳng $3x + 2y + 13 = 0$ là:

A. $2\sqrt{13}$. **B.** $\frac{28}{\sqrt{13}}$. **C.** 26. **D.** $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Câu 62. Khoảng cách từ điểm $M(1;-1)$ đến đường thẳng $\Delta : 3x + y + 4 = 0$ là

A. 1. **B.** $\frac{3\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $2\sqrt{10}$.

Câu 63. Trong mặt phẳng Oxy, khoảng cách từ điểm $M(3;-4)$ đến đường thẳng $\Delta : 3x - 4y - 1 = 0$.

A. $\frac{8}{5}$. **B.** $\frac{24}{5}$. **C.** $\frac{12}{5}$. **D.** $-\frac{24}{5}$.

Câu 64. Khoảng cách từ điểm $A(-3;2)$ đến đường thẳng $\Delta: 3x-y+1=0$ bằng:

A. $\sqrt{10}$. **B.** $\frac{11\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{10\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{11}{\sqrt{10}}$.

Câu 65. Trong mặt phẳng Oxy, khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng $d: 4x-3y+1=0$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{5}$.

Câu 66. Một đường tròn có tâm $I(3;-2)$ tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x-5y+1=0$. Hỏi bán kính đường tròn bằng bao nhiêu?

A. $\frac{14}{\sqrt{26}}$. **B.** $\frac{7}{13}$. **C.** $\sqrt{26}$. **D.** 6.

Câu 67. Trong mặt phẳng Oxy, khoảng cách từđiểm $M(0;4)$ đến đường thẳng $\Delta: x\,cos\alpha + y\,sin\alpha + 4(2-sin\alpha)=0$ bằng

A. $\sqrt{8}$. **B.** $4sin\alpha$. **C.** $\frac{4}{cos\alpha + sin\alpha}$. **D.** 8.

Câu 68. Khoảng cách từ $I(1;-2)$ đến đường thẳng $\Delta: 3x-4y-26=0$ bằng

A. 3. **B.** 12. **C.** 5. **D.** $\frac{5}{3}$.

Câu 69. Khoảng cách từ giao điểm của hai đường thẳng $x-3y+4=0$ và $2x+3y-1=0$ đến đường thẳng $\Delta: 3x+y+4=0$ bằng:

A. $2\sqrt{10}$. **B.** $\frac{3\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{10}}{5}$. **D.** 2.

Câu 70. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(0;3)$ và $C(4;0)$. Chiều cao của tam giác kẻ từ đỉnh A bằng:

A. $\frac{1}{5}$. **B.** 3. **C.** $\frac{1}{25}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Câu 71. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(3;-4)$, $B(1;5)$ và $C(3;1)$. Tính diện tích tam giác ABC.

A. 10. **B.** 5. **C.** $\sqrt{26}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Câu 72. Khoảng cách từ điểm $M(0;3)$ đến đường thẳng

$\Delta: x\cos\alpha + y\sin\alpha + 3(2-\sin\alpha)=0$ bằng:

A. $\sqrt{6}$. **B.** 6. **C.** $3\sin\alpha$. **D.** $\frac{3}{\cos\alpha+\sin\alpha}$.

Câu 73. Khoảng cách từ điểm $M(2;0)$ đến đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1+3t \\ y=2+4t \end{cases}$ bằng:

A. 2. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** $\frac{10}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 74. Khoảng cách nhỏ nhất từ điểm $M(15;1)$ đến một điểm bất kì thuộc đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=2+3t\\y=t\end{cases}$ bằng:

A. $\sqrt{10}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{10}}$. **C.** $\frac{16}{\sqrt{5}}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 75. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để khoảng cách từ điểm $A(-1;2)$ đến đường thẳng $\Delta: mx+y-m+4=0$ bằng $2\sqrt{5}$.

A. $m=2$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m=-2\\m=\frac{1}{2}\end{array}\right.$. **C.** $m=-\frac{1}{2}$. **D.** Không tồn tại m.

Câu 76. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để khoảng cách từ giao điểm của hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=t\\y=2-t\end{cases}$ và $d_2: x-2y+m=0$ đến gốc toạ độ bằng 2.

A. $\left[\begin{array}{l}m=-4\\m=2\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m=-4\\m=-2\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m=4\\m=2\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m=4\\m=-2\end{array}\right.$.

Câu 77. Đường tròn (C) có tâm là gốc tọa độ $O(0;0)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 8x+6y+100=0$. Bán kính R của đường tròn (C) bằng:

A. $R=4$. **B.** $R=6$. **C.** $R=8$. **D.** $R=10$.

Câu 78. Đường tròn (C) có tâm $I(-2;-2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 5x+12y-10=0$. Bán kính R của đường tròn (C) bằng:

A. $R=\frac{44}{13}$. **B.** $R=\frac{24}{13}$. **C.** $R=44$. **D.** $R=\frac{7}{13}$.

Câu 79. Cho đường thẳng $d: 21x-11y-10=0$. Trong các điểm $M(21;-3)$, $N(0;4)$, $P(-19;5)$ và $Q(1;5)$ điểm nào gần đường thẳng d nhất?

A. M. **B.** N. **C.** P. **D.** Q.

Câu 80. Cho đường thẳng $d: 7x+10y-15=0$. Trong các điểm $M(1;-3)$, $N(0;4)$, $P(-19;5)$ và $Q(1;5)$ điểm nào cách xa đường thẳng d nhất?

A. M. **B.** N. **C.** P. **D.** Q.

Câu 81. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song
$\Delta_1: 6x-8y+3=0$ và $\Delta_2: 3x-4y-6=0$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 2. **D.** $\frac{5}{2}$.

Câu 82. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $d: 7x+y-3=0$ và $\Delta:\begin{cases}x=-2+t\\y=2-7t\end{cases}$.

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** 15. **C.** 9. **D.** $\frac{9}{\sqrt{50}}$.

Câu 83. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song
$d_1: 6x-8y-101=0$ và $d_2: 3x-4y=0$ bằng:

A. $10{,}1$. **B.** $1{,}01$. **C.** 101. **D.** $\sqrt{101}$.

Câu 84. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2;3)$ và $B(1;4)$. Đường thẳng nào sau đây cách đều hai điểm A và B?

A. $x-y+2=0$. **B.** $x+2y=0$. **C.** $2x-2y+10=0$. **D.** $x-y+100=0$.

Câu 85. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(0;1)$, $B(12;5)$ và $C(-3;0)$. Đường thẳng nào sau đây cách đều ba điểm A, B và C.

A. $x-3y+4=0$. **B.** $-x+y+10=0$. **C.** $x+y=0$. **D.** $5x-y+1=0$.

Câu 86. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;1)$, $B(-2;4)$ và đường thẳng $\Delta: mx-y+3=0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để Δ cách đều hai điểm A, B.

A. $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=1 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-2 \end{array}\right.$.

Câu 87. Đường thẳng Δ song song với đường thẳng $d: 3x-4y+1=0$ và cách d một khoảng bằng 1 có phương trình:

A. $3x-4y+6=0$ hoặc $3x-4y-4=0$.

B. $3x-4y-6=0$ hoặc $3x-4y+4=0$.

C. $3x-4y+6=0$ hoặc $3x-4y+4=0$.

D. $3x-4y-6=0$ hoặc $3x-4y-4=0$.

Câu 88. Tập hợp các điểm cách đường thẳng $\Delta: 3x-4y+2=0$ một khoảng bằng 2 là hai đường thẳng có phương trình nào sau đây?

A. $3x-4y+8=0$ hoặc $3x-4y+12=0$.

B. $3x-4y-8=0$ hoặc $3x-4y+12=0$.

C. $3x-4y-8=0$ hoặc $3x-4y-12=0$.

D. $3x-4y+8=0$ hoặc $3x-4y-12=0$.

Câu 89. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: 5x+3y-3=0$ và $d_2: 5x+3y+7=0$ song song nhau. Đường thẳng vừa song song và cách đều với d_1, d_2 là:

A. $5x+3y-2=0$. **B.** $5x+3y+4=0$.

C. $5x+3y+2=0$. **D.** $5x+3y-4=0$.

Câu 90. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi d là đường thẳng đi qua $M(4;2)$ và cách điểm $A(1;0)$ khoảng cách $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. Biết rằng phương trình đường thẳng d có dạng $x+by+c=0$ với b,c là hai số nguyên. Tính $b+c$.

A. 4. **B.** 5. **C.** -1. **D.** -5.

Câu 91. Đường thẳng $12x+5y=60$ tạo với hai trục toạ độ một tam giác. Tổng độ dài các đường cao của tam giác đó là

A. $\frac{60}{13}$. **B.** $\frac{281}{13}$. **C.** $\frac{360}{17}$. **D.** 20.

Dạng 4. Một số bài toán liên quan đến diện tích

Câu 92. Đường thẳng $\Delta: 5x+3y=15$ tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng bao nhiêu?

A. $7,5$. **B.** 5. **C.** 15. **D.** 3.

Câu 93. Cho hai đường thẳng $d_1: y = mx - 4; d_2: -mx - 4$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để tam giác tạo thành bởi d_1, d_2 và trục hoành có diện tích lớn hơn 8. Số phần tử của tập S là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 94. Tìm phương trình đường thẳng $d: y = ax + b$. Biết đường thẳng d đi qua điểm $I(1;3)$ và tạo với hai tia Ox, Oy một tam giác có diện tích bằng 6?

A. $y = \left(9 + \sqrt{72}\right)x - \sqrt{72} - 6$. **B.** $y = \left(9 - \sqrt{72}\right)x + \sqrt{72} - 6$.

C. $y = 3x + 6$. **D.** $y = -3x + 6$.

Câu 95. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M(2;1)$. Đường thẳng d đi qua M, cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại A và B (A, B khác O) sao cho tam giác OAB có diện tích nhỏ nhất. Phương trình đường thẳng d là.

A. $2x - y - 3 = 0$. **B.** $x - 2y = 0$. **C.** $x + 2y - 4 = 0$. **D.** $x - y - 1 = 0$.

Câu 96. Đường thẳng $d: \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, $(a \neq 0; b \neq 0)$ đi qua $M(-1;6)$ tạo với tia Ox, Oy một tam giác có diện tích bằng 4. Tính $S = a + 2b$.

A. $S = \dfrac{-5 + 7\sqrt{5}}{3}$. **B.** $S = -\dfrac{38}{3}$. **C.** $S = 10$. **D.** $S = 6$.

Dạng 5. Xác định điểm

Câu 97. Cho đường thẳng $d: 3x+5y-15=0$. Trong các điểm sau đây, điểm nào **không** thuộc đường thẳng d

A. $M_1(5;0)$. **B.** $M_4(-5;6)$. **C.** $M_2(0;3)$. **D.** $M_3(5;3)$.

Câu 98. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(4;3)$, $B(2;7)$, $C(-3;-8)$. Tọa độ chân đường cao kẻ từ đỉnh A xuống cạnh BC là:

A. $(-1;4)$. **B.** $(1;-4)$. **C.** $(1;4)$. **D.** $(4;1)$.

Câu 99. Cho đường thẳng $d: -3x+y-5=0$ và điểm $M(-2;1)$. Tọa độ hình chiếu vuông góc của M trên d là

A. $\left(\frac{7}{5};-\frac{4}{5}\right)$. **B.** $\left(-\frac{7}{5};\frac{4}{5}\right)$. **C.** $\left(-\frac{7}{5};-\frac{4}{5}\right)$. **D.** $\left(-\frac{5}{7};\frac{4}{5}\right)$.

Câu 100. Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $M(1;2)$ lên đường thẳng $\Delta: x-y=0$ là

A. $\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$. **B.** $(1;1)$. **C.** $(2;2)$. **D.** $\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$.

Câu 101. Cho hai điểm $A(3;-1), B(0;3)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc Ox sao khoảng cách từ M đến đường thẳng AB bằng 1.

A. $M\left(\frac{7}{2};0\right)$ và $M(1;0)$. **B.** $M\left(\sqrt{13};0\right)$.

C. $M(4;0)$. **D.** $M(2;0)$.

Câu 102. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;1)$, $B(4;-3)$ và đường thẳng $d: x-2y-1=0$. Tìm điểm M thuộc d có tọa độ nguyên và thỏa mãn khoảng cách từ M đến đường thẳng AB bằng 6.

A. $M(3;7)$. **B.** $M(7;3)$. **C.** $M(-43;-27)$. **D.** $M\left(3;-\frac{27}{11}\right)$.

Câu 103. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(0;1)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=2+2t \\ y=3+t \end{cases}$. Tìm điểm M thuộc d và cách A một khoảng bằng 5, biết M có hoành độ âm.

A. $M(4;4)$. **B.** $\left[\begin{array}{l} M(-4;4) \\ M\left(-\frac{24}{5};-\frac{2}{5}\right) \end{array}\right.$. **C.** $M\left(-\frac{24}{5};-\frac{2}{5}\right)$. **D.** $M(-4;4)$.

Câu 104. Biết rằng có đúng hai điểm thuộc trục hoành và cách đường thẳng $\Delta: 2x-y+5=0$ một khoảng bằng $2\sqrt{5}$. Tích hoành độ của hai điểm đó bằng:

A. $-\frac{75}{4}$. **B.** $-\frac{25}{4}$. **C.** $-\frac{225}{4}$. **D.** Đáp số khác.

Câu 105. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(3;-1)$ và $B(0;3)$. Tìm điểm M thuộc trục hoành sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng AB bằng 1.

A. $\left[\begin{array}{l} M\left(\frac{7}{2};0\right) \\ M(1;0) \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} M\left(\frac{14}{3};0\right) \\ M\left(\frac{4}{3};0\right) \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} M\left(-\frac{7}{2};0\right) \\ M(-1;0) \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} M\left(-\frac{14}{3};0\right) \\ M\left(-\frac{4}{3};0\right) \end{array}\right.$.

Câu 106. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(3;0)$ và $B(0;-4)$. Tìm điểm M thuộc trục tung sao cho diện tích tam giác MAB bằng 6.

A. $\left[\begin{array}{l} M(0;0) \\ M(0;-8) \end{array}\right.$. **B.** $M(0;-8)$. **C.** $M(6;0)$. **D.** $\left[\begin{array}{l} M(0;0) \\ M(0;6) \end{array}\right.$.

Câu 107. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $\Delta_1: 3x-2y-6=0$ và $\Delta_2: 3x-2y+3=0$. Tìm điểm M thuộc trục hoành sao cho M cách đều hai đường thẳng đã cho.

A. $M\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $M\left(\frac{1}{2};0\right)$. **C.** $M\left(-\frac{1}{2};0\right)$. **D.** $M\left(\sqrt{2};0\right)$.

Câu 108. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-2;2)$, $B(4;-6)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=t \\ y=1+2t \end{cases}$. Tìm điểm M thuộc d sao cho M cách đều hai điểm A, B.

A. $M(3;7)$. **B.** $M(-3;-5)$. **C.** $M(2;5)$. **D.** $M(-2;-3)$

Câu 109. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-1;2)$, $B(-3;2)$ và đường thẳng $d: 2x-y+3=0$. Tìm điểm C thuộc d sao cho tam giác ABC cân tại C.

A. $C(-2;-1)$. **B.** $C\left(-\frac{3}{2};0\right)$. **C.** $C(-1;1)$. **D.** $C(0;3)$

Câu 110. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;2)$, $B(0;3)$ và đường thẳng $d: y=2$. Tìm điểm C thuộc d sao cho tam giác ABC cân tại B.

A. $C(1;2)$. **B.** $C(4;2)$. **C.** $\left[\begin{array}{l} C(1;2) \\ C(-1;2) \end{array}\right.$. **D.** $C(-1;2)$.

Câu 111. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, giả sử điểm $A(a;b)$ thuộc đường thẳng $d: x-y-3=0$ và cách $\Delta: 2x-y+1=0$ một khoảng bằng $\sqrt{5}$. Tính $P=ab$ biết $a>0$.

A. 4. **B.** -2 **C.** 2. **D.** -4.

Câu 112. Trong mặt phẳng Oxy, cho biết điểm $M(a;b)$ $(a>0)$ thuộc đường thẳng $d: \begin{cases} x=3+t \\ y=2+t \end{cases}$ và cách đường thẳng $\Delta: 2x-y-3=0$ một khoảng $2\sqrt{5}$. Khi đó $a+b$ là.

A. 21. **B.** 23. **C.** 22 **D.** 20.

Câu 113. Điểm $A(a;b)$ thuộc đường thẳng $d: \begin{cases} x=3-t \\ y=2-t \end{cases}$ và cách đường thẳng $\Delta: 2x-y-3=0$ một khoảng bằng $2\sqrt{5}$ và $a<0$. Tính $P=a.b$.

A. $P=-72$. **B.** $P=72$. **C.** $P=132$. **D.** $P=-132$.

Câu 114. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $I(1;2)$ và đường thẳng $(d): 2x+y-5=0$. Biết rằng có hai điểm M_1, M_2 thuộc (*d*) sao cho $IM_1 = IM_2 = \sqrt{10}$. Tổng các hoành độ của M_1 và M_2 là

A. $\frac{7}{5}$. **B.** $\frac{14}{5}$. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 115. Trong hệ tọa độ Oxy cho $A(1;1)$, $B(4;-3)$. Gọi $C(a;b)$ thuộc đường thẳng $d: x-2y-1=0$ sao cho khoảng cách từ C đến đường thẳng AB bằng 6. Biết rằng C có hoành độ nguyên, tính $a+b$?

A. $a+b=10$. **B.** $a+b=7$. **C.** $a+b=4$. **D.** $a+b=-4$

Câu 116. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm hai điểm $A(-4;2)$, $B(2;6)$ và điểm C nằm trên đường thẳng $d: \frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{-2}$ sao cho $CA = CB$. Khi đó tọa độ điểm C là

A. $\left(\frac{2}{5}; \frac{8}{5}\right)$. **B.** $\left(\frac{-1}{5}; \frac{12}{5}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{5}; \frac{11}{5}\right)$. **D.** $\left(\frac{2}{5}; \frac{9}{5}\right)$.

Câu 117. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho $A(-3;5), B(1;3)$ và đường thẳng $d: 2x-y-1=0$, đường thẳng AB cắt d tại I. Tính tỉ số $\frac{IA}{IB}$.

A. 6. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 118. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $B(-2;3)$ và $C(3;-2)$. Điểm $I(a;b)$ thuộc BC sao cho với mọi điểm M không nằm trên đường thẳng BC thì $\overrightarrow{MI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{MB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{MC}$. Tính $S = a^2 + b^2$.

A. 1. **B.** 0. **C.** 5. **D.** 4.

Dạng 6. Bài toán liên quan quan đến tam giác

Câu 119. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;2), B(3;1), C(5;4)$. Phương trình nào sau đây là phương trình đường cao kẻ từ A của tam giác ABC?

A. $2x+3y-8=0$. **B.** $2x+3y+8=0$. **C.** $3x-2y+1=0$. **D.** $2x+3y-2=0$.

Câu 120. Cho ΔABC có $A(2;-1), B(4;5), C(-3;2)$. Đường cao AH của ΔABC có phương trình là

A. $7x+3y-11=0$. **B.** $-3x+7y+13=0$. **C.** $3x+7y+17=0$. **D.** $7x+3y+10=0$.

Câu 121. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;2), B(3;1), C(5;4)$. Phương trình nào sau đây là phương trình đường cao kẻ từ A của tam giác ABC?

A. $2x+3y-8=0$. **B.** $2x+3y+8=0$.

C. $3x-2y+1=0$. **D.** $2x+3y-2=0$.

Câu 122. Trong mặt phẳng cho tam giác ABC cân tại C có $B(2;-1)$, $A(4;3)$. Phương trình đường cao CH là

A. $x-2y-1=0$. **B.** $x-2y+1=0$. **C.** $2x+y-2=0$. **D.** $x+2y-5=0$.

Câu 123. Cho ΔABC có $A(2;-1), B(4;5), C(-3;2)$. Phương trình tổng quát của đường cao BH là

A. $3x+5y-37=0$. **B.** $5x-3y-5=0$. **C.** $3x-5y-13=0$. **D.** $3x+5y-20=0$.

Câu 124. Cho tam giác ABC có $A(1;1)$, $B(0;-2)$, $C(4;2)$. Lập phương trình đường trung tuyến của tam giác ABC kẻ từ A.

A. $x+y-2=0$. **B.** $2x+y-3=0$. **C.** $x+2y-3=0$. **D.** $x-y=0$.

Câu 125. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;-1)$, $B(4;5)$ và $C(-3;2)$. Lập phương trình đường cao của tam giác ABC kẻ từ A.

A. $7x+3y-11=0$. **B.** $-3x+7y+13=0$.

C. $3x+7y+1=0$. **D.** $7x+3y+13=0$.

Câu 126. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;-1)$, $B(4;5)$ và $C(-3;2)$. Lập phương trình đường cao của tam giác ABC kẻ từ B.

A. $3x-5y-13=0$. **B.** $3x+5y-20=0$.

C. $3x+5y-37=0$. **D.** $5x-3y-5=0$.

Câu 127. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;-1)$, $B(4;5)$ và $C(-3;2)$. Lập phương trình đường cao của tam giác ABC kẻ từ C.

A. $x+y-1=0$. **B.** $x+3y-3=0$. **C.** $3x+y+11=0$. **D.** $3x-y+11=0$.

Câu 128. Cho tam giác ABC với $A(1;1)$, $B(0;-2)$, $C(4;2)$. Phương trình tổng quát của đường trung tuyến đi qua điểm B của tam giác ABC là

A. $7x+7y+14=0$. **B.** $5x-3y+1=0$. **C.** $3x+y-2=0$. **D.** $-7x+5y+10=0$.

Câu 129. Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;3)$, $B(1;0)$, $C(-1;-2)$. Phương trình đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC là:

A. $2x-y-1=0$. **B.** $x-2y+4=0$. **C.** $x+2y-8=0$. **D.** $2x+y-7=0$.

Câu 130. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;4)$, $B(3;2)$ và $C(7;3)$. Viết phương trình tham số của đường trung tuyến CM của tam giác.

A. $\begin{cases} x=7 \\ y=3+5t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=3-5t \\ y=-7 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=7+t \\ y=3 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2 \\ y=3-t \end{cases}$.

Câu 131. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;4)$, $B(5;0)$ và $C(2;1)$. Trung tuyến BM của tam giác đi qua điểm N có hoành độ bằng 20 thì tung độ bằng:

A. -12. **B.** $-\dfrac{25}{2}$. **C.** -13. **D.** $-\dfrac{27}{2}$.

Câu 132. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $M(2;0)$ là trung điểm của cạnh AB. Đường trung tuyến và đường cao qua đỉnh A lần lượt có phương trình là $7x-2y-3=0$ và $6x-y-4=0$. Phương trình đường thẳng AC là

A. $3x-4y-5=0$. **B.** $3x+4y+5=0$. **C.** $3x-4y+5=0$. **D.** $3x+4y-5=0$.

Câu 133. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình cạnh AB là $x-y-2=0$, phương trình cạnh AC là $x+2y-5=0$. Biết trọng tâm của tam giác là điểm $G(3;2)$ và phương trình đường thẳng BC có dạng $x+my+n=0$. Tìm $m+n$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 134. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A\left(\dfrac{7}{4};3\right)$, $B(1;2)$ và $C(-4;3)$. Phương trình đường phân giác trong của góc A là:

A. $4x+2y-13=0$. **B.** $4x-8y+17=0$. **C.** $4x-2y-1=0$. **D.** $4x+8y-31=0$.

Câu 135. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;5)$, $B(-4;-5)$ và $C(4;-1)$. Phương trình đường phân giác ngoài của góc A là:

A. $y+5=0.$ **B.** $y-5=0.$ **C.** $x+1=0.$ **D.** $x-1=0.$

Câu 136. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: 3x-4y-3=0$ và $d_2: 12x+5y-12=0$. Phương trình đường phân giác góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng d_1 và d_2 là:

A. $3x+11y-3=0.$ **B.** $11x-3y-11=0.$ **C.** $3x-11y-3=0.$ **D.** $11x+3y-11=0.$

Câu 137. Cho tam giác ABC có phương trình cạnh $AB: 3x-4y-9=0$, cạnh $AC: 8x-6y+1=0$, cạnh $BC: x+y-5=0$. Phương trình đường phân giác trong của góc A là:

A. $14x+14y-17=0$. **B.** $2x-2y-19=0$. **C.** $2x+2y+19=0$. **D.** $14x-14y-17=0$.

Câu 138. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(1;-2)$, $B(2;-3)$, $C(3;0)$. Phương trình đường phân giác ngoài góc A của tam giác ABC là

A. $x=1$. **B.** $y=-2$. **C.** $2x+y=0$. **D.** $4x+y-2=0$.

Câu 139. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với đỉnh $A(2;4)$, trọng tâm $G\left(2;\frac{2}{3}\right)$. Biết rằng đỉnh B nằm trên đường thẳng (d) có phương trình $x+y+2=0$ và đỉnh C có hình chiếu vuông góc trên (d) là điểm $H(2;-4)$. Giả sử $B(a;b)$, khi đó $T=a-3b$ bằng

A. $T=4$. **B.** $T=-2$. **C.** $T=2$. **D.** $T=0$.

Câu 140. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác cân ABC có cạnh đáy $BC: x-3y-1=0$, cạnh bên $AB: x-y-5=0$. Đường thẳng AC đi qua $M(-4;1)$. Giả sử toạ độ đỉnh $C(m,n)$.Tính $T=m+n$.

A. $T=\frac{5}{9}$. **B.** $T=-3$. **C.** $T=\frac{9}{5}$. **D.** $T=-\frac{9}{5}$.

Câu 141. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường thẳng $(d_1): 2x-y+5=0$ và $(d_2): x+y-3=0$ cắt nhau tại I. Phương trình đường thẳng đi qua $M(-2;0)$ cắt $(d_1),(d_2)$ tại A và B sao cho tam giác IAB cân tại A có phương trình dạng $ax+by+2=0$. Tính $T=a-5b$.

A. $T=-1$. **B.** $T=9$. **C.** $T=-9$. **D.** $T=11$.

Câu 142. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(2;1)$, $B(2;-3)$, $C(-2;-1)$. Trực tâm H của tam giác ABC có tọa độ $(a;b)$. Biểu thức $S=3a+2b$ bằng bao nhiêu?

A. 0. **B.** 1. **C.** 5. **D.** -1.

Câu 143. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy,cho tam giác ABC có đỉnh $A(2;2)$ và trung điểm của BC là $I(-1;-2)$. Điểm $M(a;b)$ thỏa mãn $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Tính $S=a+b$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** 1.

Câu 144. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;1)$, đường cao BH có phương trình $x-3y-7=0$ và trung tuyến CM có phương trình $x+y+1=0$. Tìm tọa độ đỉnh C?

A. $(-1;0)$. **B.** $(4;-5)$. **C.** $(1;-2)$. **D.** $(1;4)$.

Câu 145. Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $B(-4;1)$, trọng tâm $G(1;1)$ và đường thẳng phân giác trong góc A có phương trình $d: x-y-1=0$. Biết điểm $A(m;n)$. Tính tích $m.n$.

A. $m.n = 20$. **B.** $m.n = 12$. **C.** $m.n = -12$. **D.** $m.n = 6$.

Câu 146. Cho ΔABC vuông tại A, điểm M thuộc cạnh AC, sao cho $AB = 3AM$, đường tròn tâm I đường kính CM cắtBM tại D, đường thẳng CD có phương trình $x - 3y - 6 = 0$. Biết điểm I(1;-1), điểm $E\left(\frac{4}{3};0\right)$ thuộc đường thẳng BC, $x_C \in \mathbb{Z}$. Gọi B là điểm có tọa độ *(a, b)*. Khi đó:

A. $a + b = 1$. **B.** $a + b = 0$. **C.** $a + b = -1$. **D.** $a + b = 2$.

Câu 147. Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình đường thẳng $BC: x + 7y - 13 = 0$. Các chân đường cao kẻ từ B, C lần lượt là $E(2;5), F(0;4)$. Biết tọa độ đỉnh A là $A(a;b)$. Khi đó:

A. $a - b = 5$. **B.** $2a + b = 6$. **C.** $a + 2b = 6$. **D.** $b - a = 5$

Câu 148. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $B(-12;1)$, đường phân giác trong của góc A có phương trình $d: x + 2y - 5 = 0$. $G\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác ABC. Đường thẳng BC qua điểm nào sau đây?

A. $(1;0)$. **B.** $(2;-3)$. **C.** $(4;-4)$. **D.** $(4;3)$.

Câu 149. Cho tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác biết phương trình cạnh $BC: x + y - 2 = 0$; hai đường cao $BB': x - 3 = 0$ và $CC': 2x - 3y + 6 = 0$?

A. $A(1;2); B(0;2); C(3;-1)$. **B.** $A(1;2); B(3;-1); C(0;2)$.

C. $A(1;-2); B(3;-1); C(0;2)$. **D.** $A(2;1); B(3;-1); C(0;2)$.

Câu 150. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-3;0), B(3;0), C(2;6)$. Gọi $H(a;b)$ là trực tâm của tam giác ABC. Tính $6ab$

A. 10. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** 60. **D.** 6.

Câu 151. Cho tam giác ABC có $A(1;-3)$, $B(0;2)$, $C(-2;4)$. Đường thẳng Δ đi qua A và chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau. Phương trình của Δ là

A. $2x - y - 7 = 0$. **B.** $x + y + 2 = 0$. **C.** $x - 3y - 10 = 0$. **D.** $3x + y = 0$.

Câu 152. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A, phương trình đường thẳng AB, AC lần lượt là $5x - y - 2 = 0, x - 5y + 14 = 0$. Gọi D là trung điểm của BC, E là trung điểm của AD, $M\left(\frac{9}{5};\frac{8}{5}\right)$ là hình chiếu vuông góc của D trên BE. Tính OC.

A. $OC = \sqrt{26}$. **B.** $OC = \sqrt{10}$. **C.** $OC = 5$. **D.** $OC = \sqrt{52}$.

Câu 153. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có chân đường cao hạ từ đỉnh A là $H\left(\frac{17}{5};-\frac{1}{5}\right)$, chân đường phân giác trong góc A là $D(5;3)$ và trung điểm của cạnh AB là $M(0;1)$. Tìm tọa độ đỉnh C.

A. $C(-2;9)$. **B.** $C(9;11)$. **C.** $C(-9;-11)$. **D.** $C(2;-10)$.

Câu 154. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại B với $A(1;-1)$, $C(3;5)$. Định B nằm trên đường thẳng $d: 2x - y = 0$. Phương trình các đường thẳng AB, BC lần lượt là $d_1: ax + by - 24 = 0$, $d_2: cx + dy + 8 = 0$. Tính giá trị biểu thức $P = a.b.c.d$.

A. $P = 975$. **B.** $P = 5681$. **C.** $P = 3059$. **D.** $P = 5083$.

Câu 155. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho ΔABC có $AB = AC$, $\widehat{BAC} = 90^o$. Biết $M(1,-1)$ là trung điểm cạnh BC và $G\left(\frac{2}{3},0\right)$ là trọng tâm ΔABC. Khi đó, $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B),(x_B<0)$. Tính $T = 2019x_A^2 + y_A + 2x_B - 3y_B$

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 156. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trọng tâm $G(2;-3)$ và $B(1;1)$. Đường thẳng $\Delta : x - y - 4 = 0$ đi qua A và đường phân giác trong của góc A cắt BC tại điểm I sao cho diện tích tam giác IAB bằng $\frac{4}{5}$ diện tích tam giác IAC. Biết điểm A có hoành độ dương, khi đó phương trình tổng quát của đường thẳng BC là

A. $5x+3y-11=0$. **B.** $3x-8y+5=0$ **C.** $5x+3y+11=0$ **D.** $3x-8y-5=0$

Câu 157. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình đường thẳng chứa đường cao kẻ từ B có phương trình là $\Delta_1 : x+3y-18=0$, phương trình đường trung trực của đoạn BC là $\Delta_2 : 3x+19y-279=0$, đỉnh C thuộc đường thẳng $d: 2x-y+5=0$ và biết $\widehat{BAC} = 135^0$. Giả sử $A(a;b)$, tính tổng a^2+b.

A. 24. **B.** 6. **C.** 80 **D.** 4

Câu 158. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC cân, cạnh đáy BC: $x+3y+1=0$, cạnh bên AB: $x-y+5=0$; đường thẳng chứa AC đi qua $M(-4;-1)$. Tìm tọa độ đỉnh C.

A. $C\left(-\frac{43}{10};\frac{11}{10}\right)$. **B.** $C\left(-\frac{43}{10};-\frac{11}{10}\right)$. **C.** $C\left(\frac{43}{10};\frac{11}{10}\right)$. **D.** $C\left(\frac{43}{10};-\frac{11}{10}\right)$.

Câu 159. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có trực tâm $H(2;0)$, đường trung tuyến $CM: 3x+7y-8=0$, đường trung trực của BC là: $x=3$, đỉnh A có tung độ âm. Khi đó tọa độ của đỉnh A có dạng $(a;\frac{-b}{c})$ với $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tìm $a+b+c$

A. 17. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 19.

Câu 160. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại điểm $A(-2;0)$.Điểm E là chân đường cao kẻ từ đỉnh A.Gọi F là điểm đối xứng với E qua A, trực tâm tam giác BCF là điểm $H(-2;3)$.Trung điểm M của đoạn BC thuộc đường thẳng $(d): 4x-y+4=0$.Biết hoành độ đỉnh B dương. Tính $S = 2x_B + 3x_C$

A. -4. **B.** 9. **C.** 4. **D.** -9

Dạng 7. Bài toán liên quan đến tứ giác

Câu 161. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm C thuộc đường thẳng d: $2x+y+5=0$ và điểm $A(-4;8)$. Gọi M đối xứng với B qua C, điểm $N(5;-4)$ là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng MD. Biết tọa độ $C(m;n)$, giá trị của $m-n$ là

A. 6. **B.** -6. **C.** 8. **D.** 7

Câu 162. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho $CN = 2ND$. Giả sử $M\left(\frac{11}{2};\frac{1}{2}\right)$ và đường thẳng AN có phương trình $2x - y - 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm A.

A. $A(1;-1)$ hoặc $A(4;-5)$. **B.** $A(1;-1)$ hoặc $A(-4;-5)$.

C. $A(1;-1)$ hoặc $A(4;5)$. **D.** $A(1;1)$ hoặc $A(4;5)$.

Câu 163. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$; các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD; CM cắt DN tại điểm $I(5;2)$. Biết $P\left(\frac{11}{2};\frac{11}{2}\right)$ và điểm A có hoành độ âm. Tọa độ điểm A và D là:

A. $A(-2;3)$ và $D(3;8)$. **B.** $A(-2;3)$ và $D(-3;8)$.

C. $A(-2;3)$ và $D(3;-8)$. **D.** $A(-2;-3)$ và $D(3;8)$.

Câu 164. Trên mặt phẳng Oxy, cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho $CN = 2ND$. Giả sử $M\left(\frac{11}{2};\frac{1}{2}\right)$ và đường thẳng AN có phương trình $2x - y - 3 = 0$. Gọi $P(a;b)$ là giao điểm của AN và BD. Giá trị $2a + b$ bằng

A. 6 **B.** 5. **C.** 8. **D.** 7.

Câu 165. Trong mặt phẳng tọa độ với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm $H(1;2)$ là hình chiếu vuông góc của A lên BD. Điểm $M\left(\frac{9}{2};3\right)$ là trung điểm cạnh BC. Phương trình đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A của tam giác ADH là $4x + y - 4 = 0$. Biết điểm D có tọa độ là $(x_D; y_D)$ tính giá trị biểu thức $S = 4x_D^2 + y_D^2$.

A. $S = 3$. **B.** $S = 4$. **C.** $S = 6$. **D.** $S = 5$.

Câu 166. Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), cho hình chữ nhật ABCD có điểm C thuộc đường thẳng $d: 2x + y + 5 = 0$ và điểm $A(-4;8)$. Gọi M là điểm đối xứng với B qua C, điểm $N(5;-4)$ là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng MD. Biết tọa độ $C(m;n)$, giá trị của $m - n$ là:

A. 6. **B.** -6. **C.** 8. **D.** 7.

Câu 167. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính BD. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên BC và BD; gọi P là giao điểm của MN và AC. Biết đường thẳng AC có phương trình $x - y - 1 = 0$, $M(0;4)$, $N(2;2)$ và hoành độ điểm A nhỏ hơn 2. Tìm tọa độ các điểm P, A, B.

A. $P\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right), A(0;-1),\ B(4;1)$.

B. $P\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right), A(0;-1),\ B(-1;4)$.

C. $P\left(\frac{5}{3};\frac{3}{2}\right), A(0;-1),\ B(-1;4)$.

D. $P\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right), A(-1;0),\ B(4;1)$.

Câu 168. Trên hệ trục tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$. Điểm M thuộc cạnh CD sao cho $\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{DM}$, $N(0;2019)$ là trung điểm của cạnh BC, K là giao điểm của hai đường thẳng AM và BD. Biết đường thẳng AM có phương trình $x-10y+2018=0$. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng NK bằng

A. 2019. **B.** $2019\sqrt{101}$. **C.** $\dfrac{2018}{11}$. **D.** $\dfrac{2019\sqrt{101}}{101}$.

Câu 169. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang cân $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau và $AD=3BC$. Đường thẳng BD có phương trình $x+2y-6=0$ và tam giác ABD có trực tâm là $H(-3;2)$. Tìm tọa độ các đỉnh C và D.

A. $C(-1;6),D(4;1)$ **và** $C(-1;6),D(-8;7)$. **B.** $C(1;6),D(-4;1)$ **và** $C(1;6),D(-8;7)$.

C. $C(1;6),D(-4;1)$ **và** $C(1;6),D(8;7)$. **D.** $C(-1;6),D(4;-1)$ **và** $C(-1;6),D(8;-7)$.

Câu 170. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD. Các đường thẳng AC và AD lần lượt có phương trình là $x+3y=0$ và $x-y+4=0$; đường thẳng BD đi qua điểm $M\left(-\dfrac{1}{3};1\right)$. Khẳng định nào sau đay là khẳng định đúng?

A. Tọa độ trọng tâm của tam giác BCD là $G\left(\dfrac{5}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$

B. Tọa độ trọng tâm của tam giác ACD là $G\left(-\dfrac{1}{3};-1\right)$

C. Tọa độ trọng tâm của tam giác ABD là $G(-1;3)$

D. Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(\dfrac{1}{3};-1\right)$

Câu 171. Trong mặt phẳng với trục toạ độ Oxy cho hình thang cân $ABCD$ $(AB//CD)$. Gọi H,I lần lượt là hình chiếu vuông góc của B trên các đường thẳng AC,CD. Giả sử M,N lần lượt là trung điểm của AD,HI. Phương trình đường thẳng AB có dạng $mx+ny-7=0$ biết $M(1;-2)$, $N(3;4)$ và đỉnh B nằm trên đường thẳng $x+y-9=0$, $\cos\widehat{ABM}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Khi đó $m+n$ có giá trị thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ **B.** $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ **C.** $\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right)$ **D.** $\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{7}{2}\right)$

Câu 172. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang $ABCD$ có diện tích bằng 14 và $AB//CD$. Biết $H\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$ là trung điểm của cạnh BC và $I\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right)$ là trung điểm của AH. Viết phương trình đường thẳng AB, biết điểm D có hoành độ dương và D thuộc đường thẳng $5x-y+1=0$.

A. $3x-y+2=0$. **B.** $3x-y-2=0$. **C.** $x+3y-2=0$. **D.** $x-3y-2=0$.

Câu 173. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B, cạnh $AB = BC = \dfrac{AD}{2}$. Biết đường thẳng chứa cạnh CD có phương trình $3x + y - 4 = 0$ và $A(-2; 0)$. Điểm $B(a;b)$ với $b>0$ khi đó $a^2+b^2=?$

A. 5 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 4

Câu 174. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho $CN = 2ND$. Giả sử $M\left(\frac{11}{2};\frac{1}{2}\right)$ và đường thẳng AN có phương trình $2x - y - 3 = 0$. Gọi $P(a;b)$ là giao điểm của AN và BD. Giá trị $2a + b$ bằng:

A. 5. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 6.

Câu 175. Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho hình bình hành *ABCD* có phương trình đường chéo *AC* là $5x + y + 4 = 0$. Tọa độ trực tâm tam giác *ABC* là $H(-\frac{23}{7};\frac{15}{7})$. Tọa độ trọng tâm tam giác *ACD* là $G(-\frac{2}{3};4)$. Gọi x_A, x_B, x_C, x_D lần lượt là hoành độ của các điểm *A, B, C,D.*

Tính giá trị biểu thức $T = {x_A}^2 + {x_C}^2 + 2018x_D + x_{B.}$.

A. 2024. **B.** 2015. **C.** 2021. **D.** 2019.

Câu 176. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có tâm $I(3;-1)$, điểm M thuộc cạnh CD sao cho $MC = 2MD$. Tìm tọa độ đỉnh A của hình vuông $ABCD$ biết đường thẳng AM có phương trình $2x - y - 4 = 0$ và đỉnh A có tung độ âm.

A. $A(3;-2)$. **B.** $A(3;2)$. **C.** $A\left(-\frac{3}{2};-7\right)$. **D.** $A\left(\frac{3}{5};-\frac{14}{5}\right)$.

Câu 177. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có M, N là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{7}{8}\overrightarrow{AC}$. Biết rằng hai điểm M, D thuộc đường thẳng $\Delta : 4x - 3y - 2 = 0$, $N\left(\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right)$ và D có hoành độ lớn hơn $\frac{1}{3}$, hãy tính tổng hoành độ và tung độ của điểm A.

A. $\frac{-22}{25}$ **B.** $\frac{-24}{25}$. **C.** 0. **D.** $\frac{4}{25}$.

Câu 178. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho $CN = 2ND$. Giả sử $M\left(\frac{11}{2};\frac{1}{2}\right)$ và đường thẳng AN: $2x - y - 3 = 0$. Biết tọa độ $A(a;b)$ (với $b > 0$). Tính $a + b$

A. $a + b = 0$. **B.** $a + b = 9$. **C.** $a + b = -1$. **D.** $a + b = 4$

Câu 179. Trong hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi $ABCD$ cạnh AC có phương trình là: $x + 7y - 31 = 0$, hai đỉnh B, D lần lượt thuộc các đường thẳng $d_1 : x + y - 8 = 0$, $d_2 : x - 2y + 3 = 0$. Biết rằng diện tích hình thoi bằng 75, đỉnh A có hoành độ âm. Tính tổng hoành độ và tung độ của điểm C

A. 7 **B.** 10 **C.** 13 **D.** 15

Câu 180. Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ với đường thẳng chứa cạnh AD có phương trình là $d_1 : 3x + y - 14 = 0$. Biết điểm $E(0;-6)$ là điểm đối xứng của C qua AB. Gọi M là trung điểm của CD. Biết $BD \cap ME = I$ với $I(\frac{2}{3};-\frac{4}{3})$. Tính độ dài đoạn thẳng HD với $H(2;-3)$.

A. $HD = \sqrt{29}$. **B.** $HD = 5$. **C.** $HD = \sqrt{37}$. **D.** $HD = \sqrt{5}$.

Dạng 8. Cực trị

Câu 181. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm $A(1;-1)$ và $B(3;4)$. Gọi (d) là một đường thẳng bất kì luôn đi qua **B.** Khi khoảng cách từ A đến đường thẳng (d) đạt giá trị lớn nhất, đường thẳng (d) có phương trình nào dưới đây?

A. $x-y+1=0$. **B.** $3x+4y=25$. **C.** $5x-2y-7=0$. **D.** $2x+5y-26=0$.

Câu 182. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x+(m-1)y+m=0$ (m là tham số bất kì) và điểm $A(5;1)$. Khoảng cách lớn nhất từ điểm A đến Δ bằng

A. $2\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $4\sqrt{10}$. **D.** $3\sqrt{10}$.

Câu 183. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $\Delta: x-y+1=0$ và hai điểm $A(2;\,1)$, $B(9;\,6)$. Điểm $M(a;\,b)$ nằm trên đường Δ sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất. Tính $a+b$.

A. -7. **B.** -9. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 184. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x-4y+15=0$ và điểm $A(2;0)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc d để đoạn AM có độ dài nhỏ nhất.

A. $M(-15;0)$. **B.** $M(5;5)$. **C.** $M(0;3)$. **D.** $M(1;4)$.

Câu 185. Cho 3 điểm $A(-6;3); B(0;-1); C(3;2)$. Tìm M trên đường thẳng $d: 2x-y-3=0$ mà $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất là

A. $M\left(\frac{13}{15};\frac{71}{15}\right)$ **B.** $M\left(\frac{13}{15};\frac{19}{15}\right)$ **C.** $M\left(\frac{26}{15};\frac{97}{15}\right)$ **D.** $M\left(\frac{-13}{15};\frac{19}{15}\right)$

Câu 186. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(2;2)$, $B(1;-3)$, $C(-2;2)$. Điểm M thuộc trục tung sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất có tung độ là?

A. 1. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $-\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 187. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $\Delta: x-y+1=0$ và hai điểm $A(2;1)$, $B(9;6)$. Điểm $M(a;b)$ nằm trên đường Δ sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất. Tính $a+b$ ta được kết quả là:

A. -9. **B.** 9. **C.** -7. **D.** 7

Câu 188. Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy* cho điểm *A(6;2)* và đường thẳng $d: x-y=0$ .Gọi *P* là giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác *ABC* biết *B* là điểm thay đổi trên tia *Ox* và *C* là điểm thay đổi trên ***D.*** Tính *P* ?

A. $P=2\sqrt{5}$. **B.** $P=4\sqrt{3}$. **C.** $P=3\sqrt{5}$. **D.** $P=4\sqrt{5}$.

Câu 189. Cho ΔABC nhọn, có $A(1;7)$, $B(-2;0)$, $C(9;0)$ đường cao AH. Xét các hình chữ nhật $MNPQ$ với $M\in AB$; $N\in AC$; $P,Q\in BC$. Điểm $M(a;b)$ thỏa mãn hình chữ nhật $MNPQ$ có diện tích lớn nhất, tính $P=a+b$.

A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 190. Cho ΔABC nhọn, có $A(1;7)$, $B(-2;0)$, $C(9;0)$ đường cao AH. Xét các hình chữ nhật $MNPQ$ với $M\in AB$; $N\in AC$; $P,Q\in BC$, thì hình chữ nhật có diện tích lớn nhất gần với kết quả nào sau đây?

A. 10. **B.** 30. **C.** 15. **D.** 19.

Câu 191. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy. Đường thẳng (d) đi qua M(3; -2) cắt Ox, Oy lần lượt tại A(a;0), B(0;b) và $ab \neq 0$ sao cho: $\dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{4OB^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $S = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ là

A. $S = \dfrac{11}{25}$ **B.** $S = -\dfrac{11}{7}$ **C.** $S = -\dfrac{1}{5}$ **D.** $S = -\dfrac{5}{7}$

Câu 192. Cho hình bình $ABCD$ có $A(0;1); B(3;4)$ Tâm I nằm trên parabol có phương trình $y = (x-1)^2$ $0 \le x_I \le 3$. khi diện tích hình binh hành $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất thì tọa độ $C(a,b)$, tọa độ $D(c,d)$, Tính $a+b+c+d$?

A. -2. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 0

Câu 193. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(2;3)$ và hai đường thẳng $(d_1): 3x+2y-6=0$; $(d_2): x-2y+3=0$. Gọi C là giao điểm của $(d_1),(d_2)$. Đường thẳng (d) có phương trình dạng $ax-by+c=0$ (với $a,b,c \in \mathbb{N}$, $(a;b)=1$) đi qua M cắt $(d_1),(d_2)$ lần lượt tại các điểm A, B sao cho M nằm trong đoạn AB và tam giác ABC có diện tích nhỏ nhất. Tính $T = abc$.

A. $T = 2016$ **B.** $T = 1512$ **C.** $T = 1800$ **D.** $T = 504$

Câu 194. Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho các điểm $A(-2;2)$, $B(-4;-3)$, $C(1;-5)$, $D(3;0)$. Lấy M, N, P, Q lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MN+NP+PQ+QM$ là :

A. $3\sqrt{29}$. **B.** $2\sqrt{58}$. **C.** $2\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{140}$.

Câu 195. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các đường thẳng $\Delta_1: 3x-4y+6=0$, $\Delta_2: 3x-4y-9=0$, $\Delta_3: 3x-4y+11=0$. Một đường thẳng d thay đổi cắt ba đường thẳng Δ_1, Δ_2, Δ_3 lần lượt tại A, B, C. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = AB + \dfrac{96}{AC^2}$ bằng

A. 18. **B.** 27. **C.** 9. **D.** $\dfrac{49}{9}$.

PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Trong mặt phẳng toạ độ, cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 lần lượt có vectở chỉ phương là $\vec{u}_1, \vec{u}_2$. Khi đó

a) Δ_1 cắt Δ_2 khi và chỉ khi $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ không cùng phương.

b) Δ_1 song song với Δ_2 khi và chỉ khi $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ cùng phương và có một điểm thuộc một đường thẳng mà không thuộc đường thẳng còn lại.

c) Δ_1 trùng với Δ_2 khi và chỉ khi $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ cùng phương và có một điểm thuộc cả hai đường thẳng đó.

Chú ý

- Δ_1 vuông góc với Δ_2 khi và chỉ khi $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ vuông góc với nhau.
- Khi xét vị trí tương đối của hai đường thẳng, có thể dựa vào cặp vecto pháp tuyến của hai đường thẳng đó.

Ví dụ 1. Xét vị trí tương đối của mỗi cặp đường thẳng sau

a) $\Delta_1: 2x - y + 1 = 0$ và $\Delta_2: -x + 2y + 2 = 0$.

b) $\Delta_3: x - y - 1 = 0$ và $\Delta_4: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$

Giải

a) Đường thẳng Δ_1 có vecto chỉ phương $\vec{u}_1 = (1;2)$, đường thẳng Δ_2 có vecto chỉ phương $\vec{u}_2 = (-2;-1)$. Do $\frac{1}{-2} \neq \frac{2}{-1}$ nên $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ không cùng phương, suy ra Δ_1 cắt Δ_2.

b) Đường thẳng Δ_3, Δ_4 lần lượt có vecto chỉ phương $\vec{u}_3 = (1;1), \vec{u}_4 = (2;2)$. Suy ra $\vec{u}_4 = 2\vec{u}_3$. Chọn $t = 0$, ta có điểm $M(1;3) \in \Delta_4$. Do $1 - 3 - 1 \neq 0$ nên $M(1;3) \notin \Delta_3$. Vậy Δ_3 song song với Δ_4.

Ta có thể xét vị trí tương đối của hai đường thẳng dựa vào số giao điểm của chúng.

Nhận xét: Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có phương trình lần lượt là $a_1x + b_1y + c_1 = 0$; $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad (\mathrm{I})$$

Khi đó

a) Δ_1 cắt Δ_2 khi và chỉ khi hệ (I) có nghiệm duy nhất.

b) Δ_1 song song với Δ_2 khi và chỉ khi hệ (I) vô nghiệm.

c) Δ_1 trùng với Δ_2 khi và chỉ khi hệ (I) có vô số nghiệm.

Ví dụ 2. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

$\Delta_1: x - 2y + 1 = 0$; $\Delta_2: 2x - 4y + 2 = 0$.

Giải

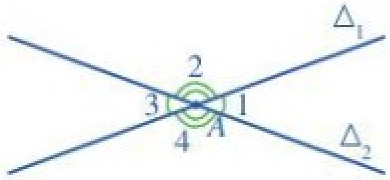
Tọa độ giao điểm của đường thẳng Δ_1 và đường thẳng Δ_2 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 2x - 4y + 2 = 0 \end{cases}$$

Hệ trên có vô số nghiệm.

Như vậy, Δ_1 và Δ_2 có vô số điểm chung, tức là Δ_1 trùng với Δ_2.

II. Góc giữa hai đường thẳng



Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tạo thành bốn góc.

- Nếu hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 không vuông góc với nhau thì góc nhọn trong bốn góc tạo thành được gọi là góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.
- Nếu hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 vuông góc với nhau thì ta nói góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 bằng 90°.

Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 được kí hiệu là $\left(\widehat{\Delta_1,\Delta_2}\right)$ hoặc $\left(\Delta_1,\Delta_2\right)$.

Quy ước: Khi Δ_1 song song hoặc trùng với Δ_2, ta nói góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 bằng 0°.

Nhận xét: Góc giữa hai đường thẳng luôn bé hơn hoặc bằng 90°, tức là $\left(\Delta_1,\Delta_2\right)\le 90^\circ$.

Trong mặt phẳng toạ độ, cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1=\left(a_1;b_1\right),\vec{u}_2=\left(a_2;b_2\right)$. Ta có: $\cos\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=\dfrac{\left|a_1a_2+b_1b_2\right|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$.

Nhận xét

- $\Delta_1\perp\Delta_2\Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2=0$.
- Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1,\vec{n}_2$. Ta cũng có:

$\cos\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=\left|\cos\left(\vec{n}_1,\vec{n}_2\right)\right|=\dfrac{\left|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right|\cdot\left|\vec{n}_2\right|}$.

Ví dụ 3. Tính số đo góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 trong mỗi trường hợp sau:

a) $\Delta_1:\begin{cases}x=-1+\sqrt{3}t_1\\ y=1+t_1\end{cases}$ và $\Delta_2:\begin{cases}x=-1+\sqrt{3}t_2\\ y=4-t_2\end{cases}$

b) $\Delta_1:3x+y-10=0$ và $\Delta_2:-2x+y-7=0$.

Giải

a) Δ_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1=(\sqrt{3};1)$.

Δ_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2=(\sqrt{3};-1)$.

Do đó, ta có: $\cos\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=\dfrac{|\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+1\cdot(-1)|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{2}$. Vậy $\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=60^\circ$.

b) Δ_1 có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1=(3;1),\Delta_2$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2=(-2;1)$. Do đó, ta có:

$\cos\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=\left|\cos\left(\vec{n}_1,\vec{n}_2\right)\right|=\dfrac{\left|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right|\cdot\left|\vec{n}_2\right|}=\dfrac{|3\cdot(-2)+1\cdot1|}{\sqrt{3^2+1^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Vậy $\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=45^\circ$.

III. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $ax+by+c=0$ $\left(a^2+b^2>0\right)$ và điểm $M\left(x_0;y_0\right)$. Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ, kí hiệu là $d(M,\Delta)$, được tính bởi công thức sau:

$$d(M,\Delta)=\frac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Chú ý: Nếu $M\in\Delta$ thì $d(M,\Delta)=0$.

Ví dụ 4. Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau:

a) $M(-2;1)$ và $\Delta: 2x-3y+5=0$.

b) $M(1;-3)$ và $\Delta: \begin{cases} x=-2+3t \\ y=2-4t \end{cases}$

Giải

a) Ta có:

$$d(M,\Delta)=\frac{|2\cdot(-2)-3\cdot 1+5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$$

b) Đường thẳng Δ đi qua điểm $N(-2;2)$, có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(4;3)$. Phương trình tổng quát của đường thẳng Δ là

$4(x+2)+3(y-2)=0$ hay $4x+3y+2=0$.

$$\Rightarrow d(M,\Delta)=\frac{|4\cdot 1+3\cdot(-3)+2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{3}{5}.$$

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng $\Delta_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ *và* $\Delta_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ *ta xét số nghiệm của hệ phương trình* $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$.

□*Hệ có một nghiệm:* Δ_1 *cắt* Δ_2.

□*Hệ vô nghiệm:* $\Delta_1 // \Delta_2$.

□*Hệ có vô số nghiệm:* $\Delta_1 \equiv \Delta_2$.

Đặc biệt: Nếu $a_2b_2c_2 \neq 0$ *thì:*

Δ_1 *cắt* $\Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$, $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$, $\Delta_1 = \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$.

Để tìm giao điểm của 2 đường thẳng ta giải hệ phương trình trên.

Tìm hình chiếu của điểm A lên đường thẳng d.

Cách 1: lập phương trình đường thẳng d' qua A vuông góc với d. Hình chiếu H là giao điểm của d và d'.

Cách 2: điểm H thuộc d có tọa độ theo tham số t (hoặc x, hoặc y), cho điều kiện $AH \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{u}=0$ *để tìm t.*

Tìm điểm đối xứng A' của A qua đường thẳng d: tìm hình chiếu H, dùng công thức tọa độ trung điểm để suy ra A'.

Tìm đường thẳng d' đối xứng của đường thẳng d qua điểm I cho trước.

Cách 1: d' song song hoặc trùng với d nên có cùng VTPT. Lấy điểm A thuộc d rồi tìm điểm B đối xứng qua I thì B thuộc d'.

Cách 2: Lấy M(x; y) bất kỳ thuộc d. Gọi M'(x'; y') là điểm đối xứng của M qua I, ta có:

$x+x'=2x_0$, $y+y'=2y_0 \Rightarrow x=2x_0-x'$, $y=2y_0-y'$.

Thế vào phương trình d thành phương trình d'.

Câu 1. Xét vị trí tương đối và tìm giao điểm nếu có của hai đường thẳng:

a) $2x-5y+3=0$ và $5x+2y-3=0$.

b) $x-3y+4=0$ và $0,5x-1,5y+4=0$.

c) $10x+2y-3=0$ và $5x+y-1,5=0$.

Lời giải.

a)Ta có $\frac{2}{5}\neq\frac{-5}{2}$ nên hai đường thẳng cắt nhau.

Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x-5y+3=0 \\ 5x+2y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{9}{29} \\ y=\dfrac{21}{29} \end{cases}$.

Vậy hai đường thẳng cắt nhau tại $M\left(\dfrac{9}{29};\dfrac{21}{29}\right)$.

b)Vì $\dfrac{1}{0,5}=\dfrac{-3}{-1,5}\neq\dfrac{4}{4}$ nên hai đường thẳng song song.

c)Vì $\dfrac{10}{5}=\dfrac{2}{1}=\dfrac{-3}{-1,5}$ nên hai đường thẳng trùng nhau.

Câu 2. Xét vị trí tương đối và tìm giao điểm nếu có của cặp đường thẳng:

a) $d:\begin{cases} x=-1-5t \\ y=2+4t \end{cases}$ và $d':\begin{cases} x=-6+5t' \\ y=2-4t' \end{cases}$.

b) $d:\begin{cases} x=1-4t \\ y=2+2t \end{cases}$ và $d': 2x+4y-10=0$.

c) $d:\begin{cases} x=-2+t \\ y=2+2t \end{cases}$ và $d': \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-3}{-2}$

Lời giải.

Ta chuyển các đường thẳng về dạng tổng quát:
a) $d: 4x+5y-6=0$ và $d': 4x+5y+14=0.$.

Ta có $\dfrac{4}{4}=\dfrac{5}{5}\neq\dfrac{-6}{14}$ nên d, d’ song song.

b) $d: x+2y-5=0$ và $d': 2x+4y-10=0$.

Ta có $\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{-5}{-10}$ nên d, d’ trùng nhau.

c) $d: x+y-2=0$ và $d': 2x+y-3=0$.

Ta có $\dfrac{1}{2}\neq\dfrac{1}{1}$ nên d, d’ cắt nhau.

Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+y-2=0 \\ 2x+y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ vậy I(1; 1).

Câu 3. Biện luận theo tham số m vị trí tương đối của hai đường thẳng:
$mx+y+2=0$ và $x+my+m-1=0$.

Lời giải.

Xét hệ $\begin{cases} mx+y+2=0 \\ x+my+m-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx+y=-2 \\ x+my=-m+1 \end{cases}$.

Ta lập các định thức:

$D=\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix}=m^2-1=(m-1)(m+1)$.

$D_x=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ m & -m+1 \end{vmatrix}=$ m+1.

$D_y=\begin{vmatrix} m & -2 \\ 1 & -m+1 \end{vmatrix}=-m^2+m+2=-(m+1)(m-2)$.

Vậy nếu $m\neq 1, m\neq -1$ thì $D\neq 0$: hai đường thẳng cắt nhau.

Nếu $m=1$ thì $D=0$, $D_x\neq 0$: hai đường thẳng song song.

Nếu $m=-1$ thì $D=D_x=D_y=0$: hai đường thẳng trùng nhau.

Câu 4. Với giá trị nào của tham số m thì hai đường thẳng sau đây vuông góc $\Delta_1: mx+y+8=0$ và $\Delta_2: x-y+m=0$.

Lời giải.

Δ_1 có VTPT là $\overrightarrow{n_1}=(m;1)$.

Δ_2 có VTPT là $\overrightarrow{n_2}=(1;-1)$.

Ta có: $\Delta_1\perp\Delta_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0 \Leftrightarrow m-1=0 \Leftrightarrow m=1$.

Câu 5. Tìm m để ba đường thẳng sau đây đồng quy:

$d_1: 2x+y-4=0$, $d_2: 5x-2y+3=0$ và $d_3: mx+3y-2=0$.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x+y=4 \\ 5x-2y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{9} \\ y=\dfrac{26}{9} \end{cases}$. Vậy $I\left(\dfrac{5}{9};\dfrac{26}{9}\right)$.

Để ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 đồng quy ta phải có I thuộc d_3

$\Leftrightarrow \dfrac{5}{9}m+\dfrac{26}{3}-2=0 \Leftrightarrow m=-12$.

Câu 6. Cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=x_1+at \\ y=y_1+bt \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x=x_2+ct' \\ y=y_2+dt' \end{cases}$ (x_1, x_2, y_1, y_2 là các hằng số). Tìm điều kiện của a, b, c, d để hai đường thẳng d_1 và d_2:

a)Cắt nhau.

b)Song song với nhau.

c)Vuông góc với nhau.

Lời giải.

d_1 đi qua $M_1(x_1;y_1)$ và có VTCP $\vec{u}(a;b)$, d_2 đi qua $M_2(x_2,y_2)$ và có VTCP $\vec{v}(c;d)$.

a) d_1 cắt d_2 $\Leftrightarrow \vec{u}$ và $\vec{v}$ không cùng phương $\Leftrightarrow$ ad – bc ≠ 0.

b) $d_1 \,//\, d_2 \Leftrightarrow \vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương và $M_1(x_1;y_1)\notin d_2 \Leftrightarrow ad-bc=0$ và $d(x_1-x_2)\neq c(y_1-y_2)$.

c) $d_1 \equiv d_2 \Leftrightarrow \vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương và $M_1(x_1;y_1) \in d_2 \Leftrightarrow ad - bc = 0$ và $d(x_1 - x_2) = c(y_1 - y_2)$.

d) $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow ad + bc = 0$.

Câu 7. Cho đường thẳng d đi qua hai điểm phân biệt $M_1(x_1;x_2)$ và $M_2(x_2;y_2)$. Chắng minh rằng điều kiện cần và đủ để đường thẳng $Ax + By + C = 0$ song song với d là $Ax_1 + By_1 + C = Ax_2 + By_2 + C \neq 0$.

Lời giải.

VTCP của đường thẳng d là: $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.
VTPT của đường thẳng $Ax + By + C = 0$ là $\vec{n}(A;B)$.
Vậy để hai đường thẳng song song trước hết cần có $\overrightarrow{M_1M_2}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0$.
$\Leftrightarrow Ax_1 + By_1 = Ax_2 + By_2 \Leftrightarrow Ax_1 + By_1 + C = Ax_2 + By_2 + C$.
Mặt khác, điểm $M_1(x_1;y_1)$ không nằm trên $Ax + By + C = 0$ nên $Ax_1 + By_1 + C \neq 0$ (đpcm).

Câu 8. Cho hai đường thẳng:
$\Delta_1 : (m+1)x - 2y - m - 1 = 0$; $\Delta_2 : x + (m-1)y - m^2 = 0$.
a)Tìm tọa độ giao điểm của Δ_1 và Δ_2.

b)Tìm điều kiện của m để giao điểm đó nằm trên trục Oy.

Lời giải.

a)Ta có:

$$D\begin{vmatrix} m+1 & -2 \\ 1 & m-1 \end{vmatrix} = m^2 + 1.$$

$$D_x = 3m^2 - 1.$$

$$D_y = m^3 + m^2 - m - 1.$$

Vì $D = m^2 + 1 \neq 0$ với mọi m nên Δ_1 và Δ_2 luôn cắt nhau và giao điểm I của chúng có tọa độ:

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{3m^2 - 1}{m^2 + 1} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{m^3 + m^2 - m - 1}{m^2 + 1} \end{cases}$$

b) $I \in Oy \Leftrightarrow \dfrac{3m^2 - 1}{m^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow 3m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 9. Cho đường thẳng $\Delta : 3x - y + 1 = 0$ và điểm $I(1;2)$. Tìm phương trình đường thẳng Δ' đối xứng với Δ qua điểm I.

Lời giải.

Lấy một điểm M nằm trên đường thẳng Δ: $2x - y + 1 = 0$, chẳng hạn M = (0; 1). Điểm M' đối xứng với M qua điểm $I = (1;2)$ có tọa độ $M' = (2;3)$. Đường thẳng Δ' đối xứng với Δ qua I là đường thẳng đi qua điểm M' và song song với Δ, tức là có VTPT $\vec{n} = (2;-1)$. Vậy phương trình của Δ' là: $2(x-2) - (y-3) = 0$ hay $2x - y - 1 = 0$.

Câu 10. Cho hai đường thẳng $d_1: x+y-1=0$ và $d_2: x-3y+3=0$. Hãy lập phương trình của đường thẳng d_3 đối xứng với d_1 qua d_2.

Lời giải.

Giao điểm $M(x;y)$ của d_1 và d_2 có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:
$\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-3y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow M(0;1)$.

Lấy $A(1;0)$ thuộc d_1, phương trình đường thẳng AH vuông góc với d_2 là $3(x-1)+1(y-0)=0$ $\Leftrightarrow 3x+y-3=0$.

Tọa độ của H là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3x+y-3=0 \\ x-3y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{5} \\ y=\dfrac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow H\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{6}{5}\right) \Rightarrow B\left(\dfrac{1}{5};\dfrac{12}{5}\right)$

Phương trình đường thẳng MB hay đường thẳng d_3 là $(x-0)\left(\dfrac{12}{5}-1\right)-(y-1)\left(\dfrac{1}{5}-0\right)=0 \Leftrightarrow 7x-y+1=0$.

Câu 11. Cho đường thẳng Δ: $ax+by+c=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ' đối xứng với đường thẳng Δ:

a)Qua trục hoành.

b)Qua trục tung.

c)Qua gốc tọa độ.

Lời giải.

Xét điểm $M(x_M;y_M)$ tùy ý thuộc Δ.
a)Gọi $N(x_N;y_N)$ là điểm đối xứng với M qua Ox.

Khi đó: $\begin{cases} x_N=x_M \\ y_N=-y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M=x_N \\ y_M=-y_N \end{cases}$.

Do đó $M\in\Delta \Leftrightarrow ax_M+by_M+c=0 \Leftrightarrow ax_N-by_N+c=0 \Leftrightarrow N\in\Delta_1 \Leftrightarrow ax-by+c=0$.

Vậy phương trình đường thẳng đối xứng với Δ qua Ox là $ax-by+c=0$.

b)Gọi $P(x_P;y_P)$ là điểm đối xứng với M qua Oy.

Khi đó ta có $\begin{cases} x_P=-x_M \\ y_P=y_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M=-x_P \\ y_M=y_P \end{cases}$. Do đó $M\in\Delta \Leftrightarrow ax_M+by_M+c=0 \Leftrightarrow$ $ax_P-by_P-c=0 \Leftrightarrow P\in\Delta_2 \Leftrightarrow ax-by-c=0$.

Vậy phương trình đường thẳng đối xứng vơi Δ qua Oy là $ax-by-c=0$.

c)Gọi $Q(x_Q;y_Q)$ là điểm đối xứng với M qua O.

Khi đó ta có $\begin{cases} x_Q = -x_M \\ y_Q = -y_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = -x_Q \\ y_M = -y_Q \end{cases}$. Do đó M $\in$ Δ $\Leftrightarrow$ $ax_M + by_M + c = 0 \Leftrightarrow -ax_Q - by_Q + c = 0 \Leftrightarrow Q \in \Delta_3 \Leftrightarrow ax + by - c = 0$.

Vậy phương trình đường thẳng đối xứng với Δ qua O là $ax + by - c = 0$.

Câu 12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(-1;2)$ và hai đường thẳng $d_1: x+2y+1=0$, $d_2: 2x+y+2=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và cắt d_1 tại A, cắt d_2 tại B sao cho $MA = 2MB$.

Lời giải.

Ta có $\Delta \cap d_1 = A$ suy ra $A \in d_1$ nên $A(-1-2a;a)$, $\Delta \cap d_2 = B$ suy ra $B \in d_2$ nên $B(b;-2-2b)$.
Suy ra $\overrightarrow{MA} = (-2a; a-2)$ và $\overrightarrow{MB} = (b+1; -2b-4)$.

Do Δ qua M nên A, B, M thẳng hàng. Hơn nữa $MA = 2MB$, suy ra $\left[\begin{array}{l} \overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MB} \\ \overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB} \end{array}\right.$

□Với $\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a = 2(b+1) \\ a-2 = 2(-2b-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2}{3} \\ b = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$. Suy ra $A\left(-\dfrac{7}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$ và $B\left(-\dfrac{5}{3}; \dfrac{4}{3}\right)$.

Khi đó đường thẳng Δ qua $M(-1;2)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = \left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}\right) = (1;1)$. Làm véc tơ pháp tuyến nên Δ: $x - y + 3 = 0.$

□Với $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a = -2(b+1) \\ a-2 = -2(-2b-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -3 \end{cases}$. Suy ra $A(3;-2)$ và $B(-3;4)$.

Khi đó đường thẳng Δ qua $M(-1;2)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = (-6;6)$ làm véc tơ pháp tuyến nên $\Delta: x + y - 1 = 0$.

Vậy có hai đường thẳng cần tìm Δ: $x - y + 3 = 0$ hoặc Δ: $x + y - 1 = 0$.

Cách 2. Gọi $\vec{n} = (a;b)$ với $a^2 + b^2 \neq 0$ là véc tơ pháp tuyến của đường thẳng Δ.
Suy ra Δ: $a(x+1) + b(y-2) = 0$ hay $ax + by + a - 2b = 0$.
Do $\Delta \cap d_1 = A$ nên tọa độ điểm A thỏa mãn hệ $\begin{cases} ax + by + a - 2b = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\dfrac{2a-5b}{b-2a}; \dfrac{2b}{b-2a}\right)$.
Do $\Delta \cap d_2 = B$ nên tọa độ điểm B thỏa mãn hệ $\begin{cases} ax + b + a - 2b = 0 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow B\left(\dfrac{4b-a}{a-2b}; \dfrac{-4b}{a-2b}\right)$.
Ta có $\overrightarrow{MA} = \left(\dfrac{-4b}{b-2a}; \dfrac{4a}{b-2a}\right)$ và $\overrightarrow{MB}\left(\dfrac{2b}{a-2b}; \dfrac{-2a}{a-2b}\right)$. Theo giả thiết

$$MA = 2MB \Leftrightarrow \sqrt{\left(\dfrac{-4b}{b-2a}\right)^2 + \left(\dfrac{4a}{b-2a}\right)^2} = 2\sqrt{\left(\dfrac{2b}{a-2b}\right)^2 + \left(\dfrac{-2a}{a-2b}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{\dfrac{b^2+a^2}{(b-2a)^2}} = 4\sqrt{\dfrac{b^2+a^2}{(a-2b)^2}} \Leftrightarrow (b-2a)^2 = (a-2b)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b-2a = a-2b \\ b-2a = -(a-2b) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=0 \\ a+b=0 \end{array}\right.$$

□Với $a - b = 0$, ta chọn $a = 1$ suy ra $b = 1$. Khi đó Δ: $x + y - 1 = 0.$

□Với $a+b=0$, ta chọn $a=1$ suy ra $b=-1$. Khi đó Δ: $x-y+3=0$.

Vậy có hai đường thẳng cần tìm Δ: $x+y-1=0$ hoặc Δ: $x-y+3=0$.

Câu 13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;1)$ và tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4.

Lời giải.

Gọi $a=2b$, Δ ∩ Oy = $B(b;0)$ với Δ: $2x+y-8=0$. Phương trình chính tắc của đường thẳng d: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Theo giả thiết, ta có:

$$\begin{cases} M\in d \\ S_{\Delta OAB}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1 \\ |ab|=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b+a=8 \\ ab=8 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 2b+a=-8 \\ ab=-8 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} 2b+a=8 \\ ab=8 \end{cases}$ suy ra Δ: $X+2y-4=0$.

Với $\begin{cases} 2b+a=-8 \\ ab=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4\mp 4\sqrt{2} \\ b=-2\pm 2\sqrt{2} \end{cases}$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} \Delta:\left(1-\sqrt{2}\right)x+2\left(+\sqrt{2}\right)y-4=0 \\ \Delta:\left(1+\sqrt{2}\right)x+2\left(1-\sqrt{2}\right)y+4=0 \end{array}\right.$

Câu 14. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phuong trình đường Δ thẳng song song với đường thẳng d: $2x-y+2015=0$ và cắt hai trục tọa độ tại M và N sao cho $MN=3\sqrt{5}$.

Lời giải.

Do Δ qua $M(m;0)\in$ Ox và $N(0;n)\in$ Oy (với m, n $\neq$ 0) nên

$\Delta:\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$ hay Δ: $nx+my-mn=0$.

Theo giả thiết, Δ song song với d: $2x-y+2015=0$ nên $\frac{n}{2}=\frac{m}{-1}\Leftrightarrow n=-2m$ (*)

Hơn nữa, $MN=3\sqrt{5}\Leftrightarrow\sqrt{m^2+n^2}=3\sqrt{5}$. Kết hợp với (*), ta được $\sqrt{5m^2}=3\sqrt{5}\Leftrightarrow m=\pm 3$.

Với $m=3$ suy ra $n=-6$. Ta được Δ: $2x-y-6=0$.

Với $m=-3$ suy ra $n=6$. Ta được Δ: $6x-3y+18=0$.

Câu 15. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $M(3;2)$ và cắt tia Ox tại A, cắt tia Oy tại B sao cho $OA+OB=12$.

Lời giải.

Gọi $\vec{n}=(a;b)$ với $a^2+b^2\neq 0$ là véc tơ pháp tuyến của đường thẳng Δ. Suy ra

Δ: $a(x-3)+b(y-2)=0$ hay $ax+by-3a-2b=0$.

Ta có Δ∩Ox = A nên $A\left(\frac{3a+2b}{a};0\right)$ và Δ∩Oy = B nên $B\left(0;\frac{3a+2b}{b}\right)$.

Theo giả thiết, ta có:

$$OA+OB=12\Leftrightarrow\left|\frac{3a+2b}{a}\right|+\left|\frac{3a+2b}{b}\right|=12$$

$\Leftrightarrow \dfrac{3a+2b}{a}+\dfrac{3a+2b}{b}=12 \Leftrightarrow 3a^2-7ba+2b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2b \\ 3a=b \end{array}\right.$

□Với a = 2b, ta chọn b = 1 suy ra a = 2. Ta được Δ: 2x + y – 8 = 0.

□Với 3a = b, ta chọn a = 1 suy ra b = 3. Ta được Δ: x + 3y – 9 = 0.

Cách 2. Do Δ đi qua A(a; 0) ∈ Ox và B(0; b) ∈ Oy (với a, b > 0)

nên $\Delta: \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ hay Δ: bx + ay – ab = 0.

Theo giả thiết, ta có:

OA + OB = 12 ⇔ a + b = 12 ⇔ b = 12 – a. (*)

Hơn nữa Δ đi qua M(3; 2) nên 3b + 2a – ab = 0. Kết hợp với (*), ta được

3(12 – a) + 2a – a(12 – a) = 0 ⇔ $a^2-13a+36=0$ ⇔ a = 9 hoặc a = 4.

□Với a = 4, suy ra b = 12 – a = 8. Ta được Δ: 2x + y – 8 = 0.

□Với a = 9, suy ra b = 12 – a = 3. Ta được Δ: x + 3y – 9 = 0.

Dạng 2. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Để tính khoảng cách từ điểm $M(x_0;y_0)$ đến đường thẳng Δ: ax + by + c = 0 ta dùng công thức:

$$d\left(M_0,\Delta=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

Câu 16. Cho đường thẳng Δ: $5x+3y-5=0$.

a)Tính khoảng cách từ điểm $A(-1;3)$ đến đường thẳng Δ.

b)Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng song song Δ và Δ’: $5x+3y+8=0$.

Lời giải.

a)Áp dụng công thức tính khoảng cách ta có:

$$d(A,\Delta)=\dfrac{|5.(-1)+3.3-5|}{\sqrt{5^2+3^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{34}}$$

b)Do M(1; 0) ∈ Δ nên ta có $d(\Delta,\Delta')=d(M,\Delta')=\dfrac{|5.1+3.0+8|}{\sqrt{5^2+3^2}}=\dfrac{13}{\sqrt{34}}$

Câu 17. Cho ba điểm $A(2;0), B(3;4)$ và $P(1;1)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua P đồng thời cách đều A và B.

Lời giải.

Đường thẳng Δ đi qua P có dạng $a(x-1)+b(y-1)=0$ $\left(a^2+b^2\neq 0\right)$ hay $ax+by-a-b=0$. Δ cách đều A và B khi và chỉ khi:

$d(A;\Delta)=d(B;\Delta) \Leftrightarrow \dfrac{|a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|2a+3b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=2a+3b \\ b-a=2a+3b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-4b \\ 3a=-2b \end{array}\right.$.

□Nếu a = –4b, chọn a = 4, b = –1 suy ra Δ: 4x – y – 3 = 0.

□Nếu 3a = –2b, chọn a = 2, b = –3 suy ra Δ: 2x – 3y + 1 = 0.

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn bài toán là $\Delta_1: 4x-y-3=0$ và $\Delta_2: 2x-3y+1=0$.

Câu 18. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng Δ cách điểm $A(1;1)$ một hoảng bằng 2 vá cách điểm $B(2;3)$ một khoảng bằng 4.

Lời giải.

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm có dạng Δ: $ax+by+c=0$ với $a^2+b^2\neq 0$.

Vì Δ cách điểm $A(1;1)$ một khoảng bằng 2 nên

$$d(A,\Delta)=2\Leftrightarrow\frac{|a+b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\Leftrightarrow|a+b+c|=2\sqrt{a^2+b^2}.\ (1)$$

Vì Δ cách điểm $B(2;3)$ một khoảng bằng 4 nên

$$d(B,\Delta)=4\Leftrightarrow\frac{|2a+3b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=4\Leftrightarrow|2a+3b+c|=4\sqrt{a^2+b^2}\ (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $|2a+3b+c|=2|a+b+c|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=b\\3c=-4a-5b\end{array}\right.$

□Trường hợp $c=b$. Thay vào (1), ta được:

$$|a+2b|=2\sqrt{a^2+b^2}\Leftrightarrow 3a^2-4ab=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\3a-4b=0\end{array}\right..$$

+ Với $a=0$, ta chọn $b=1$ suy ra $c=b=1$. Khi đó Δ: $y+1=0$.

+ Với $3a-4b=0$, ta chọn $a=4$ suy ra $b=3$ và $c=b=3$. Khi đó Δ: $4x+3y+3=0$.

□Trường hợp $3c=-4a-5b$. Thay vào (1), ta được $|a+2b|=6\sqrt{a^2+b^2}\Leftrightarrow 35a^2-4ba+32b^2=0$. Ta coi đây như là phương trình bậc hai theo a và có $\Delta' = (2b)^2-35.32b^2<0$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy có hai đường thẳng cần tìm là Δ: $y+1=0$ hoặc Δ: $4x+3y+3=0$.

Câu 19. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-2;4), B(3;5)$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ đi qua điểm $I(0;1)$ sao cho khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ gấp hai lần khoảng cách từ B đến Δ.

Lời giải

Gọi $\vec{n}=(a;b)$ với $a^2+b^2\neq 0$ là véctơ pháp tuyến của đường thẳng Δ. Suy ra:

$\Delta: a(x-0)+b(y-1)=0$ hay $ax+by-b=0.$

Vì khoảng cách từ A đến đường thẳng Δ gấp hai lần khoảng cách từ B đến Δ nên:

$$d(A;\Delta)=2d(B;\Delta)\Leftrightarrow\frac{|-2a+4b-b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2.\frac{|3a+5b-b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow|-2a+3b|=2|3a+4b|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}8a+5b=0\\3a+11b=0\end{array}\right.$$

Với $8a+5b=0$, ta chọn $a=5$ suy ra $b=-8.$ Khi đó $\Delta: 5x-8y+8=0.$

Với $3a+11b=0$, ta chọn $a=11$ suy ra $b=-3.$ Khi đó $\Delta: 11x-3y+3=0.$

Vậy có hai đường thẳng cần tìm $\Delta: 5x-8y+8=0$ hoặc $\Delta: 11x-3y+3=0.$

Câu 20. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng Δ song song với đường thẳng $d: 3x-4y+1=0$ và cách d một khoảng bằng 1.

Lời giải

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm. Do Δ song song với đường thẳng d nên có dạng $\Delta: 3x-4y+c=0$.

Vì Δ cách d một khoảng bằng 1 nên:

$$d(d;\Delta)=1 \Leftrightarrow d(A;\Delta)=1 \Leftrightarrow \frac{|3-4+c|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1 \Leftrightarrow |c-1|=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=6 \\ c=-4 \end{array}\right.$$

Với $c=6$, ta được $\Delta: 3x-4y+6=0$.

Với $c=-4$, ta được $\Delta: 3x-4y-4=0$.

Vậy có hai đường thẳng cần tìm $\Delta: 3x-4y+6=0$ hoặc $\Delta: 3x-4y-4=0$.

Câu 21. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x-\sqrt{3}y-2=0$ và hai điểm phân biệt $A(1;\sqrt{3})$, B không thuộc d. Viết phương trình đường thẳng AB, biết rằng khoảng cách từ B đến giao điểm của đường thẳng AB với d bằng hai lần khoảng cách từ điểm B đến d.

Lời giải

Gọi α là góc giữa đường thẳng (AB) và đường thẳng d. Đường thẳng d có véctơ pháp tuyến $\vec{n}_d=(1;-\sqrt{3})$.

Gọi C là giao điểm của đường thẳng (AB) với d; H là hình chiếu vuông góc của B trên d.

Theo giả thiết bài toán:

$BC=2BH$ nên $\sin\alpha=\dfrac{BH}{BC}=\dfrac{1}{2}$, suy ra $\alpha=60^0 \Rightarrow \cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Gọi $\vec{n}=(a;b)$ với $a^2+b^2\neq 0$ là véctơ pháp tuyến của đường thẳng (AB). Ta có:

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{|\vec{n}_d.\vec{n}|}{|\vec{n}_d|.|\vec{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{|a-\sqrt{3}b|}{2\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow |a-\sqrt{3}b|=\sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow a^2+\sqrt{3}ab=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a+\sqrt{3}b=0. \end{array}\right.$$

Với $a=0$, ta chọn $b=1$. Khi đó AB có phương trình $y-\sqrt{3}=0$.

Với $a+\sqrt{3}b=0$, ta chọn $a=\sqrt{3}$ suy ra $b=-1$. Khi đó AB có phương trình $\sqrt{3}x-y=0$.

Vậy có hai đường thẳng cần tìm: $y-\sqrt{3}=0; \sqrt{3}x-y=0$.

Dạng 3: Góc giữa hai đường thẳng

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1;\Delta_2$ có phương trình $\Delta_1: a_1x+b_1y+c_1=0,\left(a_1^2+b_1^2\neq 0\right)$, $\Delta_2: a_2x+b_2y+c_2=0,\left(a_2^2+b_2^2\neq 0\right)$ được xác định bởi công thức $\cos(\Delta_1;\Delta_2)=\dfrac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$.

Để xác định góc giữa hai đường thẳng ta chỉ cần biết véctơ chỉ phương (hoặc véctơ pháp tuyến) của chúng: $\cos(\Delta_1;\Delta_2)=|\cos(\vec{u}_1;\vec{u}_2)|=|\cos(\vec{n}_1;\vec{n}_2)|$.

Câu 22. Xác định góc giữa hai đường thẳng sau: $\Delta_1: 3x-2y+1=0$ và $\Delta_2: \begin{cases} x=t \\ y=7-5t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

Lời giải

Ta có $\vec{n}_1(3;-2), \vec{n}_2(5;1)$ lần lượt là véctơ pháp tuyến của các đường thẳng Δ_1, Δ_2, suy ra:

$\cos(\Delta_1;\Delta_2) = \dfrac{|3.5-2.1|}{\sqrt{13}.\sqrt{26}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, do đó $(\Delta_1;\Delta_2) = 45^0$.

Câu 23. Tìm m để góc hợp bởi hai đường thẳng $\Delta_1 : \sqrt{3}x - y + 7 = 0$ và $\Delta_2 : mx + y + 1 = 0$ một góc bằng 30^0.

Lời giải

Ta có $\cos(\Delta_1;\Delta_2) = \dfrac{|m\sqrt{3}-1|}{\sqrt{3+1}.\sqrt{m^2+1}}$.

Theo giải thiết, góc hợp bởi hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 bằng 30^0 nên:

$\cos 30^0 = \dfrac{|m\sqrt{3}-1|}{2\sqrt{m^2+1}} \Leftrightarrow \sqrt{3(m^2+1)} = |m\sqrt{3}-1|$

$\Leftrightarrow 3(m^2+1) = (m\sqrt{3}-1)^2 \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy $m = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ là giá trị cần tìm.

Câu 24. Cho đường thẳng $d : 3x - 2y + 1 = 0$ và $M(1;2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và tạo với d một góc 45^0.

Lời giải

Đường thẳng Δ đi qua M có dạng $a(x-1) + b(y-2) = 0, a^2 + b^2 \neq 0$ hay $ax + by - a - 2b = 0$.

Theo bài ra Δ tạo với d một góc 45^0 nên:

$\cos 45^0 = \dfrac{|3x+(-2b)|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}.\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{|3a-2b|}{\sqrt{13}.\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \sqrt{26(a^2+b^2)} = 2|3a-2b|$

$\Leftrightarrow 5a^2 - 24ab - 5b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 5b \\ 5a = -b \end{array}\right.$.

Nếu $a = 5b$, chọn $a = 5; b = 1$ ta được $\Delta : 5x + y - 7 = 0$.

Nếu $5a = -b$, chọn $a = 1; b = -5$ ta được $\Delta : \mathrm{x} - 5\mathrm{y} + 9 = 0$.

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn $x - 5y + 9 = 0; 5x + y - 7 = 0$.

Câu 25. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d : 2x - y - 2 = 0$ và điểm $I(1;1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ cách điểm I một khoảng bằng $\sqrt{10}$ và tạo với đường thẳng d một góc bằng 45^0.

Lời giải

Giả sử đường thẳng Δ có phương trình: $ax + by + c = 0, a^2 + b^2 \neq 0$.

Đường thẳng Δ có véctơ pháp tuyến $\vec{n}_\Delta = (a;b)$.

Đường thẳng d có véctơ pháp tuyến $\vec{n}_d = (2;-1)$.

Vì Δ tạo với đường thẳng d một góc 45^0 nên, $\cos(\Delta;d) = |\cos(\vec{n}_\Delta;\vec{n}_d)| \Leftrightarrow \dfrac{|2a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3b \\ b=-3a. \end{array}\right.$

Với $a=3b$, chọn $b=1, a=3$, ta được $\Delta: 3x+y+c=0$.

Mặt khác $d(I;\Delta) = \sqrt{10} \Leftrightarrow \dfrac{|4+c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=6 \\ c=-14. \end{array}\right.$

Với $b=-3a$, tương tự ta có hai đường thẳng $\Delta: x-3y-8; x-3y+12$.

Vậy các đường thẳng cầm tìm là: $\Delta: 3x+y+6=0; 3x+y-14=0; x-3y-8; x-3y+12$

Câu 26. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(0;1)$ và hai đường thẳng $d_1: x-7y+17=0$, $d_2: x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M và tạo với d_1, d_2 một tam giác cân tại giao điểm của d_1 và d_2.

Lời giải

Phương trình đường phân giác góc tạo bởi d_1 và d_2 là :

$$\frac{|x-7y+17|}{\sqrt{1^2+(-7)^2}} = \frac{|x+y-5|}{\sqrt{1^2+1^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta_1: x+3y-13=0 \\ \Delta_2: 3x-y-4=0. \end{array}\right.$$

Đường thẳng Δ cần tìm đi qua $M(0;1)$ và song song với Δ_1 hoặc Δ_2

-Trường hợp Δ đi qua $M(0;1)$ và song song với Δ_1 thì Δ có phương trình : $x+3y-3=0$.

-Trường hợp Δ đi qua $M(0;1)$ và song song với Δ_2 thì Δ có phương trình : $3x-y+1=0$.

Vậy có hai đường thẳng cần tìm : $x+3y-3=0; 3x-y+1=0$.

Dạng 4. Tìm điểm thỏa mãn điều kiện cho trước.

Để xác định tọa độ điểm thuộc đường thẳng ta dựa vào nhận xét sau :

Điểm A thuộc đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ (hoặc $\Delta: \dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b}$) có tọa độ dạng $A(x_0+at; y_0+bt)$.

Câu 27. Cho đường thẳng $\Delta: 4x-3y+5=0$.

a. Tìm tọa độ điểm A thuộc đường thẳng Δ và cách gốc tọa độ một khoảng bằng 4.

b. Tìm điểm B thuộc đường thẳng Δ và cách đều hai điểm $E(5;0), F(3;-2)$.

Lời giải

a. Dễ thấy $M(0;-3)$ thuộc đường thẳng Δ và $\vec{u}(4;3)$ là một véctơ chỉ phương của Δ nên có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 4t \\ y = -3+4t. \end{cases}$

Điểm A thuộc Δ nên tọa độ của điểm A có dạng $A(4t;-3+3t)$ suy ra :

$$OA = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(4t)^2+(-3+3t)^2} = 4 \Leftrightarrow 25t^2-18t-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{-7}{25}. \end{array}\right.$$

Vậy ta tìm được hai điểm là $A_1(4;0)$ và $A_2\left(\dfrac{-28}{25};\dfrac{-96}{25}\right)$.

b. Vì $B \in \Delta$ nên $B(4t;-3+4t)$. Điểm B cách đều hai điểm $E(5;0), F(3;-2)$ suy ra

$EB^2 = FB^2 \Leftrightarrow (4t-5)^2 + (3t-3)^2 = (4t-3)^2 + (3t-1)^2 \Leftrightarrow t = \frac{6}{7}$.

Suy ra $B\left(\frac{24}{7}; -\frac{3}{7}\right)$.

Câu 28. Cho đường thẳng $d: x - 2y + 4 = 0$ và điểm $A(4;1)$.

a. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A lên d.
b. Tìm tọa độ điểm A' đối xứng của A qua d.

Lời giải

a. Phương trình d' đi qua A, vuông góc với d có dạng $2x + y + C = 0$.

d' qua $A(4;1)$ nên $8 + 1 + C = 0 \Rightarrow C = -9$.

Do đó $d': 2x + y - 9 = 0$.

Hình chiếu H là giao điểm của d và d' nên có tọa độ thỏa mãn hệ $\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 2x + y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{14}{5} \\ y = \frac{17}{5} \end{cases}$.

Vậy $H\left(\frac{14}{5}; \frac{17}{5}\right)$.

b. A' đối xứng với A qua d khi H là trung điểm của AA' $\Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_{A'} = 2x_H \\ y_A + y_{A'} = 2y_H \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = \frac{8}{5} \\ y_{A'} = \frac{29}{5} \end{cases}$.

Vậy $A'\left(\frac{8}{5}; \frac{29}{5}\right)$.

Câu 29. Với điều kiện nào thì các điểm $M(x_1, y_1)$ và $N(x_2; y_2)$ đối xứng nhau qua đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$?

Lời giải

Hai điểm M và N đối xứng với nhau qua Δ khi và chỉ khi có hai điều kiện :
- Trung điểm I của MN nằm trên Δ.
- Véctơ $\overrightarrow{MN}$ là véctơ pháp tuyến của Δ.

Từ đó ta được các điều kiện sau : $\begin{cases} a\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + b\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) + c = 0 \\ b(x_2 - x_1) - a(y_2 - y_1) = 0. \end{cases}$

Câu 30. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(0;2)$ và đường thẳng $d: x - 2y + 2 = 0$. Tìm trên đường thẳng d hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông ở B và thỏa mãn $AB = 2BC$.

Lời giải

Do $B, C \in d$ nên có tọa độ dạng $B(-2 + 2b; b), C(-2 + 2c; c)$ với $b \neq c$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}(-2 + 2b; b - 2), \overrightarrow{BC}(2c - 2b; c - b)$.

Tam giác ABC vuông ở B nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow (c - b)(5b - 6) = 0 \Leftrightarrow b = \frac{6}{5}$ (do $b \neq c$). Suy ra $B\left(\frac{2}{5}; \frac{6}{5}\right)$.

Tam giác ABC thỏa mãn

$$AB = 2BC \Leftrightarrow \sqrt{\frac{4}{25}+\frac{16}{25}} = 2\sqrt{\left(2c-\frac{12}{5}\right)^2+\left(c-\frac{6}{5}\right)^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=1 \\ c=\frac{7}{5}. \end{array}\right.$$

Câu 31. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;1), B(4;-3)$ và dr $d: x-2y-1=0$. Tìm tọa độ điểm C thuộc d sao cho khoảng cách từ C đến đường thẳng AB bằng 6.

Lời giải

Gọi $C(1+2c;c)\in(d)$.

Phương trình đường thẳng (AB) là : $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-4} \Leftrightarrow 4x+3y-7=0.$

Theo giả thiết $d(C;AB)=6 \Leftrightarrow \frac{|4(1+c)+3c-7|}{\sqrt{4^2+3^2}}=6 \Leftrightarrow |11c-3|=30 \Leftrightarrow c=3$ hoặc $c=-\frac{27}{11}$.

Với $c=3$ ta được $C(7;3)$

Với $c=\frac{-27}{11}$ ta được $C\left(\frac{-43}{11};\frac{-27}{11}\right)$.

Câu 32. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x-3y-6=0$ và điểm $N(3;4)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc d sao cho tam giác OMN có diện tích vằng $\frac{15}{2}$ (với O là gốc tọa độ)

Lời giải

$\overrightarrow{ON}=(3;4) \Rightarrow ON=5.$

Đường thẳng ON có phương trình : $4x-3y=0.$

Gọi $M(3m+6;m)\in(d)$.

Theo giả thiết ta có : $S_{OMN}=\frac{1}{2}ON.d(M;ON) \Leftrightarrow d(M;ON)=\frac{2S_{OMN}}{ON}=3$

Hay $\frac{|4(3m+6)-3m|}{5}=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=\frac{-13}{3}. \end{array}\right.$

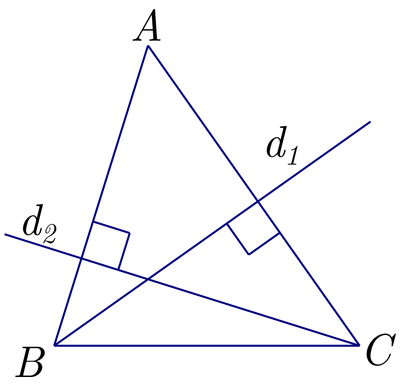
Với $m=-1$ suy ra $M(3;-1)$.

Với $m=-\frac{13}{3}$ suy ra $M\left(-7;-\frac{13}{3}\right)$.

Dạng 5. Các yếu tố về tam giác.

Câu 33. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có tọa độ đỉnh $A(1;0)$ và hai đường thẳng chứa các đường cao kẻ từ B, C có phương trình lần lượt là : $d_1: x-2y+1=0, d_2: 3x+y-1=0$. Tìm tọa độ đỉnh B và C.

Lời giải



Đường thẳng AC đi qua $A(1;0)$ và vuông góc với d_1 nên AC có phương trình $2x+y-2=0$.

Tương tự, AB có phương trình $x-3y-1=0$.

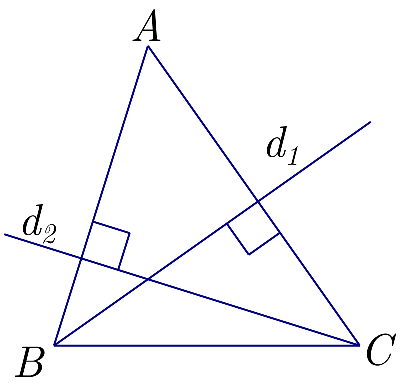
Do $B=d_1\cap AB$ nên tọa độ điểm B là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x-2y+1=0\\x-3y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5\\y=-2\end{cases}$, ta được $B(-5;-2)$

Tương tự $C=d_2\cap AC$, ta được $C(-1;4)$.

Vậy $B(-5;-2),C(-1;4)$.

Câu 34. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình cạnh $BC: x+y-9=0$, đường cao qua đỉnh B và C lần lượt có phương trình $d_1: x+2y-13=0; d_2: 7x+5y-49=0$. Tìm tọa độ đỉnh A.

Lời giải



Do $B=d_1\cap BC$ nên tọa độ của B là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x+2y-13=0\\x+y-9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=4\end{cases}$, ta được $B(5;4)$.

Do $C=d_2\cap BC$ nên $C(2;7)$.

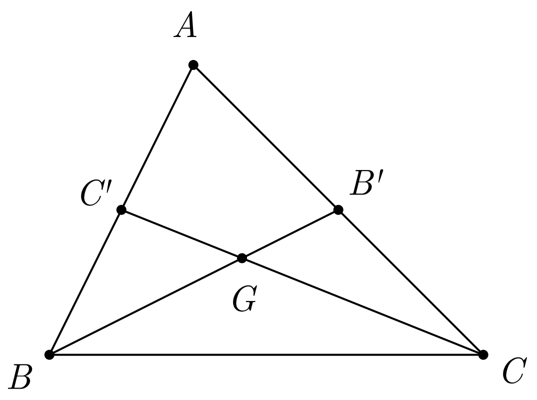
Cạnh AC đi qua C và vuông góc với d_1 nên AC có phương trình $2x-y+3=0$.

Cạnh AB đi qua B và vuông góc với d_2 nên AB có phương trình $5x-7y+3=0$.

Do $A=AB\cap AC$ nên $A(-2;-1)$.

Câu 35. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;3)$ và hai đường trung tuyến là $BB': x-2y+1=0, CC': y-1=0$. Xác định tọa độ đỉnh B và C.

Lời giải



Do $B \in BB'$ nên tọa độ của B có dạng $(2b-1;b)$.

Vì C' là trung điểm của AB nên $C'\left(b;\dfrac{b+3}{2}\right)$.

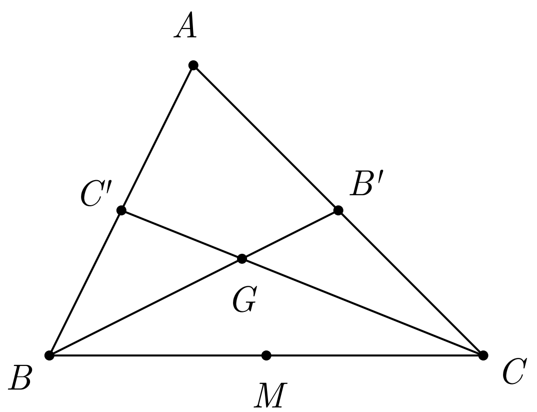
Mặt khác, $C' \in CC'$ nên ta được: $\dfrac{b+3}{2}-1=0 \Leftrightarrow b=-1$ hay $B(-3;-1)$.

Tương tự, B' là trung điểm của AC $B'\left(\dfrac{c+1}{2};2\right)$

Mặt khác $B' \in BB'$ nên $\dfrac{c+1}{2}-2.2+1=0 \Leftrightarrow c=5$ hay $C(5;1)$.

Câu 36. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ với Oxy, cho tam giác ABC biết phương trình cạnh $BC: x-2y=5=0$, phương trình đường trung tuyến $BB': y-2=0$ và phương trình đường trung tuyến $CC': 2x-y-2=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác.

Lời giải



Do $B = BB' \cap BC$ nên tọa độ điểm B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y-2=0 \\ x-2y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$, ta được $B(-1;2)$.

Tượng tự, $C = CC' \cap BC$, ta được $C(3;4)$.

Gọi G là giao điểm của BB' và CC', khi đó $G(2;2)$.

Gọi M là trung điểm của BC, suy ra $M(3;1)$ và $\overrightarrow{GM}=(-1;1)$.

Do G là trọng tâm tam giác ABC nên $A(x;y)$ thỏa mãn:

$\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x=3.(-1) \\ 3-y=3.1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}$, ta được $A(4;0)$.

Câu 37. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;5), B(-4;-5)$ và $C(4;-1)$. Viết phương trình đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc A.

Lời giải

Đường thẳng AC đi qua hai điểm A, C nên AC có phương trình $2x+y-7=0$.

Tương tự $AB: 2x-y+3=0$

Phương trình đường phân giác góc A là: $\frac{|2x+y-7|}{\sqrt{4+1}}=\frac{|2x-y+3|}{\sqrt{4+1}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y-5=0 \\ x-1=0 \end{array}\right.$.

Xét phân giác $d_1: y-5=0$. Ta có

$P(B;d_1)=-10, P(C;d_1)=-6$ nên suy ra B và C nằm cùng phía đối với d_1, suy ra d_1 là phân giác ngoài.

Từ đó suy ra $d_2: x-1=0$ là phân giác trong góc A.

Câu 38. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;-4)$ và hai đường phân giác trong của góc B và C có phương trình lần lượt là $d_1: x+y-2=0, d_2: x-3y-6=0$. Tìm tọa độ điểm B và C.

Lời giải

Gọi A_1 là điểm đối xứng của A qua phân giác d_1.

Suy ra tọa độ điểm $A_1(x;y)$ là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} \frac{x+2}{2}-3.\frac{y-4}{2}-6=0 \\ 3(x-2)+1.(y+4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{5} \\ y=\frac{4}{5} \end{cases}$. Ta được $A_1\left(\frac{2}{5};\frac{4}{5}\right)$.

Gọi A_2 là điểm đối xứng của A qua phân giác d_2, tương tự $A_2(6;0)$.

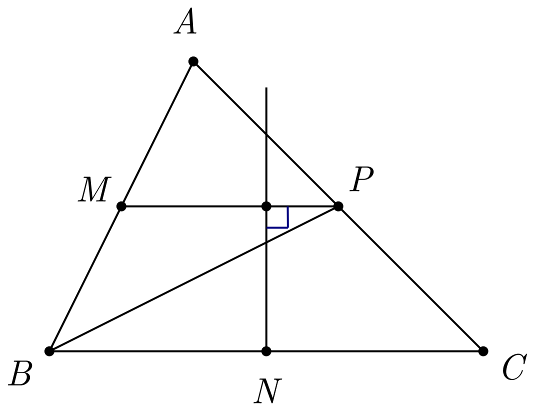
Đường thẳng BC đi qua hai điểm A_1, A_2 nên BC có phương trình $x+7y-6=0$.

$B=d_1 \cap BC$ nên tọa độ của B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+y-2=0 \\ x+7y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{4}{3} \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$, ta được $B\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Tương tự $C=d_2 \cap BC$ nên ta được $C(6;0)$.

Câu 39. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC biết trung điểm các cạnh AB, BC và CA lần lượt là : $M(-1;1), N(0;-3)$ và $P(3;-1)$. Viết phương trình đường trung trực của đoạn BC.

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{MP}=(4;-2)$.

Vì M,P là trung diểm của AB,AC nên MP là đường trung bình của tam giác ABC, suy ra $MP//BC$

Do đó trung trực đoạn BC qua $N(0;-3)$ và nhận $\overrightarrow{MP}$ làm véctơ pháp tuyến nên có phương trình: $4(x-0)-3(y+3)=0 \Leftrightarrow 2x-y-3=0$

Câu 40. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-2;4),B(4;1)$ và $C(-2;-1)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác.

Lời giải

Gọi $H(x;y)$ là trực tâm của tam giác ABC.

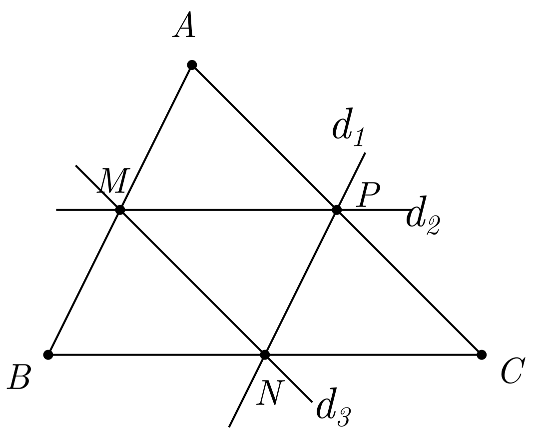
Ta có $\overrightarrow{AH}=(x+2;y-4),\overrightarrow{BC}=(-6;-2),\overrightarrow{BH}=(x-4;y-1),\overrightarrow{AC}=(0;-5)$.

Do H là trực tâm nên ta được $\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2).(-6)+(y-4).(-2)=0\\ (x-4).0+(y-1).(-5)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\ y=1\end{cases}$.

Vậy $H(-1;1)$.

Câu 41. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có các đường trung bình nằm trên các đường thẳng có phương trình $d_1:2x-y+1=0,d_2:x+4y-13=0,d_3:x-3y-1=0$. Viết phương trình cạnh AB.

Lời giải



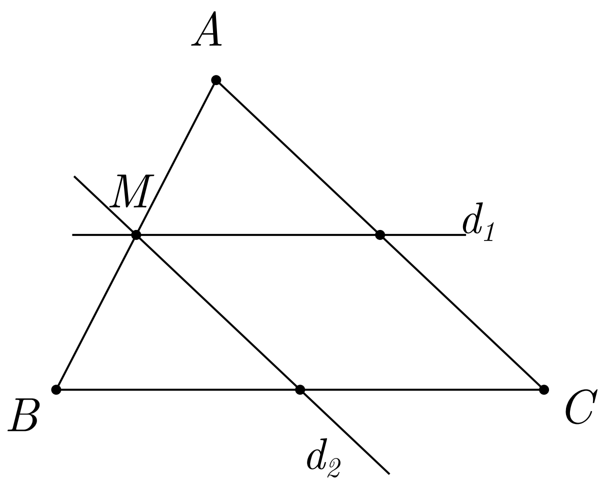
Giả sử d_1 song song với AB, d_2 song song với BC, d_3 song song với CA.

Gọi M là trung điểm của AB. Khi đó $M = d_2 \cap d_3$ nên tọa độ $M(x;y)$ thỏa mãn hệ $\begin{cases} x+4y-13=0 \\ x-2y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$, ta được $M(5;2)$.

Đường thẳng AB đi qua M và song song với d_1 nên có phương trình $2x-y-8=0$.

Câu 42. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có hai đường trung bình kẻ từ trung điểm M của AB nằm trên các đường thẳng có phương trình $d_1: x-4y+7=0, d_2: 3x-2y-9=0$ và tọa độ điểm $B(7;1)$. Tìm tọa độ điểm C.

Lời giải



TH1: Giả sử d_1 song song với BC, d_2 song song với AC.

Tọa độ $M(x;y)$ thỏa mãn hệ: $\begin{cases} x-4y+7=0 \\ 3x-2y-9=0 \end{cases}$, ta được $M(5;3)$.

Đường thẳng AC đi qua A và song song với d_2 nên có phương trình: $3x-2y+1=0$.

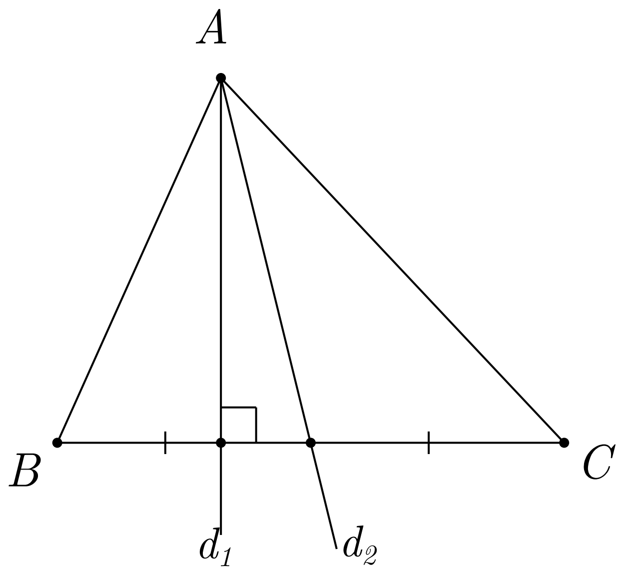
Đường thẳng BC đi qua B và song song với d_1 nên có phương trình: $x-4y-3=0$.

Ta có $C = AC \cap BC$ nên tọa độ điểm $C(x;y)$ thỏa mãn hệ $\begin{cases} 3x-2y+1=0 \\ x-4y-3=0 \end{cases}$, ta được $C(-1;-1)$

TH2: Giả sử d_1 song song với AC, d_2 song song với BC. Tương tự TH1 ta được $C(11;7)$.

Câu 43. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $C(4;-1)$, đường cao và trung tuyến kẻ từ đỉnh A có phương trình lần lượt là $d_1: 2x-3y+12=0, d_2: 2x+3y=0$. Tìm tọa độ điểm B.

Lời giải



Ta có $A=d_1\cap d_2$ nên tọa độ điểm $A(x;y)$ thỏa mãn hệ: $\begin{cases}2x-3y+12=0\\2x+3y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\y=2\end{cases}$, ta được $A(-3;2)$

Đường thẳng BC đi qua C và vuông góc với d_1 nên có phương trình $3x+2y-10=0$.

Gọi M là trung điểm BC, suy ra $M=BC\cap d_2$ nên tọa độ điểm M là $(6;-4)$.

Suy ra $B(8;-7)$.

Câu 44. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;1)$, đường cao qua đỉnh B và đường trung tuyến qua đỉnh C lần lượt có phương trình $d_1: x-3y-7=0, d_2: x+y+1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B và C.

Lời giải

Điểm $B\in d_1$ nên tọa độ của B có dạng $(3b+7;b)$.

Gọi M là trung điểm AB, suy ra $M\left(\frac{3b+9}{2};\frac{b+1}{2}\right)$.

Mặt khác, $M\in d_2$ nên $\frac{3b+9}{2}+\frac{b+1}{2}+1=0\Leftrightarrow b=-3$.

Suy ra $B(-2;-3)$.

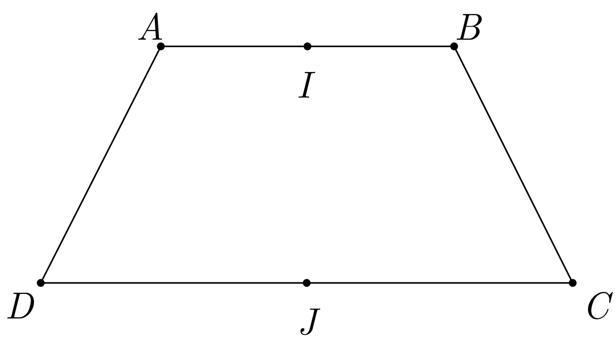
Đường thẳng AC đi qua A và vuông góc d_1 nên có phương trình $3x+y-7=0$.

Ta có $C=AC\cap d_2$ nên tọa độ điểm C là nghiệm của hệ $\begin{cases}3x+y-7=0\\x+y+1=0\end{cases}$, ta được $C(4;-5)$.

Dạng 6. Các yếu tố về tứ giác.

Câu 45. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(10;5)$, $B(15;-5)$, $D(-20;0)$ là các đỉnh của hình thang cân $ABCD$ trong đó AB song song với CD. Tìm tọa độ điểm C.

Lời giải



Đường thẳng CD đi qua $D(-20;0)$ và nhận $\overrightarrow{AB}=(5;-10)$ làm véctơ chỉ phương nên có phương trình $2x+y+40=0$.

Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AB và CD

Ta có $I\left(\frac{25}{2};0\right)$ và $IJ \perp CD$.

Phương trình đường thẳng IJ là $2x-4y-25=0$.

Mà $J=IJ\cap CD$ nên tọa độ điểm J là nghiệm của hệ: $\begin{cases}2x+y+40=0\\2x-4y-25=0\end{cases}$, ta được $J\left(\frac{-27}{2};-13\right)$.

Theo tính chất hình thang cân thì J là trung điểm của CD, suy ra $C(-7;-26)$.

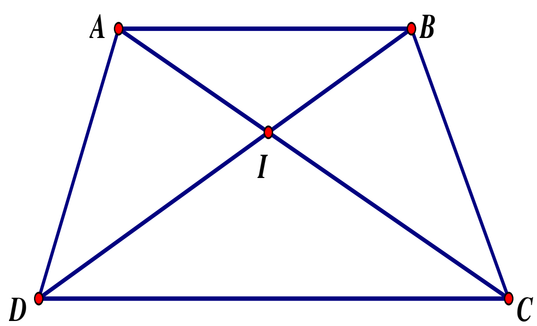
Câu 46. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang cân $ABCD$ với AB song song CD và $AB<CD$. Biết các đỉnh $A(0;2), D(-2;2)$, giao điểm I của hai đường chéo AC và BD nằm trên các đường thẳng $d: x+y-4=0$ sao cho $\widehat{AID}=45^0$. Tìm tọa độ điểm B và C.

Lời giải

Do $I\in d$ nên $I(t;4-t)$ Ta có $AD=2\sqrt{5}$, $IA=\sqrt{2t^2-4t+4}$, $ID=\sqrt{2t^2-8t+40}$.

Áp dụng định lý hàm số cô-sin cho tam giác AID ta được

$$\cos\widehat{AID}=\frac{IA^2+ID^2-AD^2}{2IA.ID}$$



$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{t^2-3t+6}{\sqrt{t^2-4t+20}.\sqrt{t^2-2t+2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=4 \end{array}\right.$.

Với $t=2$ ta được $I(2;2)$ và $IA = 2.ID = 4\sqrt{2}$.

Do đó $\overrightarrow{ID} = -\frac{ID}{IB}.\overrightarrow{IB} = -2\sqrt{2}.\overrightarrow{IB}$ suy ra $B\left(2+\sqrt{2};2+\sqrt{2}\right)$ và $C\left(2+4\sqrt{2};2+4\sqrt{2}\right)$.

Tương tự với $t=4$ ta tìm được $B\left(4+3\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ và $C\left(4+4\sqrt{2};-2\sqrt{2}\right)$.

Câu 47. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành $ABCD$, biết hai đường chéo AC và CD lần lượt nằm trên hai đường thẳng $d_1: x-3y+9=0,\ d_2: x+3y-3=0$ và phương trình đường thẳng

$AB: x-y+9=0$. Tìm tọa độ điểm C.

Lời giải.

Gọi I là tâm của hình bình hành. Ta có $I = AC \cap BD$ nên tọa độ điểm $I(x;y)$ thỏa mãn hệ

$\begin{cases} x-3y+9=0 \\ x+3y-3=0 \end{cases} \Rightarrow I(-3;2)$.

Do $A = AB \cap AC$ nên tọa độ điểm $A(x;y)$ thỏa mãn hệ $\begin{cases} x-y+9=0 \\ x-3y+9=0 \end{cases} \Rightarrow A(-9;0)$

Hình bình hành có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên I là trung điểm AC suy ra $C(3;4)$

Câu 48. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng

$d_1: x-y-4=0,\ d_2: 2x+y-2=0$, và hai điểm $A(7;5),\ B(2;3)$. Tìm điểm trên đường thẳng d_1 và điểm trên đường thẳng d_2 sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải.

Do $C \in d_1$ nên $C(c;c-4)$ và $D \in d_2$ nên $D(d;2-2d)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-5;-2),\ \overrightarrow{DC} = (c-d;c+2d-6)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} c-d=-5 \\ c+2d-6=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-2 \\ d=3 \end{cases}$

Vậy $C(-2;-6), D(3;-4)$

Câu 49. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi $ABCD$ có $A(0;-1), B(2;1)$ và tâm I thuộc đường thẳng $d: x+y-1=0$. Tìm tọa độ điểm C.

Lời giải.

Do $I \in d$ nên $I(t;1-t)$. Ta có $\overrightarrow{AI} = (t;2-t),\ \overrightarrow{BI} = (t-2;-t)$.

Vì $ABCD$ là hình thoi, suy ra $AI \perp BI$ nên $\overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{BI} = 0 \Leftrightarrow t(t-2)+(2-t)(-t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=o \\ t=2 \end{array}\right.$.

Với $t=0$ thì $I(0;1)$. Do là trung điểm của AC nên suy ra $C(0;3)$.

Với $t=2$ thì $I(2;-1)$. Do là trung điểm của AC nên suy ra $C(4;-1)$.

Câu 50. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi $ABCD$ có phương trình cạnh $AB: x-2y+4=0$, phương trình cạnh $AD: 2x-y+2=0$. Điểm $M(2;2)$ thuộc đường thẳng BD. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi.

Lời giải.

Tọa độ đỉnh là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-2y+4=0 \\ 2x-y+2=0 \end{cases} \Rightarrow A(0;2)$.

Phương trình các đường phân giác góc A là $\dfrac{x-2y+4}{\sqrt{5}} = \pm \dfrac{2x-y+2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d_1: x+y-2=0 \\ d_2: x-y+2=0 \end{array}\right.$.

Trường hợp $d_1: x+y-2=0$.

Đường thẳng BD đi qua M và vuông góc với d_1 nên có phương trình $x-y=0$.

Do $B=BD\cap AD$ nên tọa độ điểm $B(x;y)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-y=0 \\ x-2y+4=0 \end{cases} \Rightarrow B(4;4)$.

Do $I=BD\cap d_1$ nên tọa độ điểm $I(x;y)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-y=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Rightarrow I(1;1)$.

Vì C đối xứng với A qua I nên $C(2;0)$.

Trường hợp $d_2: x-y+2=0$. Tương tự như trường hợp 1.

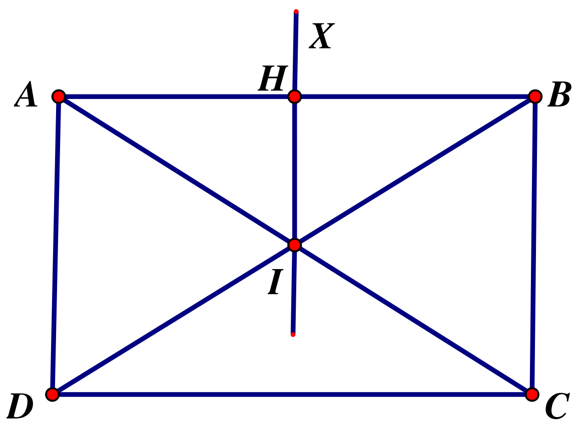
Câu 51. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm $I\left(\frac{1}{2};0\right)$.

Phương trình đường thẳng $AB: x-2y+2=0$ và $AB=2AD$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật, biết đỉnh A có hoành độ âm.

Lời giải.

Khoảng cách từ I đến đường thẳng AB bằng

$$d(I,AB)=\frac{\left|\frac{1}{2}-2.0+2\right|}{\sqrt{1+4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$



Gọi d là đường thẳng đi qua I và vuông góc với AB

nên $d: 2x+y-1=0$.

Gọi B là hình chiếu vuông góc của I trên AB. Khi đó tọa độ điểm B thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x-2y+2=0 \\ 2x+y-1=0 \end{cases} \Rightarrow H(0;1).$$

Do $A \in AB$ nên $A(2a-2;a)$ với $a<1$. Từ giả thiết $AB=2AD$, suy ra

$$AH=2d(I,AB) \Leftrightarrow \sqrt{(2-2a)^2+(1-a)^2}=\sqrt{5} \Leftrightarrow |1-a|=1 \Leftrightarrow a=0 \text{ hoặc } a=2 \text{ (loại)}.$$

Suy ra $A(-2;0)$, do H là trung điểm AB nên $B(2;2)$.

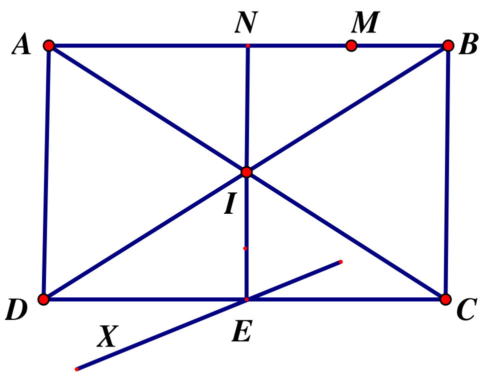
Hơn nữa I là trung điểm AC và BD nên $C(3;0)$, $D(-1;-2)$.

Vậy $A(-2;0), B(2;2), C(3;0), D(-1;-2)$.

Câu 52. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm $I(6;2)$ là giao điểm của hai đường thẳng AC và BD. Điểm $M(1;5)$ thuộc đường thẳng AB và trung điểm E của cạnh CD thuộc đường thẳng $d: x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng AB.

Lời giải.

Do $E \in d$ nên $E(t;5-t)$. Gọi N là trung điểm AB, suy ra I là trung điểm NE nên $N(12-t;t-1)$. Ta có $\overrightarrow{MN}=(11-t;t-6), \overrightarrow{IE}=(t-6;3-t)$. Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên



$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{IE}=0 \Leftrightarrow (11-t)(t-6)(t-6)(3-t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=6 \\ t=7 \end{array}\right..$$

* Với $t=6$ suy ra $N(6;5)$. Đường thẳng AB đi qua hai điểm M và N nên có phương trình $AB: y=5$.

* Với $t=7$ suy ra $N(5;6)$. Đường thẳng AB đi qua hai điểm M và N nên có phương trình $AB: x-4y+19=0$.

Câu 53. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có $A(1;1)$ và $M(4;2)$ là trung điểm cạnh BC. Tìm tọa độ điểm B.

Lời giải.

Giả sử $\overrightarrow{n_{AB}}=(a;b)$ với $a^2+b^2 \neq 0$ là véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng AB. Suy ra đường thẳng BC có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{BC}}=(b;-a)$.

Đường thẳng AB đi qua $A(1;1)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{AB}}=(a;b)$ nên

$AB: a(x-1)+b(y-1)=0$ hay $ax+by-a-b=0$.

Đường thẳng BC đi qua $M(4;2)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{BC}}=(b;-a)$ nên

$BC: b(x-4)-a(y-2)=0$ hay $bx-ay+2a-4b=0$.

Ta có $AB=d(A,BC)=\dfrac{|a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ và $BC=2d(M,AB)=2\dfrac{|3a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Vì là hình vuông nên $AB=BC \Leftrightarrow |a-3b|=2|3a+b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-a \\ b=7a \end{array}\right.$.

Với $b=-a$ chọn $a=1$ suy ra $b=-1$. Ta được $AB: x-y=0$ và $BC: x+y-6=0$.

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-y=0 \\ x+y-6=0 \end{cases} \Rightarrow B(3;3)$.

Với $b=7a$ chọn $a=1$ suy ra $b=7$. Ta được $AB: x+7y-8=0$ và $BC: 7x-y-26=0$.

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+7y-8=0 \\ 7x-y-26=0 \end{cases} \Rightarrow B\left(\dfrac{19}{5};\dfrac{3}{5}\right)$.

Câu 54. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ trong đó thuộc đường thẳng $d_1: x+y-1=0$ và C,D nằm trên đường thẳng $d_2: 2x-y+3=0$. Tìm tọa độ điểm C, biết hình vuông có diện tích bằng 5 và có hoành độ dương.

Lời giải.

Do $A\in d_1$ nên $A(a;1-a)$ với $a>0$. Theo giả thiết bài toán, ta có

$S_{ABCD}=5 \Leftrightarrow d(A,d_2)=\sqrt{5} \Leftrightarrow \dfrac{|2a-(1-a)+3|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow a=1$ hoặc $a=-\dfrac{7}{3}$ (loại).

Với $a=1$, suy ra $A(1;0)$.

Đường thẳng AD đi qua A và vuông góc với CD nên có phương trình $AD: x+2y-1=0$.

Tọa độ điểm D là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x+2y-1=0 \\ 2x-y+3=0 \end{cases} \Rightarrow D(-1;1)$.

Do $C\in d_2$ nên $C(c;2c+3)$. Suy ra $\overrightarrow{CD}=(-1-c;-2-2c)$. Ta có

$CD=\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(-1-c)^2+(-2-2c)^2}=\sqrt{5} \Leftrightarrow |-1-c|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=0 \\ c=2 \end{array}\right.$

Vậy $C(0;3)$ hoặc $C(-2;-1)$.

Dạng 7: Câu toán cực trị

Câu 55. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x+2y-4=0$ và điểm $A(1;4)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc d sao cho MA nhỏ nhất.

Lời giải:

Điểm $M\in d$ nên có tọa độ dạng $M(4-2m;m)$.

Khi đó $\overrightarrow{AM}=(3-2m;m-4)$, suy ra $AM=\sqrt{(3-2m)^2+(m-4)^2}=\sqrt{5m^2-20m+25}$

Ta có $\sqrt{5m^2-20m+25}=\sqrt{5(m-2)^2+5}\geq\sqrt{5}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m=2$

Vậy $M(0;2)$ và giá trị nhỏ nhất của AM bằng $\sqrt{5}$

Câu 56. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;4)$ và $B(3;5)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A và cách B một khoảng lớn nhất.

Lời giải:

Phương pháp đại số: Đường thẳng d đi qua $A(1;4)$ và có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(a;b)$ với $a^2+b^2\neq 0$ nên có phương trình

$d: a(x-1)+b(y-4)=0$ hoặc $ax+by-a-4b=0$

Khoảng cách từ B đến đường thẳng d được xác định $d(B,d)=\dfrac{|2a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

□Nếu $a=0$ thì $d(B,d)=1$

□Nếu $b=0$ thì $d(B,d)=2$

□Khi $a\neq 0$ và $b\neq 0$ ta chọn $b=1$

Suy ra $d(B,d)=\dfrac{|2a+1|}{\sqrt{a^2+1}}=|f(a)|$, với $f(a)=\dfrac{2a+1}{\sqrt{a^2+1}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Shwarz, ta có $(2a+1)^2\leq(2^2+1^2)(a^2+1^2)\Rightarrow\dfrac{|2a+1|}{\sqrt{a^2+1}}\leq\sqrt{5}$

Vậy $\max\limits_{\mathbb{R}} f(a)=\sqrt{5}$, xảy ra khi $a=2$.

So sánh các trường hợp, ta được $d(B,d)$ lớn nhất khi $a=2$, $b=1$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm $d: 2x+y-6=0$

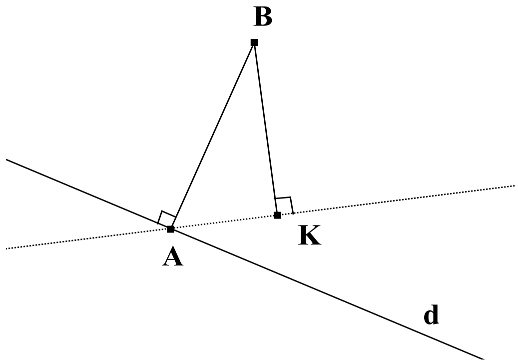
Cách 2: Phương pháp hình học:

Gọi K là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng d.

Khi đó $d(B,d)=BK$.

Xét tam giác ABK vuông tại K, ta có $d(B,d)=BK\leq AB=\sqrt{5}$ (BĐT tam giác mở rộng).

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $K\equiv A$.



Khi đó d được xác định là đi qua $A(1;4)$ và vuông góc với AB nên nhận $\overrightarrow{AB}=(2;1)$ làm vecto pháp tuyến.

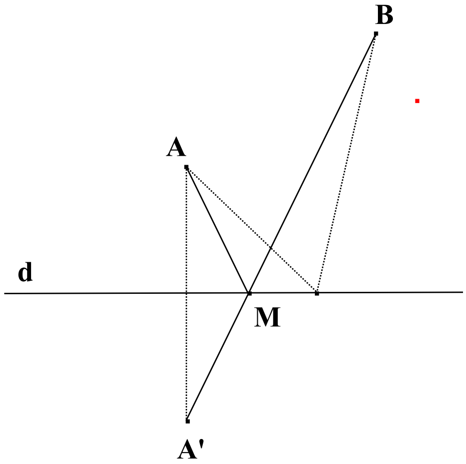
Vậy phương trình đường thẳng cần tìm $d: 2x+y-6=0$

Câu 57. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x+2y-4=0$ và $A(1;4)$, $B(8;3)$. Tìm điểm M thuộc d sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất.

Lời giải:

Ta có: $P(A,d).P(B,d)=(x_A+2y_A-4)(x_B+2y_B-4)=5.10>0$

Suy ra hai điểm A và B cùng phía so với đường thẳng d.



Gọi A' là điểm đối xứng của A qua d.

Khi đó tọa độ điểm $A'(x;y)$ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} 2(x-1)-1(y-4)=0 \\ \dfrac{x+1}{2}+2.\dfrac{y+4}{2}-4=0 \end{cases} \Rightarrow A'(-1;0).$$

Khi đó $MA+MB=MA'+MB \geq A'B=3\sqrt{10}$ (BĐT tam giác mở rộng).

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: A', M, B thẳng hàng hay M thuộc đường thẳng $A'B$.

Đường thẳng $A'B$ đi qua $A'(-1;0)$ và $B(8;3)$ neen có phương trình $A'B: x-3y+1=0$.

Mặt khác, theo giả thiết M thuộc d nên tọa độ điểm M thỏa mãn hệ $\begin{cases} x+2y-4=0 \\ x-3y+1=9 \end{cases} \Rightarrow M(2;1)$

! *Câu toán này dùng cho hai điểm khác phía so với d. Nếu đề bài đã cho A và B khác phía với d thì ta không làm bước lấy đối xứng.*

Câu 58. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x+2y-4=0$ và hai điểm $A(1;4)$, $B(8;3)$. Tìm điểm M thuộc d sao cho tam giác ABM có chu vi nhỏ nhất.

Lời giải:

Ta có $\overrightarrow{AB}=(7;-1)$; suy ra $AB=\sqrt{50}$. Chu vi tam giác ABM là:

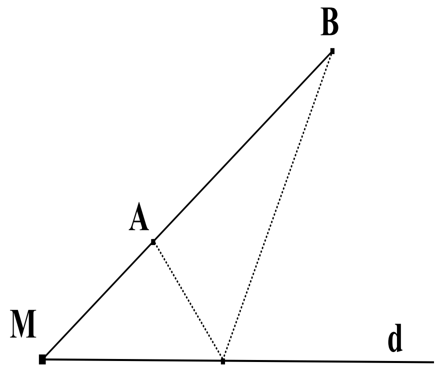
$C_{\Delta ABM}=MA+MB+AB=MA+MB+\sqrt{50}$

Để $C_{\Delta ABM}$ nhỏ nhất khi $MA+MB$ nhỏ nhất. Bạn đọc làm tương tự như bài trên.

Câu 59. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x+2y-4=0$ và hai điểm $A(1;4)$, $B(3;2)$. Tìm điểm M thuộc d sao cho $|MA-MB|$ lớn nhất.

Lời giải:

Ta có



$P(A,d).P(B,d)=(x_A+2y_A-4)(x_B+2y_B-4)=5.3>0$

Suy ra hai điểm A và B cùng phía so với đường thẳng d.

Theo bất đẳng thức tam giác mở rộng, ta có

$|MA-MB| \leq AB=2\sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi A, M, B thẳng hàng hay M thuộc đường thẳng AB.

Đường thẳng AB đi qua $A(1;4)$ và $B(3;2)$ nên có phương trình $AB: x+y-5=0$.

Mặt khác, theo giả thiết M thuộc d nên tọa độ điểm M thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x+2y-4=0 \\ x+y-6=0 \end{cases} \Rightarrow M(6;-1).$$

! *Câu toán này dùng cho hai điểm cùng phía so với d. Nếu đề bài đã cho A và B khác phía với d thì ta lấy đối xứng một trong hai điểm A hoặc B qua d.*

Câu 60. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x+2y-4=0$ và hai điểm $A(1;4)$, $B(9;0)$. Tìm điểm M thuộc d sao cho $\left|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất.

Lời giải:

Điểm $M \in d$ nên có tọa độ dạng $M(4-2m;m)$

Ta có $\overrightarrow{MA}=(2m-3;4-m)$; $\overrightarrow{MB}=(2m+5;-m)$, suy ra $3.\overrightarrow{MB}=(6m+15;-3m)$

Do đó $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=(8m+12;4-4m)$. Ta có

$\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|=\sqrt{(8m+12)^2+(4-4m)^2}=\sqrt{80m^2+160m+160}=4\sqrt{5}\sqrt{m^2+2m+2}$

$=4\sqrt{5}.\sqrt{(m+1)^2+1}\geq 4\sqrt{5}.\sqrt{1}=4\sqrt{5}$.

Câu 61. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x+2y-4=0$ và hai điểm $A(1;4)$, $B\left(8;\frac{1}{2}\right)$. Tìm điểm M thuộc d sao cho $5MA^2+2MB^2$ nhỏ nhất.

Lời giải

Điểm $M \in d$ nên có tọa độ dạng $M(4-2m;m)$

Ta có $\overrightarrow{MA}=(2m-3;4-m)$, suy ra $5MA^2=5\left[(2m-3)^2+(4-m)^2\right]$;

$\overrightarrow{MB}=\left(2m+4;\frac{1}{2}-m\right)$, suy ra $2MB^2=2\left[(2m+4)^2+\left(\frac{1}{2}-m\right)^2\right]$.

Do đó $5MA^2+2MB^2=35m^2-70m+\frac{315}{2}=35(m-1)^2+\frac{245}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m=1$.

Vậy $M(2;1)$ và $5MA^2+2MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{245}{2}$.

Câu 62. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x-2y-2=0$ và hai điểm $A(3;4)$, $B(-1;2)$. Tìm điểm M thuộc d sao cho MA^2-2MB^2 lớn nhất.

Lời giải:

Điểm $M \in d$ nên có tọa độ dạng $M(2m+2;m)$.

Ta có $\overrightarrow{MA}=(1-2m;4-m)$, suy ra $MA^2=(1-2m)^2+(4-m)^2$;

$\overrightarrow{MB}=(-3-2m;2-m)$, suy ra $2MB^2=2\left[(-3-2m)^2+(2-m)^2\right]$.

Do đó: $MA^2-2MB^2=-5m^2-28m-9=-5\left(m+\frac{14}{5}\right)^2+\frac{151}{5}\leq\frac{151}{5}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m=-\frac{14}{5}$.

Vậy $M\left(-\frac{18}{5};-\frac{14}{5}\right)$ và MA^2-2MB^2 đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{151}{5}$.

Câu 63. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(2;1)$. Lấy điểm B thuộc Ox có hoành độ không âm và điểm C thuộc Oy có tung độ không âm sao cho tam giác ABC vuông tại A. Tìm tọa

độ điểm B và C sao cho diện tích tam giác ABC.

a)Lớn nhất

b) Nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi $B(b;0)$, $C(0;c)$ với điều kiện $b^2+c^2\neq 0$. Suy ra $\overrightarrow{AB}=(b-2;1)$, $\overrightarrow{AC}=(2;c-1)$. Tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow (b-2).2+1.(c-1)=0 \Leftrightarrow 2b+c-5=0$ $(*)$. Từ $(*)$ suy ra $b=\dfrac{5-c}{2}$, do $c\geq 0$ nên $b\leq \dfrac{5}{2}$. Vậy $0\leq b\leq \dfrac{5}{2}$. Ta có:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{1}{2}.\sqrt{(b-2)^2+1}.\sqrt{4+(c-1)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(b-2)^2+1}.\sqrt{4+4(b-2)^2}=(b-2)^2+1.$$

a) Khảo sát hàm số bậc hai $f(b)=(b-2)^2+1$ trên $\left[0;\dfrac{5}{2}\right]$, ta tìm được $\max\limits_{\left[0;\frac{5}{2}\right]} f(b)=f(0)=5$.

Với $b=0$, suy ra $c=5$. Vậy $B(0;0)$, $C(0;5)$ và diện tích tam giác ABC đạt giá trị lớn nhất bằng 5.

b) Ta có $S_{\Delta ABC}=(b-2)^2+1\geq 1$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $b=2$, suy ra $c=1$. Vậy $B(2;0)$, $C(0;1)$ và diện tích tam giác ABC đạt giá trị nhỏ nhất bằng 1.

Câu 64. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng đi qua $M(3;2)$ cắt tia Ox tại A và tia Oy tại B sao cho diện tích tam giác OAB đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Đường thẳng d đi qua $M(3;2)$ và cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại A và B khác O, nên $A(a;0)$, $B(0;b)$ với $a>0$, $b>0$. Do đó phương trình của d có dạng $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

Đường thẳng d đi qua $M(3;2)$ nên $\dfrac{3}{a}+\dfrac{2}{b}=1$. Ta có $S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}OA.OB=\dfrac{1}{2}|a|.|b|=\dfrac{1}{2}ab$.

Áp dụng BĐT Cauchy, ta được $1=\dfrac{3}{a}+\dfrac{2}{b}\geq 2\sqrt{\dfrac{6}{ab}}=2\sqrt{\dfrac{3}{S_{\Delta OAB}}}$, suy ra $S_{\Delta OAB}\geq 12$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{3}{a}=\dfrac{2}{b}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=4 \end{cases}$.

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình $d:\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{4}=1$.

Câu 65. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng d đi qua $M(4;1)$ và cắt chiều dương các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho $OA+OB$ nhỏ nhất.

Lời giải

Cách 1. Giả sử đường thẳng d có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(a;b)$ với $a^2+b^2\neq 0$ nên có phương trình d: $a(x-4)+b(y-1)=0$ hay $ax+by-4a-b=0$. Khi đó $d\cap Ox=A\left(\dfrac{4a+b}{a};0\right)$ và $d\cap Oy=B\left(0;\dfrac{4a+b}{b}\right)$.

Điều kiện: $\dfrac{4a+b}{a}>0$; $\dfrac{4a+b}{b}>0$.

Ta có

$$OA+OB=\left|\frac{4a+b}{a}\right|+\left|\frac{4a+b}{b}\right|=\frac{4a+b}{a}+\frac{4a+b}{b}=5+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}\ge 5+2\sqrt{\frac{b}{a}.\frac{4a}{b}}=9.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{b}{a}=\frac{4a}{b}\Leftrightarrow b^2=4a^2$. Ta chọn $a=1$, suy ra $b=2$. Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình $d:\ x+2y-6=0$.

Cách 2. Đường thẳng d đi qua $M(4;1)$ và cắt các chiều dương Ox, Oy lần lượt tại A và B nên $A(a;0)$, $B(0;b)$ với $a>0$, $b>0$. Do đó phương trình của d có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Đường thẳng d đi qua $M(4;1)$ nên $\frac{4}{a}+\frac{1}{b}=1$. Ta có $OA+OB=|a|+|b|=a+b$.

Áp dụng BDT Bunhiacopxki, ta được

$$\left(\sqrt{\frac{4}{a}}.\sqrt{a}+\sqrt{\frac{1}{b}}.\sqrt{b}\right)^2\le\left(\frac{4}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)=a+b \text{ (do } \frac{4}{a}+\frac{1}{b}=1).$$

Suy ra $a+b\ge 9$ hay $OA+OB\ge 9$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}\sqrt{\frac{4}{a}}:\sqrt{a}=\sqrt{\frac{1}{b}}:\sqrt{b}\\ \frac{4}{a}+\frac{1}{b}=1\end{cases}$ $\begin{cases}a=6\\ b=3\end{cases}$.

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình $d:\ \frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1$.

Câu 66. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng d đi qua $M(3;1)$ và cắt chiều dương các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho $12OA+9OB$ nhỏ nhất.

Lời giải

Cách 1. Giả sử đường thẳng d có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(a;b)$ với $a^2+b^2\ne 0$ nên có phương trình $d:\ a(x-3)+b(y-1)=0$ hay $ax+by-3a-b=0$.

Khi đó $d\cap Ox\ =\ A\left(\frac{3a+b}{a};0\right)$ và $d\cap Oy=B\left(0;\frac{3a+b}{b}\right)$.

Điều kiện $\frac{3a+b}{a}>0$; $\frac{3a+b}{b}>0$.

Ta có

$$12OA+9OB=12\left|\frac{3a+b}{a}\right|+9\left|\frac{3a+b}{b}\right|=12.\frac{3a+b}{a}+9.\frac{3a+b}{b}=45+\frac{12b}{a}+\frac{27a}{b}$$

$$\ge 45+2\sqrt{\frac{12b}{a}.\frac{27a}{b}}=81$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{12b}{a}=\frac{27a}{b}\Leftrightarrow 4b^2=9a^2$. Ta chọn $a=2$, suy ra $b=3$.

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình $d:\ 2x+3y-9=0$.

Cách 2. Đường thẳng d đi qua $M(3;1)$ và cắt chiều dương các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B nên $A(a;0)$, $B(0;b)$ với $a>0$, $b>0$. Do đó phương trình của d có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Đường thẳng d đi qua $M(3;1)$ nên $\frac{3}{a}+\frac{1}{b}=1$.

Ta có: $12OA+9OB=12|a|+9|b|=12a+9b$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki, ta được

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a}}.\sqrt{12a}+\frac{1}{\sqrt{b}}.3\sqrt{b}\right)^2\le\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{b}\right)(12a+9b)=12a+9b.$$

Suy ra: $12a+9b\ge 81$ hay $12OA+9OB\ge 81$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a}}:\sqrt{12a}=\frac{1}{\sqrt{b}}:3\sqrt{b}\\ \frac{3}{a}+\frac{1}{b}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{9}{2}\\ b=3\end{cases}.$$

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình $d:\frac{2x}{9}+\frac{y}{3}=1$.

Câu 67. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng d đi qua $M(-4;3)$ và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B khác O sao cho $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất.

Lời giải

Cách 1. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên đường thẳng d. Tam giác OAB vuông tại nên

$$\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{OH^2}\ge\frac{1}{OM^2}=\frac{1}{25}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $H\equiv M$. Khi đó đường thẳng d đi qua $M(-4;3)$ và vuông góc với OM nên nhận $\overrightarrow{OM}=(-4;3)$ làm véc-tơ pháp tuyến. Vậy phương trình đường thẳng d: $4x-3y+25=0$.

Cách 2. Đường thẳng d đi qua $M(-4;3)$ và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B khác O nên $A(a;0)$, $B(0;b)$ với $a\ne 0$, $b\ne 0$. Do đó phương trình của d có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Đường thẳng d đi qua $M(-4;3)$ nên $\frac{-4}{a}+\frac{3}{b}=1$. Ta có $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki, ta được

$$\left(\frac{-4}{a}+\frac{3}{b}\right)^2\le\left[(-4)^2+3^2\right]\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).$$

Suy ra $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ge\frac{1}{25}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}-4:\frac{1}{a}=3:\frac{1}{b}\\ \frac{-4}{a}+\frac{3}{b}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{25}{4}\\ b=\frac{25}{3}\end{cases}$.

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình $d:\frac{-4x}{25}+\frac{3y}{25}=1$.

Cách 3. Giả sử đường thẳng d có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(a;b)$ với $a^2+b^2\ne 0$ nên có phương trình d: $a(x+4)+b(y-3)=0$ hay $ax+by+4a-3b=0$.

Khi đó $d\cap Ox=A\left(\frac{3b-4a}{a};0\right)$ và $d\cap Oy=B\left(0;\frac{3b-4a}{b}\right)$. Ta có:

$$\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{a^2}{(3b-4a)^2}+\frac{b^2}{(3b-4a)^2}=\frac{a^2+b^2}{(3b-4a)^2}\ge\frac{a^2+b^2}{(3^2+4^2)(b^2+a^2)}=\frac{1}{25}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{3}{b}=\frac{-4}{a}\Leftrightarrow 3a=-4b$. Chọn $a=4$, suy ra $b=-3$.

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình $d:\ 4x-3y+25=0$.

Câu 68. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng d đi qua $M(2;-1)$ và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B khác O sao cho $\frac{9}{OA^2}+\frac{4}{OB^2}$ nhỏ nhất.

Lời giải

Cách 1. Đường thẳng d đi qua $M(2;-1)$ và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B khác O nên $A(a;0)$, $B(0;b)$ với $a\ne 0$, $b\ne 0$. Do đó phương trình của d có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Đường thẳng d đi qua $M(2;-1)$ nên $\frac{2}{a}-\frac{1}{b}=1$. Ta có $\frac{9}{OA^2}+\frac{4}{OB^2}=\frac{9}{a^2}+\frac{4}{b^2}$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki, ta được

$$\left(\frac{2}{a}-\frac{1}{b}\right)^2=\left(\frac{2}{3}.\frac{3}{a}-\frac{1}{2}.\frac{2}{b}\right)^2\le\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{9}{a^2}+\frac{4}{b^2}\right).$$

Suy ra $\frac{9}{OA^2}+\frac{4}{OB^2}=\frac{9}{a^2}+\frac{4}{b^2}\ge\frac{36}{25}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\frac{2}{3}:\frac{3}{a}=-\frac{1}{2}:\frac{2}{b}\\ \frac{2}{a}-\frac{1}{b}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{25}{8}\\ b=-\frac{25}{9}\end{cases}$.

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình $d:\ \frac{8x}{25}-\frac{9y}{25}=1$.

Cách 2. Giả sử đường thẳng d có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(a;b)$ với $a^2+b^2\ne 0$ nên có phương trình $d:\ a(x-4)+b(y+1)=0$ hay $ax+by-2a+b=0$.

Khi đó $d\cap Ox\ =\ A\left(\frac{2a-b}{a};0\right)$ và $d\cap Oy=B\left(0;\frac{2a-b}{b}\right)$. Ta có:

$$\frac{9}{OA^2}+\frac{4}{OB^2}=\frac{9a^2}{(2a-b)^2}+\frac{4b^2}{(2a-b)^2}=\frac{9a^2+4b^2}{(2a-b)^2}=\frac{9a^2+4b^2}{\left(\frac{2}{3}.3a-\frac{1}{2}.2b\right)^2}\ge\frac{9a^2+4b^2}{\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{4}\right)(9a^2+4b^2)}=\frac{36}{25}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{2}{3}:3a=-\frac{1}{2}:2b$. Chọn $a=8$, suy ra $b=-9$.

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình $d:\ 8x-9y-25=0$.

Câu 69. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(0;2)$ và hai đường $d_1:\ 3x+y+2=0$, d_2: $x-3y+4=0$. Gọi A là giao điểm của d_1 và d_2. Viết phương trình đường thẳng d đi qua M và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại B, C (B và C khác A) sao cho $\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Tọa độ giao điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases}3x+y+2=0\\x-3y+4=0\end{cases} \Rightarrow A(-1;1)$.

Đường thẳng d_1 có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_1=(3;1)$; Đường thẳng d_2 có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_2=(1;-3)$.

Ta có $\vec{n}_1.\vec{n}_2=0$. Suy ra $d_1\perp d_2$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng d. Tam giác ABC vuông tại A nên

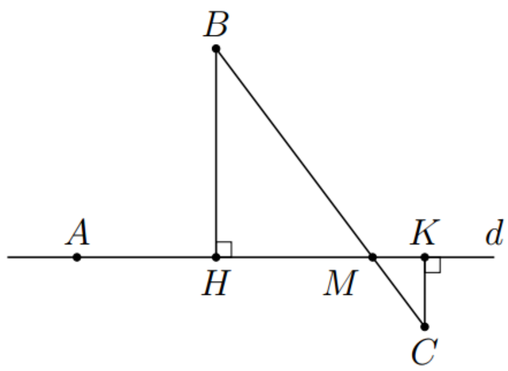
$\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{1}{AH^2}\geq\frac{1}{AM^2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $H\equiv M$. Khi đó đường thẳng d đi qua $M(0;2)$ và vuông góc với $\overrightarrow{AM}$ nên nhận $\overrightarrow{AM}=(1;1)$ làm véc-tơ pháp tuyến. Vậy phương trình đường thẳng $d: x+y-2=0$.

Câu 70. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(1;1)$, $B(3;2)$ và $C(7;10)$. Viết phương trình đường thẳng d qua A sao cho tổng khoảng cách từ B và C đến d là lớn nhất.

Lời giải

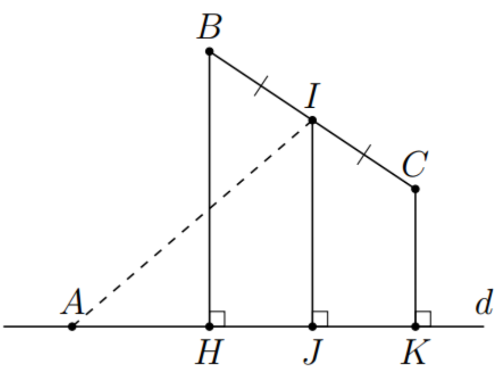
Trường hợp 1.



Giả sử d cắt BC tại M. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của B và C trên d. Ta có $d(B,d)+d(C,d)=BH+CK\leq BM+CM=BC$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi d vuông góc với BC.

Trường hợp 2.



Giả sử d không cắt BC. Gọi I là trung điểm BC. Gọi H, I, J lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C và I trên d. Ta có $d(B,d)+d(C,d)=BH+CK=2IJ\leq 2AI$.

Dấu "=" xảy ra khi d vuông góc với AI. Bây giờ ta so sánh BC và $2AI$. Vì I là trung điểm BC nên $I(5;6)$. Ta có $2AI=2\sqrt{41}>BC=4\sqrt{5}$. Vậy đường thẳng d cần tìm qua $A(1;1)$ và nhận $\overrightarrow{AI}=(4;5)$ làm véc-tơ pháp tuyến nên d: $4x+5y-9=0$.

Chú ý: Nếu $BC > 2AI$ thì đường thẳng d cần tìm qua A, có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{BC}$.

Câu 71. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có phương trình cạnh AB: $x+2y-2=0$, phương trình cạnh AC: $2x+y+1=0$, điểm $M(1;2)$ thuộc đoạn BC. Tìm tọa độ điểm D sao cho $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}$ có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Đường thẳng AB có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{AB}=(1;2)$; Đường thẳng AC có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_{AC}=(2;1)$. Giả sử đường thẳng BC có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_{BC}=(a;b)$ với $a^2+b^2\neq 0$. Do đó BC: $a(x-1)+b(y-2)=0$ hay $ax+by-a-2b=0$.

Tam giác ABC cân tại A nên

$\cos\widehat{ABC}=\cos\widehat{ACB} \Leftrightarrow \left|\cos(\vec{n}_{AB},\vec{n}_{BC})\right|=\left|\cos(\vec{n}_{AC},\vec{n}_{BC})\right|$

$$\Leftrightarrow \frac{|a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{5}}=\frac{|2a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{5}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ a=b \end{array}\right.$$

• Với $a=-b$, chọn $b=-1$ suy ra $a=1$. Ta được BC: $x-y+1=0$.

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+2y-2=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Rightarrow B(0;1)$.

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{MB}=(-1;-1)$, $\overrightarrow{MC}=\left(-\frac{5}{3};-\frac{5}{3}\right)$. Suy ra M không thuộc đoạn BC.

• Với $a=b$, chọn $a=1$ suy ra $b=1$. Ta được BC: $x+y-3=0$.

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+2y-2=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \Rightarrow B(4;-1)$

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \Rightarrow C(-4;7)$.

Ta có $\overrightarrow{MB}=(3;-3)$, $\overrightarrow{MC}=(-5;5)$. Suy ra M thuộc đoạn BC.

Gọi trung điểm của BC là $I(0;3)$. Ta có

$$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=\left(\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IB}\right).\left(\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IC}\right)=DI^2-\frac{BC^2}{4}\geq-\frac{BC^2}{4}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $D\equiv I$. Vậy $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}$ nhỏ nhất khi $D(0;3)$.

Câu 72. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(0;1)$, $B(2;-1)$ và hai đường thẳng có phương trình d_1: $(m-1)x+(m-2)y+2-m=0$, d_2: $(2-m)x+(m-1)y+3m-5=0$. Chứng minh d_1 và d_2 luôn cắt nhau tại P. Tìm m sao cho $PA+PB$ lớn nhất.

Lời giải

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} (m-1)x+(m-2)y=m-2 \\ (2-m)x+(m-1)y=-3m+5 \end{cases}$.

Ta có $D=\begin{vmatrix} m-1 & m-2 \\ 2-m & m-1 \end{vmatrix}=2\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0$, $\forall m\in\mathbb{R}$.

Vậy d_1 và d_2 luôn cắt nhau.

Ta có $A(0;1)\in d_1$, $B(2;-1)\in d_2$ và $d_1\perp d_2$. Suy ra tam giác APB vuông tại P nên P nằm trên đường tròn đường kính AB.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có $(PA+PB)^2\le(1^2+1^2)(PA^2+PB^2)=2AB^2=16$. Suy ra $PA+PB\le 4$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $PA=PB$.

Với $PA=PB$ suy ra P là trung điểm của cung AB trong đường tròn đường kính AB. Đường tròn đường kính AB có phương trình (C): $(x-1)^2+y^2=2$. Gọi Δ là trung trực của đoạn AB, suy ra Δ qua tâm $I(1;0)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{AB}=(2;-2)$ nên có phương trình Δ: $x-y-1=0$.

Khi đó tọa độ điểm P thỏa mãn hệ $\begin{cases}x-y-1=0\\(x-1)^2+y^2=2\end{cases}\Rightarrow P(2;1)$ hoặc $P(0;-1)$.

Với $P(2;1)$, thay vào d_1 ta được $m=1$; Với $P(0;-1)$, thay vào d_1 ta được $m=2$.

Vậy $PA+PB$ lớn nhất khi $m=1$ hoặc $m=2$.

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Câu 1. Có bao nhiêu cặp đường thẳng song song trong các đường thẳng sau?

$(d_1): y=-\frac{1}{\sqrt{2}}x-2;\ (d_2): y=-\frac{1}{2}x+3;\ (d_3): y=\frac{1}{2}x+3;\ (d_4): y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x-2$

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Hai đường thẳng $y=a_1x+b_1$ và $y=a_2x+b_2$ song song với nhau khi và chỉ khi $\begin{cases}a_1=a_2\\b_1\ne b_2\end{cases}$.

Trong các đường thẳng trên không có đường nào thỏa mãn. Vậy không có cặp đường thẳng nào song song.

Câu 2. Phương trình nào sau đây là phương trình đường thẳng **không** song song với đường thẳng $d: y=3x-2$

A. $-3x+y=0$. **B.** $3x-y-6=0$.

C. $3x-y+6=0$. **D.** $3x+y-6=0$.

Lời giải

Chọn D

$d: y=3x-2\Leftrightarrow 3x-y-2=0$. (d) có VTPT $\vec{n}=(3;-1)$.

Đường thẳng $3x+y-6=0$ có VTPT $\overrightarrow{n_1}=(3;1)\ne k\vec{n}$ nên $\vec{n}$ và $\overrightarrow{n_1}$ không cùng phương. Do đó đường thẳng $3x+y-6=0$ không song song với đường thẳng (d).

Câu 3. Trong mặt phẳng Oxy, đường thẳng $d: x-2y-1=0$ song song với đường thẳng có phương trình nào sau đây?

A. $x+2y+1=0$. **B.** $2x-y=0$. **C.** $-x+2y+1=0$. **D.** $-2x+4y-1=0$.

Lời giải

Chọn D

Ta kiểm tra lần lượt các đường thẳng

.+) Với $d_1: x+2y+1=0$ có $\frac{1}{1} \neq \frac{2}{-2} \Rightarrow d$ cắt d_1.

.+) Với $d_2: 2x-y=0$ có $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{-2} \Rightarrow d$ cắt d_2.

.+) Với $d_3: -x+2y+1=0$ có $\frac{-1}{1} = \frac{2}{-2} \neq \frac{1}{-1} \Rightarrow d$ trùng d_3.

.+) Với $d_4: -2x+4y-1=0$ có $\frac{1}{-2} = \frac{-2}{4} \neq \frac{-1}{-1} \Rightarrow d$ song song d_4.

Câu 4. Cho các đường thẳng sau.

$d_1: y=\frac{3}{\sqrt{3}}x-2$ $d_2: y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+1$ $d_3: y=-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)x+2$ $d_4: y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-1$

Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

A. d_2, d_3, d_4 song song với nhau. **B.** d_2 và d_4 song song với nhau.

C. d_1 và d_4 vuông góc với nhau. **D.** d_2 và d_3 song song với nhau.

Lời giải

Chọn B

Vì $d_3: y=-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)x+2=\frac{1}{\sqrt{3}}x+1 \Rightarrow d_3 \equiv d_2$. Đường thẳng d_2 và d_4 có hệ số góc bằng nhau;hệ số tự do khác nhau nên chúng song song.

Câu 5. Tìm các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=(m^2-3)x+3m+1$ song song với đường thẳng $y=x-5$.

A. $m=\pm 2$. **B.** $m=\pm\sqrt{2}$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn D

Để đường thẳng $y=(m^2-3)x+3m+1$ song song với đường thẳng $y=x-5$ thì điều kiện là

$$\begin{cases} m^2-3=1 \\ 3m+1 \neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\pm 2 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m=2.$$

Câu 6. Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $x-3y-6=0$ và $3x+4y-1=0$ là

A. $\left(\frac{27}{13};-\frac{17}{13}\right)$. **B.** $(-27;17)$. **C.** $\left(-\frac{27}{13};\frac{17}{13}\right)$. **D.** $(27;-17)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $x-3y-6=0$ và $3x+4y-1=0$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x-3y-6=0 \\ 3x+4y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{27}{13} \\ y=-\frac{17}{3} \end{cases}$.

Câu 7. Cho đường thẳng $d_1: 2x+3y+15=0$ và $d_2: x-2y-3=0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. d_1 và d_2 cắt nhau và không vuông góc với nhau.

B. d_1 và d_2 song song với nhau.

C. d_1 và d_2 trùng nhau.

D. d_1 và d_2 vuông góc với nhau.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng $d_1: 2x+3y+15=0$ có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}=(2;3)$ và đường thẳng $d_2: x-2y-3=0$ có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2}=(1;-2)$.

Ta thấy $\frac{2}{1}\neq\frac{3}{-2}$ và $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=2.1+3.(-2)=-4\neq 0$.

Vậy d_1 và d_2 cắt nhau và không vuông góc với nhau.

Câu 8. Hai đường thẳng $d_1: mx+y=m-5, d_2: x+my=9$ cắt nhau khi và chỉ khi

A. $m\neq -1$. **B.** $m\neq 1$. **C.** $m\neq \pm 1$. **D.** $m\neq 2$.

Lời giải

Chọn C

CÁCH 1

-Xét $m=0$ thì $d_1: y=-5,\ d_2: x=9$. Rõ ràng hai đường thẳng này cắt nhau nên $m=0$ thỏa mãn (1).

-Xét $m\neq 0$ thì $d_1: y=-mx+m-5$ và $d_2: y=-\frac{x}{m}+9$

Hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhaut $\Leftrightarrow -m\neq -\frac{1}{m}\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq \pm 1\end{cases}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $m\neq \pm 1$.

CÁCH 2

d_1 và d_2 theo thứ tự nhận các vectơ $\vec{n}_1=(m;1),\ \vec{n}_2=(1;m)$ làm vec tơ pháp tuyến.

d_1 và d_2 cắt nhau $\Leftrightarrow \vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ không cùng phương $\Leftrightarrow m.m\neq 1.1\Leftrightarrow m\neq \pm 1$.

(Áp dụng tính chất: $\vec{n}_1=(a;b)$ và $\vec{n}_2=(c;d)$ cùng phương $\Leftrightarrow a.d=b.c$)

Câu 9. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng

$d_1: 3x+4y+10=0$ và $d_2: (2m-1)x+m^2y+10=0$ trùng nhau?

A. $m\pm 2$. **B.** $m=\pm 1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-2$.

Lời giải

$$\begin{cases} d_2: (2m-1)x+m^2y+10=0 \\ d_1: 3x+4y+10=0\end{cases} \xrightarrow{d_1\equiv d_2} \frac{2m-1}{3}=\frac{m^2}{4}=\frac{10}{10}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1=3 \\ m^2=4\end{cases} \Leftrightarrow m=2.$$

Câu 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng có phương trình $d_1: mx+(m-1)y+2m=0$ và $d_2: 2x+y-1=0$. Nếu d_1 song song d_2 thì:

A. $m=2$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=1$.

Lời giải

$$\begin{cases} d_1: mx+(m-1)y+2m=0 \\ d_2: 2x+y-1=0 \end{cases} \xrightarrow{d_1 \parallel d_2} \frac{m}{2}=\frac{m-1}{1} \neq \frac{2m}{-1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \neq 2 \\ m=2m-2 \end{cases} \Leftrightarrow m=2.$$

Câu 11. Tìm m để hai đường thẳng $d_1: 2x-3y+4=0$ và $d_2: \begin{cases} x=2-3t \\ y=1-4mt \end{cases}$ cắt nhau.

A. $m \neq -\frac{1}{2}$. **B.** $m \neq 2$. **C.** $m \neq \frac{1}{2}$. **D.** $m=\frac{1}{2}$.

Lời giải

$$\begin{cases} d_1: 2x-3y+4=0 \\ d_2: \begin{cases} x=2-3t \\ y=1-4mt \end{cases} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1=(2;-3) \\ \vec{n}_2=(4m;-3) \end{cases} \xrightarrow{d_1 \cap d_2 = M} \frac{4m}{2} \neq \frac{-3}{-3} \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2}.$$ **Chọn C.**

Câu 12. Với giá trị nào của a thì hai đường thẳng

$d_1: 2x-4y+1=0$ và $d_2: \begin{cases} x=-1+at \\ y=3-(a+1)t \end{cases}$ vuông góc với nhau?

A. $a=-2$. **B.** $a=2$. **C.** $a=-1$. **D.** $a=1$.

Lời giải

$$\begin{cases} d_1: 2x-4y+1=0 \\ d_2: \begin{cases} x=-1+at \\ y=3-(a+1)t \end{cases} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1=(1;-2) \\ \vec{n}_2=(a+1;a) \end{cases} \xrightarrow{d_1 \perp d_2} \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2=0 \Leftrightarrow a+1-2a=0 \Leftrightarrow a=1.$$

Chọn D.

Câu 13. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng

$d_1: \begin{cases} x=-2+2t \\ y=-3t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x=2+mt \\ y=-6+(1-2m)t \end{cases}$ trùng nhau?

A. $m=\frac{1}{2}$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=2$. **D.** $m \neq \pm 2$.

Lời giải

$$\left.\begin{aligned} & d_1: \begin{cases} x=-2+2t \\ y=-3t \end{cases} \to \vec{u}_1=(2;-3) \\ & d_2: \begin{cases} x=2+mt \\ y=-6+(1-2m)t \end{cases} \to A(2;-6) \in d_2,\ \vec{u}_2=(m;1-2m) \end{aligned}\right\} \xrightarrow{d_1 \equiv d_2} \begin{cases} A \in d_1 \\ \frac{m}{2}=\frac{1-2m}{-3} \end{cases} \Leftrightarrow m=2.$$

Chọn C.

Câu 14. Tìm tất cả các giá trị của m để hai đường thẳng

$d_1: \begin{cases} x=2+2t \\ y=1+mt \end{cases}$ và $d_2: 4x-3y+m=0$ trùng nhau.

A. $m=-3$. **B.** $m=1$. **C.** $m=\frac{4}{3}$. **D.** $m \in \varnothing$.

Lời giải

$$\left.\begin{array}{l} d_1:\begin{cases} x=2+2t \\ y=1+mt \end{cases} \to A(2;1)\in d_1, \vec{u}_1=(2;m) \\ d_2: 4x-3y+m=0 \to \vec{u}_2=(3;4) \end{array}\right\} \xrightarrow{d_1\equiv d_2} \begin{cases} A\in d_2 \\ \dfrac{2}{3}=\dfrac{m}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5+m=0 \\ m=\dfrac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing.$$

Chọn D.

Câu 15. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng

$d_1: 2x+y+4-m=0$ và $d_2:(m+3)x+y+2m-1=0$ song song?

A. $m=1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=3$.

Lời giải

Với $m=4 \longrightarrow \begin{cases} d_1: 2x+y=0 \\ d_2: 7x+y+7=0 \end{cases} \longrightarrow d_1\cap d_2\neq\varnothing \longrightarrow$ loại $m=4$.

Với $m\neq 4$ thì

$$\begin{cases} d_1: 2x+y+4-m=0 \\ d_2:(m+3)x+y-2m-1=0 \end{cases} \xrightarrow{d_1\parallel d_2} \frac{m+3}{2}=\frac{1}{1}\neq\frac{-2m-1}{4-m} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m\neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow m=-1.$$

Chọn B.

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị của m để hai đường thẳng

$\Delta_1: 2x-3my+10=0$ và $\Delta_2: mx+4y+1=0$ cắt nhau.

A. $1<m<10$. **B.** $m=1$. **C.** Không có m. **D.** Với mọi m.

Lời giải

$$\begin{cases} \Delta_1: 2x-3my+10=0 \\ \Delta_2: mx+4y+1=0 \end{cases} \to \left[\begin{array}{l} m=0 \to \begin{cases} \Delta_1: x+5=0 \\ \Delta_2: 4y+1=0 \end{cases} \to m=0 \text{ (thoa man)} \\ m\neq 0 \xrightarrow{\Delta_1\cap\Delta_2=M} \dfrac{2}{m}\neq\dfrac{-3m}{4} \Leftrightarrow \forall m\neq 0 \end{array}\right. .\textbf{ChọnD.}$$

Câu 17. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng

$\Delta_1: mx+y-19=0$ và $\Delta_2:(m-1)x+(m+1)y-20=0$ vuông góc?

A. Với mọi m. **B.** $m=2$. **C.** Không có m. **D.** $m=\pm 1$.

Lời giải

Ta có : $\begin{cases} \Delta_1: mx+y-19=0 \to \vec{n}_1=(m;1) \\ \Delta_2:(m-1)x+(m+1)y-20=0 \to \vec{n}_2=(m-1;m+1) \end{cases}$

$\xrightarrow{\Delta_1\perp\Delta_1} m(m-1)+1(m+1)=0 \Leftrightarrow m\in\varnothing.$

Câu 18. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng

$d_1: 3mx+2y+6=0$ và $d_2:(m^2+2)x+2my+6=0$ cắt nhau?

A. $m\neq -1$. **B.** $m\neq 1$. **C.** $m\in\mathbb{R}$. **D.** $m\neq 1$ và $m\neq -1$.

Ta có: $\begin{cases} d_1: 3mx+2y+6=0 \to \vec{n}_1=(3m;2) \\ d_2:(m^2+2)x+2my+6=0 \to \vec{n}_2=(m^2+2;2m) \end{cases}$

$$\to \left[\begin{array}{l} m=0 \to \begin{cases} d_1: y+3=0 \\ d_2: x+y+3=0 \end{cases} \to m=0 (\text{thoa man}) \\ m\neq 0 \xrightarrow{d_1\cap d_2=M} \dfrac{m^2+2}{3m}\neq\dfrac{2m}{2} \Leftrightarrow m\neq\pm 1 \end{array}\right. .\textbf{ Chọn D.}$$

Câu 19. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng

$d_1: 2x-3y-10=0$ và $d_2: \begin{cases} x=2-3t \\ y=1-4mt \end{cases}$ vuông góc?

A. $m=\frac{1}{2}$. **B.** $m=\frac{9}{8}$. **C.** $m=-\frac{9}{8}$. **D.** $m=-\frac{5}{4}$.

Lời giải

$$\begin{cases} d_1: 2x-3y-10=0 \to \vec{n}_1=(2;-3) \\ d_2: \begin{cases} x=2-3t \\ y=1-4mt \end{cases} \to \vec{n}_2=(4m;-3) \end{cases}$$

$\xrightarrow{d_1 \perp d_2} 2.4m+(-3).(-3)=0 \Leftrightarrow m=-\frac{9}{8}$. **Chọn C.**

Câu 20. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng

$d_1: 4x-3y+3m=0$ và $d_2: \begin{cases} x=1+2t \\ y=4+mt \end{cases}$ trùng nhau?

A. $m=-\frac{8}{3}$. **B.** $m=\frac{8}{3}$. **C.** $m=-\frac{4}{3}$. **D.** $m=\frac{4}{3}$.

Lời giải

$$\begin{cases} d_1: 4x-3y+3m=0 \to \vec{n}_1=(4;-3) \\ d_2: \begin{cases} x=1+2t \\ y=4+mt \end{cases} \to A(1;4)\in d_2,\ \vec{n}_2=(m;-2) \end{cases}$$

$\xrightarrow{d_1 \equiv d_2} \begin{cases} A\in d_1 \\ \frac{m}{4}=\frac{-2}{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-8=0 \\ m=\frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m=\frac{8}{3}$. **Chọn B.**

Câu 21. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng

$d_1: 3mx+2y-6=0$ và $d_2: (m^2+2)x+2my-3=0$ song song?

A. $m=1;\ m=-1$. **B.** $m\in\varnothing$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-1$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} d_1: 3mx+2y-6=0 \to \vec{n}_1=(3m;2) \\ d_2: (m^2+2)x+2my-3=0 \to \vec{n}_2=(m^2+2;2m) \end{cases}$

$$\to \left[\begin{array}{l} m=0 \to \begin{cases} d_1: y-3=0 \\ d_2: 2x+2y-3=0 \end{cases} \to m=0(\text{khong thoa man}) \\ m\neq 0 \xrightarrow{d_1 \parallel d_2} \frac{m^2+2}{3m}=\frac{2m}{2}\neq\frac{-3}{-6} \Leftrightarrow m=\pm 1 \end{array} \right.$$

. **Chọn A.**

Câu 22. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng

$d_1: \begin{cases} x=8-(m+1)t \\ y=10+t \end{cases}$ và $d_2: mx+2y-14=0$ song song?

A. $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array} \right.$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-2$. **D.** $m\in\varnothing$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} d_1:\begin{cases} x=8-(m+1)t \\ y=10+t \end{cases} \to A(8;10)\in d_1,\ \vec{n}_1=(1;m+1) \\ d_2: mx+2y-14=0 \to \vec{n}_2=(m;2) \end{cases}$

$$\xrightarrow{d_1\|d_2}\begin{cases} A\notin d_2 \\ \left[\begin{array}{l} m=0\to\begin{cases}\vec{n}_1=(1;1)\\ \vec{n}_2=(0;2)\end{cases}\to \text{khong thoa man} \\ m\neq 0\to \dfrac{1}{m}=\dfrac{m+1}{2}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8m+6\neq 0 \\ m\neq 0 \\ m=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array}\right.$$. **Chọn A.**

Câu 23. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng

$d_1:(m-3)x+2y+m^2-1=0$ và $d_2:-x+my+m^2-2m+1=0$ cắt nhau?

A. $m\neq 1$. **B.** $\begin{cases} m\neq 1 \\ m\neq 2 \end{cases}$. **C.** $m\neq 2$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m\neq 1 \\ m\neq 2 \end{array}\right.$.

Lời giải

$\begin{cases} d_1:(m-3)x+2y+m^2-1=0 \\ d_2:-x+my+m^2-2m+1=0 \end{cases}$

$$\xrightarrow{d_1\cap d_2=M}\left[\begin{array}{l} m=0\to\begin{cases} d_1:-3x+2y-1=0 \\ d_2:-x+1=0 \end{cases}\to \text{thoa man} \\ m\neq 0\to \dfrac{m-3}{-1}\neq\dfrac{2}{m}\Leftrightarrow\begin{cases} m\neq 1 \\ m\neq 2 \end{cases}\end{array}\right.$$. **Chọn B.**

Câu 24. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng

$\Delta_1:\begin{cases} x=m+2t \\ y=1+(m^2+1)t \end{cases}$ và $\Delta_2:\begin{cases} x=1+mt \\ y=m+t \end{cases}$ trùng nhau?

A. Không có m. **B.** $m=\dfrac{4}{3}$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-3$.

Lời giải

$$\begin{cases} \Delta_1:\begin{cases} x=m+2t \\ y=1+(m^2+1)t \end{cases}\to A(m;1)\in d_1,\ \vec{u}_1=(2;m^2+1) \\ \Delta_2:\begin{cases} x=1+mt \\ y=m+t \end{cases}\to \vec{u}_2=(m;1) \end{cases} \xrightarrow{d_1\equiv d_2}\begin{cases} A\in d_2 \\ \dfrac{m}{2}=\dfrac{1}{m^2+1} \end{cases}$$. **Chọn C.**

$$\Leftrightarrow\begin{cases} m=1+mt \\ 1=m+t \\ m^3+m-2=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m=1+m(1-m) \\ (m-1)(m^2+m+2)=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m^2-1=0 \\ m-1=0 \end{cases}\Leftrightarrow m=1.$$

Câu 25. Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $7x-3y+16=0$ và $x+10=0$.

A. $(-10;-18)$. **B.** $(10;18)$. **C.** $(-10;18)$. **D.** $(10;-18)$.

Lời giải

$\begin{cases} d_1:7x-3y+16=0 \\ d_2:x+10=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=-10 \\ y=-18 \end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 26. Tìm toạ độ giao điểm của hai đường thẳng

$d_1:\begin{cases}x=-3+4t\\ y=2+5t\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=1+4t'\\ y=7-5t'\end{cases}$.

A. $(1;7)$. **B.** $(-3;2)$. **C.** $(2;-3)$. **D.** $(5;1)$.

Lời giải

$$\begin{cases}d_1:\begin{cases}x=-3+4t\\ y=2+5t\end{cases}\\ d_2:\begin{cases}x=1+4t'\\ y=7-5t'\end{cases}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3+4t=1+4t'\\ 2+5t=7-5t'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t-t'=1\\ t+t'=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\xrightarrow{\to d_1}\begin{cases}x=1\\ y=7\end{cases}\\ t'=0\end{cases}$$ **Chọn A.**

Câu 27. Cho hai đường thẳng $d_1:2x+3y-19=0$ và $d_2:\begin{cases}x=22+2t\\ y=55+5t\end{cases}$. Tìm toạ độ giao điểm của hai đường thẳng đã cho.

A. $(2;5)$. **B.** $(10;25)$. **C.** $(-1;7)$. **D.** $(5;2)$.

Lời giải

$$\begin{cases}d_1:2x+3y-19=0\\ d_2:\begin{cases}x=22+2t\\ y=55+5t\end{cases}\end{cases}\xrightarrow{d_1\cap d_2}2(22+2t)+3(55+5t)-19=0\Leftrightarrow t=-10\to\begin{cases}x=2\\ y=5\end{cases}.$$

Chọn A.

Câu 28. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-2;0)$, $B(1;4)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=-t\\ y=2-t\end{cases}$. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng AB và d.

A. $(2;0)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(0;-2)$.

Lời giải

$$\begin{cases}A(-2;0),\ B(1;4)\to AB:4x-3y+8=0\\ d:\begin{cases}x=-t\\ y=2-t\end{cases}\to d:x-y+2=0\end{cases}\xrightarrow{AB\cap d}\begin{cases}4x-3y+8=0\\ x-y+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ y=0\end{cases}.$$

Chọn B.

Câu 29. Xác định a để hai đường thẳng $d_1:ax+3y-4=0$ và $d_2:\begin{cases}x=-1+t\\ y=3+3t\end{cases}$ cắt nhau tại một điểm nằm trên trục hoành.

A. $a=1$. **B.** $a=-1$. **C.** $a=2$. **D.** $a=-2$.

Lời giải

$$Ox\cap d_2\leftrightarrow\begin{cases}x=-1+t\\ y=3+3t=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\ y=0\end{cases}\to Ox\cap d_2=A(-2;0)\in d_1$$

$\to -2a-4=0\Leftrightarrow a=-2$. **Chọn D.**

Câu 30. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hai đường thẳng $d_1:4x+3my-m^2=0$ và $d_2:\begin{cases}x=2+t\\ y=6+2t\end{cases}$ cắt nhau tại một điểm thuộc trục tung.

A. $m=0$ hoặc $m=-6$. **B.** $m=0$ hoặc $m=2$.

C. $m=0$ hoặc $m=-2$. **D.** $m=0$ hoặc $m=6$.

Lời giải

$Oy \cap d_2 \leftrightarrow \begin{cases} x = 2+t = 0 \\ y = 6+2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \to Oy \cap d_2 = A(0;2) \in d_1$

$\Leftrightarrow 6m - m^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 6 \end{array}\right.$. **Chọn D.**

Câu 31. Cho ba đường thẳng $d_1: 3x-2y+5=0$, $d_2: 2x+4y-7=0$, $d_3: 3x+4y-1=0$. Phương trình đường thẳng d đi qua giao điểm của d_1 và d_2, và song song với d_3 là:

A. $24x+32y-53=0$. **B.** $24x+32y+53=0$.
C. $24x-32y+53=0$. **D.** $24x-32y-53=0$.

Lời giải

$\begin{cases} d_1: 3x-2y+5=0 \\ d_2: 2x+4y-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{8} \\ y = \dfrac{31}{16} \end{cases} \to d_1 \cap d_2 = A\left(-\dfrac{3}{8}; \dfrac{31}{16}\right)$. Ta có

$\begin{cases} A \in d \\ d \parallel d_3: 3x+4y-1=0 \end{cases} \to \begin{cases} A \in d \\ d: 3x+4y+c=0\ (c \neq -1) \end{cases} \to -\dfrac{9}{8} + \dfrac{31}{4} + c = 0 \Leftrightarrow c = -\dfrac{53}{8}$.

Vậy $d: 3x+4y-\dfrac{53}{8}=0 \Leftrightarrow d_3: 24x+32y-53=0$. **Chọn A.**

Câu 32. Lập phương trình của đường thẳng Δ đi qua giao điểm của hai đường thẳng $d_1: x+3y-1=0$, $d_2: x-3y-5=0$ và vuông góc với đường thẳng $d_3: 2x-y+7=0$.

A. $3x+6y-5=0$. **B.** $6x+12y-5=0$.
C. $6x+12y+10=0$. **D.** $x+2y+10=0$.

Lời giải

$\begin{cases} d_1: x+3y-1=0 \\ d_2: x-3y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -\dfrac{2}{3} \end{cases} \to d_1 \cap d_2 = A\left(3; -\dfrac{2}{3}\right)$. Ta có

$\begin{cases} A \in d \\ d \perp d_3: 2x-y+7=0 \end{cases} \to \begin{cases} A \in d \\ d: x+2y+c=0 \end{cases} \to 3 + 2.\left(-\dfrac{2}{3}\right) + c = 0 \Leftrightarrow c = -\dfrac{5}{3}$.

Vậy $d: x+2y-\dfrac{5}{3}=0 \Leftrightarrow d: 3x+6y-5=0$. **Chọn A.**

Câu 33. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ba đường thẳng lần lượt có phương trình $d_1: 3x-4y+15=0$, $d_2: 5x+2y-1=0$ và $d_3: mx-(2m-1)y+9m-13=0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để ba đường thẳng đã cho cùng đi qua một điểm.

A. $m = \dfrac{1}{5}$. **B.** $m = -5$. **C.** $m = -\dfrac{1}{5}$. **D.** $m = 5$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} d_1: 3x-4y+15=0 \\ d_2: 5x+2y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \to d_1 \cap d_2 = A(-1;3) \in d_3$

$\to -m - 6m + 3 + 9m - 13 = 0 \Leftrightarrow m = 5$. **Chọn D.**

Câu 34. Nếu ba đường thẳng

$d_1:\ 2x+y-4=0$, $d_2: 5x-2y+3=0$ và $d_3: mx+3y-2=0$

đồng quy thì m nhận giá trị nào sau đây?

A. $\frac{12}{5}$. **B.** $-\frac{12}{5}$. **C.** 12. **D.** -12.

Lời giải

$$\begin{cases} d_1:\ 2x+y-4=0 \\ d_2: 5x-2y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{9} \\ y=\frac{26}{9} \end{cases} \to d_1 \cap d_2 = A\left(\frac{5}{9};\frac{26}{9}\right) \in d_3$$

$\to \frac{5m}{9}+\frac{26}{3}-2=0 \Leftrightarrow m=-12$. **Chọn D.**

Câu 35. Với giá trị nào của m thì ba đường thẳng $d_1: 3x-4y+15=0$, $d_2: 5x+2y-1=0$ và $d_3: mx-4y+15=0$ đồng quy?

A. $m=-5$. **B.** $m=5$. **C.** $m=3$. **D.** $m=-3$.

Lời giải

$$\begin{cases} d_1: 3x-4y+15=0 \\ d_2: 5x+2y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases} \to d_1 \cap d_2 = A(-1;3) \in d$$

$\to -m-12+15=0 \Leftrightarrow m=3$. **Chọn C.**

Câu 36. Với giá trị nào của m thì ba đường thẳng $d_1: 2x+y-1=0$, $d_2: x+2y+1=0$ và $d_3: mx-y-7=0$ đồng quy?

A. $m=-6$. **B.** $m=6$. **C.** $m=-5$. **D.** $m=5$.

Lời giải

$$\begin{cases} d_1: 2x+y-1=0 \\ d_2: x+2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \to d_1 \cap d_2 = A(1;-1) \in d_3 \Leftrightarrow m+1-7=0 \Leftrightarrow m=6.$$

Chọn B.

Câu 37. Đường thẳng $d: 51x-30y+11=0$ đi qua điểm nào sau đây?

A. $M\left(-1;-\frac{4}{3}\right)$. **B.** $N\left(-1;\frac{4}{3}\right)$. **C.** $P\left(1;\frac{3}{4}\right)$. **D.** $Q\left(-1;-\frac{3}{4}\right)$.

Lời giải

Đặt $f(x;y)=51x-30y+11 \longrightarrow \begin{cases} f(M)=f\left(-1;-\frac{4}{3}\right)=0 \to M \in d \\ f(N)=f\left(-1;\frac{4}{3}\right)=-80 \neq 0 \to N \notin d \\ f(P) \neq 0 \\ f(Q) \neq 0 \end{cases}$.

Chọn A.

Dạng 2. Góc của hai đường thẳng

Câu 38. Tính góc giữa hai đường thẳng $\Delta: x-\sqrt{3}y+2=0$ và $\Delta': x+\sqrt{3}y-1=0$.

A. 90°. **B.** 120°. **C.** 60°. **D.** 30°.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng Δ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left(1;-\sqrt{3}\right)$, đường thẳng Δ' có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n'}=\left(1;\sqrt{3}\right)$.

Gọi α là góc giữa hai đường thẳng Δ,Δ'. $\cos\alpha=\left|\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{n'}\right)\right|=\dfrac{|1-3|}{\sqrt{1+3}.\sqrt{1+3}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\alpha=60^{\circ}$.

Câu 39. Góc giữa hai đường thẳng $a:\sqrt{3}x-y+7=0$ và $b:x-\sqrt{3}y-1=0$ là:

A. $30°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn A.

Đường thẳng a có vectơ pháp tuyến là: $\overrightarrow{n_1}=\left(\sqrt{3};-1\right)$;

Đường thẳng b có vectơ pháp tuyến là: $\overrightarrow{n_2}=\left(1;-\sqrt{3}\right)$.

Áp dụng công thức tính góc giữa hai đường thẳng có:

$\cos\left(a,b\right)=\dfrac{\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{1.\sqrt{3}+(-1)\left(-\sqrt{3}\right)}{2.2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Suy ra góc giữa hai đường thẳng bằng $30°$.

Câu 40. Cho hai đường thẳng $d_1:2x+5y-2=0$ và $d_2:3x-7y+3=0$. Góc tạo bởi đường thẳng d_1 và d_2 bằng

A. 30^0. **B.** 135^0. **C.** 45^0. **D.** 60^0.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng $d_1:2x+5y-2=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1=(2;5)$.

Đường thẳng $d_2:3x-7y+3=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2=(3;-7)$.

Góc giữa hai đường thẳng được tính bằng công thức

$$\cos\left(d_1,d_2\right)=\left|\cos\left(\vec{n}_1,\vec{n}_2\right)\right|=\dfrac{\left|\vec{n}_1.\vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right|.\left|\vec{n}_2\right|}=\dfrac{|2.3+5.(-7)|}{\sqrt{2^2+5^2}.\sqrt{3^2+(-7)^2}}=\dfrac{29}{29\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow\left(d_1;d_2\right)=45^0$

Vậy góc tạo bởi đường thẳng d_1 và d_2 bằng 45^0.

Câu 41. Tìm côsin góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1:2x+y-1=0$ và $\Delta_2:\begin{cases}x=2+t\\y=1-t\end{cases}$

A. $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. **B.** $\dfrac{3}{10}$. **C.** $\dfrac{3}{5}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

Lời giải

Chọn D

Véctơ pháp tuyến của đường thẳng Δ_1 là $\vec{n}=(2;1)$ nên véctơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-2)$

Véctơ chỉ phương của đường thẳng Δ_2 là $\overrightarrow{u'}=(1;-1)$

Khi đó $\cos\left(\Delta_1;\Delta_2\right)=\left|\cos\left(\vec{u};\overrightarrow{u'}\right)\right|=\dfrac{\left|\vec{u}.\overrightarrow{u'}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\overrightarrow{u'}\right|}=\dfrac{3}{\sqrt{5}.\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

Câu 42. Tìm góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1: x-2y+15=0$ và $\Delta_2: \begin{cases} x=2-t \\ y=4+2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

A. 5°. **B.** 60°. **C.** 0°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng Δ_1 có VTPT là $\overrightarrow{n_1}(1;-2) \Rightarrow 1VTCP(2;1)$

Đường thẳng Δ_2 có $1VTCP(-1;2)$.

Nhận xét: $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}=0 \Rightarrow \overrightarrow{u_1} \perp \overrightarrow{u_2} \Rightarrow \Delta_1 \perp \Delta_2 \Rightarrow (\Delta_1, \Delta_2)=90^\circ$.

Câu 43. Tìm cosin góc giữa 2 đường thẳng $d_1: x+2y-7=0, d_2: 2x-4y+9=0$.

A. $\frac{3}{\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $vtpt\vec{n}_{d_1}=(1;2); vtpt\vec{n}_{d_2}=(2;-4)$

$$cos(d;d')=\frac{|\vec{n}_{d_1}.\vec{n}_{d_2}|}{|\vec{n}_{d_1}|.|\vec{n}_{d_2}|}=\frac{|1.2-2.4|}{\sqrt{5}.2\sqrt{5}}=\frac{3}{5}.$$

Câu 44. Tính góc giữa hai đường thẳng $\Delta: x-\sqrt{3}y+2=0$ *và* $\Delta': x+\sqrt{3}y-1=0$?

A. 90°. **B.** 120°. **C.** 60°. **D.** 30°.

Lời giải

Chọn C

Δ có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}=(1;-\sqrt{3})$. Δ' có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2}=(1;\sqrt{3})$.

Khi đó:

$$\cos(\Delta;\Delta')=|\cos(\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2})|=\frac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{|1.1+(-\sqrt{3})\sqrt{3}|}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}.\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}=\frac{|-2|}{\sqrt{4}.\sqrt{4}}=\frac{1}{2}.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng Δ, Δ' là 60^0.

Câu 45. Tính góc tạo bởi giữa hai đường thẳng

$d_1: 2x-y-10=0$ và $d_2: x-3y+9=0.$

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 135°.

Lời giải

Ta có

$$\begin{cases} d_1: 2x-y-10=0 \to \vec{n}_1=(2;-1) \\ d_2: x-3y+9=0 \to \vec{n}_2=(1;-3) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos\varphi=\frac{|2.1+(-1).(-3)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}.\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\to \varphi=45^\circ$. **Chọn B.**

Câu 46. Tính góc tạo bởi giữa hai đường thẳng

$d_1: 7x-3y+6=0$ và $d_2: 2x-5y-4=0.$

A. $\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{3}$. **C.** $\frac{2\pi}{3}$. **D.** $\frac{3\pi}{4}$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{cases} d_1: 7x-3y+6=0 \to \vec{n}_1=(7;-3) \\ d_2: 2x-5y-4=0 \to \vec{n}_2=(2;-5) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos\varphi = \frac{|14+15|}{\sqrt{49+9}.\sqrt{4+25}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \to \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Chọn#A.

Câu 47. Tính góc tạo bởi giữa hai đường thẳng $d_1: 2x+2\sqrt{3}y+5=0$ và $d_2: y-6=0$.

A. 30^{o}. **B.** 45^{o}. **C.** 60^{o}. **D.** 90^{o}.

Lời giải

Ta có

$$\begin{cases} d_1: 2x+2\sqrt{3}y+5=0 \to \vec{n}_1=(1;\sqrt{3}) \\ d_2: y-6=0. \to \vec{n}_2=(0;1) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos\varphi = \frac{|\sqrt{3}|}{\sqrt{1+3}.\sqrt{0+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \to \varphi = 30^\circ.$$

Chọn A.

Câu 48. Tính góc tạo bởi giữa hai đường thẳng $d_1: x+\sqrt{3}y=0$ và $d_2: x+10=0$.

A. 30^{o}. **B.** 45^{o}. **C.** 60^{o}. **D.** 90^{o}.

Lời giải

$$\begin{cases} d_1: x+\sqrt{3}y=0 \to \vec{n}_1=(1;\sqrt{3}) \\ d_2: x+10=0 \to \vec{n}_2=(1;0) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos\varphi = \frac{|1+0|}{\sqrt{1+3}.\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}$$

$\to \varphi = 60^\circ$. **Chọn C.**

Câu 49. Tính góc tạo bởi giữa hai đường thẳng

$d_1: 6x-5y+15=0$ và $d_2: \begin{cases} x=10-6t \\ y=1+5t \end{cases}$.

A. 30^{o}. **B.** 45^{o}. **C.** 60^{o}. **D.** 90^{o}.

Lời giải

$$\begin{cases} d_1: 6x-5y+15=0 \to \vec{n}_1=(6;-5) \\ d_2: \begin{cases} x=10-6t \\ y=1+5t \end{cases} \to \vec{n}_2=(5;6) \end{cases} \to \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0 \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \varphi=90^\circ.$$ **Chọn D.**

Câu 50. Cho đường thẳng $d_1: x+2y-7=0$ và $d_2: 2x-4y+9=0$. Tính cosin của góc tạo bởi giữa hai đường thẳng đã cho.

A. $-\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

$$\begin{cases} d_1: x+2y-7=0 \to \vec{n}_1=(1;2) \\ d_2: 2x-4y+9=0 \to \vec{n}_2=(1;-2) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos\varphi = \frac{|1-4|}{\sqrt{1+4}.\sqrt{1+4}} = \frac{3}{5}.$$ **Chọn C.**

Câu 51. Cho đường thẳng $d_1: x+2y-2=0$ và $d_2: x-y=0$. Tính cosin của góc tạo bởi giữa hai đường thẳng đã cho.

A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

$$\begin{cases} d_1: x+2y-2=0 \to \vec{n}_1=(1;2) \\ d_2: x-y=0 \to \vec{n}_2=(1;-1) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos\varphi = \frac{|1-2|}{\sqrt{1+4}.\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$ **Chọn A.**

Câu 52. Cho đường thẳng $d_1: 10x+5y-1=0$ và $d_2: \begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \end{cases}$. Tính cosin của góc tạo bởi giữa hai đường thẳng đã cho.

A. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **D.** $\frac{3}{10}$.

Lời giải

$$\begin{cases} d_1: 10x+5y-1=0 \to \vec{n}_1=(2;1) \\ d_2: \begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \end{cases} \to \vec{n}_2=(1;1) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos\varphi = \frac{|2+1|}{\sqrt{4+1}.\sqrt{1+1}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$ **Chọn A.**

Câu 53. Cho đường thẳng $d_1: 3x+4y+1=0$ và $d_2: \begin{cases} x=15+12t \\ y=1+5t \end{cases}$.

Tính cosin của góc tạo bởi giữa hai đường thẳng đã cho.

A. $\frac{56}{65}$. **B.** $-\frac{33}{65}$. **C.** $\frac{6}{65}$. **D.** $\frac{33}{65}$.

Lời giải

$$\begin{cases} d_1: 3x+4y+1=0 \to \vec{n}_1=(3;4) \\ d_2: \begin{cases} x=15+12t \\ y=1+5t \end{cases} \to \vec{n}_2=(5;-12) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos\varphi = \frac{|15-48|}{\sqrt{9+16}.\sqrt{25+144}} = \frac{33}{65}.$$

Chọn D.

Câu 54. Xác định tất cả các giá trị của a để góc tạo bởi đường thẳng $\begin{cases} x=9+at \\ y=7-2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ và đường thẳng $3x+4y-2=0$ bằng $45°$.

A. $a=1$, $a=-14$. **B.** $a=\frac{2}{7}$, $a=-14$. **C.** $a=-2$, $a=-14$. **D.** $a=\frac{2}{7}$, $a=14$.

Lời giải

Chọn B

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng đã cho.

Đường thẳng $\begin{cases} x=9+at \\ y=7-2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(a;-2)$.

Đường thẳng $3x+4y-2=0$ có vectơ chỉ phương là $\vec{v}=(4;-3)$.

Ta có $\cos\varphi = |\cos(\vec{u},\vec{v})| \Leftrightarrow \cos 45° = \frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|4a+6|}{5\sqrt{a^2+4}}$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{a^2+4} = \sqrt{2}|4a+6| \Leftrightarrow 25a^2+100 = 32a^2+96a+72$

$\Leftrightarrow 7a^2+96a-28=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\frac{2}{7} \\ a=-14 \end{array}\right.$.

Câu 55. Đường thẳng Δ đi qua giao điểm của hai đường thẳng $d_1: 2x+y-3=0$ và $d_2: x-2y+1=0$ đồng thời tạo với đường thẳng $d_3: y-1=0$ một góc 45^0 có phương trình:

A. $x+(1-\sqrt{2})y=0$ hoặc $\Delta: x-y-1=0$. **B.** $\Delta: x+2y=0$ hoặc $\Delta: x-4y=0$.

C. $\Delta: x-y=0$ hoặc $\Delta: x+y-2=0$. **D.** $\Delta: 2x+1=0$ hoặc $y+5=0$..

Lời giải

$$\begin{cases} d_1: 2x+y-3=0 \\ d_2: x-2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \to d_1 \cap d_2 = A(1;1) \in \Delta.$$

Ta có $d_3: y-1=0 \to \vec{n}_3=(0;1)$, gọi $\vec{n}_\Delta=(a;b)$, $\varphi=(\Delta; d_3)$. Khi đó

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\varphi = \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{0+1}} \Leftrightarrow a^2+b^2=2b^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \to a=b=1 \to \Delta: x+y-2=0 \\ a=-b \to a=1, b=-1 \to \Delta: x-y=0 \end{array}\right..$$

Chọn C.

Câu 56. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, có bao nhiêu đường thẳng đi qua điểm $A(2;0)$ và tạo với trục hoành một góc $45°$?

A. Có duy nhất. **B.** 2.

C. Vô số. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Chọn B.

Cho đường thẳng d và một điểm A. Khi đó.

(i) Có duy nhất một đường thẳng đi qua A song song hoặc trùng hoặc vuông góc với d.

(ii) Có đúng hai đường thẳng đi qua A và tạo với d một góc $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Câu 57. Đường thẳng Δ tạo với đường thẳng $d: x+2y-6=0$ một góc 45^0. Tìm hệ số góc k của đường thẳng Δ.

A. $k=\frac{1}{3}$ hoặc $k=-3$. **B.** $k=\frac{1}{3}$ hoặc $k=3$.

C. $k=-\frac{1}{3}$ hoặc $k=-3$. **D.** $k=-\frac{1}{3}$ hoặc $k=3$.

Lời giải

$d: x+2y-6=0 \to \vec{n}_d=(1;2)$, gọi $\vec{n}_\Delta=(a;b) \to k_\Delta=-\frac{a}{b}$. Ta có

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ = \frac{|a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{5}} \Leftrightarrow 5(a^2+b^2) = 2a^2+8ab+8b^2$$

$$\Leftrightarrow 3a^2-8ab-3b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-\frac{1}{3}b \to k_\Delta=\frac{1}{3} \\ a=3b \to k_\Delta=-3 \end{array}\right.. \textbf{ Chọn A.}$$

Câu 58. Biết rằng có đúng hai giá trị của tham số k để đường thẳng $d: y=kx$ tạo với đường thẳng $\Delta: y=x$ một góc 60^0. Tổng hai giá trị của k bằng:

A. -8. **B.** -4. **C.** -1. **D.** -1.

Lời giải

$$\begin{cases} d: y=kx \to \vec{n}_d=(k;-1) \\ \Delta: y=x \to \vec{n}_\Delta=(1;-1) \end{cases} \longrightarrow \frac{1}{2} = \cos 60^\circ = \frac{|k+1|}{\sqrt{k^2+1}.\sqrt{2}} \Leftrightarrow k^2+1=2k^2+4k+2$$

$$\Leftrightarrow k^2+4k+1=0 \xrightarrow{\text{sol}: k=k_1,\, k=k_2} k_1+k_2=-4.$$

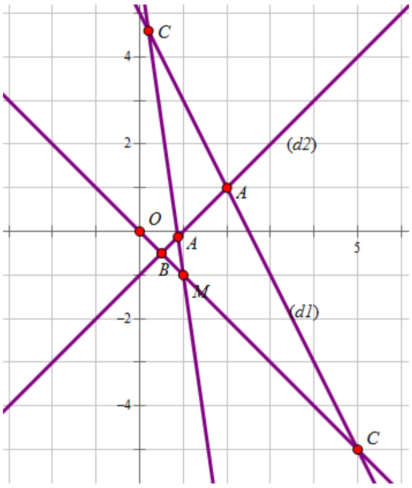
Chọn B.

Câu 59. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(1;-1)$ và hai đường thẳng có phương trình $(d_1): x-y-1=0, (d_2): 2x+y-5=0$. Gọi A là giao điểm của hai đường thẳng trên. Biết rằng có hai đường thẳng (d) đi qua M cắt hai đường thẳng trên lần lượt tại hai điểm B, C sao cho ABC là tam giác có $BC=3AB$ có dạng: $ax+y+b=0$ và $cx+y+d=0$, giá trị của $T=a+b+c+d$ là

A. $T=5$. **B.** $T=6$. **C.** $T=2$. **D.** $T=0$.

Lời giải

Chọn C



Tọa độ $A(2;1)$

Gọi α là góc giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2), $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$

Xét tam giác ABC ta có: $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \sin C = \frac{1}{\sqrt{10}}$

Gọi β là góc giữa hai đường thẳng (d) và (d_1), suy ra: $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ (1)

Giả sử (d) có vec tơ pháp tuyến là $\vec{n}(a;b)$

Từ (1) ta có: $\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow \frac{|2a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow a^2-8ab+b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=7b \end{array}\right.$

Với $a=b$ một vec tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1) \Rightarrow d: x+y=0$

Với $a=7b$ một vec tơ pháp tuyến $\vec{n}(7;1) \Rightarrow d: 7x+y-6=0$

Vậy: $T=1+0+7-6=2$

Dạng 3. Khoảng cách

Câu 60. Khoảng cách từ điểm $A(1;1)$ đến đường thẳng $5x-12y-6=0$ là

A. 13. **B.** -13. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Khoảng cách từ điểm $A(1;1)$ đến đường thẳng $\Delta: 5x-12y-6=0$ là

$$d(A,\Delta) = \frac{|5.1-12.1-6|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}} = 1.$$

Câu 61. Khoảng cách từ điểm $M\left(5;-1\right)$ đến đường thẳng $3x+2y+13=0$ là:

A. $2\sqrt{13}$. **B.** $\frac{28}{\sqrt{13}}$. **C.** 26. **D.** $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Khoảng cách $d=\frac{\left|3.5+2.\left(-1\right)+13\right|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{26}{\sqrt{13}}=2\sqrt{13}$.

Câu 62. Khoảng cách từ điểm $M(1;-1)$ đến đường thẳng $\Delta:3x+y+4=0$ là

A. 1. **B.** $\frac{3\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $2\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn B

Khoảng cách từ điểm $M(1;-1)$ đến đường thẳng $\Delta:3x+y+4=0$ là

$d\left(M;\Delta\right)=\frac{\left|3.1-1+4\right|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$.

Câu 63. Trong mặt phẳng Oxy, khoảng cách từ điểm $M\left(3;-4\right)$ đến đường thẳng $\Delta:3x-4y-1=0$.

A. $\frac{8}{5}$. **B.** $\frac{24}{5}$. **C.** $\frac{12}{5}$. **D.** $-\frac{24}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $d\left(M,\Delta\right)=\frac{\left|3.3-4.\left(-4\right)-1\right|}{\sqrt{3^2+\left(-4\right)^2}}=\frac{24}{5}$.

Câu 64. Khoảng cách từ điểm $A(-3;2)$ đến đường thẳng $\Delta:3x-y+1=0$ bằng:

A. $\sqrt{10}$. **B.** $\frac{11\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{10\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{11}{\sqrt{10}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $d\left(A;\Delta\right)=\frac{\left|3.\left(-3\right)-2+1\right|}{\sqrt{3^2+\left(-1\right)^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}.$

Câu 65. Trong mặt phẳng Oxy, khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng $d:4x-3y+1=0$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $d\left(O,d\right)=\frac{\left|4.0-3.0+1\right|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{1}{5}$.

Câu 66. Một đường tròn có tâm $I\left(3;-2\right)$ tiếp xúc với đường thẳng $\Delta:x-5y+1=0$. Hỏi bán kính đường tròn bằng bao nhiêu?

A. $\frac{14}{\sqrt{26}}$. **B.** $\frac{7}{13}$. **C.** $\sqrt{26}$. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Gọi bán kính của đường tròn là R. Khi đó: $R=d\left(I,\Delta\right)=\frac{\left|3-5.(-2)+1\right|}{\sqrt{1^2+(-5)^2}}=\frac{14}{\sqrt{26}}$.

Câu 67. Trong mặt phẳng Oxy, khoảng cách từđiểm $M\left(0;4\right)$ đến đường thẳng $\Delta: x\,cos\alpha+y\,sin\alpha+4\left(2-sin\alpha\right)=0$ bằng

A. $\sqrt{8}$. **B.** $4sin\alpha$. **C.** $\frac{4}{cos\alpha+sin\alpha}$. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $d\left(M,\Delta\right)=\frac{\left|0.\,cos\alpha+4.\,sin\alpha+4\left(2-sin\alpha\right)\right|}{\sqrt{cos^2\alpha+sin^2\alpha}}=8$.

Câu 68. Khoảng cách từ $I(1;-2)$ đến đường thẳng $\Delta:3x-4y-26=0$ bằng

A. 3. **B.** 12. **C.** 5. **D.** $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Khoảng cách từ điểm $M(x_0;y_0)$ đến đường thẳng $\Delta:\ ax+by+c=0$ là: $d(M,\Delta)=\frac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Vậy khoảng cách từ $I(1;-2)$ đến đường thẳng $\Delta:3x-4y-26=0$ bằng $d(I,\Delta)=\frac{\left|3.1-4.(-2)-26\right|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=3$

Câu 69. Khoảng cách từ giao điểm của hai đường thẳng $x-3y+4=0$ và $2x+3y-1=0$ đến đường thẳng $\Delta:3x+y+4=0$ bằng:

A. $2\sqrt{10}$. **B.** $\frac{3\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{10}}{5}$. **D.** 2.

Lời giải

$\begin{cases}x-3y+4=0\\2x+3y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}\to A\left(-1;1\right)\to d\left(A;\Delta\right)=\frac{\left|-3+1+4\right|}{\sqrt{9+1}}=\frac{2}{\sqrt{10}}$. **Chọn C.**

Câu 70. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A\left(1;2\right)$, $B\left(0;3\right)$ và $C\left(4;0\right)$. Chiều cao của tam giác kẻ từ đỉnh A bằng:

A. $\frac{1}{5}$. **B.** 3. **C.** $\frac{1}{25}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Lời giải

$\begin{cases}A\left(1;2\right)\\B\left(0;3\right),\,C\left(4;0\right)\to BC:3x+4y-12=0\end{cases}\to h_A=d\left(A;BC\right)=\frac{\left|3+8-12\right|}{\sqrt{9+16}}=\frac{1}{5}$.

Chọn A.

Câu 71. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(3;-4)$, $B(1;5)$ và $C(3;1)$. Tính diện tích tam giác ABC.

A. 10. **B.** 5. **C.** $\sqrt{26}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Lời giải

Cách 1: $\begin{cases} A(3;-4) \\ B(1;5), C(3;1) \end{cases} \to \begin{cases} A(3;-4) \\ BC = 2\sqrt{5} \\ BC: 2x+y-7=0 \end{cases} \to \begin{cases} BC = 2\sqrt{5} \\ h_A = d(A;BC) = \sqrt{5} \end{cases}$

$\to S_{ABC} = \frac{1}{2}.2\sqrt{5}.\sqrt{5} = 5$. **Chọn B.**

Cách 2: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2 - \left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2}$.

Câu 72. Khoảng cách từ điểm $M(0;3)$ đến đường thẳng

$\Delta: x\cos\alpha + y\sin\alpha + 3(2-\sin\alpha) = 0$ bằng:

A. $\sqrt{6}$. **B.** 6. **C.** $3\sin\alpha$. **D.** $\frac{3}{\cos\alpha+\sin\alpha}$.

Lời giải

$d(M;\Delta) = \frac{|3\sin\alpha + 3(2-\sin\alpha)|}{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}} = 6$. **Chọn B.**

Câu 73. Khoảng cách từ điểm $M(2;0)$ đến đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2+4t \end{cases}$ bằng:

A. 2. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** $\frac{10}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

$\Delta: \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2+4t \end{cases} \to \Delta: 4x-3y+2=0 \to d(M;\Delta) = \frac{|8+0+2|}{\sqrt{16+9}} = 2$. **Chọn A.**

Câu 74. Khoảng cách nhỏ nhất từ điểm $M(15;1)$ đến một điểm bất kì thuộc đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2+3t \\ y = t \end{cases}$ bằng:

A. $\sqrt{10}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{10}}$. **C.** $\frac{16}{\sqrt{5}}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

$\Delta: \begin{cases} x = 2+3t \\ y = t \end{cases} \to \Delta: x-3y-2=0 \xrightarrow{\forall N\in\Delta} MN_{\min} = d(M;\Delta) = \frac{|15-3-2|}{\sqrt{1+9}} = \sqrt{10}$.

Chọn A.

Câu 75. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để khoảng cách từ điểm $A(-1;2)$ đến đường thẳng $\Delta: mx+y-m+4=0$ bằng $2\sqrt{5}$.

A. $m=2$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=\frac{1}{2} \end{array}\right.$. **C.** $m=-\frac{1}{2}$. **D.** Không tồn tại m.

Lời giải

$$d\left(A;\Delta\right)=\frac{\left|-m+2-m+4\right|}{\sqrt{m^2+1}}=2\sqrt{5}\Leftrightarrow\left|m-3\right|=\sqrt{5}.\sqrt{m^2+1}\Leftrightarrow 4m^2+6m-4=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\\ m=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$. **Chọn B.**

Câu 76. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để khoảng cách từ giao điểm của hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=t\\ y=2-t\end{cases}$ và $d_2:x-2y+m=0$ đến gốc toạ độ bằng 2.

A. $\left[\begin{array}{l}m=-4\\ m=2\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m=-4\\ m=-2\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m=4\\ m=2\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m=4\\ m=-2\end{array}\right.$.

Lời giải

$$\begin{cases}d_1:\begin{cases}x=t\\ y=2-t\end{cases}\\ d_2:x-2y+m=0\end{cases}\to\begin{cases}d_1:x+y-2=0\\ d_2:x-2y+m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4-m\\ y=m-2\end{cases}$$

$\to M\left(4-m;m-2\right)=d_1\cap d_2$.

Khi đó: $OM=2\Leftrightarrow\left(4-m\right)^2+\left(m-2\right)^2=4\Leftrightarrow m^2-6m+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\ m=4\end{array}\right.$. **Chọn C.**

Câu 77. Đường tròn $\left(C\right)$ có tâm là gốc tọa độ $O\left(0;0\right)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta:8x+6y+100=0$. Bán kính R của đường tròn $\left(C\right)$ bằng:

A. $R=4$. **B.** $R=6$. **C.** $R=8$. **D.** $R=10$.

Lời giải

$R=d\left(O;\Delta\right)=\dfrac{|100|}{\sqrt{64+36}}=10$. **Chọn D.**

Câu 78. Đường tròn $\left(C\right)$ có tâm $I\left(-2;-2\right)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta:5x+12y-10=0$. Bán kính R của đường tròn $\left(C\right)$ bằng:

A. $R=\dfrac{44}{13}$. **B.** $R=\dfrac{24}{13}$. **C.** $R=44$. **D.** $R=\dfrac{7}{13}$.

Lời giải

$R=d\left(I;\Delta\right)=\dfrac{\left|-10-24-10\right|}{\sqrt{25+144}}=\dfrac{44}{13}$. **Chọn A.**

Câu 79. Cho đường thẳng $d:21x-11y-10=0$. Trong các điểm $M\left(21;-3\right)$, $N\left(0;4\right)$, $P\left(-19;5\right)$ và $Q\left(1;5\right)$ điểm nào gần đường thẳng d nhất?

A. M. **B.** N. **C.** P. **D.** Q.

Lời giải

$$f\left(x;y\right)=\left|21x-11y-10\right|\to\begin{cases}f\left(M\left(21;-3\right)\right)=464\\ f\left(N\left(0;4\right)\right)=54\\ f\left(P\left(-19;5\right)\right)=464\\ f\left(Q\left(1;5\right)\right)=44\end{cases}$$. **Chọn D.**

Câu 80. Cho đường thẳng $d: 7x+10y-15=0$. Trong các điểm $M(1;-3)$, $N(0;4)$, $P(-19;5)$ và $Q(1;5)$ điểm nào cách xa đường thẳng d nhất?

A. M. **B.** N. **C.** P. **D.** Q.

Lời giải

$$f(x;y)=|7x+10y-15| \to \begin{cases} f(M(1;-3))=38 \\ f(N(0;4))=25 \\ f(P(-19;5))=98 \\ f(Q(1;5))=42 \end{cases}.$$ **Chọn C.**

Câu 81. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song $\Delta_1: 6x-8y+3=0$ và $\Delta_2: 3x-4y-6=0$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 2. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

$$\begin{cases} A(2;0)\in\Delta_2 \\ \Delta_2 \parallel \Delta_1: 6x-8y+3=0 \end{cases} \to d(\Delta_1;\Delta_2)=d(A;\Delta_1)=\frac{|12+3|}{\sqrt{100}}=\frac{3}{2}.$$ **Chọn B.**

Câu 82. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $d: 7x+y-3=0$ và $\Delta: \begin{cases} x=-2+t \\ y=2-7t \end{cases}$.

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** 15. **C.** 9. **D.** $\frac{9}{\sqrt{50}}$.

Lời giải

$$\begin{cases} A(-2;2)\in\Delta,\ \vec{n}_\Delta=(7;1) \\ d: 7x+y-3=0 \to \vec{n}_d=(7;1) \end{cases}$$

$$\to \Delta \uparrow\uparrow d \to d(d;\Delta)=d(A;d)=\frac{|-14+2-3|}{\sqrt{50}}=\frac{3}{\sqrt{2}}.$$ **Chọn A.**

Câu 83. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song $d_1: 6x-8y-101=0$ và $d_2: 3x-4y=0$ bằng:

A. $10,1$. **B.** $1,01$. **C.** 101. **D.** $\sqrt{101}$.

Lời giải

$$\begin{cases} A(4;3)\in d_2 \\ d_2 \parallel d_1: 6x-8y-101=0 \end{cases} \to d(d_1;d_2)=\frac{|24-24-101|}{\sqrt{100}}=\frac{101}{10}=10,1.$$ **Chọn A.**

Câu 84. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2;3)$ và $B(1;4)$. Đường thẳng nào sau đây cách đều hai điểm A và B?

A. $x-y+2=0$. **B.** $x+2y=0$. **C.** $2x-2y+10=0$. **D.** $x-y+100=0$.

Lời giải

Đường thẳng cách đều hai điểm A, B thì đường thẳng đó hoặc song song (hoặc trùng) với AB, hoặc đi qua trung điểm I của đoạn AB.

Ta có: $\begin{cases} A(2;3) \\ B(1;4) \end{cases} \to \begin{cases} I\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{7}{2}\right) \\ \overrightarrow{AB}=(-1;1) \to \vec{n}_{AB}=(1;1) \end{cases} \to AB \parallel d: x-y-2=0.$ **Chọn A.**

Câu 85. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(0;1)$, $B(12;5)$ và $C(-3;0)$. Đường thẳng nào sau đây cách đều ba điểm $A,\ B$ và C.

A. $x-3y+4=0$. **B.** $-x+y+10=0$. **C.** $x+y=0$. **D.** $5x-y+1=0$.

Lời giải

Dễ thấy ba điểm A, B, C thẳng hàng nên đường thẳng cách điều A, B, C khi và chỉ khi chúng song song hoặc trùng với AB.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(12;4) \to \vec{n}_{AB}=(1;-3) \to AB \parallel d: x-3y+4=0.$ **Chọn A.**

Câu 86. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;1)$, $B(-2;4)$ và đường thẳng $\Delta: mx-y+3=0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để Δ cách đều hai điểm $A,\ B$.

A. $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=1 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-2 \end{array}\right.$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm đoạn $AB \to \begin{cases} I\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right) \\ \overrightarrow{AB}=(-3;3) \to \vec{n}_{AB}=(1;1) \end{cases}$.

Khi đó: $\Delta: mx-y+3=0\ \left(\vec{n}_{\Delta}=(m;-1)\right)$ cách đều A,B

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} I \in \Delta \\ \dfrac{m}{1}=\dfrac{-1}{1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{m}{2}-\dfrac{5}{2}+3=0 \\ m=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-1 \end{array}\right.$. **Chọn C.**

Câu 87. Đường thẳng Δ song song với đường thẳng $d: 3x-4y+1=0$ và cách d một khoảng bằng 1 có phương trình:

A. $3x-4y+6=0$ hoặc $3x-4y-4=0$.

B. $3x-4y-6=0$ hoặc $3x-4y+4=0$.

C. $3x-4y+6=0$ hoặc $3x-4y+4=0$.

D. $3x-4y-6=0$ hoặc $3x-4y-4=0$.

Lời giải

$\begin{cases} d: 3x-4y+1=0 \to M(1;1) \in d \\ \Delta \parallel d \to \Delta: 3x-4y+c=0 \end{cases} \to 1=d(d;\Delta)=d(M;\Delta)=\dfrac{|c-1|}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=-4 \\ c=6 \end{array}\right.$.

Chọn A.

Câu 88. Tập hợp các điểm cách đường thẳng $\Delta: 3x-4y+2=0$ một khoảng bằng 2 là hai đường thẳng có phương trình nào sau đây?

A. $3x-4y+8=0$ hoặc $3x-4y+12=0$.

B. $3x-4y-8=0$ hoặc $3x-4y+12=0$.

C. $3x-4y-8=0$ hoặc $3x-4y-12=0$.

D. $3x-4y+8=0$ hoặc $3x-4y-12=0$.

Lời giải

$d\left(M\left(x;y\right);\Delta\right)=2 \Leftrightarrow \frac{\left|3x-4y+2\right|}{5}=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x-4y+12=0\\3x-4y-8=0\end{array}\right.$. **Chọn B.**

Câu 89. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: 5x+3y-3=0$ và $d_2: 5x+3y+7=0$ song song nhau. Đường thẳng vừa song song và cách đều với d_1, d_2 là:

A. $5x+3y-2=0$. **B.** $5x+3y+4=0$.

C. $5x+3y+2=0$. **D.** $5x+3y-4=0$.

Lời giải

$$d\left(M\left(x;y\right);d_1\right)=d\left(M\left(x;y\right);d_2\right) \Leftrightarrow \frac{\left|5x+3y-3\right|}{\sqrt{34}}=\frac{\left|5x+3y+7\right|}{\sqrt{34}} \Leftrightarrow 5x+3y+2=0.$$

Chọn C.

Câu 90. Trong mặt phẳng tọa độ $\mathrm{Ox}y$, gọi d là đường thẳng đi qua $M(4;2)$ và cách điểm $A(1;0)$ khoảng cách $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. Biết rằng phương trình đường thẳng d có dạng $x+by+c=0$ với b,c là hai số nguyên. Tính $b+c$.

A. 4. **B.** 5. **C.** -1. **D.** -5.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $M(4;2)\in d \Leftrightarrow 4+2b+c=0 \Rightarrow c=-4-2b.$ (1)

$d(A,d)=\frac{\left|1+c\right|}{\sqrt{1+b^2}}=\frac{3\sqrt{10}}{10} \Leftrightarrow 10(1+c)^2=9(1+b^2).$ (2)

Thay $c=-4-2b$ vào PT (2) ta được PT: $31b^2+120b+81=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}b=-3(tmdk)\\b=-\frac{27}{31}(ktmdk)\end{array}\right.$

$\Rightarrow b=-3, c=2 \Rightarrow b+c=-1$..

Câu 91. Đường thẳng $12x+5y=60$ tạo với hai trục toạ độ một tam giác. Tổng độ dài các đường cao của tam giác đó là

A. $\frac{60}{13}$. **B.** $\frac{281}{13}$. **C.** $\frac{360}{17}$. **D.** 20.

Lời giải

Chọn B.

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của đường thẳng đã cho với Ox, Oy.

Ta có $12x+5y=60 \Leftrightarrow \frac{x}{5}+\frac{y}{12}=0$. Do đó $A\left(5;0\right)$, $B\left(0;12\right)$.

Gọi H là hình chiếu của O lên AB. Khi đó: $OH=d\left(O;AB\right)=\frac{\left|12.0+5.0-60\right|}{\sqrt{12^2+5^2}}=\frac{60}{13}$.

Tam giác OAB là tam giác vuông tại O nên tổng độ dài các đường cao là

$OA+OB+OH=5+12+\frac{60}{13}=\frac{281}{13}$.

Dạng 4. Một số bài toán liên quan đến diện tích

Câu 92. Đường thẳng $\Delta: 5x+3y=15$ tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng bao nhiêu?

A. $7,5$. **B.** 5. **C.** 15. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng $\Delta: 5x+3y=15$ cắt các trục tọa độ tại các điểm $A(3;0)$, $B(0;5)$.

Ta có $OA=3$, $OB=5$. Khi đó $S_{OAB}=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{15}{2}=7,5$.

Câu 93. Cho hai đường thẳng $d_1: y=mx-4; d_2: -mx-4$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để tam giác tạo thành bởi d_1, d_2 và trục hoành có diện tích lớn hơn 8. Số phần tử của tập S là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

$d_1: y=mx-4$, $d_2: y=-mx-4$.

d_1, d_2 cắt nhau cùng cắt trục hoành khi $m\neq 0$.

Gọi $A\left(\frac{4}{m};0\right)$, $B\left(-\frac{4}{m};0\right)$ lần lượt là giao điểm của d_1, d_2 và trục hoành.

Phương trình hoành độ giao điểm của d_1, d_2: $mx-4=-mx-4 \Leftrightarrow x=0$.

Gọi C là giao điểm của d_1 và d_2 thì $C(0;-4)$.

$S_{ABC}=\frac{1}{2}d(C,Ox).AB$, có $d(C,Ox)=|y_C|=4$, $AB=|x_A-x_B|=\frac{8}{|m|}$.

$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}.4.\frac{8}{|m|}=\frac{16}{|m|}$.

Có $S_{ABC}>8 \Leftrightarrow \frac{16}{|m|}>8 \Leftrightarrow |m|<2$, $m\in\mathbb{N}^* \Leftrightarrow m=1$. Vậy $S=\{1\}$.

Câu 94. Tìm phương trình đường thẳng $d: y=ax+b$. Biết đường thẳng d đi qua điểm $I(1;3)$ và tạo với hai tia Ox, Oy một tam giác có diện tích bằng 6?

A. $y=\left(9+\sqrt{72}\right)x-\sqrt{72}-6$. **B.** $y=\left(9-\sqrt{72}\right)x+\sqrt{72}-6$.

C. $y=3x+6$. **D.** $y=-3x+6$.

Lời giải.

Chọn D

Vì đường thẳng d đi qua điểm $I(1;3)$ nên ta có: $3=a+b \quad (1)$.

Đường thẳng $d: y=ax+b$ cắt trục Ox, Oy lần lượt là $A\left(-\frac{b}{a};0\right), B(0;b), (a\neq 0)$.

Theo giả thiết $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}\left|\frac{b}{a}\right|.|b|=\frac{1}{2}\frac{b^2}{|a|}=6 \quad (2)$.

Từ phương trình $(1)\Leftrightarrow a=3-b$ thay vào phương trình

$$(2): \frac{b^2}{|3-b|}=12 \Leftrightarrow b^2=12|3-b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b^2=12(3-b), \quad (b<3) \\ b^2=-12(3-b), \ (b>3) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b^2+12b-36=0, \quad (b<3) \\ b^2-12b+36=0, \quad (b>3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \left[\begin{array}{l} b=-6+6\sqrt{2} \\ b=-6-6\sqrt{2} \end{array}\right. & (b<3) \\ b=6 & (b>3) \end{array}\right.$$

Với $b=6$ ta được $a=-3$.

Vậy phương trình $d: y=-3x+6$.

Ghi chú: Với $\left[\begin{array}{l} b=-6+6\sqrt{2} \\ b=-6-6\sqrt{2} \end{array}\right.$ thì nhìn vào 4 đáp án không có nên ta không cần tìm nữa.

Câu 95. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M(2;1)$. Đường thẳng d đi qua M, cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại A và B (A, B khác O) sao cho tam giác OAB có diện tích nhỏ nhất. Phương trình đường thẳng d là.

A. $2x-y-3=0$. **B.** $x-2y=0$. **C.** $x+2y-4=0$. **D.** $x-y-1=0$.

Lời giải

Chọn C

Gọi đường thẳng d cắt tia Ox, Oy lần lượt tại $A(a;0)$ và $B(0;b); a,b>0$

$\Rightarrow (d): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

Vì (d) qua $M(2;1) \Rightarrow \frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$

$\Rightarrow 1 \geq 2\sqrt{\frac{2}{ab}} \Rightarrow ab \geq 8$

Ta có diện tích tam giác vuông OAB tại O là $S=\frac{1}{2}.OA.OB=\frac{1}{2}.a.b \geq 4$

Diện tích tam giác vuông OAB đạt giá trị nhỏ nhất $S=4 \Leftrightarrow \frac{2}{a}=\frac{1}{b} \Leftrightarrow a=2b$

$\Rightarrow \frac{2}{2b}+\frac{1}{b}=1 \Rightarrow b=2, a=4$

$\Rightarrow (d): \frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1 \Leftrightarrow x+2y-4=0$.

Câu 96. Đường thẳng $d: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $(a \neq 0; b \neq 0)$ đi qua $M(-1;6)$ tạo với tia Ox, Oy một tam giác có diện tích bằng 4. Tính $S=a+2b$.

A. $S=\frac{-5+7\sqrt{5}}{3}$. **B.** $S=-\frac{38}{3}$. **C.** $S=10$. **D.** $S=6$.

Lời giải

Chọn C

d đi qua $M(-1;6) \Leftrightarrow \frac{-1}{a}+\frac{6}{b}=1$ (1).

Đường thẳng cắt tia Ox tại $A(a;0)$, $a>0 \Rightarrow OA=a$.

Đường thẳng cắt tia Oy tại $B(0;b)$, $b>0 \Rightarrow OB=b$.

ΔOAB vuông tại O nên có diện tích là $\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}ab$.

Theo đề $\frac{1}{2}ab=4 \Leftrightarrow ab=8$ (2).

Từ $(1),(2)$ suy ra: $a=2; b=4 \Rightarrow S=a+2b=10$.

Dạng 5. Xác định điểm

Câu 97. Cho đường thẳng $d:3x+5y-15=0$. Trong các điểm sau đây, điểm nào **không** thuộc đường thẳng d

A. $M_1(5;0)$. **B.** $M_4(-5;6)$. **C.** $M_2(0;3)$. **D.** $M_3(5;3)$.

Lời giải

Chọn D

Thay tọa độ các điểm vào phương trình đường thẳng d, ta có $M_1,M_4,M_2\in d$ và $M_3\notin d$.

Câu 98. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(4;3)$, $B(2;7)$, $C(-3;-8)$. Tọa độ chân đường cao kẻ từ đỉnh A xuống cạnh BC là:

A. $(-1;4)$. **B.** $(1;-4)$. **C.** $(1;4)$. **D.** $(4;1)$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm B và C có dạng: $\frac{x+3}{2+3}=\frac{y+8}{7+8}\Leftrightarrow 3x-y+1=0$.

Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC có phương trình:

$1(x-4)+3(y-3)=0\Leftrightarrow x+3y-13=0$

Tọa độ chân đường cao kẻ từ đỉnh A xuống cạnh BC là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases}3x-y+1=0\\x+3y-13=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=4\end{cases}$.

Câu 99. Cho đường thẳng $d:-3x+y-5=0$ và điểm $M(-2;1)$. Tọa độ hình chiếu vuông góc của M trên d là

A. $\left(\frac{7}{5};-\frac{4}{5}\right)$. **B.** $\left(-\frac{7}{5};\frac{4}{5}\right)$. **C.** $\left(-\frac{7}{5};-\frac{4}{5}\right)$. **D.** $\left(-\frac{5}{7};\frac{4}{5}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi Δ là đường thẳng đi qua M và vuông góc với d.

Ta có phương trình của Δ là: $x+3y-1=0$

Tọa độ hình chiếu vuông góc của M trên d là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases}-3x+y-5=0\\x+3y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{7}{5}\\y=\frac{4}{5}\end{cases}$.

Câu 100. Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $M(1;2)$ lên đường thẳng $\Delta:x-y=0$ là

A. $\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$. **B.** $(1;1)$. **C.** $(2;2)$. **D.** $\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng Δ có 1 VTPT là $\vec{n}=(1;-1)$ nên Δ có 1 VTCP là $\vec{u}=(1;1)$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của $M(1;2)$ lên đường thẳng Δ, tọa độ $H(t;t)$

Vì $MH \perp \Delta \Rightarrow \overrightarrow{MH} \perp \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{MH}.\vec{u}=0 \Leftrightarrow t-1+t-2=0 \Leftrightarrow t=\frac{3}{2} \Rightarrow H\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$

Câu 101. Cho hai điểm $A(3;-1), B(0;3)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc Ox sao khoảng cách từ M đến đường thẳng AB bằng 1.

A. $M\left(\frac{7}{2};0\right)$ và $M(1;0)$.

B. $M\left(\sqrt{13};0\right)$.

C. $M(4;0)$.

D. $M(2;0)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x;0)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;4)$

Phương trình đường thẳng $AB: 4x+3(y-3)=0 \Leftrightarrow 4x+3y-9=0$.

$$d(M;AB)=\frac{|4x-9|}{5} \Leftrightarrow 5=|4x-9| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{7}{2} \\ x=1 \end{array}\right.$$

Vậy $M\left(\frac{7}{2};0\right); M(1;0)$.

Câu 102. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;1)$, $B(4;-3)$ và đường thẳng $d: x-2y-1=0$. Tìm điểm M thuộc d có tọa độ nguyên và thỏa mãn khoảng cách từ M đến đường thẳng AB bằng 6.

A. $M(3;7)$.

B. $M(7;3)$.

C. $M(-43;-27)$.

D. $M\left(3;-\frac{27}{11}\right)$.

Lời giải

$\begin{cases} M \in d: x-2y-1=0 \rightarrow M(2m+1;m),\ m \in \mathbb{Z} \\ AB: 4x+3y-7=0 \end{cases}$. Khi đó

$$6=d(M;AB)=\frac{|8m+4+3m-7|}{5} \Leftrightarrow |11m-3|=30 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=\frac{27}{11}\ (l) \end{array}\right. \rightarrow M(7;3).$$ **Chọn B.**

Câu 103. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(0;1)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=2+2t \\ y=3+t \end{cases}$. Tìm điểm M thuộc d và cách A một khoảng bằng 5, biết M có hoành độ âm.

A. $M(4;4)$.

B. $\left[\begin{array}{l} M(-4;4) \\ M\left(-\frac{24}{5};-\frac{2}{5}\right) \end{array}\right.$.

C. $M\left(-\frac{24}{5};-\frac{2}{5}\right)$.

D. $M(-4;4)$.

$M \in d: \begin{cases} x=2+2t \\ y=3+t \end{cases} \rightarrow M(2+2t;3+t)$ với $2+2t<0 \Leftrightarrow t<-1$. Khi đó

$$5=AM\Leftrightarrow (2t+2)^2+(t+2)^2=25\Leftrightarrow 5t^2+12t-17=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\ (l) \\ t=-\dfrac{17}{5}\rightarrow M\left(-\dfrac{24}{5};;-\dfrac{2}{5}\right). \end{array}\right.$$

Chọn C.

Câu 104. Biết rằng có đúng hai điểm thuộc trục hoành và cách đường thẳng $\Delta: 2x-y+5=0$ một khoảng bằng $2\sqrt{5}$. Tích hoành độ của hai điểm đó bằng:

A. $-\dfrac{75}{4}$. **B.** $-\dfrac{25}{4}$. **C.** $-\dfrac{225}{4}$. **D.** Đáp số khác.

Lời giải

Gọi $M(x;0)\in Ox$ thì hoành độ của hai điểm đó là nghiệm của phương trình:

$$d(M;\Delta)=2\sqrt{5}\Leftrightarrow \frac{|2x+5|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{2}=x_1 \\ x=-\dfrac{15}{2}=x_2 \end{array}\right. \longrightarrow x_1\cdot x_2=-\frac{75}{4}.$$ **Chọn A.**

Câu 105. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(3;-1)$ và $B(0;3)$. Tìm điểm M thuộc trục hoành sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng AB bằng 1.

A. $\left[\begin{array}{l} M\left(\dfrac{7}{2};0\right) \\ M(1;0) \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} M\left(\dfrac{14}{3};0\right) \\ M\left(\dfrac{4}{3};0\right) \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} M\left(-\dfrac{7}{2};0\right) \\ M(-1;0) \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} M\left(-\dfrac{14}{3};0\right) \\ M\left(-\dfrac{4}{3};0\right) \end{array}\right.$.

Lời giải

$$\begin{cases} M(x;0) \\ AB: 4x+3y-9=0 \end{cases}\rightarrow 1=d(M;AB)=\frac{|4x-9|}{5}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{7}{2}\rightarrow M\left(\dfrac{7}{2};0\right) \\ x=1\rightarrow M(1;0) \end{array}\right..$$ **Chọn A.**

Câu 106. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(3;0)$ và $B(0;-4)$. Tìm điểm M thuộc trục tung sao cho diện tích tam giác MAB bằng 6.

A. $\left[\begin{array}{l} M(0;0) \\ M(0;-8) \end{array}\right.$. **B.** $M(0;-8)$. **C.** $M(6;0)$. **D.** $\left[\begin{array}{l} M(0;0) \\ M(0;6) \end{array}\right.$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{cases} AB: 4x-3y-12=0 \\ AB=5 \\ M(0;y)\rightarrow h_M=d(M;AB)=\dfrac{|3y+12|}{5} \end{cases}\rightarrow 6=S_{\Delta MAB}=\frac{1}{2}.5.\frac{|3y+12|}{5}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0\rightarrow M(0;0) \\ y=-8\rightarrow M(0;-8) \end{array}\right..$$

Chọn A.

Câu 107. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $\Delta_1: 3x-2y-6=0$ và $\Delta_2: 3x-2y+3=0$. Tìm điểm M thuộc trục hoành sao cho M cách đều hai đường thẳng đã cho.

A. $M\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $M\left(\dfrac{1}{2};0\right)$. **C.** $M\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$. **D.** $M(\sqrt{2};0)$.

Lời giải

$$\begin{cases} M(x;0) \\ d(M;\Delta_1) = d(M;\Delta_2) \end{cases} \to \frac{|3x-6|}{\sqrt{13}} = \frac{|3x+3|}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \to M\left(\frac{1}{2};0\right).$$ **Chọn B.**

Câu 108. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-2;2)$, $B(4;-6)$ và đường thẳng $d:\begin{cases} x=t \\ y=1+2t \end{cases}$. Tìm điểm M thuộc d sao cho M cách đều hai điểm A, B.

A. $M(3;7)$. **B.** $M(-3;-5)$. **C.** $M(2;5)$. **D.** $M(-2;-3)$

Lời giải

$$\begin{cases} M \in d:\begin{cases} x=t \\ y=1+2t \end{cases} \to M(t;1+2t) \\ MA = MB \end{cases} \to (t+2)^2 + (2t-1)^2 = (t-4)^2 + (2t+7)^2$$

$\Leftrightarrow 20t + 60 = 0 \Leftrightarrow t = -3 \to M(-3;-5)$. **Chọn B.**

Câu 109. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-1;2)$, $B(-3;2)$ và đường thẳng $d: 2x - y + 3 = 0$. Tìm điểm C thuộc d sao cho tam giác ABC cân tại C.

A. $C(-2;-1)$. **B.** $C\left(-\frac{3}{2};0\right)$. **C.** $C(-1;1)$. **D.** $C(0;3)$

Lời giải

$$\begin{cases} M \in d: 2x - y + 3 = 0 \to M(m;2m+3) \\ MA = MB \end{cases} \to (m+1)^2 + (2m+1)^2 = (m+3)^2 + (2m+1)^2$$

$\Leftrightarrow m = -2 \to M(-2;-1)$. **Chọn A.**

Câu 110. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;2)$, $B(0;3)$ và đường thẳng $d: y = 2$. Tìm điểm C thuộc d sao cho tam giác ABC cân tại B.

A. $C(1;2)$. **B.** $C(4;2)$. **C.** $\left[\begin{array}{l} C(1;2) \\ C(-1;2) \end{array}\right.$. **D.** $C(-1;2)$.

Lời giải

$$\begin{cases} C \in d: y = 2 \to C(c;2) \\ BA = BC \end{cases} \to 2 = c^2 + 1 \Leftrightarrow c = \pm 1 \to \left[\begin{array}{l} C(1;2) \\ C(-1;2) \end{array}\right.$$ **Chọn C.**

Câu 111. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, giả sử điểm $A(a;b)$ thuộc đường thẳng $d: x - y - 3 = 0$ và cách $\Delta: 2x - y + 1 = 0$ một khoảng bằng $\sqrt{5}$. Tính $P = ab$ biết $a > 0$.

A. 4. **B.** -2 **C.** 2. **D.** -4.

Lời giải

Chọn B

Do $A(a;b)$ thuộc đường thẳng $d: x - y - 3 = 0$ nên $a - b - 3 = 0 \Leftrightarrow b = a - 3 \Rightarrow A(a;a-3)$.

Khoảng cách từ điểm $A(a;a-3)$ đến đường thẳng $\Delta: 2x - y + 1 = 0$ là

$$d(a,\Delta) = \frac{|2a - (a-3) + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|a+4|}{\sqrt{5}}.$$

Theo đề bài $d(a,\Delta) = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|a+4|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |a+4| = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+4=5 \\ a+4=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-9 \end{array}\right.$.

Theo đề bài điểm $A(a;b)$ có hoành độ dương nên $a = 1 \Rightarrow A(1;-2)$. Vậy $P = ab = 1(-2) = -2$.

Câu 112. Trong mặt phẳng Oxy, cho biết điểm $M(a;b)$ $(a>0)$ thuộc đường thẳng $d:\begin{cases}x=3+t\\y=2+t\end{cases}$ và cách đường thẳng $\Delta: 2x-y-3=0$ một khoảng $2\sqrt{5}$. Khi đó $a+b$ là.

A. 21. **B.** 23. **C.** 22 **D.** 20.

Lời giải

Chọn B

Vì $M(a;b)\in d \Rightarrow M(3+t;2+t)$.

Lại có M cách đường thẳng $\Delta: 2x-y-3=0$ một khoảng $2\sqrt{5}$ suy ra $\dfrac{|2(3+t)-(2+t)-3|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}\Leftrightarrow |t+1|=10\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=9\\t=-11\end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l}M(12;11)\\M(-8;-9)\end{array}\right.$.

Vì $a>0$ nên điểm $M(-8;-9)$ không thỏa mãn.

Vậy: $M(12;11)\Rightarrow a+b=23$.

Câu 113. Điểm $A(a;b)$ thuộc đường thẳng $d:\begin{cases}x=3-t\\y=2-t\end{cases}$ và cách đường thẳng $\Delta: 2x-y-3=0$ một khoảng bằng $2\sqrt{5}$ và $a<0$. Tính $P=a.b$.

A. $P=-72$. **B.** $P=72$. **C.** $P=132$. **D.** $P=-132$.

Lời giải

Chọn B

$A(a;b)\in d\Rightarrow \begin{cases}a=3-t\\b=2-t\end{cases}$.

Giả thiết: $a<0\Leftrightarrow 3-t<0\Leftrightarrow t>3$.

Ta có $d(A;d)=2\sqrt{5}\Leftrightarrow \dfrac{|2(3-t)-(2-t)-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5}\Leftrightarrow |1-t|=10\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=11\\t=-9\end{array}\right.$.

Vì $t>3$ nên chọn $t=11$. Khi đó $\begin{cases}a=-8\\b=-9\end{cases}\Rightarrow P=72$. Do đó chọn đáp án **B.**

Câu 114. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $I(1;2)$ và đường thẳng $(d): 2x+y-5=0$. Biết rằng có hai điểm M_1, M_2 thuộc (d) sao cho $IM_1=IM_2=\sqrt{10}$. Tổng các hoành độ của M_1 và M_2 là

A. $\dfrac{7}{5}$. **B.** $\dfrac{14}{5}$. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

$M_1\in(d): 2x+y-5=0\Rightarrow M_1(m;5-2m)\Rightarrow \overrightarrow{IM_1}(m-1;3-2m)$.

$IM_1=\sqrt{10}\Rightarrow \sqrt{(m-1)^2+(3-2m)^2}=\sqrt{10}\Leftrightarrow 5m^2-14m+10=10\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=0\\m=\dfrac{14}{5}\end{array}\right.$.

$\Rightarrow$ có 2 điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán là $M_1(0;5); M_2\left(\dfrac{14}{5};-\dfrac{3}{5}\right)$.

Tổng các hoành độ của M_1 và M_2 là: $0+\dfrac{14}{5}=\dfrac{14}{5}$.

Câu 115. Trong hệ tọa độ Oxy cho $A(1;1)$, $B(4;-3)$. Gọi $C(a;b)$ thuộc đường thẳng $d: x-2y-1=0$ sao cho khoảng cách từ C đến đường thẳng AB bằng 6. Biết rằng C có hoành độ nguyên, tính $a+b$?

A. $a+b=10$. **B.** $a+b=7$. **C.** $a+b=4$. **D.** $a+b=-4$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;-4)$.

$\Rightarrow$ phương trình tổng quát của đường thẳng AB có dạng $4x+3y+m=0$.

Vì $A(1;1)\in AB$ nên $4.1+3.1+m=0 \Leftrightarrow m=-7 \Rightarrow AB: 4x+3y-7=0$.

Vì $C(a;b)\in d: x-2y-1=0 \Rightarrow a-2b-1=0 \Rightarrow a=2b+1$.

Theo đề ra $d(C;AB)=6 \Leftrightarrow \dfrac{|4a+3b-7|}{\sqrt{4^2+3^2}}=6 \Leftrightarrow |4a+3b-7|=30$.

Thay $a=2b+1$ vào ta được:

$|4(2b+1)+3b-7|=30 \Leftrightarrow |11b-3|=30 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}11b-3=30\\11b-3=-30\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}b=3\\b=-\dfrac{27}{11}\end{array}\right.$.

Do C có tọa độ nguyên nên $b=3; a=7 \Rightarrow a+b=10$.

Câu 116. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm hai điểm $A(-4;2)$, $B(2;6)$ và điểm C nằm trên đường thẳng $d: \dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y+1}{-2}$ sao cho $CA=CB$. Khi đó tọa độ điểm C là

A. $\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{8}{5}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{-1}{5};\dfrac{12}{5}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{5};\dfrac{11}{5}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{9}{5}\right)$.

Lời giải

Chọn C

d có phương trình tham số là $\begin{cases}x=5+3t\\y=-1-2t\end{cases}$

Gọi $C(5+3t;-1-2t)\in d$, ta có: $\overrightarrow{CA}=(-9-3t;3+2t), \overrightarrow{CB}=(-3-3t;7+2t)$

$CA=CB \Leftrightarrow CA^2=CB^2 \Leftrightarrow (9+3t)^2+(3+2t)^2=(3+3t)^2+(7+2t)^2$

$\Leftrightarrow 20t=-32 \Leftrightarrow t=\dfrac{-8}{5}$

Suy ra: $C\left(\dfrac{1}{5};\dfrac{11}{5}\right)$

Câu 117. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho $A(-3;5), B(1;3)$ và đường thẳng $d: 2x-y-1=0$, đường thẳng AB cắt d tại I. Tính tỉ số $\dfrac{IA}{IB}$.

A. 6. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Véc tơ chỉ phương của AB là: $\overrightarrow{AB}=(4;-2)$ $\Rightarrow$ véc tơ pháp tuyến của AB là: $\vec{n}=(1;2)$

Phương trình đường thẳng AB là: $(x+3)+2(y-5)=0 \Rightarrow x+2y-7=0$

Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 2x-y-1=0 \\ x+2y-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{9}{5} \\ y=\dfrac{13}{5} \end{cases}$

$\Rightarrow I\left(\dfrac{9}{5};\dfrac{13}{5}\right)$.

Vậy tỉ số $\dfrac{IA}{IB}=\dfrac{\sqrt{(x_I-x_A)^2+(y_I-y_A)^2}}{\sqrt{(x_I-x_B)^2+(y_I-y_B)^2}}=\dfrac{\sqrt{\left(\dfrac{9}{5}+3\right)^2+\left(\dfrac{13}{5}-5\right)^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{9}{5}-1\right)^2+\left(\dfrac{13}{5}-3\right)^2}}=6$.

Câu 118. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $B(-2;3)$ và $C(3;-2)$. Điểm $I(a;b)$ thuộc BC sao cho với mọi điểm M không nằm trên đường thẳng BC thì $\overrightarrow{MI}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{MB}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{MC}$. Tính $S=a^2+b^2$.

A. 1. **B.** 0. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x;y)$. Khi đó: $\overrightarrow{MI}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{MB}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \begin{cases} a-x=\dfrac{2}{5}(-2-x)+\dfrac{3}{5}(3-x) \\ b-y=\dfrac{2}{5}(3-y)+\dfrac{3}{5}(-2-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$.

Nên $I(1;0)$. Vậy $S=a^2+b^2=1$.

Dạng 6. Bài toán liên quan quan đến tam giác

Câu 119. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;2),B(3;1),C(5;4)$. Phương trình nào sau đây là phương trình đường cao kẻ từ A của tam giác ABC?

A. $2x+3y-8=0$. **B.** $2x+3y+8=0$. **C.** $3x-2y+1=0$. **D.** $2x+3y-2=0$.

Lời giải

Chọn A

Gọi AH là đường cao kẻ từ A của ΔABC. Ta có: $AH\perp BC \Rightarrow vtpt\ AH$ là $\overrightarrow{BC}=(2;3)$.

Phương trình $AH:2(x-1)+3(y-2)=0 \Leftrightarrow 2x+3y-8=0$..

Câu 120. Cho ΔABC có $A(2;-1),B(4;5),C(-3;2)$. Đường cao AH của ΔABC có phương trình là

A. $7x+3y-11=0$. **B.** $-3x+7y+13=0$. **C.** $3x+7y+17=0$. **D.** $7x+3y+10=0$.

Lời giải

Đường cao AH đi qua điểm $A(2;-1)$ và có VTPT là $\overrightarrow{BC}=(-7;-3)$.

Vậy phương trình AH là $-7(x-2)-3(y+1)=0 \Leftrightarrow 7x+3y-11=0$.

Câu 121. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;2),B(3;1),C(5;4)$. Phương trình nào sau đây là phương trình đường cao kẻ từ A của tam giác ABC?

A. $2x+3y-8=0$. **B.** $2x+3y+8=0$.

C. $3x-2y+1=0$. **D.** $2x+3y-2=0$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\overrightarrow{BC}=(2;3)$

Đường cao kẻ từ A của tam giác ABC nhận $\overrightarrow{BC}=(2;3)$ làm vectơ pháp tuyến và đi qua điểm A nên có phương trình: $2(x-1)+3(y-2)=0 \Leftrightarrow 2x+3y-8=0$.

Câu 122. Trong mặt phẳng cho tam giác ABC cân tại C có $B(2;-1)$, $A(4;3)$. Phương trình đường cao CH là

A. $x-2y-1=0$. **B.** $x-2y+1=0$. **C.** $2x+y-2=0$. **D.** $x+2y-5=0$.

Lời giải

Chọn D

Tam giác ABC cân tại C nên H là trung điểm của AB và $CH \perp AB$.

Có $H(3;1)$ và $\overrightarrow{AB}=(-2;-4)=-2(1;2)$.

Vậy phương trình đường cao CH là $1(x-3)+2(y-1)=0 \Leftrightarrow x+2y-5=0$.

Câu 123. Cho ΔABC có $A(2;-1),B(4;5),C(-3;2)$. Phương trình tổng quát của đường cao BH là

A. $3x+5y-37=0$. **B.** $5x-3y-5=0$. **C.** $3x-5y-13=0$. **D.** $3x+5y-20=0$.

Lời giải

Chọn B

Do $BH \perp AC \Rightarrow$ Chọn VTPT của BH là $\overrightarrow{n_{BH}}=\overrightarrow{CA}=(5;-3)$.

Phương trình tổng quát của $BH: 5(x-4)-3(y-5)=0 \Leftrightarrow 5x-3y-5=0$.

Câu 124. Cho tam giác ABC có $A(1;1)$, $B(0;-2)$, $C(4;2)$. Lập phương trình đường trung tuyến của tam giác ABC kẻ từ A.

A. $x+y-2=0$. **B.** $2x+y-3=0$. **C.** $x+2y-3=0$. **D.** $x-y=0$.

Lời giải

Gọi M là trung điểm của BC. Ta cần viết phương trình đường thẳng AM.

Ta có :

$\begin{cases} B(0;-2) \\ C(4;2) \end{cases} \to M(2;0) \to \vec{u}_{AM}=\overrightarrow{AM}=(1;-1) \to \vec{n}_{AM}=(1;1) \to AM: x+y-2=0$. **Chọn A.**

Câu 125. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;-1)$, $B(4;5)$ và $C(-3;2)$. Lập phương trình đường cao của tam giác ABC kẻ từ A.

A. $7x+3y-11=0$. **B.** $-3x+7y+13=0$.

C. $3x+7y+1=0$. **D.** $7x+3y+13=0$.

Lời giải

Gọi h_A là đường cao kẻ từ A của tam giác ABC. Ta có

$\begin{cases} A(2;-1) \in h_A \\ h_A \perp BC \to \vec{n}_{h_A}=\overrightarrow{BC}=(-7;-3)=-(7;3) \end{cases} \to h_A: 7x+3y-11=0$. **Chọn A.**

Câu 126. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;-1)$, $B(4;5)$ và $C(-3;2)$. Lập phương trình đường cao của tam giác ABC kẻ từ B.

A. $3x-5y-13=0$. **B.** $3x+5y-20=0$.

C. $3x+5y-37=0$. **D.** $5x-3y-5=0$.

Lời giải

Gọi h_B là đường cao kẻ từ B của tam giác ABC. Ta có

$$\begin{cases} B(4;5) \in h_B \\ h_B \perp AC \to \vec{n}_{h_B} = \overrightarrow{AC} = (-5;3) = -(5;-3) \end{cases} \to h_B : 5x - 3y - 5 = 0.$$ **Chọn D.**

Câu 127. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;-1)$, $B(4;5)$ và $C(-3;2)$. Lập phương trình đường cao của tam giác ABC kẻ từ C.

A. $x + y - 1 = 0.$ **B.** $x + 3y - 3 = 0.$ **C.** $3x + y + 11 = 0.$ **D.** $3x - y + 11 = 0.$

Lời giải

Gọi h_C là đường cao kẻ từ C của tam giác ABC. Ta có

$$\begin{cases} C(-3;2) \in h_C \\ h_C \perp AB \to \vec{n}_{h_C} = \overrightarrow{AB} = (2;6) = 2(1;3) \end{cases} \to h_C : x + 3y - 3 = 0.$$ **Chọn B.**

Câu 128. Cho tam giác ABC với $A(1;1)$, $B(0;-2)$, $C(4;2)$. Phương trình tổng quát của đường trung tuyến đi qua điểm B của tam giác ABC là

A. $7x + 7y + 14 = 0$. **B.** $5x - 3y + 1 = 0$. **C.** $3x + y - 2 = 0$. **D.** $-7x + 5y + 10 = 0$.

Lời giải

Chọn D

Gọi M là trung điểm của cạnh $AC \Rightarrow M\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \left(\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$.

Đường trung tuyến BM nhận $\vec{n} = (-7;5)$ làm một véctơ pháp tuyến. Vậy phương trình tổng quát của đường trung tuyến qua điểm B của tam giác ABC là:

$-7x + 5(y + 2) = 0 \Leftrightarrow -7x + 5y + 10 = 0$.

Câu 129. Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;3)$, $B(1;0)$, $C(-1;-2)$. Phương trình đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC là:

A. $2x - y - 1 = 0$. **B.** $x - 2y + 4 = 0$. **C.** $x + 2y - 8 = 0$. **D.** $2x + y - 7 = 0$.

Lời giải

Chọn A

Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow I(0;-1)$

Ta có $\overrightarrow{AI} = (-2;-4) \Rightarrow \vec{n} = (2;-1)$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng AI.

Phương trình đường thẳng AI là: $2(x-2) - (y-3) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 1 = 0$

Câu 130. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;4)$, $B(3;2)$ và $C(7;3)$. Viết phương trình tham số của đường trung tuyến CM của tam giác.

A. $\begin{cases} x = 7 \\ y = 3 + 5t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 3 - 5t \\ y = -7 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 7 + t \\ y = 3 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 - t \end{cases}$.

Lời giải

$$\begin{cases} A(1;4) \\ B(3;2) \end{cases} \to M(2;3) \to \overrightarrow{MC} = (5;0) = 5(1;0) \to CM : \begin{cases} x = 7 + t \\ y = 3 \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$ **Chọn C.**

Câu 131. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;4)$, $B(5;0)$ và $C(2;1)$. Trung tuyến BM của tam giác đi qua điểm N có hoành độ bằng 20 thì tung độ bằng:

A. -12. **B.** $-\dfrac{25}{2}$. **C.** -13. **D.** $-\dfrac{27}{2}$.

Lời giải

$$\begin{cases} A(2;4) \\ C(2;1) \end{cases} \longrightarrow M\left(2;\frac{5}{2}\right) \to \overrightarrow{MB} = \left(3;-\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}(6;-5) \longrightarrow MB: \begin{cases} x = 5+6t \\ y = -5t \end{cases}.$$

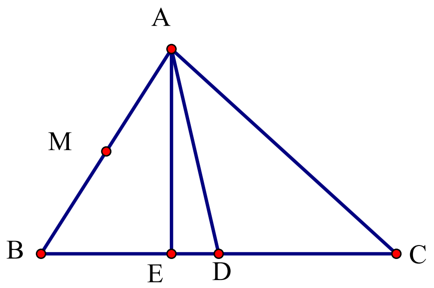
Ta có: $N(20;y_N) \in BM \longrightarrow \begin{cases} 20 = 5+6t \\ y_N = -5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{5}{2} \\ y_N = -\dfrac{25}{2} \end{cases} \longrightarrow$ **Chọn B.**

Câu 132. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $M(2;0)$ là trung điểm của cạnh AB. Đường trung tuyến và đường cao qua đỉnh A lần lượt có phương trình là $7x-2y-3=0$ và $6x-y-4=0$. Phương trình đường thẳng AC là

A. $3x-4y-5=0$. **B.** $3x+4y+5=0$. **C.** $3x-4y+5=0$. **D.** $3x+4y-5=0$.

Lời giải

Chọn C



+) Gọi AH và AD lần lượt là các đường cao và trung tuyến kẻ từ A của tam giác ABC.

+) Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 7x-2y-3=0 \\ 6x-y-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow A(1;2)$.

+) M là trung điểm của AB nên $\begin{cases} x_B = 2x_M - x_A = 3 \\ y_B = 2y_M - y_A = -2 \end{cases} \Rightarrow B(3;-2)$.

+) Đường thẳng BC đi qua $B(3;-2)$ và vuông góc với đường thẳng $AH: 6x-y-4=0$ nên có phương trình $x-3+6(y+2)=0 \Leftrightarrow x+6y+9=0$.

+) D là giao điểm của BC và AN nên tọa độ D là nghiệm của hệ

$\begin{cases} 7x-2y-3=0 \\ x+6y+9=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow D\left(0;-\dfrac{3}{2}\right)$ mà D là trung điểm của BC suy ra $C(-3;-1)$

+) Đường thẳng AC đi qua $A(1;2)$ và $C(-3;-1)$ có phương trình là $3x-4y+5=0$.

Câu 133. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình cạnh AB là $x-y-2=0$, phương trình cạnh AC là $x+2y-5=0$. Biết trọng tâm của tam giác là điểm $G(3;2)$ và phương trình đường thẳng BC có dạng $x+my+n=0$. Tìm $m+n$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-y-2=0 \\ x+2y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ nên $A(3;1)$

Gọi $B(b;b-2)$ và $C(5-2c;c)$, G là trọng tâm tam giác ABC nên b,c là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 5-2c+b+3=9 \\ c+b-2+1=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=5 \\ c=2 \end{cases}.$$

Vậy $B(5;3);C(1;2) \Rightarrow \overrightarrow{BC}=(-4;-1)$ chọn một véctơ pháp tuyến của đường thẳng BC là $\overrightarrow{n_{BC}}=(1;-4)$ suy ra phương trình đường thẳng $BC:1(x-1)-4(y-2)=0 \Leftrightarrow BC:x-4y+7=0$.

Câu 134. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A\left(\frac{7}{4};3\right)$, $B(1;2)$ và $C(-4;3)$.

Phương trình đường phân giác trong của góc A là:

A. $4x+2y-13=0$. **B.** $4x-8y+17=0$. **C.** $4x-2y-1=0$. **D.** $4x+8y-31=0$.

Lời giải

$$\begin{cases} A\left(\frac{7}{4};3\right),B(1;2) \to AB:4x-3y+2=0 \\ A\left(\frac{7}{4};3\right),C(-4;3) \to AC:y-3=0 \end{cases}.$$

Suy ra các đường phân giác góc A là:

$$\frac{|4x-3y+2|}{5}=\frac{|y-3|}{1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x+2y-13=0 \to f(x;y)=4x+2y-13 \\ 4x-8y+17=0 \end{array}\right.$$

$$\to \begin{cases} f(B(1;2))=-5<0 \\ f(C(-4;3))=-23<0 \end{cases}$$

suy ra đường phân giác trong góc A là $4x-8y+17=0$. **Chọn B.**

Câu 135. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;5)$, $B(-4;-5)$ và $C(4;-1)$.

Phương trình đường phân giác ngoài của góc A là:

A. $y+5=0$. **B.** $y-5=0$. **C.** $x+1=0$. **D.** $x-1=0$.

Lời giải

$$\begin{cases} A(1;5),B(-4;-5) \to AB:2x-y+3=0 \\ A(1;5),C(4;-1) \to AC:2x+y-7=0 \end{cases}.$$

Suy ra các đường phân giác góc A là:

$$\frac{|2x-y+3|}{\sqrt{5}}=\frac{|2x+y-7|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \to f(x;y)=x-1 \\ y-5=0 \end{array}\right. \to \begin{cases} f(B(-4;-5))=-5<0 \\ f(C(4;-1))=3>0 \end{cases}$$

suy ra đường phân giác trong góc A là $y-5=0$. **Chọn B.**

Câu 136. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1:3x-4y-3=0$ và $d_2:12x+5y-12=0$. Phương trình đường phân giác góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng d_1 và d_2 là:

A. $3x+11y-3=0$. **B.** $11x-3y-11=0$. **C.** $3x-11y-3=0$. **D.** $11x+3y-11=0$.

Lời giải

Các đường phân giác của các góc tạo bởi

$d_1:3x-4y-3=0$ và $d_2:12x+5y-12=0$ là:

$$\frac{|3x-4y-3|}{5}=\frac{|12x+5y-12|}{13} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+11y-3=0 \\ 11x-3y-11=0 \end{array}\right..$$

Gọi $I = d_1 \cap d_2 \to I(1;0)$; $d: 3x+11y-3=0 \to M(-10;3) \in d$,

Gọi H là hình chiếu của M lên d_1.

Ta có: $IM = \sqrt{130}$, $MH = \dfrac{|-30-12-3|}{5} = 9$, suy ra

$\sin\widehat{MIH} = \dfrac{MH}{IM} = \dfrac{9}{\sqrt{130}} \to \widehat{MIH} > 52^\circ \to 2\widehat{MIH} > 90^\circ$.

Suy ra $d: 3x+11y-3=0$ là đường phân giác góc tù, suy ra đường phân giác góc nhọn là $11x-3y-11=0$. **Chọn B.**

Câu 137. Cho tam giác ABC có phương trình cạnh $AB: 3x-4y-9=0$, cạnh $AC: 8x-6y+1=0$, cạnh $BC: x+y-5=0$. Phương trình đường phân giác trong của góc A là:

A. $14x+14y-17=0$. **B.** $2x-2y-19=0$. **C.** $2x+2y+19=0$. **D.** $14x-14y-17=0$.

Lời giải

Chọn D.

$AB: 3x-4y-9=0$

$AC: 8x-6y+1=0$

Phương trình các đường phân giác của góc A của ΔABC là:

$$\frac{3x-4y-9}{5} = \pm\frac{8x-6y+1}{10} \Leftrightarrow 2(3x-4y-9) = \pm(8x-6y+1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+2y+19=0\,(\Delta_1) \\ 14x-14y-17=0\,(\Delta_2) \end{array}\right.$$

Có $\{B\} = AB \cap BC$. Suy ra $B\left(\dfrac{29}{7};\dfrac{6}{7}\right)$.

Có $\{C\} = AC \cap BC$. Suy ra $C\left(\dfrac{29}{14};\dfrac{41}{14}\right)$.

Xét $(\Delta_1): 2x+2y+19=0$ có $t_B.t_c = \left(2.\dfrac{29}{7}+2\dfrac{6}{7}+19\right)\left(2.\dfrac{29}{14}+2\dfrac{41}{14}+19\right) > 0$.

Suy ra B, C nằm về cùng một phía đối với (Δ_1), nên (Δ_1) là đường phân giác ngoài của góc A.

Vậy đường phân giác trong của góc A là $(\Delta_2): 14x-14y-17=0$.

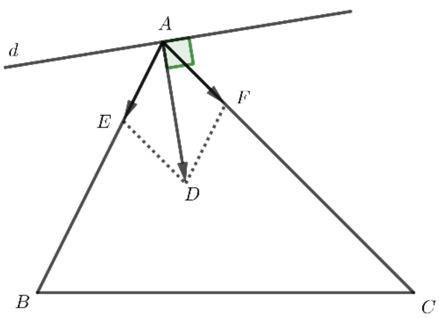
Câu 138. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(1;-2)$, $B(2;-3)$, $C(3;0)$. Phương trình đường phân giác ngoài góc A của tam giác ABC là

A. $x=1$. **B.** $y=-2$. **C.** $2x+y=0$. **D.** $4x+y-2=0$.

Lời giải

Chọn A

Bài toán tổng quát:



Gọi d là phân giác ngoài góc A của tam giác ABC.

Đặt $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{AB}.\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = \dfrac{1}{AC}.\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$.

Khi đó tứ giác $AEDF$ là hình thoi (vì $AE = AF = 1$).

(*Hình bình hành có 2 cạnh kề bằng nhau*).

Suy ra tia AD là tia phân giác trong góc EAF.

Do đó: $AD \perp d$. Nên $\overrightarrow{AD}$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng d.

Áp dụng: $\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(1;-1), AB=\sqrt{2} \\ \overrightarrow{AC}=(2;2),\ AC=2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AD}=\left(\sqrt{2};0\right)=\sqrt{2}(1;0)$.

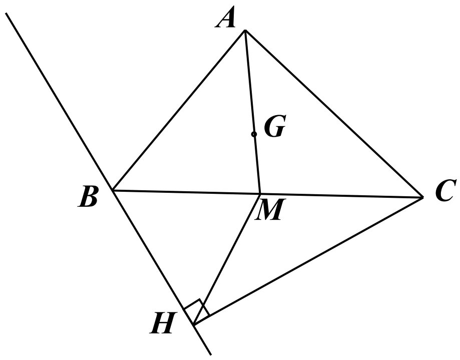
Xem đáp án chỉ có đáp án A có vectơ pháp tuyến là $(1;0)$.

Câu 139. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với đỉnh $A(2;4)$, trọng tâm $G\left(2;\frac{2}{3}\right)$. Biết rằng đỉnh B nằm trên đường thẳng (d) có phương trình $x+y+2=0$ và đỉnh C có hình chiếu vuông góc trên (d) là điểm $H(2;-4)$. Giả sử $B(a;b)$, khi đó $T=a-3b$ bằng

A. $T=4$. **B.** $T=-2$. **C.** $T=2$. **D.** $T=0$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Ta có

$$\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M-2=\frac{3}{2}(2-2) \\ y_M-4=\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}-4\right) \end{cases}, \text{ suy ra } M(2;-1).$$

$\overrightarrow{HM}=(0;3)$ suy ra HM không vuông góc với (d) nên B không trùng với H.

$B(a;b)\in(d)\Rightarrow b=-a-2$.

Tam giác BHC vuông tại H và CM là trung tuyến nên ta có

$$MB=MH \Leftrightarrow (a-2)^2+(a+1)^2=9 \Leftrightarrow a^2-a-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=2\ (l) \end{array}\right.$$

Suy ra $B(-1;-1)$ và $T=a-3b=2$.

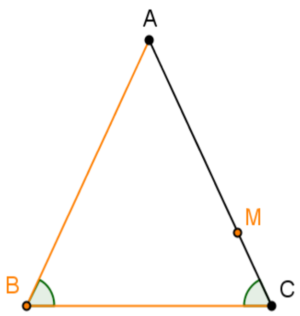
Câu 140. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác cân ABC có cạnh đáy $BC: x-3y-1=0$, cạnh bên $AB: x-y-5=0$. Đường thẳng AC đi qua $M(-4;1)$. Giả sử toạ độ đỉnh $C(m,n)$.Tính $T=m+n$.

A. $T=\frac{5}{9}$. **B.** $T=-3$. **C.** $T=\frac{9}{5}$. **D.** $T=-\frac{9}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $\vec{n}(a;b)$ với $(a^2+b^2\neq 0)$ là véc tơ pháp tuyến của AC, véctơ $\overrightarrow{n_1}(1;-3)$ là véc tơ pháp tuyến của đường thẳng BC, $\overrightarrow{n_2}(1;-1)$ là véc tơ pháp tuyến của đường thẳng AB.



Ta có: $\cos B=\cos C \Leftrightarrow |\cos(\vec{n},\overrightarrow{n_1})|=|\cos(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{n_1})|$

$$\Leftrightarrow \frac{|\vec{n},\overrightarrow{n_1}|}{|\vec{n}|.|\overrightarrow{n_1}|}=\frac{|\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{n_1}|}{|\overrightarrow{n_2}|.|\overrightarrow{n_1}|}\Leftrightarrow \frac{|a-3b|}{\sqrt{10}.\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|1+3|}{\sqrt{10}.\sqrt{2}}$$

$$2\sqrt{2(a^2+b^2)}=|a-3b|\Leftrightarrow 7a^2+6ab-b^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=-b\\7a=b\end{array}\right.$$

+ Với $a=-b$ chọn $a=1,b=-1\Rightarrow \vec{n}(1;-1)$ loại vì $AC//AB$

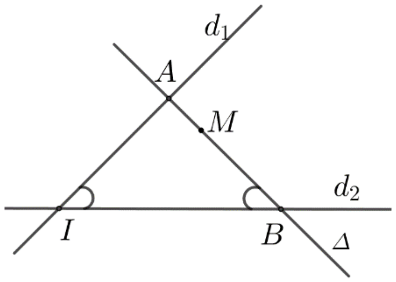
+ Với $a=\frac{b}{7}$ chọn $a=1;b=7\Rightarrow AC:x+7y-3=0$. Điểm $C=AC\cap BC\Rightarrow C\left(\frac{8}{5};\frac{1}{5}\right)$

Câu 141. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường thẳng $(d_1):2x-y+5=0$ và $(d_2):x+y-3=0$ cắt nhau tại I. Phương trình đường thẳng đi qua $M(-2;0)$ cắt $(d_1),(d_2)$ tại A và B sao cho tam giác IAB cân tại A có phương trình dạng $ax+by+2=0$. Tính $T=a-5b$.

A. $T=-1$. **B.** $T=9$. **C.** $T=-9$. **D.** $T=11$.

Lời giải

Chọn D



Đường thẳng $(d_1),(d_2)$ có véc tơ pháp tuyến lần lượt là $\overrightarrow{n_1}=(2;-1)$, $\overrightarrow{n_2}=(1;1)$.

Gọi (Δ) là đường thẳng cần tìm có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a;b)$.

Góc giữa 2 đường thẳng $(d_1),(d_2)$ và $(\Delta),(d_2)$ xác định bởi:

$$cos(d_1,d_2)=\frac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{|2.1-1.1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}.\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

$$cos(\Delta,d_2)=\frac{|\vec{n}.\overrightarrow{n_2}|}{|\vec{n}|.|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{|a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|a+b|}{\sqrt{2}.\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Vì (Δ) cắt $(d_1),(d_2)$ tại A và B tạo thành tam giác IAB cân tại A nên

$$cos(d_1,d_2)=cos(\Delta,d_2)\Leftrightarrow \frac{|a+b|}{\sqrt{2}.\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}\Leftrightarrow \sqrt{5}|a+b|=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Leftrightarrow 5(a+b)^2=a^2+b^2\Leftrightarrow 2a^2+5ab+b^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=-2b\\a=-\frac{1}{2}b\end{array}\right..$$

+ $a=-2b$: chọn $a=2\Rightarrow b=-1$: phương trình đường thẳng là:

$2(x+2)-y=0\Leftrightarrow 2x-y+4=0 \quad (L)$.

+ $a=-\frac{1}{2}b$: chọn $a=1\Rightarrow b=-2$: phương trình đường thẳng là:

$(x+2)-2y=0 \Leftrightarrow x-2y+2=0 \quad (T/m)$. Do đó $T=a-5b=1-5(-2)=11$.

Câu 142. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(2;1)$, $B(2;-3)$, $C(-2;-1)$. Trực tâm H của tam giác ABC có tọa độ $(a;b)$. Biểu thức $S=3a+2b$ bằng bao nhiêu?

A. 0. **B.** 1. **C.** 5. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{BC}=(-4;2)$, $\overrightarrow{AC}=(-4;-2)$, $\overrightarrow{AH}=(a-2;b-1)$, $\overrightarrow{BH}=(a-2;b+3)$.

Vì H là trực tâm của tam giác ABC nên ta có

$$\begin{cases}\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4(a-2)+2(b-1)=0\\ -4(a-2)-2(b+3)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a-b=3\\ 2a+b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-1\end{cases}.$$

Vậy $S=3a+2b=3\times1+2\times(-1)=1$.

Câu 143. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy,cho tam giác ABC có đỉnh $A(2;2)$ và trung điểm của BC là $I(-1;-2)$. Điểm $M(a;b)$ thỏa mãn $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Tính $S=a+b$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Gọi K trung điểm $AI \Rightarrow K\left(\frac{1}{2};0\right)$.

Ta có $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MI}=\vec{0}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MK}=\vec{0}\Leftrightarrow M\equiv K$

$\Rightarrow a+b=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$. Chọn A

Câu 144. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;1)$, đường cao BH có phương trình $x-3y-7=0$ và trung tuyến CM có phương trình $x+y+1=0$. Tìm tọa độ đỉnh C?

A. $(-1;0)$. **B.** $(4;-5)$. **C.** $(1;-2)$. **D.** $(1;4)$.

Lời giải

Chọn B

Điểm C thuộc đường trung tuyến CM nên gọi tọa độ điểm $C(x;-x-1)$.

Tọa độ $\overrightarrow{AC}=(x-2;-x-2)$, tọa độ vectơ chỉ phương của đường thẳng BH là $\vec{u}=(3;1)$.

Vì $AC\perp BH$ nên $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BH}=0\Leftrightarrow(x-2).3-x-2=0\Leftrightarrow x=4$.

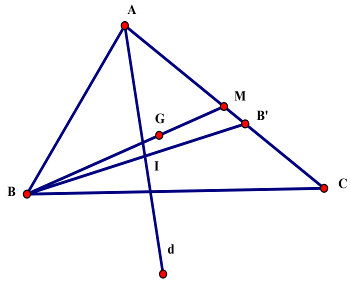
Vậy $C(4;-5)$.

Câu 145. Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $B(-4;1)$, trọng tâm $G(1;1)$ và đường thẳng phân giác trong góc A có phương trình $d: x-y-1=0$. Biết điểm $A(m;n)$. Tính tích $m.n$.

A. $m.n=20$. **B.** $m.n=12$. **C.** $m.n=-12$. **D.** $m.n=6$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm cạnh AC, suy ra $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{GM} \Rightarrow M\left(\frac{7}{2};1\right)$.

Gọi điểm B' là điểm đối xứng với B qua đường phân giác trong của góc A. Suy ra điểm B' nằm trên AC.

Đường thẳng BB' qua B và vuông góc với đường thẳng $d: x-y-1=0$ nên có phương trình $BB': x+y+3=0$

Gọi $I = BB' \cap d$, suy ra tọa độ điểm $I(-1;-2)$ là trung điểm của BB' nên tọa độ $B'(2;-5)$

Đường thẳng AC đi qua $B'(2;-5)$ và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{B'M} = \left(\frac{3}{2};6\right)$, suy ra véc tơ pháp tuyến của AC có tọa độ $(4;-1)$. Đường thẳng AC có phương trình là: $4x-y-13=0$

Điểm $A = d \cap AC \Rightarrow A(4;3)$.

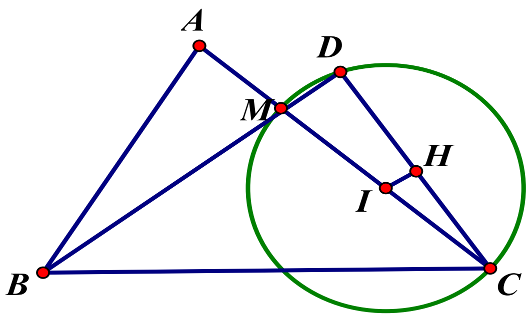
Vậy tích $m.n = 12$.

Câu 146. Cho ΔABC vuông tại A, điểm M thuộc cạnh AC, sao cho $AB = 3AM$, đường tròn tâm I đường kính CM cắtBM tại D, đường thẳng CD có phương trình $x-3y-6=0$. Biết điểm I(1;-1), điểm $E\left(\frac{4}{3};0\right)$ thuộc đường thẳng BC, $x_C \in \mathbb{Z}$. Gọi B là điểm có tọa độ *(a, b)*. Khi đó:

A. $a+b=1$. **B.** $a+b=0$. **C.** $a+b=-1$. **D.** $a+b=2$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là hình chiếu của I lên cạnh C**D.**

Do tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn nên $\widehat{ABM} = \widehat{MCD} = \widehat{ICH} \Rightarrow \tan\widehat{ABM} = \tan\widehat{MCD} = \tan\widehat{ICH} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$.

$\Rightarrow \sin\widehat{ICH} = \frac{IH}{IC} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Có $IH = d(I,CD) = \frac{2}{\sqrt{10}} \Rightarrow IC = 2 \Rightarrow IC^2 = 4$.

$C \in CD: x-3y-6=0 \Rightarrow C(3t+6;t)$

Mà $IC^2 = 4$ và $x_C \in Z \Rightarrow C(3;-1)$

Đường thẳng BC qua $C(3;-1)$ và $E\left(\frac{4}{3};0\right)$ có phương trình là $BC: 3x+5y-4=0$.

I là trung điểm của MC nên $M(-1;-1)$.

Đường thẳng BD qua $M(-1;-1)$ và vuông góc với CD có phương trình là $BD: 3x+y+4=0$.

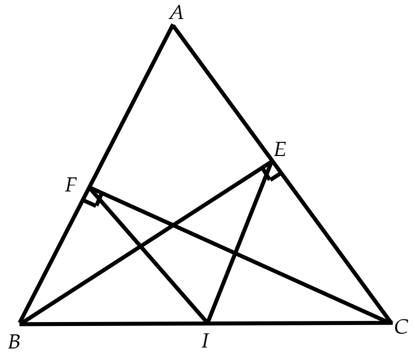
Có $B = BC \cap BD \Rightarrow B(-2;2)$

Câu 147. Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình đường thẳng $BC: x+7y-13=0$. Các chân đường cao kẻ từ B, C lần lượt là $E(2;5), F(0;4)$. Biết tọa độ đỉnh A là $A(a;b)$. Khi đó:

A. $a-b=5$. **B.** $2a+b=6$. **C.** $a+2b=6$. **D.** $b-a=5$

Lời giải

Chọn D



Gọi $I(13-7n;n)$ là trung điểm của BC,khi đó ta có: $IE = IF$

mà $IE = 50n^2-164n+146$; $IF = 50n^2-190n+185$

$\Rightarrow 50n^2-164n+146 = 50n^2-190n+185 \Leftrightarrow n=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow I\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$

Gọi $B(13-7m;m)$.Vì I là trung điểm của BC nên $C(7m-8;3-m)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{BE} = (7m-11;5-m); \overrightarrow{CE} = (10-7m;2+m)$.Vì $BE \perp AC$

nên $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{CE} = 0 \Leftrightarrow m^2-3m+2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=2 \end{array}\right.$

+ Với $m=1 \Rightarrow B(6;1), C(-1;2) \Rightarrow A\left(\frac{2}{3};\frac{11}{3}\right)$.Trường hợp này không thỏa mãn các đáp án.

+ Với $m=2 \Rightarrow B(-1;2); C(6;1) \Rightarrow A(1;6)$ Suy ra **Chọn D**

Câu 148. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $B(-12;1)$, đường phân giác trong của góc A có phương trình $d: x+2y-5=0$. $G\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác ABC. Đường thẳng BC qua điểm nào sau đây?

A. $(1;0)$. **B.** $(2;-3)$. **C.** $(4;-4)$. **D.** $(4;3)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi D là điểm đối xứng với B qua đường thẳng $d: x+2y-5=0$ suy ra $D \in AC$.

Phương trình của đường thẳng $BD: -2x+y-25=0$.

Gọi H là giao điểm của d và BD suy ra tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x+2y-5=0 \\ -2x+y-25=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-9 \\ y=7 \end{cases} \Rightarrow H\left(-9;7\right).$$

Mà H là trung điểm của BD suy ra $D(-6;13)$.

Gọi $A(5-2a;a)\in d$.

Ta có $G\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác ABC nên

$$\begin{cases} x_A+x_B+x_C=3x_G \\ y_A+y_B+y_C=3y_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-2a-12+x_C=1 \\ a+1+y_C=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C=2a+8 \\ y_C=1-a \end{cases} \Rightarrow C(2a+8;1-a)$$

Ta có $\overrightarrow{DA}=\left(11-2a;a-13\right);\overrightarrow{DC}=\left(2a+14;-12-a\right)$

Mà 3 điểm D,A,C thẳng hàng nên $\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{11-2a}{2a+14}=\frac{a-13}{-12-a} \Leftrightarrow a=-2$

Suy ra điểm $C(4;3)$ nên đường thẳng BC đi qua điểm $C(4;3)$.

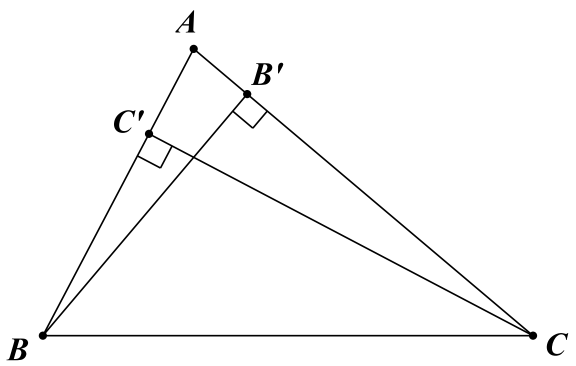
Câu 149. Cho tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác biết phương trình cạnh $BC: x+y-2=0$; hai đường cao $BB': x-3=0$ và $CC': 2x-3y+6=0$?

A. $A(1;2); B(0;2); C(3;-1)$. **B.** $A(1;2); B(3;-1); C(0;2)$.

C. $A(1;-2); B(3;-1); C(0;2)$. **D.** $A(2;1); B(3;-1); C(0;2)$.

Lời giải

Chọn B



$B=BC\cap BB'$ nên có tọa độ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-3=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow B(3;-1)$.

$C=BC\cap CC'$ nên có tọa độ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+y-2=0 \\ 2x-3y+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow C(0;2)$.

AB qua B và vuông với CC' có phương trình: $3x+2y-7=0$.

AC qua C và vuông với BB' có phương trình: $y=2$.

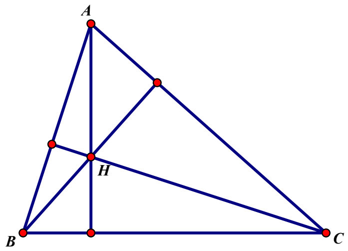
$A=AB\cap AC$ nên có tọa độ là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x+2y-7=0 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow A(1;2)$.

Câu 150. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-3;0), B(3;0), C(2;6)$. Gọi $H(a;b)$ là trực tâm của tam giác ABC. Tính $6ab$

A. 10. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** 60. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A



Đường thẳng AH đi qua $A(-3;0)$ và nhận $\overrightarrow{BC}=(-1;6)$ làm véctơ pháp tuyến. Suy ra phương trình đường thẳng AH là: $x-6y+3=0$.

Đường thẳng BH đi qua $B(3;0)$ và nhận $\overrightarrow{AC}=(5;6)$ làm véctơ pháp tuyến. Suy ra phương trình đường thẳng BH là: $5x+6y-15=0$.

Ta có $H = AH \cap BH \Leftrightarrow$ Tọa độ H là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-6y+3=0 \\ 5x+6y-15=0 \end{cases} \Leftrightarrow H\left(2;\frac{5}{6}\right)$.

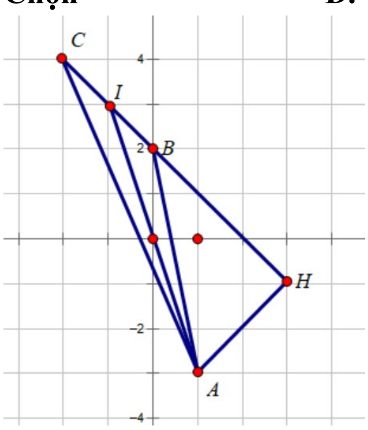
Do đó $a=2; b=\frac{5}{6} \Rightarrow 6ab=10$.

Câu 151. Cho tam giác ABC có $A(1;-3)$, $B(0;2)$, $C(-2;4)$. Đường thẳng Δ đi qua A và chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau. Phương trình của Δ là

A. $2x-y-7=0$. **B.** $x+y+2=0$. **C.** $x-3y-10=0$. **D.** $3x+y=0$.

Lời giải

Chọn D.



Gọi I là giao điểm của Δ và BC.

Gọi H là hình chiếu của A trên BC.

Theo đề bài ta có: $S_{AIB}=S_{AIC} \Leftrightarrow \frac{1}{2}.AH.IB=\frac{1}{2}.AH.IC \Leftrightarrow IB=IC$.

$\Rightarrow I$ là trung điểm của $BC \Rightarrow I(-1;3)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AI}=(-2;6)$.

Đường thẳng Δ đi qua A và nhận vectơ $\vec{n}=(3;1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Phương trình đường thẳng Δ là $3(x-1)+(y+3)=0 \Leftrightarrow 3x+y=0$.

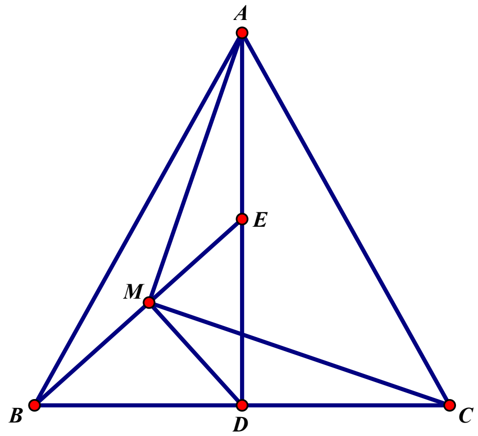
Câu 152. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A, phương trình đường thẳng AB, AC lần lượt là $5x-y-2=0, x-5y+14=0$. Gọi D là trung điểm của BC, E là trung điểm của AD, $M\left(\frac{9}{5};\frac{8}{5}\right)$ là hình chiếu vuông góc của D trên BE. Tính OC.

A. $OC=\sqrt{26}$. **B.** $OC=\sqrt{10}$. **C.** $OC=5$. **D.** $OC=\sqrt{52}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:



Ta có $A=AB\cap AC\Rightarrow\begin{cases}5x-y-2=0\\x-5y+14=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}\Rightarrow A(1;3)$

Dễ chứng minh được $AM\perp MC\Rightarrow$ Phương trình MC: $4x-7y+4=0$

$C=MC\cap AC\Rightarrow\begin{cases}4x-7y+4=0\\x-5y+14=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\y=4\end{cases}\Rightarrow C(6;4)$

Vậy $OC=\sqrt{52}$

Chứng minh $AM\perp MC$

PP1: Dùng phương pháp véc tơ.

* $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA}\right)\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{MB}=2\left(\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{MB}\right)$

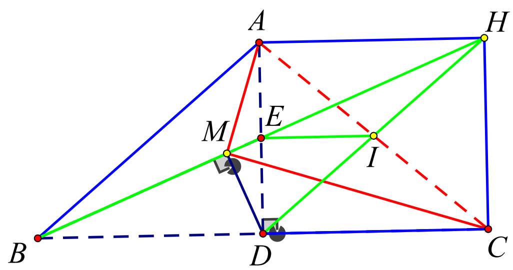
* $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{MB}$

* $\cos\left(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{BD}\right)=\cos\widehat{MDB}\Leftrightarrow\frac{\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{BD}}{DM.DB}=\frac{DM}{DB}\Leftrightarrow\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{BD}=MD^2$

* $\cos\left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{MB}\right)=-\cos\widehat{MED}\Leftrightarrow\frac{\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{MB}}{DE.MB}=-\frac{ME}{DE}\Leftrightarrow\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{MB}=-ME.MB=-MD^2$

Do đó $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=0$ nên $MA\perp MC$.

PP2:



Vẽ hình chữ nhật $ADCF$ (1)

Dễ thấy tứ giác $AHDB$ là hình bình hành $\left(vì\ AH//BD;\ AH=BD\right)$

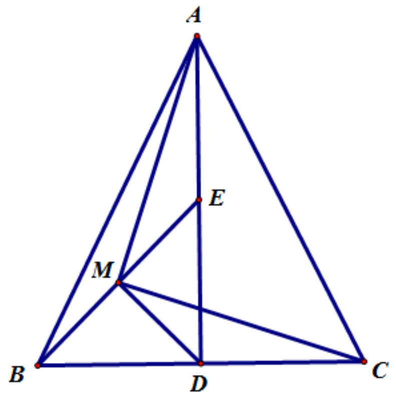
Nên BH qua trung điểm E của AD

$\Rightarrow \widehat{HMD} = 90^o$ (2)

Từ (1) và (2) ta có 5 điểm $A,\ M,\ D,\ C,\ F$ cùng thuộc đường tròn đường kính AC.

Nên $\widehat{AMC} = 90^o \Rightarrow AM \perp MC$.

Cách 2:



Ta có: $A = AB \cap AC \ \Rightarrow A(1;3)$.

Giả sử $DB = kDE\ (k > 0) \ \Rightarrow \dfrac{MB}{ME} = \dfrac{DB^2}{DE^2} = k^2 \Rightarrow \overrightarrow{MB} + k^2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{DM} = \dfrac{1}{k^2+1}\overrightarrow{DB} + \dfrac{k^2}{k^2+1}\overrightarrow{DE}$

Ta có: $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DM} = 2\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DM} = -\dfrac{1}{k^2+1}\overrightarrow{DB} + \dfrac{k^2+2}{k^2+1}\overrightarrow{DE}$.

$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DM} = -\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DM} = -\dfrac{k^2+2}{k^2+1}\overrightarrow{DB} - \dfrac{k^2}{k^2+1}\overrightarrow{DE}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \dfrac{k^2+2}{k^2+1}DB^2 - \dfrac{k^2(k^2+2)}{k^2+1}ED^2 = 0 \Rightarrow MA \perp MC$.

Lại có: $\overrightarrow{AM} = \left(\dfrac{4}{5};-\dfrac{7}{5}\right) \Rightarrow MC: 4x - 7y + 4 = 0$.

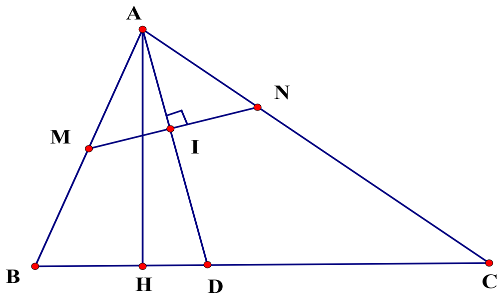
Vậy $C = MC \cap AC \ \Rightarrow C(6;4) \Rightarrow OC = \sqrt{52}$.

Câu 153. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có chân đường cao hạ từ đỉnh A là $H\left(\dfrac{17}{5};-\dfrac{1}{5}\right)$, chân đường phân giác trong góc A là $D(5;3)$ và trung điểm của cạnh AB là $M(0;1)$. Tìm tọa độ đỉnh C.

A. $C(-2;9)$. **B.** $C(9;11)$. **C.** $C(-9;-11)$. **D.** $C(2;-10)$.

Lời giải

Chọn B



Đường thẳng chứa cạnh BC có phương trình:

$$\frac{x-5}{\frac{17}{5}-5}=\frac{y-3}{-\frac{1}{5}-3}\Leftrightarrow 2x-y-7=0$$

Đường thẳng chứa đường cao AH của tam giác đi qua $H\left(\frac{17}{5};-\frac{1}{5}\right)$ có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{HD}\left(\frac{8}{5};\frac{16}{5}\right)$ có phương trình: $\frac{8}{5}\left(x-\frac{17}{5}\right)+\frac{16}{5}\left(y+\frac{1}{5}\right)=0\Leftrightarrow x+2y-3=0$.

Gọi $B(x_0;y_0)$, vì M là trung điểm của AB nên $A(-x_0;2-y_0)$.

Ta có: $B\in BC\Leftrightarrow 2x_0-y_0-7=0 \quad (1)$

$A\in AH\Leftrightarrow -x_0+2(2-y_0)-3=0\Leftrightarrow x_0+2y_0-1=0 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ:

$$\begin{cases}2x_0-y_0-7=0\\ x_0+2y_0-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=3\\ y_0=-1\end{cases}\Rightarrow A(-3;3)$$

Gọi $\vec{u}(a;b)$ $(a^2+b^2\neq 0)$ là véc tơ chỉ phương của đường thẳng AC

+) $\overrightarrow{AM}(3;-2),\overrightarrow{AD}(8;0)$

Đường thẳng AD là phân giác trong góc A nên:

$$\widehat{BAD}=\widehat{CAD}\Leftrightarrow\cos\widehat{BAD}=\cos\widehat{CAD}\Leftrightarrow\left|\cos\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AD}\right)\right|=\left|\cos\left(\overrightarrow{AD};\vec{u}\right)\right|$$

$$\Leftrightarrow\frac{|24|}{\sqrt{13}.8}=\frac{|8a|}{8\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow 3\sqrt{a^2+b^2}=|a|\sqrt{13}$$

$$\Leftrightarrow 4a^2=9b^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\frac{3}{2}b\\ a=-\frac{3}{2}b\end{array}\right.$$

Với $a=-\frac{3}{2}b$. Chọn $b=2\Rightarrow a=-3\Rightarrow\vec{u}(-3;2)$ (loại vì cùng phương với $\overrightarrow{AM}$)

Với $a=\frac{3}{2}b$. Chọn $b=2\Rightarrow a=3\Rightarrow\vec{u}(3;2)$. Đường thẳng AC có phương trình: $\begin{cases}x=-3+3t\\ y=3+2t\end{cases}$

Điểm C là giao điểm của AC và BC nên có tọa độ là nghiệm của hệ:

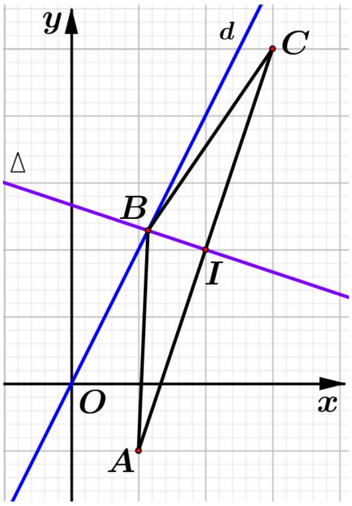
$$\begin{cases}2x-y-7=0\\ x=-3+3t\\ y=3+2t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-6+6t-3-2t-7=0\\ x=-3+3t\\ y=3+2t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=4\\ x=9\\ y=11\end{cases}\Rightarrow C(9;11).$$

Câu 154. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại B với $A(1;-1)$, $C(3;5)$. Định B nằm trên đường thẳng $d: 2x-y=0$. Phương trình các đường thẳng AB, BC lần lượt là $d_1: ax+by-24=0$, $d_2: cx+dy+8=0$. Tính giá trị biểu thức $P=a.b.c.d$.

A. $P=975$. **B.** $P=5681$. **C.** $P=3059$. **D.** $P=5083$.

Lời giải

Chọn B



Cách 1:

Gọi I là trung điểm AC $\Rightarrow I(2;2)$.

Đường thẳng Δ đi qua I và vuông góc với AC có phương trình: $x+3y-8=0\ (\Delta)$.

Tam giác ABC cân tại B nên ta có $B\in\Delta \Rightarrow B=\Delta\cap d \Rightarrow B\left(\frac{8}{7};\frac{16}{7}\right)$.

Phương trình đường thẳng $AB: \dfrac{x-1}{\frac{8}{7}-1}=\dfrac{y+1}{\frac{16}{7}+1} \Leftrightarrow 23x-y-24=0$.

Phương trình đường thẳng $BC: \dfrac{x-3}{\frac{8}{7}-3}=\dfrac{y-5}{\frac{16}{7}-5} \Leftrightarrow 19x-13y+8=0$.

Vậy $a=23, b=-1, c=19, d=-13 \Rightarrow P=a.b.c.d=5681$.

Cách 2:

Gọi $B(a;2a)\in d$.

Tam giác ABC cân tại B nên ta có $AB=CB \Rightarrow (a-1)^2+(2a+1)^2=(a-3)^2+(2a-5)^2 \Leftrightarrow a=\frac{8}{7}$. Suy ra $B\left(\frac{8}{7};\frac{16}{7}\right)$.

Phương trình đường thẳng $AB: \dfrac{x-1}{\frac{8}{7}-1}=\dfrac{y+1}{\frac{16}{7}+1} \Leftrightarrow 23x-y-24=0$.

Phương trình đường thẳng $BC: \dfrac{x-3}{\frac{8}{7}-3}=\dfrac{y-5}{\frac{16}{7}-5} \Leftrightarrow 19x-13y+8=0$.

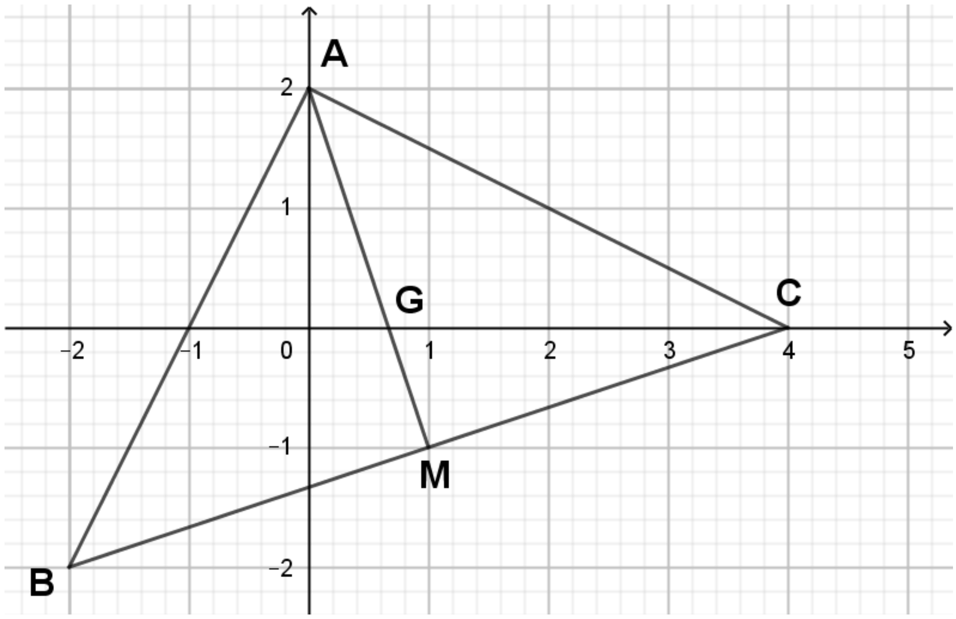
Vậy $a=23, b=-1, c=19, d=-13 \Rightarrow P=a.b.c.d=5681$.

Câu 155. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho ΔABC có $AB=AC$, $\widehat{BAC}=90^o$. Biết $M(1,-1)$ là trung điểm cạnh BC và $G\left(\frac{2}{3},0\right)$ là trọng tâm ΔABC. Khi đó, $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B),(x_B<0)$. Tính $T=2019x_A^2+y_A+2x_B-3y_B$

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $\overrightarrow{AG}=\left(\frac{2}{3}-x_A,-y_A\right);\overrightarrow{AM}=\left(1-x_A,-1-y_A\right)$

$+G$ là trọng tâm ΔABC và AM là trung tuyến suy ra: $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{2}{3}-x_A=\frac{2}{3}(1-x_A)\\-y_A=\frac{2}{3}(-1-y_A)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x_A=0\\y_A=2\end{cases}\Rightarrow A(0,2)\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(1,-3)\Rightarrow AM=\sqrt{10}$.

+ ΔABC vuông tại A nên ΔABC nội tiếp đường tròn (C) tâm M, bán kính AM.

$\Rightarrow(C):(x-1)^2+(y+1)^2=10$

+ BC qua M và vuông góc $AM\Rightarrow(BC):x-1-3(y+1)=0\Leftrightarrow x=3y+4$

+ Ta có: $(C)\cap(BC)=\{B,C\}$. Suy ra tọa độ B, C là nghiệm hệ: $\begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2=10\\x=3y+4\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(3y+3)^2+(y+1)^2=10\\x=3y+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(y+1)^2=1\\x=3y+4\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=4\\y=0\end{cases}\\\begin{cases}x=-2\\y=-2\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow B(-2,-2)$ (vì $x_B<0$)

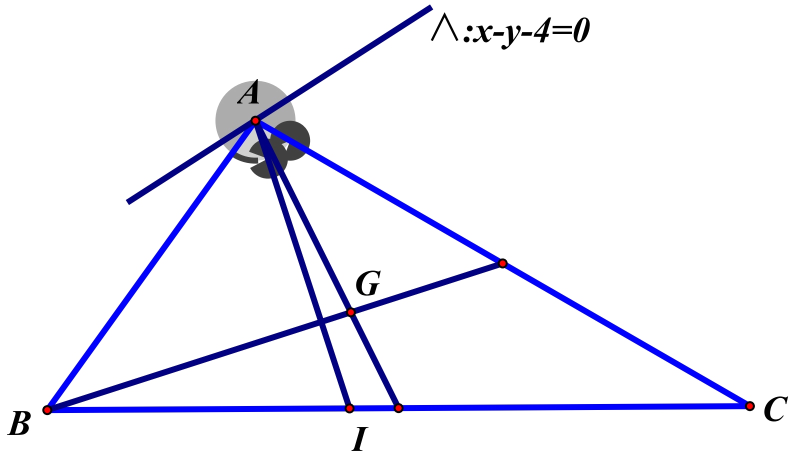
Vậy $T=2019x_A^2+y_A+2x_B-3y_B=4$

Câu 156. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trọng tâm $G(2;-3)$ và $B(1;1)$. Đường thẳng $\Delta:x-y-4=0$ đi qua A và đường phân giác trong của góc A cắt BC tại điểm I sao cho diện tích tam giác IAB bằng $\frac{4}{5}$ diện tích tam giác IAC. Biết điểm A có hoành độ dương, khi đó phương trình tổng quát của đường thẳng BC là

A. $5x+3y-11=0$. **B.** $3x-8y+5=0$ **C.** $5x+3y+11=0$ **D.** $3x-8y-5=0$

Lời giải

Chọn A



+ Gọi $A(t;\, t-4) \in \Delta$ với $t > 0$.

Do $G(2;\, -3)$ là trọng tâm tam giác ABC nên: $\begin{cases} x_C = 3x_G - y_A - y_B = 5-t \\ y_C = 3y_G - y_A - y_B = -6-t \end{cases}$

$\Rightarrow C(5-t;\, -6-t)$.

+ Vì AI là phân giác trong của tam giác ABC nên $d(I; AB) = d(I;\, AC)$, khi đó $S_{IAB} = \dfrac{4}{5}S_{IAC} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}d(I;\, AB).AB = \dfrac{4}{5}.\dfrac{1}{2}.d(I;\, AC).AC \Leftrightarrow AB = \dfrac{4}{5}AC$

$\Leftrightarrow 25AB^2 = 16AC^2$

$\Leftrightarrow 25\left[(t-1)^2 + (t-5)^2\right] = 16\left[(2t-5)^2 + (2t+2)^2\right]$

$\Leftrightarrow 39t^2 + 54t - 93 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = -\dfrac{31}{13}$ (loại) $\Rightarrow C(4;\, -7)$.

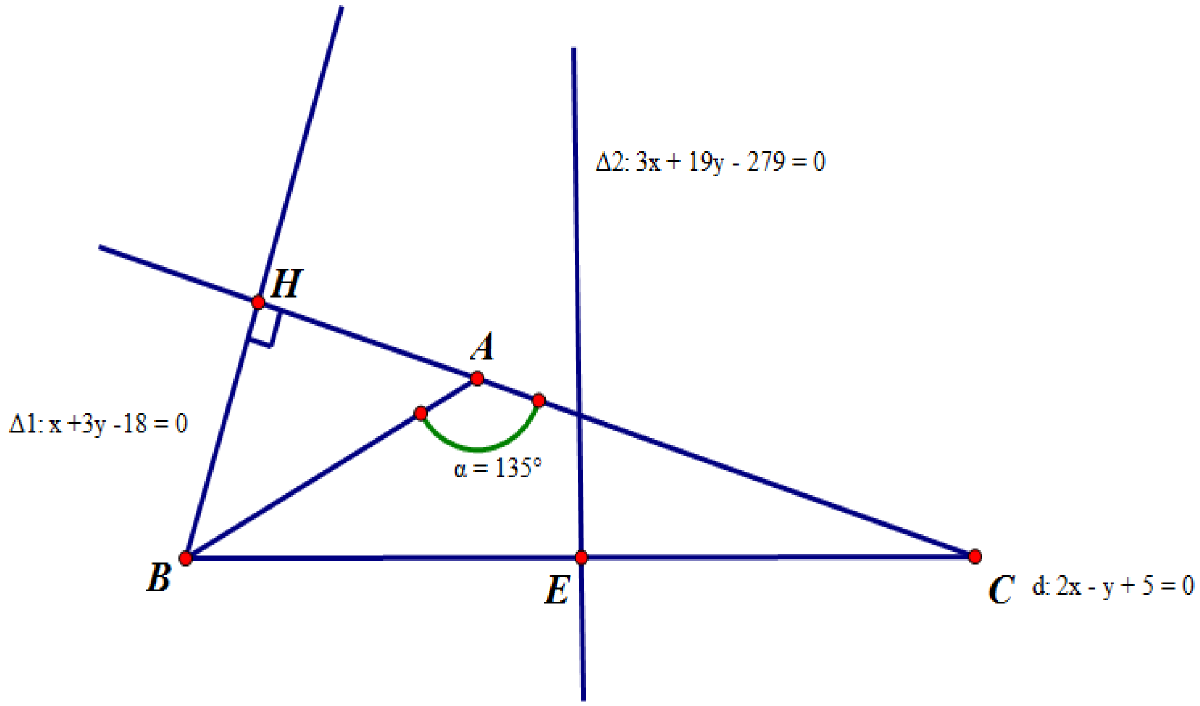
+ Khi đó BC đi qua $B(1;\, 1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{BC} = (3;\, -8)$ nên có phương trình $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 1-8t \end{cases}$.

Suy ra đường thẳng BC có phương trình tổng quát là $5x + 3y - 11 = 0$.

Câu 157. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình đường thẳng chứa đường cao kẻ từ B có phương trình là $\Delta_1 : x + 3y - 18 = 0$, phương trình đường trung trực của đoạn BC là $\Delta_2 : 3x + 19y - 279 = 0$, đỉnh C thuộc đường thẳng $d : 2x - y + 5 = 0$ và biết $\widehat{BAC} = 135^0$. Giả sử $A(a;b)$, tính tổng $a^2 + b$.

A. 24. **B.** 6. **C.** 80 **D.** 4

Lời giải



Vì $B \in \Delta_1 : x+3y-18=0, C \in d: 2x-y+5=0$.Giả sử $B(18-3b;b);C(c;2c+5)$.Suy ra,tọa độ trung điểm $E(\frac{18+c-3b}{2};\frac{b+2c+5}{2});\overrightarrow{BC}=(c+3b-18;2c-b+5)$

$$\begin{cases} BC \perp \Delta_2 \\ E \in \Delta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{u_{\Delta_2}}=0 \\ E \in \Delta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (c+3b-18).19-3(2c-b+5)=0 \\ 3.\frac{18+c-3b}{2}+19.\frac{b+2c+5}{2}-279=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13c+60b=357 \\ 41c+10b=409 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=9 \\ b=4 \end{cases}$$

$\Rightarrow B(6;4);C(9;23)$.

Đường thẳng AC đi qua $C(9;23)$ và vuông góc với $\Delta_1 : x+3y-18=0$ nên có phương trình $3(x-9)-(y-23)=0 \Leftrightarrow 3x-y-4=0$. Gọi H là chân đường cao kẻ từ **B.** $H=\Delta_1 \cap AC$. Tọa độ H là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x-y-4=0 \\ x+3y-18=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow H(3;5)$. Đường tròn tâm H bán kính $R=BH=\sqrt{10}$ có phương trình: $(C):(x-3)^2+(y-5)^2=10$.

Vì $\widehat{BAC}=135^0 \Rightarrow \Delta ABH$ vuông cân tại H $\Rightarrow HB=HA \Rightarrow A \in (C)$.Do $A \in AC; A \in (C)$. Tọa độ A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 3x-y-4=0 \\ (x-3)^2+(y-5)^2=10 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \end{array} \right.$

Do A nằm giữa C và H nên chỉ có trường hợp $A(4:8)$.

Vậy $\begin{cases} a=4 \\ b=8 \end{cases} \Rightarrow a^2+b=24$

Có thể tìm tọa độ điểm A bằng cách sử dụng công thức $\cos 135^0 = \frac{\overrightarrow{AB}.}{}$ $\cos 135^0 = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|}$

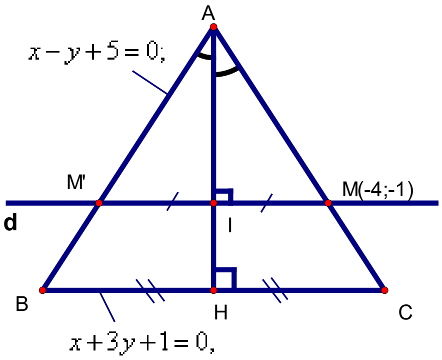
$$\cos 135^0 = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|}$$

Câu 158. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC cân, cạnh đáy BC: $x+3y+1=0$, cạnh bên AB: $x-y+5=0$; đường thẳng chứa AC đi qua $M(-4;-1)$. Tìm tọa độ đỉnh C.

A. $C\left(-\frac{43}{10};\frac{11}{10}\right)$. **B.** $C\left(-\frac{43}{10};-\frac{11}{10}\right)$. **C.** $C\left(\frac{43}{10};\frac{11}{10}\right)$. **D.** $C\left(\frac{43}{10};-\frac{11}{10}\right)$.

Lời giải

Đường thẳng d đi qua $M(-4;-1)$ và $d//BC$ nên d có VTPT $\overrightarrow{n_d}=\overrightarrow{n_{BC}}=(1;3)$. Đường thẳng d có phương trình: $1(x+4)+3(y+1)=0 \Leftrightarrow x+3y+7=0$.



Gọi $M'=d\cap AB$. Tọa độ M' là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x+3y+7=0\\x-y+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{11}{2}\\y=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow M'\left(-\frac{11}{2};-\frac{1}{2}\right).$$

I là trung điểm của MM'. Suy ra: $I\left(-\frac{19}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

Đường cao AH đi qua I và vuông góc với BC nên có VTPT $\overrightarrow{n_{AH}}=\overrightarrow{u_{BC}}=(3;-1)$. AH có phương trình: $3\left(x+\frac{19}{4}\right)-1\left(y+\frac{3}{4}\right)=0\Leftrightarrow 6x-2y+27=0$.

Cách 1. $H=AH\cap BC\Rightarrow$ tọa độ H là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}6x-2y+27=0\\x+3y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{83}{20}\\y=\frac{21}{20}\end{cases}\Rightarrow H\left(-\frac{83}{20};\frac{21}{20}\right).$$

H là trung điểm của BC nên $C\left(-\frac{43}{10};\frac{11}{10}\right)$.

Cách 2.

Ta có: $A=AH\cap AB$. Tọa độ A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}6x-2y+27=0\\x-y+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{17}{4}\\y=\frac{3}{4}\end{cases}\Rightarrow A\left(-\frac{17}{4};\frac{3}{4}\right).$$

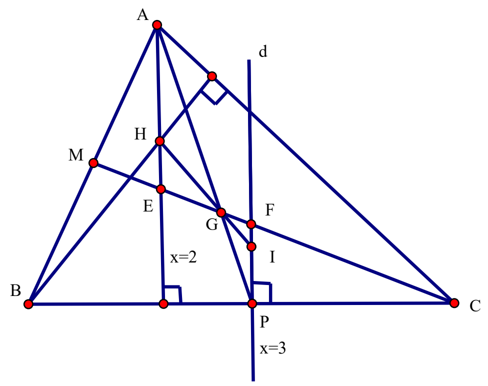
AC đi qua M(- 4; - 1) và nhận $\overrightarrow{AM}=\left(\frac{1}{4};-\frac{7}{4}\right)$ làm VTCP, do đó AC có VTPT $\overrightarrow{n_{AC}}=(7;1)$. AC có phương trình: $7(x+4)+1(y+1)=0\Leftrightarrow 7x+y+29=0$.

$C=AC\cap BC\Rightarrow C\left(\frac{-43}{10};\frac{11}{10}\right)$.

Câu 159. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có trực tâm $H(2;\,0)$, đường trung tuyến $CM: 3x+7y-8=0$, đường trung trực của BC là: $x=3$, đỉnh A có tung độ âm. Khi đó tọa độ của đỉnh A có dạng $(a;\,\frac{-b}{c})$ với $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tìm $a+b+c$

A. 17. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 19.

Lời giải



Gọi P là trung điểm của BC và G, I lần lượt là trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC

Đường cao AH // d và H(2; 0) nên phương trình của AH là x = 2

Vậy hoành độ của A là a = 2

Gọi giao điểm của CM và AH, d lần lượt là E, F. Ta tính được $E(2;\,\frac{2}{7})$ và $F(3;\,\frac{-1}{7})$

Theo tính chất đường thẳng Euler ta có GH = 2GI, dùng tam giác đồng dạng suy ra GE = 2GF

Từ đó tính được G là $G(\frac{8}{3};\,0)$. Sử dụng GH = 2GI tính được $I(3;\,0)$

Gọi tọa độ A(2; m) (m < 0), P(3; n), theo công thức tọa độ trọng tâm và trung điểm suy ra: $m+2n=0$

Gọi tọa độ B(p; n) vì tung độ B, P bằng nhau, suy ra C(6 - p; n) (P là trung điểm của BC)

Vì C thuộc đường thẳng CM suy ra $3p=7n+10$

IA = IB suy ra $m^2+1=(p-3)^2+n^2$. Giải hệ ta được $\left[\begin{array}{l} n=-1 \\ n=\frac{4}{7} \end{array}\right.$ suy ra $\left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=\frac{-8}{7} \end{array}\right.$

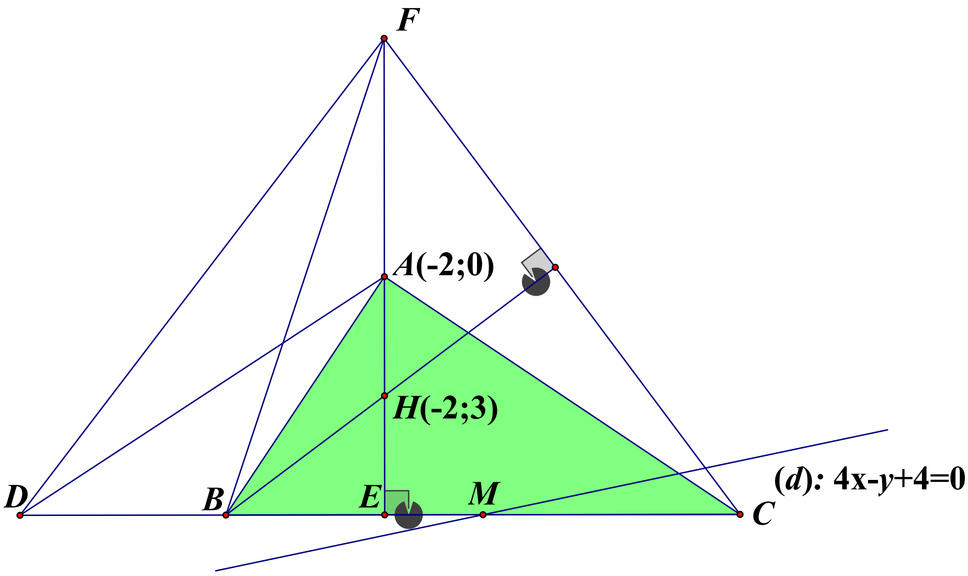
Vậy $m=\frac{-8}{7} \Rightarrow$ Tọa độ A là $A(2;\,\frac{-8}{7}) \Rightarrow$ a = 2, b = 8, c = 7 $\Rightarrow$ a + b + c = 17 $\Rightarrow$ Đáp án A

Câu 160. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại điểm $A(-2;0)$.Điểm E là chân đường cao kẻ từ đỉnh A.Gọi F là điểm đối xứng với E qua A, trực tâm tam giác BCF là điểm $H(-2;3)$.Trung điểm M của đoạn BC thuộc đường thẳng $(d): 4x-y+4=0$.Biết hoành độ đỉnh B dương. Tính $S=2x_B+3x_C$

A. -4. **B.** 9. **C.** 4. **D.** -9

Lời giải

Chọn A



Gọi D là điểm đối xứng với E qua B

Xét ΔEDF : $AB//DF \Rightarrow AC \perp DF$

Xét ΔDCF : AC và FE là đường cao $\Rightarrow A$ là trực tâm $\Rightarrow AD \perp FC$ (1)

Mà H trực tâm tam giác $BCF \Rightarrow BH \perp FC$ (2)

Từ $(1),(2)$ suy ra: $AD//BH \Rightarrow H$ là trung điểm $AE \Rightarrow E(-2;6)$

Phương trình $(AE): x+2=0 \Rightarrow (DC): y-6=0$

$$M=(DC)\cap(d) \Rightarrow \begin{cases} y-6=0 \\ 4x-y+4=0 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2};6\right)$$

Do $B\in DC \Rightarrow B(b;6)$.Mà ΔABC vuông tại A $\Rightarrow MA=MB=MC=\dfrac{13}{2}$

$$\Rightarrow MC^2=MB^2=\frac{169}{4} \Rightarrow \left(b-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{169}{4} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=7 \\ b=-6 \end{array}\right. \Rightarrow B(7,6);C(-6;6) \Rightarrow S=-4$$

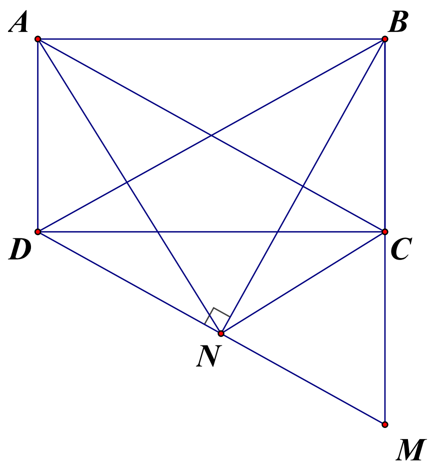
Dạng 7. Bài toán liên quan đến tứ giác

Câu 161. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm C thuộc đường thẳng d: $2x+y+5=0$ và điểm $A(-4;8)$. Gọi M đối xứng với B qua C, điểm $N(5;-4)$ là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng MD. Biết tọa độ $C(m;n)$, giá trị của $m-n$ là

A. 6. **B.** -6. **C.** 8. **D.** 7

Lời giải

Chọn C



Gọi $C(t;-2t-5)\in(d)$.

Dễ thấy hai tứ giác $BCND$ và $ADNB$ nội tiếp.

Suy ra $\begin{cases}\widehat{BNC}=\widehat{BDC}\\ \widehat{BNA}=\widehat{BDA}\end{cases}\Rightarrow\widehat{ANC}=90^{\circ}\Leftrightarrow CN\perp AN$.

Do đó $\overrightarrow{CN}.\overrightarrow{AN}=0\Leftrightarrow 9(5-t)-12(2t+1)=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow C(1;-7)$.

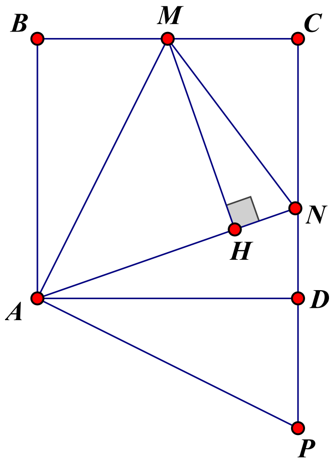
Vậy $m-n=1+7=8$

Câu 162. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho $CN=2ND$. Giả sử $M\left(\frac{11}{2};\frac{1}{2}\right)$ và đường thẳng AN có phương trình $2x-y-3=0$. Tìm tọa độ điểm A.

A. $A(1;-1)$ hoặc $A(4;-5)$.
B. $A(1;-1)$ hoặc $A(-4;-5)$.
C. $A(1;-1)$ hoặc $A(4;5)$.
D. $A(1;1)$ hoặc $A(4;5)$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $a>0$ là độ dài cạnh của hình $ABCD$.

Trên tia đối của tia DC lấy điểm P sao cho $DP=\frac{1}{2}a$.

Tam giác MCN có $MN=\sqrt{MC^2+CN^2}=\frac{5}{6}a$.

Tam giác ANP có $NP=ND+DP=\frac{5}{6}a$.

Vậy $\Delta AMN=\Delta APN$ (c.c.c) suy ra $\widehat{MAN}=45^{\circ}$.

Suy ra với H là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng   thì tam giác AHM vuông cân tại H.

Tính được $H\left(\frac{5}{2};2\right)$, $HM=\frac{3\sqrt{5}}{2}$ suy ra tọa độ A là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y-2)^2=\frac{45}{4}\\ 2x-y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=4\\ y=5\end{cases}\\ \begin{cases}x=1\\ y=-1\end{cases}\end{array}\right..$$

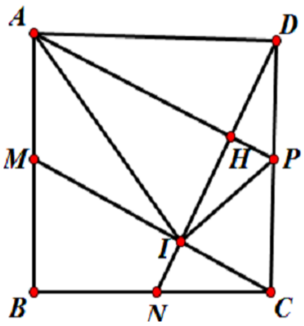
Câu 163. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$; các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD; CM cắt DN tại điểm $I(5;2)$. Biết $P\left(\frac{11}{2};\frac{11}{2}\right)$ và điểm A có hoành độ âm. Tọa độ điểm A và D là:

A. $A(-2;3)$ và $D(3;8)$. **B.** $A(-2;3)$ và $D(-3;8)$.

C. $A(-2;3)$ và $D(3;-8)$. **D.** $A(-2;-3)$ và $D(3;8)$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là giao điểm của ND, AP

Ta có: $\Delta MBC=\Delta NCD$ $(c-g-c)$ nên $\widehat{MCB}=\widehat{NDC}$.

Mà $\widehat{MCB}+\widehat{MCD}=90°\Rightarrow\widehat{NDC}+\widehat{MCD}=90°\Rightarrow\widehat{DIC}=90°\Rightarrow ND\perp MC\Rightarrow ID\perp AP$ (1)

Do $AMCP$ là hình bình hành nên $AP//MC$ $\Rightarrow$ $HP//IC$ suy ra H là trung điểm của ID (2)

Từ $(1),(2)\Rightarrow AP$ là đoạn trung trực của $ID\Rightarrow\Delta ADP=\Delta AIP\Rightarrow AI\perp IP$,

$AI=2IP=2.\frac{5\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}$.

Phương trình đường thẳng $AI:\begin{cases}x=5+7t\\ y=2-t\end{cases}$.

$A\in AI$, $A\neq I$, $x_A<0\Leftrightarrow A(5+7t;2-t)$, $5+7t<0$.

$AI=5\sqrt{2}\Leftrightarrow 50t^2=50\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1 \text{ (nhận)}\\ t=1 \text{ (loại)}\end{array}\right.$

$t=-1\Rightarrow A(-2;3)$.

$AP:x-3y+11=0$, $DN:3x+y-17=0$.

$H=AP\cap DN\Rightarrow$ Tọa độ của H là nghiệm của hệ $\begin{cases}x-3y+11=0\\ 3x+y-17=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y=5\end{cases}$.

$H(4;5)$, $I(5;2)\Rightarrow D(3;8)$.

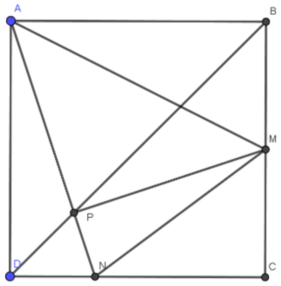
Vậy $A(-2;3)$, $D(3;8)$.

Câu 164. Trên mặt phẳng Oxy, cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho $CN=2ND$. Giả sử $M\left(\frac{11}{2};\frac{1}{2}\right)$ và đường thẳng AN có phương trình $2x-y-3=0$. Gọi $P(a;b)$ là giao điểm của AN và BD. Giá trị $2a+b$ bằng

A. 6 **B.** 5. **C.** 8. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D



Ta chứng minh được $MP\perp AN$, nên P là hình chiếu của M trên AN.

(Thật vậy gắn hệ trục toạ độ Dxy, $D(0;0),C(1;0),B(1;1),A(0;1)$. Khi đó $M\left(1;\frac{1}{2}\right);N\left(\frac{1}{3};0\right)$.

Phương trình đường thẳng $BD: y=x$. Phương trình đường thẳng $AN: 3x+y=1$.

Điểm $P\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$. Khi đó $\overrightarrow{MP}=\left(\frac{-3}{4};\frac{-1}{4}\right);\overrightarrow{AN}=\left(\frac{1}{3};-1\right)\Rightarrow\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{AN}=0\Rightarrow MP\perp AN$ (đpcm).

Phương trình đường thẳng MP qua M và vuông góc với AN là $x+2y-\frac{13}{2}=0$.

P là giao điểm MP và AN nên toạ độ P là nghiệm hệ $\begin{cases}2x-y=3\\x+2y=\frac{13}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{5}{2}\\y=2\end{cases}$.

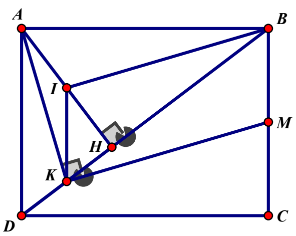
Từ đó: $a=\frac{5}{2}$, $b=2\Rightarrow 2a+b=7$.

Câu 165. Trong mặt phẳng tọa độ với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm $H(1;2)$ là hình chiếu vuông góc của A lên BD. Điểm $M\left(\frac{9}{2};3\right)$ là trung điểm cạnh BC. Phương trình đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A của tam giác ADH là $4x+y-4=0$. Biết điểm D có tọa độ là $(x_D;y_D)$ tính giá trị biểu thức $S=4x_D^2+y_D^2$.

A. $S=3$. **B.** $S=4$. **C.** $S=6$. **D.** $S=5$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AH và $DH \Rightarrow IK \parallel= \frac{1}{2}AD \Rightarrow IK \parallel= BM \Rightarrow$ tứ giác $IBMK$ là hình bình hành $\Rightarrow BI \parallel MK$. (1)

Do $IK \parallel AD$ và $AD \perp AB \Rightarrow IK \perp AB \Rightarrow I$ là trực tâm tam giác $ABK \Rightarrow BI \perp AK$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $MK \perp AK$.

Phương trình $AK: 4x + y - 4 = 0$, suy ra phương trình $MK: 2x - 8y + 15 = 0$.

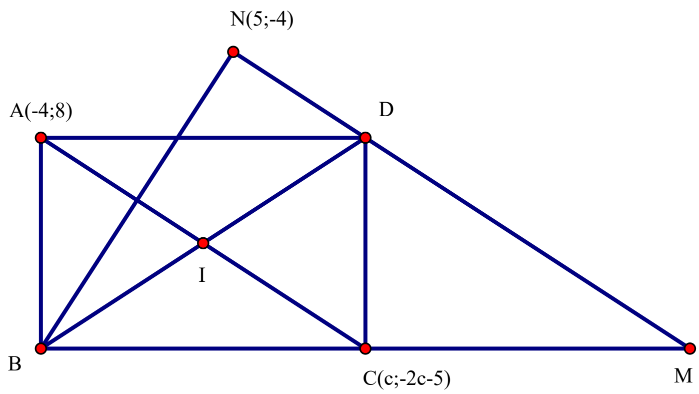
Tọa độ điểm K là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 4x + y - 4 = 0 \\ 2x - 8y + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow K\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Do đó $\begin{cases} x_D = 2x_K - x_H = 0 \\ y_D = 2y_K - y_H = 2 \end{cases} \Rightarrow D(0;2) \Rightarrow P = 4..$

Câu 166. Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), cho hình chữ nhật ABCD có điểm C thuộc đường thẳng $d: 2x + y + 5 = 0$ và điểm $A(-4;8)$. Gọi M là điểm đối xứng với B qua C, điểm $N(5;-4)$ là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng M**D.** Biết tọa độ $C(m;n)$, giá trị của $m - n$ là:

A. 6. **B.** -6. **C.** 8. **D.** 7.

Lời giải



Chọn C

Gọi $I(a;b)$ là trung điểm BD

Có $\widehat{BAD} = \widehat{BND} = 90°$. Suy ra $BAND$ nội tiếp đường tròn đường kính BD, tâm I

Có $IA = IN \Leftrightarrow (a+4)^2 + (b-8)^2 = (a-5)^2 + (b+4)^2 \Leftrightarrow 6a - 8b + 13 = 0$

Có I là trung điểm AC. Nên $C(2a+4; 2b-8)$

Có $C \in d$. Suy ra $2(2a+4) + (2b-8) + 5 = 0 \Leftrightarrow 4a + 2b + 5 = 0$

Giải hệ: $\begin{cases} 6a - 8b + 13 = 0 \\ 4a + 2b + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Có $m - n = (2a+4) - (2b-8) = 8$.

Câu 167. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính BD. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên BC và BD; gọi P là giao điểm của MN và AC. Biết đường thẳng AC có phương trình $x-y-1=0, M(0;4), N(2;2)$ và hoành độ điểm A nhỏ hơn 2. Tìm tọa độ các điểm P, A, B.

A. $P\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right), A(0;-1),\ B(4;1)$.

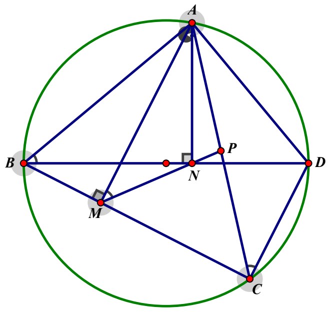
B. $P\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right), A(0;-1),\ B(-1;4)$.

C. $P\left(\frac{5}{3};\frac{3}{2}\right), A(0;-1),\ B(-1;4)$.

D. $P\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right), A(-1;0),\ B(4;1)$.

Lời giải

Chọn B



* Ta chứng minh P là trung điểm của AC.

Thật vậy: do các tứ giác $ABMN$, $ABCD$ là các tứ giác nội tiếp nên $\widehat{AMP}=\widehat{ABN}=\widehat{ACD}$

Lại do : $AM // CD$ (cùng vuông góc với BC) nên $\widehat{ACD}=\widehat{CAM} \Rightarrow \widehat{PAM}=\widehat{PMA}$

$\Rightarrow \Delta PAM$ cân tại $P \Rightarrow PA=PM$. Đồng thời ΔPCM cân tại P nên $PC=PM$

$\Rightarrow PA=PC$ hay P là trung điểm của AC.

- Ta có : $\overrightarrow{MN}=(2;-2) \Rightarrow$ đường thẳng MN có phương trình: $x+y-4=0$

Điểm P có tọa độ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-y-1=0 \\ x+y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow P=\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$

- Do $A \in AC: x-y-1=0 \Rightarrow A=(a;a-1)$ (với $a<2$)

- Do $PA=PM \Leftrightarrow \left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\left(a-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2} \Leftrightarrow \left(a-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-\frac{5}{2}=\frac{5}{2} \\ a-\frac{5}{2}=-\frac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=5 \\ a=0 \end{array}\right. \Rightarrow a=0 \Rightarrow A=(0;-1) \Rightarrow C=(5;4)$

- Do BC đi qua $M(0;4)$ và $C(5;4)$ nên BC có phương trình: $y-4=0$.

- Lại có: $\overrightarrow{AN}=(2;3)$ là vectơ pháp tuyến của BD nên phương trình BD là: $2x+3y-10=0$.

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} y-4=0 \\ 2x+3y-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow B=(-1;4)$.

Vậy $P\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$, $A(0;-1)$, $B(-1;4)$.

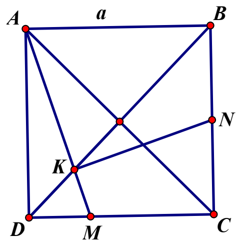
Câu 168. Trên hệ trục tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$. Điểm M thuộc cạnh CD sao cho $\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{DM}$, $N(0;2019)$ là trung điểm của cạnh BC, K là giao điểm của hai đường thẳng AM và BD. Biết đường thẳng AM có phương trình $x-10y+2018=0$. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng NK bằng

A. 2019. **B.** $2019\sqrt{101}$. **C.** $\frac{2018}{11}$. **D.** $\frac{2019\sqrt{101}}{101}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi cạnh hình vuông bằng a. Do $\Delta ABK \sim \Delta MDK \Rightarrow \frac{MD}{AB}=\frac{DK}{KB}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{DK}{DB}=\frac{1}{4}$.



Ta có $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ (1)

$\overrightarrow{NK}=\overrightarrow{BK}-\overrightarrow{BN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{NK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DC}=0\Rightarrow AM\perp NK$.

Vì $AM\perp NK$ nên NK có phương trình tổng quát: $10x+y-2019=0$.

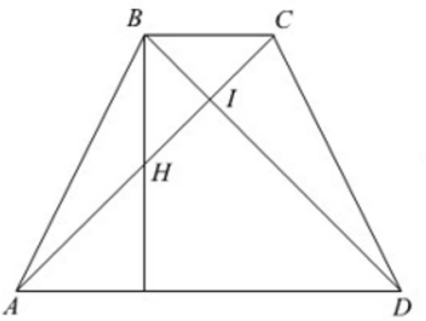
Khoảng cách từ O đến NK là $d(O,NK)=\frac{|-2019|}{\sqrt{10^2+1^2}}=\frac{2019\sqrt{101}}{101}$.

Câu 169. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang cân $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau và $AD=3BC$. Đường thẳng BD có phương trình $x+2y-6=0$ và tam giác ABD có trực tâm là $H(-3;2)$. Tìm tọa độ các đỉnh C và D.

A. $C(-1;6),D(4;1)$ **và** $C(-1;6),D(-8;7)$. **B.** $C(1;6),D(-4;1)$ **và** $C(1;6),D(-8;7)$.

C. $C(1;6),D(-4;1)$ **và** $C(1;6),D(8;7)$. **D.** $C(-1;6),D(4;-1)$ **và** $C(-1;6),D(8;-7)$.

Lời giải.



Gọi I là giao điểm của AC và $BD\Rightarrow IB=IC$.

Mà $IB\perp IC$ nên ΔIBC vuông cân tại $I\Rightarrow\widehat{ICB}=45^0$.

$BH\perp AD\Rightarrow BH\perp BC\Rightarrow\Delta HBC$ vuông cân tại B $\Rightarrow I$ là trung điểm của đoạn thẳng HC.

Do $CH\perp BD$ và trung điểm I của CH thuộc BD nên tọa độ điểm C thỏa mãn hệ

$$\begin{cases}2(x+3)-(y-2)=0\\ \frac{x-3}{2}+2\left(\frac{y+2}{2}\right)-6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=6\end{cases}\Rightarrow C(-1;6).$$

Ta có: $\frac{IC}{ID}=\frac{IB}{ID}=\frac{BC}{AD}=\frac{1}{3}\Rightarrow ID=3IC \Rightarrow CD=\sqrt{IC^2+ID^2}=IC\sqrt{10}=\frac{CH\sqrt{10}}{2}=5\sqrt{2}.$

Ta có: $D(6-2t;t)$ và $CD=5\sqrt{2}$ suy ra $(7-2t)^2+(t-6)^2=50\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=7.\end{array}\right.$

Do đó: $D(4;1)$ hoặc $D(-8;7)$.

Câu 170. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD**.** Các đường thẳng AC và AD lần lượt có phương trình là $x+3y=0$ và $x-y+4=0$; đường thẳng BD đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{3};1\right)$. Khẳng định nào sau đay là khẳng định đúng?

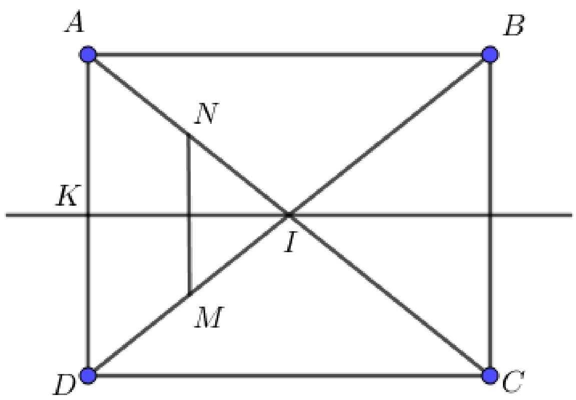
A. Tọa độ trọng tâm của tam giác BCD là $G\left(\frac{5}{3};-\frac{1}{3}\right)$

B. Tọa độ trọng tâm của tam giác ACD là $G\left(-\frac{1}{3};-1\right)$

C. Tọa độ trọng tâm của tam giác ABD là $G(-1;3)$

D. Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(\frac{1}{3};-1\right)$

Lời giải



+ Tọa độ điểm A thỏa mãn hệ

$$\begin{cases}x+3y=0\\x-y+4=0\end{cases}\Rightarrow A(-3;1)$$

+ Gọi N là điểm thuộc AC sao cho MN//AD**.** Suy ra MN có phương trình là: $x-y+\frac{4}{3}=0$

Vì N thuộc AC nên tọa độ điểm N thỏa mãn hệ $\begin{cases}x-y+\frac{4}{3}=0\\x+3y=0\end{cases}\Rightarrow N\left(-1;\frac{1}{3}\right)$

Đường trung trực Δ của MN đi qua trung điểm của MN và vuông góc với AD, nên ta có phương trình $x+y=0$

Gọi I, K lần lượt là giao điểm của Δ với AC và AD**.**

Suy ra tọa độ điểm I thỏa mãn hệ $\begin{cases}x+y=0\\x+3y=0\end{cases}\Rightarrow I(0;0)$

Tọa độ điểm K thỏa mãn hệ $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y+4=0 \end{cases} \Rightarrow K(-2;2)$

Ta có

$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI} \Rightarrow C(3;-1); \overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AK} \Rightarrow D(-1;3); \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD} \Rightarrow B(1;-3)$

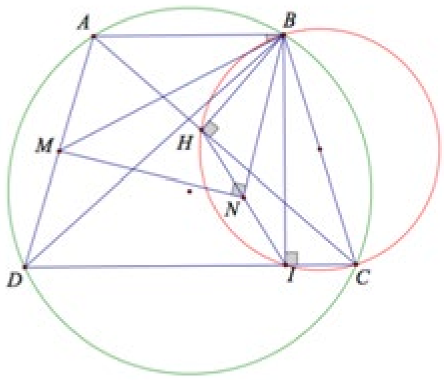
Vậy tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(\frac{1}{3};-1\right)$

Câu 171. Trong mặt phẳng với trục toạ độ Oxy cho hình thang cân $ABCD$ $(AB//CD)$. Gọi H,I lần lượt là hình chiếu vuông góc của B trên các đường thẳng AC,CD. Giả sử M,N lần lượt là trung điểm của AD,HI. Phương trình đường thẳng AB có dạng $mx+ny-7=0$ biết $M(1;-2)$, $N(3;4)$ và đỉnh B nằm trên đường thẳng $x+y-9=0$, $\cos\widehat{ABM}=\frac{2}{\sqrt{5}}$. Khi đó $m+n$ có giá trị thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ **B.** $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ **C.** $\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$ **D.** $\left(\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$

Lời giải

Chọn B



Xét tam giác ABD và HBI có: $\widehat{ABD}=\widehat{HCI}=\widehat{HBI}$.

Và $\widehat{ADB}=\widehat{ACB}=\widehat{HIB}$. Suy ra ΔABD và ΔHBI đồng dạng.

Ta có BM,BN lần lượt là hai trung tuyến của hai tam giác ABD,HBI do đó:

$\frac{BM}{BN}=\frac{BA}{BH}$ (1).

Lại có $\widehat{ABM}=\widehat{HBN} \Rightarrow \widehat{MBN}=\widehat{ABH}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra ΔABH và ΔMBN đồng dạng.

Do đó $\widehat{MNB}=\widehat{AHB}=90^\circ$ hay $MN \perp NB$

Đường thẳng BN đi qua N và vuông góc với MN nên có phương trình là: $x+3y-15=0$.

Toạ độ điểm B thoả mãn $\begin{cases} x+y-9=0 \\ x+3y-15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases}$. Suy ra $B(6;3)$.

Gọi $\vec{n}(a;b)$ với $a^2+b^2 \neq 0$ là một vec tơ chỉ phương của đường thẳng AB.

Ta có $\overrightarrow{MB}(5;5)$ Theo bài ra ta có $\cos\widehat{ABM}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\cos\widehat{ABM}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{|a+b|}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}$

$\Leftrightarrow 8\left(a^2+b^2\right)=5\left(a+b\right)^2 \Leftrightarrow 3a^2-10ab+3b^2=0 \Leftrightarrow a=3b$ và $b=3a$

Với $b=3a$, chọn $a=1;b=3$ ta có phương trình $AB: x+3y-15=0$ (loại do trùng với BN).

Với $a=3b$, chọn $a=3;b=1$ ta có phương trình $AB: 3x+y-21=0$

Vậy phương trình đường thẳng $AB: x+\frac{1}{3}y-7=0$.

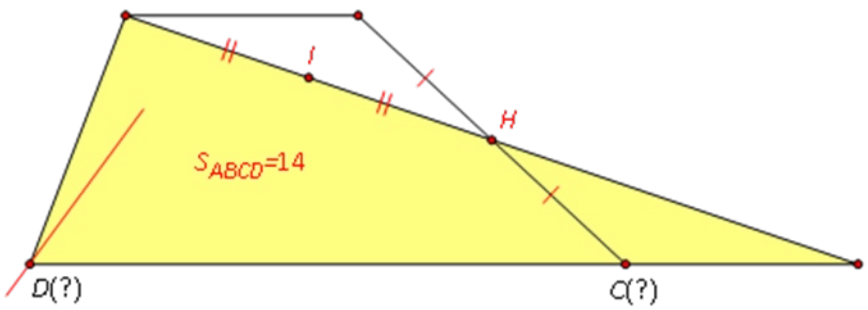
Chọn đáp án **B.**

Câu 172. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang $ABCD$ có diện tích bằng 14 và $AB//CD$. Biết $H\left(-\frac{1}{2};0\right)$ là trung điểm của cạnh BC và $I\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$ là trung điểm của AH. Viết phương trình đường thẳng AB, biết điểm D có hoành độ dương và D thuộc đường thẳng $5x-y+1=0$.

A. $3x-y+2=0$. **B.** $3x-y-2=0$. **C.** $x+3y-2=0$. **D.** $x-3y-2=0$.

Lời giải

Chọn B



A(?) B(?)

E

• Do I là trung điểm của $AH \Rightarrow A(1;1)$. Gọi E là giao điểm của AH và DC. Khi đó $\Delta ABH=\Delta ECH$. Do đó $S_{ABH}=S_{ECH} \Rightarrow S_{AED}=S_{AHCD}+S_{ECH}=S_{AHCD}+S_{ABH}=S_{ABCD}=14$ và H là trung điểm AE.

Suy ra $E(-2;-1)$ từ đó có phương trình $AE: 2x-3y+1=0$.

• Do D thuộc đường thẳng $5x-y+1=0$ nên $D(t;5t+1), t>0$.

Ta có

$$AE=\sqrt{13} \Rightarrow d(D;AE)=\frac{2S_{AED}}{AE} \Leftrightarrow \frac{\left|2t-3(5t+1)+1\right|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{28}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-\frac{30}{13} \end{array}\right. \Rightarrow t=2 \Rightarrow D(2;11).$$

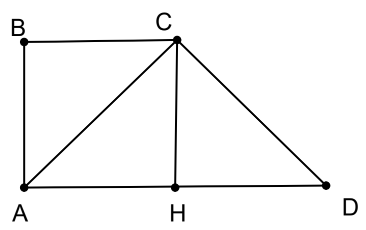
• Ta có $\overrightarrow{ED}=(4;12)=4(1;3)$. Do $AB//ED$ nên $\vec{n}_{AB}=\vec{n}_{ED}=(3;-1)$ là vecto pháp tuyến của AB.

Vậy phương trình đường thẳng AB là $3x-y-2=0$

Câu 173. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B, cạnh $AB = BC = \frac{AD}{2}$. Biết đường thẳng chứa cạnh CD có phương trình $3x + y - 4 = 0$ và $A(-2; 0)$. Điểm $B(a;b)$ với $b>0$ khi đó $a^2+b^2=?$

A. 5 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 4

Lời giải



Gọi H là trung điểm của AD suy ra tứ giác ABCH là hình vuông nên các tam giác AHC, DHC vuông cân tại H vậy nên AC vuông góc với CD

$\Rightarrow AC: x-3y+2=0$

$\Rightarrow AC \cap CD = C(1;1)$

ΔABC vuông cân tại B nên B nằm trên đường tròn đường kính AC và AB =BC ta có hệ

$$\begin{cases} \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2} \\ 3x+y=-1 \end{cases}$$

$\Rightarrow x^2+x=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, y=-1\ (L) \\ x=-1, y=2\ (TM) \end{array}\right.$ Vậy B(-1; 2)

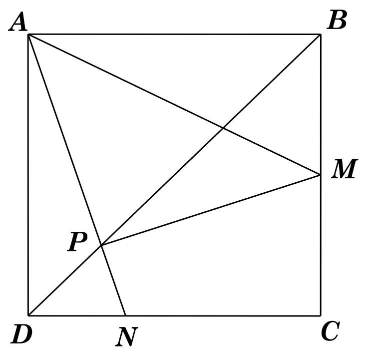
Vậy $a^2+b^2=5$ **Chọn A**

Câu 174. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD**.** Gọi M là trung điểm của cạnh BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho $CN=2ND$. Giả sử $M\left(\frac{11}{2};\frac{1}{2}\right)$ và đường thẳng AN có phương trình $2x-y-3=0$. Gọi $P(a;b)$ là giao điểm của AN và BD**.** Giá trị $2a+b$ bằng:

A. 5. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B



Xét tam giác vuông ABM có $\tan\widehat{BAM}=\frac{BM}{AB}=\frac{1}{2}$

Xét tam giác vuông ADN có $\tan\widehat{DAN}=\frac{DN}{DA}=\frac{1}{3}$

Ta có $\tan\left(\widehat{BAM}+\widehat{DAN}\right)=\frac{\tan\widehat{BAM}+\tan\widehat{DAN}}{1-\tan\widehat{BAM}.\tan\widehat{DAN}}=1$. Suy ra $\widehat{BAM}+\widehat{DAN}=45^0$

Do đó $\widehat{PAM}=90^0-\left(\widehat{BAM}+\widehat{DAN}\right)=45^0$

Ta có $\widehat{PAM}=45^0=\widehat{PBM}$ nên tứ giác ABMP nội tiếp.

Suy ra $\widehat{APM}=180^0-\widehat{ABM}=90^0$ hay $MP\perp AN$

Đường thẳng MP đi qua M và vuông góc với AN nên $MP: x+2y-\frac{13}{2}=0$.

Do $P=AN\cap MP$ nên tọa độ điểm P thỏa mãn hệ $\begin{cases} 2x-y-3=0 \\ x+2y-\frac{13}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{5}{2};2\right)$.

Vậy $2a + b = 7$.

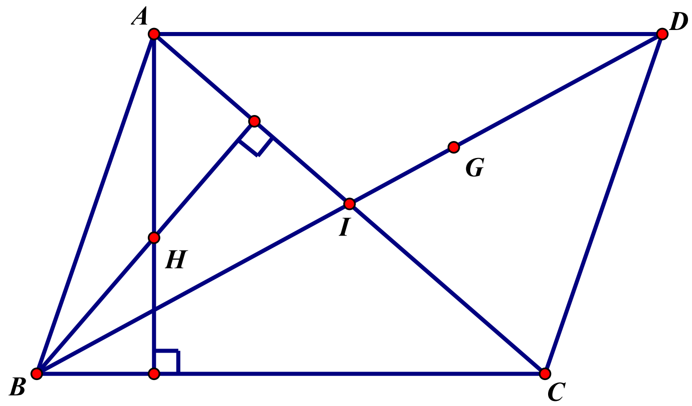
Câu 175. Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho hình bình hành *ABCD* có phương trình đường chéo *AC* là $5x + y + 4 = 0$. Tọa độ trực tâm tam giác *ABC* là $H(-\frac{23}{7};\frac{15}{7})$. Tọa độ trọng tâm tam giác *ACD* là $G(-\frac{2}{3};4)$. Gọi x_A, x_B, x_C, x_D lần lượt là hoành độ của các điểm *A, B, C,D.*

Tính giá trị biểu thức $T = {x_A}^2 + {x_C}^2 + 2018x_D + x_{B.}$.

A. 2024. **B.** 2015. **C.** 2021. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn D



+ Đường thẳng *BH* qua $H(-\frac{23}{7};\frac{15}{7})$ và vuông góc với *AC* nên có phương trình: $x - 5y + 14 = 0$ hay $x = 5y - 14$

Giả sử $B(5b - 14; b)$. Ta có

$$d(B;AC) = d(D;AC) = 3d(G;AC) \Rightarrow \frac{|5(5b-14)+b+4|}{\sqrt{5^2+1^2}} = 3.\frac{\left|-5.\frac{2}{3}+4+4\right|}{\sqrt{5^2+1^2}}$$

$$\Leftrightarrow |26b - 66| = 14 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 26b - 66 = 14 \\ 26b - 66 = -14 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = \frac{40}{13} \\ b = 2 \end{array}\right.$$

Suy ra $B(\frac{18}{13};\frac{40}{13})$ hoặc $B(-4;2)$. Do *B, G* nằm khác phía *AC* nên $B(-4;2)$.

Giả sử $D(x;y)$ ta có:

$$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}(x+4) = \frac{10}{3} \\ \frac{2}{3}(y-2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow D(1;5)$$

Vì *I* là trung điểm của *BD* nên $I(-\frac{3}{2};\frac{7}{2})$

Đường thẳng *AC* có phương trình $y = -5x - 4$.

Giả sử $A(a; -5a - 4)$, vì $I(-\frac{3}{2};\frac{7}{2})$ là trung điểm của *AC* nên $C(-a - 3; 5a + 11)$.

Ta có $\overrightarrow{HA} = (a + \frac{23}{7}; -5a - \frac{43}{7}); \overrightarrow{BC} = (-a + 1; 5a + 9)$.

Do $HA \perp BC \Rightarrow \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow (a + \frac{23}{7})(-a+1) + (-5a - \frac{43}{7})(5a+9) = 0$

$\Leftrightarrow a^2 + 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = -2 \end{array}\right.$

$a = -1 \Rightarrow A(-1;1); C(-2;6)$

$a = -2 \Rightarrow A(-2;6); C(-1;1)$.

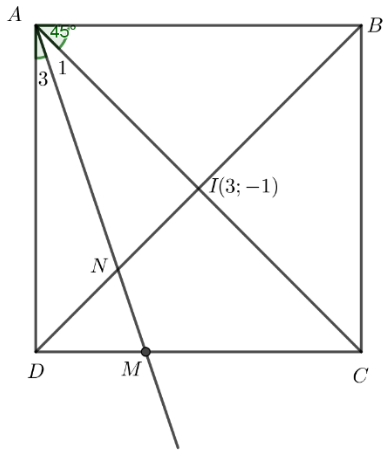
Khi đó: $T = {x_A}^2 + {x_C}^2 + 2018x_D + x_{B.} = (-1)^2 + (-2)^2 + 2018 - 4 = 2019.$

Câu 176. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có tâm $I(3;-1)$, điểm M thuộc cạnh CD sao cho $MC = 2MD$. Tìm tọa độ đỉnh A của hình vuông $ABCD$ biết đường thẳng AM có phương trình $2x - y - 4 = 0$ và đỉnh A có tung độ âm.

A. $A(3;-2)$. **B.** $A(3;2)$. **C.** $A\left(-\frac{3}{2};-7\right)$. **D.** $A\left(\frac{3}{5};-\frac{14}{5}\right)$.

Lời giải

Chọn D



Cách 1: Sử dụng khoảng cách

Biết tọa độ điểm $I(3;-1)$ và phương trình đường thẳng $AM \Rightarrow IH = d(I, AM) = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

$AM \cap BD = \{N\}$ với N là trung điểm của DI.

Gọi $a, (a > 0)$: là độ dài cạnh của hình vuông.

$AI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $IN = \frac{1}{2}ID = \frac{a\sqrt{2}}{4}$; $IH = \frac{3}{\sqrt{5}}$

$\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{IN^2} \Leftrightarrow \frac{5}{9} = \frac{2}{a^2} + \frac{8}{a^2} \Rightarrow a = 3\sqrt{2}$.

Ta có: $\begin{cases} A \in AM \Leftrightarrow A(x; 2x-4) \\ IA = 3 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (2x-3)^2 = 9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \Rightarrow A(3;2) \\ x = \frac{3}{5} \Rightarrow A\left(\frac{3}{5}; -\frac{14}{5}\right) \end{array}\right.$

Vậy $A\left(\frac{3}{5}; -\frac{14}{5}\right)$

Cách 2: Xác định $A = AC \cap AM$.

Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng AC và AM.

$\alpha = 90^0 - (A_1 + A_3) = 90^0 - (A_3 + 45^0)$

$\cos\alpha = \cos\left(90^0 - (A_3 + 45^0)\right) = \sin(A_3 + 45^0)$

Gọi $a, (a > 0)$ là độ dài cạnh của hình vuông.

Ta có: $AD = a; DM = \frac{a}{3}; AM = \frac{a\sqrt{10}}{3} \Rightarrow \cos A_3 = \frac{3}{\sqrt{10}}; \sin A_3 = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Gọi $\vec{n} = (a; b), (a^2 + b^2 \neq 0)$ là véc tơ pháp tuyến của đường thẳng AC. $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{|2a - b|}{\sqrt{5}.\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ 3b + 4a = 0 \end{array}\right.$

Với $b = 0$ chọn $a = 1$

Đường thẳng AC đi qua $I(3; -1)$ có véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 0)$ có phương trình $x - 3 = 0$.

$\{A\} = AC \cap AM \Rightarrow$ Tọa độ $A: \begin{cases} x - 3 = 0 \\ 2x - y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A(3; 2)$ (Loại).

Tương tự, với $3b + 4a = 0$ chọn $a = 3, b = -4$

Đường thẳng AC đi qua $I(3; -1)$ có véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; -4)$ có phương trình $3x - 4y - 13 = 0$.

$\{A\} = AC \cap AM \Rightarrow$ Tọa độ $A: \begin{cases} 3x - 4y - 13 = 0 \\ 2x - y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = -\frac{14}{5} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{3}{5}; -\frac{14}{5}\right)$

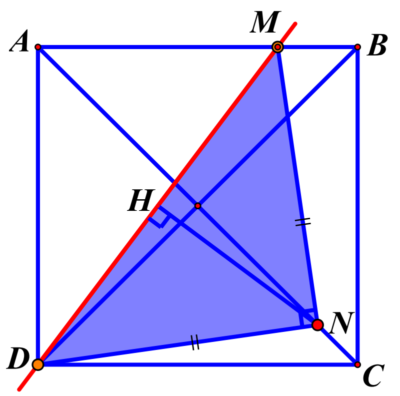
Vậy $A\left(\frac{3}{5}; -\frac{14}{5}\right)$.

Câu 177. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có M, N là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{7}{8}\overrightarrow{AC}$. Biết rằng hai điểm M, D thuộc đường thẳng $\Delta: 4x - 3y - 2 = 0$, $N\left(\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ và D có hoành độ lớn hơn $\frac{1}{3}$, hãy tính tổng hoành độ và tung độ của điểm A.

A. $\frac{-22}{25}$ **B.** $\frac{-24}{25}$. **C.** 0. **D.** $\frac{4}{25}$.

Lời giải

Chọn B



• $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{8}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD} = \frac{7}{8}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{8}\overrightarrow{AD}$

• $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{DN} = \frac{7}{64}AB^2 - \frac{7}{64}AD^2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{DN}$

• $MN^2 = \frac{5}{6}AB^2 = DN^2 \Rightarrow MN = DN \Rightarrow \Delta DMN$ vuông cân tại N.

Gọi H là hình chiếu của N trên Δ thì $NH = d(N;\Delta) = \frac{5}{2}$.

ΔDMN vuông cân tại $N \Rightarrow \Delta DHN$ vuông cân tại H và H trung điểm của DM.

$\Rightarrow ND = NM = \sqrt{2}NH$.

$\Rightarrow D, M$ là các giao điểm của Δ và đường tròn tâm N, bán kính $R = \sqrt{2}NH = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

$\Rightarrow$ Tọa độ của D, M là các nghiệm (x;y) của hệ $\begin{cases} 4x-3y-2=0 \\ (x-\frac{5}{2})^2+(y+\frac{3}{2})^2 = \frac{25}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(2;2),\ D(-1;-2) \text{ (loại)} \\ M(-1;-2),\ D(2;2) \text{ (nhận)} \end{array} \right.$

• $M(-1;-2),\ D(2;2) \Rightarrow MD = 5 \Rightarrow AD = 4,\ AM = 3$.

Giả sử $A(a;b)$. Từ $AD = 4,\ AM = 3$ và hai điểm A, N nằm về hai phía khác nhau đối với đườngthẳng DM ta có hệ $\begin{cases} (a-2)^2+(b-2)^2=16, \\ (a+1)^2+(b+2)^2=9 \\ (4a-3b-2).\frac{25}{2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{46}{25} \\ b = \frac{22}{25} \end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{46}{25};\frac{22}{25}\right)$.

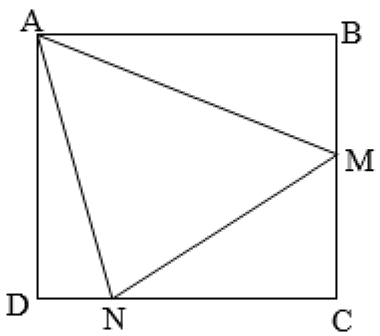
Vậy tổng hoành độ và tung độ của A là $-\frac{24}{25}$.

Câu 178. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho $CN = 2ND$. Giả sử $M\left(\frac{11}{2};\frac{1}{2}\right)$ và đường thẳng AN: $2x-y-3=0$. Biết tọa độ $A(a;b)$ (với $b>0$). Tính $a+b$

A. $a+b=0$. **B.** $a+b=9$. **C.** $a+b=-1$. **D.** $a+b=4$

Lời giải

Chọn B



Giả sử $A(a,2a-3)$ và $B(b,c)$.

Vì M là trung điểm của BC nên $C(11-b,\ 1-c)$.

Vì $ABCD$ là hbh nên $D(a-2b+11, 2a-2c-2)$

$\Rightarrow N\left(\frac{2a-5b+33}{3};\frac{4a-5c-3}{3}\right)$

Mặt khác: $N \in AN$ nên: $c = 2b-12$.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB = BC \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (b-a)(11-2b)+(2b-2a-9)(24-4b)=0 \\ (b-a)^2+(2b-2a-9)^2=(11-2b)^2+(25-4b)^2 \end{cases} \Leftrightarrow a=1 \vee a=4$

Với $a=1 \Rightarrow b=-1$ loại

Với $a=4 \Rightarrow b=5 \Rightarrow a+b=9$

Câu 179. Trong hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi $ABCD$ cạnh AC có phương trình là: $x+7y-31=0$, hai đỉnh B, D lần lượt thuộc các đường thẳng $d_1: x+y-8=0$, $d_2: x-2y+3=0$. Biết rằng diện tích hình thoi bằng 75, đỉnh A có hoành độ âm. Tính tổng hoành độ và tung độ của điểm C

A. 7 **B.** 10 **C.** 13 **D.** 15

Lời giải

Chọn B

$B \in d_1 \Rightarrow B(b;8-b)$, $D \in d_2 \Rightarrow (2d-3;d)$.

Khi đó $\overrightarrow{BD}=(-b+2d-3;b+d-8)$ và trung điểm của BD là $I\left(\dfrac{b+2d-3}{2};\dfrac{-b+d+8}{2}\right)$.

Theo tính chất hình thoi ta có :

$\begin{cases} BD \perp AC \\ I \in AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_{AC}}.\overrightarrow{BD}=0 \\ I \in AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8b+13d-13=0 \\ -6b+9d-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ d=1 \end{cases}.$

Suy ra $B(0;8)$; $D(-1;1)$. Khi đó $I\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{2}\right)$; $A \in AC \Rightarrow A(-7a+31;a)$ đk : $a>\dfrac{31}{7}$

Cách 1 :

$S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}AC.BD \Rightarrow AC=\dfrac{2S_{ABCD}}{BD}=15\sqrt{2} \Rightarrow IA=\dfrac{15}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \left(-7a+\dfrac{63}{2}\right)^2+\left(a-\dfrac{9}{2}\right)^2=\dfrac{225}{2} \Leftrightarrow \left(a-\dfrac{9}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=6 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(10;3)\ (ktm) \\ A(-11;6) \end{array}\right.$

Suy ra $C(10;3)$ nên tổng hoành độ và tung độ của điểm C là: 13

Cách 2 : $S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}AC.BD \Rightarrow AC=\dfrac{2S_{ABCD}}{BD}=15\sqrt{2}$

ta có $I\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{2}\right)$ là trung điểm của AC nên $C(7a-32;9-a)$ suy ra

$\Rightarrow \overrightarrow{AC}=(14a-63;9-2a) \Rightarrow \sqrt{(14a-63)^2+(9-2a)^2}=15\sqrt{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=6 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(10;3)\ (ktm) \\ A(-11;6) \end{array}\right.$

Câu 180. Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ với đường thẳng chứa cạnh AD có phương trình là $d_1: 3x+y-14=0$. Biết điểm $E(0;-6)$ là điểm đối xứng của C qua AB. Gọi M là trung điểm của CD. Biết $BD \cap ME = I$ với $I(\dfrac{2}{3};-\dfrac{4}{3})$. Tính độ dài đoạn thẳng HD với $H(2;-3)$.

A. $HD=\sqrt{29}$. **B.** $HD=5$. **C.** $HD=\sqrt{37}$. **D.** $HD=\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

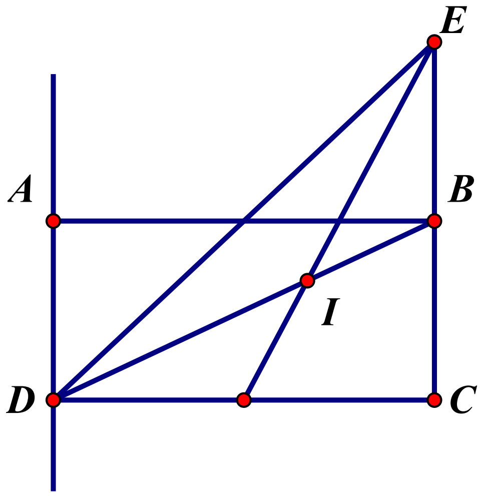
Ta có ΔCDE với hai trung tuyến $BD \cap ME = I$ nên có $\overrightarrow{EM}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{EI}$.

Đặt $M(a;b)$ ta có: $(a;b+6)=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{14}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$. Vậy $M(1;1)$.

Đường thẳng CD đi qua điểm M và vuông góc với AD nên có phương trình $d': x-3y+2=0$

Vậy tọa độ điểm D thỏa hệ phương trình $\begin{cases}3x+y=14=0\\x-3y+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$

Do đó $HD=\sqrt{29}$.



Dạng 8. Cực trị

Câu 181. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm $A(1;-1)$ và $B(3;4)$. Gọi (d) là một đường thẳng bất kì luôn đi qua **B.** Khi khoảng cách từ A đến đường thẳng (d) đạt giá trị lớn nhất, đường thẳng (d) có phương trình nào dưới đây?

A. $x-y+1=0$. **B.** $3x+4y=25$. **C.** $5x-2y-7=0$. **D.** $2x+5y-26=0$.

Lời giải

Chọn D

Gọi H là hình chiếu của điểm A lên đường thẳng (d). Khi đó ta có: $d(A,(d))=AH\le AB=\sqrt{(3-1)^2+(4+1)^2}=\sqrt{29}$. Do đó khoảng cách từ A đến đường thẳng (d) đạt giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{29}$ khi $H\equiv B$ hay $(d)\perp AB$ tại B.

Vì vậy (d) đi qua B và nhận $\overrightarrow{AB}=(2;5)$ làm VTPT.

Do đó phương trình của đường thẳng (d) là $2(x-3)+5(y-4)=0\Leftrightarrow 2x+5y-26=0$.

Câu 182. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x+(m-1)y+m=0$ (m là tham số bất kì) và điểm $A(5;1)$. Khoảng cách lớn nhất từ điểm A đến Δ bằng

A. $2\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $4\sqrt{10}$. **D.** $3\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn A

$\Delta: x+(m-1)y+m=0\Leftrightarrow(y+1)m+x-y=0\ \forall m\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}$.

Suy ra Δ luôn đi qua điểm cố định $H(-1;-1)$.

Khi đó, với mọi $M\in\Delta$, ta có $d(A;\Delta)=AM\le AH$.

Giá trị lớn nhất của $d(A;\Delta)=AH$ khi $M\equiv H\Rightarrow \max d(A,\Delta)=AH=2\sqrt{10}$.

Câu 183. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $\Delta: x-y+1=0$ và hai điểm $A(2;1)$, $B(9;6)$. Điểm $M(a;b)$ nằm trên đường Δ sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất. Tính $a+b$.

A. -7. **B.** -9. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Gọi A' đối xứng A qua d ta có $A'(0;3)$ khi đó điểm $M = A'B \cap d$

Tìm được $M(3;4)$.

Câu 184. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x-4y+15=0$ và điểm $A(2;0)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc d để đoạn AM có độ dài nhỏ nhất.

A. $M(-15;0)$. **B.** $M(5;5)$. **C.** $M(0;3)$. **D.** $M(1;4)$.

Lời giải

Chọn D

Điểm $M \in d \Leftrightarrow M(4t-15;t)$

Ta có: $AM = \sqrt{(4t-17)^2 + t^2} = \sqrt{17(t^2-8t+17)} = \sqrt{17\left[(t-4)^2+1\right]} \geq \sqrt{17}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \min AM = \sqrt{17}$, đạt được tại $t=4$. Khi đó $M(1;4)$.

Câu 185. Cho 3 điểm $A(-6;3); B(0;-1); C(3;2)$. Tìm M trên đường thẳng $d: 2x-y-3=0$ mà $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất là

A. $M\left(\frac{13}{15};\frac{71}{15}\right)$ **B.** $M\left(\frac{13}{15};\frac{19}{15}\right)$ **C.** $M\left(\frac{26}{15};\frac{97}{15}\right)$ **D.** $M\left(\frac{-13}{15};\frac{19}{15}\right)$

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Tìm tọa độ điểm $I(x;y)$ sao cho $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. Suy ra $I\left(-1;\frac{4}{3}\right)$

Ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}$

$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right| = 3\left|\overrightarrow{MI}\right|$. Vậy $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất khí $\left|\overrightarrow{MI}\right|$ nhỏ nhất.

$\left|\overrightarrow{MI}\right|$ nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của I xuống đường thẳng d.

Đường thẳng d' đi qua I và vuông góc với d có phương trình: $x+2y=\frac{5}{3}$

M là giao điểm của d và d' nên M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x+2y=\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{-13}{15};\frac{19}{15}\right)$

Cách 2:

M thuộc d suy ra $M(t;2t+3)$

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = (-3-3t;-6t-5)$

$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right| = \sqrt{(-3-3t)^{2+}+(-6-5t)^2}$

$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right| = \sqrt{45t^2+78t+34} = \sqrt{45\left(t+\frac{13}{15}\right)^2+\frac{1}{5}}$

$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất khi $t=-\frac{13}{15}$. Suy ra $M\left(\frac{-13}{15};\frac{19}{15}\right)$.

Câu 186. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(2;2)$, $B(1;-3)$, $C(-2;2)$. Điểm M thuộc trục tung sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất có tung độ là?

A. 1. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $-\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $G(a;b)$ là trọng tâm tam giác ABC. Suy ra $\begin{cases} a=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ b=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2+1-2}{3} \\ b=\dfrac{2-3+2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{3} \\ b=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

Ta có: $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right|=\left|3\overrightarrow{MG}\right|=3MG$.

Suy ra $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất khi MG nhỏ nhất.

Mặt khác M thuộc trục tung nên MG nhỏ nhất khi M là hình chiếu của G lên trục tung.

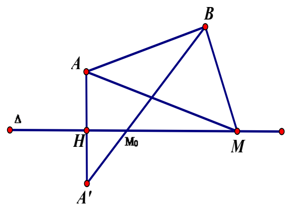
Vậy $M\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$.

Câu 187. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $\Delta: x-y+1=0$ và hai điểm $A(2;1)$, $B(9;6)$. Điểm $M(a;b)$ nằm trên đường Δ sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất. Tính $a+b$ ta được kết quả là:

A. -9. **B.** 9. **C.** -7. **D.** 7

Lời giải

Chọn D



Gọi A' là điểm đối xứng của A qua đường thẳng Δ

Ta có: $MA+MB=MA'+MB\geq A'B$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ M trùng với M_0 (M_0 là giao điểm của Δ và A'B)

Ta có: $AA'\perp\Delta$ nên $\overrightarrow{n_{AA'}}=\overrightarrow{a_\Delta}=(1;1)$

$(AA'): x+y-3=0$

Gọi $H=AA'\cap\Delta\Rightarrow H(1;2)$

Vì A' đối xứng với A qua Δ nên H là trung điểm AA' $\Rightarrow A'(0;3)$

Đường thẳng A'B qua B có VTCP $\overrightarrow{A'B}=(9;3)=3(3;1)\Rightarrow\overrightarrow{n_{A'B}}=(1;-3)$

$\Rightarrow A'B: x-3y+9=0$

Tọa độ M_0 thỏa hệ: $\begin{cases} x-y+1=0 \\ x-3y+9=0 \end{cases}\Leftrightarrow M_0(3;4)$

$\Rightarrow M(3;4)$. Vậy $a+b=7$

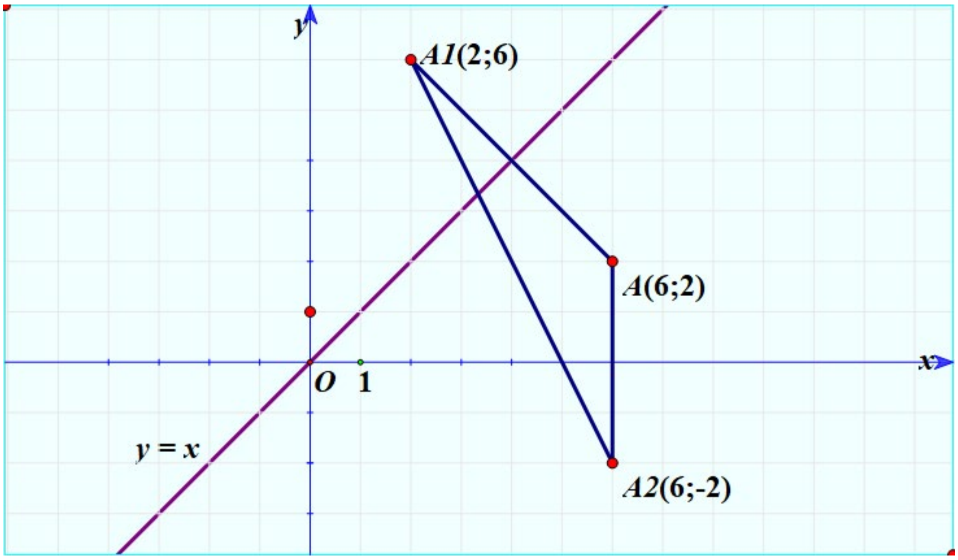
Câu 188. Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy* cho điểm *A(6;2)* và đường thẳng $d: x-y=0$ .Gọi *P* là giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác *ABC* biết *B* là điểm thay đổi trên tia *Ox* và *C* là điểm thay đổi trên ***D.***
Tính *P* ?

A. $P=2\sqrt{5}$. **B.** $P=4\sqrt{3}$. **C.** $P=3\sqrt{5}$. **D.** $P=4\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi A_1, A_2 lần lượt là điểm đối xứng của A qua Ox và qua **D.** Dễ tìm được $A_1(6;-2)$ và $A_2(2;6)$, đồng thời ta có $AB = A_1B, AC = A_2C$. Do đó $P = AB + BC + CA = A_1B + BC + CA_2 \geq A_1A_2$, suy ra $\min P = A_1A_2 = 4\sqrt{5}$ khi A_1, B, C, A_2 thẳng hàng theo thứ tự. Viết phương trình $A_1A_2 : 2x + y - 10 = 0$, từ đó tìm được B(5;0), C($\frac{10}{3};\frac{10}{3}$) thỏa mãn A_1, B, C, A_2 thẳng hàng theo thứ tự. Vậy **Chọn D**



Câu 189. Cho ΔABC nhọn, có $A(1;7)$, $B(-2;0)$, $C(9;0)$ đường cao AH. Xét các hình chữ nhật $MNPQ$ với $M \in AB$; $N \in AC$; $P, Q \in BC$. Điểm $M(a;b)$ thỏa mãn hình chữ nhật $MNPQ$ có diện tích lớn nhất, tính $P = a + b$.

A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải.

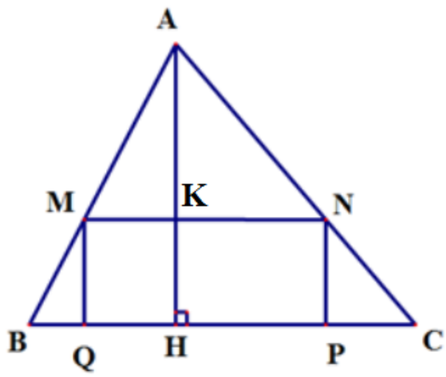
Chọn B

Tổng quát bài toán đặt $MQ = x\ (0 < x < AH)$; $MN = y \Rightarrow AK = AH - x$

Do $MN // BC \Rightarrow \frac{\text{MN}}{\text{BC}} = \frac{\text{AK}}{\text{AH}}$

$\Leftrightarrow \frac{y}{BC} = \frac{AH - x}{AH} \Rightarrow y = \frac{BC(AH - x)}{AH}$

Gọi S là diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ thì:



$$S = xy = \frac{BC}{AH}.x(AH - x) \leq \frac{BC}{AH}.\frac{\left[x + (AH - x)\right]^2}{2} = \frac{BC.AH}{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = AH - x \Leftrightarrow x = \frac{AH}{2} \Rightarrow MQ = \frac{AH}{2}$ suy ra M là trung điểm của AB nên tọa độ $M\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right)$. Vậy $P = a + b = 3$.

Câu 190. Cho ΔABC nhọn, có $A(1;7)$, $B(-2;0)$, $C(9;0)$ đường cao AH. Xét các hình chữ nhật $MNPQ$ với $M \in AB$; $N \in AC$; $P, Q \in BC$, thì hình chữ nhật có diện tích lớn nhất gần với kết quả nào sau đây?

A. 10. **B.** 30. **C.** 15. **D.** 19.

Lời giải.

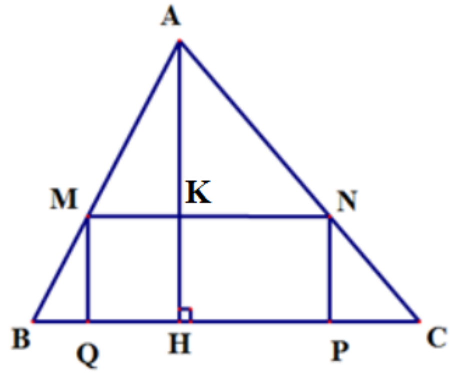
Chọn D

Tổng quát bài toán đặt $MQ = x\ (0 < x < AH)$; $MN = y \Rightarrow AK = AH - x$

Do $MN//BC \Rightarrow \dfrac{\text{MN}}{\text{BC}} = \dfrac{\text{AK}}{\text{AH}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{y}{BC} = \dfrac{AH - x}{AH} \Rightarrow y = \dfrac{BC(AH - x)}{AH}$

Gọi S là diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ thì:



$$S = xy = \frac{BC}{AH}.x(AH - x) \le \frac{BC}{AH}.\frac{[x + (AH - x)]^2}{2} = \frac{BC.AH}{4}$$

Có $BC = 11$ và $AH = 7$ nên $S = \dfrac{77}{4}$.

Câu 191. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy. Đường thẳng (d) đi qua M(3; -2) cắt Ox, Oy lần lượt tại A(a;0), B(0;b) và $ab \ne 0$ sao cho: $\dfrac{1}{\text{OA}^2} + \dfrac{1}{4\text{OB}^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $S = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ là

A. $S = \dfrac{11}{25}$ **B.** $S = -\dfrac{11}{7}$ **C.** $S = -\dfrac{1}{5}$ **D.** $S = -\dfrac{5}{7}$

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết ta có d: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$. Vì M $\in$ d nên: $\dfrac{3}{a} - \dfrac{2}{b} = 1$ (1)

$OA = |a|; OB = |b| \Rightarrow \dfrac{1}{\text{OA}^2} + \dfrac{1}{4\text{OB}^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{4b^2}$

Theo BĐT Bunhiacopski: $1 = (\dfrac{3}{a} - \dfrac{2}{b})^2 = \left(3.\dfrac{1}{a} + (-4).\dfrac{1}{2b}\right)^2 \le (9+16)(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{4b^2})$

Hay $\dfrac{1}{\text{OA}^2} + \dfrac{1}{4\text{OB}^2} \ge \dfrac{1}{25}$ đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{a} - \dfrac{2}{b} = 1 \\ 3a = -8b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{25}{3} \\ b = -\dfrac{25}{8} \end{cases}$

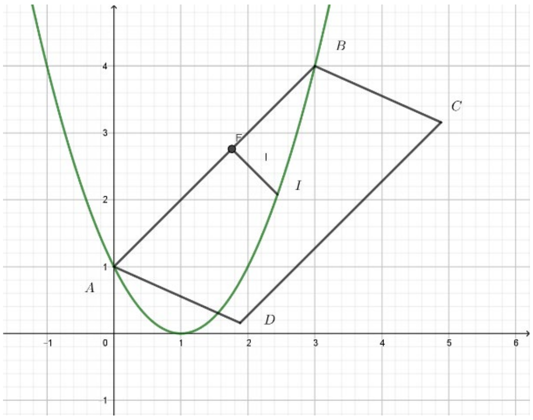
Vậy $\dfrac{1}{\text{OA}^2} + \dfrac{1}{4\text{OB}^2}$ nhỏ nhất khi $\begin{cases} a = \dfrac{25}{3} \\ b = -\dfrac{25}{8} \end{cases} \Rightarrow S = \dfrac{3}{25} - \dfrac{8}{25} = -\dfrac{1}{5}$

Câu 192. Cho hình bình $ABCD$ có $A(0;1); B(3;4)$ Tâm I nằm trên parabol có phương trình $y = (x-1)^2$ $0 \le x_I \le 3$. khi diện tích hình binh hành $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất thì tọa độ $C(a,b)$, tọa độ $D(c,d)$, Tính $a+b+c+d$?

A. -2. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 0

Lời giải

Chọn B



$S_{ABCD} = 4S_{IAB} = 2.d\left(I, AB\right).AB$

Vì AB không đổi nên S_{ABCD} lớn nhất khi khoảng cách từ I đến AB lớn nhất.

Phương trình đường thẳng AB là $x - y + 1 = 0$

Gọi $I\left(x;(x-1)^2\right)$, $d\left(I, AB\right) = \dfrac{\left|x-(x-1)^2+1\right|}{\sqrt{2}} = \dfrac{\left|-x^2+3x\right|}{\sqrt{2}} = \dfrac{-x^2+3x}{\sqrt{2}}$ vì $0 \le x_I \le 3$

$\max d(I, AB) = \dfrac{9}{4\sqrt{2}}$ đạt được khi $x = \dfrac{3}{2}$ vậy $I\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{4}\right)$

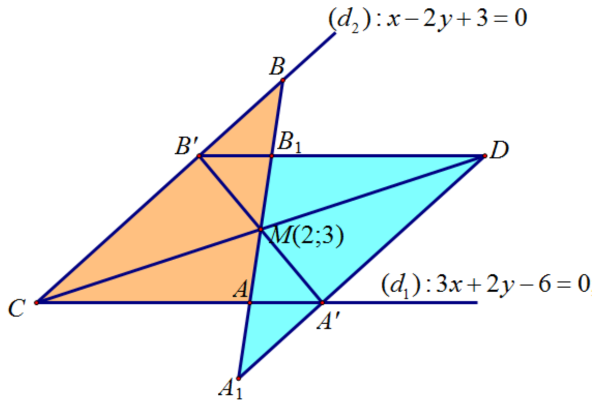
$\Rightarrow D\left(0;-\dfrac{7}{2}\right)$ $C\left(3;-\dfrac{1}{2}\right)$ $\Rightarrow a+b+c+d=-1$

Câu 193. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(2;3)$ và hai đường thẳng $(d_1): 3x+2y-6=0$; $(d_2): x-2y+3=0$. Gọi C là giao điểm của $(d_1),(d_2)$. Đường thẳng (d) có phương trình dạng $ax-by+c=0$ (với $a,b,c \in \mathbb{N}$, $(a;b)=1$) đi qua M cắt $(d_1),(d_2)$ lần lượt tại các điểm A, B sao cho M nằm trong đoạn AB và tam giác ABC có diện tích nhỏ nhất. Tính $T = abc$.

A. $T = 2016$ **B.** $T = 1512$ **C.** $T = 1800$ **D.** $T = 504$

Lời giải

Chọn B



Cách 1: Ta tìm được $d_1 \cap d_2 = C\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{15}{8}\right)$.

+) Nếu $(d): x=2$ thì $A(2;0)$; $B(2;\dfrac{5}{2})$ suy ra M không thuộc đoạn AB (loại).

+) $(d): y = m(x-2)+3$ cắt (d_1) và (d_2) tại $A(\dfrac{4m}{2m+3};\dfrac{9}{2m+3})$ và $B(\dfrac{4m-3}{2m-1};\dfrac{5m-3}{2m-1})$.

Vì M thuộc đoạn AB nên $-\dfrac{3}{2} < m < \dfrac{1}{2}$. Đường thẳng $CM: 9x-10y+12=0$. Diện tích ΔABC nhỏ nhất khi và chỉ khi $d_{(A;CM)} + d_{(B;CM)} = \left|\dfrac{60m-54}{2m+3}\right| + \left|\dfrac{10m-9}{2m-1}\right|$ nhỏ nhất. Dùng điều kiện của m để bỏ trị tuyệt đối, khảo sát (Hoặc sử dụng MODE7) tìm được $m=\frac{3}{14}$ nên đường thẳng $(d):3x-14y+36=0$. Vậy $T=1512$.

Nhận xét: Cách giải này nặng về tính toán và trong thời gian ngắn của làm trắc nghiệm nếu học sinh lựa chọn theo cách này sẽ gặp nhiều khó khăn.

Cách 2: Ta tìm được $d_1 \cap d_2 = C\left(\frac{3}{4};\frac{15}{8}\right)$.

Lấy $D\left(\frac{13}{4};\frac{33}{8}\right)$ đối xứng với C qua M. Qua D dựng (d_1') song song với (d_1), đường thẳng này cắt AB, (d_2) tương ứng tại B', B_1. Qua D dựng $(d_2')\,//\,(d_2)$, cắt (d_1), AB tại A', A_1.

Ta có $S_{\Delta ABC}=\frac{S_{\Delta ABC}+S_{\Delta DA_1B_1}}{2}=\frac{S_{CA'DB'}+S_{BB'B_1}+S_{AA'A_1}}{2}\ge\frac{S_{CA'DB'}}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi $B\equiv B'\equiv B_1$ và $A\equiv A'\equiv A_1$.

Ta viết được phương trình $(DA'):x-2y+5=0$ suy ra $A(\frac{1}{4};\frac{21}{8})\Rightarrow AB:3x-14y+36=0$.

Vậy $T=1512$.

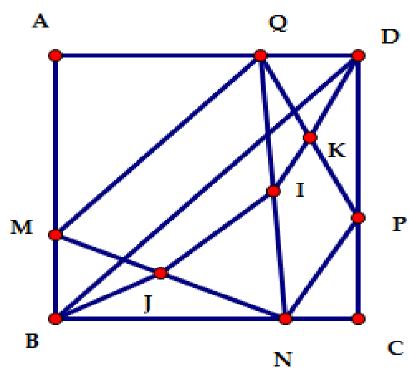
Câu 194. Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho các điểm $A(-2;2)$, $B(-4;-3)$, $C(1;-5)$, $D(3;0)$. Lấy $M,\ N,\ P,\ Q$ lần lượt thuộc các cạnh $AB,\ BC,\ CD,\ DA$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MN+NP+PQ+QM$ là :

A. $3\sqrt{29}$. **B.** $2\sqrt{58}$. **C.** $2\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{140}$.

Lời giải

Chọn B

Đầu tiên ta phát hiện $A(-2;2)$, $B(-4;-3)$, $C(1;-5)$, $D(3;0)$ tạo thành một hình vuông.



Gọi $I,\ J,\ K$ lần lượt là trung điểm của $QN,\ MN,\ PQ$.

Ta có $BJ=\frac{MN}{2}$, $DK=\frac{PQ}{2}$, $IJ=\frac{QM}{2}$, $IK=\frac{PN}{2}$.

Do đó $MN+NP+PQ+QM=2BJ+2DK+2IJ+2IK=2(BJ+IJ+IK+KD)\ge 2BD=2\sqrt{58}$.

Dấu bằng xảy ra khi $M,\ N,\ P,\ Q$ lần lượt là trung điểm của $AB,\ BC,\ CD,\ DA$.

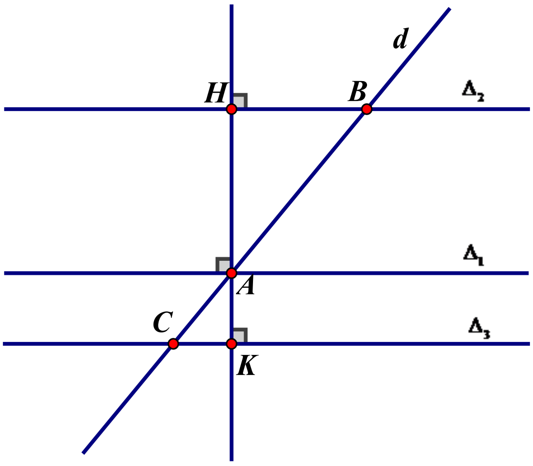
Chọn B

Câu 195. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các đường thẳng $\Delta_1:3x-4y+6=0$, $\Delta_2:3x-4y-9=0$, $\Delta_3:3x-4y+11=0$. Một đường thẳng d thay đổi cắt ba đường thẳng Δ_1, Δ_2, Δ_3 lần lượt tại A, B, C. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=AB+\frac{96}{AC^2}$ bằng

A. 18. **B.** 27. **C.** 9. **D.** $\frac{49}{9}$.

Lời giải

Chọn A



- Nhận thấy các đường thẳng Δ_1, Δ_2, Δ_3 song song với nhau và

$$d\left(\Delta_1;\Delta_2\right)=\frac{|6+9|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3;\ d\left(\Delta_1;\Delta_3\right)=\frac{|6-11|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1\ ;\ d\left(\Delta_2;\Delta_3\right)=\frac{|-9-11|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4$$

Suy ra: Δ_1 nằm giữa Δ_2 và Δ_3. Do đó nếu d cắt 3 đường thẳng đó lần lượt tại A, B, C thì A nằm giữa B và C.

- Qua A dựng đường thẳng vuông góc với Δ_1, cắt Δ_2 và Δ_3 lần lượt tại H và K

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{AH}{AK}=\frac{3}{1}=3 \Rightarrow AB=3.AC$$

$$\Rightarrow P=AB+\frac{96}{AC^2}=3.AC+\frac{96}{AC^2}=3.\left(AC+\frac{32}{AC^2}\right)=3.\left(\frac{AC}{2}+\frac{AC}{2}+\frac{32}{AC^2}\right)$$

$\overset{Cauchy}{\geq} 3.3.\sqrt[3]{\frac{AC}{2}.\frac{AC}{2}.\frac{32}{AC^2}}=18$. Dấu “=” xảy ra $\begin{cases} AC=4 \\ AB=12 \end{cases}$.

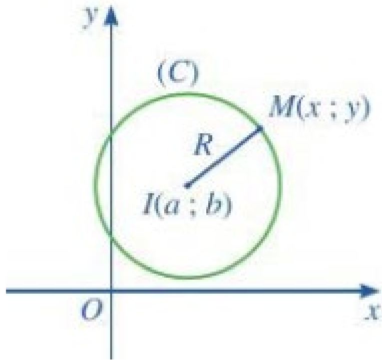
Vậy $P_{\min}=18$.

Bài 5. ĐƯỜNG TRÒN TRONG MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

PHẦN A. LÝ THUYẾT

1. Phương trình đường tròn



Phương trình đường tròn tâm $I(a;b)$ bán kính R là $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.
Phương trình đường tròn ở dạng trên thường được gọi là phương trình chính tắc của đường tròn.
Ví dụ 1. Lập phương trình đường tròn trong mỗi trường hợp sau:
a) Đường tròn tâm O bán kính R;
b) Đường tròn tâm $I(-1;3)$ bán kính 7 .
Giải
a) Phương trình đường tròn tâm O bán kính R là
$(x-0)^2+(y-0)^2=R^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=R^2$.
b) Phương trình đường tròn tâm $I(-1;3)$ bán kính 7 là
$[x-(-1)]^2+(y-3)^2=7^2 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=49$.
Ví dụ 2. Tìm tâm và bán kính của đường tròn có phương trình là
$(x+2)^2+(y-5)^2=9$
Giải
Ta có: $(x+2)^2+(y-5)^2=9 \Leftrightarrow [x-(-2)]^2+(y-5)^2=3^2$.
Vậy đường tròn đã cho có tâm là $I(-2;5)$ bán kính $R=3$
Nhận xét: Ta có thể viết phương trình $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ của đường tròn tâm $I(a;b)$ bán kính R về phương trình có dạng là $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$. Dạng đó thường được gọi là phương trình tổng quát của đường tròn.
Ví dụ 3
a) Phương trình $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ có phải là phương trình đường tròn không? Nếu phải, xác định tọa độ tâm và bán kính của đường tròn đó.
b) Xác định điều kiện của a,b,c để phương trình $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ là phương trình đường tròn. Khi đó, xác định toạ độ tâm và bán kính theo a,b,c.
Giải
a) Ta có:
$x^2+y^2-4x+2y-4=0 \Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2+2y+1=9 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=3^2$.
Phương trình trên là phương trình đường tròn tâm $I(2;-1)$ bán kính $R=3$.
b) Ta có:
$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$
$\Leftrightarrow \left(x^2-2ax+a^2\right)+\left(y^2-2by+b^2\right)=a^2+b^2-c$
$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2-c$.

Do đó, phương trình trên là phương trình đường tròn khi và chỉ khi $a^2+b^2>c$. Lúc này đường tròn đã cho có tâm $I(a;b)$ bán kính

$R=\sqrt{a^2+b^2-c}$

2. Phương trình đường tròn đi qua ba điểm không thẳng hàng

Do có duy nhất một đường tròn đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước nên ta có thể lập được phương trình đường tròn đó khi biết toạ độ của ba điểm nói trên.

Ví dụ 4. Lập phương trình đường tròn đi qua ba điểm $A(-1;1), B(0;-2), C(0;2)$.

Giải

Giả sử tâm của đường tròn là điểm $I(a;b)$. Ta có $IA=IB=IC \Leftrightarrow IA^2=IB^2=IC^2$. Vì $IA^2=IB^2, IB^2=IC^2$ nên

$$\begin{cases}(-1-a)^2+(1-b)^2=(0-a)^2+(-2-b)^2\\(0-a)^2+(-2-b)^2=(0-a)^2+(2-b)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2+2a-2b+2=a^2+b^2+4b+4\\a^2+b^2+4b+4=a^2+b^2-4b+4\end{cases}$$

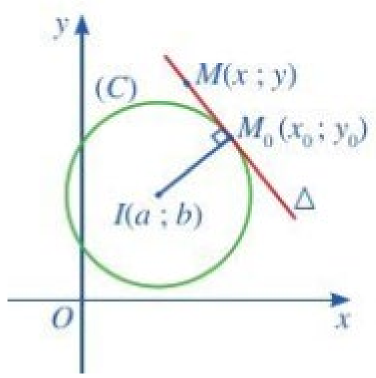
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2a-2b=4b+2\\b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$$

Đường tròn tâm $I(1;0)$ bán kính $R=IC=\sqrt{a^2+b^2-4b+4}=\sqrt{5}$.

Phương trình đường tròn là $(x-1)^2+(y-0)^2=(\sqrt{5})^2$.

Vậy phương trình đường tròn là $(x-1)^2+y^2=5$.

II. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn



- Đường thẳng M_0t đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0\right)$ và có vectơ pháp tuyến

$\overrightarrow{IM_0}=\left(x_0-a;y_0-b\right)$.

- Phương trình tiếp tuyến M_0t là

$\left(x_0-a\right)\left(x-x_0\right)+\left(y_0-b\right)\left(y-y_0\right)=0.$

Ví dụ 5. Lập phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(2;1)$ thuộc đường tròn $(x-1)^2+(y-3)^2=5$.

Giải

Đường tròn có tâm $I(1;3)$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(2;1)$ thuộc đường tròn $(x-1)^2+(y-3)^2=5$ là

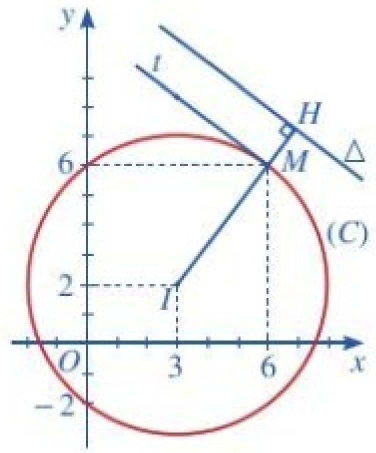
$(2-1)(x-2)+(1-3)(y-1)=0$

$\Leftrightarrow 1(x-2)-2(y-1)=0 \Leftrightarrow x-2y=0.$

Ví dụ 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, một vật chuyển động tròn đều ngược chiều kim đồng hồ trên đường tròn tâm $I(3;2)$ bán kính 5 dưới tác dụng của lực căng dây. Khi vật chuyển động tới điểm $M(6;6)$ thì dây căng bị đứt.

a) Viết phương trình quỹ đạo chuyển động của vật sau khi dây bị đứt, biết rằng vật chỉ chịu tác động của duy nhất lực căng dây trong bài toán này.

b) Một vật khác chuyển động thẳng đều trên đường thẳng có phương trình
$\Delta: 3x+4y+23=0$.
Chứng minh hai vật này không gặp nhau tại bất kì thời điểm nào.
Giải



a) Quỹ đạo chuyển động của vật thứ nhất trước khi dây bị đứt là đường tròn (C) có phương trình:
$(x-3)^2+(y-2)^2=5^2 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-2)^2=25$.
Khi dây bị đứt, do vật thứ nhất chỉ chịu tác động của duy nhất lực căng dây nên vật đó tiếp tục chuyển động theo tiếp tuyến Mt tại điểm $M(6;6)$ thuộc đường tròn (C). Phương trình tiếp tuyến Mt là:
$(6-3)(x-6)+(6-2)(y-6)=0$
$\Leftrightarrow 3(x-6)+4(y-6)=0 \Leftrightarrow 3x+4y-42=0$.
Vậy quỹ đạo chuyển động của vật thứ nhất sau khi dây bị đứt là tia Mt, đường thẳng Mt có phương trình là: $3x+4y-42=0$.
b) Khoảng cách từ tâm đường tròn (C) đến đường thẳng $\Delta: 3x+4y+23=0$ là:

$$IH=\frac{|3\cdot 3+4\cdot 2+23|}{\sqrt{3^2+4^2}}=8>5.$$

Vì khoảng cách từ tâm đường tròn (C) đến đường thẳng Δ lớn hơn bán kính của đường tròn (C) nên đường tròn (C) và đường thẳng Δ không có điểm chung, tức là vật thứ hai không gặp vật thứ nhất khi dây chưa đứt. Mặt khác, vì $\Delta//Mt$ nên vật thứ hai không gặp vật thứ nhất sau khi dây bị đứt. Vậy hai vật không bao giờ gặp nhau.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Nhận dạng phương trình đường tròn

Đưa phương trình về dạng: $(x-a)^2+(y-b)^2=P(*)$

- Nếu $P>0$ thì $(*)$ là phương trình đường tròn có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{P}$

- Nếu $P\le 0$ thì $(*)$ không phải là phương trình đường tròn.

Câu 1. Trong các phương trình sau, phương trình nào biểu diễn đường tròn? Tìm tâm và bán kính nếu có.
a) $x^2+y^2+2x-4y+9=0(1)$ b) $x^2+y^2-6x+4y+13=0(2)$
c) $2x^2+2y^2-6x-4y-1=0(3)$ d) $2x^2+y^2+2x-3y+9=0(4)$

Câu 2. Cho phương trình $x^2+y^2-2mx-4(m-2)y+6-m=0(1)$
a) Tìm điều kiện của m để (1) là phương trình đường tròn.
b) Nếu (1) là phương trình đường tròn, hãy tìm tâm và bán kính theo m.

Câu 3. Cho phương trình đường cong $(C_m): x^2+y^2+(m+2)x-(m+4)y+m+1=0(2)$
a) Chứng minh rằng (2) là phương trình một đường tròn.

b) Tìm tập hợp tâm các đường tròn khi m thay đổi.

c) Chứng minh rằng khi m thay đổi, họ các đường tròn (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định.

Dạng 2. Thiết lập phương trình đường tròn

Cách 1:

- Tìm tọa độ tâm $I(a;b)$ của đường tròn (C).

- Tìm bán kính R của đường tròn (C).

- Viết phương trình đường tròn (C) theo dạng $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

Cách 2: Giả sử phương trình đường tròn (C) là: $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ (Hoặc $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$).

- Từ điều kiện của đề Câu thành lập hệ phương trình với ba ẩn là a,b,c.

Giải hệ để tìm a,b,c từ đó tìm được phương trình đường tròn (C).

Câu 4. Viết phương trình đường tròn trong mỗi trường hợp sau:

a) Có tâm $I(1;-5)$ và đi qua $O(0;0)$.

b) Nhận AB làm đường kính với $A(1;1),B(7;5)$.

Câu 5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường tròn (C) đi qua ba điểm $A(-3;-1),B(-1;3),C(-2;2)$.

Câu 6. Cho hai điểm $A(8;0),B(0;6)$.

a) Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB.

b) Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB.

Câu 7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d:2x-y-5=0$ và hai điểm $A(1;2),B(4;1)$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm thuộc d và đi qua hai điểm A,B.

Câu 8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1:x+3y+8=0,d_2:3x-4y+10=0$ và điểm $A(-2;1)$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm thuộc d_1, đi qua điểm A và tiếp xúc với d_2

Câu 9. Trong mặt phẳng oxy cho 2 điểm A (-1; 1), B(3; 3) và đường thẳng d$:3x-4y+8=0$. Viết phương trình đường tròn (C) qua A, B và tiếp xúc *d*.

Câu 10. Trong mặt phẳng oxy cho d: $2x-y-4=0$. Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với các trục tọa độ và có tâm thuộc d.

Câu 11. Trong mặt phẳng oxy cho *d:* $2x-y-4=0$: viết phương trình đường tròn (C) có tâm thuộc d đồng tời tiếp xúc với $\Delta_1:3x+4y+5=0$ và $\Delta_2:4x-3y-5=0$

Câu 12. Trong mặt phẳng oxy cho $d:x+2y-3=0$ và $\Delta:x+3y-5=0$ viết phương trình (C) có bán kính $R=\frac{2\sqrt{10}}{5}$, có tâm thuộc d và tiếp xúc với Δ.

Câu 13. Trong mặt phẳng oxy cho (C): $x^2+y^2+4\sqrt{3}x-4=0$ tia oy cắt (C) tại **A.** Viết phương trình (C') có bán kính R'=2 và tiếp xúc ngoài với (C) tại **A.**

Câu 14. Trong mặt phẳng oxy cho (C): $x^2+y^2-2x+4y+2=0$. Viết phương trình đường tròn (C') có tâm $M(5;1)$ biết (C') cắt (C) tại 2 điểm A, B sao cho $AB=\sqrt{3}$.

Câu 15. Trong mặt phẳng tọa độ hệ oxy cho đường thẳng $d: x-y-1=0$ và hai đường tròn $(C_1):(x-3)^2+(y+4)^2=8;\ (C_2):(x+5)^2+(y-4)^2=32$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I thuộc d và tiếp xúc ngoài với hai đường tròn trên.

Dạng 3. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

1. Vị trí tương đối của đường thẳng với đường tròn

1.1. Phương pháp 1

Cho đường thẳng (Δ) và đường tròn (C) có tâm I bán kính R

- Nếu $d(I;\Delta)<R$ thì (Δ) cắt (C) tại hai điểm phân biệt.
- Nếu $d(I;\Delta)=R$ thì (Δ) tiếp xúc với (C)
- Nếu $d(I;\Delta)>R$ thì (Δ) và (C) không có điểm chung.

1.2. Phương pháp 2

Cho đường thẳng $(\Delta): Ax+By+C=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

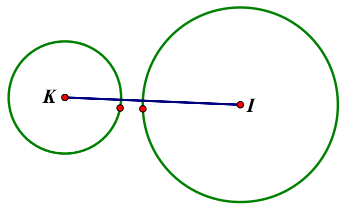
Xét hệ phương trình $\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ x^2+y^2-2ax-2by+c=0 \end{cases} \quad (I)$

- Nếu hệ (I) có hai nghiệm thì (Δ) cắt (C) tại hai điểm phân biệt.
- Nếu hệ (I) có một nghiệm thì (Δ) tiếp xúc (C).
- Nếu hệ (I) vô nghiệm thì (Δ) và (C) không có điểm chung.

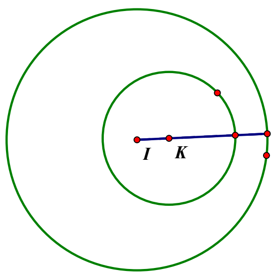
2. Vị trí tương đối của hai đường tròn

- Cho hai đường tròn $(C_1);(C_2)$ có tâm lần lượt là I;K bán kính $R_1;R_2$. Ta có

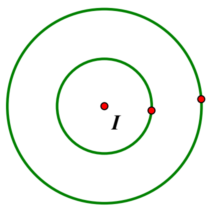
+) (C_1) và (C_2) ở ngoài nhau (không có điểm chung) khi và chỉ khi $IK>R_1+R_2$



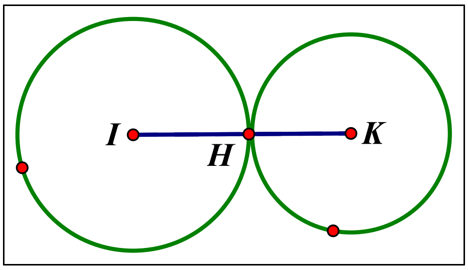
+) (C_1) và (C_2) đựng nhau (không có điểm chung) khi và chỉ khi $IK<|R_1-R_2|$



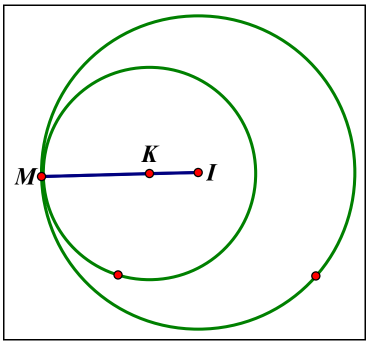
+) (C_1) và (C_2) đồng tâm (không có điểm chung) khi và chỉ khi $I\equiv K;R_1\neq R_2$



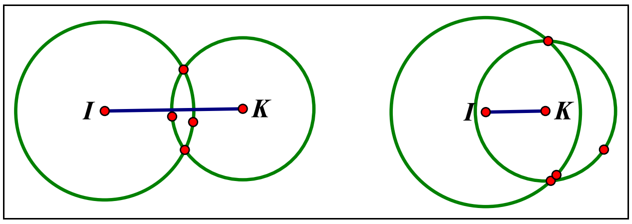
+) (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài khi và chỉ khi $I_1I_2=R_1+R_2$



+) $\left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right)$ tiếp xúc trong khi và chỉ khi $I_1I_2 = \left|R_1 - R_2\right|$



+) $\left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right)$ cắt nhau khi và chỉ khi $\left|R_1 - R_2\right| < I_1I_2 < R_1 + R_2$



Câu 16. Trong mặt phẳng tọa độ oxy, cho đường thẳng $\Delta: x - y + 1 = 0$ và đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$

a) Chứng minh M(2;1) nằm trong đường tròn

b) Xét vị trí tương đối của Δ và (C).

Câu 17. Trong mặt phẳng tọa độ oxy, cho 2 đường tròn (C) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$ và (C'): $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0$. Chứng minh 2 đường tròn cắt nhau tại 2 điểm phân biệt A,B.

Câu 18. Trong mặt phẳng tọa độ oxy cho đường tròn (C) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ Và đường thẳng $\Delta: \sqrt{2}x + my + 1 - \sqrt{2} = 0$. Tìm m để (C) cắt Δ tại 2 điểm phân biệt.

Câu 19. Trong mặt phẳng tọa độ oxy cho đường tròn (C) $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ và đường thẳng $\Delta: mx - y - 3m - 2 = 0$. Biện luận theo m số giao điểm của Δ và (C).

Câu 20. Trong mặt phẳng tọa độ oxy cho đường tròn $\left(C\right): x^2 + y^2 = 1$ và: $\left(C_m\right): x^2 + y^2 - 2(m+1)x + 4my - 5 = 0$. Tìm m để hai đường tròn tiếp xúc trong.

Câu 21. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường tròn: $(C_1): x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ và $(C_2): (x+1)^2 + (y-1)^2 = 16$. Viết phương trình đường thẳng đi qua giao điểm của hai đường tròn đó.

Câu 22. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn $\left(C\right): x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$. Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng $d: 3x + 4y - 2 = 0$ và cắt đường tròn theo một dây cung có độ dài bằng 6.

Câu 23. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $\left(C\right)$: $\left(x-1\right)^2 + \left(y-1\right)^2 = 25$ và điểm

$M(7;3)$. Lập phương trình đường thẳng d qua M cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $MA = 3MB$

Câu 24. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$ và điểm $M(-1;2)$. Lập phương trình đường thẳng d qua M cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho độ dài dây cung AB nhỏ nhất .

Câu 25. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=5$. Viết phương trình đường tròn (C') có tâm $K(5;-2)$ và cắt đường tròn (C) theo một dây cung AB có độ dài bằng $\sqrt{2}$.

Câu 26. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=1$, Lập phương trình đường tròn (C') tiếp xúc với hai trục tọa độ và tiếp xúc ngoài (C) .

Dạng 4: Tiếp tuyến của đường tròn

Cho đường tròn (C) có tâm I(a;b) và bán kính R.

a) Nếu biết tiếp điểm là $M(x_0;y_0)$ thì tiếp tuyến đó qua M và nhận vector $\overrightarrow{IM}(x_0-a;y_0-b)$ làm vector pháp tuyến nên có phương trình là. $(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0$.

b) Nếu không biết tiếp điểm thì dùng điều kiện tiếp xúc: Δ tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow d(I;\Delta)=R$ để xác định tiếp tuyến.

Câu 27. Trong mặt phẳng tọa độ oxy cho đường tròn (C) $(x-1)^2+(y+2)^2=8$.

a) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm A(3; -4).

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) qua điểm B(5; -2).

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) biết tiếp tuyến vuông góc với d: $x+y+2014=0$.

d) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) biết tiếp tuyến tạo với trục tung một góc 45^0

Câu 28. Trong mặt phẳng tọa độ oxy cho đường tròn $(C_1): x^2+y^2-2y-3=0$ và $(C_2): x^2+y^2-8x-8y+28=0$. Viết phương trình tiếp tuyến chung của 2 đường tròn.

Câu 29. Trong mặt phẳng tọa độ oxy cho đường tròn $(C_1):(x-2)^2+(y-3)^2=2$ và $(C_2):(x-1)^2+(y-2)^2=8$. Viết phương trình tiếp tuyến chung của 2 đường tròn.

Câu 30. Trong mặt phẳng (Oxy), cho $(C):(x-2)^2+(y-1)^2=5$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến cắt $Ox; Oy$ lần lượt tại $A; B$ sao cho $OA=2OB$

Câu 31. Trong mặt phẳng (Oxy), cho $(C):(x-2)^2+(y-1)^2=5$. Tìm $M \in \Delta: x+y+2=0$ sao cho qua M kẻ được tới (C) hai tiếp tuyến MA, MB thỏa mãn diện tích tứ giác $MAIB$ bằng 10, với I là tâm đường tròn.

Câu 32. Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-6x+2y+6=0$ và điểm hai điểm $A(1;-1); B(1;3)$

a) Chứng minh rằng điểm A thuộc đường tròn, điểm B nằm ngoài đường tròn

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm A.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) kẻ từ B.

Câu 33. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đường tròn $(C): x^2+y^2-4x+4y-1=0$ trong trường

a) Đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $\Delta': 2x+3y+4=0$.

b) Đường thẳng Δ hợp với trục hoành một góc 45°.

Câu 34. Lập phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn sau:

$$(C_1): x^2+y^2-4y-5=0 \text{ và } (C_2): x^2+y^2-6x+8y+16=0.$$

Câu 35. Trong hệ trục Oxy, cho hai đường tròn $(C_1): (x-1)^2+(y-2)^2=2$, $(C_2): (x-4)^2+(y-5)^2=8$ và đường thẳng $d: x+y+m=0$. Tìm m biết đường thẳng d tiếp xúc với cả hai đường tròn (C_1) và (C_2).

Câu 36. Trong mặt phẳng Oxy , cho hình thoi ABCD ngoại tiếp đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2+(y+1)^2=8$ và điểm A thuộc đường thẳng $d: x-2y+3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi, biết rằng $BD=2AC$ và hoành độ điểm A không nhỏ hơn 2.

Câu 37. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $d: x-y+1=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y-4=0$. Tìm tọa độ điểm $M \in d$ sao cho từ M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB thỏa mãn khoảng cách từ $N\left(0;\frac{1}{2}\right)$ đến đường thẳng AB là lớn nhất.

Dạng 5: Tìm diểm thỏa mãn diều kiện cho trước

Phương pháp tìm tập hợp các tâm I của đường tròn (C)

- Bước 1. Tìm giá trị của m để tồn tại tâm I.
- Bước 2. Tìm toạ độ tâm I. Giả sử: I $\begin{cases} x=f(m) \\ y=g(m) \end{cases}$.
- Bước 3. Tìm mối liên hệ giữa x và y theo m ta được phương trình $F(x;y)=0$.
- Bước 4. Dựa vào điều kiện của m ở bước 1 để giới hạn miền của x hoặc y.
- Bước 5. Tập hợp điểm I là $F(x;y)=0$ cùng với phần giới hạn ở bước 4.

Câu 38. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4x-2y-1=0$ và đường thẳng $d: x+y+1=0$. Tìm những điểm M thuộc đường thẳng d sao cho từ điểm M kẻ được đến (C) hai tiếp tuyến hợp với nhau góc 90^0.

Câu 39. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2+y^2-4x-2y-4=0$. Gọi I là tâm và R là bán kính của (C). Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng $d: x+y+2=0$ sao cho từ M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB đến (C) (A, B là các tiếp điểm) thỏa mãn

a) $AB=\frac{12\sqrt{34}}{17}$

b) Tứ giác $MAIB$ có diện tích bằng $6\sqrt{2}$

c) Tứ giác $MAIB$ có chu vi bằng $2\left(3+2\sqrt{2}\right)$

d) Tứ giác $MAIB$ là hình vuông.

Câu 40. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4x-2y-4=0$. Gọi I là tâm và R là bán kính của (C). Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng $d: x+y+2=0$ sao cho từ M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB đến (C) (A, B là các tiếp điểm) thỏa mãn :

a) Tam giác MAB vuông,

b) Tam giác MAB đều,

c) Hai tiếp tuyến MA, MB tạo với nhau một góc bằng 60^0,

d) Tam giác IAB đều.

Câu 41. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x+2)^2+(y-3)^2=5$ và đường thẳng $d: x-5y-4=0$. Tìm trên (C) và trên d điểm N sao cho

a) Hai điểm M, N đối xứng nhau qua điểm $A(-7;-1)$.

b) Hai điểm M, N đối xứng nhau qua Ox.

Câu 42. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-2)^2=5$ và đường thẳng $d: 2x+y+4=0$. Tìm trên (C) điểm M và trên d điểm N sao cho

a) MN có độ dài nhỏ nhất.

b) MN có độ dài lớn nhất.

Câu 43. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x-5y-2=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-4y-8=0$. Xác định tọa độ các giao điểm A, B của đường tròn (C) và đường thẳng d, biết A có hoành độ dương. Tìm tọa độ điểm C thuộc (C) sao cho tam giác ABC vuông ở B.

Câu 44. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: 3x-y-7=0$ và đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=10$. Chứng minh (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Tìm tọa độ điểm C thuộc (C) sao cho tam giác ABC cân tại C

Câu 45. Trong mặt phăng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+4x+4y+6=0$ và đường thẳng $d: x+my-2m+3=0$. Gọi I làm tâm của (C). Tìm m để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn :

a) AB lớn nhất.

b) $AB=2$.

c) Diện tích ΔIAB lớn nhất.

d) Diện tích ΔIAB bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và AB lớn nhất.

Câu 46. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+2)^2=9$ và đường thẳng $d: 3x-4y+m=0$. Tìm m để trên đường thẳng d có duy nhất một điểm P mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến PA, PB tới (C) (A, B là các tiếp điểm) sao cho :

a) Tam giác PAB đều.

b) Tam giác PAB vuông.

c) Góc giữa hai tiếp tuyến PA, PB bằng 60^0.

Dạng 6. Tìm quỹ tích tâm đường tròn

Phương pháp:

Phương pháp tìm tập hợp các tâm I của đường tròn (C)

- <u>Bước 1</u>. Tìm giá trị của m để tồn tại tâm I.
- <u>Bước 2</u>. Tìm toạ độ tâm I. Giả sử: I $\begin{cases} x = f(m) \\ y = g(m) \end{cases}$.
- <u>Bước 3</u>. Tìm mối liên hệ giữa x và y theo m ta được phương trình $F(x;y)=0$.
- <u>Bước 4</u>. Dựa vào điều kiện của m ở bước 1 để giới hạn miền của x hoặc y.
- <u>Bước 5</u>. Tập hợp điểm I là $F(x;y)=0$ cùng với phần giới hạn ở bước 4.

Câu 47. Trong mặt phẳng Oxy, cho phương trình đường cong (C) có phương trình:
$x^2+y^2-2mx-4(m+1)y+3m+14=0.$

a) Tìm tham số m để (C) là đường tròn.

b) Tìm quỹ tích điểm I là tâm của đường tròn (C).

Câu 48. Trong mặt phẳng Oxy, tìm quỹ tích điểm I là tâm của đường tròn (C), biết (C) tiếp xúc với đường thẳng $d:6x-8y+15=0$ và có bán kính $R=3$.

Câu 49. Trong mặt phẳng Oxy, tìm quỹ tích điểm I là tâm của đường tròn (C) có bán kính $R=2$, biết (C) tiếp xúc tiếp xúc với đường tròn $(C'):x^2+y^2-4x+6y-3=0$.

Câu 50. Trong mặt phẳng Oxy, tìm quỹ tích điểm I là tâm của đường tròn (C), biết (C) tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1:2x+3y-6=0,\quad d_2:3x-2y+9=0$.

Câu 51. Trong mặt phẳng Oxy, tìm quỹ tích điểm I là tâm của đường tròn (C), biết (C) tiếp xúc với Ox và cắt Oy tại điểm $A(0;1)$.

Câu 52. Cho $(C):x^2+y^2-2mx-2m^2y-1=0$. Tìm quỹ tích tâm I của đường tròn (C).

Câu 53. Tìm tập hợp tâm I của đường tròn (C) biết (C) tiếp xúc với 2 đường thẳng $\Delta_1:x+2y-3=0$ và $\Delta_2:x+2y+6=0$.

Câu 54. Cho đường tròn $(C):x^2+y^2-2(m-1)x-4my+3m+11=0$. Tìm quỹ tích tâm I của đường tròn.

Câu 55. Tìm tập hợp tâm I của đường tròn (C) biết (C) tiếp xúc ngoài với đường tròn $(C'):x^2+y^2-4x+6y-3=0$ và có bán kính $R=1$.

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Nhận dạng phương trình đường tròn

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2+y^2-2(m+2)x+4my+19m-6=0$ là phương trình đường tròn.

A. $1<m<2$. **B.** $m<-2$ hoặc $m>-1$.
C. $m<-2$ hoặc $m>1$. **D.** $m<1$ hoặc $m>2$.

Câu 2. Trong mặt phẳng Oxy, phương trình nào sau đây là phương trình của đường tròn?

A. $x^2+2y^2-4x-8y+1=0$. **B.** $x^2+y^2-4x+6y-12=0$.
C. $x^2+y^2-2x-8y+20=0$. **D.** $4x^2+y^2-10x-6y-2=0$.

Câu 3. Phương trình nào sau đây là phương trình của đường tròn?

A. $2x^2+y^2-6x-6y-8=0$. **B.** $x^2+2y^2-4x-8y-12=0$.
C. $x^2+y^2-2x-8y+18=0$. **D.** $2x^2+2y^2-4x+6y-12=0$.

Câu 4. Phương trình nào sau đây là phương trình của một đường tròn?

A. $x^2+y^2-4xy+2x+8y-3=0$. **B.** $x^2+2y^2-4x+5y-1=0$.
C. $x^2+y^2-14x+2y+2018=0$. **D.** $x^2+y^2-4x+5y+2=0$.

Câu 5. Cho phương trình $x^2+y^2-2mx-4(m-2)y+6-m=0\,(1)$. Điều kiện của m để (1) là phương trình của đường tròn.

A. $m=2$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>2 \end{array}\right.$. **C.** $1<m<2$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=2 \end{array}\right.$.

Dạng 2. Tìm tọa độ tâm, bán kính đường tròn

Câu 6. Trong mặt phẳng Oxy, đường tròn $(C): x^2+y^2+4x+6y-12=0$ có tâm là.

A. $I(-2;-3)$. **B.** $I(2;3)$. **C.** $I(4;6)$. **D.** $I(-4;-6)$.

Câu 7. Đường tròn $x^2+y^2-10y-24=0$ có bán kính bằng bao nhiêu?

A. 49. **B.** 7. **C.** 1. **D.** $\sqrt{29}$.

Câu 8. Xác định tâm và bán kính của đường tròn $(C): (x+1)^2+(y-2)^2=9$.

A. Tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=3$. **B.** Tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=9$.

C. Tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=3$. **D.** Tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=9$.

Câu 9. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn (C): $x^2+y^2-2x+4y+1=0$.

A. $I(-1;2); R=4$. **B.** $I(1;-2); R=2$. **C.** $I(-1;2); R=\sqrt{5}$. **D.** $I(1;-2); R=4$.

Câu 10. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): (x-2)^2+(y+3)^2=9$. Đường tròn có tâm và bán kính là

A. $I(2;3)$, $R=9$. **B.** $I(2;-3)$, $R=3$. **C.** $I(-3;2)$, $R=3$. **D.** $I(-2;3)$, $R=3$.

Câu 11. Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của đường tròn $(C): (x+2)^2+(y-5)^2=9$.

A. $I(-2;5)$, $R=81$.. **B.** $I(2;-5)$, $R=9$.. **C.** $I(2;-5)$, $R=3$.. **D.** $I(-2;5)$, $R=3$.

Câu 12. Đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y-3=0$ có tâm I, bán kính R là

A. $I(-1;2), R=\sqrt{2}$. **B.** $I(-1;2), R=2\sqrt{2}$. **C.** $I(1;-2), R=\sqrt{2}$. **D.** $I(1;-2), R=2\sqrt{2}$.

Dạng 3. Viết phương trình đường tròn

Câu 13. Phương trình đường tròn có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R=5$ là

A. $x^2+y^2-2x-4y-20=0$. **B.** $x^2+y^2+2x+4y+20=0$.

C. $x^2+y^2+2x+4y-20=0$. **D.** $x^2+y^2-2x-4y+20=0$.

Câu 14. Đường tròn tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=3$ có phương trình là

A. $x^2+y^2+2x+4y-4=0$.

B. $x^2+y^2-2x-4y-4=0$.

C. $x^2+y^2+2x-4y-4=0$.

D. $x^2+y^2-2x+4y-4=0$.

Câu 15. Phương trình nào sau đây là phương trình của đường tròn tâm $I(-1;2)$, bán kính bằng 3?

A. $(x-1)^2+(y+2)^2=9$. **B.** $(x+1)^2+(y+2)^2=9$.

C. $(x-1)^2+(y-2)^2=9$. **D.** $(x+1)^2+(y-2)^2=9$.

Câu 16. Đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(1;1)$, $B(5;3)$ và có tâm I thuộc trục hoành có phương trình là

A. $(x+4)^2+y^2=10$. **B.** $(x-4)^2+y^2=10$.

C. $(x-4)^2+y^2=\sqrt{10}$. **D.** $(x+4)^2+y^2=\sqrt{10}$.

Câu 17. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, tìm tọa độ tâm I của đường tròn đi qua ba điểm $A(0;4)$, $B(2;4)$, $C(2;0)$.

A. $I(1;1)$. **B.** $I(0;0)$. **C.** $I(1;2)$. **D.** $I(1;0)$.

Câu 18. Cho tam giác ABC có $A(1;-1), B(3;2), C(5;-5)$. Toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

A. $\left(\frac{47}{10};-\frac{13}{10}\right)$. **B.** $\left(\frac{47}{10};\frac{13}{10}\right)$. **C.** $\left(-\frac{47}{10};-\frac{13}{10}\right)$. **D.** $\left(-\frac{47}{10};\frac{13}{10}\right)$.

Câu 19. Trong mặt phẳng Oxy, đường tròn đi qua ba điểm $A(1;2)$, $B(5;2)$, $C(1;-3)$ có phương trình là.

A. $x^2+y^2+25x+19y-49=0$. **B.** $2x^2+y^2-6x+y-3=0$.

C. $x^2+y^2-6x+y-1=0$. **D.** $x^2+y^2-6x+xy-1=0$.

Câu 20. Lập phương trình đường tròn đi qua hai điểm $A(3;0), B(0;2)$ và có tâm thuộc đường thẳng $d: x+y=0$.

A. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$. **B.** $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$.

C. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$. **D.** $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$.

Câu 21. Cho tam giác ABC biết $H(3;2)$, $G\left(\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right)$ lần lượt là trực tâm và trọng tâm của tam giác, đường thẳng BC có phương trình $x+2y-2=0$. Tìm phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC?

A. $(x+1)^2+(y+1)^2=20$.

B. $(x-2)^2+(y+4)^2=20$.

C. $(x-1)^2+(y+3)^2=1$.

D. $(x-1)^2+(y-3)^2=25$.

Câu 22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm H, trọng tâm $G(-1;3)$. Gọi K,M,N lần lượt là trung điểm của AH,AB,AC. Tìm phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết đường tròn ngoại tiếp tam giác KMN là $(C): x^2+y^2+4x-4y-17=0$.

A. $(x-1)^2+(y-5)^2=100$.

B. $(x+1)^2+(y-5)^2=100$.

C. $(x-1)^2+(y+5)^2=100$.

D. $(x+1)^2+(y+5)^2=100$.

Câu 23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm O. Gọi M là trung điểm của BC; N, P lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C. Đường tròn đi qua ba điểm M, N, P có phương trình là $(T): (x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$. Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là:

A. $(x-1)^2+(y+2)^2=25$. **B.** $x^2+(y-1)^2=25$.

C. $x^2+(y-1)^2=50$. **D.** $(x-2)^2+(y+1)^2=25$.

Câu 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phương trình của đường tròn có tâm là gốc tọa độ O và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta:\ x+y-2=0$ là

A. $x^2+y^2=2$. **B.** $x^2+y^2=\sqrt{2}$.

C. $(x-1)^2+(y-1)^2=\sqrt{2}$. **D.** $(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

Câu 25. Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), cho đường tròn (S) có tâm I nằm trên đường thẳng $y=-x$, bán kính $R=3$ và tiếp xúc với các trục tọa độ. Lập phương trình của (S), biết hoành độ tâm I là số dương.

A. $(x-3)^2+(y-3)^2=9$. **B.** $(x-3)^2+(y+3)^2=9$.

C. $(x-3)^2-(y-3)^2=9$. **D.** $(x+3)^2+(y+3)^2=9$.

Câu 26. Một đường tròn có tâm $I(3;4)$ tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 3x+4y-10=0$. Hỏi bán kính đường tròn bằng bao nhiêu?

A. $\frac{5}{3}$. **B.** 5. **C.** 3. **D.** $\frac{3}{5}$.

Câu 27. Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho điểm $I(1;1)$ và đường thẳng $(d): 3x+4y-2=0$. Đường tròn tâm I và tiếp xúc với đường thẳng (d) có phương trình

A. $(x-1)^2+(y-1)^2=5$. **B.** $(x-1)^2+(y-1)^2=25$.

C. $(x-1)^2+(y-1)^2=1$. **D.** $(x-1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{5}$.

Câu 28. Trên hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có tâm $I(-3;2)$ và một tiếp tuyến của nó có phương trình là $3x+4y-9=0$. Viết phương trình của đường tròn (C).

A. $(x+3)^2+(y-2)^2=2$. **B.** $(x-3)^2+(y+2)^2=2$.

C. $(x-3)^2+(y-2)^2=4$ **D.** $(x+3)^2+(y-2)^2=4$.

Câu 29. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các điểm $A(3;0)$ và $B(0;4)$. Đường tròn nội tiếp tam giác OAB có phương trình

A. $x^2+y^2=1$. **B.** $x^2+y^2-4x+4=0$.

C. $x^2+y^2=2$. **D.** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

Câu 30. Cho hai điểm $A(3;0)$, $B(0;4)$. Đường tròn nội tiếp tam giác OAB có phương trình là

A. $x^2+y^2=1$. **B.** $x^2+y^2-2x-2y+1=0$.

C. $x^2+y^2-6x-8y+25=0$. **D.** $x^2+y^2=2$.

Dạng 4. Tương giao (tiếp tuyến) của đường thẳng và đường tròn

Câu 31. Đường tròn $x^2+y^2-1=0$ tiếp xúc với đường thẳng nào trong các đường thẳng dưới đây?

A. $3x-4y+5=0$ **B.** $x+y=0$

C. $3x+4y-1=0$ **D.** $x+y-1=0$

Câu 32. Đường tròn nào sau đây tiếp xúc với trục Ox:

A. $x^2+y^2-10x=0$. **B.** $x^2+y^2-5=0$.

C. $x^2+y^2-10x-2y+1=0$. **D.** $x^2+y^2+6x+5y+9=0$.

Câu 33. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y+3=0$. Viết phương trình tiếp tuyến d của đường tròn (C) biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $\Delta: 3x+4y+1=0$.

A. $3x+4y+5\sqrt{2}-11=0$; $3x+4y-5\sqrt{2}+11=0$.

B. $3x+4y+5\sqrt{2}-11=0$, $3x+4y-5\sqrt{2}-11=0$.

C. $3x+4y+5\sqrt{2}-11=0$, $3x+4y+5\sqrt{2}+11=0$.

D. $3x+4y-5\sqrt{2}+11=0$, $3x+4y-5\sqrt{2}-11=0$.

Câu 34. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y-4=0$ và điểm $A(1;5)$. Đường thẳng nào trong các đường thẳng dưới đây là tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm A.

A. $y-5=0$. **B.** $y+5=0$. **C.** $x+y-5=0$. **D.** $x-y-5=0$.

Câu 35. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4=0$ và điểm $A(-1;2)$. Đường thẳng nào trong các đường thẳng dưới đây đi qua A và là tiếp tuyến của đường tròn (C)?

A. $4x-3y+10=0$. **B.** $6x+y+4=0$. **C.** $3x+4y+10=0$. **D.** $3x-4y+11=0$.

Câu 36. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-4)^2=4$. Phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C) song song với đường thẳng $\Delta: 4x-3y+2=0$ là

A. $4x-3y+18=0$. **B.** $4x-3y+18=0$.

C. $4x-3y+18=0; 4x-3y-2=0$. **D.** $4x-3y-18=0; 4x-3y+2=0$.

Câu 37. Số tiếp tuyến chung của 2 đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y+1=0$ và $(C'): x^2+y^2+6x-8y+20=0$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 38. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C):(x-2)^2+(y+4)^2=25$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: 3x-4y+5=0$.

A. $4x+3y+29=0$. **B.** $4x+3y+29=0$ hoặc $4x+3y-21=0$.

C. $4x-3y+5=0$ hoặc $4x-3y-45=0$ **D.** $4x+3y+5=0$ hoặc $4x+3y+3=0$.

Câu 39. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C)có phương trình $x^2+y^2-2x+2y-3=0$. Từ điểm $A(1;1)$kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến đến đường tròn (C)

A. 1. **B.** 2. **C.** vô số. **D.** 0.

Câu 40. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-4)^2=4$. Phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C), biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $\Delta: 4x-3y+2=0$ là

A. $4x-3y+18=0$ và $-4x-3y-2=0$. **B.** $4x-3y+18=0$ và $4x-3y-2=0$.

C. $-4x-3y+18=0$ và $4x-3y-2=0$. **D.** $-4x+3y-18=0$ và $-4x-3y-2=0$.

Câu 41. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $P(-3;-2)$ và đường tròn $(C):(x-3)^2+(y-4)^2=36$. Từ điểm P kẻ các tiếp tuyến PM và PN tới đường tròn (C), với M, N là các tiếp điểm. Phương trình đường thẳng MN là

A. $x+y+1=0$. **B.** $x-y-1=0$. **C.** $x-y+1=0$. **D.** $x+y-1=0$.

Câu 42. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(-3;1)$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-6y+6=0$. Gọi T_1, T_2 là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M đến (C). Tính khoảng cách từ O đến đường thẳng T_1T_2.

A. 5. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\frac{3}{\sqrt{5}}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 43. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hai đường tròn $(C_1),(C_2)$ có phương trình lần lượt là $(x+1)^2+(y+2)^2=9$ và $(x-2)^2+(y-2)^2=4$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. Đường tròn (C_1)có tâm $I_1(-1;-2)$ và bán kính $R_1=3$.

B. Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(2;2)$và bán kính $R_2=2$.

C. Hai đường tròn $(C_1),(C_2)$ không có điểm chung.

D. Hai đường tròn $(C_1),(C_2)$ tiếp xúc với nhau.

Câu 44. Tìm giao điểm 2 đường tròn $(C_1): x^2+y^2-4=0$ và $(C_2): x^2+y^2-4x-4y+4=0$.

A. $(2;2)$ và $(-2;-2)$. **B.** $(0;2)$ và $(0;-2)$. **C.** $(2;0)$và $(-2;0)$. **D.** $(2;0)$ và $(0;2)$.

Câu 45. Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho hai đường tròn $(C):(x-1)^2+y^2=4$ và $(C'):(x-4)^2+(y-3)^2=16$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Lập phương trình đường thẳng AB

A. $x+y-2=0$. **B.** $x-y+2.=0$ **C.** $x+y+2=0$. **D.** $x-y-2=0$.

Câu 46. Cho đường thẳng $\Delta:3x-4y-19=0$ và đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=25$. Biết đường thẳng Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B, khi đó độ dài đọan thẳng AB là

A. 6. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 8.

Câu 47. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có tâm $I(1;-1)$ bán kính $R=5$. Biết rằng đường thẳng $(d):3x-4y+8=0$ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A,B. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. $AB=8$. **B.** $AB=4$. **C.** $AB=3.$. **D.** $AB=6$.

Câu 48. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2+(y+2)^2=4$ và đường thẳng $d:3x+4y+7=0$. Gọi A,B là các giao điểm của đường thẳng d với đường tròn (C). Tính độ dài dây cung AB.

A. $AB=\sqrt{3}$. **B.** $AB=2\sqrt{5}$. **C.** $AB=2\sqrt{3}$. **D.** $AB=4$.

Câu 49. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(3;1)$, đường tròn $(C):x^2+y^2-2x-4y+3=0$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua A và cắt đường tròn (C) tại hai điểm B, C sao cho $BC=2\sqrt{2}$.

A. $d:x+2y-5=0$. **B.** $d:x-2y-5=0$. **C.** $d:x+2y+5=0$. **D.** $d:x-2y+5=0$.

Câu 50. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hai đường tròn $(C_1),(C_2)$ có phương trình lần lượt là $(x+1)^2+(y+2)^2=9$ và $(x-2)^2+(y-2)^2=4$. Viết phương trình đường thẳng d' đi qua gốc tọa độ và tạo với đường thẳng nối tâm của hai đường tròn một góc bằng $45°$.

A. $d':x-7y=0$ hoặc $d':7x+y=0$. **B.** $d':x+7y=0$ hoặc $d':7x+y=0$.
C. $d':x+7y=0$ hoặc $d':7x-y=0$. **D.** $d':x-7y=0$ hoặc $d':7x-y=0$.

Câu 51. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $I(1;2)$ và đường thẳng $(d):2x+y-5=0$. Biết rằng có hai điểm M_1,M_2 thuộc (d) sao cho $IM_1=IM_2=\sqrt{10}$. Tổng các hoành độ của M_1 và M_2 là

A. $\frac{7}{5}$. **B.** $\frac{14}{5}$. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 52. Trong hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình: $x^2+y^2-4x+2y-15=0$. I là tâm (C), đường thẳng d đi qua $M(1;-3)$ cắt (C) tại A,B. Biết tam giác IAB có diện tích là 8. Phương trình đường thẳng d là: $x+by+c=0$. Tính $b+c$

A. 8. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 1.

Câu 53. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(5;5)$, trực tâm $H(-1;13)$, đường tròn ngoài tiếp tam giác có phương trình $x^2+y^2=50$. Biết tọa độ đỉnh $C(a;b)$, với $a<0$. Tổng $a+b$ bằng

A. -8. **B.** 8. **C.** 6. **D.** -6.

Câu 54. Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC nội tiếp đường tròn tâm $I(2;\,2)$, điểm D là chân đường phân giác ngoài của góc $\widehat{BAC}$. Đường thẳng AD cắt đường tròn ngoại tiếp $\Delta\,ABC$ tại điểm thứ hai là M (khác A). Biết điểm $J(-2;\,2)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta\,ACD$ và phương trình đường thẳng CM là: $x+y-2=0$. Tìm tổng hoành độ của các đỉnh $A,\,B,\,C$ của tam giác ABC.

A. $\frac{9}{5}$. **B.** $\frac{12}{5}$. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{6}{5}$.

Câu 55. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $(\Delta): x+3y+8=0$; $(\Delta'): 3x-4y+10=0$ và điểm $A(-2;1)$. Đường tròn có tâm $I(a;b)$ thuộc đường thẳng (Δ),đi qua A và tiếp xúc với đường thẳng (Δ'). Tính $a+b$.

A. -4. **B.** 4. **C.** 2. **D.** -2.

Câu 56. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: 3x-4y-1=0$ và điểm $I(1;-2)$. Gọi (C) là đường tròn có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A và B sao cho tam giác IAB có diện tích bằng 4. Phương trình đường tròn (C) là

A. $(x-1)^2+(y+2)^2=8$.**B.** $(x-1)^2+(y+2)^2=20$.

C. $(x-1)^2+(y+2)^2=5$.**D.** $(x-1)^2+(y+2)^2=16$.

Dạng 5. Câu hỏi min-max

Câu 57. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y-4=0$ và điểm $M(2;1)$. Dây cung của (C) đi qua điểm M có độ dài ngắn nhất là

A. 6. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** $3\sqrt{7}$. **D.** $2\sqrt{7}$.

Câu 58. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(0;-3)$, $B(4;1)$ và điểm M thay đổi thuộc đường tròn $(C): x^2+(y-1)^2=4$. Gọi $P_{\min}$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=MA+2MB$. Khi đó ta có $P_{\min}$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(7,7;8,1)$.. **B.** $(7,3;7,7)$.. **C.** $(8,3;8,5)$.. **D.** $(8,1;8,3)$.

Câu 59. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y+3=0$. Tìm tọa độ điểm $M(x_0;y_0)$ nằm trên đường tròn (C) sao cho $T=x_0+y_0$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $M(2;3)$. **B.** $M(0;1)$. **C.** $M(2;1)$. **D.** $M(0;3)$.

Câu 60. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm M nằm trên đường tròn $(C): x^2+y^2+8x-6y+16=0$. Tính độ dài nhỏ nhất của OM ?

A. 3. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 2.

Câu 61. Gọi I là tâm của đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=4$. Số các giá trị nguyên của m để đường thẳng $x+y-m=0$ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 62. Điểm nằm trên đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ có khoảng cách ngắn nhất đến đường thẳng $d: x - y + 3 = 0$ có toạ độ $M(a;b)$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $\sqrt{2}a = -b$. **B.** $a = -b$. **C.** $\sqrt{2}a = b$. **D.** $a = b$.

Câu 63. Cho tam giác ABC có trung điểm của BC là $M(3;2)$, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác lần lượt là $G\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right), I(1;-2)$. Tìm tọa độ đỉnh C, biết C có hoành độ lớn hơn 2.

A. $C(9;1)$. **B.** $C(5;1)$. **C.** $C(4;2)$. **D.** $C(3;-2)$.

Câu 64. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 25 = 0$ và điểm $M(2;1)$. Dây cung của (C) đi qua M có độ dài ngắn nhất là:

A. $2\sqrt{7}$. **B.** $16\sqrt{2}$. **C.** $8\sqrt{2}$. **D.** $4\sqrt{7}$.

Câu 65. Cho các số thực a, b, c, d thay đổi, luôn thỏa mãn $(a-1)^2 + (b-2)^2 = 1$ và $4c - 3d - 23 = 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (a-c)^2 + (b-d)^2$ là:

A. $P_{\min} = 28$. **B.** $P_{\min} = 3$. **C.** $P_{\min} = 4$. **D.** $P_{\min} = 16$.

Câu 66. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ và các đường thẳng $d_1: mx + y - m - 1 = 0$, $d_2: x - my + m - 1 = 0$. Tìm các giá trị của tham số m để mỗi đường thẳng d_1, d_2 cắt (C) tại 2 điểm phân biệt sao cho 4 điểm đó lập thành 1 tứ giác có diện tích lớn nhất. Khi đó tổng của tất cả các giá trị tham số m là:

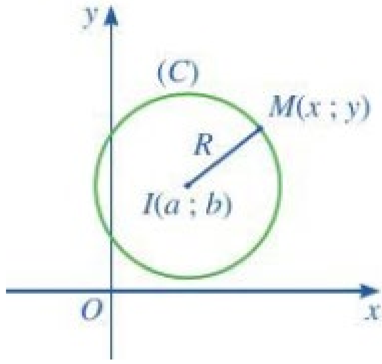
A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Bài 5. ĐƯỜNG TRÒN TRONG MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

PHẦN A. LÝ THUYẾT

1. Phương trình đường tròn



Phương trình đường tròn tâm $I(a;b)$ bán kính R là $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.
Phương trình đường tròn ở dạng trên thường được gọi là phương trình chính tắc của đường tròn.
Ví dụ 1. Lập phương trình đường tròn trong mỗi trường hợp sau:
a) Đường tròn tâm O bán kính R;
b) Đường tròn tâm $I(-1;3)$ bán kính 7 .
Giải
a) Phương trình đường tròn tâm O bán kính R là
$(x-0)^2+(y-0)^2=R^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=R^2$.
b) Phương trình đường tròn tâm $I(-1;3)$ bán kính 7 là
$[x-(-1)]^2+(y-3)^2=7^2 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=49$.
Ví dụ 2. Tìm tâm và bán kính của đường tròn có phương trình là
$(x+2)^2+(y-5)^2=9$
Giải
Ta có: $(x+2)^2+(y-5)^2=9 \Leftrightarrow [x-(-2)]^2+(y-5)^2=3^2$.
Vậy đường tròn đã cho có tâm là $I(-2;5)$ bán kính $R=3$
Nhận xét: Ta có thể viết phương trình $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ của đường tròn tâm $I(a;b)$ bán kính R về phương trình có dạng là $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$. Dạng đó thường được gọi là phương trình tổng quát của đường tròn.
Ví dụ 3
a) Phương trình $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ có phải là phương trình đường tròn không? Nếu phải, xác định tọa độ tâm và bán kính của đường tròn đó.
b) Xác định điều kiện của a,b,c để phương trình $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ là phương trình đường tròn. Khi đó, xác định toạ độ tâm và bán kính theo a,b,c .
Giải
a) Ta có:
$x^2+y^2-4x+2y-4=0 \Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2+2y+1=9 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=3^2$.
Phương trình trên là phương trình đường tròn tâm $I(2;-1)$ bán kính $R=3$.
b) Ta có:
$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$
$\Leftrightarrow \left(x^2-2ax+a^2\right)+\left(y^2-2by+b^2\right)=a^2+b^2-c$
$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2-c$.

Do đó, phương trình trên là phương trình đường tròn khi và chỉ khi $a^2+b^2>c$. Lúc này đường tròn đã cho có tâm $I(a;b)$ bán kính

$R=\sqrt{a^2+b^2-c}$

2. Phương trình đường tròn đi qua ba điểm không thẳng hàng

Do có duy nhất một đường tròn đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước nên ta có thể lập được phương trình đường tròn đó khi biết toạ độ của ba điểm nói trên.

Ví dụ 4. Lập phương trình đường tròn đi qua ba điểm $A(-1;1), B(0;-2), C(0;2)$.

Giải

Giả sử tâm của đường tròn là điểm $I(a;b)$. Ta có $IA=IB=IC \Leftrightarrow IA^2=IB^2=IC^2$. Vì $IA^2=IB^2, IB^2=IC^2$ nên

$$\begin{cases}(-1-a)^2+(1-b)^2=(0-a)^2+(-2-b)^2\\(0-a)^2+(-2-b)^2=(0-a)^2+(2-b)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2+2a-2b+2=a^2+b^2+4b+4\\a^2+b^2+4b+4=a^2+b^2-4b+4\end{cases}$$

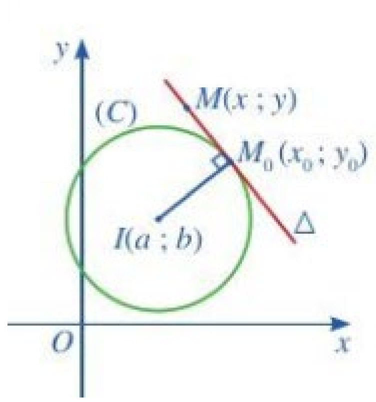
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2a-2b=4b+2\\b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$$

Đường tròn tâm $I(1;0)$ bán kính $R=IC=\sqrt{a^2+b^2-4b+4}=\sqrt{5}$.

Phương trình đường tròn là $(x-1)^2+(y-0)^2=(\sqrt{5})^2$.

Vậy phương trình đường tròn là $(x-1)^2+y^2=5$.

II. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn



- Đường thẳng M_0t đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0\right)$ và có vectơ pháp tuyến

$\overrightarrow{IM_0}=\left(x_0-a;y_0-b\right)$.

- Phương trình tiếp tuyến M_0t là

$\left(x_0-a\right)\left(x-x_0\right)+\left(y_0-b\right)\left(y-y_0\right)=0.$

Ví dụ 5. Lập phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(2;1)$ thuộc đường tròn $(x-1)^2+(y-3)^2=5$.

Giải

Đường tròn có tâm $I(1;3)$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(2;1)$ thuộc đường tròn $(x-1)^2+(y-3)^2=5$ là

$(2-1)(x-2)+(1-3)(y-1)=0$

$\Leftrightarrow 1(x-2)-2(y-1)=0 \Leftrightarrow x-2y=0.$

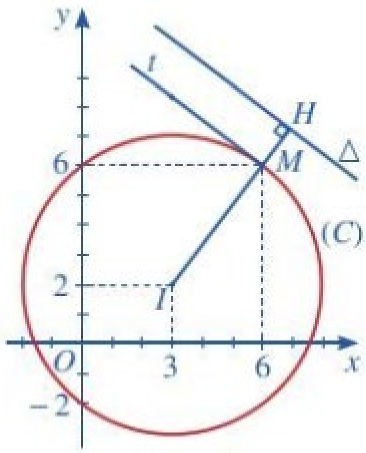
Ví dụ 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, một vật chuyển động tròn đều ngược chiều kim đồng hồ trên đường tròn tâm $I(3;2)$ bán kính 5 dưới tác dụng của lực căng dây. Khi vật chuyển động tới điểm $M(6;6)$ thì dây căng bị đứt.

a) Viết phương trình quỹ đạo chuyển động của vật sau khi dây bị đứt, biết rằng vật chỉ chịu tác động của duy nhất lực căng dây trong bài toán này.

b) Một vật khác chuyển động thẳng đều trên đường thẳng có phương trình
$\Delta: 3x+4y+23=0$.

Chứng minh hai vật này không gặp nhau tại bất kì thời điểm nào.

Giải



a) Quỹ đạo chuyển động của vật thứ nhất trước khi dây bị đứt là đường tròn (C) có phương trình:
$(x-3)^2+(y-2)^2=5^2 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-2)^2=25$.

Khi dây bị đứt, do vật thứ nhất chỉ chịu tác động của duy nhất lực căng dây nên vật đó tiếp tục chuyển động theo tiếp tuyến Mt tại điểm $M(6;6)$ thuộc đường tròn (C). Phương trình tiếp tuyến Mt là:

$(6-3)(x-6)+(6-2)(y-6)=0$

$\Leftrightarrow 3(x-6)+4(y-6)=0 \Leftrightarrow 3x+4y-42=0$.

Vậy quỹ đạo chuyển động của vật thứ nhất sau khi dây bị đứt là tia Mt, đường thẳng Mt có phương trình là: $3x+4y-42=0$.

b) Khoảng cách từ tâm đường tròn (C) đến đường thẳng $\Delta: 3x+4y+23=0$ là:

$$IH=\frac{|3\cdot 3+4\cdot 2+23|}{\sqrt{3^2+4^2}}=8>5.$$

Vì khoảng cách từ tâm đường tròn (C) đến đường thẳng Δ lớn hơn bán kính của đường tròn (C) nên đường tròn (C) và đường thẳng Δ không có điểm chung, tức là vật thứ hai không gặp vật thứ nhất khi dây chưa đứt. Mặt khác, vì $\Delta // Mt$ nên vật thứ hai không gặp vật thứ nhất sau khi dây bị đứt. Vậy hai vật không bao giờ gặp nhau.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Nhận dạng phương trình đường tròn

Đưa phương trình về dạng: $(x-a)^2+(y-b)^2=P(*)$

- Nếu $P>0$ thì $(*)$ là phương trình đường tròn có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{P}$

- Nếu $P\le 0$ thì $(*)$ không phải là phương trình đường tròn.

Câu 1. Trong các phương trình sau, phương trình nào biểu diễn đường tròn? Tìm tâm và bán kính nếu có.

a) $x^2+y^2+2x-4y+9=0(1)$ b) $x^2+y^2-6x+4y+13=0(2)$

c) $2x^2+2y^2-6x-4y-1=0(3)$ d) $2x^2+y^2+2x-3y+9=0(4)$

Lời giải.

a) Phương trình (1) có dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ với $a=-1;b=2;c=9$

Ta có $a^2+b^2-c=1+4-9<0$

Vậy phương trình (1) không phải là phương trình đường tròn.

b) Ta có $a^2+b^2-c=9+4-13=0$

Suy ra phương trình (2) không phải là phương trình đường tròn.

c) Ta có $(3) \Leftrightarrow x^2+y^2-3x-2y-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{5}{2}$

Vậy phương trình (3) là phương trình đường tròn tâm $I\left(\frac{3}{2};1\right)$, bán kính $R=\frac{\sqrt{10}}{2}$

d) Phương trình (4) không phải là phương trình đường tròn vì hệ số của x^2 và y^2 khác nhau.

Câu 2. Cho phương trình $x^2+y^2-2mx-4(m-2)y+6-m=0(1)$

a) Tìm điều kiện của *m* để (1) là phương trình đường tròn.

b) Nếu (1) là phương trình đường tròn, hãy tìm tâm và bán kính theo *m*.

Lời giải.

a) Phương trình (1) là phương trình đường tròn khi và chỉ khi $a^2+b^2-c>0$

Với $a=m;b=2(m-2);c=6-m$

Hay $m^2+4(m-2)^2-6+m>0 \Leftrightarrow 5m^2-15m+10>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<1 \end{array}\right.$

b) Với điều kiện trên thì đường tròn có tâm $I(m;2(m-2))$ và bán kính $R=\sqrt{5m^2-15m+10}$.

Câu 3. Cho phương trình đường cong $(C_m): x^2+y^2+(m+2)x-(m+4)y+m+1=0(2)$

a) Chứng minh rằng (2) là phương trình một đường tròn.

b) Tìm tập hợp tâm các đường tròn khi *m* thay đổi.

c) Chứng minh rằng khi *m* thay đổi, họ các đường tròn (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định.

Lời giải.

a) Ta có

$x^2+y^2+(m+2)x-(m+4)y+m+1=0$

$\Leftrightarrow x^2+(m+2)x+\frac{(m+2)^2}{4}+y^2-(m+4)y+\frac{(m+4)^2}{4}=\frac{(m+2)^2}{4}+\frac{(m+4)^2}{4}-m-1=0$

$\Leftrightarrow \left[x+\frac{m+2}{2}\right]^2+\left[y+\frac{m+4}{2}\right]^2=\frac{(m+2)^2}{4}+\frac{(m+4)}{4}-m-1$

Do $\left(\frac{m+2}{2}\right)^2+\left(\frac{m+4}{2}\right)^2-m-1=\frac{(m+2)^2+4}{2}>0$

Suy ra (2) là phương trình đường tròn với mọi *m*.

b) Đường tròn có tâm $(I):\begin{cases} x_1=-\frac{m+2}{2} \\ y_1=\frac{m+4}{2} \end{cases}$ suy ra $x_1+y_1-1=0$

Vậy tập hợp tâm các đường tròn là đường thẳng $\Delta: x+y-1=0$

c) Gọi $M(x_o;y_o)$ là điểm cố định mà họ (C_m) luôn đi qua.

$$x_o^{\,2}+y_o^{\,2}+(m+2)x_o-(m+4)y_o+m+1=0,\forall m$$

Khi đó ta có: $\Leftrightarrow (x_o-y_o-1)m+x_o^{\,2}+y_o^{\,2}+2x_o-4y_o+1=0,\forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_o-y_o+1=0 \\ x_o^{\,2}+y_o^{\,2}+2x_o-4y_o+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_o=-1 \\ y_o=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_o=1 \\ y_o=2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm cố định mà họ (C_m) luôn đi qua với mọi m là $M_1(-1;0)$ và $M_2(1;2)$

Dạng 2. Thiết lập phương trình đường tròn

Cách 1:

- Tìm tọa độ tâm $I(a;b)$ của đường tròn (C).
- Tìm bán kính R của đường tròn (C).
- Viết phương trình đường tròn (C) theo dạng $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

Cách 2: Giả sử phương trình đường tròn (C) là: $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ (Hoặc $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$).

- Từ điều kiện của đề Câu thành lập hệ phương trình với ba ẩn là a,b,c.

Giải hệ để tìm a,b,c từ đó tìm được phương trình đường tròn (C).

Câu 4. Viết phương trình đường tròn trong mỗi trường hợp sau:

a) Có tâm $I(1;-5)$ và đi qua $O(0;0)$.

b) Nhận AB làm đường kính với $A(1;1),B(7;5)$.

Lời giải.

a) Đường tròn cần tìm có bán kính là $OI=\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$ nên có phương trình là: $(x-1)^2+(y+5)^2=26$.

b) Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB suy ra $I(4;3)$, $AI=\sqrt{(4-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{13}$.

Đường tròn cần tìm có đường kính là AB suy ra nó nhận $I(4;3)$ làm tâm và bán kính $R=AI=\sqrt{13}$ nên có phương trình là $(x-4)^2+(y-3)^2=13$.

Câu 5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường tròn (C) đi qua ba điểm $A(-3;-1),B(-1;3),C(-2;2)$.

Lời giải.

Cách 1. Phương trình đường tròn có dạng $(C): x^2+y^2+2ax+2by+c=0$, với $a^2+b^2-c>0$.

Vì A,B,C thuộc (C) nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 6a+2b-c=10 \\ 2a-6b-c=10 \\ 4a-4b-c=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \\ c=-20 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm $x^2+y^2-4x+2y-20=0$

Cách 2. Gọi $I(a;b)$ là tâm của (C).

Vì A,B,C thuộc (C) nên

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-3-a)^2 + (-1-b)^2 = (-1-a)^2 + (3-b)^2 \\ (-3-a)^2 + (-1-b)^2 = (-2-a)^2 + (2-b)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 8b = 0 \\ 2a + 6b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

Suy ra $I(2;-1)$, bán kính $IA = 5$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm $(C):(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$.

Câu 6. Cho hai điểm $A(8;0), B(0;6)$.

a) Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB.

b) Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB.

Lời giải.

a) Ta có tam giác OAB vuông ở O nên tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm của

cạnh huyền AB suy ra $I(4;3)$ và bán kính $R = IA = \sqrt{(8-4)^2 + (0-3)^2} = 5$.

Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$.

b) Ta có $OA = 8; \text{OB} = 6; \text{AB} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.

Mặt khác $\frac{1}{2}OA.OB = pr$ (vì cùng bằng diện tích tam giác ABC).

Suy ra $r = \frac{OA.OB}{OA + OB + AB} = 2$.

Dễ thấy đường tròn cần tìm có tâm thuộc góc phần tư thứ nhất và tiếp xúc với hai trục tọa độ nên tâm của đường tròn có tọa độ là $I(2;2)$.

Vậy phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB là $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$.

Câu 7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: 2x - y - 5 = 0$ và hai điểm $A(1;2), B(4;1)$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm thuộc d và đi qua hai điểm A, B.

Lời giải.

Cách 1. Gọi I là tâm của (C). Do $I \in d$ nên $I(\text{t}; 2\text{t} - 5)$.

Hai điểm A, B cùng thuộc (C) nên

$$IA = IB \Leftrightarrow (1-t)^2 + (7-2t)^2 = (4-t)^2 + (6-2t)^2 \Leftrightarrow t = 1$$

Suy ra $I(1;-3)$ và bán kính $R = IA = 5$.

Vậy phương trình đường tròn cần tìm $(C):(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$.

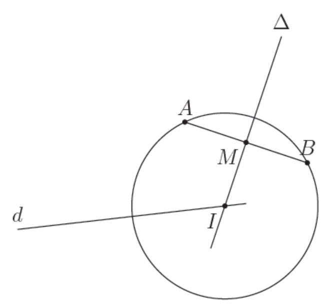
Cách 2. Gọi $M\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$ là trung điểm AB. Đường trung trực của đoạn AB đi qua M và nhận $\overrightarrow{AB} = (3;-1)$ làm vecto pháp tuyến nên có phương trình

$\Delta: 3x - y - 6 = 0$.

Tọa độ tâm I của (C) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ 3x - y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(1;-3).$$

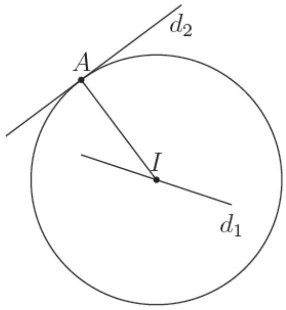
Bán kính của đường tròn bằng $R = IA = 5$.



Vậy phương trình đường tròn cần tìm

$(C):(x-1)^2+(y+3)^2=25$

Câu 8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: x+3y+8=0, d_2: 3x-4y+10=0$ và điểm $A(-2;1)$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm thuộc d_1, đi qua điểm A và tiếp xúc với d_2



Lời giải.

Gọi I là tâm của (C). Do $I \in d_1$ nên I(-3t-8; t). Theo giả thiết ta có

$$d(I,d_2)=IA$$

$$\Leftrightarrow \frac{|3(-3t-8)-4t+10|}{25}=\sqrt{(-3t-8+2)^2+(t-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow t=-3$$

Suy ra I(1; -3) và R=5

Vậy phương trình (C) là $(x-1)^2+(y+3)^2=25$.

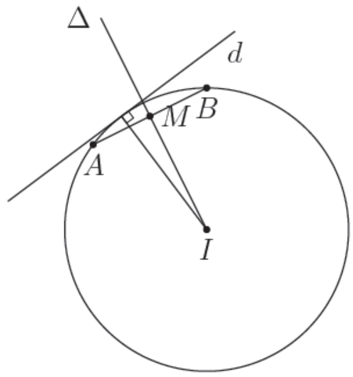
Câu 9. Trong mặt phẳng oxy cho 2 điểm A (-1; 1), B(3; 3) và đường thẳng $d: 3x-4y+8=0$. Viết phương trình đường tròn (C) qua A, B và tiếp xúc *d*.

Lời giải.

Đường trung trực Δ của AB đi qua M(1; 2) là trung điểm AB có phương trình là $\Delta: 2x+y-4=0$.

Gọi tâm I của (C) thuộc Δ là I (t; 4-2t)

Ta có $d(I,d)=IA \Leftrightarrow \sqrt{(-1-t)^2+(2t-3)^2}=\frac{|3t-4(4-2t)+8|}{\sqrt{9+16}}$



$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=\frac{31}{2} \end{array}\right.$$

□ Với $t=3$, suy ra tâm I(3; -2). Bán kính R=IA=5

Phương trình (C): $(x-3)^2+(y+2)^2=25$

□ Với $t=\frac{31}{2}$, suy ra tâm $I(\frac{31}{2};-27)$ và $R=\frac{65}{2}$

Phương trình (C): $(x-\frac{31}{2})^2+(y+27)^2=\frac{4225}{4}$.

Câu 10. Trong mặt phẳng oxy cho d: $2x-y-4=0$. Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với các trục tọa độ và có tâm thuộc d.

Lời giải.

Gọi I(m; 2m-4) thuộc d là tâm của đường tròn (C).

Ta có $d(I;0x)=d(I;oy) \Leftrightarrow |2m-4|=|m| \Leftrightarrow m=4$ hoặc $m=\frac{4}{3}$.

□ Với $m=\frac{4}{3}$ thì $I(\frac{4}{3};\frac{-4}{3}), R=\frac{4}{3}$ ta có

(C): $(x-\frac{4}{3})^2+(y+\frac{4}{3})^2=\frac{16}{9}$

 Với $m=4$ thì $I(4;4), R=4$ ta có

(C): $(x-4)^2+(y+4)^2=16.$

Câu 11. Trong mặt phẳng oxy cho $d: 2x-y-4=0$: viết phương trình đường tròn (C) có tâm thuộc d đồng tời tiếp xúc với $\Delta_1: 3x+4y+5=0$ và $\Delta_2: 4x-3y-5=0$

Lời giải.

Gọi $I(6t+10;t)\in d$ ta có

$d(I,\Delta_1)=d(I,\Delta_2)\Leftrightarrow\frac{|22t+35|}{5}=\frac{|21t+35|}{5}\Leftrightarrow t=0$ hoặc $t=\frac{-70}{43}$

 Với $t=0$ suy ra $I(10;0), R=7$

Phương trình $(C): (\text{x}-10)^2+y^2=49$.

 Với $t=\frac{-70}{43}$ suy ra $I(\frac{10}{43};\frac{-70}{43}), R=\frac{7}{43}$.

Phương trình $(C): (\text{x}-\frac{10}{43})^2+(y+\frac{70}{43})^2=\frac{49}{1849}$.

Câu 12. Trong mặt phẳng oxy cho $d: x+2y-3=0$ và $\Delta: x+3y-5=0$ viết phương trình (C) có bán kính $R=\frac{2\sqrt{10}}{5}$, có tâm thuộc d và tiếp xúc với Δ.

Lời giải.

Gọi $I(-2a+3;a)\in d$ là tâm của (C). Ta có

$d(I,\Delta)=\text{R}\Leftrightarrow\frac{|a-2|}{\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=6\\a=-2.\end{array}\right.$

 Với $a=6$ suy ra I(-9; 6). Phương trình $(C): (\text{x}+9)^2+(\text{y}-6)^2=\frac{8}{5}$.

 Với $a=-2$ suy ra I(7; -2). Phương trình $(C): (\text{x}-7)^2+(\text{y}+2)^2=\frac{8}{5}$.

Câu 13. Trong mặt phẳng oxy cho (C): $x^2+y^2+4\sqrt{3}x-4=0$ tia oy cắt (C) tại **A.** Viết phương trình (C') có bán kính R'=2 và tiếp xúc ngoài với (C) tại **A.**

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(-2\sqrt{3};0)$ bán kính R=4.

Tọa độ A là nghiệm hệ $\begin{cases}x^2+y^2+4\sqrt{3}x-4=0\\x=0\end{cases}\quad(y>0)$

Ta được A(0; 2).

Đường thẳng IA đi qua 2 điểm I và A nên có phương trình $\begin{cases} x = 2\sqrt{3}t \\ y = 2t + 2. \end{cases}$

Đường tròn (C’) tiếp xúc ngoài với (C) nên tâm I’ thuộc IA, nên $I'(2\sqrt{3}t; 2t+2)$.

Hơn nữa, $R = 2R'$ nên $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{I'A} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{3} - 0 = 2(0 - 2\sqrt{3}t) \\ 0 - 2 = 2(2 - 2t - 2) \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$.

Với $t = \frac{1}{2}$, suy ra $I'(\sqrt{3}; 3)$. Phương trình đường tròn (C’): $(x - \sqrt{3})^2 + (y-3)^2 = 4$

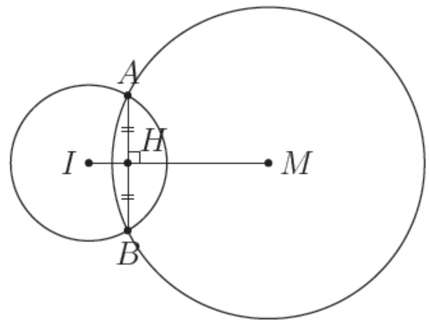
Câu 14. Trong mặt phẳng oxy cho (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C’) có tâm $M(5;1)$ biết (C’) cắt (C) tại 2 điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{3}$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm I (1;-2), bán kính $R = \sqrt{3}$

Phương trình đường thẳng nối 2 tâm IM: $3x - 4y - 11 = 0$

Gọi $H(x; y)$ là trung điểm AB.



Ta có $\begin{cases} H \in IM \\ IH = \sqrt{R^2 - AH^2} = \frac{3}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y - 11 = 0 \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{5} \\ y = \frac{-29}{10} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = \frac{11}{5} \\ y = \frac{-11}{10} \end{cases}$

Suy ra $H(\frac{-1}{5}; \frac{-29}{10})$ hoặc $H(\frac{11}{5}; \frac{-11}{10})$

 Với $H(\frac{-1}{5}; \frac{-29}{10})$ ta có $R'^2 = 43$

Phương trình (C’): $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 43$.

 Với $H(\frac{11}{5}; \frac{-11}{10})$ ta có $R'^2 = 13$

Phương trình (C’): $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 13$

Câu 15. Trong mặt phẳng tọa độ hệ oxy cho đường thẳng $d: x - y - 1 = 0$ và hai đường tròn $(C_1): (x-3)^2 + (y+4)^2 = 8;\ (C_2): (x+5)^2 + (y-4)^2 = 32$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I thuộc d và tiếp xúc ngoài với hai đường tròn trên.

Lời giải.

Gọi I, I_1, I_2, R, R_1, R_2 lần lượt là tâm và bán kính của 3 đường tròn (C), (C_1) và (C_2).

Giả sử $I(t; t-1) \in d$. Theo giả thiết Câu toán: (C) tiếp xúc ngoài (C_1) và (C_2) nên

$$\begin{cases} II_1 = R + R_1 \\ II_2 = R + R_2 \end{cases}$$

Suy ra

$$II_1 - R_1 = II_2 - R_2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(t-3)^2 + (t+3)^2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{(t-5)^2 + (t+5)^2} - 4\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow t = 0$$

Với $t = 0$ suy ra $I(0;-1)$ và $R = \sqrt{2}$.

Phương trình đường tròn (C): $x^2 + (y+1)^2 = 2$.

Dạng 3. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

1. Vị trí tương đối của đường thẳng với đường tròn

1.1. Phương pháp 1

Cho đường thẳng (Δ) và đường tròn (C) có tâm I bán kính R

- Nếu $d(I;\Delta) < R$ thì (Δ) cắt (C) tại hai điểm phân biệt.
- Nếu $d(I;\Delta) = R$ thì (Δ) tiếp xúc với (C)
- Nếu $d(I;\Delta) > R$ thì (Δ) và (C) không có điểm chung.

1.2. Phương pháp 2

Cho đường thẳng $(\Delta): Ax + By + C = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

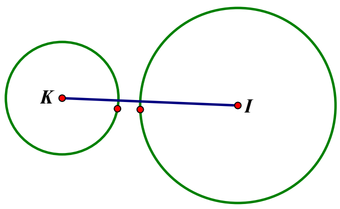
Xét hệ phương trình $\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \end{cases} \quad (I)$

- Nếu hệ (I) có hai nghiệm thì (Δ) cắt (C) tại hai điểm phân biệt.
- Nếu hệ (I) có một nghiệm thì (Δ) tiếp xúc (C).
- Nếu hệ (I) vô nghiệm thì (Δ) và (C) không có điểm chung.

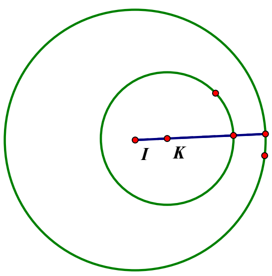
2. Vị trí tương đối của hai đường tròn

- Cho hai đường tròn $(C_1);(C_2)$ có tâm lần lượt là I;K bán kính $R_1;R_2$. Ta có

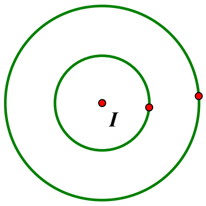
+) (C_1) và (C_2) ở ngoài nhau (không có điểm chung) khi và chỉ khi $IK > R_1 + R_2$



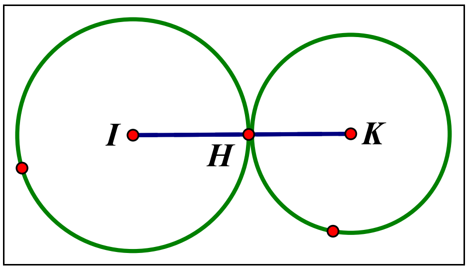
+) (C_1) và (C_2) đựng nhau (không có điểm chung) khi và chỉ khi $IK < |R_1 - R_2|$



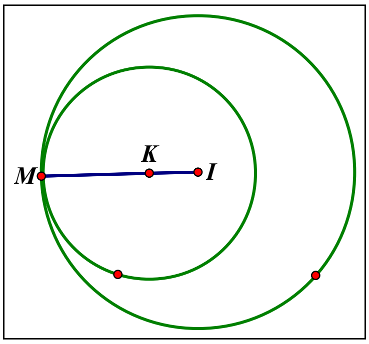
+) (C_1) và (C_2) đồng tâm (không có điểm chung) khi và chỉ khi $I \equiv K; R_1 \neq R_2$



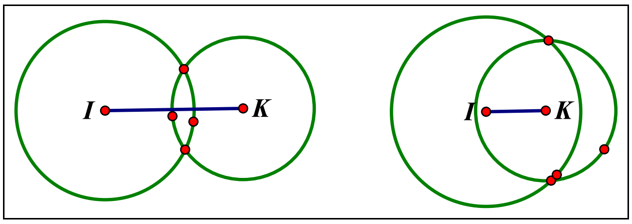
+) $\left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right)$ tiếp xúc ngoài khi và chỉ khi $I_1I_2 = R_1 + R_2$



+) $\left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right)$ tiếp xúc trong khi và chỉ khi $I_1I_2 = \left|R_1 - R_2\right|$



+) $\left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right)$ cắt nhau khi và chỉ khi $\left|R_1 - R_2\right| < I_1I_2 < R_1 + R_2$



Câu 16. Trong mặt phẳng tọa độ oxy, cho đường thẳng $\Delta: x - y + 1 = 0$ và đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$

a) Chứng minh M(2;1) nằm trong đường tròn

b) Xét vị trí tương đối của Δ và (C).

Lời giải.

a) Đường tròn (C) có tâm I(2;-1) và bán kính R=3. Ta có

$IM = 2 < 3 = R$. Do đó M nằm trong (C).

b) $d(I;\Delta) = 2\sqrt{2} < 3 = R$ nên Δ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt.

Câu 17. Trong mặt phẳng tọa độ oxy, cho 2 đường tròn (C) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$ và (C'): $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0$. Chứng minh 2 đường tròn cắt nhau tại 2 điểm phân biệt A,B.

Lời giải:

Đường tròn (C) có tâm I(1; 3) và bán kính R=5.

Đường tròn (C') có tâm I'(3; 1) và bán kính $R=\sqrt{13}$.

Mà $II'=2\sqrt{2}$, do đó $|R-R'|<II'<|R+R'|$ nên 2 đường tròn cắt nhau tại 2 điểm phân biệt A, B.

Câu 18. Trong mặt phẳng tọa độ oxy cho đường tròn (C) $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ Và đường thẳng $\Delta: \sqrt{2}x+my+1-\sqrt{2}=0$. Tìm m để (C) cắt Δ tại 2 điểm phân biệt.

Lời giải:

Đường tròn (C) có tâm I(1; -2) và bán kính R=3

Để (C) cắt Δ tại 2 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow d(I;\Delta)<\text{R}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left|\sqrt{2}-2m+1-\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2+m^2}}<3 \Leftrightarrow 5m^2+5m^2+17>0$. Đúng với mọi m.

Câu 19. Trong mặt phẳng tọa độ oxy cho đường tròn (C) $x^2+y^2-4x-2y=0$ và đường thẳng $\Delta: mx-y-3m-2=0$. Biện luận theo m số giao điểm của Δ và (C).

Lời giải:

Đường tròn (C) có tâm I(2; 1) và bán kính $R=\sqrt{5}$.

Ta có $h=d(I;\Delta)=\dfrac{|m+3|}{\sqrt{m^2+1}}$.

□ Nếu $h<\sqrt{5} \Leftrightarrow m>2$ hoặc $m<-\dfrac{1}{2} \Rightarrow \Delta$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt.

□ Nếu $h=\sqrt{5} \Leftrightarrow m=2$ hoặc $m=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow \Delta$ tiếp xúc (C).

□ Nếu $h>\sqrt{5} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}<m<2 \Rightarrow \Delta$ không cắt (C).

Câu 20. Trong mặt phẳng tọa độ oxy cho đường tròn $(C): x^2+y^2=1$ và: $(C_m): x^2+y^2-2(m+1)x+4my-5=0$. Tìm m để hai đường tròn tiếp xúc trong.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm O(0; 0) và bán kính $R=1$.

Đường tròn (C_m) có tâm I(m+1; -2m) và bán kính $R=\sqrt{(m+1)^2+4m^2+5}$.

Mà $OI=\sqrt{(m+1)^2+4m^2}$.

Để 2 đường tròn tiếp xúc trong thì $R'-R=OI$

$\Leftrightarrow \sqrt{(m+1)^2+4m^2+5}-1=\sqrt{(m+1)^2+4m^2}$

Giaỉ phương trình ta được $m=-1$ hoặc $m=\frac{3}{5}$.

Câu 21. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường tròn: $(C_1): x^2+y^2-2x-4y=0$ và $(C_2):(x+1)^2+(y-1)^2=16$. Viết phương trình đường thẳng đi qua giao điểm của hai đường tròn đó.

Lời giải

(C_1) có tâm $I_1(1;-2)$ và bán kính $R_1=3$

(C_2) có tâm $I_2(-1;1)$ và bán kính $R_2=4$

$I_1I_2=\sqrt{(-1-1)^2+(1+2)^2}=\sqrt{13}$.

Ta thấy $|R_1-R_2|<I_1I_2<R_1+R_2$ suy ra hai đường tròn cắt nhau.

Gọi điểm $M(x;y)$ thuộc đường thẳng cần tìm

Tọa độ M thỏa mãn hệ $\begin{cases}x^2+y^2-2x-4y=0\\(x+1)^2+(y-1)^2=16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2-2x-4y=0 \quad (1)\\x^2+y^2+2x-2y-14=0(2)\end{cases}$

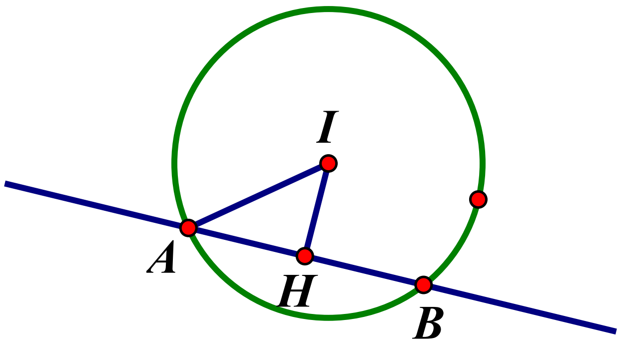
Lấy $(1)-(2)\Rightarrow -4x+6y+10=0\Leftrightarrow 2x-3y-5=0\,(3)$

Nhận thấy $M(x;y)$ luôn thỏa mãn phương trình (3)

Suy ra đường thẳng qua giao điểm của hai đường tròn là: $2x-3y-5=0$.

Câu 22. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-8y-8=0$. Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng $d: 3x+4y-2=0$ và cắt đường tròn theo một dây cung có độ dài bằng 6.

Lời giải



- Đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-8y-8=0$ có tâm $I(-1;4)$ và bán kính $R=5$

- Đường thẳng d' song song với đường thẳng d nên phương trình của d' là: $3x+4y+m=0\,(m\neq -2)$

- Kẻ $IH\perp d'\Rightarrow HA=HB=3$ và IH là khoảng cách từ I đến d': $IH=\frac{|-3+4+m|}{5}=\frac{|m+1|}{5}$

- Xét tam giác vuông IHA: $IH^2=IA^2-HA^2=25-9=16$

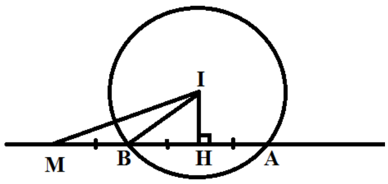
$\Leftrightarrow \frac{(m+1)^2}{25}=16\Leftrightarrow |m+1|=20\Rightarrow \left[\begin{array}{l}m=19\Rightarrow d':3x+y+19=0\\m=-21\Rightarrow d':3x+y-21=0\end{array}\right.$.(thỏa mãn ĐK)

Vậy có hai đường thẳng là: $3x+4y+19=0;3x+4y-21=0$.

Câu 23. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x-1)^2+(y-1)^2=25$ và điểm

$M(7;3)$. Lập phương trình đường thẳng d qua M cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A,B sao cho $MA=3MB$

Lời giải



Đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$ và bán kính $R=5$.

Ta có $IM=2\sqrt{10}>R \Rightarrow M$ nằm ngoài đường tròn (C)

Gọi H là trung điểm AB mà $MA=3MB \Rightarrow B$ là trung điểm MH

Ta có $\begin{cases} IH^2+MH^2=40 \\ IH^2+BH^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IH^2+4BH^2=40 \\ IH^2+BH^2=25 \end{cases}$ suy ra $IH^2=20 \Rightarrow IH=2\sqrt{5}$

Đường thẳng d qua $M(7;3)$ và có VTPT $\vec{n}=(a;b), a^2+b^2\neq 0$ có phương trình là:

$a(x-7)+b(y-3)=0 \Leftrightarrow ax+by-7a-3b=0$

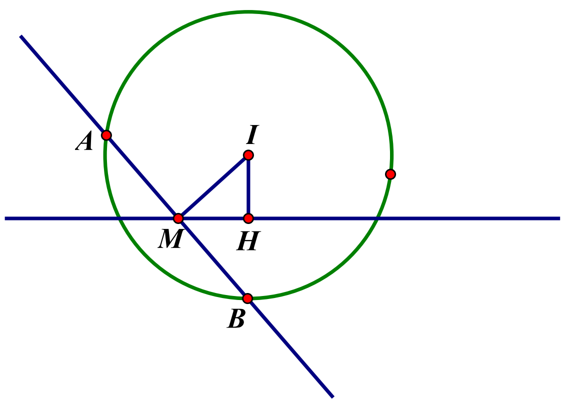
$IH=d(I,d)=\dfrac{|a+b-7a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\sqrt{5} \Leftrightarrow |3a+b|=\sqrt{5}\sqrt{a^2+b^2}$

$9a^2+6ab+b^2=5(a^2+b^2) \Leftrightarrow 2a^2+3ab-2b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{b}{2} \\ a=-2b \end{array}\right.$

- $a=\dfrac{b}{2} \quad \Rightarrow d: x+2y-13=0$
- $a=-2b \quad \Rightarrow d: 2x-y-11=0$

Câu 24. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x-1)^2+(y-1)^2=25$ và điểm $M(-1;2)$. Lập phương trình đường thẳng d qua M cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A,B sao cho độ dài dây cung AB nhỏ nhất .

Lời giải



Đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$ bán kính $R=5$ .Ta có: $IM=\sqrt{5} \Rightarrow IM<R$ nên điểm M nằm trong đường tròn (C), kẻ $IH\perp d \Rightarrow IH\leq IM$ và $HA=HB=\dfrac{AB}{2}$. Ta có $AH^2=IA^2-IH^2=25-IH^2$, AB nhỏ nhất khi và chỉ khi AH nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ IH lớn nhất $\Leftrightarrow IH=IM \Leftrightarrow H\equiv M$. Khi đó đường thẳng d đi qua M và

vuông góc với IM nên đường thẳng d có một vecto pháp tuyến là $\overrightarrow{IM}=(-2;1)$. Vậy phương trình đường thẳng d là: $-2(x+1)+1(y-2)=0 \Leftrightarrow -2x+y-4=0$.

Câu 25. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=5$. Viết phương trình đường tròn (C') có tâm $K(5;-2)$ và cắt đường tròn (C) theo một dây cung AB có độ dài bằng $\sqrt{2}$.

Lời giải

- Đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=5$ có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$

Gọi a với $a>0$ là bán kính đường tròn (C'), phương trình (C') là: $(C'):(x-5)^2+(y+2)^2=a^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-10x+4y+29-a^2=0$. Tọa độ giao điểm của hai đường tròn (C) và (C') là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=5\\ x^2+y^2-10x+4y+29-a^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2-2x-4y=0 & (1)\\ x^2+y^2-10x+4y+29-a^2=0 & (2)\end{cases}$

Trừ từng vế hai phương trình trên ta được phương trình $8x-8y-29+a^2=0$ là phương trình đường thẳng đi qua hai giao điểm A,B của hai đường tròn , kẻ $IH\perp AB$ suy ra H là trung điểm của AB và

$$AH=HB=\frac{1}{2}AB=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow IH=\sqrt{IA^2-AH^2}=\sqrt{5-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{9}{2}}=d(I,AB)$$

Nên ta có $\dfrac{|8.1-8.2-29+a^2|}{\sqrt{8^2+(-8)^2}}=\sqrt{\dfrac{9}{2}}\Leftrightarrow |a^2-37|=24\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a^2-37=24\\ a^2-37=-24\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a^2=61\\ a^2=13\end{array}\right.$

Có hai đường tròn là: $(C'):(x-5)^2+(y+2)^2=13;(C'):(x-5)^2+(y+2)^2=61$

Câu 26. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=1$, Lập phương trình đường tròn (C') tiếp xúc với hai trục tọa độ và tiếp xúc ngoài (C) .

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$ và bán kính $R=1$.

Gọi $K(a;b)$ và $R>0$ là tâm và bán kính đường tròn (C') tiếp xúc với hai trục tọa độ nên ta có

$|a|=|b|=R\Rightarrow \left[\begin{array}{l}a=b\\ a=-b\end{array}\right.$ từ $|a|=|b|\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=b\\ a=-b\end{array}\right.$

+Nếu $a=b>0\Rightarrow K(a;a)$ phương trình $(C'):(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$ hai đường tròn tiếp xúc ngoài khi và chỉ khi $IK=R+R'\Leftrightarrow \sqrt{(a-1)^2+(a-1)^2}=1+a\Leftrightarrow a^2-6a+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=3+2\sqrt{2}\\ a=3-2\sqrt{2}\end{array}\right.$

Có 2 đường tròn là: $(C'):\left(x-3-2\sqrt{2}\right)^2+\left(y-3-2\sqrt{2}\right)^2=17+12\sqrt{2}$

$(C'):\left(x-3+2\sqrt{2}\right)^2+\left(y-3+2\sqrt{2}\right)^2=17-12\sqrt{2}$

+Nếu $a=b<0\Rightarrow K(a;a)$ phương trình $(C'):(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$ hai đường tròn tiếp xúc ngoài khi và chỉ khi $IK=R+R'\Leftrightarrow \sqrt{(a-1)^2+(a-1)^2}=1-a\Leftrightarrow a^2-2a+1=0\Leftrightarrow a=1$ (loại)

+Nếu $a=-b\Rightarrow K(a;-a)$ phương trình $(C'):(x-a)^2+(y+a)^2=a^2$ hai đường tròn tiếp xúc ngoài khi và chỉ khi $IK=R+R'\Leftrightarrow \sqrt{(a-1)^2+(a+1)^2}=1+|a|\Leftrightarrow 2a^2+2=(1+|a|)^2$ (1)

TH 1: $a>0$ khi đó $(1)\Leftrightarrow 2a^2+2=(1+a)^2\Leftrightarrow a^2-2a+1=0\Leftrightarrow a=1$

Phương trình đường tròn là: $(C'):(x-1)^2+(y+1)^2=1$.

TH2 : $a<0$ khi đó $(1)\Leftrightarrow 2a^2+2=(1-a)^2 \Leftrightarrow a^2+2a+1=0 \Leftrightarrow a=-1$

Phương trình đường tròn là: $(C'):(x+1)^2+(y-1)^2=1$.

Có 4 đường tròn thỏa mãn.

Dạng 4: Tiếp tuyến của đường tròn

Cho đường tròn (C) có tâm I(a;b) và bán kính R.

a) Nếu biết tiếp điểm là $M(x_0;y_0)$ thì tiếp tuyến đó qua M và nhận vector $\overrightarrow{IM}(x_0-a;y_0-b)$ làm vector pháp tuyến nên có phương trình là. $(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0$.

b) Nếu không biết tiếp điểm thì dùng điều kiện tiếp xúc: Δ tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow d(I;\Delta)=R$ để xác định tiếp tuyến.

Câu 27. Trong mặt phẳng tọa độ oxy cho đường tròn (C) $(x-1)^2+(y+2)^2=8$.

a) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm A(3; -4).

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) qua điểm B(5; -2).

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) biết tiếp tuyến vuông góc với d: $x+y+2014=0$.

d) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) biết tiếp tuyến tạo với trục tung một góc 45^0

Lời giải.

a) Đường tròn (C) có tâm I(1; -2) và bán kính $R=2\sqrt{2}$.

Do A thuộc (C) nên tiếp tuyến Δ qua A và nhận $\overrightarrow{IA}=(2;-2)$ làm vector pháp tuyến

Vậy phương trình $\Delta: x-y-7=0$.

b) Gọi $\vec{n}=(a;b)$ là vector pháp tuyến của Δ, Do đó

$\Delta: a(x-5)+b(y+2)=0$

$\Leftrightarrow ax+by-5a+2b=0$

Do Δ tiếp xúc với (C) nên

$$d(I;\Delta)=R \Leftrightarrow \frac{|-4a|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow a^2=b^2 \Leftrightarrow a=\pm b$$

Với $a=b$ chọn $a=1\Rightarrow b=1$. Phương trình tiếp tuyến Δ là $x+y-3=0$.

Với $a=-b$ chọn $a=1\Rightarrow b=-1$. Phương trình tiếp tuyến Δ là $x-y-7=0$.

c) Tiếp tuyến Δ vuông góc d nên Δ có dạng $x-y+c=0$.

Mà $d(I;\Delta)=R \Leftrightarrow \dfrac{|3+c|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=1 \\ c=-7 \end{array}\right.$

Vậy có 2 tiếp tuyến thỏa mãn: $x-y+1=0$ hoặc $x-y-7=0$.

d) Gọi Δ có dạng $ax+by+c=0 \quad (a^2+b^2\neq 0)$

Theo Câu ra ta có $\begin{cases} d(I;\Delta)=R \\ \cos(\vec{n};\vec{i})=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|a-2b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\sqrt{2} \\ \dfrac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow a^2=b^2 \Leftrightarrow a=\pm b$

Với $a=b \Rightarrow |c-b|=4|b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=5b \\ c=-3b \end{array}\right.$

+ TH1: chọn $b=1 \Rightarrow c=5; a=1$ ta được $\Delta: x+y+5=0$.

+ TH2: chọn $b=1 \Rightarrow c=-3; a=1$ ta được $\Delta: x+y-3=0$.

Với $a=-b \Rightarrow |c-3b|=4|b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=7b \\ c=-b \end{array}\right.$

+ TH1: chọn $b=-1 \Rightarrow c=-7; a=1$ ta được $\Delta: x-y-7=0$.

+ TH2: chọn $b=-1 \Rightarrow c=3; a=1$ ta được $\Delta: x-y+1=0$.

Vậy có 4 tiếp tuyến cần tìm là $\Delta: x+y+5=0$; $\Delta: x+y-3=0$; $\Delta: x-y-7=0$; $\Delta: x-y+1=0$.

Câu 28. Trong mặt phẳng tọa độ oxy cho đường tròn $(C_1): x^2+y^2-2y-3=0$ và $(C_2): x^2+y^2-8x-8y+28=0$. Viết phương trình tiếp tuyến chung của 2 đường tròn.

Lời giải:

(C_1) có tâm $I_1(0;1)$ và bán kính $R_1=2$.

(C_2) có tâm $I_2(4;4)$ và bán kính $R_2=2$.

Có $I_1I_2=5>R_1+R_2$ nên 2 đường tròn ở ngoài nhau, như vậy có 4 tiếp tuyến chung.

TH1: Nếu tiếp tuyến song song oy thì Δ có dạng $x+c=0$.

Ta có $d(I_1;\Delta)=d(I_2;\Delta) \Leftrightarrow |c|=|4+c| \Leftrightarrow c=-2$

Vậy tiếp tuyến $\Delta: x-2=0$.

TH2: Nếu Δ không song song với oy thì phương trình của $\Delta: y=ax+b$.

Ta có $\begin{cases} d(I_1;\Delta)=2 \\ d(I_1;\Delta)=d(I_2;\Delta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|-1+b|}{\sqrt{a^2+1}}=2 \\ \dfrac{|-1+b|}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{|-4a-4+b|}{\sqrt{a^2+1}} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{3}{4} \\ b=\dfrac{7}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=\dfrac{-7}{24} \\ b=\dfrac{37}{12} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=\dfrac{3}{4} \\ b=\dfrac{-3}{2} \end{cases}$

Suy ra $\Delta: 3x-4y+14=0$; $\Delta: 3x-4y-6=0$; $\Delta: 7x+24y-74=0$

Vậy có 4 tiếp tuyến $\Delta: x-2=0$ $\Delta: 3x-4y+14=0$; $\Delta: 3x-4y-6=0$; và $\Delta: 7x+24y-74=0$.

Câu 29. Trong mặt phẳng tọa độ oxy cho đường tròn $(C_1):(x-2)^2+(y-3)^2=2$ và $(C_2):(x-1)^2+(y-2)^2=8$. Viết phương trình tiếp tuyến chung của 2 đường tròn.

Lời giải:

(C_1) có tâm $I_1(2;3)$ và bán kính $R_1=\sqrt{2}$.

(C_2) có tâm $I_2(1;2)$ và bán kính $R_2=2\sqrt{2}$.

Ta có $I_1I_2=\sqrt{2}=R_2-R_1$ do đó 2 đường tròn tiếp xúc trong. Như vậy có 1 tiếp tuyến chung.

Tọa độ tiếp điểm của 2 đường tròn là nghiệm hệ

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-3)^2=2\\(x-1)^2+(y-2)^2=8\end{cases}\Rightarrow M(3;4).$$

Tiếp tuyến chung Δ là đường thẳng qua $M(3;4)$ và nhận $\overrightarrow{I_1I_2}=(-1;-1)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình $\Delta: x+y-7=0$.

Câu 30. Trong mặt phẳng (Oxy), cho $(C):(x-2)^2+(y-1)^2=5$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến cắt $Ox;Oy$ lần lượt tại $A;B$ sao cho $OA=2OB$

Lời giải

(C) có tâm $I(2;1)$, bán kính $R=\sqrt{5}$

Tiếp tuyến cắt $Ox;Oy$ lần lượt tại $A;B$ sao cho $OA=2OB \Rightarrow$ Tiếp tuyến có hệ số góc $k=\pm\frac{OB}{OA}=\pm\frac{1}{2}$.

Trường hợp 1: Với $k=\frac{1}{2}\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến có dạng $\Delta: y=\frac{1}{2}x+b$

Δ là tiếp tuyến của $(C)\Leftrightarrow d(I;\Delta)=R \Leftrightarrow \frac{|2b|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}b=\frac{5}{2}\\ b=-\frac{5}{2}\end{array}\right.$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là $\left[\begin{array}{l}y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\\ y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}\end{array}\right.$

Trường hợp 2: Với $k=-\frac{1}{2}\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến có dạng $d: y=-\frac{1}{2}x+m$

d là tiếp tuyến của $(C)\Leftrightarrow d(I;d)=R \Leftrightarrow \frac{|4-2m|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}b=\frac{9}{2}\\ b=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2} \\ y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Vậy có 4 tiếp tuyến thỏa mãn điều kiện.

Câu 31. Trong mặt phẳng (Oxy), cho $(C):(x-2)^2+(y-1)^2=5$. Tìm $M\in\Delta: x+y+2=0$ sao cho qua M kẻ được tới (C) hai tiếp tuyến MA, MB thỏa mãn diện tích tứ giác $MAIB$ bằng 10, với I là tâm đường tròn.

Lời giải

(C) có tâm $I(2;1)$, bán kính $R=\sqrt{5}=AI$

$$S_{MAIB}=2S_{\Delta AMI}=2.\frac{1}{2}.AM.AI\Rightarrow AM=\frac{S_{MAIB}}{AI}=2\sqrt{5}\Rightarrow MI=\sqrt{AM^2+AI^2}=5$$

$M\in\Delta: x+y=2=0\Rightarrow M(a;2-a)$

$$MI=5\Leftrightarrow(2-a)^2+(1-a)^2=25\Leftrightarrow a^2-3a-10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a=5 \\ a=-2 \end{array}\right.$$

Vậy có 2 điểm thỏa mãn điều kiện $\left[\begin{array}{l} M(5;-3) \\ M(-2;4) \end{array}\right.$.

Câu 32. Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-6x+2y+6=0$ và điểm hai điểm $A(1;-1);B(1;3)$

a) Chứng minh rằng điểm A thuộc đường tròn, điểm B nằm ngoài đường tròn

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm A.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) kẻ từ B.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(3;-1)$ bán kính $R=\sqrt{3^2+1-6}=2$.

a) Ta có: $IA=2=R;IB=2\sqrt{5}>R$ suy ra điểm A thuộc đường tròn và điểm B nằm ngoài đường tròn

b) Tiếp tuyến của (C) tại điểm A nhận $\overrightarrow{IA}=(2;0)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là

$2(x-1)+0(y+1)=0$ hay $x=1$

c) Phương trình đường thẳng Δ đi qua B có dạng:

$a(x-1)+b(y-3)=0$ (với $a^2+b^2\neq 0$) hay $ax+by-a-3b=0$

Đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đường tròn $\Leftrightarrow d(I;\Delta)=R$

$$\Leftrightarrow\frac{|3a-b-a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\Leftrightarrow(a-2b)^2=a^2+b^2\Leftrightarrow 3b^2-4ab=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} b=0 \\ 3b=4a \end{array}\right.$$

+ Nếu $b=0$, chọn $a=1$ suy ra phương trình tiếp tuyến là $x=1$.

+ Nếu $3b=4a$, chọn $a=3,b=4$ suy ra phương trình tiếp tuyến là $3x+4y-15=0$

Vậy qua A kẻ được hai tiếp tuyến với (C) có phương trình là $x=1$ và $3x+4y-15=0$

Câu 33. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đường tròn $(C): x^2+y^2-4x+4y-1=0$ trong trường

a) Đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $\Delta': 2x+3y+4=0$.

b) Đường thẳng Δ hợp với trục hoành một góc 45°.

Lời giải

a) Đường tròn (C) có tâm $I(2;-2)$, bán kính $R=3$

Vì $\Delta \perp \Delta'$ nên Δ nhận $\vec{u}(-3;2)$ làm VTPT do đó phương trình có dạng $-3x+2y+c=0$

Đường thẳng Δ là tiếp tuyến với đường tròn (C) khi và chỉ khi

$d(I;\Delta)=3 \Leftrightarrow \frac{|-10+c|}{\sqrt{13}}=3 \Leftrightarrow c=10\pm 3\sqrt{13}$

Vậy có hai tiếp tuyến là $\Delta: -3x+2y+10\pm 3\sqrt{13}=0$

b) Giả sử phương trình đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0, a^2+b^2\neq 0$

Đường thẳng Δ là tiếp tuyến với đường tròn (C) khi và chỉ khi

$d(I;\Delta)=3 \Leftrightarrow \frac{|2a-2b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3 \Leftrightarrow (2a-2b+c)^2=9(a^2+b^2) (*)$

Đường thẳng Δ hợp với trục hoành một góc 45^0 suy ra

$\cos(\Delta;Ox)=\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow \cos 45^0=\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow a=b$ hoặc $a=-b$

TH1: Nếu $a=b$ thay vào (*) ta có $18a^2=c^2 \Leftrightarrow \pm c=3\sqrt{2}a$, chọn $a=b=1 \Rightarrow c=\pm 3\sqrt{2}$ suy ra $\Delta: x+y\pm 3\sqrt{2}=0$

TH2: Nếu $a=-b$ thay vào (*) ta có $18a^2=(4a+c)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=(3\sqrt{2}-4)a \\ c=-(3\sqrt{2}+4)a \end{array}\right.$

Với $c=(3\sqrt{2}-4)a$, chọn $a=1, b=-1, c=(3\sqrt{2}-4) \Rightarrow \Delta: x-y+3\sqrt{2}-4=0$

Với $c=-(3\sqrt{2}+4)a$, chọn $a=1, b=-1, c=-(3\sqrt{2}+4) \Rightarrow \Delta: x-y-3\sqrt{2}-4=0$

Vậy có bốn đường thẳng thỏa mãn là $\Delta_{1,2}: x+y\pm 3\sqrt{2}=0, \Delta_3: x-y+3\sqrt{2}-4=0$ và $\Delta_4: x-y-3\sqrt{2}-4=0$

Câu 34. Lập phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn sau:

$(C_1): x^2+y^2-4y-5=0$ và $(C_2): x^2+y^2-6x+8y+16=0$.

Lời giải

Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(0;2)$ bán kính $R_1=3$

Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(3;-4)$ bán kính $R_2=3$

Gọi tiếp tuyến chung của hai đường tròn có phương trình $\Delta: ax+by+c=0$ với $a^2+b^2\neq 0$

Δ là tiếp tuyến chung của (C_1) và $(C_2) \Leftrightarrow \begin{cases} d(I_1,\Delta)=3 \\ d(I_2,\Delta)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2b+c|=3\sqrt{a^2+b^2} (*) \\ |3a-4b+c|=3\sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$

Suy ra $|2b+c|=|3a-4b+c| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2b \\ c=\frac{-3a+2b}{2} \end{array}\right.$

TH1: Nếu $a=2b$ chọn $a=2, b=1$ thay vào (*) ta được $c=-2\pm 3\sqrt{5}$ nên ta có 2 tiếp tuyến là $2x+y-2\pm 3\sqrt{5}=0$

TH2: Nếu $c=\frac{-3a+2b}{2}$ thay vào (*) ta được $|2b-a|=2\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow a=0$ hoặc $3a+4b=0$

+ Với $a=0 \Rightarrow c=b$, chọn $b=c=1$ ta được $\Delta: y+1=0$

+ Với $3a+4b=0 \Rightarrow c=3b$, chọn $a=4, b=-3, c=-9$ ta được $\Delta: 4x-3y-9=0$

Vậy có 4 tiếp tuyến chung của hai đường tròn là: $2x+y-2\pm 3\sqrt{5}=0, y+1=0, 4x-3y-9=0$.

Câu 35. Trong hệ trục Oxy, cho hai đường tròn $(C_1):(x-1)^2+(y-2)^2=2$, $(C_2):(x-4)^2+(y-5)^2=8$ và đường thẳng $d: x+y+m=0$. Tìm m biết đường thẳng d tiếp xúc với cả hai đường tròn (C_1) và (C_2) .

Lời giải

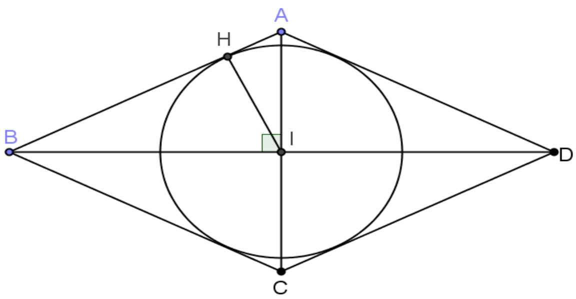
(C_1) có tâm $I_1(1;2)$, bán kính $R_1=\sqrt{2}$ và (C_2) có tâm $I_2(4;5)$, bán kính $R_2=2\sqrt{2}$.

Vì đường thẳng d tiếp xúc với cả hai đường tròn (C_1) và (C_2) nên ta có

$$\begin{cases} d(I_1,d)=R_1 \\ d(I_2,d)=R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|m+3|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2} \\ \dfrac{|9+m|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow m=-5$$

Câu 36. Trong mặt phẳng Oxy , cho hình thoi ABCD ngoại tiếp đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2+(y+1)^2=8$ và điểm A thuộc đường thẳng $d: x-2y+3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi, biết rằng $BD=2AC$ và hoành độ điểm A không nhỏ hơn 2.

Lời giải



Trong tam giác IAB có $\dfrac{1}{IA^2}+\dfrac{1}{IB^2}=\dfrac{1}{IH^2} \Rightarrow \dfrac{5}{4IA^2}=\dfrac{1}{8} \Rightarrow \begin{cases} IA=\sqrt{10} \\ IB=2\sqrt{10} \end{cases}$

Giả sử $A(2a-3;a)$ từ $\begin{cases} IA=\sqrt{10} \\ x_A \ge 2 \end{cases} \Rightarrow a=2$ hay $A(1;2)$. Suy ra $C(3;-4)$

Phương trình đường thẳng BD: x-3y-5=0. Kết hợp với $IB=ID=2\sqrt{10} \Rightarrow$ Tọa độ các điểm B, D là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x-3y-5=0 \\ (x-2)^2+(y+1)^2=40 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=8; y=1 \\ x=-4; y=-3 \end{array}\right.$

Vậy tọa độ các đỉnh của hình thoi ABCD là $A(1;2), B(8;1), C(3;-4), D(-4;-3)$ hoặc $A(1;2), B(-4;-3), C(3;-4), D(8;1)$.

Câu 37. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $d: x-y+1=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y-4=0$. Tìm tọa độ điểm $M \in d$ sao cho từ M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB thỏa mãn khoảng cách từ $N\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ đến đường thẳng AB là lớn nhất.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$. Ta có điểm M thuộc d nên $M(a;a+1)$.

Gọi K trung điểm của MI thì $K\left(\frac{a+1}{2};\frac{a-1}{2}\right)$

Vì tam giác $\triangle MAI$, $\triangle MBI$ vuông tại A,B nên $KA=KB=\frac{1}{2}MI$

Đường tròn (C') tâm K ,đường kính MI nên có phương trình

$$\left(x-\frac{a+1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a-1}{2}\right)^2=\frac{a^2+2a+5}{2}\Leftrightarrow x^2+y^2-(a+1)x-(a-1)y-a-2=0$$

Đường thẳng AB là giao của $(C)\cap(C')$ nên tọa độ điểm A,B thỏa mãn hệ

$$\begin{cases}x^2+y^2-2x+4y-4=0\\x^2+y^2-(a+1)x-(a-1)y-a-2=0\end{cases}\Rightarrow(1-a)x-(a+3)y-a+2=0$$

Suy ra đường thẳng AB có phương trình $(1-a)x-(a+3)y-a+2=0$.

Khoảng cách từ N đến AB là

$$d_{(N;d)}=\frac{|7-a|}{2\sqrt{(1-a)^2+(a+3)^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2-14a+49}{2a^2+4a+10}}=\frac{1}{2}\sqrt{4\left[\frac{34}{16}-\frac{(2a+3)^2}{2a^2+4a+10}\right]}\le\frac{\sqrt{34}}{4}$$

$$Maxf(a)=\frac{\sqrt{34}}{4}\Leftrightarrow a=-\frac{3}{2}$$

Vậy $M\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

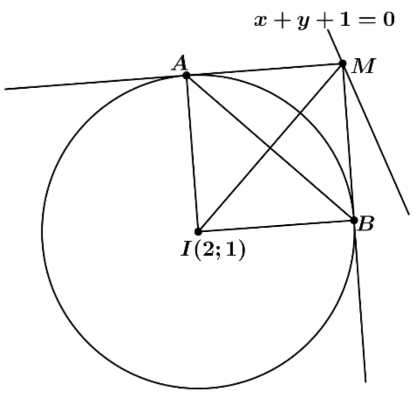
Dạng 5: Tìm diểm thỏa mãn diều kiện cho trước

Phương pháp tìm tập hợp các tâm I của đường tròn (C)

- Bước 1. Tìm giá trị của m để tồn tại tâm I .
- Bước 2. Tìm toạ độ tâm I . Giả sử: I $\begin{cases}x=f(m)\\y=g(m)\end{cases}$.
- Bước 3. Tìm mối liên hệ giữa x và y theo m ta được phương trình $F(x;y)=0$.
- Bước 4. Dựa vào điều kiện của m ở bước 1 để giới hạn miền của x hoặc y .
- Bước 5. Tập hợp điểm I là $F(x;y)=0$ cùng với phần giới hạn ở bước 4.

Câu 38. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy . Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4x-2y-1=0$ và đường thẳng $d: x+y+1=0$. Tìm những điểm M thuộc đường thẳng d sao cho từ điểm M kẻ được đến (C) hai tiếp tuyến hợp với nhau góc 90^0 .

Lời giải



M thuộc d suy ra $M(t;-1-t)$. Nếu 2 tiếp tuyến vuông góc với nhau thì $MAIB$ là hình vuông (A , B là 2 tiếp điểm). Do đó $AB = MI = IA\sqrt{2} = R\sqrt{2} = \sqrt{6}.\sqrt{2} = 2\sqrt{3}$

Ta có : $MI = \sqrt{(2-t)^2+(2+t)^2} = \sqrt{2t^2+8} = 2\sqrt{3}$

- Do đó : $2t^2+8=12 \Leftrightarrow t^2=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\sqrt{2} \to M_1\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}-1\right) \\ t=\sqrt{2} \to M_2\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}-1\right) \end{array}\right.$.

Câu 39. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2+y^2-4x-2y-4=0$. Gọi I là tâm và R là bán kính của (C). Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng $d: x+y+2=0$ sao cho từ M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB đến (C) (A, B là các tiếp điểm) thỏa mãn

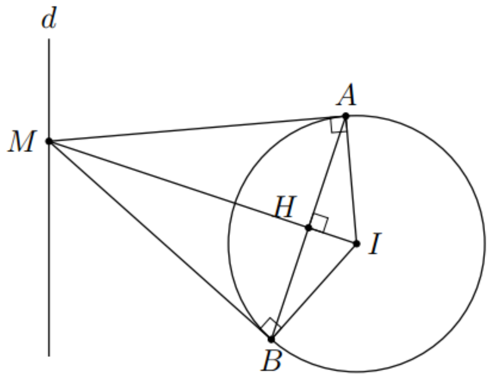
a) $AB = \dfrac{12\sqrt{34}}{17}$

b) Tứ giác $MAIB$ có diện tích bằng $6\sqrt{2}$

c) Tứ giác $MAIB$ có chu vi bằng $2\left(3+2\sqrt{2}\right)$

d) Tứ giác $MAIB$ là hình vuông.

Lời giải



a) Đường tròn (C) có tâm $I(2;1)$, bán kính $R=3$.

Gọi $H = MI \cap AB$, suy ra $AH \perp MI$ và $AH = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{6\sqrt{34}}{17}$.

Xét tam giác MAI vuông tại A có AH là đường cao nên $MI = \dfrac{AI^2}{HI} = \dfrac{AI^2}{\sqrt{AI^2-AH^2}} = \sqrt{17}$.

Do $M \in d$ nên $M(m;-2-m)$. Ta có

$$MI = \sqrt{17} \Leftrightarrow \sqrt{(2-m)^2+(m+3)^3} = \sqrt{17}$$
$$\Leftrightarrow 2m^2+2m-4=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array}\right.$$

Vậy $M(1;-3)$ hoặc $M(-2;0)$.

b) Ta có $S_{\Delta MAI} = \dfrac{1}{2}S_{MAIB} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}AM.AI = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow AM = \dfrac{6\sqrt{2}}{AI} = 2\sqrt{2}$.

Suy ra $MI = \sqrt{AM^2+AI^2} = \sqrt{17}$. Do $M \in d$ nên $M(m;-2-m)$. Ta có

$$MI=\sqrt{17}\Leftrightarrow\sqrt{(2-m)^2+(m+3)^3}=\sqrt{17}$$
$$\Leftrightarrow 2m^2+2m-4=0$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-2\end{array}\right.$$

Vậy $M(1;-3)$ hoặc $M(-2;0)$.

c) Ta có $C_{MAIB}=MA+AI+IB+BM=2(MA+AI)=2(3+2\sqrt{2})$.

Suy ra $MA+AI=3+2\sqrt{2}\Leftrightarrow MA=3+2\sqrt{2}-AI=2\sqrt{2}$.

Do đó $MI=\sqrt{AM^2+AI^2}=\sqrt{17}$.

Do $M\in d$ nên $M(m;-2-m)$. Ta có

$$MI=\sqrt{17}\Leftrightarrow\sqrt{(2-m)^2+(m+3)^3}=\sqrt{17}$$
$$\Leftrightarrow 2m^2+2m-4=0$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-2\end{array}\right.$$

Vậy $M(1;-3)$ hoặc $M(-2;0)$.

d) Tứ giác $MAIB$ là hình vuông nên $MI=IA\sqrt{2}=3\sqrt{2}$.

Do $M\in d$ nên $M(m;-2-m)$. Ta có

$$MI=3\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{(2-m)^2+(m+3)^3}=3\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow 2m^2+2m-5=0$$
$$\Leftrightarrow m=\frac{-1\pm\sqrt{11}}{2}$$

Vậy $M\left(\frac{-1+\sqrt{11}}{2};\frac{-3-\sqrt{11}}{2}\right)$ hoặc $M\left(\frac{-1-\sqrt{11}}{2};\frac{-3+\sqrt{11}}{2}\right)$.

Câu 40. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):x^2+y^2-4x-2y-4=0$. Gọi I là tâm và R là bán kính của (C). Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng $d:x+y+2=0$ sao cho từ M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB đến (C) (A,B là các tiếp điểm) thỏa mãn :

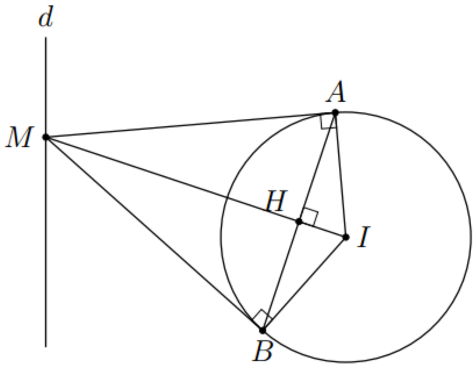
a) Tam giác MAB vuông,

b) Tam giác MAB đều,

c) Hai tiếp tuyến MA,MB tạo với nhau một góc bằng 60^0,

d) Tam giác IAB đều.

Lời giải



a) Ta có đường tròn (C) có tâm $I(2;1)$ và bán kính $R=3$.

Theo giả thiết Câu toán tam giác MAB vuông cân tại M suy ra tứ giác $MAIB$ là hình vuông nên $MI = IA\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Do $M \in d$ nên $M(m;-2-m)$. Ta có

$$MI = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(2-m)^2+(m+3)^3} = 3\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow 2m^2+2m-5=0$$
$$\Leftrightarrow m = \frac{-1\pm\sqrt{11}}{2}$$

Vậy $M\left(\frac{-1+\sqrt{11}}{2};\frac{-3-\sqrt{11}}{2}\right)$ hoặc $M\left(\frac{-1-\sqrt{11}}{2};\frac{-3+\sqrt{11}}{2}\right)$.

b) Tam giác MAB đều, suy ra $\widehat{AMI}=30^0$.

Xét tam giác MAI vuông tại A, ta có $MI = \frac{IA}{\sin\widehat{AMI}} = 2IA = 6$.

Do $M \in d$ nên $M(m;-2-m)$. Ta có

$$MI = 6 \Leftrightarrow \sqrt{(2-m)^2+(m+3)^3} = 6$$
$$\Leftrightarrow 2m^2+2m-23=0$$
$$\Leftrightarrow m = \frac{-1\pm\sqrt{47}}{2}$$

Vậy $M\left(\frac{-1+\sqrt{47}}{2};\frac{-3-\sqrt{47}}{2}\right)$ hoặc $M\left(\frac{-1-\sqrt{47}}{2};\frac{-3+\sqrt{47}}{2}\right)$.

c) Theo giả thiết ta chia Câu toán thành 2 trường hợp

• **Trường hợp 1.** $\widehat{AMB}=60^0 \Rightarrow \Delta MAB$ đều, suy ra $\widehat{AMI}=30^0$.

Xét tam giác MAI vuông tại A, ta có $MI = \frac{IA}{\sin\widehat{AMI}} = 2IA = 6$.

Do $M \in d$ nên $M(m;-2-m)$. Ta có

$$MI = 6 \Leftrightarrow \sqrt{(2-m)^2+(m+3)^3} = 6$$
$$\Leftrightarrow 2m^2+2m-23=0$$
$$\Leftrightarrow m = \frac{-1\pm\sqrt{47}}{2}$$

Vậy $M\left(\frac{-1+\sqrt{47}}{2};\frac{-3-\sqrt{47}}{2}\right)$ hoặc $M\left(\frac{-1-\sqrt{47}}{2};\frac{-3+\sqrt{47}}{2}\right)$.

• **Trường hợp 2.** $\widehat{AMB}=120^0$, suy ra $\widehat{AMI}=60^0$.

Xét tam giác MAI vuông tại A, ta có $MI = \dfrac{IA}{\sin\widehat{AMI}} = \dfrac{2IA}{3} = 2\sqrt{3}$.

Do $M \in d$ nên $M(m;-2-m)$. Ta có

$MI = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{(2-m)^2 + (m+3)^3} = 2\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 2m^2 + 2m + 1 = 0$ (vô nghiệm)

Vậy không tồn tại điểm M thỏa mãn yêu cầu Câu toán.

d) Tam giác IAB đều, suy ra $\widehat{AIM} = 30^0$.

Xét tam giác MAI vuông tại A, ta có $MI = \dfrac{IA}{\cos\widehat{AIM}} = \dfrac{2IA}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

Do $M \in d$ nên $M(m;-2-m)$. Ta có

$MI = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{(2-m)^2 + (m+3)^3} = 2\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 2m^2 + 2m + 1 = 0$ (vô nghiệm)

Vậy không tồn tại điểm M thỏa mãn yêu cầu Câu toán.

Câu 41. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x+2)^2 + (y-3)^2 = 5$ và đường thẳng $d: x - 5y - 4 = 0$. Tìm trên (C) và trên d điểm N sao cho

a) Hai điểm M, N đối xứng nhau qua điểm $A(-7;-1)$.

b) Hai điểm M, N đối xứng nhau qua Ox.

Lời giải

a) Do $N \in d$ nên $N(5t+4;\mathrm{t})$. Điểm M đối xứng với N qua A, suy ra $M(-18-5t;-2-t)$. Mặt khác $M \in (C)$, nên

$(-18-5t+2)^2 + (-2-t-3)^2 = 5$

$\Leftrightarrow 26t^2 + 170t + 276 = 0$

$\Leftrightarrow t = -3$ hoặc $t = -\dfrac{46}{13}$.

Vậy có hai cặp điểm cần tìm là $M(-3;1), N(-11;-3)$ hoặc $M\left(-\dfrac{4}{13};\dfrac{20}{13}\right), N\left(-\dfrac{178}{13};-\dfrac{46}{13}\right)$.

b) Do $N \in d$ nên $N(5t+4;t)$. Điểm M đối xứng với N qua Ox nên $M(5t+4;-t)$.

Mặt khác, $M \in (C)$ nên

$(5t+4+2)^2 + (-t-3)^2 = 5$

$\Leftrightarrow 26t^2 + 66t + 40 = 0$

$\Leftrightarrow t = -1$ hoặc $t = -\dfrac{20}{13}$.

Vậy có hai cặp điểm cần tìm là : $M(-1;1), N(-1;-1)$ hoặc $M\left(-\dfrac{48}{13};\dfrac{20}{13}\right), N\left(-\dfrac{48}{13};-\dfrac{20}{13}\right)$.

Câu 42. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-2)^2 + (y-2)^2 = 5$ và đường thẳng $d: 2x + y + 4 = 0$. Tìm trên (C) điểm M và trên d điểm N sao cho

a) MN có độ dài nhỏ nhất.

b) MN có độ dài lớn nhất.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(2;2)$, bán kính $R=\sqrt{5}$. Ta có

$d(I;d)=\dfrac{|2+4+4|}{\sqrt{4+1}}=2\sqrt{5}>R$.

Do đó d không cắt (C).

Gọi M_1,M_2 là đường kính của đường tròn (C) và vuông góc với d. Ta thấy với M là một điểm bất kỳ thuộc (C) thì

$\min\{d(M_1,d);d(M_2,d)\}\le d(M,d)\le \max\{d(M_1,d);d(M_2,d)\}$.

Dấu bằng xảy ra khi $M\equiv M_1$ hoặc $M\equiv M_2$.

Đường thẳng M_1M_2 đi qua tâm I và vuông góc với d nên có phương trình $x-2y+2=0$.

Tọa độ điểm M_1,M_2 thỏa mãn hệ $\begin{cases}x-2y+2=0\\(x-2)^2+(y-2)^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}$.

Suy ra $M_1(0;1),M_2(4;3)$. Ta có $d(M_1,d)=\sqrt{5}$ và $d(M_2,d)=3\sqrt{5}$.

Tọa độ điểm M cần tìm là hình chiếu vuông góc của tâm I trên d.

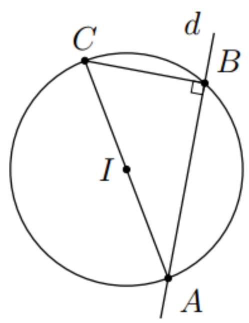
Do đó tọa độ điểm N là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}2x+y+4=0\\x-2y+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=0\end{cases}$.

a) Với $M_1(0;1)$ và $N(-2;0)$ thỏa mãn yêu cầu Câu toán là nhỏ nhất.

b) Với $M_2(4;3)$ và $N(-2;0)$ thỏa mãn yêu cầu Câu toán là lớn nhất.

Câu 43. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x-5y-2=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-4y-8=0$. Xác định tọa độ các giao điểm A,B của đường tròn (C) và đường thẳng d, biết A có hoành độ dương. Tìm tọa độ điểm C thuộc (C) sao cho tam giác ABC vuông ở B.

Lời giải



Đường tròn (C) có tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=\sqrt{13}$.

Tọa độ giao điểm của A và B là nghiệm của hệ

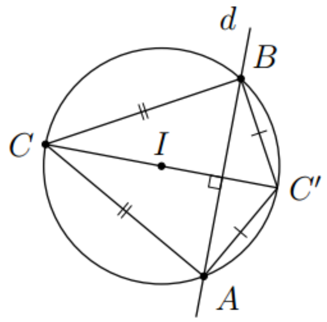
$$\begin{cases}x^2+y^2+2x-4y-8=0\\x-5y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}\\\begin{cases}x=-3\\y=-1\end{cases}\end{array}\right.$$

Do A có hoành độ dương nên ta chọn $A(2;0),B(-3;-1)$.

Theo giả thiết, ta có $\widehat{ABC}=90^0$ nên AC là đường kính của đường tròn, tức điểm C đối xứng với điểm A qua tâm I, suy ra $C(-4;4)$.

Câu 44. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: 3x-y-7=0$ và đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=10$. Chứng minh (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Tìm tọa độ điểm C thuộc (C) sao cho tam giác ABC cân tại C

Lời giải



Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$, bán kính $R=\sqrt{10}$. Ta có

$d(I,d)=\dfrac{|3-2-7|}{\sqrt{9+1}}=\dfrac{6}{\sqrt{10}}<R$.

Điều đó chứng tỏ d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B.

Vì AB là dây cung của (C) nên đường trung trực Δ của đoạn thẳng AB qua tâm I và vuông góc với d nên $\Delta: x+3y-7=0$.

Tam giác ABC cân tại C nên C thuộc Δ. Hơn nữa C thuộc (C) nên tọa độ điểm C thỏa mãn

hệ $\begin{cases} x+3y-7=0 \\ (x-1)^2+(y-2)^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy $C(-2;3)$ hoặc $C(4;1)$ thỏa mãn yêu cầu Câu toán.

Câu 45. Trong mặt phăng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+4x+4y+6=0$ và đường thẳng $d: x+my-2m+3=0$. Gọi I làm tâm của (C). Tìm m để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn :

a) AB lớn nhất.

b) $AB=2$.

c) Diện tích ΔIAB lớn nhất.

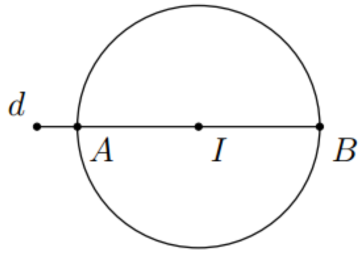
d) Diện tích ΔIAB bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và AB lớn nhất.

Lời giải

a) Đường tròn (C) có tâm $I(-2;-2)$, bán kính $R=\sqrt{2}$.

Dây cung AB lớn nhất khi và chỉ khi AB là đường kính của (C) nghĩa là đường thẳng d đi qua tâm I nên $-2-2m-2m+3=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{4}$.

Vậy $m=\dfrac{1}{4}$ là giá trị cần tìm thỏa yêu cầu Câu toán.



$$d\left(I,d\right)=d\left(I,AB\right)=IH=\sqrt{R^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=1$$

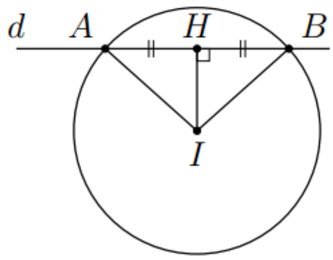
b) Gọi H là trung điểm AB. Khi đó $IH\perp AB$ nên $\Leftrightarrow \frac{\left|-2-2m-2m+3\right|}{\sqrt{1+m^2}}=1$

$\Leftrightarrow \left|1-4m\right|=\sqrt{1+m^2}$

$\Leftrightarrow 15m^2-8m=0$

$\Leftrightarrow m=0$ hoặc $m=\frac{8}{15}$.

Vậy $m=0$ hoặc $m=\frac{8}{15}$ là các giá trị cần tìm thỏa mãn yêu cầu Câu toán.



c) d cắt $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt khi $d\left(I,d\right)<R$

$\Leftrightarrow \frac{\left|2-2m-2m+3\right|}{\sqrt{1+m^2}}<\sqrt{2}\Leftrightarrow \left|1-4m\right|<\sqrt{2+2m^2}$

$\Leftrightarrow 14m^2-8m-1<0\Leftrightarrow \frac{4-\sqrt{30}}{14}<m<\frac{4+\sqrt{30}}{14}$.

Gọi H là trung điểm AB, suy ra $IH\perp AB$.

Ta có $S_{\Delta IAB}=\frac{1}{2}IA.IB.\sin\widehat{AIB}=\frac{1}{2}.R^2.\sin\widehat{AIB}=\sin\widehat{AIB}$.

Do đó $S_{\Delta IAB}$ lớn nhất khi $\sin\widehat{AIB}$ lớn nhất $\Leftrightarrow \sin\widehat{AIB}=1\Leftrightarrow \widehat{AIB}=90^0$

Khi đó tam giác IAB vuông cân tại I nên $IH=\frac{IA}{\sqrt{2}}=1\Leftrightarrow d\left(I,d\right)=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\frac{8}{15} \end{array}\right.$

d) Để d cắt $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt khi $d\left(I,d\right)<R\Leftrightarrow \frac{4-\sqrt{30}}{14}<m<\frac{4+\sqrt{30}}{14}$.

Gọi H là trung điểm AB, suy ra $IH\perp AB$. Theo giả thiết Câu toán, ta có

$\frac{\sqrt{3}}{2}=S_{\Delta IAB}=\frac{1}{2}IA.IB.\sin\widehat{AIB}=\frac{1}{2}.R^2.\sin\widehat{AIB}=\sin\widehat{AIB}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \widehat{AIB}=60^0 \\ \widehat{AIB}=120^0 \end{array}\right.$

Mặt khác, theo giả thiết AB lớn nhất nên $\widehat{AIB}=120^0$. Suy ra $\widehat{IAH}=30^0$.

Trong tam giác vuông IAH, ta có $IH = IA.\sin\widehat{IAH} = \sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ nên

$$\Leftrightarrow d(I,d) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{|-2-2m-2m+3|}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}|1-4m| = \sqrt{1+m^2} \Leftrightarrow 31m^2 - 16m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{8 \pm \sqrt{33}}{31}$$

Đối chiếu điều kiện để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt ta được $m = \frac{8 \pm \sqrt{33}}{31}$.

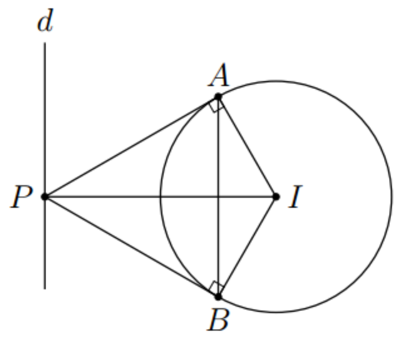
Câu 46. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+2)^2=9$ và đường thẳng $d: 3x-4y+m=0$. Tìm m để trên đường thẳng d có duy nhất một điểm P mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến PA, PB tới (C) (A, B là các tiếp điểm) sao cho :

a) Tam giác PAB đều.

b) Tam giác PAB vuông.

c) Góc giữa hai tiếp tuyến PA, PB bằng 60^0.

Lời giải



a) Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=3$.

Tam giác PAB đều nên $\widehat{APB} = 60^0$, suy ra $\widehat{API} = 30^0$.
Xét tam giác API vuông tại A, ta có:

$$IP = \frac{IA}{\sin\widehat{API}} = 2IA = 6.$$

Do đó P thuộc đường tròn (C') có tâm I, bán kính $R' = IP = 6$.

Mặt khác, để trên d có duy nhất một điểm P thỏa yêu cầu Câu toán thì d tiếp xúc với (C') nên

$$d(I,d) = R' \Leftrightarrow \frac{|3+8+m|}{\sqrt{9+16}} = 6 \Leftrightarrow m = 19 \text{ hoặc } m = -41.$$

Vậy $m=-19$ hoặc $m=-41$ là giá trị cần tìm thỏa yêu cầu Câu toán.

b) Tam giác PAB vuông, suy ra $\widehat{APB} = 90^0$. Do đó, tứ giác $PAIB$ là hình vuông, suy ra $IP = IA\sqrt{2} = R\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Do đó P thuộc đường tròn (C') có tâm I, bán kính $R' = IP = 3\sqrt{2}$.

Mặt khác, để trên d có duy nhất một điểm P thỏa yêu cầu bái toán thì d tiếp xúc với (C') nên

$$d(I,d) = R' \Leftrightarrow \frac{|3+8+m|}{\sqrt{9+16}} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow m = -11 \pm 15\sqrt{2}.$$

Vậy $m = -11 \pm 15\sqrt{2}$ là giá trị cần tìm thỏa yêu cầu Câu toán.

c) Trường hợp 1: $\widehat{APB}=60^0$ (đã làm ở trên)

Trường hợp 2: $\widehat{APB}=120^0$, suy ra $\widehat{API}=60^0$.

Xét tam giác API vuông tại A, ta có $IP=\dfrac{IA}{\sin\widehat{API}}=\dfrac{2IA}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$.

Do đó P thuộc đường tròn (C') có tâm I, bán kính $R'=IP=2\sqrt{3}$.

Mặt khác, để trên d có duy nhất một điểm P thỏa yêu cầu Câu toán thì d tiếp xúc với (C') nên

$d(I,d)=R'\Leftrightarrow \dfrac{|3+8+m|}{\sqrt{9+16}}=2\sqrt{3}\Leftrightarrow m=-11\pm 10\sqrt{3}$.

Vậy $m=19$ hoặc $m=-41$ hoặc $m=-11\pm 10\sqrt{3}$ là giá trị cần tìm thỏa yêu cầu Câu toán.

Dạng 6. Tìm quỹ tích tâm đường tròn

Phương pháp:

Phương pháp tìm tập hợp các tâm I của đường tròn (C)

- Bước 1. Tìm giá trị của m để tồn tại tâm I.
- Bước 2. Tìm toạ độ tâm I. Giả sử: I $\begin{cases} x=f(m)\\ y=g(m)\end{cases}$.
- Bước 3. Tìm mối liên hệ giữa x và y theo m ta được phương trình $F(x;y)=0$.
- Bước 4. Dựa vào điều kiện của m ở bước 1 để giới hạn miền của x hoặc y.
- Bước 5. Tập hợp điểm I là $F(x;y)=0$ cùng với phần giới hạn ở bước 4.

Câu 47. Trong mặt phẳng Oxy, cho phương trình đường cong (C) có phương trình:

$x^2+y^2-2mx-4(m+1)y+3m+14=0.$

a) Tìm tham số m để (C) là đường tròn.

b) Tìm quỹ tích điểm I là tâm của đường tròn (C).

Lời giải

a) Tìm tham số m để (C) là đường tròn.

Điều kiện để (C) là đường tròn : $m^2+4(m+1)^2-3m-14>0\Leftrightarrow 5m^2+5m-10>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>1\\ m<-2\end{array}\right.$ (1)

b) Tìm quỹ tích điểm I là tâm của đường tròn (C).

Tâm $I(m;2m+2)\Rightarrow \begin{cases} x_I=m\\ y_I=2m+2\end{cases}\Leftrightarrow y_I=2x_I+2$.

Theo điều kiện (1) (câu a), ta được quỹ tích tâm I của (C) là một phần đường thẳng có phương trình : $y=2x+2$ ứng với $x<-2; x>1$.

Câu 48. Trong mặt phẳng Oxy, tìm quỹ tích điểm I là tâm của đường tròn (C), biết (C) tiếp xúc với đường thẳng $d: 6x-8y+15=0$ và có bán kính $R=3$.

Lời giải

Gọi tâm $I(x_I;y_I)$ của đường tròn (C).

(C) tiếp xúc với đường thẳng $d: 6x-8y+15=0$ và có bán kính $R=3$, nên:

$$d(I,d)=R\Leftrightarrow\frac{|6x_I-8y_I+15|}{10}=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}6x_I-8y_I-15=0\\6x_I-8y_I+45=0\end{array}\right..$$

Quỹ tích tâm I của đường tròn (C) là hai đường thẳng song song có phương trình :
$6x-8y-15=0$ và $6x-8y+45=0$.

Câu 49. Trong mặt phẳng Oxy, tìm quỹ tích điểm I là tâm của đường tròn (C) có bán kính $R=2$, biết (C) tiếp xúc tiếp xúc với đường tròn $(C'):x^2+y^2-4x+6y-3=0$.

Lời giải

Gọi tâm $I(x_I;y_I)$ của đường tròn (C).

(C) tiếp xúc với $(C')\begin{cases}I'(2;-3)\\R'=4\end{cases}$ và có bán kính $R=2$, nên:

$$II'=R+R'\Leftrightarrow(x_I-2)^2+(y_I+3)^2=36.$$

Vậy quỹ tích tâm I của đường tròn (C) là đường tròn có phương trình :

$$(x-2)^2+(y+3)^2=36$$

Câu 50. Trong mặt phẳng Oxy, tìm quỹ tích điểm I là tâm của đường tròn (C), biết (C) tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1:2x+3y-6=0,\quad d_2:3x-2y+9=0$.

Lời giải

Gọi tâm $I(x_I;y_I)$ của đường tròn (C).

(C) tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1:2x+3y-6=0,\quad d_2:3x-2y+9=0$, nên:

$$d(I,d_1)=d(I,d_2)\Leftrightarrow\frac{|2x_I-3y_I+6|}{\sqrt{13}}=\frac{|3x_I-2y_I+9|}{\sqrt{13}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_I+y_I+3=0\\x_I-y_I+3=0\end{array}\right..$$

Quỹ tích tâm I của đường tròn (C) là hai đường thẳng vuông góc có phương trình :
$x+y+3=0$ và $x-y+3=0$.

Câu 51. Trong mặt phẳng Oxy, tìm quỹ tích điểm I là tâm của đường tròn (C), biết (C) tiếp xúc với Ox và cắt Oy tại điểm $A(0;1)$.

Lời giải

Gọi tâm $I(x_I;y_I)$ của đường tròn (C).

(C) tiếp xúc với Ox và cắt Oy tại điểm $A(0;1)$ nên:

$$d(I,\mathrm{Ox})=AI\Leftrightarrow|y_I|=\sqrt{x_I^2+(y_I-1)^2}\Leftrightarrow y_I=\frac{1}{2}x_I^2+\frac{1}{2}.$$

Quỹ tích tâm I của đường tròn (C) là đường Parabol có phương trình : $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$.

Câu 52. Cho $(C): x^2+y^2-2mx-2m^2y-1=0$. Tìm quỹ tích tâm I của đường tròn (C).

Lời giải

(C) có dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ với $a=m; b=m^2; c=-1$

là phương trình đường tròn $\Leftrightarrow a^2+b^2-c>0 \Leftrightarrow m^2+\left(m^2\right)^2+1>0$

$\Leftrightarrow m^4+m^2+1>0$ (Lđ $\forall m$)

Khi đó, (C) có tâm $I\begin{cases} x_I=m \\ y_I=m^2 \end{cases} \Rightarrow y_I=x_I^2\ (*)$ .Tọa độ tâm I thỏa mãn $(*)$.

Vậy I nằm trên Parabol có phương trình $y=x^2$.

Câu 53. Tìm tập hợp tâm I của đường tròn (C) biết (C) tiếp xúc với 2 đường thẳng $\Delta_1: x+2y-3=0$ và $\Delta_2: x+2y+6=0$.

Lời giải

(C) có tâm $I(x_I; y_I)$. Theo giả thiết $\mathrm{d}(I;\Delta_1)=\mathrm{d}(I;\Delta_2)$

$\Leftrightarrow \dfrac{|x_I-2y_I-3|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|x_I-2y_I+6|}{\sqrt{5}}$

$\Leftrightarrow |x_I-2y_I-3|=|x_I-2y_I+6|$

$\Leftrightarrow 2x_I-4y_I-9=0(*)$. Tọa độ tâm $I(x_I; y_I)$ thỏa mãn $(*)$

Vậy tâm I nằm trên đường thẳng $2x-4y-9=0$.

Câu 54. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2(m-1)x-4my+3m+11=0$. Tìm quỹ tích tâm I của đường tròn.

Lời giải

(C) có dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ với $a=m-1; b=2m; c=3m+11$

là phương trình đường tròn $\Leftrightarrow a^2+b^2-c>0 \Leftrightarrow (m-1)^2+(2m)^2-(3m+11)>0$

$\Leftrightarrow 5m^2-5m-10>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-1 \end{array}\right.$

Khi đó, (C) có tâm $I\begin{cases} x_I=m-1 \\ y_I=2m \end{cases} \Rightarrow 2x_I-y_I+2=0(*)$ .Tọa độ tâm I thỏa mãn $(*)$.

Với điều kiện $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<-2 \end{array}\right.$

Vậy I nằm trên đường thẳng $2x-y+2=0$ với $x>1$ hoặc $x<-2$

Câu 55. Tìm tập hợp tâm I của đường tròn (C) biết (C) tiếp xúc ngoài với đường tròn $(C'): x^2+y^2-4x+6y-3=0$ và có bán kính $R=1$.

Lời giải

(C') có tâm $I'(2;-3)$ và bán kính $R'=4$

(C) có tâm $I(x_I; y_I)$ và bán kính $R=1$

Theo giả thiết ta có $II'=R+R' \Leftrightarrow II'=5 \Leftrightarrow II'^2=25$

$\Leftrightarrow (x_I-2)^2+(y_I+3)^2=25\ (*)$

Tọa độ tâm $I(x_I; y_I)$ thỏa mãn $(*)$

Vậy quỹ tích tâm I đường tròn $(x-2)^2+(y+3)^2=25$.

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Nhận dạng phương trình đường tròn

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2+y^2-2(m+2)x+4my+19m-6=0$ là phương trình đường tròn.

A. $1<m<2$. **B.** $m<-2$ hoặc $m>-1$.

C. $m<-2$ hoặc $m>1$. **D.** $m<1$ hoặc $m>2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $x^2+y^2-2(m+2)x+4my+19m-6=0 \quad (1)$

$\Rightarrow a=m+2; b=-2m; c=19m-6.$

Phương trình (1) là phương trình đường tròn $\Leftrightarrow a^2+b^2-c>0$

$\Leftrightarrow 5m^2-15m+10>0 \Leftrightarrow m<1$ hoặc $m>2$.

Câu 2. Trong mặt phẳng Oxy, phương trình nào sau đây là phương trình của đường tròn?

A. $x^2+2y^2-4x-8y+1=0$. **B.** $x^2+y^2-4x+6y-12=0$.

C. $x^2+y^2-2x-8y+20=0$. **D.** $4x^2+y^2-10x-6y-2=0$.

Lời giải

Chọn B

Để là phương trình đường tròn thì điều kiện cần là hệ số của x^2 và y^2 phải bằng nhau nên loại được đáp án A và **D.**

Ta có: $x^2+y^2-2x-8y+20=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-4)^2+3=0$ vô lý.

Ta có: $x^2+y^2-4x+6y-12=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=25$ là phương trình đường tròn tâm $I(2;-3)$, bán kính $R=5$.

Câu 3. Phương trình nào sau đây là phương trình của đường tròn?

A. $2x^2+y^2-6x-6y-8=0$. **B.** $x^2+2y^2-4x-8y-12=0$.

C. $x^2+y^2-2x-8y+18=0$. **D.** $2x^2+2y^2-4x+6y-12=0$.

Lời giải

Chọn D

Biết rằng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ là phương trình của một đường tròn khi và chỉ khi $a^2+b^2-c>0$.

Ta thấy phương trình trong phương án A và B có hệ số của x^2, y^2 không bằng nhau nên đây không phải là phương trình đường tròn.

Với phương án C có $a^2+b^2-c=1+16-18<0$ nên đây không phải là phương trình đường tròn.

Vậy ta chọn đáp án D.

Câu 4. Phương trình nào sau đây là phương trình của một đường tròn?

A. $x^2+y^2-4xy+2x+8y-3=0$. **B.** $x^2+2y^2-4x+5y-1=0$.

C. $x^2+y^2-14x+2y+2018=0$. **D.** $x^2+y^2-4x+5y+2=0$.

Lời giải

Chọn D

Phương án A: có tích xy nên không phải là phương trình đường tròn.

Phương án B: có hệ số bậc hai không bằng nhau nên không phải là phương trình đường tròn.

Phương án C: ta có $x^2+y^2-14x+2y+2018=0 \Leftrightarrow (x-7)^2+(y+1)^2+1968=0$ không tồn tại x, y nên cũng không phải phương trình đường tròn.

Còn lại, chọn **D.**

Câu 5. Cho phương trình $x^2+y^2-2mx-4(m-2)y+6-m=0\,(1)$. Điều kiện của m để (1) là phương trình của đường tròn.

A. $m=2$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>2 \end{array}\right.$. **C.** $1<m<2$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=2 \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn B

$x^2+y^2-2mx-4(m-2)y+6-m=0\,(1)$ là phương trình của đường tròn khi và chỉ khi

$(m)^2+[2(m-2)]^2-(6-m)>0 \Leftrightarrow 5m^2-15m+10>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>2 \end{array}\right.$.

Dạng 2. Tìm tọa độ tâm, bán kính đường tròn

Câu 6. Trong mặt phẳng Oxy, đường tròn $(C): x^2+y^2+4x+6y-12=0$ có tâm là.

A. $I(-2;-3)$. **B.** $I(2;3)$. **C.** $I(4;6)$. **D.** $I(-4;-6)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có phương trình đường tròn là: $(x+2)^2+(y+3)^2=25$.

Vậy tâm đường tròn là: $I(-2;-3)$.

Câu 7. Đường tròn $x^2+y^2-10y-24=0$ có bán kính bằng bao nhiêu?

A. 49. **B.** 7. **C.** 1. **D.** $\sqrt{29}$.

Lời giải

Chọn B

Đường tròn $x^2+y^2-10y-24=0$ có tâm $I(0;5)$, bán kính $R=\sqrt{0^2+5^2-(-24)}=7$.

Câu 8. Xác định tâm và bán kính của đường tròn $(C): (x+1)^2+(y-2)^2=9$.

A. Tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=3$. **B.** Tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=9$.

C. Tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=3$. **D.** Tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=9$.

Lời giải

Chọn A

Câu 9. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn (C): $x^2+y^2-2x+4y+1=0$.

A. $I(-1;2); R=4$. **B.** $I(1;-2); R=2$. **C.** $I(-1;2); R=\sqrt{5}$. **D.** $I(1;-2); R=4$.

Lời giải

Chọn B

(C) có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=\sqrt{1^2+(-2)^2-1}=2$.

Câu 10. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-2)^2+(y+3)^2=9$. Đường tròn có tâm và bán kính là

A. $I(2;3)$, $R=9$. **B.** $I(2;-3)$, $R=3$. **C.** $I(-3;2)$, $R=3$. **D.** $I(-2;3)$, $R=3$.

Lời giải

Chọn B

Đường tròn (C) có tâm $I(2;-3)$ và bán kính $R=3$.

Câu 11. Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của đường tròn $(C):(x+2)^2+(y-5)^2=9$.

A. $I(-2;5)$, $R=81$.. **B.** $I(2;-5)$, $R=9$.. **C.** $I(2;-5)$, $R=3$.. **D.** $I(-2;5)$, $R=3$.

Lời giải

Chọn D

Theo bài ra ta có tọa độ tâm $I(-2;5)$ và bán kính $R=3$.

Câu 12. Đường tròn $(C):x^2+y^2-2x+4y-3=0$ có tâm I, bán kính R là

A. $I(-1;2),R=\sqrt{2}$. **B.** $I(-1;2),R=2\sqrt{2}$. **C.** $I(1;-2),R=\sqrt{2}$. **D.** $I(1;-2),R=2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=\sqrt{1^2+(-2)^2-(-3)}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

Dạng 3. Viết phương trình đường tròn

Câu 13. Phương trình đường tròn có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R=5$ là

A. $x^2+y^2-2x-4y-20=0$. **B.** $x^2+y^2+2x+4y+20=0$.

C. $x^2+y^2+2x+4y-20=0$. **D.** $x^2+y^2-2x-4y+20=0$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình đường tròn có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R=5$ là $(x-1)^2+(y-2)^2=5^2$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-4y+4=25 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x-4y-20=0$.

Câu 14. Đường tròn tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=3$ có phương trình là

A. $x^2+y^2+2x+4y-4=0$.

B. $x^2+y^2-2x-4y-4=0$.

C. $x^2+y^2+2x-4y-4=0$.

D. $x^2+y^2-2x+4y-4=0$.

Lời giải

Chọn C

Đường tròn tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=3$ có phương trình là $(x+1)^2+(y-2)^2=9 \Leftrightarrow x^2+y^2+2x-4y-4=0$.

Câu 15. Phương trình nào sau đây là phương trình của đường tròn tâm $I(-1;2)$, bán kính bằng 3?

A. $(x-1)^2+(y+2)^2=9$. **B.** $(x+1)^2+(y+2)^2=9$.

C. $(x-1)^2+(y-2)^2=9$. **D.** $(x+1)^2+(y-2)^2=9$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình đường tròn tâm $I(-1;2)$ và bán kính $R=3$ là: $(x+1)^2+(y-2)^2=9$.

Câu 16. Đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(1;1)$, $B(5;3)$ và có tâm I thuộc trục hoành có phương trình là

A. $(x+4)^2+y^2=10$. **B.** $(x-4)^2+y^2=10$.

C. $(x-4)^2+y^2=\sqrt{10}$. **D.** $(x+4)^2+y^2=\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $I(x;0)\in Ox$; $IA^2=IB^2$ $\Leftrightarrow (1-x)^2+1^2=(5-x)^2+3^2$ $\Leftrightarrow x^2-2x+1+1=x^2-10x+25+9$

$\Leftrightarrow x=4$. Vậy tâm đường tròn là $I(4;0)$ và bán kính $R=IA=\sqrt{(1-4)^2+1^2}=\sqrt{10}$.

Phương trình đường tròn (C) có dạng $(x-4)^2+y^2=10$.

Câu 17. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, tìm tọa độ tâm I của đường tròn đi qua ba điểm $A(0;4)$, $B(2;4)$, $C(2;0)$.

A. $I(1;1)$. **B.** $I(0;0)$. **C.** $I(1;2)$. **D.** $I(1;0)$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử phương trình đường tròn đi qua 3 điểm A,B,C có dạng $(C):x^2+y^2+2ax+2by+c=0$

Thay tọa độ 3 điểm $A(0;4)$, $B(2;4)$, $C(2;0)$ ta được:

$$\begin{cases}8b+c=-16\\4a+8b+c=-20\\4a+c=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-2\\c=0\end{cases}\Rightarrow(C):x^2+y^2-2x-4y=0.$$

Vậy (C) có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$.

Câu 18. Cho tam giác ABC có $A(1;-1),B(3;2),C(5;-5)$. Toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

A. $\left(\frac{47}{10};-\frac{13}{10}\right)$. **B.** $\left(\frac{47}{10};\frac{13}{10}\right)$. **C.** $\left(-\frac{47}{10};-\frac{13}{10}\right)$. **D.** $\left(-\frac{47}{10};\frac{13}{10}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $I(x;\,y)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có: $\begin{cases}AI^2=BI^2\\AI^2=CI^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2=(x-3)^2+(y-2)^2\\(x-1)^2+(y+1)^2=(x-5)^2+(y+5)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+6y=11\\8x-8y=48\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{47}{10}\\y=-\frac{13}{10}\end{cases}$.

$\Rightarrow I\left(\frac{47}{10};-\frac{13}{10}\right)$.

Câu 19. Trong mặt phẳng Oxy, đường tròn đi qua ba điểm $A(1;2)$, $B(5;2)$, $C(1;-3)$ có phương trình là.

A. $x^2+y^2+25x+19y-49=0$. **B.** $2x^2+y^2-6x+y-3=0$.

C. $x^2+y^2-6x+y-1=0$. **D.** $x^2+y^2-6x+xy-1=0$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình đường tròn có dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$. Đường tròn này qua A,B,C nên

$$\begin{cases}1+4-2a-4b+c=0\\25+4-10a-4b+c=0\\1+9-2a+6b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=-\dfrac{1}{2}\\c=-1\end{cases}.$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $x^2+y^2-6x+y-1=0$.

Câu 20. Lập phương trình đường tròn đi qua hai điểm $A(3;0),B(0;2)$ và có tâm thuộc đường thẳng $d:x+y=0$.

A. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$. **B.** $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$.

C. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$. **D.** $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$A(3;0)$, $B(0;2)$, $d:x+y=0$.

Gọi I là tâm đường tròn vậy $I(x;-x)$ vì $I\in d$.

$IA^2=IB^2\Leftrightarrow(3-x)^2+x^2=x^2+(2+x)^2\Leftrightarrow-6x+9=4x+4\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$. Vậy $I\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

$IA=\sqrt{\left(3-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{26}}{2}$ là bán kính đường tròn.

Phương trình đường tròn cần lập là: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$.

Câu 21. Cho tam giác ABC biết $H(3;2)$, $G\left(\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right)$ lần lượt là trực tâm và trọng tâm của tam giác, đường thẳng BC có phương trình $x+2y-2=0$. Tìm phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC?

A. $(x+1)^2+(y+1)^2=20$.

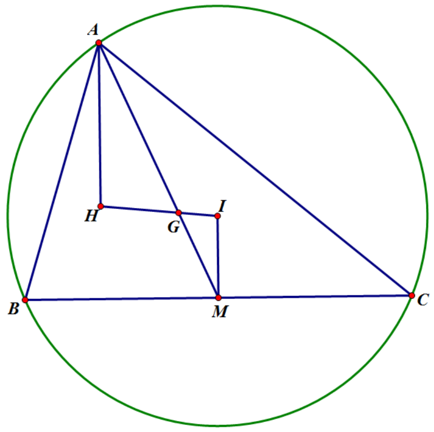
B. $(x-2)^2+(y+4)^2=20$.

C. $(x-1)^2+(y+3)^2=1$.

D. $(x-1)^2+(y-3)^2=25$.

Lời giải

Chọn D



*) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

$$\Rightarrow \overrightarrow{HI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{HG} \Rightarrow \begin{cases} x_I-3=\frac{3}{2}\left(\frac{5}{3}-3\right) \\ y_I-2=\frac{3}{2}\left(\frac{8}{3}-2\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_I=1 \\ y_I=3 \end{cases}.$$

(Do đó ta có thể chọn đáp án D luôn mà không cần tính bán kính).

*) Gọi M là trung điểm của BC $\Rightarrow IM \perp BC$ $\Rightarrow IM: 2x-y+1=0$.

$$M=IM\cap BC \Rightarrow \begin{cases} 2x-y=-1 \\ x+2y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow M(0;1).$$

Lại có: $\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MG}$ $\Rightarrow \begin{cases} x_A=3.\frac{5}{3} \\ y_A-1=3.\left(\frac{8}{3}-1\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A=5 \\ y_A=6 \end{cases}$.

Suy ra: bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R=IA=5$.

Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $(x-1)^2+(y-3)^2=25$.

Câu 22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm H, trọng tâm $G(-1;3)$. Gọi K,M,N lần lượt là trung điểm của AH, AB, AC. Tìm phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết đường tròn ngoại tiếp tam giác KMN là $(C): x^2+y^2+4x-4y-17=0$.

A. $(x-1)^2+(y-5)^2=100$.

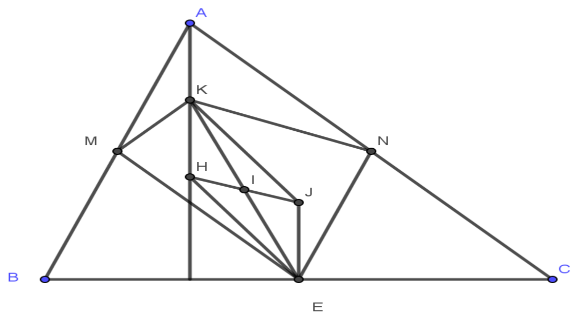
B. $(x+1)^2+(y-5)^2=100$.

C. $(x-1)^2+(y+5)^2=100$.

D. $(x+1)^2+(y+5)^2=100$.

Lời giải

Chọn A



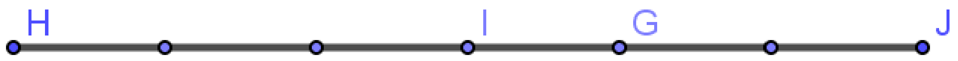
Gọi E là trung điểm BC, J là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Ta có $\begin{cases} MK \parallel BH \\ ME \parallel AC \\ BH \perp AC \end{cases} \Rightarrow MK \perp ME \quad (1)$, $\begin{cases} KN \parallel CH \\ NE \parallel AB \\ CH \perp AB \end{cases} \Rightarrow KN \perp NE(2)$

Từ $(1),(2) \Rightarrow KMEN$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính KE.

Đường tròn $(C): x^2+y^2+4x-4y-17=0$ có tâm $I(-2;2)$ bán kính $r=5 \Rightarrow I$ là trung điểm KE.

$KHEJ$ là hình bình hành $\Rightarrow I$ là trung điểm JH



Ta có: $\overrightarrow{IJ} = 3\overrightarrow{IG} \Rightarrow \begin{cases} x_J+2=3(-1+2) \\ y_J-2=3(3-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_J=1 \\ y_J=5 \end{cases} \Rightarrow J(1;5)$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC là $R = JA = 2IK = 2r = 10$.

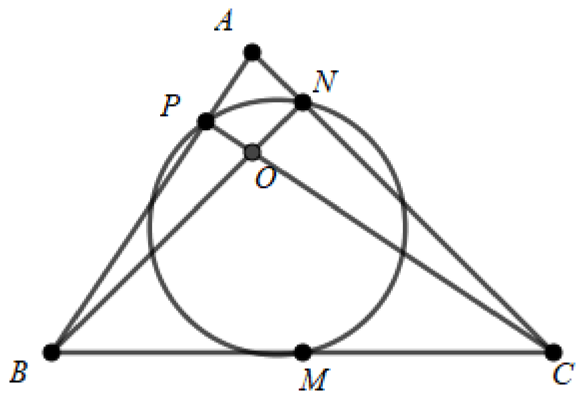
Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC là: $(x-1)^2+(y-5)^2=100$.

Câu 23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm O. Gọi M là trung điểm của BC; N, P lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C. Đường tròn đi qua ba điểm M, N, P có phương trình là $(T): (x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$. Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là:

A. $(x-1)^2+(y+2)^2=25$. **B.** $x^2+(y-1)^2=25$.

C. $x^2+(y-1)^2=50$. **D.** $(x-2)^2+(y+1)^2=25$.

Lời giải



Ta có M là trung điểm của BC; N, P lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C. Đường tròn đi qua ba điểm M, N, P là đường tròn Euler. Do đó đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC chính là ảnh của đường tròn Euler qua phép vị tự tâm là O, tỷ số $k=2$.

Gọi I và I' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP và tam giác ABC.

Gọi R và R' lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP và tam giác ABC.

Ta có $I\left(1;-\frac{1}{2}\right)$ và do đó $\overrightarrow{OI'} = 2\overrightarrow{OI} \Rightarrow I'(2;-1)$.

Mặt khác $R=\frac{5}{2} \Rightarrow R'=5$.

Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là: $(x-2)^2+(y+1)^2=25$.

Nhận xét: Đề bài này rất khó đối với học sinh nếu không biết đến đường tròn Euler.

Câu 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phương trình của đường tròn có tâm là gốc tọa độ O và tiếp xúc với đường thẳng Δ: $x+y-2=0$ là

A. $x^2+y^2=2$. **B.** $x^2+y^2=\sqrt{2}$.

C. $(x-1)^2+(y-1)^2=\sqrt{2}$. **D.** $(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

Lời giải

Chọn A

Đường tròn (C) có tâm O, bán kính R tiếp xúc với Δ nên có:

$$R=d(O;\Delta)=\frac{|-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

Phương trình đường tròn (C): $x^2+y^2=2$.

Câu 25. Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), cho đường tròn (S) có tâm I nằm trên đường thẳng $y=-x$, bán kính $R=3$ và tiếp xúc với các trục tọa độ. Lập phương trình của (S), biết hoành độ tâm I là số dương.

A. $(x-3)^2+(y-3)^2=9$. **B.** $(x-3)^2+(y+3)^2=9$.

C. $(x-3)^2-(y-3)^2=9$. **D.** $(x+3)^2+(y+3)^2=9$.

Lời giải

Chọn B

Do tâm I nằm trên đường thẳng $y=-x \Rightarrow I(a;-a)$, điều kiện $a>0$.

Đường tròn (S) có bán kính $R=3$ và tiếp xúc với các trục tọa độ nên:

$$d(I;Ox)=d(I;Oy)=3 \Leftrightarrow |a|=3 \Leftrightarrow a=3(n) \vee a=-3(l) \Rightarrow I(3;-3).$$

Vậy phương trình $(S):(x-3)^2+(y+3)^2=9$.

Câu 26. Một đường tròn có tâm $I(3;4)$ tiếp xúc với đường thẳng $\Delta:3x+4y-10=0$. Hỏi bán kính đường tròn bằng bao nhiêu?

A. $\frac{5}{3}$. **B.** 5. **C.** 3. **D.** $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Đường tròn tâm $I(3;4)$ tiếp xúc với đường thẳng $\Delta:3x+4y-10=0$ nên bán kính đường tròn chính là khoảng cách từ tâm $I(3;4)$ tới đường thẳng $\Delta:3x+4y-10=0$.

Ta có: $R=d(I,\Delta)=\dfrac{|3.3+4.4-10|}{\sqrt{3^3+4^2}}=\dfrac{15}{5}=3$.

Câu 27. Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho điểm $I(1;1)$ và đường thẳng $(d): 3x+4y-2=0$. Đường tròn tâm I và tiếp xúc với đường thẳng (d) có phương trình

A. $(x-1)^2+(y-1)^2=5$. **B.** $(x-1)^2+(y-1)^2=25$.

C. $(x-1)^2+(y-1)^2=1$. **D.** $(x-1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Đường tròn tâm I và tiếp xúc với đường thẳng (d) có bán kính $R=d(I,d)=\frac{|3.1+4.1-2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$

Vậy đường tròn có phương trình là: $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

Câu 28. Trên hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có tâm $I(-3;2)$ và một tiếp tuyến của nó có phương trình là $3x+4y-9=0$. Viết phương trình của đường tròn (C).

A. $(x+3)^2+(y-2)^2=2$.

B. $(x-3)^2+(y+2)^2=2$.

C. $(x-3)^2+(y-2)^2=4$

D. $(x+3)^2+(y-2)^2=4$.

Lời giải

Chọn D

Vì đường tròn (C) có tâm $I(-3;2)$ và một tiếp tuyến của nó là đường thẳng Δ có phương trình là $3x+4y-9=0$ nên bán kính của đường tròn là $R=d(I,\Delta)=\frac{|3.(-3)+4.2-9|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$

Vậy phương trình đường tròn là: $(x+3)^2+(y-2)^2=4$

Câu 29. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các điểm $A(3;0)$ và $B(0;4)$. Đường tròn nội tiếp tam giác OAB có phương trình

A. $x^2+y^2=1$.

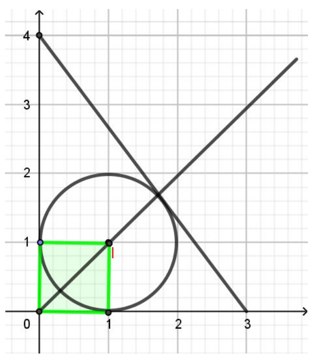
B. $x^2+y^2-4x+4=0$.

C. $x^2+y^2=2$.

D. $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

Lời giải

Chọn D



Vì các điểm $A(3;0)$ và $B(0;4)$ nằm trong góc phần tư thứ nhất nên tam giác OAB cũng nằm trong góc phần tư thứ nhất. Do vậy gọi tâm đường tròn nội tiếp là $I(a,b)$ thì $a>0, b>0$.

Theo đề ra ta có: $d(I;Ox)=d(I;Oy)=d(I;AB)$.

Phương trình theo đoạn chắn của AB là: $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ hay $4x+3y-12=0$.

Do vậy ta có: $\begin{cases}|a|=|b|\\ |4a+3b-12|=5|a|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|a|=|b|\\ \left[\begin{array}{l}7a-12=5a\\ 7a-12=-5a\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=b>0\\ \left[\begin{array}{l}a=6\ (l)\\ a=1\end{array}\right.\end{cases}.$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

Câu 30. Cho hai điểm $A(3;0)$, $B(0;4)$. Đường tròn nội tiếp tam giác OAB có phương trình là

A. $x^2+y^2=1$. **B.** $x^2+y^2-2x-2y+1=0$.

C. $x^2+y^2-6x-8y+25=0$. **D.** $x^2+y^2=2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $OA=3,\ OB=4,\ AB=5.$

Gọi $I(x_I;y_I)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB.

Từ hệ thức $AB.\overrightarrow{IO}+OB.\overrightarrow{IA}+OA.\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ (Chứng minh) ta được

$$\begin{cases}x_I=\dfrac{AB.x_O+OB.x_A+OA.x_B}{AB+OB+OA}=\dfrac{4.3}{5+4+3}=1\\ y_I=\dfrac{AB.y_O+OB.y_A+OA.y_B}{AB+OB+OA}=\dfrac{3.4}{5+4+3}=1\end{cases}\Rightarrow I(1;1)$$

Mặt khác tam giác OAB vuông tại O với r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác thì

$r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{\frac{1}{2}OA.OB}{\frac{OA+OB+AB}{2}}=\dfrac{3.4}{3+4+5}=1$ (S,p lần lượt là diện tích và nửa chu vi tam giác).

Vậy phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB là $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

hay $x^2+y^2-2x-2y+1=0.$

Dạng 4. Tương giao (tiếp tuyến) của đường thẳng và đường tròn

Câu 31. Đường tròn $x^2+y^2-1=0$ tiếp xúc với đường thẳng nào trong các đường thẳng dưới đây?

A. $3x-4y+5=0$ **B.** $x+y=0$

C. $3x+4y-1=0$ **D.** $x+y-1=0$

Lời giải

Chọn A

$x^2+y^2-1=0$ có tâm $O(0;0),R=1$.

Điều kiện để đường thẳng tiếp xúc với đường tròn là khoảng cách từ tâm tới đường thẳng bằng bán kính.

Xét đáp án A:

$\Delta:3x-4y+5=0\Rightarrow d(O,\Delta)=\dfrac{|3.0-4.0+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1=R\Rightarrow\Delta$ tiếp xúc với đường tròn.

Câu 32. Đường tròn nào sau đây tiếp xúc với trục Ox:

A. $x^2+y^2-10x=0$. **B.** $x^2+y^2-5=0$.

C. $x^2+y^2-10x-2y+1=0$. **D.** $x^2+y^2+6x+5y+9=0$.

Lời giải

Chọn D

Đường tròn (C) tiếp xúc với trục Ox khi $d(I,\text{Ox})=R$ với I và R lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn (C).

□Đường tròn: $x^2+y^2-10x=0 \Leftrightarrow (x-5)^2+y^2=25$ có tâm $I(5;0)$, bán kính $R=5$, $d(\text{I,Ox})=0$. Suy ra: $d(I,\text{Ox})\neq R$. Vậy (C) không tiếp xúc với trục Ox.

$\Rightarrow$ không phải là phương trình đường tròn.

□.Xét phương trình đường tròn: $x^2+y^2-5=0$ có $I(0;0)$ và $R=\sqrt{5}$, $d(\text{I,Ox})=0$.

Suy ra: $d(I,\text{Ox})\neq R$. Vậy (C) không tiếp xúc với trục Ox.

□Xét phương trình đường tròn: $x^2+y^2-10x-2y+1=0$ có $I(5;1)$ và $R=5$, $d(\text{I,Ox})=1$.

Suy ra: $d(I,\text{Ox})\neq R$. Vậy (C) không tiếp xúc với trục Ox.

□Xét phương trình đường tròn: $x^2+y^2+6x+5y+9=0$ có $I\left(-3;-\frac{5}{2}\right)$ và $R=\frac{5}{2}$, $d(\text{I,Ox})=\frac{5}{2}$.

Suy ra: $d(I,\text{Ox})=R$. Vậy (C) tiếp xúc với trục Ox

Câu 33. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $\text{O}xy$, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y+3=0$. Viết phương trình tiếp tuyến d của đường tròn (C) biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $\Delta: 3x+4y+1=0$.

A. $3x+4y+5\sqrt{2}-11=0$; $3x+4y-5\sqrt{2}+11=0$.

B. $3x+4y+5\sqrt{2}-11=0$, $3x+4y-5\sqrt{2}-11=0$.

C. $3x+4y+5\sqrt{2}-11=0$, $3x+4y+5\sqrt{2}+11=0$.

D. $3x+4y-5\sqrt{2}+11=0$, $3x+4y-5\sqrt{2}-11=0$.

Lời giải

Chọn B

$(C): x^2+y^2-2x-4y+3=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=2.$

Do đó đường tròn có tâm $I=(1;2)$ và bán kính $R=\sqrt{2}$.

Do d song song với đường thẳng Δ nên d có phương trình là $3x+4y+k=0$, $(k\neq 1)$.

Ta có $d(I;d)=R \Leftrightarrow \frac{|11+k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\sqrt{2} \Leftrightarrow |11+k|=5\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 11+k=5\sqrt{2} \\ 11+k=-5\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=5\sqrt{2}-11 \\ k=-5\sqrt{2}-11 \end{array}\right.$.

Vậy có hai phương trình tiếp tuyến cần tìm là $3x+4y+5\sqrt{2}-11=0$, $3x+4y-5\sqrt{2}-11=0$.

Câu 34. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y-4=0$ và điểm $A(1;5)$. Đường thẳng nào trong các đường thẳng dưới đây là tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm A.

A. $y-5=0$. **B.** $y+5=0$. **C.** $x+y-5=0$. **D.** $x-y-5=0$.

Lời giải

Chọn A

Đường tròn (C) có tâm $I(1;2) \Rightarrow \overrightarrow{IA}=(0;3)$.

Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại điểm A, khi đó d đi qua A và nhận vecto $\overrightarrow{IA}$ là một VTPT.

Chọn một VTPT của d là $\overrightarrow{n_d}=(0;1)$.

Vậy phương trình đường thẳng d là $y-5=0$.

Câu 35. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4=0$ và điểm $A(-1;2)$. Đường thẳng nào trong các đường thẳng dưới đây đi qua A và là tiếp tuyến của đường tròn (C)?

A. $4x-3y+10=0$. **B.** $6x+y+4=0$. **C.** $3x+4y+10=0$. **D.** $3x-4y+11=0$.

Lời giải

Chọn A

Đường tròn (C) có tâm là gốc tọa độ $O(0;0)$ và có bán kính $R=2$.

Họ đường thẳng Δ qua $A(-1;2): a(x+1)+b(y-2)=0$, với $a^2+b^2\neq 0$.

Điều kiện tiếp xúc $d(O;\Delta)=R$ hay

$$\frac{|a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2 \Leftrightarrow (a-2b)^2=4(a^2+b^2) \Leftrightarrow 3a^2+4ab=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ 3a=-4b \end{array}\right..$$

Với $a=0$, chọn $b=1$ ta có $\Delta_1: y-2=0$.

Với $3a=-4b$, chọn $a=4$ và $b=-3$ ta có $\Delta_2: 4(x+1)-3(y-2)=0 \Leftrightarrow 4x-3y+10=0$.

Nhận xét: Thực ra bài này khi thay tọa độ điểm $A(-1;2)$ vào các đường thẳng ở các phương án thì ta loại C. và D. Tính khoảng cách từ tâm của đường tròn đến đường thẳng thì chỉ có phương án A. thỏa.

Câu 36. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): (x-1)^2+(y-4)^2=4$. Phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C) song song với đường thẳng $\Delta: 4x-3y+2=0$ là

A. $4x-3y+18=0$. **B.** $4x-3y+18=0$.

C. $4x-3y+18=0; 4x-3y-2=0$. **D.** $4x-3y-18=0; 4x-3y+2=0$.

Lời giải

Chọn C

Đường tròn $(C): (x-1)^2+(y-4)^2=4$ có tâm $I(1;4)$ và bán kính $R=2$.

Gọi d là tiếp tuyến của (C).

Vì $d//\Delta$ nên đường thẳng $d: 4x-3y+m=0 \, (m\neq 2)$.

d là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow d(I;(d))=R \Leftrightarrow \dfrac{|4.1-3.4+m|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=2$

$$\Leftrightarrow |m-8|=10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=18 \\ m=-2 \end{array}\right. \text{(thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy có 2 tiếp tuyến cần tìm : $4x-3y+18=0; 4x-3y-2=0$.

Câu 37. Số tiếp tuyến chung của 2 đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y+1=0$ và $(C'): x^2+y^2+6x-8y+20=0$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y+1=0$ có tâm $I(1;-2)$ bán kính $R=2$.

Đường tròn $(C'): x^2+y^2+6x-8y+20=0$ có tâm $I'(-3;4)$ bán kính $R'=\sqrt{5}$.

$II'=2\sqrt{13}$.

Vậy $II' > R + R'$ nên 2 đường tròn không có điểm chung suy ra 2 đường tròn có 4 tiếp tuyến chung.

Câu 38. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C):(x-2)^2+(y+4)^2=25$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d:3x-4y+5=0$.

A. $4x+3y+29=0$. **B.** $4x+3y+29=0$ hoặc $4x+3y-21=0$.

C. $4x-3y+5=0$ hoặc $4x-3y-45=0$ **D.** $4x+3y+5=0$ hoặc $4x+3y+3=0$.

Lời giải

Chọn B

Đường tròn $(C):(x-2)^2+(y+4)^2=25$ có tâm $I(2;-4)$, bán kính $R=5$.

Đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $d:3x-4y+5=0$ có phương trình dạng: $4x+3y+c=0$

Δ là tiếp tuyến của đường tròn (C) khi và chỉ khi: $d(I;\Delta)=R \Leftrightarrow \dfrac{|4.2+3.(-4)+c|}{\sqrt{4^2+3^2}}=5 \Leftrightarrow |c-4|=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c-4=25 \\ c-4=-25 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=29 \\ c=-21 \end{array}\right.$. Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm là: $4x+3y+29=0$ và $4x+3y-21=0$.

Câu 39. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-2x+2y-3=0$. Từ điểm $A(1;1)$ kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến đến đường tròn (C)

A. 1. **B.** 2. **C.** vô số. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

(C) có tâm $I(1;-1)$ bán kính R=$\sqrt{1^2+(-1)^2-(-3)}=\sqrt{5}$

Vì $IA=2<R$ nên A nằm bên trong (C). Vì vậy không kẻ được tiếp tuyến nào tới đường tròn (C).

Câu 40. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-4)^2=4$. Phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C), biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $\Delta:4x-3y+2=0$ là

A. $4x-3y+18=0$ và $-4x-3y-2=0$. **B.** $4x-3y+18=0$ và $4x-3y-2=0$.

C. $-4x-3y+18=0$ và $4x-3y-2=0$. **D.** $-4x+3y-18=0$ và $-4x-3y-2=0$.

Lời giải

Chọn B

Đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-4)^2=4$ có tâm $I(1;4)$ và bán kính $R=2$.

Gọi d là tiếp tuyến của (C).

Vì $d//\Delta$ nên đường thẳng $d:4x-3y+m=0\,(m\neq 2)$.

d là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow d(I;(d))=R \Leftrightarrow \dfrac{|4.1-3.4+m|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=2$

$$\Leftrightarrow |m-8|=10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=18 \\ m=-2 \end{array}\right. \text{(thỏa mãn điều kiện)}$$

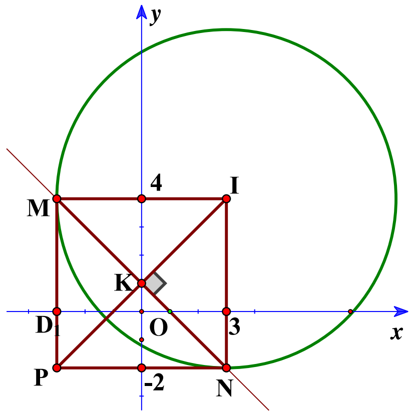
Vậy có 2 tiếp tuyến cần tìm : $4x-3y+18=0; 4x-3y-2=0$.

Câu 41. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $P(-3;-2)$ và đường tròn $(C):(x-3)^2+(y-4)^2=36$. Từ điểm P kẻ các tiếp tuyến PM và PN tới đường tròn (C), với M, N là các tiếp điểm. Phương trình đường thẳng MN là

A. $x+y+1=0$. **B.** $x-y-1=0$. **C.** $x-y+1=0$. **D.** $x+y-1=0$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là tâm của đường tròn, ta có tọa độ tâm $I(3;4)$.

Theo đề ra ta có tứ giác $IMPN$ là hình vuông, nên đường thẳng MN nhận $\overrightarrow{IP}=(-6;-6)$ làm VTPT, đồng thời đường thẳng MN đi qua trung điểm $K(0;1)$ của IP. Vậy phương trình đường thẳng MN: $1.(x-0)+1.(y-1)=0$ hay $x+y-1=0$.

Câu 42. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(-3;1)$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-6y+6=0$. Gọi T_1, T_2 là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M đến (C). Tính khoảng cách từ O đến đường thẳng T_1T_2.

A. 5. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

$+(C): x^2+y^2-2x-6y+6=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-3)^2=4$ suy ra (C) có tâm I(1;3) và R = 2

+ Phương trình đường thẳng d đi qua $M(-3;1)$ có phương trình: $A(x+3)+B(y-1)=0$.

d là tiếp tuyến với đường tròn khi và chỉ khi $d(I;d)=R$.

$\Rightarrow$ ta có phương trình: $\dfrac{|A+3B+3A-B|}{\sqrt{A^2+B^2}}=2 \Leftrightarrow 3A^2+4AB=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=0 \\ 3A=-4B \end{array}\right.$

+ Với $A=0$, chọn $B=1$, phương trình tiếp tuyến thứ nhất là $(d_1): y=1$.

Thế $y=1$ vào $(C): x^2+y^2-2x-6y+6=0$, ta được tiếp điểm là $T_1(1;1)$.

+ Với $3A=-4B$, chọn $A=-4; B=3$, phương trình tiếp tuyến thứ hai là $(d_2): -4x+3y-15=0$

Tiếp điểm $T_2\left(x;\dfrac{4x}{3}+5\right)\in(C)$ nên $(x-1)^2+\left(\dfrac{4x}{3}+5-3\right)^2=4 \Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{5} \Rightarrow T_2\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{21}{5}\right)$.

+ Phương trình đường thẳng $T_1T_2: 2(x-1)+1(y-1)=0 \Leftrightarrow 2x+y-3=0$.

+ Khoảng cách từ O đến đường thẳng T_1T_2 là: $d(0;T_1T_2)=\dfrac{|-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

Câu 43. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hai đường tròn $(C_1),(C_2)$ có phương trình lần lượt là $(x+1)^2+(y+2)^2=9$ và $(x-2)^2+(y-2)^2=4$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. Đường tròn $\left(C_1\right)$có tâm $I_1\left(-1;-2\right)$ và bán kính $R_1=3$.

B. Đường tròn $\left(C_2\right)$ có tâm $I_2\left(2;2\right)$và bán kính $R_2=2$.

C. Hai đường tròn $\left(C_1\right),\left(C_2\right)$ không có điểm chung.

D. Hai đường tròn $\left(C_1\right),\left(C_2\right)$ tiếp xúc với nhau.

Lời giải

Chọn D

Ta thấy đường tròn $\left(C_1\right)$có tâm $\mathrm{I}\left(-1;-2\right)$ và bán kính $R_1=3$. Đường tròn $\left(C_2\right)$ có tâm $I_2\left(2;2\right)$và bán kính $R_2=2$.

Khi đó: $5=R_1+R_2=I_1I_2=\sqrt{(2+1)^2+(2+2)^2}=5\Rightarrow\left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right)$ tiếp xúc nhau.

Câu 44. Tìm giao điểm 2 đường tròn $(C_1):\mathrm{x}^2+y^2-4=0$ và $(C_2):\mathrm{x}^2+y^2-4x-4y+4=0$.

A. $\left(2;2\right)$ và $\left(-2;-2\right)$. **B.** $\left(0;2\right)$ và $\left(0;-2\right)$. **C.** $\left(2;0\right)$và $\left(-2;0\right)$. **D.** $\left(2;0\right)$ và $\left(0;2\right)$.

Lời giải

Chọn D

Giao điểm 2 đường tròn là nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}x^2+y^2-4=0\\x^2+y^2-4x-4y+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=4\\4x+4y=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=4\\x+y=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=4\\x=2-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(2-y\right)^2+y^2=4\\x=2-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2y^2-4y=0\\x=2-y\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=0\\x=2\end{cases}\\\begin{cases}y=2\\x=0\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy giao điểm 2 đường tròn là: $\left(2;0\right)$và $\left(0;2\right)$.

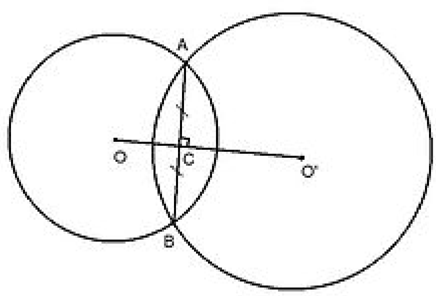
Câu 45. Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho hai đường tròn $\left(C\right):\left(x-1\right)^2+y^2=4$ và $\left(C'\right):\left(x-4\right)^2+\left(y-3\right)^2=16$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Lập phương trình đường thẳng AB

A. $x+y-2=0$. **B.** $x-y+2.=0$ **C.** $x+y+2=0$. **D.** $x-y-2=0$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Xét hệ



$\begin{cases}(x-1)^2+y^2=4\\(x-4)^2+(y-3)^2=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-2x-3=0\\x^2+y^2-8x-6y+9=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}y=2-x\\x^2+(2-x)^2-2x-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2-x\\2x^2-6x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3+\sqrt{7}}{2},y=\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}\\x=\dfrac{3-\sqrt{7}}{2},y=\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}\end{array}\right.$

Suy ra $A\left(\dfrac{3+\sqrt{7}}{2},\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}\right)$, $B\left(\dfrac{3-\sqrt{7}}{2},\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}\right)$.

(C) có tâm $O(1;0)$, (C') có tâm $O'(4;3)$ $\Rightarrow\overrightarrow{OO'}=(3;3)$

Nên đường thẳng AB qua A và nhận $\vec{n}(1;1)$ là véctơ pháp tuyến.

Phương trình: $1\left(x-\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}\right)+1\left(y-\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}\right)=0\Leftrightarrow x+y-2=0$. Chọn A.

Cách 2: Giả sử hai đường tròn $(C):(x-1)^2+y^2=4$ và $(C'):(x-4)^2+(y-3)^2=16$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B khi đó tọa độ của A và thỏa mãn hệ phương trình:

$\begin{cases}(x-1)^2+y^2=4\\(x-4)^2+(y-3)^2=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-2x-3=0 & (1)\\x^2+y^2-8x-6y+9=0 & (2)\end{cases}$

Lấy (1) trừ (2) ta được: $6x+6y-12=0\Leftrightarrow x+y-2=0$ là phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm A và B

Câu 46. Cho đường thẳng $\Delta:3x-4y-19=0$ và đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=25$. Biết đường thẳng Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B, khi đó độ dài đọan thẳng AB là

A. 6. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Từ $\Delta:3x-4y-19=0\Rightarrow y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{19}{4}(1)$.

Thế (1) vào (C) ta được

$(x-1)^2+\left(\dfrac{3}{4}x-\dfrac{23}{4}\right)^2=25$

$\Leftrightarrow\dfrac{25}{16}x^2-\dfrac{85}{8}x+\dfrac{145}{16}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{29}{5}\end{array}\right.$.

+) $x_A=1\Rightarrow y_A=-4\Rightarrow A(1;-4)$.

+) $x_B=\dfrac{29}{5}\Rightarrow y_B=-\dfrac{2}{5}\Rightarrow B\left(\dfrac{29}{5};-\dfrac{2}{5}\right)$.

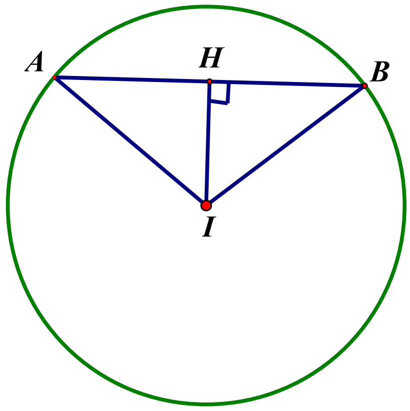
Độ dài đoạn thẳng $AB=\sqrt{\left(\dfrac{29}{5}-1\right)^2+\left(-\dfrac{2}{5}+4\right)^2}=6$.

Câu 47. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có tâm $I(1;-1)$ bán kính $R=5$. Biết rằng đường thẳng $(d): 3x-4y+8=0$ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A,B. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. $AB=8$. **B.** $AB=4$. **C.** $AB=3$.. **D.** $AB=6$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB. Ta có $IH \perp AB$ và

$$IH = d(I;AB) = \frac{|3.1-4.(-1)+8|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = 3.$$

Xét tam giác vuông AHI ta có: $HA^2 = IA^2 - IH^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow HA = 4 \Rightarrow AB = 2HA = 8$

Câu 48. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2+(y+2)^2=4$ và đường thẳng $d: 3x+4y+7=0$. Gọi A,B là các giao điểm của đường thẳng d với đường tròn (C). Tính độ dài dây cung AB.

A. $AB=\sqrt{3}$. **B.** $AB=2\sqrt{5}$. **C.** $AB=2\sqrt{3}$. **D.** $AB=4$.

Lời giải

Chọn C

Đường tròn (C) có tâm $I(2;-2)$ bán kính $R=2$.

$d(I,d) = \frac{|3.2+4.(-2)+7|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 1 < R = 2$ nên d cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

Gọi A,B là các giao điểm của đường thẳng d với đường tròn (C).

$AB = 2\sqrt{R^2 - d^2(I,d)} = 2\sqrt{3}$.

Câu 49. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(3;1)$, đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y+3=0$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua A và cắt đường tròn (C) tại hai điểm B, C sao cho $BC=2\sqrt{2}$.

A. $d: x+2y-5=0$. **B.** $d: x-2y-5=0$. **C.** $d: x+2y+5=0$. **D.** $d: x-2y+5=0$.

Lời giải

Chọn A

Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2-3}=\sqrt{2}$.

Theo giả thiết đường thẳng d đi qua A và cắt đường tròn (C) tại hai điểm B, C sao cho $BC = 2\sqrt{2}$.

Vì $BC = 2\sqrt{2} = 2R$ nên BC là đường kính của đường tròn (C) suy ra đường thẳng d đi qua tâm $I(1;2)$

Ta chọn: $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{IA} = (2;-1) \Rightarrow \overrightarrow{n_d} = (1;2)$.

Vậy đường thẳng d đi qua $A(3;1)$ và có VTPT $\overrightarrow{n_d} = (1;2)$ nên phương trình tổng quát của đường thẳng d là: $1(x-3)+2(y-1)=0 \Leftrightarrow x+2y-5=0$.

Câu 50. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hai đường tròn $(C_1),(C_2)$ có phương trình lần lượt là $(x+1)^2+(y+2)^2=9$ và $(x-2)^2+(y-2)^2=4$. Viết phương trình đường thẳng d' đi qua gốc tọa độ và tạo với đường thẳng nối tâm của hai đường tròn một góc bằng $45°$.

A. $d': x-7y=0$ hoặc $d': 7x+y=0$. **B.** $d': x+7y=0$ hoặc $d': 7x+y=0$.

C. $d': x+7y=0$ hoặc $d': 7x-y=0$. **D.** $d': x-7y=0$ hoặc $d': 7x-y=0$.

Lời giải

Chọn A

Tọa độ tâm I_1 của đường tròn (C_1) là: $I_1(-1;-2)$.

Tọa độ tâm I_2 của đường tròn (C_1) là: $I_2(2;2)$.

Ta có: $\overrightarrow{I_1I_2}(3;4)$. Gọi d, d' lần lượt là đường thẳng nối tâm của hai đường tròn đã cho và đường thẳng cần lập. Chọn một vectơ pháp tuyến của đường thẳng d là: $\overrightarrow{n_d}(4;-3)$. Gọi $\overrightarrow{n_{d'}}(a;b)$, $a^2+b^2 \neq 0$ là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng d'.

Theo đề $\cos(d,d') = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left|\cos\left(\overrightarrow{n_d},\overrightarrow{n_{d'}}\right)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{|4a-3b|}{\sqrt{3^2+4^2}.\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\Leftrightarrow 7a^2-48ab-7b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=7b\neq 0 \\ a=-\frac{1}{7}b\neq 0 \end{array}\right..$$

Với $a=-\frac{1}{7}b\neq 0$, chọn $b=-7 \Rightarrow a=1$. Phương trình đường thẳng $d': x-7y=0$.

Với $a=7b\neq 0$, chọn $b=1 \Rightarrow a=7$. Phương trình đường thẳng $d': 7x+y=0$.

Câu 51. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $I(1;2)$ và đường thẳng $(d): 2x+y-5=0$. Biết rằng có hai điểm M_1, M_2 thuộc (d) sao cho $IM_1 = IM_2 = \sqrt{10}$. Tổng các hoành độ của M_1 và M_2 là

A. $\frac{7}{5}$. **B.** $\frac{14}{5}$. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{cases} IM_1 = IM_2 = \sqrt{10} \\ I(1;2) \end{cases} \Rightarrow M_1, M_2 \in (C): (x-1)^2+(y-2)^2=10.$$

Mặt khác, M_1, M_2 thuộc $(d): 2x+y-5=0$ nên ta có tọa độ M_1, M_2 là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2=10 & (1) \\ 2x+y-5=0 & (2) \end{cases}.$$

$(2) \Leftrightarrow y = -2x + 5,$ thay vào (1) ta có $5x^2 - 14x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{14}{5} \end{array}\right.$.

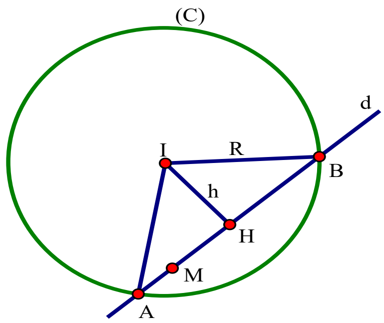
Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ của M_1 và $M_2 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 + \dfrac{14}{5} = \dfrac{14}{5}$.

Câu 52. Trong hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình: $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 15 = 0$. I là tâm (C), đường thẳng d đi qua $M(1;-3)$ cắt (C) tại A, B. Biết tam giác IAB có diện tích là 8. Phương trình đường thẳng d là: $x + by + c = 0$. Tính $b + c$

A. 8. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B



(C) có tâm $I(2;-1)$, bán kính $R = 2\sqrt{5}$.

Đặt $h = d(I, AB)$. Ta có: $S_{IAB} = \dfrac{1}{2} h.AB = 8 \Rightarrow h.AB = 16$.

Mặt khác: $R^2 = h^2 + \dfrac{AB^2}{4} = 20$

Suy ra: $\begin{cases} h = 4 \\ AB = 4 \end{cases}; \begin{cases} h = 2 \\ AB = 8 \end{cases}$

Vì d đi qua $M(1;-3)$ nên $1 - 3b + c = 0 \Rightarrow 3b - c = 1 \Rightarrow c = 3b - 1$

Với $h = 4 = \dfrac{|2 - b + c|}{\sqrt{1 + b^2}} = \dfrac{|2 - b + 3b - 1|}{\sqrt{1 + b^2}} = \dfrac{|1 + 2b|}{\sqrt{1 + b^2}} \Rightarrow b \in \Phi$

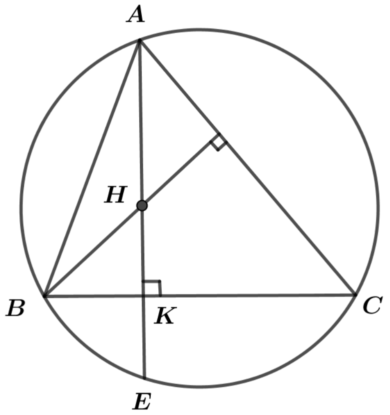
Với $h = 2 = \dfrac{|2 - b + c|}{\sqrt{1 + b^2}} = \dfrac{|2 - b + 3b - 1|}{\sqrt{1 + b^2}} = \dfrac{|1 + 2b|}{\sqrt{1 + b^2}} \Rightarrow b = \dfrac{3}{4} \Rightarrow c = \dfrac{5}{4} \Rightarrow b + c = 2$.

Câu 53. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(5;5)$, trực tâm $H(-1;13)$, đường tròn ngoài tiếp tam giác có phương trình $x^2 + y^2 = 50$. Biết tọa độ đỉnh $C(a;b)$, với $a < 0$. Tổng $a + b$ bằng

A. -8. **B.** 8. **C.** 6. **D.** -6.

Lời giải

Chọn D



Gọi K là chân đường cao hạ từ A của tam giác ABC, gọi E là điểm đối xứng với H qua K suy ra E thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (Tính chất này đã học ở cấp 2).

Ta có $\overrightarrow{AH} = (-6;8)$, chọn $\overrightarrow{u_{AH}} = (3;-4)$.

Phương trình đường thẳng AH qua A ở dạng tham số $\begin{cases} x = 5+3t \\ y = 5-4t \end{cases}$

$K \in AH$ suy ra tọa độ điểm K có dạng $K(5+3t;5-4t)$

H và E đối xứng nhau qua K suy ra tọa độ E theo t là $E(11+6t;-3-8t)$

$$E \in (C) \Rightarrow (11+6t)^2 + (-3-8t)^2 = 50$$
$$\Leftrightarrow 5t^2 + 9t + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \dfrac{-4}{5} \end{array}\right.$$

□ Với $t = -1$, $E(5;5)$ (loại vì $E \equiv A$)

□ Với $t = \dfrac{-4}{5}$, $E\left(\dfrac{31}{5};\dfrac{17}{5}\right)$, $K\left(\dfrac{13}{5};\dfrac{41}{5}\right)$

Phương trình đường thẳng BC có $\overrightarrow{u_{BC}} = \overrightarrow{n_{AH}} = (4;3)$ và qua điểm K có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = \dfrac{13}{5} + 4t \\ y = \dfrac{41}{5} + 3t \end{cases} \Rightarrow C \in BC \Rightarrow C\left(\dfrac{13}{5} + 4t; \dfrac{41}{5} + 3t\right).$$

$$C \in (C) \Rightarrow \left(\dfrac{13}{5} + 4t\right)^2 + \left(\dfrac{41}{5} + 3t\right)^2 = 50$$
$$\Leftrightarrow 25t^2 + 70t + 24 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\dfrac{2}{5} \Rightarrow C(1;7) \Rightarrow (KTM) \\ t = \dfrac{-12}{5} \Rightarrow C(-7;1) \end{array}\right.$$

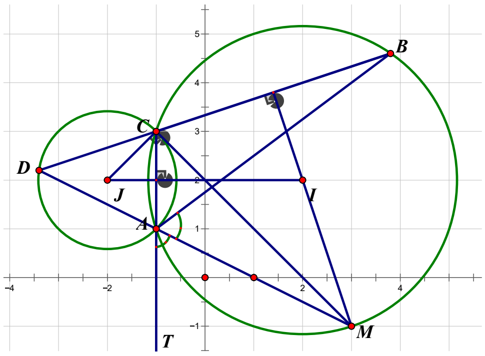
Vậy $C(a;b) = C(-7;1) \Rightarrow a + b = -6$.

Câu 54. Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC nội tiếp đường tròn tâm $I(2;\,2)$, điểm D là chân đường phân giác ngoài của góc $\widehat{BAC}$. Đường thẳng AD cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại điểm thứ hai là M (khác A). Biết điểm $J(-2;\,2)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔACD và phương trình đường thẳng CM là: $x+y-2=0$. Tìm tổng hoành độ của các đỉnh $A,\,B,\,C$ của tam giác ABC.

A. $\frac{9}{5}$. **B.** $\frac{12}{5}$. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{6}{5}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có:

$\widehat{BCM}=\widehat{BAM}$ (cùng chắn cung BM) (1)

$\widehat{BAM}=\widehat{MAT}=\widehat{DAC}$ (do AD là đường phân giác ngoài A) (2)

Từ $(1),(2)$ suy ra $\widehat{DAC}=\widehat{BCM}$, mà $\widehat{BCM}=\widehat{CDA}+\widehat{AMC},\ \widehat{DAC}=\widehat{ACM}+\widehat{AMC}$ từ đó suy ra $\widehat{CDA}=\widehat{ACM}$, do đó MC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD có tâm J nên $JC\perp MC$. Hay C là hình chiếu của J lên đường thẳng CM.

Đường thẳng qua J và vuông góc với CM có phương trình:

$(x+2)-(y-2)=0 \Leftrightarrow x-y+4=0$

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow C(-1;\,3)$.

AC là đường thẳng qua C và vuông góc với $\overrightarrow{IJ}(-4;\,0)$ nên có phương trình: $x+1=0$.

Do đó tọa độ điểm A có dạng $A(-1;\,a)$. Ta có $IA^2=IC^2 \Leftrightarrow 9+(a-2)^2=9+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=3 \end{array}\right.$.

Vì $A\neq C$ nên $A(-1;\,1)$.

Tọa độ điểm M có dạng $M(m;\,2-m)$. Ta có

$IM^2=IC^2 \Leftrightarrow (m-2)^2+m^2=10 \Leftrightarrow m^2-2m-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=3 \end{array}\right.$.

Vì $M\neq C$ nên $M(3;\,-1)$.

BC là đường thẳng qua C và vuông góc với $\overrightarrow{MI}(-1;\,3)$ nên có phương trình:

$-(x+1)+3(y-3)=0 \Leftrightarrow x-3y+10=0$.

Tọa độ điểm B có dạng $B(3b-10;\,b)$. Ta có $IB^2=IC^2 \Leftrightarrow (3b-12)^2+(b-2)^2=10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=3 \\ b=\frac{23}{5} \end{array}\right.$.

Vì $B\neq C$ nên $B\left(\frac{19}{5};\,\frac{23}{5}\right)$.

Vậy tổng hoành độ của các đỉnh A, B, C là $-1-1+\frac{19}{5}=\frac{9}{5}$.

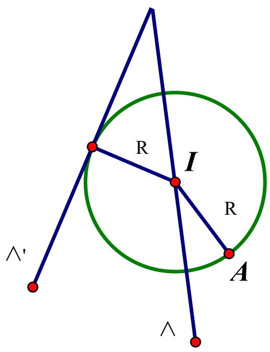
Câu 55. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $(\Delta): x+3y+8=0$; $(\Delta'): 3x-4y+10=0$ và điểm $A(-2;1)$. Đường tròn có tâm $I(a;b)$ thuộc đường thẳng (Δ),đi qua A và tiếp xúc với đường thẳng (Δ'). Tính $a+b$.

A. -4. **B.** 4. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải

Chọn D

.



Vì $I\in(\Delta)$ nên $a+3b+8=0 \Leftrightarrow a=-8-3b$.

Vì đường tròn đi qua A và tiếp xúc với đường thẳng (Δ') nên:

$$d(I;\Delta')=IA \Leftrightarrow \frac{|3a-4b+10|}{5}=\sqrt{(-2-a)^2+(1-b)^2} \quad (1).$$

Thay $a=-8-3b$ vào (1) ta có:

$$\frac{|3(-8-3b)-4b+10|}{5}=\sqrt{(-2+8+3b)^2+(1-b)^2}$$

$$\Leftrightarrow |-14-13b|=5\sqrt{10b^2+34b+37}$$

$$\Leftrightarrow (-14-13b)^2=25(10b^2+34b+37)$$

$$\Leftrightarrow 81b^2+486b+729=0 \Leftrightarrow b=-3.$$

Với $b=-3 \Leftrightarrow a=1$.

$a+b=-2$.

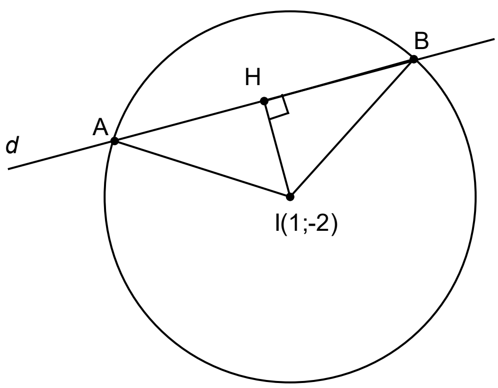
Câu 56. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: 3x-4y-1=0$ và điểm $I(1;-2)$. Gọi (C) là đường tròn có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A và B sao cho tam giác IAB có diện tích bằng 4. Phương trình đường tròn (C) là

A. $(x-1)^2+(y+2)^2=8$.**B.** $(x-1)^2+(y+2)^2=20$.

C. $(x-1)^2+(y+2)^2=5$.**D.** $(x-1)^2+(y+2)^2=16$.

Lời giải

Chọn A



Ta có:

$IH = d(I;d) = 2$.

$S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IH.AB \Rightarrow AB = \frac{2S_{\Delta IAB}}{IH} = \frac{2.4}{2} = 4 \Rightarrow AH = 2$.

$\Rightarrow R = IA = \sqrt{AH^2 + IH^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

$\Rightarrow (C):(x-1)^2 + (y+2)^2 = 8$.

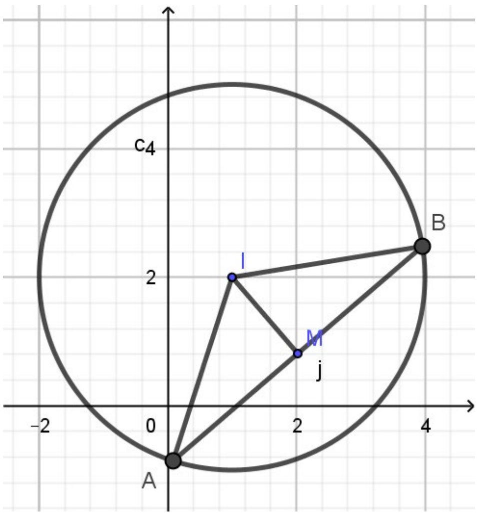
Dạng 5. Câu hỏi min-max

Câu 57. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ và điểm $M(2;1)$. Dây cung của (C) đi qua điểm M có độ dài ngắn nhất là

A. 6. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** $3\sqrt{7}$. **D.** $2\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow (C):(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ nên có tâm $I(1;2), R = 3$

Vì $IM = \sqrt{2} < 3 = R$.

Gọi d là đường thẳng đi qua M cắt đường tròn (C) tại các điểm A, B. Gọi J là trung điểm của AB. Ta có:

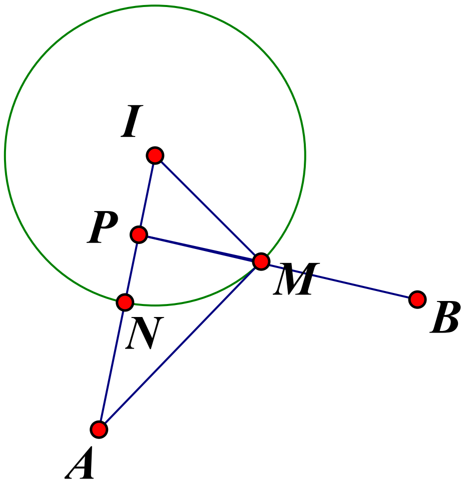
Ta có: $AB = 2AJ = 2\sqrt{R^2 - IJ^2} \geq 2\sqrt{R^2 - IM^2} = 2\sqrt{9-2} = 2\sqrt{7}$.

Câu 58. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(0;-3)$, $B(4;1)$ và điểm M thay đổi thuộc đường tròn $(C): x^2 + (y-1)^2 = 4$. Gọi $P_{\min}$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = MA + 2MB$. Khi đó ta có $P_{\min}$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(7,7;8,1)$.. **B.** $(7,3;7,7)$.. **C.** $(8,3;8,5)$.. **D.** $(8,1;8,3)$.

Lời giải:

Chọn. D.



Đường tròn $(C): x^2+(y-1)^2=4$ có tâm $I(0;1)$ bán kính $R=2$.

$IA = IB = 4 > R$ nên A, B nằm ngoài đường tròn.

Gọi N là giao điểm của IA và đường tròn (C)

Trên đoạn IN lấy điểm P sao cho $IP=\frac{1}{2}IN \Rightarrow \overrightarrow{IP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{IA} \Rightarrow P$ trùng với gốc tọa độ.

Ta có $\Delta IAM \sim \Delta IMP \Rightarrow \frac{MA}{MP}=\frac{IM}{IP}=\frac{IN}{IP}=2 \Rightarrow MA=2MP$.

Do đó $P = MA+2MB = 2MP+2MB \geq 2PB \Rightarrow P_{\min}=2PB=2\sqrt{17} \Rightarrow P_{\min} \in (8,1;8,3)$.

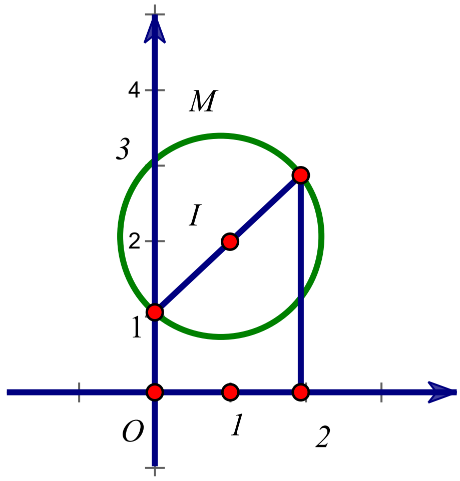
Chọn. **D.**

Câu 59. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y+3=0$. Tìm tọa độ điểm $M(x_0;y_0)$ nằm trên đường tròn (C) sao cho $T=x_0+y_0$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $M(2;3)$. **B.** $M(0;1)$. **C.** $M(2;1)$. **D.** $M(0;3)$.

Lời giải

Chọn A



$(C): x^2+y^2-2x-4y+3=0$, (C) có tâm $I(1;2)$, $R=\sqrt{2}$.

Suy ra $(C): (x-1)^2+(y-2)^2-2=0$.

Có $T=x_0+y_0=(x_0-1)+(y_0-2)+3$.

Áp dụng bất đẳng thức **B. C. S** cho 2 bộ số $(1;1), ((x_0-1);(y_0-2))$.

$\left|(x_0-1)+(y_0-2)\right| \leq \sqrt{2\left[(x_0-1)^2+(y_0-2)^2\right]}=2$, do $(x_0-1)^2+(y_0-2)^2=2$.

$\Rightarrow -2 \le (x_0-1)+(y_0-2) \le 2 \Rightarrow 1 \le (x_0-1)+(y_0-2)+3 \le 5 \Rightarrow 1 \le T \le 5$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}(x_0-1)=(y_0-2)\\(x_0-1)^2+(y_0-2)^2=2\end{cases}$.

$\Rightarrow (x_0-1)^2=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x_0-1=1\\x_0-1=-1\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=2, y_0=3, T=5\\x_0=0, y_0=1, T=1\end{array}\right.$.

Vậy $\max T=5$ khi $x_0=2, y_0=3$.

Câu 60. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm M nằm trên đường tròn $(C): x^2+y^2+8x-6y+16=0$. Tính độ dài nhỏ nhất của OM ?

A. 3. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải 1

Chọn D

Đường tròn (C) có tâm $I(-4;3)$, bán kính $R=3$.

Ta có $\overrightarrow{OI}=(-4;3)$ suy ra phương trình đường thẳng OI là $\begin{cases}x=-4t\\y=3t\end{cases}$.

$OI \cap (C)=\{M\}$ Tọa độ $(x;y)$ của M là nghiệm hệ

$$\begin{cases}x^2+y^2+8x-6y+16=0\\x=-4t\\y=3t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}25t^2-50t+16=0\\x=-4t\\y=3t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=\dfrac{8}{5}\\x=\dfrac{-32}{5}\\y=\dfrac{24}{5}\end{cases} \vee \begin{cases}t=\dfrac{2}{5}\\x=\dfrac{-8}{5}\\y=\dfrac{6}{5}\end{cases}$$

Suy ra $M_1\left(-\dfrac{32}{5};\dfrac{24}{5}\right), M_2\left(-\dfrac{8}{5};\dfrac{6}{5}\right)$

Ta có $OM_1=\sqrt{\left(-\dfrac{32}{5}\right)^2+\left(\dfrac{24}{5}\right)^2}=8, OM_2=\sqrt{\left(-\dfrac{8}{5}\right)^2+\left(\dfrac{6}{5}\right)^2}=2 \Rightarrow OM_{\min}=OM_2=2$.

Cách 2

Đường tròn (C) có tâm $I(-4;3)$, bán kính $R=\sqrt{4^2+3^2-16}=3$.

Phương trình đường thẳng OI đi qua $O(0;0)$ có vtpt $\vec{n}(3;4)$ là:

$3x+4y=0$.

Tọa độ $M=OI\cap(C)$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}3x+4y=0\\x^2+y^2+8x-6y+16=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{32}{5}\\y=\dfrac{24}{5}\end{cases} \vee \begin{cases}x=-\dfrac{8}{5}\\y=\dfrac{6}{5}\end{cases}$$

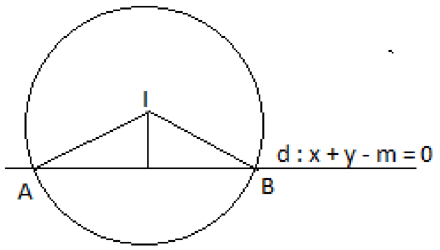
Ta có $OM_1=\sqrt{\left(\dfrac{32}{5}\right)^2+\left(\dfrac{24}{5}\right)^2}=8; OM_2=\sqrt{\left(\dfrac{8}{5}\right)^2+\left(\dfrac{6}{5}\right)^2}=2$. Vậy $OM_{\min}=2$.

Câu 61. Gọi I là tâm của đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=4$. Số các giá trị nguyên của m để đường thẳng $x+y-m=0$ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C



Gọi: $d: x+y-m=0$; tâm của (C) là $I(1;1)$, để $d\cap(C)$ tại 2 phân biệt khi đó:

$$0\le d(I;d)<2\leftrightarrow 0\le\frac{|2-m|}{\sqrt{2}}<2\leftrightarrow 2-2\sqrt{2}<m<2+2\sqrt{2}\,(*)$$

Xét ΔIAB có: $S_{\Delta AIB}=\frac{1}{2}.IA.IB.\sin\widehat{AIB}=\frac{1}{2}.R^2.\sin\widehat{AIB}\le\frac{1}{2}.R^2$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\sin\widehat{AIB}=1\Leftrightarrow\widehat{AIB}=90^0\Rightarrow AB=2\sqrt{2}\Rightarrow d(I;d)=\sqrt{2}\leftrightarrow\frac{|2-m|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\quad(TM)\\ m=4\quad(TM)\end{array}\right..$$

Câu 62. Điểm nằm trên đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y+1=0$ có khoảng cách ngắn nhất đến đường thẳng $d: x-y+3=0$ có toạ độ $M(a;b)$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

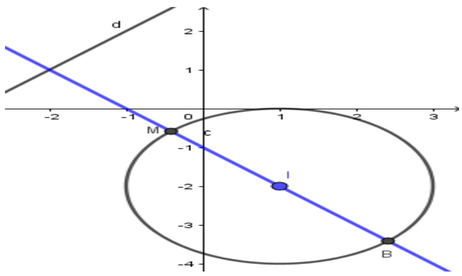
A. $\sqrt{2}a=-b$. **B.** $a=-b$. **C.** $\sqrt{2}a=b$. **D.** $a=b$.

Lời giải

Chọn C

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=2$.

Gọi Δ là đường thẳng qua I và vuông góc với d. Khi đó, điểm M cần tìm là một trong hai giao điểm của Δ và (C).



Ta có phương trình $\Delta: x+y+1=0$.

Xét hệ: $\begin{cases}x+y+1=0\\ x^2+y^2-2x+4y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-x-1\\ (x-1)^2+(y+2)^2=4\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=-x-1\\ 2(x-1)^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-x-1\\ x=1\pm\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1+\sqrt{2}\\ y=-2-\sqrt{2}\end{cases}\\ \begin{cases}x=1-\sqrt{2}\\ y=-2+\sqrt{2}\end{cases}\end{array}\right.$$

Với $B\left(1+\sqrt{2};-2-\sqrt{2}\right)\Rightarrow d(B,d)=2+3\sqrt{2}$

Với $C\left(1-\sqrt{2};-2+\sqrt{2}\right)\Rightarrow d(C,d)=-2+3\sqrt{2}<d(B,d)$

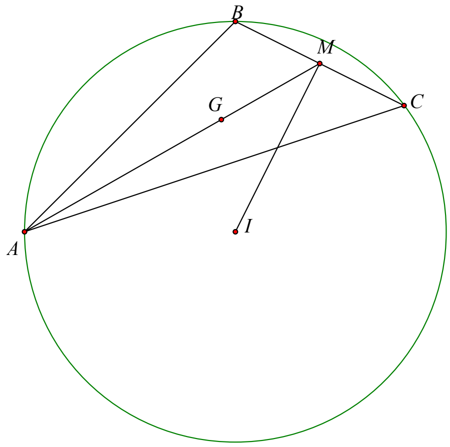
Suy ra $M\left(1-\sqrt{2};-2+\sqrt{2}\right)\Rightarrow a=1-\sqrt{2};b=-2+\sqrt{2}=\sqrt{2}\left(1-\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}a$.

Câu 63. Cho tam giác ABC có trung điểm của BC là $M(3;2)$, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác lần lượt là $G\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right), I(1;-2)$. Tìm tọa độ đỉnh C, biết C có hoành độ lớn hơn 2.

A. $C(9;1)$. **B.** $C(5;1)$. **C.** $C(4;2)$. **D.** $C(3;-2)$.

Lời giải

Chọn B



Vì $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GM}$ nên A là ảnh của điểm M qua phép vị tự tâm G, tỉ số -2, suy ra $A(-4;-2)$.

Đường tròn ngoại tiếp ABC có tâm I, bán kính $R = IA = 5$ có phương trình $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$.

Ta có $\overrightarrow{IM} = (2;4)$.

Đường thẳng BC đi qua M và nhận vecto $\overrightarrow{IM}$ làm vecto pháp tuyến, phương trình BC là: $1(x-3)+2(y-2)=0 \Leftrightarrow x+2y-7=0$.

Điểm C là giao điểm của đường thẳng BC và đường tròn $(I;R)$ nên tọa độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y-2)^2=25\\ x+2y-7=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1, y=3\\ x=5, y=1\end{array}\right.$$

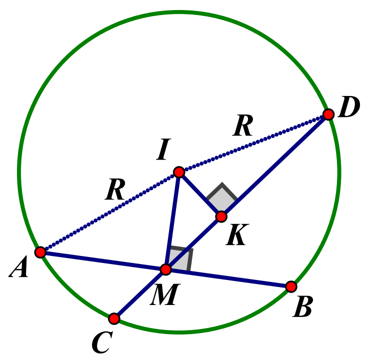
Đối chiếu điều kiện đề bài ta có tọa độ điểm $C(5;1)$.

Câu 64. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y-25=0$ và điểm $M(2;1)$. Dây cung của (C) đi qua M có độ dài ngắn nhất là:

A. $2\sqrt{7}$. **B.** $16\sqrt{2}$. **C.** $8\sqrt{2}$. **D.** $4\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn D



+) (C) có tâm $I(1;2)$, bán kính $R=\sqrt{30}$

+) AB là dây cung của (C) đi qua M

+) Ta có $AB \min \Leftrightarrow AB \perp IM$.

Thật vậy, giả sử CD là dây cung qua M và không vuông góc với IM.

Gọi K là hình chiếu của I lên CD ta có:

$AB = 2AM = 2\sqrt{IA^2 - IM^2} = 2\sqrt{R^2 - IM^2}$

$CD = 2KD = 2\sqrt{ID^2 - KD^2} = 2\sqrt{R^2 - IK^2}$

Do tam giác IMK vuông tại K nên $IM > IK$.
Vậy $CD > AB$.
+) Ta có: $IM = \sqrt{(2-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2}$
$MA = \sqrt{R^2 - IM^2} = \sqrt{30-2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$
$\Rightarrow AB = 2MA = 4\sqrt{7}$.

Câu 65. Cho các số thực a,b,c,d thay đổi, luôn thỏa mãn $(a-1)^2 + (b-2)^2 = 1$ và $4c - 3d - 23 = 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (a-c)^2 + (b-d)^2$ là:

A. $P_{\min} = 28$. **B.** $P_{\min} = 3$. **C.** $P_{\min} = 4$. **D.** $P_{\min} = 16$.

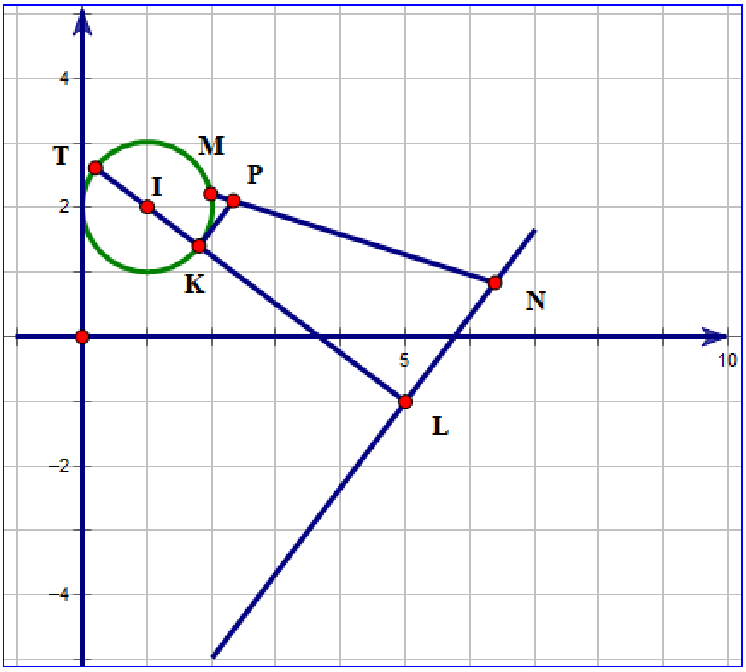
Lời giải

Chọn D

Xét tập hợp điểm $M(a;b)$ thỏa mãn $(a-1)^2 + (b-2)^2 = 1$ thì M thuộc đường tròn tâm $I(1;2); R = 1$

Xét điểm $N(c;d)$ thỏa mãn $4c - 3d - 23 = 0$ thì N thuộc đường thẳng có phương trình $4x - 3y - 23 = 0$.

Ta thấy $d(I;d) = \frac{|4-6-23|}{5} = 5 > R = 1$. Do đó đường thẳng không cắt đường tròn.



Đường thẳng qua I vuông góc với d tại L và cắt đường tròn ở T, K (K ở giữa T và L)
Vẽ tiếp tuyến tại K cắt MN tại P.
Có $KL \le PN \le MN$, mà $KL = d(I,d) - R$
Do đó MN ngắn nhất khi $MN = KL$
Từ đây ta suy ra $P = (a-c)^2 + (b-d)^2 = MN^2$ bé nhất khi và chỉ khi $MN = d(I;d) - R = 5 - 1 = 4$. Vậy giá trị nhỏ nhất $P_{\min} = 16$

Câu 66. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ và các đường thẳng $d_1 : mx + y - m - 1 = 0$, $d_2 : x - my + m - 1 = 0$. Tìm các giá trị của tham số m để mỗi đường thẳng d_1, d_2 cắt

(C) tại 2 điểm phân biệt sao cho 4 điểm đó lập thành 1 tứ giác có diện tích lớn nhất. Khi đó tổng của tất cả các giá trị tham số m là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $(C)\begin{cases} I(1;2) \\ R=2 \end{cases}$

Ta dễ thấy đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm $M(1;1)$ cố định nằm trong đường tròn (C) và $d_1 \perp d_2$. Gọi A,B là giao điểm của d_1 và (C), C,D là giao điểm của d_2 và (C). H,K lần lượt là hình chiếu của I trên d_1 và d_2

Khi đó

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AB.CD=2AH.CK=2\sqrt{R^2-\left[d\left(I,d_1\right)\right]^2}.\sqrt{R^2-\left[d\left(I,d_2\right)\right]^2}$$

$$=2\sqrt{4-\frac{1}{m^2+1}}\sqrt{4-\frac{m^2}{m^2+1}}=2\frac{\sqrt{\left(4m^2+3\right)\left(3m^2+4\right)}}{m^2+1}\le\frac{4m^2+3+3m^2+4}{m^2+1}=7$$

Do đó $\max S_{ABCD}=7$ khi $m=\pm1$. Khi đó tổng các giá trị của m bằng 0.

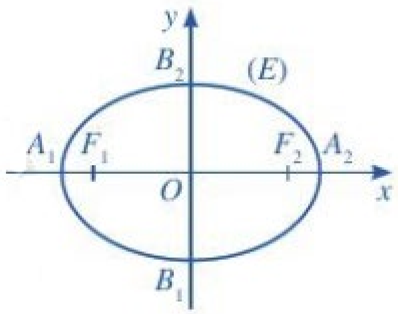
Bài 6. BA ĐƯỜNG CÔNIC

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. Đường elip

1. Định nghĩa đường elip



Cho hai điểm F_1, F_2 cố định có khoảng cách $F_1F_2 = 2c(c > 0)$.
Đường elip (còn gọi là elip) là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$, trong đó a là số cho trước lớn hơn c.
Hai điểm F_1 và F_2 được gọi là hai tiêu điểm của elip.

2. Phương trình chính tắc của elip
Ta chứng minh được rằng:
Khi chọn hệ trục tọa độ như trên, phương trình đường elip có thể viết dưới dạng
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0.$
Đây gọi là phương trình chính tắc của elip.
Chú ý
Đối với elip (E) có phương trình chính tắc như đã nêu ở trên, ta có:
- $c^2 = a^2 - b^2$,ở đó $2c = F_1F_2$.
- Nếu điểm $M(x;y)$ thuộc elip (E) thì $-a \le x \le a$.

Ví dụ 1. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của đường elip?
a) $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$;
b) $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = -1$
c) $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$
d) $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$.

Giải
Phương trình chính tắc của elip có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a > b > 0$ nên chỉ có trường hợp d) là phương trình chính tắc của đường elip.

Ví dụ 2. Lập phương trình chính tắc của elip (E) có một tiêu điểm là $F_2(5;0)$ và đi qua điểm $M(0;3)$.

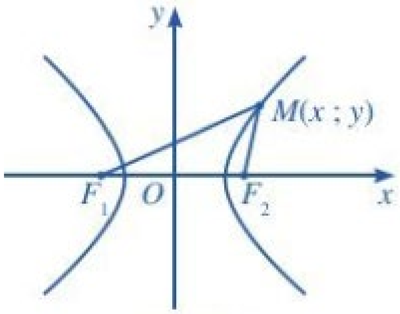
Giải
Elip (E) có phương trình chính tắc là:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0).$

Do $F_2(5;0)$ là một tiêu điểm của (E) nên $c=5$. Điểm $M(0;3)$ nằm trên (E) nên $\frac{0^2}{a^2}+\frac{3^2}{b^2}=1$. Do đó $b^2=9$, suy ra $a^2=b^2+c^2=9+25=34$

Vậy elip (E) có phương trình chính tắc là: $\frac{x^2}{34}+\frac{y^2}{9}=1$.

II. Đường Hypebol



Cho hai điểm F_1, F_2 cố định có khoảng cách $F_1F_2=2c(c>0)$.

Đường hypebol (còn gọi là hypebol) là tập hợp các điểm M sao cho $\left|MF_1-MF_2\right|=2a$, trong đó a là số dương cho trước nhỏ hơn c.

Hai điểm F_1 và F_2 được gọi là hai tiêu điểm của hypebol.

2. Phương trình chính tắc của đường hypebol

Ta chứng minh được rằng:

Khi chọn hệ trục toạ độ như trên, phương trình đường hypebol có thể viết dưới dạng

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, a>0, b>0.$

Đây gọi là phương trình chính tắc của hypebol.

Chú ý

Đối với hypebol (H) có phương trình chính tắc như đã nêu ở trên, ta có:

- $c^2=a^2+b^2$, ở đó $2c=F_1F_2$, và điều kiện $a>b$ là không bắt buộc.
- Nếu điểm $M(x;y)$ thuộc hypebol (H) thì $x\le -a$ hoặc $x\ge a$.

Ví dụ 3. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của đường hypebol?

a) $\frac{x^2}{5^2}-\frac{y^2}{4^2}=-1$

b) $\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{5^2}=1$

c) $\frac{x^2}{5^2}-\frac{y^2}{5^2}=1$

d) $\frac{x^2}{5^2}-\frac{y^2}{4^2}=1$

Giải

Phương trình chính tắc của hypebol có dạng $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, với $a>0, b>0$ nên các trường hợp b), c), d) là phương trình chính tắc của đường hypebol.

Ví dụ 4. Viết phương trình chính tắc của đường hypebol (H) có một tiêu điểm là $F_2(6;0)$ và đi qua điểm $A_2(4;0)$.

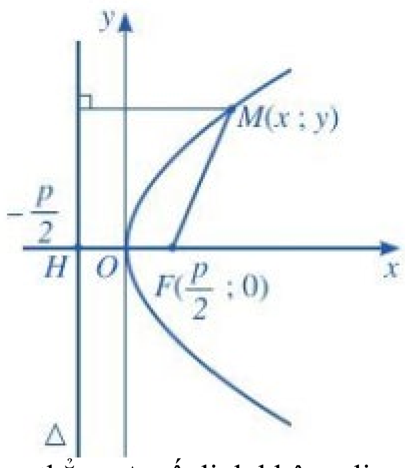
Giải

Giả sử hypebol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a>0,b>0$.

Do $A_2(4;0)$ thuộc (H) nên $\frac{4^2}{a^2}-\frac{0^2}{b^2}=1$, suy ra $a=4$. Mà $F_2(6;0)$ là tiêu điểm của (H) nên $c=6$. Suy ra $b^2=c^2-a^2=36-16=20$.

Vậy hypebol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$.

III. Đường parabol



Cho một điểm F cố định và một đường thẳng Δ cố định không đi qua F.
Đường parabol (còn gọi là parabol) là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng cách đều F và Δ.
Điểm F được gọi là tiêu điểm của parabol. Đường thẳng Δ được gọi là đường chuẩn của parabol.

2. Phương trình chính tắc của parabol

Khi chọn hệ trục toạ độ như trên, phương trình đường parabol có thể viết dưới dạng
$y^2=2px(p>0)$.
Đây gọi là phương trình chính tắc của parabol.
Chú ý: Đối với parabol (P) có phương trình chính tắc $y^2=2px(p>0)$, ta có:

- Tiêu điểm là $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ và phương trình đường chuẩn là $x+\frac{p}{2}=0$.
- Nếu điểm $M(x;y)$ thuộc parabol (P) thì $x\geq 0$.

Ví dụ 5. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của đường parabol?

a) $y^2=-6x$;
b) $y^2=6x$
c) $x^2=-6y$;
d) $x^2=6y$.

Giải

Phương trình chính tắc của parabol có dạng $y^2=2px$ với $p>0$ nên chỉ có trường hợp b) là phương trình chính tắc của đường parabol.

Ví dụ 6. Viết phương trình chính tắc của parabol (P) biết:

a) (P) có tiêu điểm là $F(5;0)$;
b) (P) đi qua điểm $M(2;1)$.

Giải

Gọi phương trình chính tắc của parabol (P) là: $y^2=2px(p>0)$.

a) Vì (P) có tiêu điểm là $F(5;0)$ nên $\frac{p}{2}=5$, tức là $p=10$. Vậy phương trình chính tắc của parabol (P) là $y^2=20x$.

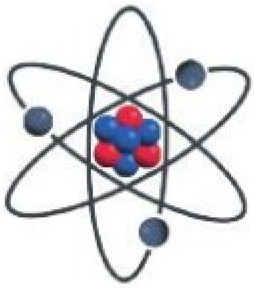
b) Do điểm $M(2;1)$ nằm trên (P) nên $1^2 = 2p$. 2, tức là $p = \frac{1}{4}$.Vậy phương trình chính tắc của parabol

(P) là $y^2 = \frac{x}{2}$

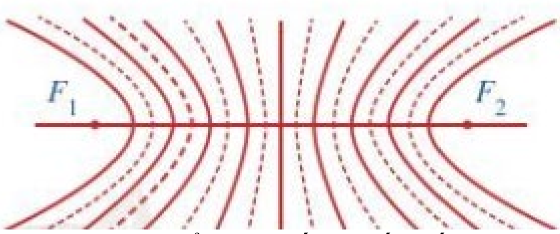
IV. Một số ứng dụng thực tiễn của ba đường conic

Ba đường conic có nhiều ứng dụng trong thực tiễn. Ta nêu ra một vài ứng dụng của ba đường conic.

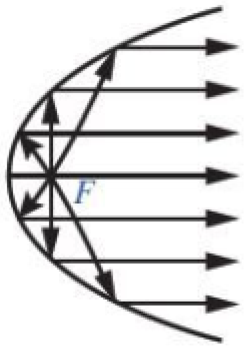
1. Năm 1911, nhà vật lí học người Anh là Ernest Rutherford (1871 - 1937) đã đề xuất mô hình hành tinh nguyên tử, trong đó hạt nhân nhỏ bé nằm tại tâm của nguyên tử, còn các electron bay quanh hạt nhân trên các quỹ đạo hình elip như các hành tinh bay quanh Mặt Trời



2. Trong vật lí, hiện tượng hai sóng gặp nhau tạo nên các gợn sóng ổn định gọi là hiện tượng giao thoa của hai sóng. Các gợn sóng có hình các đường hypebol gọi là các vân giao thoa



3. Với gương parabol, tia sáng phát ra từ tiêu điểm (tia tới) chiếu đến một điểm của parabol sẽ bị hắt lại (tia phản xạ) theo một tia song song (hoặc trùng) với trục của parabol



Tính chất trên có nhiều ứng dụng, chẳng hạn:

- Đèn pha: Bề mặt của đèn pha là một mặt tròn xoay sinh bởi một cung parabol quay quanh trục của nó, bóng đèn được đặt ở vị trí tiêu điểm của parabol đó. Các tia sáng phát ra từ bóng đèn khi chiếu đến bề mặt của đèn pha sẽ bị hắt lại theo các tia sáng song song, cho phép chúng ta quan sát được các vật ở xa.

- Chảo vệ tinh cũng có dạng như đèn pha. Điểm thu và phát tín hiệu của máy được đặt ở vị trí tiêu điểm của parabol

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Các bài toán liên quan elip

Câu 1. Xác định các đỉnh, độ dài các trục, tiêu cự, tiêu điểm, tâm sai của elip có phương trình sau:

$a)\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ $\qquad$ $b)\ 4x^2+25y^2=100$

Câu 2. Lập phương trình chính tắc của Elip, biết

a) Elip đi qua điểm $M\left(2;\frac{5}{3}\right)$ và có một tiêu điểm $F(-2;0)$.

b) Elip nhận $F_2(5;0)$ là một tiêu điểm và có độ dài trục nhỏ bằng $4\sqrt{6}$.

c) Elip có độ dài trục lớn bằng $2\sqrt{5}$ và tiêu cự bằng 2.

d) Elip đi qua hai điểm $M\left(2;-\sqrt{2}\right)$ và $N\left(-\sqrt{6};1\right)$.

Câu 3. Lập phương trình chính tắc của Elip, biết

a) Elip có tổng độ dài hai trục bằng 8 và tâm sai $e=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Elip có tâm sai $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$ có hình chữ nhật cơ sở có chu vi bằng 20.

c) Elip có tiêu điểm $F_1(-2;0)$ và có hình chữ nhật cơ sở có diện tích bằng $12\sqrt{5}$.

Câu 4. Lập phương trình chính tắc Elip, biết:

a) Elip đi qua điểm $M\left(-\sqrt{5};2\right)$ và khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng 10.

b) Elip có tâm sai $e=\frac{3}{5}$ và khoảng cách từ tâm đối xứng của nó đến một đường chuẩn bằng $\frac{25}{3}$.

c) Elip có độ dài trục lớn bằng 10 và phương trình một đường chuẩn là $x=\frac{25}{4}$.

d) Khoảng cách giữa các đường chuẩn bằng 36 và bán kinh qua tiêu điểm của M thuộc Elip là 9 và 15.

Câu 5. Lập phương trình chính tắc Elip, biết:

a) Elip có hình chữ nhật cơ sở nội tiếp đường tròn $(C): x^2+y^2=41$ và đi qua điểm $A(0;5)$.

b) Elip co hình chữ nhật cơ sở nội tiếp đường tròn $(C): x^2+y^2=21$ và đi qua điểm $M(1;2)$ nhìn hai tiêu điểm của Elip dưới một góc 60^0.

c) Một cạnh hình chữ nhật cơ sở của Elip nằm trên $d: x-\sqrt{5}=0$ và độ dài đường chéo hình chữ nhật bằng 6.

d) Tứ giác ABCD là hình thoi có bốn đỉnh trùng với các đỉnh của Elip. Bán kính của đường tròn nội tiếp hình thoi bằng $\sqrt{2}$ và tâm sai của Elip bằng $\frac{1}{2}$.

Câu 6. Lập phương trình chính tắc Elip, biết:

a) Tứ giác ABCD là hình thoi có 4 đỉnh trùng với các đỉnh của Elip. Đường tròn tiếp xúc với các cạnh của hình thoi có phương trình $(C): x^2+y^2=4$ và $AC=2BD$, A thuộc Ox.

b) Elip có độ dài trục lớn bằng 8 và giao điểm của Elip với đường tròn $(C): x^2+y^2=8$ tạo thành 4 đỉnh của một hình vuông.

c) Elip có tâm sai $e=\frac{1}{3}$ và giao điểm của fElip với đường tròn $(C): x^2+y^2=9$ tại 4 điểm A, B, C, D sao cho AB song song với Ox và $AB=3BC$.

d) Elip có độ dài trục lớn bằng $4\sqrt{2}$, các đỉnh trên trục nhỏ và các tiêu điểm của Elip cùng nằm trên một đường tròn.

Câu 7. Lập phương trình chính tắc của Elip, biết:

a) Elip có hai đỉnh trên trục nhỏ cùng với hai tiêu điểm tạo thành một hình vuông có diệc tích bằng 32.

b) Elip có một đỉnh và hai tiêu điểm tạo thành một tam giác đều và chu vi hình chữ nhật cơ sở của Elip bằng $12(2+\sqrt{3})$.

c) Elip đi qua điểm $M(2\sqrt{3};2)$ và M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông.

d) Elip đi qua điểm $M\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ và tiêu điểm nhìn trục nhỏ dưới một góc 60^0 .

Câu 8. Lập phương trình chính tắc của Elip, biết:

a) Elip có một tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3};0)$ và đi qua điểm M, biết tam giác F_1MF_2 có diện tích bằng 1 và vuông tại M.

b) Elip đi qua 3 đỉnh của tam giác đều ABC. Biết tam giác ABC có trục đối xứng là Oy, $A(0;2)$ và có diện tích bằng $\frac{49\sqrt{3}}{12}$.

c) Khi M thay đổi trên Elip thì độ dài nhỏ nhất của OM bằng 4 và độ dài lớn nhất của MF_1 bằng 8 với F_1 là tiêu điểm có hoành độ âm của Elip.

Câu 9. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho

a) Elip $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Gọi $F_1;F_2$ là hai tiêu điểm của Elip; A, B là hai điểm thuộc (E) sao cho $AF_1+BF_2=8$. Tính AF_2+BF_1

b) Elip $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$. Gọi $F_1;F_2$ là hai tiêu điểm của Elip; trong đó F_1 có hoành độ âm. Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho $MF_1=2MF_2$

c) Elip $(E): \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. Gọi $F_1;F_2$ là hai tiêu điểm của Elip; trong đó F_1 có hoành độ âm. Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho $MF_1-MF_2=2$

Câu 10. Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho.

a) Elip $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$. Tìm những điểm M thuộc (E) sao cho nó nhìn hai tiêu điểm của Elip dưới một góc vuông.

b) Elip $(E): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. Gọi $F_1;F_2$ là hai tiêu điểm của Elip. Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho $\widehat{F_1MF_2}=60^0$

c) Elip $(E): \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$. Gọi $F_1;F_2$ là hai tiêu điểm của Elip, Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho $\widehat{F_1MF_2}=120^0$

d) Elip $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Gọi $F_1;F_2$ là hai tiêu điểm của Elip; trong đó F_1 có hoành độ âm. Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho $\widehat{MF_1F_2}=120^0$

Câu 11. Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho.

a) Elip $(E): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ và điểm $C(2;0)$. Tìm tọa độ các điểm A, B thuộc (E) biết rằng A, B đối xứng nhau qua trục hoành và tam giác ABC đều.

b) Elip $(E): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ Tìm tọa độ các điểm A, B thuộc (E) có hoành độ dương sao cho tam giác OAB cân tại O và có diện tích lớn nhất.

c) Elip $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$ và điểm $A(3;0)$ **.** Tìm tọa độ các điểm B, C thuộc (E) sao cho tam giác ABC vuông cân tại A, biết B có tung độ dương.

Câu 12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho

a) Elip $(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{5}=1$ và hai điểm $A(-5;-1)$, $B(-1;1)$. Xác định tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho diện tích tam giác MAB lớn nhất.

b) Elip $(E): \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ và hai điểm $A(3;4)$, $B(5;3)$. Tìm trên (E) điểm C sao cho tam giác ABC có diện tích bằng $4,5$.

c) Elip $(E): \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{1}=1$. Tìm trên (E) những điểm sao cho khoảng cách từ điểm đó đến đường thẳng $d: 2x-3y+1=0$ là lớn nhất.

Câu 13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho

a) Elip $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ và các điểm $A(-3;0)$, $I(-1;0)$. Tìm tọa độ các điểm B, C thuộc (E) sao cho I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Elip $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ có hai tiêu điểm F_1, F_2. Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác MF_1F_2 bằng $\frac{4}{3}$.

c) Elip $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ có hai tiêu điểm F_1, F_2. Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho đường phân giác trong góc $\widehat{F_1MF_2}$ đi qua điểm $N\left(-\frac{48}{25};0\right)$.

Câu 14. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho

a) Elip $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ và điểm $M(1;1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho M là trung điểm AB.

b) Elip $(E): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ và điểm $M\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua M và cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $MA=2MB$.

c) Elip $(E): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ và đường thẳng $d: 2x+y+3=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc d và cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 1.

d) Elip $(E): x^2+3y^2=6$ có hai tiêu điểm F_1, F_2 trong đó F_1 có hoành độ âm. Gọi d là đường thẳng đi qua F_2 và song song với $\Delta: y=-x+1$ đồng thời cắt (E) tại hai điểm A, B phân biệt. Tính diện tích tam giác ABF_1.

Câu 15. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho Elip $(E): \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ và đường thẳng $d: x-\sqrt{2}y+2=0$. Đường thẳng d cắt (E) tại hai điểm A, B. Tìm tọa độ điểm C trên (E) sao cho tam giác ABC cân tại C.

Câu 16. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho Elip $(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ và đường thẳng $d: 3x+4y-12=0$. Đường thẳng d cắt (E) tại hai điểm A, B. Tìm tọa độ điểm C trên (E) sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 6.

Câu 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2=8$ và elip $(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{\frac{16}{3}}=1$. Tính diện tích hình chữ nhật có bốn đỉnh là các giao điểm của đường tròn (C) và elip (E).

Dạng 2. Các bài toán liên quan hypebol

Câu 18. Xác định tọa độ các đỉnh, các tiêu điểm, tính tâm sai, độ dài trục thực, độ dài trục ảo và viết phương trình các đường tiệm cận của các hypebol (H) sau:

a) $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{8}=1$. b) $5x^2-4y^2=20$.

Câu 19. Viết phương trình chính tắc của hypebol (H) trong mỗi trường hợp sau:

a) (H) có một tiêu điểm tọa độ là $(-4;0)$ và độ dài trục ảo bằng $2\sqrt{7}$.

b) (H) có tiêu cự bằng 10 và đường tiệm cận là $y=\pm\frac{4}{3}x$.

c) (H) có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{13}}{3}$ và diện tích hình chữ nhật cơ sở bằng 48.

d) (H) đi qua hai điểm $M\left(\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$ và $N\left(-1;-\sqrt{3}\right)$.

e) (H) đi qua $M(-2;1)$ và góc giữa hai đường tiệm cận bằng $60°$.

Câu 20. Cho hypebol $(H): \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{6}=1$ có tiêu điểm F_1 và F_2. Tìm điểm M trên (H) trong các trường hợp sau:

a) Điểm M có hoành độ là 4.
b) Khoảng cách hai điểm M và F_1 bằng 3.

c) Tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận bằng $\frac{24\sqrt{2}}{5}$.

Câu 21. Tìm các điểm trên hypebol $(H): 4x^2 - y^2 - 4 = 0$.

a) Nhìn hai tiêu điểm dưới góc vuông.
b) Nhìn hai tiêu điểm dưới góc $120°$.
c) Có tọa độ nguyên.

Câu 22. Cho số $m > 0$. Chứng minh rằng hypebol (H) có các tiêu điểm $F_1(-m;m)$, $F_2(m;m)$ và giá trị tuyệt đối của hiệu các khoảng cách từ mỗi điểm trên (H) tới các tiêu điểm là $2m$, có phương trình $x.y = \frac{m^2}{2}$.

Câu 23. Cho $F_1(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$, $F_2(\sqrt{2};\sqrt{2})$. Chứng minh mỗi điểm $M(x;y)$ thuộc đồ thị $y = \frac{1}{x}$ đều có $|MF_1 - MF_2| = 2\sqrt{2}$.

Câu 24. Cho hyperbol $(H): \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và có hệ số góc k, Δ' là đường thẳng đi qua O và vuông góc với Δ.

a) Xác định tọa độ các tiêu điểm. tâm sai, phương trình các đường tiệm cận và đường chuẩn của (H).

b) Tìm điều kiện của k để cả Δ và Δ' đều cắt (H).

c) Tứ giác với bốn đỉnh là bốn giao điểm của Δ và Δ' với (H) là hình gì? Tính diện tích tứ giác này theo k. Xác định k để diện tích tứ giác đó có giá trị nhỏ nhất.

Câu 25. Cho hyperbol $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ một điểm tùy ý trên (H) đến các đường tiệm cận bằng $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

Câu 26. Cho hyperbol $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Một đường thẳng Δ cắt (H) tại P, Q và cắt hai đường tiệm cận ở M, N. Chứng minh $MP = NQ$. Nếu Δ có phương trình không đổi thì tích $\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{PN}$ là hằng số.

Câu 27. Cho hyperbol $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Gọi F_1, F_2 là các tiêu điểm, A_1, A_2 là các đỉnh của (H). M là điểm tùy ý trên (H) và N là hình chiếu của nó trên trục hoành. Chứng minh rằng

a) $OM^2 - MF_1.MF_2 = a^2 - b^2$. b) $(MF_1 + MF_2)^2 = 4(OM^2 + b^2)$.

c) $MN^2 = \frac{b^2}{a^2}.\overrightarrow{NA_1}.\overrightarrow{NA_2}$.

Câu 28. Cho hyperbol (H). Chứng minh diện tích của hình bình hành xác định bởi hai đường tiệm cận và hai đường thẳng đi qua một điểm trên (H), song song với hai đường tiệm cận là một hằng số.

Câu 29. Hai đỉnh đối diện của một hình bình hành nằm trên hyperbol (H), các cạnh của hình bình hành song song với các đường tiệm cận của (H). Chứng minh đường thẳng nối hai đỉnh đối diện còn lại của hình bình hành đó luôn đi qua tâm đối xứng của (H).

Dạng 3. Các bài toán liên quan parabol.

Câu 30. Tìm tiêu điểm, đường chuẩn và vẽ parabol sau

a) $y^2 = 4x$. **b)** $y^2 - x = 0$.

Câu 31. Viết phương trình chính tắc của parabol (P) biết

a) (P) có tiêu điểm là $F(5;0)$.

b) khoảng cách từ tiêu điểm F đến đường thẳng $\Delta: x + y - 12 = 0$ là $2\sqrt{2}$.

Câu 32. Viết phương trình chính tắc của parabol (P) biết

a) (P) có đường chuẩn $\Delta:\ x = -5$. b) (P) có $p = \dfrac{1}{3}$.

Câu 33. Cho elip (E): $9x^2 + 16y^2 = 144$.

a) Tìm các tiêu điểm, tiêu cự và tâm sai của elip.

b) Lập phương trình chính tắc của hypebol (H) có cùng hình chữ nhật cơ sở với elip (E).

c) Lập phương trình chính tắc của parabol (P) có tiêu điểm trùng với tiêu điểm bên phải của elip (E).

Câu 34. Trong mặt phẳng Oxy, cho parabol có tiêu điểm F.

a) Tìm trên (P) điểm M cách F một khoảng là 3.

b) Tìm điểm M trên (P) sao cho $S_{OMF} = 8$.

c) Tìm điểm A nằm trên parabol và một điểm B nằm trên đường thẳng $\Delta: 4x - 3y + 5 = 0$ sao cho AB ngắn nhất.

Câu 35. Cho parabol (P): $y^2 = 12x$ có tiêu điểm F. Tìm hai điểm A, B trên (P) sao cho tam giác OAB có trực tâm là F.

Câu 36. Cho parabol (P) có phương trình $y^2 = 4x$. Tìm tọa độ các điểm M nằm trên parabol (P) và cách tiêu điểm một khoảng bằng 3.

Câu 37. Tìm độ dài dây cung vuông góc với trục đối xứng của parabol $y^2 = 2px$ tại tiêu điểm F.

Câu 38. Cho parabol $(P): y^2 = 2px$. Với mỗi điểm $M \in (P)$ và khác gốc O, gọi M' là hình chiếu của M lên Oy và I là trung điểm của đoạn OM'. Chứng minh đường thẳng IM có điểm chung duy nhất với (P) và là phân giác của góc $M'MF$.

Câu 39. Qua một điểm A cố định trên trục đối xứng của parabol $(P): y^2 = 2px$, ta vẽ một đường thẳng cắt (P) tại hai điểm M, N. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ M, N tới trục đối xứng của (P) là hằng số.

Câu 40. Cho dây cung AB đi qua tiêu điểm F của parabol (P). Chứng minh khoảng cách từ trung điểm I của AB đến đường chuẩn Δ bằng $\dfrac{AB}{2}$. Suy ra đường tròn đường kính PB tiếp xúc với đường chuẩn.

Câu 41. Cho Parabol $(P): y^2 = 2px$ và đường thẳng d có phương trình $2mx - 2y - mp = 0$. Gọi A, B là các giao điểm của (P) và d. Chứng tỏ rằng đường tròn đường kính AB tiếp xúa với đường chuẩn của (P).

Câu 42. Cho A, B là hai điểm trên parabol $(P): y^2 = 2px$ sao cho tổng khoảng cách từ A, B tới đường chuẩn của (P) bằng độ dài AB. Chứng minh rằng AB luôn đi qua tiêu điểm của (P).

Câu 43. Cho parabol $(P): y^2 = \frac{1}{2}x$. Hai điểm lưu động M, N thuộc (P), khác gốc O sao cho OM vuông góc với ON. Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 44. Cho Parabol $(P): y^2 = 2px$ $(p > 0)$. A là một điểm cố định trên (P). Một góc vuông uAt quay quanh đỉnh A có các cạnh cắt (P) tại B và C. Chứng minh rằng đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 45. Cho hai parabol (P) và (P') lần lượt có phương trình $y^2 = 2px$ và $y^2 = 2p'x$. Qua O vẽ đường thẳng thay đổi cắt (P) và (P') tại hai điểm phân biệt A và A'. Chứng minh rằng tỉ số $\frac{OA}{OA'}$ không thay đổi.

Câu 46. Cho Parabol $(P): y^2 = 2px$ $(p > 0)$ và đường thẳng d quay quanh tiêu điểm F và cắt (P) tại hai điểm M, N. Gọi $\alpha = \left(\vec{i}, \overrightarrow{FM}\right)$, $(0 < \alpha < \pi)$.

a) Chứng minh $\frac{1}{MF} + \frac{1}{NF}$ không đổi.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của tích $FM.FN$ khi α thay đổi.

Câu 47. Cho hai parabol lần lượt có phương trình $y^2 = 2px$ và $y = ax^2 + bx + c$. Chứng minh rằng nếu hai parabol đó cắt nhau tại bốn điểm phân biệt thì bốn điểm đó nằm trên một đường tròn.

Dạng 4. Các bài toán liên quan đường cônic

Để nhận dạng đường cônic ta dựa vào tâm sai:

- Elip là một đường cônic có tâm sai $e < 1$.
- Parabol là một đường cônic có tâm sai $e = 1$.
- Hypebol là một đường cônic có tâm sai $e > 1$.

Từ phương trình của các đường cônic ta xác định được dạng của nó từ đó xác định được tiêu điểm và đường chuẩn của nó.

Câu 48. Xác định tiêu điểm và đường chuẩn của các đường cônic sau.

a) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$. b) $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{10} = 1$ c) $y^2 = 18x$

Câu 49. Cho cônic có tiêu điểm $F(-1;1)$ đi qua điểm $M(1;1)$ và đường chuẩn $\Delta: 3x + 4y - 5 = 0$. Cônic này là elip, hypebol hay là parabol?

Câu 50. Cho đường thẳng $\Delta: x - y + 1 = 0$ và điểm $F(1;0)$. Viết phương trình của đường cônic nhận F làm tiêu điểm và Δ làm đường chuẩn trong mỗi trường hợp sau:

a) Tâm sai $e=\sqrt{3}$.   b) Tâm sai $e=\frac{1}{2}$ c) Tâm sai $e=1$

Câu 51. Cho điểm $A(0;\sqrt{3})$ và hai đường thẳng $\Delta: x-2=0,\ \Delta': 3x-y=0$.

a) Viết phương trình chính tắc đường elip có A là một đỉnh và một đường chuẩn Δ.

b) Viết phương trình chính tắc đường hypebol có Δ là một đường chuẩn và Δ' là tiệm cận.

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Các bài toán liên quan elip

Câu 1. Đường Elip $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ có tiêu cự bằng

A. 6.   **B.** 8.   **C.** 9.   **D.** $(-2;+\infty)$.

Câu 2. Cho elip (E) có phương trình $16x^2+25y^2=400$. Khẳng định nào sai trong các khẳng định sau?

A. (E) có trục nhỏ bằng 8.

B. (E) có tiêu cự bằng 3.

C. (E) có trục nhỏ bằng 10.

D. (E) có các tiêu điểm $F_1(-3;0)$ và $F_2(3;0)$.

Câu 3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Tiêu cự của (E) bằng

A. 10.   **B.** 16.   **C.** 4.   **D.** 8.

Câu 4. Một elip có diện tích hình chữ nhật cơ sở là 80, độ dài tiêu cự là 6. Tâm sai của elip đó là

A. $e=\frac{4}{5}$.   **B.** $e=\frac{3}{4}$.   **C.** $e=\frac{3}{5}$.   **D.** $e=\frac{4}{3}$.

Câu 5. Cho elip $(E): 4x^2+5y^2=20$. Diện tích hình chữ nhật cơ sở của (E) là

A. $2\sqrt{5}$.   **B.** 80.   **C.** $8\sqrt{5}$.   **D.** 40.

Câu 6. Đường elip $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ có tiêu cự bằng

A. 3.   **B.** 9.   **C.** 6.   **D.** 18.

Câu 7. Cho elip có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. Tính tâm sai của elip.

A. $\frac{2}{\sqrt{3}}$.   **B.** $\frac{1}{2}$.   **C.** $\frac{1}{4}$.   **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (với $a>b>0$) có F_1, F_2 là các tiêu điểm và M là một điểm di động trên (E). Khẳng định nào dưới đây là **đúng?**

A. $MF_1+MF_2=2b$.   **B.** $(MF_1-MF_2)^2=4(b^2-OM^2)$.

C. $OM^2-MF_1.MF_2=a^2-b^2$.   **D.** $MF_1.MF_2+OM^2=a^2+b^2$.

Câu 9. Trong hệ trục Oxy, cho Elip (E) có các tiêu điểm $F_1(-4;0), F_2(4;0)$ và một điểm M nằm trên (E). Biết rằng chu vi của tam giác MF_1F_2 bằng 18. Xác định tâm sai e của (E).

A. $e=\frac{4}{5}$. **B.** $e=\frac{4}{18}$. **C.** $e=-\frac{4}{5}$. **D.** $e=\frac{4}{9}$.

Câu 10. Cho Elip (E) đi qua điểm $A(-3;0)$ và có tâm sai $e=\frac{5}{6}$. Tiêu cự của (E) là

A. 10. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** 5. **D.** $\frac{10}{3}$.

Câu 11. Trong mặt phẳng Oxy, phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của một elip?

A. $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$. **B.** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{8}=1$. **C.** $\frac{x}{9}+\frac{y}{8}=1$. **D.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$.

Câu 12. Phương trình chính tắc của đường elip với $a=4$, $b=3$ là

A. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **B.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$. **C.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. **D.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$.

Câu 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình chính tắc của elip biết một đỉnh là $A_1(-5;0)$ và một tiêu điểm là $F_2(2;0)$.

A. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$. **B.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$. **C.** $\frac{x^2}{29}+\frac{y^2}{25}=1$. **D.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{29}=1$.

Câu 14. Tìm phương trình chính tắc của Elip có độ dài trục lớn bằng $4\sqrt{10}$ và đi qua điểm $A(0;6)$:

A. $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{12}=1$. **B.** $\frac{x^2}{160}+\frac{y^2}{36}=1$. **C.** $\frac{x^2}{160}+\frac{y^2}{32}=1$. **D.** $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{36}=1$.

Câu 15. Lập phương trình chính tắc của Elip đi qua điểm B và có tâm sai $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

A. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. **B.** $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$. **C.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{2}=1$. **D.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$

Câu 16. Phương trình chính tắc của Elip có đỉnh $(-3;0)$ và một tiêu điểm là $(1;0)$ là

A. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{9}=1$. **B.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$. **C.** $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{9}=1$. **D.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$.

Câu 17. Tìm phương trình chính tắc của elip có tiêu cự bằng 6 và trục lớn bằng 10.

A. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. **B.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$. **C.** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{81}=1$. **D.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

Câu 18. Cho elip (E) có độ dài trục lớn gấp hai lần độ dài trục nhỏ và tiêu cự bằng 6. Viết phương trình của (E)?

A. $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$. **B.** $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$. **C.** $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{12}=1$. **D.** $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{12}=1$.

Câu 19. Phương trình chính tắc của Elip có độ dài trục lớn bằng 8, độ dài trục nhỏ bằng 6 là:

A. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$. **B.** $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$. **C.** $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1$. **D.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

Câu 20. Elip có một tiêu điểm $F(-2;0)$ và tích độ dài trục lớn với trục bé bằng $12\sqrt{5}$. Phương trình chính tắc của elip là:

A. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$. **B.** $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{16}=1$. **C.** $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{5}=1$. **D.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$.

Câu 21. Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình chính tắc của elip (E) biết (E) đi qua $M\left(\frac{3}{\sqrt{5}};\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ và M nhìn hai tiêu điểm F_1, F_2 dưới một góc vuông.

A. $(E): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$. **B.** $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. **C.** $(E): \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$. **D.** $(E): \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$.

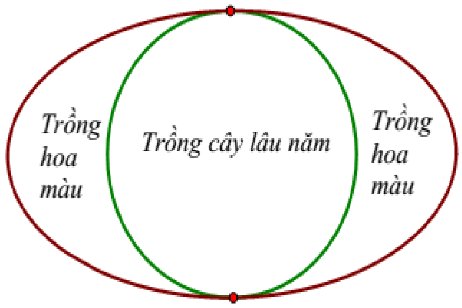
Câu 22. Cho Elip $(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ và điểm M nằm trên (E). Nếu điểm M có hoành độ bằng 1 thì các khoảng cách từ M đến hai tiêu điểm của (E) bằng:

A. $3,5$ và $4,5$. **B.** $4\pm\sqrt{2}$. **C.** 3 và 5. **D.** $4\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 23. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Điểm $M\in(E)$ sao cho $\widehat{F_1MF_2}=90^0$. Tìm bán kính đường tròn nội tiếp tam giác MF_1F_2.

A. 2 **B.** 4. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 24. Ông Hoàng có một mảnh vườn hình Elip có chiều dài trục lớn và trục nhỏ lần lượt là $60m$ và $30m$. Ông chia mảnh vườn ra làm hai nửa bằng một đường tròn tiếp xúc trong với Elip để làm mục đích sử dụng khác nhau (xem hình vẽ). Nửa bên trong đường tròn ông trồng cây lâu năm, nửa bên ngoài đường tròn ông trồng hoa màu. Tính tỉ số diện tích T giữa phần trồng cây lâu năm so với diện tích trồng hoa màu. Biết diện tích hình Elip được tính theo công thức $S=\pi ab$, với a, b lần lượt là nửa độ dài trục lớn và nửa độ dài trục nhỏ. Biết độ rộng của đường Elip là không đáng kể.



A. $T=\frac{2}{3}$. **B.** $T=\frac{3}{2}$. **C.** $T=\frac{1}{2}$. **D.** $T=1$.

Câu 25. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hai đường tròn $(C_1),(C_2)$ có phương trình lần lượt là $(x+1)^2+(y+2)^2=9, (x-2)^2+(y-2)^2=4$ và Elip (E) có phương trình $16x^2+49y^2=1$. Có bao nhiêu đường tròn (C) có bán kính gấp đôi độ dài trục lớn của elip (E) và (C) tiếp xúc với hai đường tròn (C_1), (C_2)?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 26. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $C(3;0)$ và elip (E): $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$. A, B là 2 điểm thuộc (E) sao cho $\triangle ABC$ đều, biết tọa độ của $A\left(\frac{a}{2};\frac{c\sqrt{3}}{2}\right)$ và A có tung độ âm. Khi đó $a+c$ bằng:

A. 2. **B.** 0. **C.** -2. **D.** -4.

Dạng 2. Các bài toán liên quan hypebol

Câu 27. Đường Hyperbol $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ có tiêu cự bằng:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 28. Đường Hyperbol $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{7}=1$ có tiêu cự bằng

A. 6. **B.** $2\sqrt{33}$. **C.** 3. **D.** 9.

Câu 29. Đường Hyperbol $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ có một tiêu điểm là điểm nào dưới đây ?

A. $(-5;0)$. **B.** $(0;\sqrt{7})$. **C.** $(\sqrt{7};0)$. **D.** $(0;5)$.

Câu 30. Cho điểm M nằm trên Hyperbol (H): $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$. Nếu điểm M có hoành độ bằng 12 thì khoảng cách từ M đến các tiêu điểm là bao nhiêu?

A. 8. **B.** $10;6$. **C.** $4\pm\sqrt{7}$. **D.** $14;22$.

Câu 31. Cho điểm M nằm trên Hyperbol (H): $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. Nếu hoành độ điểm M bằng 8 thì khoảng cách từ M đến các tiêu điểm của (H) là bao nhiêu?

A. 6 và 14. **B.** 5 và 13. **C.** $8\pm\sqrt{5}$. **D.** $8\pm4\sqrt{2}$.

Câu 32. Tâm sai của Hyperbol $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ bằng

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{3}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{4}{5}$.

Câu 33. Đường Hyperbol $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{16}=1$ có tiêu cự bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 12. **D.** 6.

Câu 34. Đường thẳng nào dưới đây là đường chuẩn của Hyperbol $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{12}=1$?

A. $x+8=0$. **B.** $x-\frac{3}{4}=0$. **C.** $x+2=0$. **D.** $x+\frac{5\sqrt{2}}{2}=0$.

Câu 35. Đường thẳng nào dưới đây là đường chuẩn của Hyperbol $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{15}=1$?

A. $x+4\sqrt{5}=0$. **B.** $x+4=0$. **C.** $x-\frac{4\sqrt{35}}{7}=0$. **D.** $x+2=0$.

Câu 36. Điểm nào trong 4 điểm $M(5\,;0), N(10;3), P(5\,;3), Q(5\,;4)$ nằm trên một đường tiệm cận của hyperbol $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$?

A. M. **B.** N. **C.** P. **D.** Q.

Câu 37. Tìm góc giữa 2 đường tiệm cận của hyperbol $\frac{x^2}{3}-y^2=1$.

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Câu 38. Hyperbol (H) có 2 đường tiệm cận vuông góc nhau thì có tâm sai bằng bao nhiêu ?

A. 2. **B.** 3. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 39. Tìm phương trình chính tắc của Hypebol (H) biết nó có tâm sai bằng 2 và tiêu cự bằng 4.

A. $\frac{x^2}{3}-y^2=1$. **B.** $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1$. **C.** $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{5}=1$. **D.** $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

Câu 40. Tìm phương trình chính tắc của Hypebol (H) biết nó có một đường chuẩn là $2x+\sqrt{2}=0$.

A. $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{4}=1$. **B.** $x^2-y^2=1$. **C.** $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$. **D.** $x^2-\frac{y^2}{2}=1$.

Câu 41. Tìm phương trình chính tắc của Hypebol (H) biết nó đi qua điểm $(2;\,1)$ và có một đường chuẩn là $x+\frac{2}{\sqrt{3}}=0$

A. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=1$. **B.** $x^2-\frac{y^2}{2}=1$. **C.** $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. **D.** $\frac{x^2}{2}-y^2=1$.

Câu 42. Tìm phương trình chính tắc của Hypebol (H) biết nó có trục thực dài gấp đôi trục ảo và có tiêu cự bằng 10.

A. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$. **B.** $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$. **C.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **D.** $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{10}=1$.

Câu 43. Tìm phương trình chính tắc của Hypebol (H) biết nó tiêu điểm là $(3;0)$ và một đường tiệm cận có phương trình là $\sqrt{2}x+y=0$.

A. $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$. **B.** $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$. **C.** $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{2}=1$. **D.** $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{8}=1$.

Câu 44. Tìm phương trình chính tắc của Hypebol (H) biết nó tiêu điểm là $(\sqrt{10};0)$ và một đường tiệm cận có phương trình là $3x+y=0$.

A. $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{3}=1$. **B.** $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{6}=1$. **C.** $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{9}=1$. **D.** $-x^2+\frac{y^2}{9}=1$.

Câu 45. Tìm phương trình chính tắc của Hypebol (H) mà hình chữ nhật cơ sở có một đỉnh là $(2;3)$

A. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=1$. **B.** $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{-3}=1$. **C.** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$. **D.** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$.

Câu 46. Tìm phương trình chính tắc của Hypebol (H) biết nó có một đường tiệm cận là $x-2y=0$ và hình chữ nhật cơ sở của nó có diện tích bằng 24.

A. $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$. **B.** $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{12}=1$. **C.** $\frac{x^2}{48}-\frac{y^2}{12}=1$. **D.** $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{48}=1$.

Câu 47. Tìm phương trình chính tắc của Hypebol (H) biết nó đi qua điểm là $(5;4)$ và một đường tiệm cận có phương trình là $x+y=0$.

A. $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$. **B.** $x^2-y^2=9$. **C.** $x^2-y^2=1$. **D.** $x^2-y^2=3$.

Dạng 3. Các bài toán liên quan parabol

Câu 48. Viết phương trình chính tắc của Parabol đi qua điểm $A(1\,;2)$.

A. $y^2 = 4x$. **B.** $y^2 = 2x$. **C.** $y = 2x^2$. **D.** $y = x^2 + 2x - 1$.

Câu 49. Viết phương trình chính tắc của Parabol đi qua điểm $A(5;2)$.

A. $y = x^2 - 3x - 12$. **B.** $y = x^2 - 27$. **C.** $y^2 = \frac{4x}{5}$. **D.** $y^2 = 5x - 21$.

Câu 50. Viết phương trình chính tắc của Parabol biết tiêu điểm $F(2;0)$.

A. $y^2 = 2x$. **B.** $y^2 = 4x$. **C.** $y^2 = 8x$. **D.** $y = \frac{1}{6}x^2$.

Câu 51. Viết phương trình chính tắc của Parabol biết tiêu điểm $F(5;0)$.

A. $y^2 = 5x$. **B.** $y^2 = 10x$. **C.** $y^2 = \frac{1}{5}x$. **D.** $y^2 = 20x$.

Câu 52. Viết phương trình chính tắc của Parabol biết đường chuẩn có phương trình $x + 1 = 0$.

A. $y^2 = 2x$. **B.** $y^2 = 4x$. **C.** $y = 4x^2$. **D.** $y^2 = 8x$.

Câu 53. Viết phương trình chính tắc của Parabol biết đường chuẩn có phương trình $x + \frac{1}{4} = 0$.

A. $y^2 = -x$. **B.** $y^2 = x$. **C.** $y^2 = 2x$. **D.** $y^2 = \frac{1}{2}x$.

Câu 54. Cho Parabol (P) có phương trình chính tắc $y^2 = 4x$. Một đường thẳng đi qua tiêu điểm F của (P) cắt (P) tại 2 điểm A và B. Nếu $A(1;2)$ thì tọa độ của B bằng bao nhiêu?

A. $(4;4)$. **B.** $(2;2\sqrt{2})$. **C.** $(1;-2)$. **D.** $(1;2)$.

Câu 55. Một điểm A thuộc Parabol (P): $y^2 = 4x$. Nếu khoảng cách từ A đến đường chuẩn bằng 5 thì khoảng cách từ A đến trục hoành bằng bao nhiêu?

A. 3. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 56. Một điểm M thuộc Parabol (P): $y^2 = x$. Nếu khoảng cách từ M đến tiêu điểm F của (P) bằng 1 thì hoành độ của điểm M bằng bao nhiêu?

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 3.

Câu 57. Cho M là một điểm thuộc Parabol $(P): y^2 = 64x$ và N là một điểm thuộc đường thẳng $d: 4x + 3y + 46 = 0$. Xác định M, N để đoạn MN ngắn nhất.

A. $M(-9;24), N(5;-22)$ **B.** $M(-9;24), N\left(-\frac{37}{5};\frac{126}{5}\right)$

C. $M(9;-24), N\left(-5;\frac{-26}{3}\right)$ **D.** $M(9;-24), N\left(\frac{37}{5};-\frac{126}{5}\right)$

Câu 58. Cho parabol $(P): y^2 = 4x$ và đường thẳng $d: 2x - y - 4 = 0$. Gọi A, B là giao điểm của d và (P). Tìm tung độ dương của điểm $C \in (P)$ sao cho ΔABC có diện tích bằng 12.

A. 3 **B.** 6 **C.** 2 **D.** 4

Câu 59. Cho parabol $(P): y^2 = x$ và đường thẳng $d: x - y - 2 = 0$. Gọi A, B là giao điểm của d và (P). Tìm tung độ điểm $C \in (P)$ sao cho ΔABC đều.

A. $\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ **B.** $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$

C. $\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ **D.** Không tồn tại điểm C.

Câu 60. Cho Parabol $(P): y^2 = 2x$ và đường thẳng $\Delta: x-2y+6=0$. Tính khoảng cách ngắn nhất giữa Δ và (P).

A. $d_{\min} = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ **B.** $d_{\min} = 2$ **C.** $d_{\min} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ **D.** $d_{\min} = 4$

Câu 61. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho điểm $A(0;2)$ và parabol $(P): y = x^2$. Xác định các điểm M trên (P) sao cho AM ngắn nhất.

A. $M\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ hoặc $M\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2};\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $M\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{9}{4}\right)$ hoặc $M\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{9}{4}\right)$.

C. $M\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{3}{4}\right)$ hoặc $M\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{3}{4}\right)$. **D.** $M\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2};\dfrac{7}{4}\right)$ hoặc $M\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{2};\dfrac{7}{4}\right)$.

Câu 62. Cho parabol $(P): y = x^2$ và elip $(E): \dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1$. Khi đó khẳng định nào sau đây đúng?

A. Parabol và elip cắt nhau tại 4 điểm phân biệt.
B. Parabol và elip cắt nhau tại 2 điểm phân biệt.
C. Parabol và elip cắt nhau tại 1 điểm phân biệt.
D. Parabol và elip không cắt nhau.

Câu 63. Lập phương trình chính tắc của parabol (P) biết (P) cắt đường phân giác của góc phần tư thứ nhất tại hai điểm A,B và $AB = 5\sqrt{2}$.

A. $y^2 = 20x$ **B.** $y^2 = 2x$ **C.** $y^2 = 5x$ **D.** $y^2 = 10x$

Câu 64. Cho điểm $A(3;0)$, gọi M là một điểm tuỳ ý trên $(P): y^2 = -x$. Tìm giá trị nhỏ nhất của AM.

A. 3. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Câu 65. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho điểm $F(3;0)$ và đường thẳng d có phương trình $3x-4y+16=0$. Tìm tọa độ tiếp điểm A của đường thẳng d và parabol (P) có tiêu điểm F và đỉnh là gốc tọa độ O.

A. $A\left(\dfrac{4}{3};5\right)$ **B.** $A\left(\dfrac{8}{3};6\right)$ **C.** $A\left(\dfrac{16}{3};8\right)$ **D.** $A\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{9}{2}\right)$

Câu 66. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y^2 = x$ và điểm $I(0;2)$. Tìm tất cả hai điêm M,N thuộc (P) sao cho $\overrightarrow{IM} = 4\overrightarrow{IN}$.

A. $M(4;2), N(1;1)$ hoặc $M(36;6), N(9;3)$.
B. $M(4;-2), N(1;1)$ hoặc $M(36;-6), N(9;3)$.
C. $M(4;-2), N(1;1)$ hoặc $M(36;6), N(9;-3)$.
D. $M(4;-2), N(1;1)$ hoặc $M(36;6), N(9;3)$.

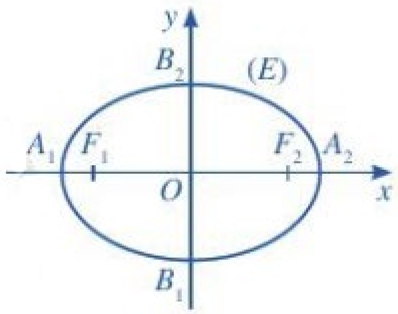
Bài 6. BA ĐƯỜNG CÔNIC

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. Đường elip

1. Định nghĩa đường elip



Cho hai điểm F_1, F_2 cố định có khoảng cách $F_1F_2 = 2c(c > 0)$.
Đường elip (còn gọi là elip) là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$, trong đó a là số cho trước lớn hơn c.
Hai điểm F_1 và F_2 được gọi là hai tiêu điểm của elip.

2. Phương trình chính tắc của elip
Ta chứng minh được rằng:
Khi chọn hệ trục tọa độ như trên, phương trình đường elip có thể viết dưới dạng
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0.$
Đây gọi là phương trình chính tắc của elip.
Chú ý
Đối với elip (E) có phương trình chính tắc như đã nêu ở trên, ta có:
- $c^2 = a^2 - b^2$,ở đó $2c = F_1F_2$.
- Nếu điểm $M(x; y)$ thuộc elip (E) thì $-a \leq x \leq a$.

Ví dụ 1. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của đường elip?
a) $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$;
b) $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = -1$
c) $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$
d) $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$.

Giải
Phương trình chính tắc của elip có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a > b > 0$ nên chỉ có trường hợp d) là phương trình chính tắc của đường elip.

Ví dụ 2. Lập phương trình chính tắc của elip (E) có một tiêu điểm là $F_2(5; 0)$ và đi qua điểm $M(0; 3)$.

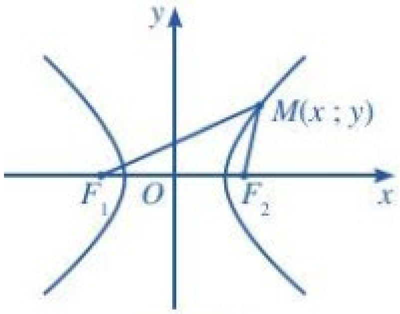
Giải
Elip (E) có phương trình chính tắc là:

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

Do $F_2(5;0)$ là một tiêu điểm của (E) nên $c=5$. Điểm $M(0;3)$ nằm trên (E) nên $\dfrac{0^2}{a^2}+\dfrac{3^2}{b^2}=1$. Do đó $b^2=9$, suy ra $a^2=b^2+c^2=9+25=34$

Vậy elip (E) có phương trình chính tắc là: $\dfrac{x^2}{34}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

II. Đường Hypebol



Cho hai điểm F_1,F_2 cố định có khoảng cách $F_1F_2=2c(c>0)$.

Đường hypebol (còn gọi là hypebol) là tập hợp các điểm M sao cho $|MF_1-MF_2|=2a$, trong đó a là số dương cho trước nhỏ hơn c.

Hai điểm F_1 và F_2 được gọi là hai tiêu điểm của hypebol.

2. Phương trình chính tắc của đường hypebol

Ta chứng minh được rằng:

Khi chọn hệ trục toạ độ như trên, phương trình đường hypebol có thể viết dưới dạng

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1, a>0, b>0$.

Đây gọi là phương trình chính tắc của hypebol.

Chú ý

Đối với hypebol (H) có phương trình chính tắc như đã nêu ở trên, ta có:

- $c^2=a^2+b^2$, ở đó $2c=F_1F_2$, và điều kiện $a>b$ là không bắt buộc.
- Nếu điểm $M(x;y)$ thuộc hypebol (H) thì $x\le -a$ hoặc $x\ge a$.

Ví dụ 3. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của đường hypebol?

a) $\dfrac{x^2}{5^2}-\dfrac{y^2}{4^2}=-1$

b) $\dfrac{x^2}{4^2}-\dfrac{y^2}{5^2}=1$

c) $\dfrac{x^2}{5^2}-\dfrac{y^2}{5^2}=1$

d) $\dfrac{x^2}{5^2}-\dfrac{y^2}{4^2}=1$

Giải

Phương trình chính tắc của hypebol có dạng $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, với $a>0, b>0$ nên các trường hợp b), c), d) là phương trình chính tắc của đường hypebol.

Ví dụ 4. Viết phương trình chính tắc của đường hypebol (H) có một tiêu điểm là $F_2(6;0)$ và đi qua điểm $A_2(4;0)$.

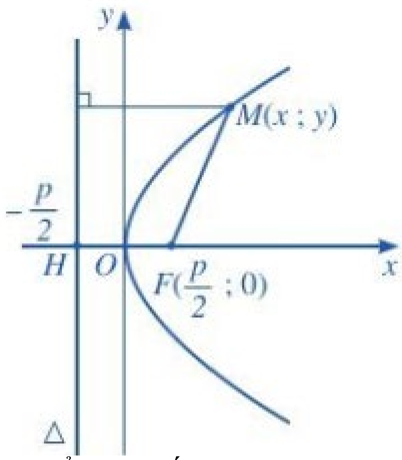
Giải

Giả sử hypebol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a>0, b>0$.

Do $A_2(4;0)$ thuộc (H) nên $\frac{4^2}{a^2}-\frac{0^2}{b^2}=1$, suy ra $a=4$. Mà $F_2(6;0)$ là tiêu điểm của (H) nên $c=6$. Suy ra $b^2=c^2-a^2=36-16=20$.

Vậy hypebol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$.

III. Đường parabol



Cho một điểm F cố định và một đường thẳng Δ cố định không đi qua F.
Đường parabol (còn gọi là parabol) là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng cách đều F và Δ.
Điểm F được gọi là tiêu điểm của parabol. Đường thẳng Δ được gọi là đường chuẩn của parabol.

2. Phương trình chính tắc của parabol

Khi chọn hệ trục toạ độ như trên, phương trình đường parabol có thể viết dưới dạng
$y^2=2px (p>0)$.
Đây gọi là phương trình chính tắc của parabol.
Chú ý: Đối với parabol (P) có phương trình chính tắc $y^2=2px (p>0)$, ta có:

- Tiêu điểm là $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ và phương trình đường chuẩn là $x+\frac{p}{2}=0$.
- Nếu điểm $M(x;y)$ thuộc parabol (P) thì $x\geq 0$.

Ví dụ 5. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của đường parabol?

a) $y^2=-6x$;

b) $y^2=6x$

c) $x^2=-6y$;

d) $x^2=6y$.

Giải

Phương trình chính tắc của parabol có dạng $y^2=2px$ với $p>0$ nên chỉ có trường hợp b) là phương trình chính tắc của đường parabol.

Ví dụ 6. Viết phương trình chính tắc của parabol (P) biết:

a) (P) có tiêu điểm là $F(5;0)$;

b) (P) đi qua điểm $M(2;1)$.

Giải

Gọi phương trình chính tắc của parabol (P) là: $y^2=2px (p>0)$.

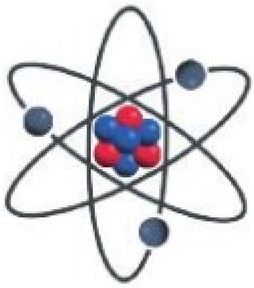
a) Vì (P) có tiêu điểm là $F(5;0)$ nên $\frac{p}{2}=5$, tức là $p=10$. Vậy phương trình chính tắc của parabol (P) là $y^2=20x$.

b) Do điểm $M(2;1)$ nằm trên (P) nên $1^2 = 2p\,.\,2$, tức là $p = \frac{1}{4}$.Vậy phương trình chính tắc của parabol (P) là $y^2 = \frac{x}{2}$

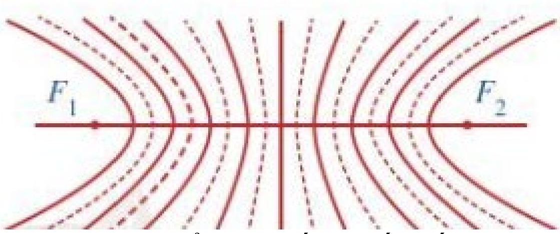
IV. Một số ứng dụng thực tiễn của ba đường conic

Ba đường conic có nhiều ứng dụng trong thực tiễn. Ta nêu ra một vài ứng dụng của ba đường conic.

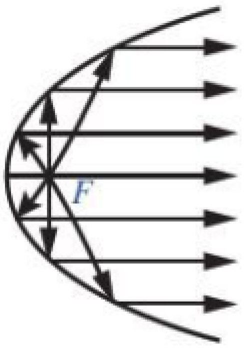
1. Năm 1911, nhà vật lí học người Anh là Ernest Rutherford (1871 - 1937) đã đề xuất mô hình hành tinh nguyên tử, trong đó hạt nhân nhỏ bé nằm tại tâm của nguyên tử, còn các electron bay quanh hạt nhân trên các quỹ đạo hình elip như các hành tinh bay quanh Mặt Trời



2. Trong vật lí, hiện tượng hai sóng gặp nhau tạo nên các gợn sóng ổn định gọi là hiện tượng giao thoa của hai sóng. Các gợn sóng có hình các đường hypebol gọi là các vân giao thoa



3. Với gương parabol, tia sáng phát ra từ tiêu điểm (tia tới) chiếu đến một điểm của parabol sẽ bị hắt lại (tia phản xạ) theo một tia song song (hoặc trùng) với trục của parabol



Tính chất trên có nhiều ứng dụng, chẳng hạn:

- Đèn pha: Bề mặt của đèn pha là một mặt tròn xoay sinh bởi một cung parabol quay quanh trục của nó, bóng đèn được đặt ở vị trí tiêu điểm của parabol đó. Các tia sáng phát ra từ bóng đèn khi chiếu đến bề mặt của đèn pha sẽ bị hắt lại theo các tia sáng song song, cho phép chúng ta quan sát được các vật ở xa.

- Chảo vệ tinh cũng có dạng như đèn pha. Điểm thu và phát tín hiệu của máy được đặt ở vị trí tiêu điểm của parabol

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Các bài toán liên quan elip

Câu 1. Xác định các đỉnh, độ dài các trục, tiêu cự, tiêu điểm, tâm sai của elip có phương trình sau:

$a)\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ $\qquad$ $b)\ 4x^2+25y^2=100$

Lời giải.

a) Từ phương trình $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1\ (E)$, ta có $a=2;\ b=1$. Suy ra $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$.

Suy ra tọa độ các đỉnh là $A_1(-2;0)$, $A_2(2;0)$, $B_1(0;-1)$, $B_1(0;1)$.

Độ dài trục lớn $A_1A_2=4$. độ dài trục bé $B_1B_2=2$.

Tiêu cự $F_1F_2=2c=2\sqrt{3}$, tiêu điểm là $F_1\left(-\sqrt{3};0\right)$; $F_2\left(\sqrt{3};0\right)$.

Tâm sai của c là $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) Ta có $4x^2+25y^2=100 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$. suy ra $a=5;\ \ b=2$ nên $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{21}$

Do đó tọa độ các đỉnh là $A_1(-5;0)$, $A_2(5;0)$, $B_1(0;-2)$, $B_1(0;2)$.

Độ dài trục lớn $A_1A_2=10$, độ dài trục bé $B_1B_2=4$.

Tiêu cự $F_1F_2=2c=2\sqrt{21}$, tiêu điểm là $F_1\left(-\sqrt{21};0\right)$; $F_2\left(\sqrt{21};0\right)$.

Tâm sai của c là $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{21}}{5}$

Câu 2. Lập phương trình chính tắc của Elip, biết

a) Elip đi qua điểm $M\left(2;\frac{5}{3}\right)$ và có một tiêu điểm $F(-2;0)$.

b) Elip nhận $F_2(5;0)$ là một tiêu điểm và có độ dài trục nhỏ bằng $4\sqrt{6}$.

c) Elip có độ dài trục lớn bằng $2\sqrt{5}$ và tiêu cự bằng 2.

d) Elip đi qua hai điểm $M\left(2;-\sqrt{2}\right)$ và $N\left(-\sqrt{6};1\right)$.

Lời giải.

a) Do (E) có một tiêu điểm $F_1(-2;0)$ nên $c=2$. Suy ra $a^2=b^2+c^2=b^2+4$.

Mặt khác, (E) đi qua điểm $\mathrm{M}\left(2;\frac{5}{3}\right)$ nên:

$$\frac{2^2}{a^2}+\frac{(5/3)^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{4}{b^2+4}+\frac{25}{9b^2}=1 \Leftrightarrow 9b^4-25b^2-100=0 \Leftrightarrow b^2=5 \text{ hoặc } b^2=-\frac{20}{9}(l).$$

Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

b) Do (E) có một tiêu điểm $F_2(5;0)$ nên $c=5$

Theo giả thiết độ dài trục nhỏ bằng $4\sqrt{6}$ nên $2b=4\sqrt{6} \Leftrightarrow b=2\sqrt{6}$

Suy ra $a^2=b^2+c^2=5^2+\left(2\sqrt{6}\right)^2=49$

Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E):\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$.

c) Độ dài trục lớn bằng $2\sqrt{5}$ nên $2a=2\sqrt{5} \Leftrightarrow a=\sqrt{5}$.

Tiêu cự bằng 2 nên $2c=2 \Leftrightarrow c=1$.

Từ hệ thức $a^2=b^2+c^2$, suy ra $b^2=a^2-c^2=5-1=4$

Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E):\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$

d) Do (E) đi qua $M\left(2;-\sqrt{2}\right)$ và $N\left(-\sqrt{6};1\right)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}\frac{4}{a^2}+\frac{2}{b^2}=1\\ \frac{6}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{a^2}=\frac{1}{8}\\ \frac{1}{b^2}=\frac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2=8\\ b^2=4\end{cases}$$

Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E):\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$

Câu 3. Lập phương trình chính tắc của Elip, biết

a) Elip có tổng độ dài hai trục bằng 8 và tâm sai $e=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Elip có tâm sai $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$ có hình chữ nhật cơ sở có chu vi bằng 20.

c) Elip có tiêu điểm $F_1(-2;0)$ và có hình chữ nhật cơ sở có diện tích bằng $12\sqrt{5}$.

Lời giải.

a) Tổng độ dài hai truc bằng 8 nên $2a+2b=8$. (1)

Tâm sai $e=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow a=\sqrt{2}c$. (2)

Từ (1) và (2), ta có: $\begin{cases}2a+2b=8\\ e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b=4\\ a=\sqrt{2}c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=4-\sqrt{2}c\\ a=\sqrt{2}c\end{cases}$

Thay vào hệ thức $a^2=b^2+c$, ta được.

$$2c^2=\left(4-\sqrt{2}c\right)^2+c^2 \Leftrightarrow c^2-8\sqrt{2}c+16=0 \Leftrightarrow c=4\sqrt{2}\pm 4$$

Với $c=4\sqrt{2}+4$, suy ra $\begin{cases} a=8+4\sqrt{2} \\ b=-8-4\sqrt{2} \end{cases}$ (không thỏa mãn)

Với $c=4\sqrt{2}-4$, suy ra $\begin{cases} a=8-4\sqrt{2} \\ b=-4+4\sqrt{2} \end{cases}$

Do đó Elip cần tìm có phương trình (E) : $\dfrac{x^2}{\left(8-4\sqrt{2}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(4\sqrt{2}-4\right)^2}=1$.

b) Elip có tâm sai $e=\dfrac{\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow a=\dfrac{3}{\sqrt{5}}c$.

Mặt khác , Elip có hình chữ nhật cơ sở có chu vi bằng 20 nên :

$$2(2a+2b)=20 \Leftrightarrow a+b=5 \Leftrightarrow b=5-a \ .$$

Thay $(1);(2)$ vào hệ thức $a^2=b^2+c^2$, ta được:

$$\left(\frac{3}{\sqrt{5}}c\right)^2=(5-a)^2+c^2 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{\sqrt{5}}c\right)^2=\left(5-\frac{3}{\sqrt{5}}a\right)^2+c^2 \Leftrightarrow c^2-\frac{30}{\sqrt{5}}c+25=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=5\sqrt{5} \\ c=\sqrt{5} \end{array}\right.$$

Với $c=5\sqrt{5}$, suy ra $\begin{cases} a=15 \\ b=-10 \end{cases}$ (không thỏa mãn).

Với $c=\sqrt{5}$, suy ra $\begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$. Do đó Elip cần tìm có phương trình (E) : $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

c) Elip có một tiêu điểm $F_1(-2;0)$ nên $c=2$.

Diện tich hình chữ nhật cơ sở $s=2a.2\text{b}=12\sqrt{5} \Leftrightarrow ab=3\sqrt{5} \Leftrightarrow a^2b^2=45$ (1)

Mặt khác, ta có $a^2=b^2+c^2=b^2+4$ (2)

Kết hợp $(1);(2)$ ta được:

$$a^2b^2=45 \Leftrightarrow \left(b^2+4\right)b^2=45 \Leftrightarrow b^4+4b^2-45=0 \Leftrightarrow b^2=5 \text{ hoặc } b^2=-9(l)$$

Với $b^2=5 \Rightarrow a^2=9$

Vậy phương trình Elip cần tìm là : $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$

Câu 4. Lập phương trình chính tắc Elip, biết:

a) Elip đi qua điểm $M\left(-\sqrt{5};2\right)$ và khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng 10.

b) Elip có tâm sai $e=\dfrac{3}{5}$ và khoảng cách từ tâm đối xứng của nó đến một đường chuẩn bằng $\dfrac{25}{3}$.

c) Elip có độ dài trục lớn bằng 10 và phương trình một đường chuẩn là $x=\frac{25}{4}$.

d) Khoảng cách giữa các đường chuẩn bằng 36 và bán kinh qua tiêu điểm của M thuộc Elip là 9 và 15.

Lời giải.

a) Elip đi qua điểm $M\left(-\sqrt{5};2\right)$ nên $\frac{5}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1$.(1)

Khoảng cách giữa hai đường chuẩn của Elip bằng 10 nên:

$2.\frac{a}{e}=10\Leftrightarrow \frac{a}{e}=5\Leftrightarrow \frac{a^2}{c}=5\Leftrightarrow a^2=5c \qquad (2)$

Từ (2), kết hợp với hệ thức $a^2=b^2+c^2$, ta được $b^2=a^2-c^2=5c-c^2 \qquad (3)$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$\frac{5}{5c}+\frac{4}{5c-c^2}=1\Leftrightarrow c^2-6c+9=0\Leftrightarrow c=3$

Với $c=3$, suy ra $\begin{cases} a^2=15 \\ b^2=6 \end{cases}$

Vậy phươwng trình Elip cần tìm là : $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{6}=1$

b) Ta có $e=\frac{3}{5}\Leftrightarrow \frac{c}{a}=\frac{3}{5}\Leftrightarrow c=\frac{3}{5}a$

Elip có khoảng cách từ tâm đối xứng O đến một đường chuẩn là $\frac{25}{3}$ nên:

$\frac{a}{e}=\frac{25}{3}\Leftrightarrow \frac{a^2}{c}=\frac{25}{3}\Leftrightarrow \frac{a^2}{\frac{3}{5}a}=\frac{25}{3}\Leftrightarrow a=5$

Với $a=5\Rightarrow c=3$ và $b^2=a^2-c^2=16$

Vậy Elip cần tìm có phương trình là: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

c) Elip có độ dài trục lớn bằng 10 nên $2a=10\Leftrightarrow a=5$

Mặt khác, Elip có phương trình đường chuẩn $x=\frac{25}{4}\Leftrightarrow \frac{a}{e}=\frac{25}{4}\Leftrightarrow \frac{a^2}{e}=\frac{25}{4}\Leftrightarrow \frac{5^2}{c}=\frac{25}{4}\Leftrightarrow c=4$

Suy ra $b^2=a^2-c^2=9$

Vậy phương trình Elip cần tìm có phương trình là $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

d) Elip có khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng 36 nên:

$2.\frac{a}{e}=36 \Leftrightarrow 2.\frac{a^2}{c}=36 \Leftrightarrow \frac{a^2}{c}=18$

Mặt khác, ta có: $\begin{cases} a+\text{ex}=9 \\ a-\text{ex}=15 \end{cases} \Rightarrow a=12$

Với $a=12 \Rightarrow c=8$ và $b^2=a^2-c^2=144-64=80$

Vậy phương trình Elip là : $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{80}=1$

Câu 5. Lập phương trình chính tắc Elip, biết:

a) Elip có hình chữ nhật cơ sở nội tiếp đường tròn $(C): x^2+y^2=41$ và đi qua điểm $A(0;5)$.

b) Elip co hình chữ nhật cơ sở nội tiếp đường tròn $(C): x^2+y^2=21$ và đi qua điểm $M(1;2)$ nhìn hai tiêu điểm của Elip dưới một góc 60^0 .

c) Một cạnh hình chữ nhật cơ sở của Elip nằm trên $d: x-\sqrt{5}=0$ và độ dài đường chéo hình chữ nhật bằng 6.

d) Tứ giác ABCD là hình thoi có bốn đỉnh trùng với các đỉnh của Elip. Bán kính của đường tròn nội tiếp hình thoi bằng $\sqrt{2}$ và tâm sai của Elip bằng $\frac{1}{2}$.

Lời giải

a) Elip đi qua điểm $A(0;5) \in Oy$, suy ra $b=5$.

Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là: $x=\pm a; y=\pm 5$

Suy ra một đỉnh của hình chữ nhật cơ sở là $(a;5)$.

Theo giả thiết $(a;5)$ thuộc đường tròn (C) nên ta có:

$a^2+25=41 \Leftrightarrow a^2=16$

Vậy phương trình Elip cần tìm là : $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

b) Theo giả thiết bài toán ta có: $\widehat{F_1MF_2}=60^0$, suy ra:

$F_1F_2{}^2=MF_1^2+MF_2^2-2MF_1MF_2.\cos 60^0$

$\Leftrightarrow 4c^2=(1+c)^2+4+(1-c)^2-2.\frac{1}{2}\sqrt{(1+c)^2+4}.\sqrt{(1-c)^2+4}$

$\Leftrightarrow 4c^2=2c^2+10-\sqrt{(1+c)^2+4}.\sqrt{(1-c)^2+4}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 10-2c^2 \geq 0 \\ \left[(1+c)^2+4\right]\left[(1-c)^2+4\right]=(10-2c^2)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < c \le \sqrt{5} \\ 3c^4 - 46c^2 + 75 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow c^2 = \dfrac{23 \pm 4\sqrt{19}}{3}$

Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là: $x = \pm a; y = \pm b$ nên tọa độ một đỉnh của hình chữ nhật cơ sở là $(a;b)$

Theo giả thiết các đỉnh của hình chữ nhật thuộc đường tròn (C) nên ta có: $a^2 + b^2 = 21$

Với $c^2 = \dfrac{23 + 4\sqrt{19}}{3}$, ta có: $\begin{cases} a^2 + b^2 = 21 \\ a^2 - b^2 = \dfrac{23 + 4\sqrt{19}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \dfrac{43 + 2\sqrt{19}}{3} \\ b^2 = \dfrac{20 - 2\sqrt{19}}{3} \end{cases}$

Suy ra Elip có phương trình $\dfrac{x^2}{\dfrac{43 + 2\sqrt{19}}{3}} + \dfrac{y^2}{\dfrac{20 - 2\sqrt{19}}{3}} = 1$

Với $c^2 = \dfrac{23 - 4\sqrt{19}}{3}$, ta có: $\begin{cases} a^2 + b^2 = 21 \\ a^2 - b^2 = \dfrac{23 - 4\sqrt{19}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \dfrac{43 - 2\sqrt{19}}{3} \\ b^2 = \dfrac{20 + 2\sqrt{19}}{3} \end{cases}$

Suy ra Elip có phương trình $\dfrac{x^2}{\dfrac{43 - 2\sqrt{19}}{3}} + \dfrac{y^2}{\dfrac{20 + 2\sqrt{19}}{3}} = 1$

c) Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là: $x = \pm a; y = \pm b$

Theo giả thiết một cạnh của hình chữ nhật cơ sở là : $x - \sqrt{5} = 0$ nên $a = \sqrt{5}$.

Độ dài đường chéo của hình chữ nhật cơ sở bằng 6 nên:

$\sqrt{4a^2 + 4b^2} = 6 \Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 = 36 \Leftrightarrow 20 + 4b^2 = 36 \Leftrightarrow b^2 = 4$

Vậy phương trình Elip cần tìm là: $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

d) Elip có tâm sai $e = \dfrac{1}{2}$ $\dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a = 2c$.

Elip có các đỉnh $A_1(-a;0), A_2(a;0), B_1(0;-b), B_2(0;b)$. Gọi H là hình chiếu của O lên A_2B_2 .

Theo giả thiết ta có bán kính của dường tròn đã cho bằng OH. Ta có:

$\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4c^2} + \dfrac{1}{a^2 - c^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4c^2} + \dfrac{1}{3c^2} \Leftrightarrow c^2 = \dfrac{7}{6}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4c^2 = \dfrac{14}{3} \\ b^2 = a^2 - c^2 = 3c^2 = \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình Elip cần tìm là: $\dfrac{x^2}{14/3} + \dfrac{y^2}{7/2} = 1$

Câu 6. Lập phương trình chính tắc Elip, biết:

a) Tứ giác ABCD là hình thoi có 4 đỉnh trùng với các đỉnh của Elip. Đường tròn tiếp xúc với các cạnh của hình thoi có phương trình $(C): x^2 + y^2 = 4$ và $AC = 2BD$, A thuộc Ox.

b) Elip có độ dài trục lón bằng 8 và giao điểm của Elip với đường tròn $(C): \mathrm{x}^2 + y^2 = 8$ tạo thành 4 đỉnh của một hình vuông.

c) Elip có tâm sai $e = \dfrac{1}{3}$ và giao điểm của fElip với đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 9$ tại 4 điểm A, B, C, D sao cho AB song song với Ox và $AB = 3BC$.

d) Elip có độ dài trục lớn bằng $4\sqrt{2}$, các đỉnh trên trục nhỏ và các tiêu điểm của Elip cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải.

a) Giả sử một đỉnh của hình thoi là $A(a;0)$. Suy ra $AC = 2a$ và $BD = 2b$.

Theo giả thiết : $AC = 2BD \Leftrightarrow 2a = 2.2b \Leftrightarrow a = 2b$

Đường tròn (C) có $R = 2$. Gọi H là hình chiếu của O lên AB với $B(0;b)$. Khi đó ta có:

$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{R^2} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4b^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow b^2 = 5$$

$\Rightarrow a^2 = 20$.

Vậy phương trình Elip là: $\dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{5} = 1$

b) Elip có độ dài trục lớn bằng 8 nên $2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$.

Do $(E);(C)$ đều có tâm đối xứng là O và trục đối xứng là Ox; Oy nên hình vuông tạo bởi giữa chúng cũng có tính chất tương tự. Do đó, ta giả sử gọi một đỉnh của hình vuông là $M(x;x)$ với x > 0. Vì $M \in (C)$ nên: $x^2 + x^2 = 8 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow M(2;2)$.

Ta có $M \in (E) \Leftrightarrow \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{4}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{4}{16} + \dfrac{4}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 = \dfrac{16}{3}$

Vậy phương trình của Elip là: $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{16/3} = 1$

c) Elip có tâm sai $e = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow a = 3c$.

Đặt $BC = x$ với $x > 0 \Rightarrow AB = 3x$. Giả sử một đỉnh $A\left(\frac{3}{2}x;\frac{1}{2}x\right)$. Ta có:

$$A \in (C) \Leftrightarrow \frac{9}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = \frac{18}{5} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{10}}{5}$$
$$\Rightarrow A\left(\frac{9\sqrt{10}}{10};\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$$

Mặt khác, do $A \in (E)$ nên:

$$\frac{81}{10a^2} + \frac{9}{10b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{81}{10(3c)^2} + \frac{9}{10\left(a^2 - c^2\right)} = 1 \Leftrightarrow c^2 = \frac{81}{80}$$

$$\Rightarrow a^2 = 9c^2 = \frac{729}{80}; b^2 = a^2 - c^2 = \frac{81}{10}$$

Vậy phương trình Elip cần tìm là : $\frac{x^2}{729/80} + \frac{y^2}{81/10} = 1$

d) Do độ dài trục lớn bằng $4\sqrt{2}$ nên $2a = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow a = 2\sqrt{2}$.
Các đỉnh trên trục nhỏ và các tiêu điểm cùng thuộc đường tròn nên b= c

Từ hệ thức $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow 8 = 2b^2 \Leftrightarrow b^2 = 4$

Vậy Elip cần tìm có phương trình là: $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

Câu 7. Lập phương trình chính tắc của Elip, biết:

a) Elip có hai đỉnh trên trục nhỏ cùng với hai tiêu điểm tạo thành một hình vuông có diệc tích bằng 32.
b) Elip có một đỉnh và hai tiêu điểm tạo thành một tam giác đều và chu vi hình chữ nhật cơ sở của Elip bằng $12\left(2 + \sqrt{3}\right)$.
c) Elip đi qua điểm $M\left(2\sqrt{3};2\right)$ và M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông.
d) Elip đi qua điểm $M\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ và tiêu điểm nhìn trục nhỏ dưới một góc 60^0 .

Lời giải.

a) Hai đỉnh trên trục nhỏ và hai tiêu điểm tạo thành một hình vuông nên $b = c$.
Mặt khác diện tích hình vuông bằng 32 nên: $2c.2b = 32 \Leftrightarrow b^2 = 8$

$$a^2 = b^2 + c^2 = 2b^2 = 16$$

Vậy phương trình Elip là: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$

b) Chu vi hình chữ nhật cơ sở : $C = 12\left(2 + \sqrt{3}\right) \Leftrightarrow 2(2a + 2b) = 12\left(2 + \sqrt{3}\right) \Leftrightarrow a + b = 3\left(2 + \sqrt{3}\right)$ (1)
Giải sử tam giác $F_1F_2B_2$ đều cạnh $F_1F_2 = 2c$ mà $B_2O \perp F_1F_2$.

Suy ra $OB_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}F_1F_2 \Leftrightarrow b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.2c=\sqrt{3}c \qquad (2)$

Từ (1) (2) suy ra : $3\left(2+\sqrt{3}\right)-b=3\left(2+\sqrt{3}\right)-\sqrt{3}c$.

Thay vào hệ thức $a^2=b^2+c^2$, ta được:

$$\left[\left(6+3\sqrt{3}\right)-\sqrt{3}c\right]^2=4c^2 \Leftrightarrow c^2+6\sqrt{3}\left(2+\sqrt{3}\right)c-\left(6+3\sqrt{3}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=3 \\ c=-12\sqrt{3}-21(l) \end{array}\right.$$

Vậy Elip cần tìm có phương trình là : $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{27}=1$

c) Từ giả thiết, ta suy ra $\overrightarrow{MF_1}.\overrightarrow{MF_2}=0 \Leftrightarrow \left(-c-2\sqrt{3}\right)\left(c-2\sqrt{3}\right)+4=0 \Leftrightarrow c^2=16$

Hơn nữa (E) qua điểm M nên:

$\dfrac{12}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}=1 \Leftrightarrow \dfrac{12}{b^2+16}+\dfrac{4}{b^2}=1 \Leftrightarrow b^4=64 \Leftrightarrow b^2=8$

Suy ra : $a^2=b^2+c^2=24$.

Vậy phương trình (E) cần tìm là : $\dfrac{x^2}{24}+\dfrac{y^2}{8}=1$

d) Từ giả thiết, ta suy ra $\widehat{B_1F_1B_2}=60^0$ mà $F_1B_1=F_1B_2$ $\Rightarrow$ Tam giác $F_1B_1B_2$ đều cạnh bằng 2b nên:

$F_1O=\dfrac{\sqrt{3}}{2}B_1B_2 \Leftrightarrow c=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.2b \Leftrightarrow c=\sqrt{3}b \qquad (1)$

Hơn nữa (E) qua $M\left(1;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ nên: $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{3}{4b^2}=1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{b^2+3b^2}+\dfrac{3}{4b^2}=1 \Leftrightarrow b^2=1 \quad (2)$

Từ $(1);(2)$, kết hợp với $a^2=b^2+c^2$ ta được $a^2=4$

Vậy Elip cần tìm có phương trình là : $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$

Câu 8. Lập phương trình chính tắc của Elip, biết:

a) Elip có một tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{3};0\right)$ và đi qua điểm M, biết tam giác F_1MF_2 có diện tích bằng 1 và vuông tại M.

b) Elip đi qua 3 đỉnh của tam giác đều ABC. Biết tam giác ABC có trục đối xứng là Oy, $A(0;2)$ và có diện tích bằng $\dfrac{49\sqrt{3}}{12}$.

c) Khi M thay đổi trên Elip thì độ dài nhỏ nhất của OM bằng 4 và độ dài lớn nhất của MF_1 bằng 8 với F_1 là tiêu điểm có hoành độ âm của Elip.

Lời giải

a) Elip có tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{3};0\right) \Rightarrow c=\sqrt{3}$.

Gọi $M\left(x;y\right)\in\left(E\right)$. Theo giả thiết, ta có:

$$S_{\Delta F_1MF_2}=1\Leftrightarrow\frac{1}{2}MF_1.MF_2=1\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(a+\text{ex}\right)\left(a-\text{ex}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow a^2-e^2x^2=2\Leftrightarrow a^2-\frac{3}{a^2}.x^2=2\Leftrightarrow x^2=\frac{\left(a^2-2\right)a^2}{3}\qquad(1)$$

Cũng từ $MF_1\perp MF_2$, ta có:

$$\overrightarrow{MF_1}.\overrightarrow{MF_2}=0\rightarrow\Leftrightarrow\left(-c-x\right)\left(c-x\right)+\left(-y\right)\left(-y\right)=0\Leftrightarrow x^2+y^2=c^2=3\qquad(2).$$

Từ $(1);(2)$ ta có, $y^2=3-x^2=3-\dfrac{\left(a^2-2\right)a^2}{3}=\dfrac{9-a^4+2a^2}{3}$

Do đó,

$$\begin{aligned}M\left(x;y\right)\in\left(E\right)&\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\Leftrightarrow\frac{a^2-2}{3}+\frac{9-a^4+2a^2}{3\left(a^2-3\right)}=1\\&\Leftrightarrow\left(a^2-2\right)\left(a^2-3\right)+9-a^4+2a^2=3a^2-9\\&\Leftrightarrow a^2=4\end{aligned}$$

Suy ra $b^2=1$. Vậy Elip cần tìm có phương trình $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$

b) Tam giác ABC đều, có điểm $A\left(0;2\right)\in Oy$ và có trục đối xứng là Oy nên hai điểm B, C đối xứng với nhau qua Oy.

Giả sử $B\left(x;y\right)$ với $x>0;y<2$, suy ra $C\left(-x;y\right)$. Độ dài cạnh của tam giác là 2x.

Theo giả thiết, ta có:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{49\sqrt{3}}{12}\Leftrightarrow\frac{\left(2x\right)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{49\sqrt{3}}{12}\Rightarrow x=\frac{7}{2\sqrt{3}}$$

Đường cao của tam giác đều $h=\dfrac{2x\sqrt{3}}{2}=x\sqrt{3}=\dfrac{7}{2}\Leftrightarrow 2-y=\dfrac{7}{2}\Leftrightarrow y=\dfrac{3}{2}$

Suy ra $B\left(\dfrac{7}{2\sqrt{3}};\dfrac{3}{2}\right)$

Đến đây bài toán trở thành viết phương trình Elip đi qua 2 điểm $A\left(0;2\right)$ và $B\left(\dfrac{7}{2\sqrt{3}};\dfrac{3}{2}\right)$.

Vậy phương trình Elip cần tìm có phương trình $\left(E\right):\dfrac{x^2}{28/5}+\dfrac{y^2}{4}=1$

c) Độ dài nhỏ nhất của OM bằng 4 nên $b=4$.

Mặt khác, ta lại có độ dài lớn nhất MF_1 bằng 8 nên $a+c=8$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a+c=8 \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=8 \\ a^2=16+c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ c=3 \end{cases}$

Vậy phương trình Elip cần tìm có phương trình $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

Để xác định tọa độ điểm M thuộc elip có phương trình chính tắc là $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ ta làm như sau

- Giả sử $M\left(x_M;y_M\right)$, điểm $M\in(E)\Leftrightarrow\frac{x_M^2}{a^2}+\frac{y_M^2}{b^2}=1$ ta thu được phương trình thứ nhất.
- Từ điều kiện của bài toán ta thu được phương trình thứ hai; giải phương trình, hệ phương trình ẩn x_M, y_M ta tìm được tọa độ của điểm M

Câu 9. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho

a) Elip $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Gọi $F_1;F_2$ là hai tiêu điểm của Elip; A, B là hai điểm thuộc (E) sao cho $\mathrm{AF}_1+BF_2=8$. Tính AF_2+BF_1

b) Elip $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$. Gọi $F_1;F_2$ là hai tiêu điểm của Elip; trong đó F_1 có hoành độ âm. Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho $MF_1=2MF_2$

c) Elip $(E):\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. Gọi $F_1;F_2$ là hai tiêu điểm của Elip; trong đó F_1 có hoành độ âm. Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho $MF_1-MF_2=2$

Lời giải

a) Ta có $a^2=25\Rightarrow a=5$. Do A, B thuộc (E) nên: $\mathrm{AF}_1+AF_2=2a=10$ và $BF_1+BF_2=2a=10$

Suy ra $\mathrm{AF}_1+AF_2+BF_1+BF_2=20\Leftrightarrow 8+AF_2+BF_1=20\Leftrightarrow AF_2+BF_1=12$

b) Ta có $a^2=9\Rightarrow a=3$ và $b^2=5\Rightarrow b=\sqrt{5}$

Suy ra $c^2=a^2-b^2=4\Rightarrow c=2$.

Gọi $M(x;y)\in(E)$. Ta có $MF_1=2MF_2\Leftrightarrow a+\mathrm{ex}=2(a-ex)\Leftrightarrow x=\frac{a}{3e}=\frac{a^2}{3c}=\frac{3}{2}$

Thay vào (E) ta được: $\frac{9}{4.9}+\frac{y^2}{5}=1\Leftrightarrow y^2=\frac{15}{4}\Leftrightarrow y=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$

Vậy $M\left(\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ hoặc $M\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$

c) Ta có $a^2=8\Rightarrow a=2\sqrt{2};b=2;c=2$

Gọi $M(x;y)\in(E)$. Ta có $MF_1-MF_2=2\Leftrightarrow a+\mathrm{ex}\text{-}\,(a-ex)=2\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}=\frac{a}{c}=\frac{2\sqrt{2}}{2}$

Thay vào (E) ta được: $\frac{2}{8}+\frac{y^2}{4}=1 \Leftrightarrow y^2=3 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{3}$

Vậy $M\left(\sqrt{2};-\sqrt{3}\right)$ hoặc $M\left(\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$.

Câu 10. Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho.

a) Elip $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$. Tìm những điểm M thuộc (E) sao cho nó nhìn hai tiêu điểm của Elip dưới một góc vuông.

b) Elip $(E):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. Gọi $F_1;F_2$ là hai tiêu điểm của Elip. Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho $\widehat{F_1MF_2}=60^0$

c) Elip $(E):\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$. Gọi $F_1;F_2$ là hai tiêu điểm của Elip, Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho $\widehat{F_1MF_2}=120^0$

d) Elip $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Gọi $F_1;F_2$ là hai tiêu điểm của Elip; trong đó F_1 có hoành độ âm. Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho $\widehat{MF_1F_2}=120^0$

Lời giải

a) Ta có $\begin{cases}a^2=9\\b^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=1\end{cases}$. Suy ra $c^2=a^2-b^2=2\Rightarrow c=2\sqrt{2}$.

Gọi $M(x;y)\in(E)$. Ta có $\widehat{F_1MF_2}=90^0$ nên :

$$F_1F_2^2=MF_1^2+MF_2^2 \Leftrightarrow 4c^2=(a+ex)^2+(a-ex)^2$$

$$\Leftrightarrow 32=2a^2+2e^2x^2$$

$$\Leftrightarrow 32=18+2.\frac{8}{9}.x^2$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$$

Thay vào (E) , ta được $y^2=\frac{1}{8}\Leftrightarrow y=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Vậy $M\left(\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}};\frac{1}{2\sqrt{2}}\right);M\left(\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}};-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right);M\left(-\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}};\frac{1}{2\sqrt{2}}\right);M\left(-\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}};-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

b) Ta có $\begin{cases}a^2=4\\b^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$. Suy ra $c^2=a^2-b^2=3\Rightarrow c=\sqrt{3}$.

Gọi $M(x;y)\in(E)$. Ta có $\widehat{F_1MF_2}=60^0$ nên :

$F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF_2MF_1.\cos 60^0$

$\Leftrightarrow 4c^2 = (a+ex)^2 + (a-ex)^2 - 2(a+ex)(a-ex).\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 12 = 2a^2 + 2e^2x^2 - a^2 + e^2x^2$

$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{12-a^2}{3e^2} = \dfrac{32}{9} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

Thay vào (E) , ta được $y^2 = \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow y = \pm\dfrac{1}{3}$

Vậy $M\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3};\dfrac{1}{3}\right); M\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3};-\dfrac{1}{3}\right); M-\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3};\dfrac{1}{3}\right); M\left(-\dfrac{4\sqrt{2}}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$

c) Ta có $\begin{cases} a^2 = 100 \\ b^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 5 \end{cases}$. Suy ra $c^2 = a^2 - b^2 = 75 \Rightarrow c = 5\sqrt{3}$.

Gọi $M(x;y) \in (E)$. Ta có $\widehat{F_1MF_2} = 60^0$ nên :

$F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF_2MF_1.\cos 120^0$

$\Leftrightarrow 4c^2 = (a+ex)^2 + (a-ex)^2 + 2(a+ex)(a-ex).\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 300 = 2a^2 + 2e^2x^2 + a^2 - e^2x^2$

$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{300-3a^2}{e^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Thay vào (E) , ta được $y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \pm 5$

Vậy $M(0;5); M(0;-5)$

d) Ta có $\begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases}$. Suy ra $c^2 = a^2 - b^2 = 16 \Rightarrow c = 4$.

Gọi $M(x;y) \in (E)$. Ta có $\widehat{F_1MF_2} = 60^0$ nên :

$MF_2^2 = MF_1^2 + F_1F_2^2 - 2F_1F_2MF_1.\cos 120^0$

$\Leftrightarrow (a-ex)^2 = (a+ex)^2 + 4c^2 + 2(a+ex)2c.\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 4aex + 4c^2 + 2ac + 2ecx = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{65}{14}$

Thay vào (E) , ta được $y^2 = \dfrac{243}{196} \Leftrightarrow y = \pm\dfrac{9\sqrt{3}}{14}$

Vậy $M\left(-\dfrac{65}{14};\dfrac{9\sqrt{3}}{14}\right); M\left(-\dfrac{65}{14};-\dfrac{9\sqrt{3}}{14}\right)$

Câu 11. Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho.

a) Elip $(E): \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$ và điểm $C(2;0)$. Tìm tọa độ các điểm A, B thuộc (E) biết rằng A, B đối xứng nhau qua trục hoành và tam giác ABC đều.

b) Elip $(E):\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$ Tìm tọa độ các điểm A, B thuộc (E) có hoành độ dương sao cho tam giác OAB cân tại O và có diện tích lớn nhất.

c) Elip $(E):\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{1}=1$ và điểm $A(3;0)$ **.** Tìm tọa độ các điểm B, C thuộc (E) sao cho tam giác ABC vuông cân tại A, biết B có tung độ dương.

Lời giải

a) Ta có $\begin{cases}a^2=4\\ b^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$. Suy ra $c^2=a^2-b^2=3\Rightarrow c=\sqrt{3}$.

Giả sử $A(x;y)\Rightarrow B(x;-y)$. Theo giả thiết, tam giác ABC đều nên :

$AC^2=AB^2\Leftrightarrow(2-x)^2+y^2=4y^2\Leftrightarrow(2-x)^2=3y^2$ (1)

Hơn nữa $A\in(E)\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1\Leftrightarrow x^2+4y^2=4$ (2)

Từ $(1);(2)$ ta có:

$$\begin{cases}(2-x)^2=3y^2\\ x^2+4y^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=0\end{cases}\text{ hoac }\begin{cases}x=2/7\\ y=4\sqrt{3}/7\end{cases}\text{hoac }\begin{cases}x=2/7\\ y=-4\sqrt{3}/7\end{cases}$$

Vì A, B khác C nên $A\left(\dfrac{2}{7};\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\right)$, $B\left(\dfrac{2}{7};-\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\right)$ hoặc $A\left(\dfrac{2}{7};-\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\right)$ và $B\left(\dfrac{2}{7};\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\right)$.

b) Do tam giác OAB cân tại O và A, B đều có hoành độ dương nên A, B đối xứng nhau qua Ox.

Giả sử $A(x;y)$ với $x>0$, suy ra $B(x;-y)$. Gọi H là hình chiếu của O lên AB. Khi đó ta có

$S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}AB.OH=\dfrac{1}{2}|2y|x=x|y|$.

Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy*, ta có $1=\dfrac{x^2}{4}+y^2\ge 2.\dfrac{x}{2}.|y|=x|y|$.

Do đó $S_{\Delta OAB}\le 1$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\dfrac{x^2}{4}=y^2$.

Thay vào (E), ta được $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1\Leftrightarrow y^2+y^2=1\Leftrightarrow y^2=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Suy ra $x^2=2\Rightarrow x=\sqrt{2}$.

Vậy $A\left(\sqrt{2};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ và $B\left(\sqrt{2};-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ hoặc $A\left(\sqrt{2};-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ và $B\left(\sqrt{2};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

c) Gọi $B(x;y)$ với $x>0$.

Do tam giác ABC vuông cân tại A, suy ra B và C đối xứng nhau qua Ox nên $C(x;-y)$.

Ta có $AB\perp AC\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow(x-3)^2-y^2=0$. (1)

Hơn nữa, $B\in(E)\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{1}=1$. (2)

Từ (1) và (2), ta có

$$\begin{cases}(x-3)^2-y^2=0\\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{1}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=1-\dfrac{x^2}{9}\\ (x-3)^2-1+\dfrac{x^2}{9}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=1-\dfrac{x^2}{9}\\ \dfrac{10}{9}x^2-6x+8=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=\dfrac{12}{5} \\ y=\pm\dfrac{3}{5} \end{cases}$.

Vì A, B khác C nên $B\left(\dfrac{12}{5};\dfrac{3}{5}\right)$, $C\left(\dfrac{12}{5};-\dfrac{3}{5}\right)$.

Câu 12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho

a) Elip $(E):\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{5}=1$ và hai điểm $A(-5;-1)$, $B(-1;1)$. Xác định tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho diện tích tam giác MAB lớn nhất.

b) Elip $(E):\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$ và hai điểm $A(3;4)$, $B(5;3)$. Tìm trên (E) điểm C sao cho tam giác ABC có diện tích bằng $4,5$.

c) Elip $(E):\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{1}=1$. Tìm trên (E) những điểm sao cho khoảng cách từ điểm đó đến đường thẳng $d:2x-3y+1=0$ là lớn nhất.

Lời giải

a) Gọi $M(x;y)\in(E)$ nên $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{5}=1$. Phương trình đường thẳng $AB: x-2y+3=0$. Ta có

$$S_{\Delta MAB}=\frac{1}{2}AB.d(M,AB)=\frac{1}{2}.2\sqrt{5}.\frac{|x-2y+3|}{\sqrt{5}}=|x-2y+3|.$$

Áp dụng bất đẳng thức *Bunhiacopxki*, ta được

$$(x-2y)^2=\left(4.\frac{1}{4}x-2\sqrt{5}.\frac{y}{\sqrt{5}}\right)^2\le\left[\left(\frac{1}{4}x\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{5}}\right)^2\right]\left[4^2+\left(2\sqrt{5}\right)^2\right]$$

$$=\left(\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{5}\right).36$$

$$=1.36=36$$

Suy ra $|x-2y|\le 6$ nên $|x-2y+3|\le 9$.

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} \dfrac{\frac{1}{4}x}{4}=\dfrac{\frac{y}{\sqrt{5}}}{-2\sqrt{5}} \\ x-2y+3=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{8}{3} \\ y=-\dfrac{5}{3} \end{cases}$.

Vậy $M\left(\dfrac{8}{3};-\dfrac{5}{3}\right)$ thỏa yêu cầu bài toán.

b) Gọi $C(x;y)\in(E)\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$. $\quad(1)$

Phương trình đường thẳng $AB: x+2y-11=0$.

Ta có

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.d(C,AB)=4,5\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sqrt{5}\frac{|x+2y-11|}{\sqrt{5}}=4,5$$

$$\Leftrightarrow|x+2y-11|=9$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} x+2y-11=9 & (2) \\ x+2y-11=-9. & (3) \end{array}\right.$$

Từ (1) và (2), ta có

$$\begin{cases}x+2y-11=9\\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=20-2y\\ \dfrac{(20-2y)^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=20-2y\\ 2y^2-20y+98=0\end{cases}: \text{vô nghiệm.}$$

Từ (1) và (3), ta có

$$\begin{cases}x+2y-11=-9\\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2-2y\\ \dfrac{(2-2y)^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1-\sqrt{3}\\ y=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x=1+\sqrt{3}\\ y=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\end{cases}.$$

Vậy $C\left(1-\sqrt{3};\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ hoặc $C\left(1+\sqrt{3};\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

c) Gọi $M(x;y)\in(E)\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{1}=1\Leftrightarrow x^2+2y^2=2$.

Ta có $d(M,d)=\dfrac{|2x-3y+1|}{\sqrt{13}}$.

Áp dụng bất đẳng thức *Bunhiacopxki*, ta có

$$(2x-3y)^2=\left(2.x-\frac{3}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}y\right)^2\le\left[x^2+\left(\sqrt{2}y\right)^2\right]\left(4+\frac{9}{2}\right)=2.\frac{17}{2}=17.$$

Suy ra $|2x-3y|\le\sqrt{17}$ nên $|2x-3y+1|\le\sqrt{17}+1$.

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sqrt{2}y}{\frac{-3}{\sqrt{2}}}\\ 2x-3y=\sqrt{17}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4}{\sqrt{17}}\\ y=-\dfrac{3}{\sqrt{17}}\end{cases}.$$

Vậy $d(M,d)$ lớn nhất bằng $\dfrac{\sqrt{17}+1}{\sqrt{13}}$ khi $M\left(\dfrac{4}{\sqrt{17}};-\dfrac{3}{\sqrt{17}}\right)$.

Câu 13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho

a) Elip $(E):\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ và các điểm $A(-3;0)$, $I(-1;0)$. Tìm tọa độ các điểm B, C thuộc (E) sao cho I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Elip $(E):\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ có hai tiêu điểm F_1, F_2. Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác MF_1F_2 bằng $\dfrac{4}{3}$.

c) Elip $(E):\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ có hai tiêu điểm F_1, F_2. Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho đường phân giác trong góc $\widehat{F_1MF_2}$ đi qua điểm $N\left(-\dfrac{48}{25};0\right)$.

Lời giải

a) Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm $I(-1;0)$, bán kính $R=IA=2$ là:

$(C):(x+1)^2+y^2=4.$

Theo giả thiết, ta có $B, C\in(E)\cap(C)$ nên tọa độ điểm B, C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\\ (x+1)^2+y^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2+9y^2=36\\ 9(x+1)^2+9y^2=36\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2+9y^2=36\\ 9(x+1)^2-4x^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2+9y^2=36\\ 5x^2+18x+9=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases}$ (loại) hoặc $\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{3}{5} \\ y=\dfrac{4\sqrt{6}}{5} \end{cases}$ hoặc $\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{3}{5} \\ y=-\dfrac{4\sqrt{6}}{5} \end{cases}$.

Vậy $B\left(-\dfrac{3}{5};-\dfrac{4\sqrt{6}}{5}\right)$, $C\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{4\sqrt{6}}{5}\right)$ hoặc $B\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{4\sqrt{6}}{5}\right)$, $C\left(-\dfrac{3}{5};-\dfrac{4\sqrt{6}}{5}\right)$.

b) Ta có $a^2=25 \Rightarrow a=5$ và $b^2=9 \Rightarrow b=3$. Suy ra $c^2=a^2-b^2=16 \Rightarrow c=4$.
Hai tiêu điểm của Elip là: $F_1(-4;0)$ và $F_2(4;0)$.

Gọi $M(x;y)\in(E)$. Ta có $S_{\Delta MF_1F_2}=p.r$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}F_1F_2.d(M,F_1F_2)=\dfrac{MF_1+MF_2+F_1F_2}{2}.r$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}.2c.|y|=(a+c).\dfrac{4}{3} \Leftrightarrow 4|y|=9.\dfrac{4}{3} \Leftrightarrow |y|=3 \Leftrightarrow y=\pm 3$.

Thay vào phương trình (E), ta được $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{9}{9}=1 \Leftrightarrow x=0$.

Vậy $M(0;3)$ hoặc $M(0;-3)$.

c) Ta có $a^2=25 \Rightarrow a=5$ và $b^2=9 \Rightarrow b=3$. Suy ra $c^2=a^2-b^2=16 \Rightarrow c=4$.
Hai tiêu điểm của Elip là: $F_1(-4;0)$ và $F_2(4;0)$.

Gọi $M(x;y)\in(E)$.

Theo giả thiết MN là phân giác trong của $\widehat{F_1MF_2}$, suy ra

$\dfrac{F_1N}{F_2N}=\dfrac{F_1M}{F_2M} \Leftrightarrow \dfrac{52}{148}=\dfrac{a+ex}{a-ex} \Leftrightarrow 12a+25ex=0 \Leftrightarrow 12.5+25.\dfrac{4}{5}x=0 \Leftrightarrow x=-3$.

Thay vào phương trình (E), ta được $\dfrac{9}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1 \Leftrightarrow y=\pm\dfrac{12}{5}$.

Vậy $M\left(-3;\dfrac{12}{5}\right)$ hoặc $M\left(-3;-\dfrac{12}{5}\right)$.

Câu 14. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho

a) Elip $(E):\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ và điểm $M(1;1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho M là trung điểm AB.

b) Elip $(E):\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$ và điểm $M\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua M và cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $MA=2MB$.

c) Elip $(E):\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$ và đường thẳng $d:2x+y+3=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc d và cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 1.

d) Elip $(E):x^2+3y^2=6$ có hai tiêu điểm F_1, F_2 trong đó F_1 có hoành độ âm. Gọi d là đường thẳng đi qua F_2 và song song với $\Delta:y=-x+1$ đồng thời cắt (E) tại hai điểm A, B phân biệt. Tính diện tích tam giác ABF_1.

Lời giải

a) Thay tọa độ điểm M vào vế trái của (E) ta được $\dfrac{1}{25}+\dfrac{1}{9}<1$. Suy ra M nằm ở miền trong của (E).

Do đó mọi đường thẳng đi qua M đều cắt (E) tại hai điểm phân biệt.

Gọi $A(x;y)\in(E)$ nên $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$. (1)

Do $M(1;1)$ là trung điểm của AB nên $B(2-x;2-y)$.

Vì $B\in(E)$ nên $\dfrac{(2-x)^2}{25}+\dfrac{(2-y)^2}{9}=1$. (2)

Từ (1) và (2), ta được

$$\frac{x^2-4x+4}{25}+\frac{y^2-4y+4}{9}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}+\left(\frac{-4x+4}{25}+\frac{-4y+4}{9}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow\frac{-4x+4}{25}+\frac{-4y+4}{9}=0\Leftrightarrow 9x+25y-34=0.\quad(*)$$

Do tọa độ hai điểm A, B đều thỏa mãn (*) nên phương trình (*) chính là phương trình đường thẳng d cần tìm.

Cách 2. Ta có $(E):\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1\Leftrightarrow 9x^2+25y^2=225$. Gọi $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ là hai điểm thỏa yêu cầu bài toán.

Ta có $A,B\in(E)\Leftrightarrow\begin{cases}9x_1^2+25y_1^2=225\\9x_2^2+25y_2^2=225\end{cases}$.

Trừ vế theo vế ta được $9(x_1-x_2)(x_1+x_2)+25(y_1-y_2)(y_1+y_2)=0$.

Vì M là trung điểm AB nên $\begin{cases}x_1+x_2=2x_M=2\\y_1+y_2=2y_M=2\end{cases}$. Thay vào trên, ta được

$$18(x_1-x_2)+50(y_1-y_2)=0\Leftrightarrow y_1-y_2=-\frac{9}{25}(x_1-x_2).$$

Ta có $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;y_2-y_1)=\left(x_2-x_1;-\dfrac{9}{25}(x_1-x_2)\right)=(x_1-x_2)\left(1;-\dfrac{9}{25}\right)$.

Suy ra $\vec{u}=(25;-9)$ là một vec-tơ chỉ phương của Δ nên $\Delta:9x+25y-34=0$.

Bằng cách giải thứ nhất ta có thể giải được bài toán tổng quát khi thay giả thiết $MA=MB$ bằng giả thiết M chia đoạn AB theo tỉ số k nào đó.

Cụ thể ta xét bài toán sau

b) Gọi $A(x;y)$, $B(x_0;y_0)$. Vì $B\in(E)$ nên $\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{1}=1$. (1)

Thay tọa độ điểm M vào vế trái của (E) ta được

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{4}+\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1}=\frac{20}{36}<1.$$ Suy ra M nằm ở miền trong của (E).

Mà $MA=2MB$ suy ra $\overrightarrow{MA}=-2\overrightarrow{MB}$ nên $A(-2x_0+2;-2y_0+2)$.

Mặt khác, $A\in(E)$ nên $\dfrac{(-2x_0+2)^2}{4}+\dfrac{(-2y_0+2)^2}{1}=1$. (2)

Từ (1) và (2), ta có

$$\begin{cases}\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{1}=1\\\dfrac{(-2x_0+2)^2}{4}+\dfrac{(-2y_0+2)^2}{1}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5y_0^2-8y_0+3=0\\\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{1}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=0\\y_0=1\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x_0=\dfrac{8}{5}\\y_0=\dfrac{3}{5}\end{cases}.$$

• Với $B(0;1)$. Đường thẳng cần tìm đi qua M và B nên có phương trình: $x+2y-2=0$.

• Với $B\left(\frac{8}{5};\frac{3}{5}\right)$. Đường thẳng cần tìm đi qua M và B nên có phương trình: $5x+70y-50=0$.

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn bài toán là: $x+2y-2=0$ hoặc $5x+70y-50=0$.

c) Do Δ vuông góc với $d:2x+y+3=0$ nên $\Delta: x-2y+m=0$.

Đường thẳng Δ cắt (E) tại hai điểm A, B nên tọa độ A, B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1\\ x-2y+m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y-m\\ x^2+4y^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y-m\\ 8y^2-4my+m^2-4=0\quad(*)\end{cases}.$$

Để Δ cắt (E) tại hai điểm A, B phân biệt khi phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow 32-4m^2>0 \Leftrightarrow -2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$.

Gọi y_1, y_2 là hai nghiệm của phương trình $(*)$, suy ra $\begin{cases}y_1+y_2=\frac{m}{2}\\ y_1.y_2=\frac{m^2-4}{8}\end{cases}$.

Ta được tọa độ $A(2y_1-m;y_1)$, $B(2y_2-m;y_2)$. Ta có

$$AB=\sqrt{5(y_2-y_1)^2}=\sqrt{5\left[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2\right]}=\frac{\sqrt{5(8-m^2)}}{2}.$$

Mặt khác, $d(O,AB)=d(O,\Delta)=\frac{|m|}{\sqrt{5}}$. Do đó

$$S_{\Delta OAB}=1\Leftrightarrow\frac{1}{2}AB.d(O,AB)=1\Leftrightarrow\frac{\sqrt{m^2(8-m^2)}}{4}=1\Leftrightarrow m=\pm 2.$$

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn là $\Delta: x-2y+2=0$ hoặc $\Delta: x-2y-2=0$.

d) Phương trình Elip (E) ở dạng chính tắc $(E):\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$.

Ta có $a^2=6$, $b^2=2$. Suy ra $c=\sqrt{a^2-b^2}=2$.

Hai tiêu điểm có tọa độ là: $F_1(-2;0)$ và $F_2(2;0)$.

Đường thẳng d đi qua $F_2(2;0)$ và song song với $\Delta: y=-x+1$ nên có phương trình $d: x+y-2=0$.

Tọa độ điểm A, B là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}x+y-2=0\\ x^2+3y^2=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2-x\\ x^2+3(2-x)^2=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2-x\\ 2x^2-6x+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{3+\sqrt{3}}{2}\\ y=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x=\frac{3-\sqrt{3}}{2}\\ y=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\end{cases}.$$

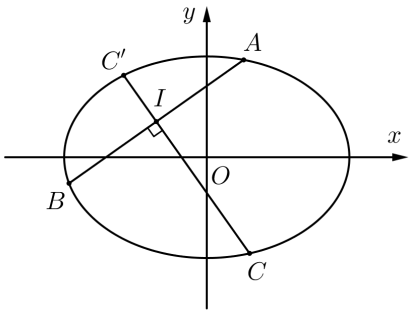
Do đó $A\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2};\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2};\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ hoặc $A\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2};\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2};\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

Khi đó $AB=\sqrt{6}$ và $d(F_1,AB)=d(F_1,d)=2\sqrt{2}$.

Suy ra diện tích tam giác ABF_1 là $S_{\Delta ABF_1}=\frac{1}{2}AB.d(F_1,d)=2\sqrt{3}$.

Câu 15. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho Elip $(E):\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ và đường thẳng $d: x-\sqrt{2}y+2=0$. Đường thẳng d cắt (E) tại hai điểm A, B. Tìm tọa độ điểm C trên (E) sao cho tam giác ABC cân tại C.

Lời giải



Đường thẳng d cắt (E) tại A, B nên tọa độ A, B là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x-\sqrt{2}y+2=0 \\ 4x^2+8y^2=32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2}y-2 \\ x^2+2y^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2}y-2 \\ y^2-\sqrt{2}y-1=0 \end{cases}.$$

Gọi I là trung điểm của AB. Suy ra $y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Thay vào d, ta được $x_I=-1$. Do đó $I\left(-1;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua I và vuông góc với d nên $\Delta:\sqrt{2}x+y+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0$.

Theo giả thiết tam giác ABC cân tại C nên $C\in\Delta$, đồng thời $C\in(E)$.

Suy ra tọa độ điểm C thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} \sqrt{2}x+y+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0 \\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x+y+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0 \\ x^2+2y^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\sqrt{2}x-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 5x^2+4x-7=0 \end{cases}.$$

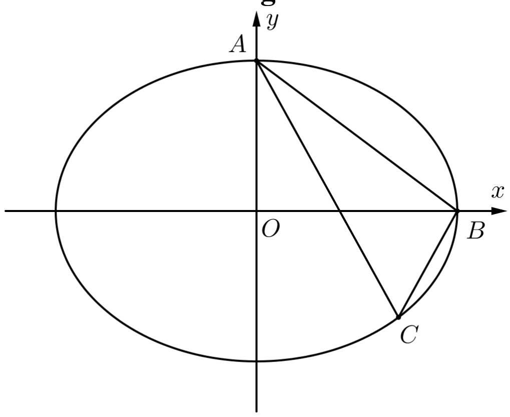
$$\Rightarrow C\left(\frac{-2+\sqrt{39}}{5};-\frac{2\sqrt{78}+\sqrt{2}}{10}\right) \text{ hoặc } C\left(\frac{-2-\sqrt{39}}{5};\frac{2\sqrt{78}-\sqrt{2}}{10}\right).$$

Vậy tọa độ điểm C cần tìm là

$$C\left(\frac{-2+\sqrt{39}}{5};-\frac{2\sqrt{78}+\sqrt{2}}{10}\right) \text{ hoặc } C\left(\frac{-2-\sqrt{39}}{5};\frac{2\sqrt{78}-\sqrt{2}}{10}\right).$$

Câu 16. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho Elip $(E):\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ và đường thẳng $d:3x+4y-12=0$. Đường thẳng d cắt (E) tại hai điểm A, B. Tìm tọa độ điểm C trên (E) sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 6.

Lời giải



Do $A,B=d\cap(E)$ nên tọa độ điểm A, B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x+4y-12=0 \\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4y-12=0 \\ 9x^2+16y^2=144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}.$$

Suy ra $A(4;0)$, $B(0;3)$ hoặc $A(0;3)$, $B(4;0)$.

Khi đó $AB=5$.

Gọi $C(a;b)\in(E)$ nên $\dfrac{a^2}{16}+\dfrac{b^2}{9}=1$. (1)

Mặt khác, ta lại có theo giả thiết

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.d(C,AB)=\frac{1}{2}AB.d(C,d)=\frac{|3a+4b-12|}{2}=6\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a+4b=24 \\ 3a+4b=0 \end{array}\right. . \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta tìm được $C\left(2\sqrt{2};-\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$ hoặc $C\left(-2\sqrt{2};\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

Câu 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2=8$ và elip $(E):\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{\frac{16}{3}}=1$. Tính diện tích hình chữ nhật có bốn đỉnh là các giao điểm của đường tròn (C) và elip (E).

Lời giải

Ta có $(C): x^2+y^2=8 \Leftrightarrow x^2=8-y^2$.

$(E):\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{\frac{16}{3}}=1 \Leftrightarrow x^2=16-3y^2$.

Do đó $16-3y^2=8-y^2 \Leftrightarrow y=\pm 2$. Từ đó $x=\pm 2$.

Vậy các giao điểm của đường tròn (C) và elip (E) là $M(2;2), N(-2;2), P(-2;-2), Q(2;-2)$.

Ta thấy $MNPQ$ là hình vuông cạnh bằng 4.

Do đó hình vuông tạo bởi các giao điểm của đường tròn (C) và elip (E) có diện tích bằng 16.

Dạng 2. Các bài toán liên quan hypebol

Câu 18. Xác định tọa độ các đỉnh, các tiêu điểm, tính tâm sai, độ dài trục thực, độ dài trục ảo và viết phương trình các đường tiệm cận của các hypebol (H) sau:

a) $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{8}=1$. b) $5x^2-4y^2=20$.

Lời giải

a) Ta có $a^2=6$, $b^2=8$ nên $a=\sqrt{6}$, $b=2\sqrt{2}$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=10$.

Suy ra tọa độ các đỉnh là $A_1\left(-\sqrt{6};0\right)$, $A_2\left(\sqrt{6};0\right)$.

Tiêu điểm là $F_1(-10;0)$, $F_2(10;0)$.

Tâm sai của (H) là $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{10}{\sqrt{6}}$.

Độ dài trục thực $2a=2\sqrt{6}$, độ dài trục ảo $2b=4\sqrt{2}$.

Đường tiệm cận có phương trình là $y=\pm\dfrac{b}{a}x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}x$.

b) Phương trình chính tắc của (H) là $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$.

Ta có $a^2=4$, $b^2=5$ nên $a=2$, $b=\sqrt{5}$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=3$.

Suy ra tọa độ các đỉnh là $A_1(-2;0)$, $A_2(2;0)$.

Tiêu điểm là $F_1(-3;0)$, $F_2(3;0)$.

Tâm sai của (H) là $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$.

Độ dài trục thực $2a=4$, độ dài trục ảo $2b=2\sqrt{5}$.

Đường tiệm cận có phương trình là $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$.

Câu 19. Viết phương trình chính tắc của hypebol (H) trong mỗi trường hợp sau:

a) (H) có một tiêu điểm tọa độ là $(-4;0)$ và độ dài trục ảo bằng $2\sqrt{7}$.

b) (H) có tiêu cự bằng 10 và đường tiệm cận là $y=\pm\frac{4}{3}x$.

c) (H) có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{13}}{3}$ và diện tích hình chữ nhật cơ sở bằng 48.

d) (H) đi qua hai điểm $M\left(\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$ và $N\left(-1;-\sqrt{3}\right)$.

e) (H) đi qua $M(-2;1)$ và góc giữa hai đường tiệm cận bằng $60°$.

Lời giải

Gọi phương trình chính tắc của (H) là $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ với $b^2=c^2-a^2$.

a) (H) có một tiêu điểm tọa độ là $(-4;0)$ suy ra $c=4$.

Độ dài trục ảo bằng $2\sqrt{7}$ suy ra $2b=2\sqrt{7}\Rightarrow b^2=7$, $a^2=c^2-b^2=9$.

Vậy phương trình (H) là $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$.

b) (H) có tiêu cự bằng 10 suy ra $2c=10\Rightarrow a^2+b^2=25$. (1)

Đường tiệm cận là $y=\pm\frac{4}{3}x$ suy ra $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$ hay $b^2=\frac{16}{9}a^2$. (2)

Thế (2) vào (1) ta được $a^2+\frac{16}{9}a^2=25\Leftrightarrow a^2=9\Rightarrow b^2=16$.

Vậy phương trình (H) là $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

c) Tâm sai bằng $\frac{\sqrt{13}}{3}$ suy ra $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{3}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{\sqrt{13}}{3}$ hay $4a^2=9b^2$. (3)

Diện tích hình chữ nhật cơ sở bằng 48 suy ra $2a.2b=48\Leftrightarrow ab=12$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $a^2=18$, $b^2=8$.

Vậy phương trình (H) là $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{8}=1$.

d) (H) đi qua hai điểm $M\left(\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$ và $N\left(-1;-\sqrt{3}\right)$ nên ta có hệ

$$\begin{cases}\frac{2}{a^2}-\frac{8}{b^2}=1\\ \frac{1}{a^2}-\frac{3}{b^2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=\frac{2}{5}.\\ b^2=2\end{cases}$$

Vậy phương trình (H) là $\frac{x^2}{\frac{2}{5}}-\frac{y^2}{2}=1$.

e) Do $M(-2;1)\in(H)$ nên $\frac{4}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1$. $\quad(5)$

Phương trình hai đường tiệm cận là

$\Delta_1: y=\frac{b}{a}x$ hay $bx-ay=0$, $\Delta_2: y=-\frac{b}{a}x$ hay $bx+ay=0$.

Vì góc giữa hai đường tiệm cận bằng $60°$ nên $\cos 60°=\frac{|b^2-a^2|}{b^2+a^2}$ hay

$$\frac{1}{2}=\frac{|b^2-a^2|}{b^2+a^2}\Leftrightarrow 2|b^2-a^2|=a^2+b^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2(b^2-a^2)=b^2+a^2\\2(b^2-a^2)=-(b^2+a^2)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b^2=3a^2\\a^2=3b^2\end{array}\right..$$

• Với $b^2=3a^2$ thay vào (5) được $a^2=\frac{11}{3}$, $b^2=11$.

Suy ra phương trình hypebol (H) là $\frac{x^2}{\frac{11}{3}}-\frac{y^2}{11}=1$.

• Với $a^2=3b^2$ thay vào (5) được $a^2=1$, $b^2=\frac{1}{3}$.

Suy ra phương trình hypebol (H) là $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{\frac{1}{3}}=1$.

Vậy có hai hypebol thỏa mãn có phương trình là $\frac{x^2}{\frac{11}{3}}-\frac{y^2}{11}=1$ và $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{\frac{1}{3}}=1$.

Để tìm điểm M thuộc hypebol có phương trình chính tắc là $(H):\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>0$, $b>0$ ta làm như sau:

• Giả sử $M(x_M;y_M)$, điểm $M\in(H)\Leftrightarrow\frac{x_M^2}{a^2}-\frac{y_M^2}{b^2}=1$ ta có phương trình thứ nhất.

• Từ điều kiện của bài toán ta thu được phương trình thứ hai.

• Giải phương trình, hệ phương trình ẩn x_M, y_M ta tìm được tọa độ của điểm M.

Câu 20. Cho hypebol $(H):\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{6}=1$ có tiêu điểm F_1 và F_2. Tìm điểm M trên (H) trong các trường hợp sau:

a) Điểm M có hoành độ là 4.

b) Khoảng cách hai điểm M và F_1 bằng 3.

c) Tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận bằng $\frac{24\sqrt{2}}{5}$.

Lời giải

Giả sử $M(x_M;y_M)\in(H)$ suy ra $\frac{x_M^2}{9}-\frac{y_M^2}{6}=1$. $\quad(*)$

a) Ta có $x_M=4$ suy ra $y_M=\pm\sqrt{6\left(\frac{x_M^2}{9}-1\right)}=\pm\sqrt{\frac{42}{3}}$.

Vậy điểm cần tìm là $M_1\left(4;\frac{\sqrt{42}}{3}\right)$; $M_2\left(4;-\frac{\sqrt{42}}{3}\right)$.

b) Ta có $MF_1=\left|a+\frac{c}{a}x_M\right|$ nên $3=\left|3+\frac{\sqrt{15}}{3}x_M\right|\Leftrightarrow x_M=0$ (loại) hoặc $x_M=\frac{-18}{\sqrt{15}}$ (nhận).

Suy ra $y_M = \pm\frac{\sqrt{210}}{5}$.

Vậy điểm cần tìm là $M_1\left(-\frac{18}{\sqrt{15}};\frac{\sqrt{210}}{5}\right)$ và $M_2\left(-\frac{18}{\sqrt{15}};-\frac{\sqrt{210}}{5}\right)$.

c) Phương trình hai tiệm cận là $d_1: y=\frac{\sqrt{6}}{3}x$, $d_2: y=-\frac{\sqrt{6}}{3}x$.

Tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận bằng $\frac{24\sqrt{2}}{5}$ nên

$$\frac{\left|\frac{\sqrt{6}}{3}x_M - y_M\right|}{\sqrt{1+\frac{2}{3}}}+\frac{\left|\frac{\sqrt{6}}{3}x_M + y_M\right|}{\sqrt{1+\frac{2}{3}}}=\frac{24\sqrt{2}}{5} \Leftrightarrow \left|\sqrt{6}x_M-3y_M\right|+\left|\sqrt{6}x_M+3y_M\right|=\frac{24\sqrt{30}}{5}. \qquad (**)$$

Mặt khác $(*) \Leftrightarrow \left(\sqrt{6}x_M-3y_M\right)\left(\sqrt{6}x_M+3y_M\right)=54>0$ nên ta có

$(**) \Leftrightarrow \left|\sqrt{6}x_M-3y_M+\sqrt{6}x_M+3y_M\right|=\frac{24\sqrt{30}}{5} \Leftrightarrow x_M=\pm\frac{12}{\sqrt{5}} \Rightarrow y_M=\pm\frac{\sqrt{330}}{5}$.

Vậy điểm cần tìm là

$M_1\left(\frac{12}{\sqrt{5}};\frac{\sqrt{330}}{5}\right)$, $M_1\left(\frac{12}{\sqrt{5}};-\frac{\sqrt{330}}{5}\right)$, $M_1\left(-\frac{12}{\sqrt{5}};\frac{\sqrt{330}}{5}\right)$ và $M_1\left(-\frac{12}{\sqrt{5}};-\frac{\sqrt{330}}{5}\right)$.

Câu 21. Tìm các điểm trên hypebol $(H): 4x^2-y^2-4=0$.

a) Nhìn hai tiêu điểm dưới góc vuông.
b) Nhìn hai tiêu điểm dưới góc 120°.
c) Có tọa độ nguyên.

Lời giải

Viết lại phương trình của $(H) \Leftrightarrow \frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{4}=1$.

Suy ra $a^2=1 \Rightarrow a=1$; $b^2=1 \Rightarrow b=2$, $c^2=a^2+b^2=5 \Rightarrow c=\sqrt{5}$, $e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$.

Hypebol (H) có các tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{5};0\right)$, $F_2\left(\sqrt{5};0\right)$.

a) Gọi $M(x;y)$ là điểm cần tìm. Ta có $\overrightarrow{F_1M}=\left(x+\sqrt{5};y\right)$, $\overrightarrow{F_2M}=\left(x-\sqrt{5};y\right)$.

Ta có $F_1M \perp F_2M \Leftrightarrow \overrightarrow{F_1M}.\overrightarrow{F_2M}=0 \Leftrightarrow \left(x+\sqrt{5}\right)\left(x-\sqrt{5}\right)+y^2=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-5=0$.

Mà $M\in(H) \Leftrightarrow 4x^2-y^2=4$ nên $5x^2=9$.

Từ đó ta được $x=\pm\frac{3}{\sqrt{5}}$; $y=\pm\frac{4}{\sqrt{5}}$.

Vậy có bốn điểm cần tìm là $\left(\frac{3}{\sqrt{5}};\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\frac{3}{\sqrt{5}};-\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\frac{3}{\sqrt{5}};\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{3}{\sqrt{5}};-\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$.

b) Gọi $N(x;y)$ là điểm cần tìm. Ta có $N\in(H) \Rightarrow \left|NF_1-NF_2\right|=2a=2$.

Xét tam giác F_1NF_2 ta có

$$\begin{aligned}F_1F_2^2 &= F_1N^2+F_2N^2-2F_1N.F_2N.\cos\widehat{F_1NF_2}\\ &=\left(F_1N-F_2N\right)^2+2F_1N.F_2N-2F_1N.F_2N.\cos 120^\circ\\ &=4+3F_1N.F_2N=4+3|a+ex|.|a-ex|=4+3\left|a^2-e^2x^2\right|.\end{aligned}$$

Nên $4c^2=4+3\left|1-5x^2\right| \Leftrightarrow 4.5=4+3\left|1-5x^2\right| \Leftrightarrow \left|1-5x^2\right|=\frac{16}{3} \Leftrightarrow x^2=\frac{19}{15} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{19}{15}}$.

Thay $x=\pm\sqrt{\frac{19}{15}}$ vào phương trình của (H) ta tính được $y=\pm\sqrt{\frac{4}{15}}$.

Vậy có bốn điểm cần tìm là $\left(\sqrt{\frac{19}{15}};\sqrt{\frac{4}{15}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{19}{15}};-\sqrt{\frac{4}{15}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{19}{15}};\sqrt{\frac{4}{15}}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{19}{15}};-\sqrt{\frac{4}{15}}\right)$.

c) Do (H) nhận Ox, Oy làm các trục đối xứng nên ta chỉ cần xét những điểm $(x;y)$ của (H) mà $x;y$ nguyên và $x\ge 0$, $y\ge 0$, rồi sau đó ta tìm những điểm đối xứng với những điểm này qua trục Ox và Oy.

Ta có $4x^2-y^2-4=0 \Leftrightarrow (2x-y)(2x+y)=4$.

Do $2x-y$, $2x+y$ nguyên, $2x+y\ge 0$ và $2x+y\ge 2x-y$ nên ta có các trường hợp

$\begin{cases}2x-y=1\\2x+y=4\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}2x-y=2\\2x+y=2\end{cases}$.

Giải hai hệ thì có một nghiệm nguyên là $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$.

Vậy những điểm trên (H) có tọa độ nguyên là $(1;0)$, $(-1;0)$.

Câu 22. Cho số $m>0$. Chứng minh rằng hypebol (H) có các tiêu điểm $F_1(-m;m)$, $F_2(m;m)$ và giá trị tuyệt đối của hiệu các khoảng cách từ mỗi điểm trên (H) tới các tiêu điểm là $2m$, có phương trình $x.y=\frac{m^2}{2}$.

Lời giải

Xét điểm tùy ý $M(x;y)\in(H)$.

Ta có

$$|MF_1-MF_2|=2m$$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{(x+m)^2+(y+m)^2}-\sqrt{(x-m)^2+(y-m)^2}\right|=2m$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2=\sqrt{x^2+y^2+2m^2+(2mx+2my)}.\sqrt{x^2+y^2+2m^2-(2mx+2my)}$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2)^2=(x^2+y^2+2m^2)^2-(2mx+2my)^2$$

$$\Leftrightarrow x.y=\frac{m^2}{2}.$$

Câu 23. Cho $F_1(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$, $F_2(\sqrt{2};\sqrt{2})$. Chứng minh mỗi điểm $M(x;y)$ thuộc đồ thị $y=\frac{1}{x}$ đều có $|MF_1-MF_2|=2\sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có $M(x;y)$ thuộc $(H):y=\frac{1}{x}$ nên có

$$MF_1^2=(x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2=(x+\sqrt{2})^2+\left(\frac{1}{x}+\sqrt{2}\right)^2$$

$$=x^2+\frac{1}{x^2}+(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}\frac{1}{x}+2x\frac{1}{x}=\left(x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}\right)^2.$$

Tương tự

$MF_2^2=\left(x-\sqrt{2}\right)^2+\left(y-\sqrt{2}\right)^2=\left(x-\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{1}{x}-\sqrt{2}\right)^2$

$=x^2+\frac{1}{x^2}+\left(\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}\frac{1}{x}+2x\frac{1}{x}=\left(x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}\right)^2$.

Nếu $x>0$ thì $x+\frac{1}{x}\geq 2$ nên $MF_1-MF_2=\left(x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}$.

Nếu $x<0$ thì $x+\frac{1}{x}\leq -2$ nên $MF_1-MF_2=-\left(x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}\right)=-2\sqrt{2}$.

Vậy $\left|MF_1-MF_2\right|=2\sqrt{2}$.

Câu 24. Cho hyperbol $(H):\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và có hệ số góc k, Δ' là đường thẳng đi qua O và vuông góc với Δ.

a) Xác định tọa độ các tiêu điểm. tâm sai, phương trình các đường tiệm cận và đường chuẩn của (H).

b) Tìm điều kiện của k để cả Δ và Δ' đều cắt (H).

c) Tứ giác với bốn đỉnh là bốn giao điểm của Δ và Δ' với (H) là hình gì? Tính diện tích tứ giác này theo k. Xác định k để diện tích tứ giác đó có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

a) Ta có $a^2=4,b^2=9\Rightarrow c^2=b^2+a^2=13$, suy ra $a=2,b=3$ và $c=\sqrt{13}$.

Vậy (H) có các tiêu điểm $F_1=\left(-\sqrt{13};0\right),F_2=\left(\sqrt{13};0\right)$; tâm sai $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{2}$; các đường tiệm cận $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{3}{2}x$ và đường chuẩn $x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{4}{\sqrt{13}}$.

b) $\Delta:y=kx$, $\Delta':y=-\frac{1}{k}x$.

Hoành độ giao điểm của Δ và (H) là nghiệm của phương trình

$9x^2-4k^2x^2=36\Leftrightarrow\left(9-4k^2\right)x^2=36$.

Δ cắt (H) khi $9-4k^2>0\Leftrightarrow-\frac{3}{2}<k<\frac{3}{2}$.

Tung độ giao điểm của Δ' và (H) là nghiệm của phương trình

$-4y^2+9k^2y^2=36\Leftrightarrow\left(9k^2-4\right)y^2=36$.

Δ' cắt (H) khi $9k^2-4>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k<-\frac{2}{3}\\ k>\frac{2}{3}\end{array}\right.$.

Vậy Δ và Δ' đều cắt (H) khi và chỉ khi $\begin{cases} -\dfrac{3}{2} < k < \dfrac{3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} k < -\dfrac{2}{3} \\ k > \dfrac{2}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{3}{2} < k < -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{2}{3} < k < \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$.

c) Gọi A và C là các giao điểm của Δ và (H) $(x_A > 0)$.

Gọi B và D là các giao điểm của Δ' và (H) $(y_B < 0)$.

Do (H) nhận O làm tâm đối xứng nên $OA = OC, OB = OD$. Suy ra tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Mặt khác, AC vuông góc với BD nên $ABCD$ là hình thoi.

Giải hệ phương trình của Δ và (H): $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ y = kx \end{cases}$ ta được $A\left(\dfrac{6}{\sqrt{9-4k^2}}; \dfrac{6k}{\sqrt{9-4k^2}}\right)$.

Giải hệ phương trình của Δ và (H): $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ y = -\dfrac{1}{k}x \end{cases}$ ta được $B\left(\dfrac{6k}{\sqrt{9k^2-4}}; \dfrac{-6}{\sqrt{9k^2-4}}\right)$.

Ta có $OA^2 = x_A^2 + y_A^2 = \dfrac{36(k^2+1)}{9-4k^2} \Rightarrow OA = \dfrac{6\sqrt{k^2+1}}{\sqrt{9-4k^2}}$; $OB^2 = x_B^2 + y_B^2 = \dfrac{36(k^2+1)}{9k^2-4} \Rightarrow OB = \dfrac{6\sqrt{k^2+1}}{\sqrt{9k^2-4}}$.

$S_{ABCD} = 4S_{OAB} = 2OA.OB = \dfrac{72(k^2+1)}{\sqrt{(9-4k^2)(9k^2-4)}}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có $\sqrt{(9-4k^2)(9k^2-4)} \le \dfrac{5}{2}(k^2+1)$ nên $S_{ABCD} \ge \dfrac{144}{5}$.

Vậy S_{ABCD} nhỏ nhất $\Leftrightarrow 9 - 4k^2 = 9k^2 - 4 \Leftrightarrow k = \pm 1$.

Vậy diện tích $ABCD$ nhỏ nhất khi các đường thẳng Δ và Δ' là các đường phân giác của các góc phần tư thứ nhất và thứ hai.

Câu 25. Cho hyperbol $(H): \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ một điểm tùy ý trên (H) đến các đường tiệm cận bằng $\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

Lời giải

(H) có hai đường tiệm cận $\Delta_{1,2}: y = \pm\dfrac{b}{a}x$ hay $\Delta_1: bx - ay = 0$, $\Delta_2: bx + ay = 0$.

$M(x;y) \in (H) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

Khi đó: $d(M,\Delta_1).d(M,\Delta_1) = \frac{|bx-ay|}{\sqrt{a^2+b^2}}.\frac{|bx+ay|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|b^2x^2-a^2y^2|}{a^2+b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ (đpcm).

Câu 26. Cho hyperbol $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Một đường thẳng Δ cắt (H) tại P, Q và cắt hai đường tiệm cận ở M, N. Chứng minh $MP = NQ$. Nếu Δ có phương trình không đổi thì tích $\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{PN}$ là hằng số.

Lời giải

Phương trình chung các đường tiệm cận Δ_1, Δ_2 là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.

Gọi $\Delta_1 : Ax + By + C = 0 \left(A^2 + B^2 \neq 0\right)$.

Nếu $B = 0$ thì Δ vuông góc với Ox. Khi đó $MP = NQ$ vì (H) nhận làm Ox trục đối xứng.

Nếu $B \neq 0$ thì P, Q có hoành độ là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (Vì vế trái của phương trình (H) và phương trình các đường tiệm cận giống nhau).

Hoành độ M, N là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + d = 0$.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm PQ và MN, ta có: $x_I = x_J = -\frac{b}{2a}$. Suy ra $I \equiv J$.

Vậy $MP = NQ$.

Gọi $\vec{u} = (m;n)$ không đổi, $m^2 + n^2 \neq 0$ là vecto chỉ phương của Δ và $P(x_0; y_0)$. Khi đó tồn tại các số t_1, t_2 sao cho $\overrightarrow{PM} = t_1\vec{u}$, $\overrightarrow{PN} = t_2\vec{u}$.

Tọa độ các điểm M, N là $\begin{cases} x_M = x_0 + mt_1 \\ y_M = y_0 + nt_1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x_N = x_0 + mt_2 \\ y_N = y_0 + nt_2 \end{cases}$.

M, N thuộc hai đường tiệm cận của (H) nên t_1, t_2 là nghiệm của phương trình bậc hai $\frac{(x_0+tm)^2}{a^2} - \frac{(y_0+tn)^2}{b^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2}\right)t^2 + 2\left(\frac{x_0m}{a^2} - \frac{y_0n}{b^2}\right)t + 1 = 0$.

Do đó $t_1.t_2 = \frac{1}{\frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2}} = \frac{a^2b^2}{m^2b^2 - n^2a^2}$.

Vậy $\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{PN} = t_1.t_2\vec{u}^2 = \frac{a^2b^2}{m^2b^2 - n^2a^2}.\left(m^2 + n^2\right)$ không đổi.

Câu 27. Cho hyperbol $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Gọi F_1, F_2 là các tiêu điểm, A_1, A_2 là các đỉnh của (H). M là điểm tùy ý trên (H) và N là hình chiếu của nó trên trục hoành. Chứng minh rằng

a) $OM^2 - MF_1.MF_2 = a^2 - b^2$.

b) $\left(MF_1 + MF_2\right)^2 = 4\left(OM^2 + b^2\right)$.

c) $MN^2 = \frac{b^2}{a^2}.\overrightarrow{NA_1}.\overrightarrow{NA_2}$.

Lời giải

a) $M(x;y)\in(H)\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1, MF_1=\left|a+\dfrac{c}{a}x\right|, MF_2=\left|a-\dfrac{c}{a}x\right|$. Khi đó:

$$OM^2-MF_1.MF_2=x^2+y^2-\left|a^2-\frac{c^2}{a^2}x^2\right|=x^2+y^2-\left|a^2-c^2\left(1+\frac{y^2}{b^2}\right)\right|=x^2+y^2-\left|-b^2-\frac{c^2}{b^2}y^2\right|$$

$$=a^2+\frac{a^2}{b^2}y^2-b^2-\frac{a^2+b^2}{b^2}y^2=a^2-b^2.$$

b) Ta có

$$\left(MF_1+MF_2\right)^2=\left(MF_1-MF_2\right)^2+4MF_1.MF_2=4a^2+4\left|a^2-\frac{c^2}{a^2}x^2\right|=4a^2+4b^2+\frac{4c^2}{b^2}y^2.$$

$$4\left(OM^2+b^2\right)\left(MF_1+MF_2\right)^2=4\left(x^2+y^2+b^2\right)=4\left(a^2+\frac{a^2}{b^2}y^2\right)+4y^2+4b^2$$

$$=4a^2+4b^2+4y^2\left(\frac{a^2}{b^2}+1\right)=4a^2+4b^2+\frac{4c^2}{b^2}y^2.$$

Vậy $\left(MF_1+MF_2\right)^2=4\left(OM^2+b^2\right)$.

c) Ta có

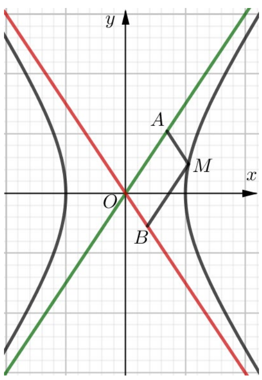
$MN^2=y^2$.

$$\frac{b^2}{a^2}.\overrightarrow{NA_1}.\overrightarrow{NA_2}=\frac{b^2}{a^2}(-x-a)(-x+a)=-\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)=b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)=y^2.$$

Vậy $MN^2=\dfrac{b^2}{a^2}.\overrightarrow{NA_1}.\overrightarrow{NA_2}$.

Câu 28. Cho hyperbol (H). Chứng minh diện tích của hình bình hành xác định bởi hai đường tiệm cận và hai đường thẳng đi qua một điểm trên (H), song song với hai đường tiệm cận là một hằng số.

Lời giải



Gọi $(H):\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Qua điểm M tùy ý trên (H), kẻ hai đường thẳng song song với hai đường tiệm cận và cắt hai tiệm cận tại B và A.

Đặt $A\left(m;\dfrac{b}{a}m\right), B\left(n;-\dfrac{b}{a}n\right)$. Ta có: $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\left(m+n;\dfrac{b}{a}(m-n)\right)$.

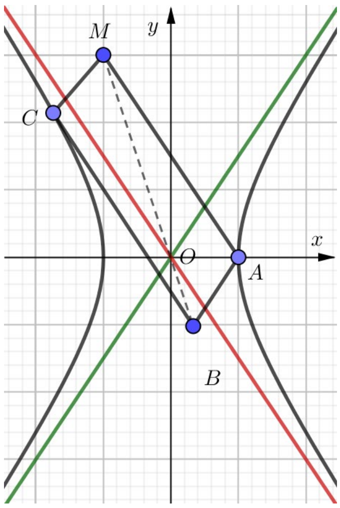
$M\in(H)$ nên $\dfrac{(m+n)^2}{a^2}-\dfrac{(m-n)^2}{b^2}=1\Rightarrow 4mn=a^2$.

Gọi S là diện tích hình bình hành $OAMB$, ta có:

$S=2S_{OAB}=OA.OB.\sin\widehat{AOB}=\left|m\left(-\dfrac{b}{a}n\right)-\left(\dfrac{b}{a}m\right)n\right|=\dfrac{b}{a}|-2mn|=\dfrac{ab}{2}$ (không đổi).

Câu 29. Hai đỉnh đối diện của một hình bình hành nằm trên hyperbol (H), các cạnh của hình bình hành song song với các đường tiệm cận của (H). Chứng minh đường thẳng nối hai đỉnh đối diện còn lại của hình bình hành đó luôn đi qua tâm đối xứng của (H).

Lời giải



Gọi $(H):\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Gọi $ABCD$ là hình bình hành có các cạnh song song với các đường tiệm cận và hai đỉnh đối diện A,C nằm trên (H).

Đặt $A(x_1;y_1)$, $C(x_2;y_2)$ thì $\dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$ và $\dfrac{x_2^2}{a^2}-\dfrac{y_2^2}{b^2}=1$.

Hai đường tiệm cận của (H) có phương trình là $bx-ay=0$ và $bx+ay=0$.

Hai cạnh của hình bình hành đi qua A có phương trình: $b(x-x_1)+a(y-y_1)=0\ (1)$ và $b(x-x_1)-a(y-y_1)=0\ (2)$.

Hai cạnh của hình bình hành đi qua C có phương trình: $b(x-x_2)+a(y-y_2)=0\ (3)$ và $b(x-x_2)-a(y-y_2)=0\ (4)$.

Giao điểm của hai đường thẳng (1) và (4) và giao điểm của hai đường thẳng (2) và (3) chính là các đỉnh B,D của hình bình hành. Bằng cách giải các hệ phương trình, ta tìm được tọa độ của B và D: $\begin{cases} x_B=\dfrac{b(x_1+x_2)+a(y_1-y_2)}{2b} \\ y_B=\dfrac{b(x_1-x_2)+a(y_1+y_2)}{2a} \end{cases}$, $\begin{cases} x_D=\dfrac{b(x_1+x_2)-a(y_1-y_2)}{2b} \\ y_D=\dfrac{-b(x_1-x_2)+a(y_1+y_2)}{2a} \end{cases}$.

Ta cần chứng minh đường chéo BD đi qua O, tức là chứng minh $\frac{x_B}{x_D} = \frac{y_B}{y_D}$ hay $x_B y_D = x_D y_B$.

Thật vậy,

$$x_B y_D = x_D y_B \Leftrightarrow \left[b\left(x_1 + x_2\right) + a\left(y_1 - y_2\right)\right].\left[-b\left(x_1 - x_2\right) + a\left(y_1 + y_2\right)\right]$$
$$= \left[b\left(x_1 + x_2\right) - a\left(y_1 - y_2\right)\right].\left[b\left(x_1 - x_2\right) + a\left(y_1 + y_2\right)\right]$$
$$\Leftrightarrow -b^2\left(x_1^2 - x_2^2\right) + a^2\left(y_1^2 - y_2^2\right) = b^2\left(x_1^2 - x_2^2\right) - a^2\left(y_1^2 - y_2^2\right) \Leftrightarrow 2b^2\left(x_1^2 - x_2^2\right) - 2a^2\left(y_1^2 - y_2^2\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} - \frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} \text{ (đúng).}$$

Dạng 3. Các bài toán liên quan parabol.

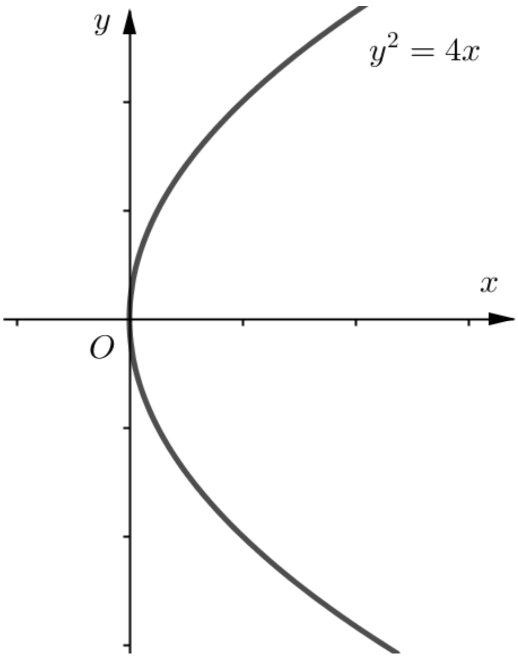
Câu 30. Tìm tiêu điểm, đường chuẩn và vẽ parabol sau

a) $y^2 = 4x$. **b)** $y^2 - x = 0$.

Lời giải

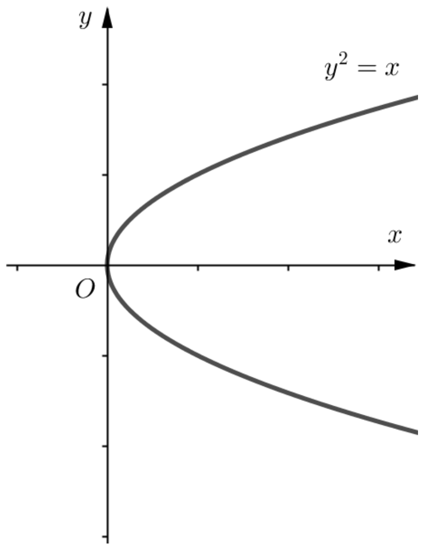
a) $y^2 = 4x \Rightarrow p = 2$.

Tiêu điểm $F(1;0)$, phương trình đường chuẩn $x = -\frac{p}{2} = -1$.



b) $y^2 - x = 0 \Leftrightarrow y^2 = x \Rightarrow p = \frac{1}{2}$.

Tiêu điểm $F\left(\frac{1}{4};0\right)$, phương trình đường chuẩn $x = -\frac{p}{2} = -\frac{1}{4}$.



Câu 31. Viết phương trình chính tắc của parabol (P) biết

a) (P) có tiêu điểm là $F(5;0)$.

b) khoảng cách từ tiêu điểm F đến đường thẳng $\Delta: x+y-12=0$ là $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Gọi phương trình chính tắc của parabol (P) là $y^2 = 2px$.

a) (P) có tiêu điểm là $F(5;0)$ nên $\frac{p}{2} = 5 \Leftrightarrow p = 10$.

Vậy phương trình chính tắc của (P) là $y^2 = 20x$.

b) Tiêu điển $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, khoảng cách từ tiêu điểm F đến đường thẳng $\Delta: x+y-12=0$ là

$$2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\left|\frac{p}{2}-12\right|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p=16 \\ p=32 \end{array}\right..$$

Vậy có hai parabol thỏa mãn yêu cầu bài toán có phương trình là $y^2 = 32x$ và $y^2 = 64x$.

Câu 32. Viết phương trình chính tắc của parabol (P) biết

a) (P) có đường chuẩn $\Delta:\ x = -5$.

b) (P) có $p = \frac{1}{3}$.

Lời giải

Phương trình chính tắc của parabol (P): $y^2 = 2px$, $p > 0$.

a) Đường chuẩn $\Delta:\ x = -5 \Rightarrow -\frac{p}{2} = -5 \Rightarrow p = 10$ nên (P): $y^2 = 20x$.

b) Tham số tiêu $p = \frac{1}{3}$ nên (P): $y^2 = \frac{2}{3}x$.

Câu 33. Cho elip (E): $9x^2 + 16y^2 = 144$.

a) Tìm các tiêu điểm, tiêu cự và tâm sai của elip.

b) Lập phương trình chính tắc của hypebol (H) có cùng hình chữ nhật cơ sở với elip (E).

c) Lập phương trình chính tắc của parabol (P) có tiêu điểm trùng với tiêu điểm bên phải của elip (E).

Lời giải

a) (E): $9x^2+16y^2=144 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

Ta có $a^2=16$, $b^2=9 \Rightarrow a=4, b=3, c=\sqrt{a^2-b^2}=5$.

Vậy elip (E) có các tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{7};0\right)$; $F_2\left(\sqrt{7};0\right)$, tiêu cự $2c=2\sqrt{7}$, tâm sai $e=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

b) Hypebol (H): $\frac{x^2}{A^2}-\frac{y^2}{9}=1$ có cùng hình chữ nhật cơ sở với elip nên $A=a=4, B=b=3$.

Vậy (H): $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

c) Phương trình chính tắc của parabol (P): $y^2=2px$, $p>0$.

Ta có tiêu điểm là tiêu điểm bên phải của elip $F_2\left(\sqrt{7};0\right)$ nên $\frac{p}{2}=\sqrt{7} \Rightarrow p=2\sqrt{7}$.

Vậy (P): $y^2=4\sqrt{7}x$.

Để xác định tọa độ điểm M thuộc parabol có phương trình chính tắc là $y^2=2px$ ta làm như sau:

Giả sử $M\left(x_M;y_M\right)$, điểm $M\in(P) \Leftrightarrow y_M^2=2px_M$ ta thu được phương trình thứ nhất.

Từ điều kiện của bài toán ta thu được phương trình thứ hai.

Giải phương trình, hệ phương trình ẩn x_M, y_M ta tìm được tọa độ của điểm M.

Câu 34. Trong mặt phẳng Oxy, cho parabol có tiêu điểm F.

a) Tìm trên (P) điểm M cách F một khoảng là 3.

b) Tìm điểm M trên (P) sao cho $S_{OMF}=8$.

c) Tìm điểm A nằm trên parabol và một điểm B nằm trên đường thẳng $\Delta: 4x-3y+5=0$ sao cho AB ngắn nhất.

Lời giải

a) Giả sử $M\left(x_M;y_M\right)\in(P) \Rightarrow y_M^2=8x_M$. $\quad (*)$

Từ phương trình (P) có $p=4$ nên $F(2;0)$.

Ta có $FM=\frac{p}{2}+x_M$ suy ra $x_M=1$, kết hợp với $(*)$ ta có $y_M=\pm 2\sqrt{2}$.

Vậy có hai điểm thỏa mãn là $M_1\left(1;2\sqrt{2}\right), M_2\left(1;-2\sqrt{2}\right)$.

b) Ta có $M\in(P) \Rightarrow M\left(\frac{a^2}{8};a\right)$ với $a\geq 0$.

$S_{OMF}=8 \Leftrightarrow \frac{1}{2}OF.d\left(M;OF\right)=8 \Leftrightarrow a=8$.

Vậy điểm M cần tìm là $M\left(8;8\right)$.

c) Với mọi điểm $A\in\left(P\right)$, $B\in\Delta$ ta luôn có $AB\ge d\left(A;\Delta\right)$.

$A\in\left(P\right)\Rightarrow A\left(\frac{a^2}{8};a\right)$ với $a\ge 0$, khi đó $d\left(A;\Delta\right)=\frac{\left|4.\frac{a^2}{8}-3a+5\right|}{5}=\frac{\left(a-3\right)^2+1}{10}\ge\frac{1}{10}$.

Suy ra AB nhỏ nhất khi và chỉ khi $A\left(\frac{9}{8};3\right)$ và B là hình chiếu của A lên Δ.

Đường thẳng đi qua A vuông góc với Δ nhận $\vec{u}=\left(3;4\right)$ là véc – tơ pháp tuyến nên có phương trình là $3\left(x-\frac{9}{8}\right)+4\left(y-3\right)=0 \Leftrightarrow 24x+32y-123=0$.

Do đó tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases}4x-3y+5=0\\24x+32y-123=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{209}{200}\\y=\frac{153}{50}\end{cases}$.

Vậy $A\left(\frac{9}{8};3\right)$, $B\left(\frac{209}{200};\frac{153}{50}\right)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 35. Cho parabol $\left(P\right)$: $y^2=12x$ có tiêu điểm F. Tìm hai điểm A, B trên $\left(P\right)$ sao cho tam giác OAB có trực tâm là F.

Lời giải

Ta có: $F\left(3;0\right)$ nên tam giác OAB nhận F là trực tâm thì A, B đối xứng qua Ox.

Gọi $A\left(m;n\right)$ thì $B\left(m;-n\right)$, $m\ne 0$.

Ta có $\begin{cases}A\in\left(P\right)\\OA\perp BF\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n^2=12m\\m\left(m-3\right)-n^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\left(m-15\right)=0\\n^2=12m\end{cases}$.

Chọn $m=15$ nên $n^2=180\Rightarrow n=\pm 6\sqrt{5}$. Vậy $A\left(15;6\sqrt{5}\right)$ và $B\left(15;-6\sqrt{5}\right)$.

Câu 36. Cho parabol $\left(P\right)$ có phương trình $y^2=4x$. Tìm tọa độ các điểm M nằm trên parabol $\left(P\right)$ và cách tiêu điểm một khoảng bằng 3.

Lời giải

Giả $\left(P\right): y^2=4x=2px\Rightarrow p=2$.

Gọi $M\left(x;y\right)\in\left(P\right)$ thì $MF=x+\frac{p}{2}=x+1$. Ta có $MF=3\Leftrightarrow x+1=3\Leftrightarrow x=2$.

Thế vào $\left(P\right)$: $y^2=8\Rightarrow y=\pm 2\sqrt{2}$.

Vậy có hai điểm $M_1\left(2;2\sqrt{2}\right)$ và $M_2\left(2;-2\sqrt{2}\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 37. Tìm độ dài dây cung vuông góc với trục đối xứng của parabol $y^2=2px$ tại tiêu điểm F.

Lời giải

Ta có $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ là tiêu điểm của parabol $y^2=2px$, $p>0$.

Đường thẳng vuông góc với Ox tại F có phương trình là $x=\frac{p}{2}$.

Giao điểm của đường thẳng với parabol phải có tọa độ thỏa mãn hệ: $\begin{cases} y^2=2px \\ x=\frac{p}{2} \end{cases}$.

Do đó $y^2=p^2 \Rightarrow y=\pm p$ nên có giao điểm là $A\left(\frac{p}{2};p\right)$ và $B\left(\frac{p}{2};-p\right)$.

Vậy $AB=2p$.

Câu 38. Cho parabol $(P): y^2=2px$. Với mỗi điểm $M\in(P)$ và khác gốc O, gọi M' là hình chiếu của M lên Oy và I là trung điểm của đoạn OM'. Chứng minh đường thẳng IM có điểm chung duy nhất với (P) và là phân giác của góc $M'MF$.

Lời giải

Gọi $M(x_0;y_0)\in(P)$ thì $y_0^2=2px_0$; $M'(0;y_0)$ suy ra $I=\left(0;\frac{y_0}{2}\right)$.

Phương trình đường thẳng IM là $\frac{x-x_0}{x_0}=\frac{y-y_0}{y_0} \Leftrightarrow \frac{x}{x_0}-\frac{2y}{y_0}+1=0$.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} y^2=2px \\ \frac{x}{x_0}-\frac{2y}{y_0}+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2x_0}{y_0}y-x_0 \\ y^2=2p\left(\frac{2x_0}{y_0}y-x_0\right) \end{cases}$.

Mà $x_0=\frac{y_0^2}{2p}$ nên $y_0=2p\left(\frac{yy_0}{p}-\frac{y_0^2}{2p}\right) \Leftrightarrow y^2-2y_0y+y_0^2=0$.

Vì phương trình có nghiệm kép $\Rightarrow IM$ có điểm chung duy nhất với (P).

Hạ $HM\perp\Delta$. Ta chứng minh $HF\perp MI$.

Vì tam giác HMF có $MH=MF$ nên cân tại M.

Suy ra đường cao MI cũng là phân giác của góc $M'MF$.

Câu 39. Qua một điểm A cố định trên trục đối xứng của parabol $(P): y^2=2px$, ta vẽ một đường thẳng cắt (P) tại hai điểm M,N. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ M,N tới trục đối xứng của (P) là hằng số.

Lời giải

Gọi $A(a;0)$. Đường thẳng Δ đi qua A có phương trình $A(x-a)+By=0$.

Với $A\neq 0$, khi đó tung độ các giao điểm của đường thẳng Δ và (P) là nghiệm của phương trình

$$A\frac{y^2}{2p}+By-Aa=0\Leftrightarrow Ay^2+2pBy-2pAa=0.$$

Suy ra $\mathrm{d}(M;Ox).\,\mathrm{d}(N;Ox)\ |y_M|.|y_N|=\left|-\frac{2pAa}{A}\right|=2p|a|$ không đổi.

Câu 40. Cho dây cung AB đi qua tiêu điểm F của parabol (P). Chứng minh khoảng cách từ trung điểm I của AB đến đường chuẩn Δ bằng $\frac{AB}{2}$. Suy ra đường tròn đường kính PB tiếp xúc với đường chuẩn.

Lời giải

Hạ AA', BB', II' vuông góc với đường chuẩn Δ.

Hình thang vuông $ABB'A'$ có II' là đường trung bình nên $d(I,\Delta)=II'=\frac{1}{2}(AA'+BB')$.

Mà A,B thuộc parabol nên $AF=AA'$ và $BF=BB'$

Do đó $AA'+BB'=AF+BF=AB$

Vậy $d(I,\Delta)=\frac{1}{2}AB$, suy ra đường tròn đường kính AB tiếp xúc với đường chuẩn Δ.

Câu 41. Cho Parabol $(P): y^2=2px$ và đường thẳng d có phương trình $2mx-2y-mp=0$. Gọi A,B là các giao điểm của (P) và d. Chứng tỏ rằng đường tròn đường kính AB tiếp xúa với đường chuẩn của (P).

Lời giải

Phương trình $d: 2mx-2y-mp=0\Leftrightarrow m(2x-p)-2y=0$.

Suy ra d luôn đi qua tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ của (P).

Do đó dây AB đi qua tiêu điểm F.

Bài toán đưa về bài toán của *ví dụ 14* đã chứng minh ở trên.

Câu 42. Cho A,B là hai điểm trên parabol $(P): y^2=2px$ sao cho tổng khoảng cách từ A,B tới đường chuẩn của (P) bằng độ dài AB. Chứng minh rằng AB luôn đi qua tiêu điểm của (P).

Lời giải

Gọi F là tiêu điểm của (P).

Gọi A',B' theo thứ tự là hình chiếu của A,B trên đường chuẩn Δ của (P).

Ta có $A,B\in(P)\Rightarrow AF=d(A,\Delta)=AA'; BF=d(B,\Delta)=BB'$.

Suy ra $AF+BF=AA'+BB'=AB$.

Vậy A,B,F thẳng hàng hay AB đi qua F.

Câu 43. Cho parabol $(P): y^2=\frac{1}{2}x$. Hai điểm lưu động M,N thuộc (P), khác gốc O sao cho OM vuông góc với ON. Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

Gọi $M(x_1;y_1), N(x_2;y_2)$ thuộc (P) nên $x_1=2y_1^2, x_2=2y_2^2$.

Do OM vuông góc với ON nên ta có :

$x_1x_2+y_1y_2=0\Rightarrow 4(y_1y_2)^2+y_1y_2=0\Rightarrow y_1y_2=-\frac{1}{4}$. (vì M,N khác O)

Phương trình đường thẳng qua M,N phân biệt là :

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$\Leftrightarrow (y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y+y_1x_2-x_1y_2=0$$

$$\Leftrightarrow (y_2-y_1)\left[x-2(y_2-y_1)y+2y_1x_2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x-2(y_2+y_1)y+2y_1y_2=0$$

$$\Leftrightarrow x-2(y_2+y_1)y-\frac{1}{2}=0.$$

Với $x=\frac{1}{2}, y=0$ thì đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định $I\left(\frac{1}{2};0\right)$.

Câu 44. Cho Parabol $(P): y^2=2px\ (p>0)$. A là một điểm cố định trên (P). Một góc vuông uAt quay quanh đỉnh A có các cạnh cắt (P) tại B và C. Chứng minh rằng đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

Giả sử $A\left(\frac{a^2}{2p};a\right), B\left(\frac{b^2}{2p};b\right), C\left(\frac{c^2}{2p};c\right)$.

Phương trình đường thẳng BC là: $2px-(b+c)y+bc=0$

Ta có: $\overrightarrow{AB}=\left(\frac{b^2-a^2}{2p};\text{b}-a\right), \overrightarrow{AC}=\left(\frac{c^2-a^2}{2p};c-a\right)$.

Do:

$$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$$

$$\Leftrightarrow (b^2-a^2)(c^2-a^2)+4p^2(b-a)(c-a)=0$$

$$\Leftrightarrow (b+a)(c+a)+4p^2=0$$

$$\Leftrightarrow bc+a(b+c)+a^2+4p^2=0$$

Do đó: $bc=-a(b+c)-a^2-4p^2$ nên phương trình của BC là

$2px-a^2-4p^2-(b+c)(y+a)=0$.

Từ đó đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định $M\left(\frac{a^2}{2p}+2p;-a\right)$.

Câu 45. Cho hai parabol (P) và (P') lần lượt có phương trình $y^2=2px$ và $y^2=2p'x$. Qua O vẽ đường thẳng thay đổi cắt (P) và (P') tại hai điểm phân biệt A và A'. Chứng minh rằng tỉ số $\frac{OA}{OA'}$ không thay đổi.

Lời giải

Đường thẳng đi qua O cắt hai parabol (P) và (P') lần lượt tại hai điểm phân biệt A và A' có dạng $y-kx$ với $k\neq 0$.

Giả sử $A\left(x_0;y_0\right)$ là nghiệm khác 0 của hệ phương trình: $\begin{cases} y=kx \\ y^2=2px \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=\dfrac{2p}{k^2} \\ y_0=\dfrac{2p}{k} \end{cases}$.

Do đó $OA=\sqrt{\left(\dfrac{2p}{k^2}\right)^2+\left(\dfrac{2p}{k^2}\right)^2}=\dfrac{2p}{k^2}.\sqrt{1+k^2}$

Tương tự $OA'=\dfrac{2p'}{k^2}.\sqrt{1+k^2}$.

Vậy $\dfrac{OA}{OA'}=\dfrac{p}{p'}$ không đổi.

Câu 46. Cho Parabol $(P): y^2=2px\ \left(p>0\right)$ và đường thẳng d quay quanh tiêu điểm F và cắt (P) tại hai điểm M,N. Gọi $\alpha=\left(\vec{i},\overrightarrow{FM}\right),\ \left(0<\alpha<\pi\right)$.

a) Chứng minh $\dfrac{1}{MF}+\dfrac{1}{NF}$ không đổi.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của tích $FM.FN$ khi α thay đổi.

Lời giải

a) Chứng minh $\dfrac{1}{MF}+\dfrac{1}{NF}$ không đổi.

Gọi H,M' theo thứ tự là hình chiếu của M trên Ox và đường chuẩn Δ của parabol (P).

Gọi I là giao điểm của Ox và Δ.

Ta có: $MF=MM'=IH$

$\overrightarrow{IH}=\overrightarrow{IF}+\overrightarrow{FH}=p+\overrightarrow{FM}.\vec{i}=p+MF.\cos\alpha$.

$\Rightarrow MF=\dfrac{p}{1-\cos\alpha}$. Vì $\left(\overrightarrow{FN},\vec{i}\right)=180^o-\alpha$.

Tương tự: $\Rightarrow NF=\dfrac{p}{1-\cos\left(180^o-\alpha\right)}=\dfrac{p}{1+\cos(\alpha)}$

Do đó: $\dfrac{1}{MF}+\dfrac{1}{NF}=\dfrac{1-\cos\alpha}{p}+\dfrac{1+\cos\alpha}{p}=\dfrac{2}{p}$ không đổi.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của tích $FM.FN$ khi α thay đổi.

$FM.FN=\dfrac{p}{1-\cos\alpha}.\dfrac{p}{1+\cos\alpha}=\dfrac{p^2}{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{p^2}{\sin^2\alpha}$.

$FM.FN$ có giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow \sin^2\alpha$ lớn nhất $\Leftrightarrow \sin\alpha=1 \Leftrightarrow d\perp Ox$.

Câu 47. Cho hai parabol lần lượt có phương trình $y^2=2px$ và $y=ax^2+bx+c$. Chứng minh rằng nếu hai parabol đó cắt nhau tại bốn điểm phân biệt thì bốn điểm đó nằm trên một đường tròn.

Lời giải

Tọa độ giao điểm của hai parabol đã cho là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} y^2=2px \\ y=ax^2+bx+c \end{cases} \left(a\neq 0\right)$.

Nhân hai vế của phương trình thứ nhất với a rồi trừ đi phương trình thứ 2 ta được:

$$ay^2 - y = 2apx - ax^2 - bx - c$$
$$\Leftrightarrow ax^2 + ay^2 - (2ap - b)x - y + c = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{2ap - b}{a}x - \frac{1}{a}y + \frac{c}{a} = 0.$$

Tọa độ các giao điểm thỏa mãn phương trình trên là phương trình của một đường tròn.
Vậy bốn giao điểm nằm trên một đường tròn.

Dạng 4. Các bài toán liên quan đường cônic

Để nhận dạng đường cônic ta dựa vào tâm sai:

- Elip là một đường cônic có tâm sai $e < 1$.
- Parabol là một đường cônic có tâm sai $e = 1$.
- Hypebol là một đường cônic có tâm sai $e > 1$.

Từ phương trình của các đường cônic ta xác định được dạng của nó từ đó xác định được tiêu điểm và đường chuẩn của nó.

Câu 48. Xác định tiêu điểm và đường chuẩn của các đường cônic sau.

a) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$. b) $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{10} = 1$ c) $y^2 = 18x$

Lời giải

a) Dễ thấy đây là phương trình chính tắc của đường elip

Ta có $\begin{cases} a^2 = 5 \\ b^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{5} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 5 - 4 = 1$.

Do đó $c = 1$, tâm sai $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Vậy ta có:

Tiêu điểm $F_1(-1;0)$ tương ứng có đường chuẩn $x + \frac{\sqrt{5}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = 0$ hay $x + 5 = 0$.

Tiêu điểm $F_2(1;0)$ tương ứng có đường chuẩn $x - \frac{\sqrt{5}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = 0$ hay $x - 5 = 0$.

b) Đây là phương trình chính tắc của đường hypebol.

Ta có $\begin{cases} a^2 = 7 \\ b^2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{7} \\ b = \sqrt{10} \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 17$.

Do đó $c = \sqrt{17}$, tâm sai $e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{17}{7}}$.

Vậy ta có:

Tiêu điểm $F_1(-\sqrt{17};0)$ tương ứng có đường chuẩn $x+\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{\frac{17}{7}}}=0$ hay $x+\frac{7}{\sqrt{17}}=0$.

Tiêu điểm $F_2(\sqrt{17};0)$ tương ứng có đường chuẩn $x-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{\frac{17}{7}}}=0$ hay $x-\frac{7}{\sqrt{17}}=0$.

c) Đây là phương trình chính tắc của đường parabol.

Ta có $2p=18\Rightarrow p=9$.

Vậy tiêu điểm $F\left(\frac{9}{2};0\right)$ và đường chuẩn $x+\frac{9}{2}=0$.

Câu 49. Cho cônic có tiêu điểm $F(-1;1)$ đi qua điểm $M(1;1)$ và đường chuẩn $\Delta:3x+4y-5=0$ .Cônic này là elip, hypebol hay là parabol?

Lời giải

Ta có $MF=2, d(M;\Delta)=\frac{|3+4-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{2}{5}$. Suy ra $\frac{MF}{d(M;\Delta)}=5>1$ suy ra đây là elip.

Dựa vào các dạng của đường cônic mà giả thiết đã cho để viết phương trình

Dựa vào định nghĩa ba đường cônic

Câu 50. Cho đường thẳng $\Delta: x-y+1=0$ và điểm $F(1;0)$. Viết phương trình của đường cônic nhận F làm tiêu điểm và Δ làm đường chuẩn trong mỗi trường hợp sau:

a) Tâm sai $e=\sqrt{3}$.   b) Tâm sai $e=\frac{1}{2}$ c) Tâm sai $e=1$

Lời giải

Gọi $M(x;y)$ là điểm thuộc đường cônic cần tìm.

Ta có: $MF=\sqrt{(1-x)^2+y^2}, d(M;\Delta)=\frac{|x-y+1|}{\sqrt{2}}$

Theo định nghĩa ta có: $\frac{MF}{d(M;\Delta)}=e\Leftrightarrow MF=e.d(M;\Delta)\,(*)$

a) Tâm sai $e=\sqrt{3}$ thì

$$(*)\Leftrightarrow\sqrt{(1-x)^2+y^2}=\sqrt{3}.\frac{|x-y+1|}{\sqrt{2}}$$
$$\Leftrightarrow 2\left(x^2-2x+1+y^2\right)=3(x^2+y^2+1-2xy+2x-2y)$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+y^2-6xy+10x-6y+1=0.$$

Vậy phương trình đường cônic cần tìm là $2x^2+y^2-6xy+10x-6y+1=0$.

b) Tâm sai $e=\frac{1}{2}$ thì

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{(1-x)^2+y^2}=\frac{1}{2}.\frac{|x-y+1|}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow 8\left(x^2-2x+1+y^2\right)=x^2+y^2+1-2xy+2x-2y$

$\Leftrightarrow 7x^2+7y^2+2xy-18x+2y+7=0.$

Vậy phương trình đường cônic cần tìm: $7x^2+7y^2+2xy-18x+2y+7=0$.

c) Tâm sai $e=1$ thì

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{(1-x)^2+y^2}=\frac{|x-y+1|}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow 2\left(x^2-2x+1+y^2\right)=x^2+y^2+1-2xy+2x-2y$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2xy-6x+2y+1=0.$

Vậy phương trình đường cônic cần tìm: $x^2+y^2+2xy-6x+2y+1=0$.

Câu 51. Cho điểm $A(0;\sqrt{3})$ và hai đường thẳng $\Delta: x-2=0,\ \Delta': 3x-y=0$.

a) Viết phương trình chính tắc đường elip có A là một đỉnh và một đường chuẩn Δ.

b) Viết phương trình chính tắc đường hypebol có Δ là một đường chuẩn và Δ' là tiệm cận.

Lời giải

a) Gọi phương trình chính tắc của elip là: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, a>b>0.

Vì $A(0;\sqrt{3})$ là một đỉnh của elip nên $b=\sqrt{3}$.

Elip có một đường chuẩn là Δ nên $\frac{a}{c}=2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{c^2}=2 \Leftrightarrow a^2=2c$ (*)

Ta lại có: $b^2=a^2-c \Rightarrow 3=a^2-c \Rightarrow c=a^2-3$

Thay vào (*) ta có $a^2=2(a^2-3) \Leftrightarrow a^2=6$.

Vậy phương trình chính tắc elip cần tìm là: $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$.

b) Gọi phương trình chính tắc của hypebol là: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, a > 0, b >0 .

Hypebol có một đường chuẩn là Δ nên $\frac{a}{e}=2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{c}=2 \Leftrightarrow c=\frac{a^2}{2}$. (1)

Hypebol có một đường tiệm cận là Δ' nên $\frac{b}{a}=3 \Leftrightarrow b=3a$. (2)

Mặt khác: $b^2=c^2-a^2$ (3)

Thay (1), (2) vào (3) ta được $(3a)^2=\left(\frac{a^2}{2}\right)^2-a^2 \Leftrightarrow 10a^2=\frac{a^4}{4} \Leftrightarrow a^2(40-a^2)=0 \Leftrightarrow a^2=40$.

Suy ra $b^2 = 9a^2 = 360$.

Vậy phương trình chính tắc hypebol cần tìm là: $\frac{x^2}{40} - \frac{y^2}{360} = 1$.

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Các bài toán liên quan elip

Câu 1. Đường Elip $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ có tiêu cự bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** 9. **D.** $(-2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Elip $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ có $a^2 = 16$, $b^2 = 7$ suy ra $c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 7 = 9 \Leftrightarrow c = 3$.

Vậy tiêu cự $2c = 2.3 = 6$.

Câu 2. Cho elip (E) có phương trình $16x^2 + 25y^2 = 400$. Khẳng định nào sai trong các khẳng định sau?

A. (E) có trục nhỏ bằng 8.

B. (E) có tiêu cự bằng 3.

C. (E) có trục nhỏ bằng 10.

D. (E) có các tiêu điểm $F_1(-3;0)$ và $F_2(3;0)$.

Lời giải

Chọn B

(E): $16x^2 + 25y^2 = 400 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Elip (E) có $a = 5$, $b = 4$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

Tiêu cự của elip (E) là $2c = 6$ nên khẳng định "(E) có tiêu cự bằng 3" là khẳng định sai.

Câu 3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Tiêu cự của (E) bằng

A. 10. **B.** 16. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Phương trình chính tắc của elip có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0, b > 0)$.

Do đó elip (E) có $\begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$.

Tiêu cự của elip (E) bằng $2c = 8$.

Câu 4. Một elip có diện tích hình chữ nhật cơ sở là 80, độ dài tiêu cự là 6. Tâm sai của elip đó là

A. $e = \frac{4}{5}$. **B.** $e = \frac{3}{4}$. **C.** $e = \frac{3}{5}$. **D.** $e = \frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Diện tích hình chữ nhật cơ sở là $2a.2b = 80$, suy ra $a.b = 20$ (1).

Lại có $2c = 6 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow a^2 - b^2 = c^2 = 9$ (2).

Từ $(1) \Rightarrow b = \dfrac{20}{a}$, thay vào (2) ta được:

$a^2 - \dfrac{400}{a^2} = 9 \Rightarrow a^4 - 9a^2 - 400 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$.

Do đó tâm sai $e = \dfrac{3}{5}$.

Câu 5. Cho elip $(E): 4x^2 + 5y^2 = 20$. Diện tích hình chữ nhật cơ sở của (E) là

A. $2\sqrt{5}$. **B.** 80. **C.** $8\sqrt{5}$. **D.** 40.

Lời giải

Chọn C

$(E): 4x^2 + 5y^2 = 20 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

Độ dài trục lớn: $2a = 2\sqrt{5}$.

Độ dài trục bé: $2b = 2.2 = 4$.

Diện tích hình chữ nhật cơ sở của (E) là: $2\sqrt{5}.4 = 8\sqrt{5}$.

Câu 6. Đường elip $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{7} = 1$ có tiêu cự bằng

A. 3. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 18.

Lời giải

Chọn C

□ Ta có: $a^2 = 16$, $b^2 = 7$ nên $c^2 = a^2 - b^2 = 9 \Rightarrow c = 3$.

□ Tiêu cự của elip là $2c = 6$.

Câu 7. Cho elip có phương trình chính tắc $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$. Tính tâm sai của elip.

A. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2; b^2 = 1 \Rightarrow b = 1; c^2 = a^2 - b^2 = 3 \Rightarrow c = \sqrt{3}$

Tâm sai của elip là $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (với $a > b > 0$) có F_1, F_2 là các tiêu điểm và M là một điểm di động trên (E). Khẳng định nào dưới đây là **đúng?**

A. $MF_1 + MF_2 = 2b$. **B.** $(MF_1 - MF_2)^2 = 4(b^2 - OM^2)$.

C. $OM^2 - MF_1.MF_2 = a^2 - b^2$. **D.** $MF_1.MF_2 + OM^2 = a^2 + b^2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$MF_1 = a + \dfrac{cx}{a}; MF_2 = a - \dfrac{cx}{a} \Rightarrow MF_1.MF_2 = a^2 - \dfrac{c^2x^2}{a^2}$.

$M(x;y)\in(E)\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\Rightarrow y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\Rightarrow OM^2=x^2+y^2=x^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=x^2+b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}$

$MF_1.MF_2+OM^2=a^2-\frac{c^2x^2}{a^2}+x^2+b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}=a^2+b^2+x^2-\left(\frac{c^2x^2}{a^2}+\frac{b^2x^2}{a^2}\right)$

$=a^2+b^2+x^2-\frac{\left(b^2+c^2\right)x^2}{a^2}$

Vì $a^2=b^2+c^2$ nên $MF_1.MF_2+OM^2=a^2+b^2+x^2-\frac{\left(b^2+c^2\right)x^2}{a^2}=a^2+b^2+x^2-\frac{a^2x^2}{a^2}=a^2+b^2$

Câu 9. Trong hệ trục Oxy, cho Elip (E) có các tiêu điểm $F_1(-4;0),F_2(4;0)$ và một điểm M nằm trên (E). Biết rằng chu vi của tam giác MF_1F_2 bằng 18. Xác định tâm sai e của (E).

A. $e=\frac{4}{5}$. **B.** $e=\frac{4}{18}$. **C.** $e=-\frac{4}{5}$. **D.** $e=\frac{4}{9}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $F_1(-4;0)\Rightarrow c=4$.

$P_{\Delta MF_1F_2}=\underbrace{MF_1+MF_2}_{2a}+F_1F_2$

$\Leftrightarrow 18=2a+2c\Leftrightarrow 18=2a+8\Leftrightarrow a=5.$

Tâm sai $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$.

Câu 10. Cho Elip (E) đi qua điểm $A(-3;0)$ và có tâm sai $e=\frac{5}{6}$. Tiêu cự của (E) là

A. 10. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** 5. **D.** $\frac{10}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi phương trình chính tắc của (E) là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a>b>0$.

Vì (E) đi qua điểm $A(-3;0)$ nên $\frac{9}{a^2}=1\Rightarrow a^2=9\Rightarrow a=3$.

Lại có $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{6}\Rightarrow c=\frac{5a}{6}=\frac{5}{2}\Rightarrow 2c=5$.

Câu 11. Trong mặt phẳng Oxy, phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của một elip?

A. $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$. **B.** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{8}=1$. **C.** $\frac{x}{9}+\frac{y}{8}=1$. **D.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình chính tắc của elip có dạng $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,(a>b>0)$ nên chọn phương án D.

Câu 12. Phương trình chính tắc của đường elip với $a=4$, $b=3$ là

A. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **B.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$. **C.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. **D.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình chính tắc $(E):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

Câu 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình chính tắc của elip biết một đỉnh là $A_1(-5;0)$ và một tiêu điểm là $F_2(2;0)$.

A. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$. **B.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$. **C.** $\frac{x^2}{29}+\frac{y^2}{25}=1$. **D.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{29}=1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $a=5;c=2\Rightarrow b^2=25-4=21$

Vậy $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$.

Câu 14. Tìm phương trình chính tắc của Elip có độ dài trục lớn bằng $4\sqrt{10}$ và đi qua điểm $A(0;6)$:

A. $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{12}=1$. **B.** $\frac{x^2}{160}+\frac{y^2}{36}=1$. **C.** $\frac{x^2}{160}+\frac{y^2}{32}=1$. **D.** $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{36}=1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có phương trình chính tắc Elip (E) có dạng $\frac{x^{2)}}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

Theo giả thiết ta có $2a=4\sqrt{10}$ $\Rightarrow a=2\sqrt{10}$.

Mặt khác (E) đi qua $A(0;6)$ nên ta có $\frac{6^2}{b^2}=1$ $\Rightarrow b=6$.

Vậy phương trình chính tắc của (E) là: $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{36}=1$

Câu 15. Lập phương trình chính tắc của Elip đi qua điểm B và có tâm sai $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

A. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. **B.** $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$. **C.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{2}=1$. **D.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$

Lời giải

Chọn A

Phương trình chính tắc của Elip có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,(a>b>0)$.

Elip đi qua điểm B nên $\frac{0^2}{a^2}+\frac{2^2}{b^2}=1\Leftrightarrow b^2=4$.

Tâm sai $e=\frac{\sqrt{5}}{3}\Leftrightarrow\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}\Leftrightarrow c=\frac{\sqrt{5}}{3}a$.

$a^2=b^2+c^2\Leftrightarrow a^2=4+\left(\frac{\sqrt{5}}{3}a\right)^2\Leftrightarrow a^2=9$.

Vậy phương trình chính tắc của Elip cần tìm là $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Câu 16. Phương trình chính tắc của Elip có đỉnh $(-3;0)$ và một tiêu điểm là $(1;0)$ là

A. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{9}=1$. **B.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$. **C.** $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{9}=1$. **D.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$.

Lời giải

Chọn B

Elip có đỉnh $(-3;0)\Rightarrow a=3$ và một tiêu điểm $(1;0)\Rightarrow c=1$.

Ta có $c^2=a^2-b^2\Leftrightarrow b^2=a^2-c^2=9-1=8$.

Vậy phương trình $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$.

Câu 17. Tìm phương trình chính tắc của elip có tiêu cự bằng 6 và trục lớn bằng 10.

A. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. **B.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$. **C.** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{81}=1$. **D.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình chính tắc của elip: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Độ dài trục lớn $2a=10\Leftrightarrow a=5$

Tiêu cự $2c=6\Leftrightarrow c=3$

Ta có: $a^2=b^2+c^2\Leftrightarrow b^2=a^2-c^2=16$

Vậy phương trình chính tắc của elip là $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

Câu 18. Cho elip (E) có độ dài trục lớn gấp hai lần độ dài trục nhỏ và tiêu cự bằng 6. Viết phương trình của (E)?

A. $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$. **B.** $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$. **C.** $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{12}=1$. **D.** $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{12}=1$.

Lời giải:

Chọn B

Ta có: $a=2b, 2c=6\Rightarrow c=3$.

Mà $a^2-b^2=c^2\Rightarrow 4b^2-b^2=9\Rightarrow\begin{cases}b^2=3\\a^2=12\end{cases}$

Vậy phương trình (E): $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$.

Câu 19. Phương trình chính tắc của Elip có độ dài trục lớn bằng 8, độ dài trục nhỏ bằng 6 là:

A. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$. **B.** $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$. **C.** $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1$. **D.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

Lời giải

Chọn D.

+ Phương trình Elip dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, a>b>0$.

+ Do có độ dài trục lớn bằng $8=2a\Rightarrow a=4$

+ Do có độ dài trục nhỏ bằng $6=2b\Rightarrow a=3$

+ Suy ra phương trình là $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

Vậy chọn D

Câu 20. Elip có một tiêu điểm $F(-2;0)$ và tích độ dài trục lớn với trục bé bằng $12\sqrt{5}$. Phương trình chính tắc của elip là:

A. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$. **B.** $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{16}=1$. **C.** $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{5}=1$. **D.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$.

Lời giải:

Chọn A

Gọi (E) có dạng $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a > b >0)

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} ab=3\sqrt{5} \\ a^2-b^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=9 \\ b^2=5 \end{cases}$

Vậy (E) cần tìm là $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$..

Câu 21. Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình chính tắc của elip (E) biết (E) đi qua $M\left(\frac{3}{\sqrt{5}};\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ và M nhìn hai tiêu điểm F_1,F_2 dưới một góc vuông.

A. $(E):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$. **B.** $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. **C.** $(E):\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$. **D.** $(E):\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Ta có: (E) đi qua $M\left(\frac{3}{\sqrt{5}};\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ nên: $\frac{9}{5a^2}+\frac{16}{5b^2}=1 \Leftrightarrow 16a^2+9b^2=5a^2b^2$. (1)

Vì M nhìn hai tiêu điểm F_1,F_2 dưới một góc vuông nên: $OM=\frac{F_1F_2}{2}=c$.

$\Leftrightarrow OM^2=c^2 \Leftrightarrow \frac{9}{5}+\frac{16}{5}=c^2 \Leftrightarrow a^2-b^2=c^2=5 \Leftrightarrow a^2=5+b^2$ thế vào (1) ta được:

$16(5+b^2)+9b^2=5(5+b^2)b^2 \Leftrightarrow b^4=16 \Rightarrow b^2=4$ nên $a^2=9$.

Vậy: $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Câu 22. Cho Elip $(E):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ và điểm M nằm trên (E). Nếu điểm M có hoành độ bằng 1 thì các khoảng cách từ M đến hai tiêu điểm của (E) bằng:

A. $3,5$ và $4,5$. **B.** $4\pm\sqrt{2}$. **C.** 3 và 5. **D.** $4\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử phương trình $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ Ta có : $\begin{cases} a^2=16 \\ b^2=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ c^2=a^2-b^2=4 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ c=2 \end{cases}$

Gọi F_1,F_2 lần lượt là hai tiêu điểm của Elip (E), $M(1;y_M)\in(E)$, ta có :

$$\begin{cases} MF_1 = a + \dfrac{c}{a}x_M = 4 + \dfrac{1}{2}.1 = 4,5 \\ MF_2 = a - \dfrac{c}{a}x_M = 4 - \dfrac{1}{2}.1 = 3,5 \end{cases}$$

Chọn **A.**

Câu 23. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. Điểm $M \in (E)$ sao cho $\widehat{F_1MF_2} = 90^0$. Tìm bán kính đường tròn nội tiếp tam giác MF_1F_2.

A. 2 **B.** 4. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lờigiải

Gọi $M(x;y)$ vì $\widehat{F_1MF_2} = 90^0 \Rightarrow MF_1^2 + MF_2^2 = F_1F_2^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = c^2 = 16$ (1)

Do $M \in (E) \Rightarrow \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ (2)

Giải hệ gồm hai phương trình (1) và (2) ta được $x^2 = \dfrac{175}{16}; y^2 = \dfrac{81}{16} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{5\sqrt{7}}{4}; y = \dfrac{9}{4}$

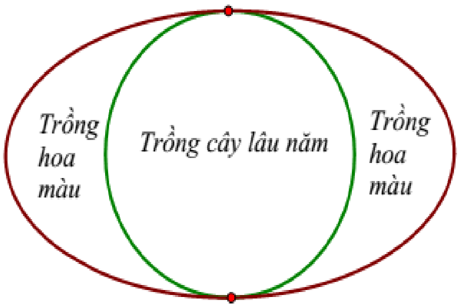
Ta có: nửa chu vi $p = \dfrac{MF_1 + MF_2 + F_1F_2}{2} = \dfrac{2a+2c}{2} = a + c = 9$

Khoảng các từ M đến trục Ox: $d(M;Ox) = |y_M| = \dfrac{9}{4}$

$S_{\Delta MF_1F_2} = \dfrac{1}{2}d(M;Ox).F_1F_2 = 9$

Bán kính đường tròn nội tiếp: $r = \dfrac{S}{p} = 1$

Câu 24. Ông Hoàng có một mảnh vườn hình Elip có chiều dài trục lớn và trục nhỏ lần lượt là $60m$ và $30m$. Ông chia mảnh vườn ra làm hai nửa bằng một đường tròn tiếp xúc trong với Elip để làm mục đích sử dụng khác nhau (xem hình vẽ). Nửa bên trong đường tròn ông trồng cây lâu năm, nửa bên ngoài đường tròn ông trồng hoa màu. Tính tỉ số diện tích T giữa phần trồng cây lâu năm so với diện tích trồng hoa màu. Biết diện tích hình Elip được tính theo công thức $S = \pi ab$, với a, b lần lượt là nửa độ dài trục lớn và nửa độ dài trục nhỏ. Biết độ rộng của đường Elip là không đáng kể.



A. $T = \dfrac{2}{3}$. **B.** $T = \dfrac{3}{2}$. **C.** $T = \dfrac{1}{2}$. **D.** $T = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Theo đề ta có: Diện tích (E) là: $S_{(E)} = \pi.a.b = 30.15.\pi = 450\pi,\ (m^2)$

Vì đường tròn tiếp xúc trong, nên sẽ tiếp xúc tại đỉnh của trục nhỏ, suy ra bán kính đường tròn: $R = 15m$. Diện tích hình tròn (C) phần trồng cây lâu năm là: $S_{(C)} = \pi.R^2 = 15^2.\pi = 225\pi,\ (m^2)$

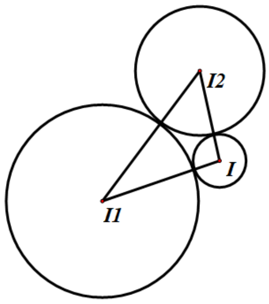
Suy ra diện tích phần trồng hoa màu là: $S = S_{(E)} - S_{(C)} = 225\pi,\ (m^2) \Rightarrow T = 1$.

Câu 25. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hai đường tròn $(C_1),(C_2)$ có phương trình lần lượt là $(x+1)^2+(y+2)^2=9, (x-2)^2+(y-2)^2=4$ và Elip (E) có phương trình $16x^2+49y^2=1$. Có bao nhiêu đường tròn (C) có bán kính gấp đôi độ dài trục lớn của elip (E) và (C) tiếp xúc với hai đường tròn (C_1), (C_2)?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A



Ta có $16x^2+49y^2=1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{7}\right)^2}=1 \Rightarrow (E)$ có độ dài trục lớn $2a=2.\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

Khi đó đường tròn (C) có bán kính là $R=1$. Gọi $I(a;b)$ là tâm của đường tròn (C).

Xét ΔII_1I_2 có $\begin{cases} II_1=R+R_1=1+3=4 \\ II_2=R+R_2=1+2=3 \\ I_1I_2=R_1+R_2=5 \end{cases} \Rightarrow \Delta II_1I_2$ vuông tại I.

Ta có $\overrightarrow{II_1}=(-1-a;-2-b)$, $\overrightarrow{II_2}=(2-a;2-b)$. Khi đó điểm I thỏa mãn:

$$\begin{cases} \overrightarrow{II_1}.\overrightarrow{II_2}=0 \\ \left|\overrightarrow{II_2}\right|=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1-a)(2-a)+(-2-b)(2-b)=0 \\ (2-a)^2+(2-b)^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2-a-6=0 \\ a^2+b^2-4a-4b-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=6+a \\ 6+a-4a-4b-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=6+a \\ a=\dfrac{5-4b}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{5-4b}{3}\right)^2+b^2-6-\dfrac{5-4b}{3}=0 \\ a=\dfrac{5-4b}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 25b^2-28b-44=0 \\ a=\dfrac{5-4b}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} b=2 \\ b=-\dfrac{22}{25} \end{array}\right. \\ a=\dfrac{5-4b}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases} \\ \begin{cases} a=\dfrac{71}{25} \\ b=-\dfrac{22}{25} \end{cases} \end{array}\right..$$

Vậy có hai phương trình đường tròn (C) thỏa mãn yêu cầu bài toán là

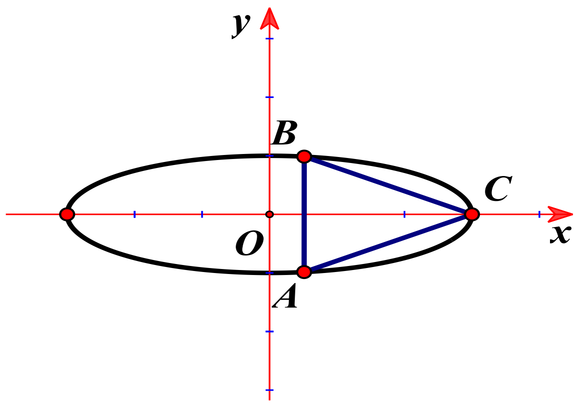
$(C):(x+1)^2+(y-2)^2=1$ hoặc $(C):\left(x-\dfrac{71}{25}\right)^2+\left(y+\dfrac{22}{25}\right)^2=1$.

Câu 26. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $C(3;0)$ và elip (E): $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{1}=1$. A,B là 2 điểm thuộc (E) sao cho $\triangle ABC$ đều, biết tọa độ của $A\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{c\sqrt{3}}{2}\right)$ và A có tung độ âm. Khi đó $a+c$ bằng:

A. 2. **B.** 0. **C.** -2. **D.** -4.

Lời giải

Chọn A



Nhận xét: Điểm $C(3;0)$ là đỉnh của elip $(E) \Rightarrow$ điều kiện cần để $\triangle ABC$ đều đó là A,B đối xứng

Nhau qua Ox .Suy ra A,B là giao điểm của đường thẳng $\Delta: x = x_0$ và elip (E).

+) Ta có elip (E): $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{3}\sqrt{9-x^2} \\ y=\frac{1}{3}\sqrt{9-x^2} \end{array}\right.$.

+) Theo giả thiết A có tung độ âm nên tọa độ của $A\left(x_0;-\frac{1}{3}\sqrt{9-x_0^2}\right)$ (điều kiện $x_0<3$ do $A \neq C$)

+) Ta có $AC=\sqrt{(3-x_0)^2+\frac{1}{9}(9-x_0^2)}$ và $d_{(C;\Delta)}=|3-x_0|$

+) $\triangle ABC$ đều $\Leftrightarrow d_{(C;\Delta)}=\frac{\sqrt{3}}{2}AC \;\Leftrightarrow |3-x_0|=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(3-x_0)^2+\frac{1}{9}\left(9-x_0^2\right)}$

$\Leftrightarrow (3-x_0)^2=\frac{3}{4}\left[(3-x_0)^2+\frac{1}{9}(9-x_0^2)\right]$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}x_0^2-\frac{3}{2}x_0+\frac{3}{2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=\frac{3}{2}(t/m) \\ x_0=3(L) \end{array}\right.$

$\Rightarrow A\left(\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ c=-1 \end{cases} \Rightarrow a+c=2$.

Dạng 2. Các bài toán liên quan hypebol

Câu 27. Đường Hyperbol $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ có tiêu cự bằng:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải.

Chọn D.

Ta có: $a^2=5$ và $b^2=4$ nên $c^2=a^2+b^2=9 \Rightarrow c=3$.

Vậy tiêu cự là: $2c=6$

Câu 28. Đường Hyperbol $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{7}=1$ có tiêu cự bằng

A. 6. **B.** $2\sqrt{33}$. **C.** 3. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{7}=1$ suy ra $\begin{cases} a^2=16 \\ b^2=7 \end{cases} \Rightarrow c^2=a^2+b^2=23$.

Tiêu cự là $2c=2\sqrt{23}$.

Câu 29. Đường Hyperbol $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ có một tiêu điểm là điểm nào dưới đây ?

A. $(-5;0)$. **B.** $(0;\sqrt{7})$. **C.** $(\sqrt{7};0)$. **D.** $(0;5)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ suy ra $\begin{cases} a^2=16 \\ b^2=9 \end{cases} \Rightarrow c^2=a^2+b^2=25 \Leftrightarrow c=5$.

Tiêu điểm $F_1(-5;0), F_2(5;0)$.

Câu 30. Cho điểm M nằm trên Hyperbol (H): $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{20}=1$. Nếu điểm M có hoành độ bằng 12 thì khoảng cách từ M đến các tiêu điểm là bao nhiêu?

A. 8. **B.** $10;6$. **C.** $4\pm\sqrt{7}$. **D.** $14;22$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $a^2=16; b^2=20 \Rightarrow c^2=a^2+b^2=36$

Vậy $a=4; b=2\sqrt{5}, c=6$

Tiêu điểm $F_1(-6;0); F_2(6;0)$

M có hoành độ $x=12$ khi đó $MF_1=\left|a+\dfrac{c}{a}x\right|=\left|4+\dfrac{6}{4}.12\right|=22; MF_2=\left|a-\dfrac{c}{a}x\right|=\left|4-\dfrac{6}{4}.12\right|=14$

Câu 31. Cho điểm M nằm trên Hyperbol (H): $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$. Nếu hoành độ điểm M bằng 8 thì khoảng cách từ M đến các tiêu điểm của (H) là bao nhiêu?

A. 6 và 14. **B.** 5 và 13. **C.** $8\pm\sqrt{5}$. **D.** $8\pm 4\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $a^2=16; b^2=9 \Rightarrow c^2=a^2+b^2=25$

Vậy $a=4; b=3, c=5$

Tiêu điểm $F_1(-5;0); F_2(5;0)$

M có hoành độ $x=8$ khi đó $MF_1=\left|a+\dfrac{c}{a}x\right|=\left|4+\dfrac{5}{4}.8\right|=14; MF_2=\left|a-\dfrac{c}{a}x\right|=\left|4-\dfrac{5}{4}.8\right|=6$

Câu 32. Tâm sai của Hyperbol $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{3}{5}$. **D.** $\dfrac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $a^2=5, b^2=4$ suy ra $\begin{cases} c^2=5+4=9 \Rightarrow c=3 \\ a=\sqrt{5}, b=2 \end{cases}$

Tâm sai của Hyperbol là $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

Câu 33. Đường Hyperbol $\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{16}=1$ có tiêu cự bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 12. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $a^2=20, b^2=16$ suy ra $c^2=20+16=36 \Rightarrow c=6$.

Khi đó Hyperbol có tiêu cự là $2c=12$.

Câu 34. Đường thẳng nào dưới đây là đường chuẩn của Hyperbol $\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{12}=1$?

A. $x+8=0$. **B.** $x-\dfrac{3}{4}=0$. **C.** $x+2=0$. **D.** $x+\dfrac{5\sqrt{2}}{2}=0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{12}=1$ suy ra $a=\sqrt{20}=2\sqrt{5}; b=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\Rightarrow c=\sqrt{b^2+c^2}=4\sqrt{2} \Rightarrow e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

Khi đó đường chuẩn của Hyperbol $x\pm\dfrac{a}{e}=0 \Leftrightarrow x\pm\dfrac{5\sqrt{2}}{2}=0$.

Câu 35. Đường thẳng nào dưới đây là đường chuẩn của Hyperbol $\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{15}=1$?

A. $x+4\sqrt{5}=0$. **B.** $x+4=0$. **C.** $x-\dfrac{4\sqrt{35}}{7}=0$. **D.** $x+2=0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{15}=1$ suy ra $a=2\sqrt{5}; b=\sqrt{15} \Rightarrow c=\sqrt{35} \Rightarrow e=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

Khi đó đường chuẩn của Hyperbol $x\pm\dfrac{4\sqrt{35}}{7}=0$.

Khi đó đường chuẩn của Hyperbol $x\pm\dfrac{2\sqrt{5}}{\frac{2\sqrt{10}}{5}}$.

Câu 36. Điểm nào trong 4 điểm $M(5\,;0), N(10;3), P(5\,;3), Q(5\,;4)$ nằm trên một đường tiệm cận của hyperbol $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1$?

A. M. **B.** N. **C.** P. **D.** Q.

Lời giải

Chọn C.

$\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1 \Rightarrow a=5; b=3 \Rightarrow TC: y=\pm\dfrac{3}{5}x.$

Vậy $P\in y=\dfrac{5}{3}x$.

Câu 37. Tìm góc giữa 2 đường tiệm cận của hyperbol $\frac{x^2}{3}-y^2=1$.

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn B.

$\frac{x^2}{3}-y^2=1\Rightarrow a=\sqrt{3};b=1\Rightarrow TC:y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x\Rightarrow k_1=\frac{\sqrt{3}}{3};k_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \tan\alpha=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|=\sqrt{3}\Rightarrow\alpha=60°.$

Câu 38. Hyperbol (H) có 2 đường tiệm cận vuông góc nhau thì có tâm sai bằng bao nhiêu ?

A. 2. **B.** 3. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D.

Xét hyperbol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$.

Hai đường tiệm cận của (H) có phương trình là $y=\frac{b}{a}x$ và $y=-\frac{b}{a}x$.

Do hai đường tiệm cận vuông góc với nhau nên ta có

$\frac{b}{a}.\left(-\frac{b}{a}\right)=-1\Leftrightarrow\frac{b^2}{a^2}=1\Leftrightarrow a^2=b^2=1\Rightarrow c^2=2\Rightarrow c=\sqrt{2}.$

Vậy tâm sai của (H) là $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$.

Câu 39. Tìm phương trình chính tắc của Hypebol (H) biết nó có tâm sai bằng 2 và tiêu cự bằng 4.

A. $\frac{x^2}{3}-y^2=1$. **B.** $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1$. **C.** $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{5}=1$. **D.** $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

Lời giải

Chọn D.

Xét hyperbol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$.

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases}\frac{c}{a}=2\\ 2c=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ c=2\end{cases}\Rightarrow b=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.

Vậy (H) có phương trình là $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{3}=1\Leftrightarrow x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

Câu 40. Tìm phương trình chính tắc của Hypebol (H) biết nó có một đường chuẩn là $2x+\sqrt{2}=0$.

A. $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{4}=1$. **B.** $x^2-y^2=1$. **C.** $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$. **D.** $x^2-\frac{y^2}{2}=1$.

Lời giải

Chọn B.

Xét hyperbol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$.

Ta có $2x+\sqrt{2}=0\Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{a}{e}=-\frac{a^2}{c}\Rightarrow\frac{a^2}{c}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Xét phương án A, ta có

$a^2 = 1,\ c = \sqrt{5} \Rightarrow \dfrac{a^2}{c} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Vậy phương án A không thỏa mãn.

Xét phương án B, ta có

$a^2 = b^2 = 1 \Rightarrow c^2 = 2 \Rightarrow c = \sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{a^2}{c} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy phương án B thỏa mãn.

Xét phương án C, ta có

$a^2 = b^2 = 2 \Rightarrow c^2 = 4 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow \dfrac{a^2}{c} = 1$

Vậy phương án C sai.

Tương tự, phương án D cũng sai.

Câu 41. Tìm phương trình chính tắc của Hypebol (H) biết nó đi qua điểm $(2;\ 1)$ và có một đường chuẩn là $x + \dfrac{2}{\sqrt{3}} = 0$

A. $\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{y^2}{3} = 1$. **B.** $x^2 - \dfrac{y^2}{2} = 1$. **C.** $\dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1$. **D.** $\dfrac{x^2}{2} - y^2 = 1$.

Lời giải

Chọn D.

Phương án A và D không đi qua điểm $(2;\ 1)$ nên loại.

Phương án C là phương trình của Elip nên loại.

Vậy phương án D đúng.

Câu 42. Tìm phương trình chính tắc của Hypebol (H) biết nó có trục thực dài gấp đôi trục ảo và có tiêu cự bằng 10.

A. $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$. **B.** $\dfrac{x^2}{20} - \dfrac{y^2}{5} = 1$. **C.** $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$. **D.** $\dfrac{x^2}{20} - \dfrac{y^2}{10} = 1$.

Lời giải

Chọn B.

Xét hyperbol (H) có phương trình chính tắc là $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (a > 0,\ b > 0)$.

Theo giả thiết, ta có

$\begin{cases} a = 2b \\ 2c = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ \sqrt{5b^2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ b = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{5} \\ b = \sqrt{5} \end{cases}.$

Vậy phương trình (H) là $\dfrac{x^2}{20} - \dfrac{y^2}{5} = 1$.

Câu 43. Tìm phương trình chính tắc của Hypebol (H) biết nó tiêu điểm là $(3;0)$ và một đường tiệm cận có phương trình là $\sqrt{2}x + y = 0$.

A. $\dfrac{x^2}{6} - \dfrac{y^2}{3} = 1$. **B.** $\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{y^2}{6} = 1$. **C.** $\dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{2} = 1$. **D.** $\dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{8} = 1$.

Lời giải

Chọn B.

Xét hyperbol (H) có phương trình chính tắc là $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (a > 0,\ b > 0)$.

Do (H) có một tiêu điểm là $(3;\ 0)$ nên $c = 3$.

Đường tiệm cận $\sqrt{2}x+y=0 \Leftrightarrow y=-\sqrt{2}x \Rightarrow \frac{b}{a}=\sqrt{2} \Rightarrow b=\sqrt{2}a$.

Vậy ta có

$$\begin{cases} b=\sqrt{2}a \\ \sqrt{a^2+b^2}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\sqrt{2}a \\ \sqrt{3a^2}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\sqrt{6} \\ a=\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow (H): \frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1.$$

Suy ra phương án B đúng.

Câu 44. Tìm phương trình chính tắc của Hypebol (H) biết nó tiêu điểm là $(\sqrt{10};0)$ và một đường tiệm cận có phương trình là $3x+y=0$.

A. $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{3}=1$. **B.** $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{6}=1$. **C.** $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{9}=1$. **D.** $-x^2+\frac{y^2}{9}=1$.

Lời giải

Chọn C.

Xét hyperbol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$.

Do (H) có một tiêu điểm là $(\sqrt{10};\ 0)$ nên $c=\sqrt{10}$.

Đường tiệm cận $3x+y=0 \Leftrightarrow y=-3x \Rightarrow \frac{b}{a}=3 \Rightarrow b=3a$.

Vậy ta có

$$\begin{cases} b=3a \\ \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3a \\ \sqrt{10a^2}=\sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ a=1 \end{cases} \Rightarrow (H): \frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{9}=1.$$

Suy ra phương án B đúng.

Câu 45. Tìm phương trình chính tắc của Hypebol (H) mà hình chữ nhật cơ sở có một đỉnh là $(2;3)$

A. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=1$. **B.** $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{-3}=1$. **C.** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$. **D.** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$.

Lời giải

Chọn D.

Xét hyperbol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$.

Một đỉnh hình chữ nhật cơ sở là $(2;3) \Rightarrow a=2,\ b=3$.

Vậy phương án D đúng.

Câu 46. Tìm phương trình chính tắc của Hypebol (H) biết nó có một đường tiệm cận là $x-2y=0$ và hình chữ nhật cơ sở của nó có diện tích bằng 24.

A. $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$. **B.** $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{12}=1$. **C.** $\frac{x^2}{48}-\frac{y^2}{12}=1$. **D.** $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{48}=1$.

Lời giải

Chọn A.

Xét hyperbol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$.

Tiệm cận $x-2y=0 \Leftrightarrow y=\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{1}{2}\quad (1)$.

Diện tích hình chữ nhật cơ sở bằng $24 \Leftrightarrow 2a.2b=24 \Leftrightarrow a.b=6\quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} a=2b \\ a.b=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2\sqrt{3} \\ b=\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow (H): \frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1.$

Câu 47. Tìm phương trình chính tắc của Hypebol (H) biết nó đi qua điểm là $(5;4)$ và một đường tiệm cận có phương trình là $x+y=0$.

A. $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$. **B.** $x^2-y^2=9$. **C.** $x^2-y^2=1$. **D.** $x^2-y^2=3$.

Lời giải

Chọn B.

Xét hyperbol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$.

Đường tiệm cận $x+y=0 \Leftrightarrow y=-x \Rightarrow \frac{b}{a}=1 \Leftrightarrow a=b\ (1)$.

Hyperbol đi qua điểm $(5;\ 4) \Rightarrow \frac{25}{a^2}-\frac{16}{b^2}=1\ (2)$.

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a=b \\ \frac{25}{a^2}-\frac{16}{b^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow (H): \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1 \Leftrightarrow x^2-y^2=9.$$

Dạng 3. Các bài toán liên quan parabol

Câu 48. Viết phương trình chính tắc của Parabol đi qua điểm $A(1\,;2)$.

A. $y^2=4x$. **B.** $y^2=2x$. **C.** $y=2x^2$. **D.** $y=x^2+2x-1$.

Lời giải

Chọn A.

Phương trình chính tắc của parabol $(P): y^2=2px$

$A(1;2)\in(P) \Rightarrow 2p=4$

Vậy phương trình $(P): y^2=4x$.

Câu 49. Viết phương trình chính tắc của Parabol đi qua điểm $A(5;2)$.

A. $y=x^2-3x-12$. **B.** $y=x^2-27$. **C.** $y^2=\frac{4x}{5}$. **D.** $y^2=5x-21$.

Lời giải

Chọn C.

Phương trình chính tắc của parabol $(P): y^2=2px$

$A(5;2)\in(P) \Rightarrow 2p=\frac{4}{5}$

Vậy phương trình $(P): y^2=\frac{4}{5}x$.

Câu 50. Viết phương trình chính tắc của Parabol biết tiêu điểm $F(2;0)$.

A. $y^2=2x$. **B.** $y^2=4x$. **C.** $y^2=8x$. **D.** $y=\frac{1}{6}x^2$.

Lời giải

Chọn C.

Phương trình chính tắc của parabol $(P): y^2=2px$

Tiêu điểm $F(2;0) \Rightarrow p=4$

Vậy, phương trình parabol $y^2=8x$.

Câu 51. Viết phương trình chính tắc của Parabol biết tiêu điểm $F(5;0)$.

A. $y^2 = 5x$. **B.** $y^2 = 10x$. **C.** $y^2 = \frac{1}{5}x$. **D.** $y^2 = 20x$.

Lời giải

Chọn B.

Phương trình chính tắc của parabol $(P): y^2 = 2px$

Ta có: tiêu điểm $F(5;0) \Rightarrow p = 5 \Rightarrow 2p = 10$

Vậy $(P): y^2 = 10x$.

Câu 52. Viết phương trình chính tắc của Parabol biết đường chuẩn có phương trình $x+1=0$.

A. $y^2 = 2x$. **B.** $y^2 = 4x$. **C.** $y = 4x^2$. **D.** $y^2 = 8x$.

Lời giải

Chọn B.

Phương trình chính tắc của parabol $(P): y^2 = 2px$

Đường chuẩn $x+1=0$ suy ra $\frac{p}{2} = 1 \Rightarrow 2p = 4 \Rightarrow y^2 = 4x$.

Vậy $y^2 = 4x$.

Câu 53. Viết phương trình chính tắc của Parabol biết đường chuẩn có phương trình $x + \frac{1}{4} = 0$.

A. $y^2 = -x$. **B.** $y^2 = x$. **C.** $y^2 = 2x$. **D.** $y^2 = \frac{1}{2}x$.

Lời giải

Chọn B.

Phương trình chính tắc của parabol $(P): y^2 = 2px$

Parabol có đường chuẩn $x + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{2} \Rightarrow (P): \mathrm{y}^2 = x$.

Vậy $y^2 = x$.

Câu 54. Cho Parabol (P) có phương trình chính tắc $y^2 = 4x$. Một đường thẳng đi qua tiêu điểm F của (P) cắt (P) tại 2 điểm A và B. Nếu $A(1;2)$ thì tọa độ của B bằng bao nhiêu?

A. $(4;4)$. **B.** $(2;2\sqrt{2})$. **C.** $(1;-2)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Chọn C.

(P) có tiêu điểm $F(1;0)$.

Đường thẳng $AF: x = 1$.

Đường thẳng AF cắt parabol tại $B(1;-2)$.

Vậy $B(1;2)$.

Câu 55. Một điểm A thuộc Parabol (P): $y^2 = 4x$. Nếu khoảng cách từ A đến đường chuẩn bằng 5 thì khoảng cách từ A đến trục hoành bằng bao nhiêu?

A. 3. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $A \in (P) \Rightarrow A(m^2;2m)$, đường chuẩn $\Delta: x = -1$

Khoảng cách từ A đến đường chuẩn $d(A,\Delta)=\left|m^2+1\right|=m^2+1=5\Rightarrow m^2=4$

Vậy khoảng cách từ A đến trục hoành bằng $\left|2m\right|=4$.

Câu 56. Một điểm M thuộc Parabol (P): $y^2=x$. Nếu khoảng cách từ M đến tiêu điểm F của (P) bằng 1 thì hoành độ của điểm M bằng bao nhiêu?

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B.

$M\in(P):y^2=x\Rightarrow M\left(m^2;m\right)$

(P) có tiêu điểm $F\left(\frac{1}{4};0\right)$

$$MF^2=\left(m^2-\frac{1}{4}\right)^2+m^2=1\Leftrightarrow m^4+\frac{1}{2}m^2-\frac{15}{16}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2=\frac{3}{4}\\m^2=-\frac{5}{4}\end{array}\right.$$

Vậy hoành độ điểm M là $\frac{3}{4}$.

Câu 57. Cho M là một điểm thuộc Parabol $(P):y^2=64x$ và N là một điểm thuộc đường thẳng $d:4x+3y+46=0$. Xác định M,N để đoạn MN ngắn nhất.

A. $M(-9;24),N(5;-22)$ **B.** $M(-9;24),N\left(-\frac{37}{5};\frac{126}{5}\right)$

C. $M(9;-24),N\left(-5;\frac{-26}{3}\right)$ **D.** $M(9;-24),N\left(\frac{37}{5};-\frac{126}{5}\right)$

Lời giải.

Chọn D.

$M\in(P)\Rightarrow M\left(m^2;8m\right)$

$$d(M;d)=\frac{\left|4m^2+24m+46\right|}{5}=\frac{\left|(2m+6)^2+10\right|}{5}\ge 2$$

$d(M,d)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $m=-3\Rightarrow M(9;-24)$

N là hình chiếu của M lên đường thẳng d

Đường thẳng $MN:3x-4y-123=0$

N là giao điểm MN và d suy ra $N\left(\frac{37}{5};-\frac{126}{5}\right)$.

Câu 58. Cho parabol $(P):y^2=4x$ và đường thẳng $d:2x-y-4=0$. Gọi A,B là giao điểm của d và (P). Tìm tung độ dương của điểm $C\in(P)$ sao cho ΔABC có diện tích bằng 12.

A. 3 **B.** 6 **C.** 2 **D.** 4

Lời giải.

Chọn B.

Ta có: d cắt (P) tại $A(4;4);B(1;-2)$

$C\in(P)\Rightarrow C\left(c^2;2c\right)$

$\overrightarrow{AC}=\left(c^2-4;2c-4\right)$

$\overrightarrow{BC}=\left(c^2-1;2c+2\right)$

Diện tích tam giác ABC: $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left(c^2-4\right)\left(2c+2\right)-\left(c^2-1\right)\left(2c-4\right)\right|=12$

$\left|6c^2-6c-12\right|=24\Rightarrow\left[\begin{array}{l}c=-2\\c=3\end{array}\right.$

Vậy tung độ của điểm C dương là 6.

Câu 59. Cho parabol $(P): y^2=x$ và đường thẳng $d: x-y-2=0$. Gọi A,B là giao điểm của d và (P). Tìm tung độ điểm $C\in(P)$ sao cho ΔABC đều.

A. $\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ **B.** $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$

C. $\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ **D.** Không tồn tại điểm C.

Lời giải.

Chọn D.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P): $(x-2)^2=x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=4\end{array}\right.\Rightarrow A(1;-1),B(4;2)$

$C\in(P)\Rightarrow C\left(c^2;c\right)$

$AB=3\sqrt{2}$, $AC=\sqrt{\left(c^2-1\right)^2+\left(c+1\right)^2}$, $BC=\sqrt{\left(c^2-4\right)^2+\left(c-2\right)^2}$

$AC=BC\Rightarrow 6c^2+6c-18=0\ \Rightarrow c=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

So với điều kiện $AC=3\sqrt{2}$ ta thấy không có giá trị c thoả.
Vậy không tồn tại điểm C thoả đề.

Câu 60. Cho Parabol $(P): y^2=2x$ và đường thẳng $\Delta: x-2y+6=0$. Tính khoảng cách ngắn nhất giữa Δ và (P).

A. $d_{\min}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$ **B.** $d_{\min}=2$ **C.** $d_{\min}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ **D.** $d_{\min}=4$

Lời giải.

Chọn A.

Gọi $M\in(P)\Rightarrow M\left(2m^2;2m\right)$

$d(M;\Delta)=\frac{\left|2m^2-4m+6\right|}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\left|(m-1)^2+2\right|\geq\frac{4}{\sqrt{5}}$.

Câu 61. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho điểm $A(0;2)$ và parabol $(P): y=x^2$. Xác định các điểm M trên (P) sao cho AM ngắn nhất.

A. $M\left(\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{3}{2}\right)$ hoặc $M\left(-\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{3}{2}\right)$. **B.** $M\left(\frac{3}{2};\frac{9}{4}\right)$ hoặc $M\left(-\frac{3}{2};\frac{9}{4}\right)$.

C. $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{4}\right)$ hoặc $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{4}\right)$. **D.** $M\left(\frac{\sqrt{7}}{2};\frac{7}{4}\right)$ hoặc $M\left(-\frac{\sqrt{7}}{2};\frac{7}{4}\right)$.

Lời giải.

Chọn A.

$M\in(P)\Rightarrow M\left(m;m^2\right)$

$AM^2=m^2+\left(m^2-2\right)^2=m^4-3m^2+4=\left(m^2-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\geq\frac{7}{4}$

AM ngắn nhất khi $m^2-\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow m=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

Vậy, $M\left(\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{3}{2}\right)$ hoặc $M\left(-\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Câu 62. Cho parabol $(P): y=x^2$ và elip $(E):\frac{x^2}{9}+y^2=1$. Khi đó khẳng định nào sau đây đúng?

A. Parabol và elip cắt nhau tại 4 điểm phân biệt.
B. Parabol và elip cắt nhau tại 2 điểm phân biệt.
C. Parabol và elip cắt nhau tại 1 điểm phân biệt.
D. Parabol và elip không cắt nhau.

Lời giải.

Chọn B.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (E) là $\frac{x^2}{9}+x^4=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=\frac{-1+5\sqrt{13}}{18}\\x^2=\frac{-1-5\sqrt{13}}{18}\end{array}\right.$

Vậy (P) cắt (E) tại 2 điểm phân biệt.

Câu 63. Lập phương trình chính tắc của parabol (P) biết (P) cắt đường phân giác của góc phần tư thứ nhất tại hai điểm A,B và $AB=5\sqrt{2}$.

A. $y^2=20x$ **B.** $y^2=2x$ **C.** $y^2=5x$ **D.** $y^2=10x$

Lời giải.

Chọn C.

Phương trình chính tắc của parabol $(P): y^2=2px\ (p>0)$

Đường phân giác góc phần tư thứ nhất: $y=x$

Ta có: $A\equiv O$, $B(m;m)\ (m>0)\Rightarrow AB^2=2m^2=\left(5\sqrt{2}\right)^2\Rightarrow m=5$

$B(5;5)\in(P)\Rightarrow 25=2p.5\Rightarrow 2p=5$

Vậy $(P): y^2=5x$

Câu 64. Cho điểm $A(3;0)$, gọi M là một điểm tuỳ ý trên $(P): y^2=-x$. Tìm giá trị nhỏ nhất của AM.

A. 3. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{11}}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải.

Chọn A.

Ta có: $M\in(P)\Rightarrow M\left(-m^2;m\right)$

$AM^2=\left(-m^2-3\right)^2+m^2=m^4+7m^2+9$

Vì $m^2\ge 0$ nên $AM^2\ge 9$

Vậy giá trị nhỏ nhất của AM là 3 khi $M\equiv O$.

Câu 65. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho điểm $F(3;0)$ và đường thẳng d có phương trình $3x-4y+16=0$. Tìm tọa độ tiếp điểm A của đường thẳng d và parabol (P) có tiêu điểm F và đỉnh là gốc tọa độ O.

A. $A\left(\frac{4}{3};5\right)$ **B.** $A\left(\frac{8}{3};6\right)$ **C.** $A\left(\frac{16}{3};8\right)$ **D.** $A\left(\frac{2}{3};\frac{9}{2}\right)$

Lời giải.

Chọn C.

(P) có tiêu điểm $F(3;0)$ và có gốc toạ độ O suy ra $(P): y^2 = 12x$

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là $\left(\frac{3x+16}{4}\right)^2 = 12x \quad \Leftrightarrow 9x^2 - 96x + 256 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{16}{3} \Rightarrow y = 8$.

Câu 66. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y^2 = x$ và điểm $I(0;2)$. Tìm tất cả hai điêm M, N thuộc (P) sao cho $\overrightarrow{IM} = 4\overrightarrow{IN}$.

A. $M(4;2), N(1;1)$ hoặc $M(36;6), N(9;3)$.

B. $M(4;-2), N(1;1)$ hoặc $M(36;-6), N(9;3)$.

C. $M(4;-2), N(1;1)$ hoặc $M(36;6), N(9;-3)$.

D. $M(4;-2), N(1;1)$ hoặc $M(36;6), N(9;3)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(m^2;m) \in (P)$, $N \in (n^2;n) \in (P)$. Khi đó ta có $\overrightarrow{IM} = (m^2; m-2)$, $\overrightarrow{IN} = (n^2; n-2) \Rightarrow 4\overrightarrow{IN} = (4n^2; 4n-8)$.

Vì $\overrightarrow{IM} = 4\overrightarrow{IN} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 4n^2 \\ m-2 = 4n-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ n = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} m = -2 \\ n = -1 \end{cases}$

Vậy các cặp điểm thỏa là $M(4;-2), N(1;1)$ hoặc $M(36;6), N(9;3)$.