TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

CÁC BÀI TOÁN
ĐẾM – XÁC SUẤT
HAY VÀ KHÓ

CHINH PHỤC OLYMPIC TOÁN

CÁC BÀI TOÁN ĐẾM - XÁC SUẤT KHÓ

Sưu tầm và LaTeX bởi Tạp chí và tư liệu toán học

Cách đây một thời gian khá lâu, fanpage có đăng một tài liệu về tổ hợp và xác xuất ở mức khá giỏi và cũng nhận được những phản hồi từ phía các bạn theo dõi. Trong lần đăng bản cập nhật này các bạn sẽ nhận được một sản phẩm được biên soạn tỉ mỉ từ fanpage kèm theo tương đối nhiều bài toán khó mới được bổ sung. Hy vọng tài liệu sẽ giúp ích được cho các bạn.

Mục lục

1 Lý thuyết cần nhớ.

1.1 Xác suất có điều kiện

Định nghĩa 1. Xác suất có điều kiện của biến cố A với điều kiện B là một số được xác định bởi công thức

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \text{ nếu } P(B) > 0.$$

Tính chất 1.

1. $P(A|B) \geqslant 0.$
2. $P(\Omega|B) = P(B|B) = 1,$
3. Nếu A_i, $i = 1, \ldots, n$ là các biến cố đôi một xung khắc thì $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i|B\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i|B).$
4. (Công thức nhân xác suất) $P(AB) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A).$

Chú ý 1. Xác suất điều kiện cho phép tính xác suất xảy ra của một biến cố khi biến cố khác đã xảy ra. Trong trường hợp hai biến cố A và B độc lập thì việc biến cố B xảy ra không ảnh hưởng gì tới việc xảy ra biến cố A nên $P(A|B) = P(A)$. Ta được công thức nhân xác suất thông thường.

Định lý 1 (Xác suất toàn phần). Nếu B_i, $i = 1, \ldots, n$, là hệ các biến cố đôi một xung khắc sao cho $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i = \Omega$ thì với biến cố A bất kì ta luôn có

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i).$$

Hệ các biến cố B_i $(i = 1, \ldots, n)$ như vậy được gọi là hệ đầy đủ.

Định lý 2 (Công thức Bayes). Cho biến cố A và hệ đầy đủ B_i $(i = 1, \ldots, n)$ đều có xác suất dương. Khi đó

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}.$$

Định lý 3 (Nguyên lý bù trừ - Công thức Sieve). Cho tập A và n tập con $A_1, A_2, ..., A_n$. Ta có

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{1 \leqslant i_i < i_2 < \ldots i_j \leqslant n} (-1)^{j+1} \left| A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_j} \right|$$

Sau đây là một số bài toán về xác suất có điều kiện.

Câu 1. Nam thực hiện liên tiếp hai thí nghiệm. Thí nghiệm thứ nhất có xác suất thành công là $0,7$. Nếu thí nghiệm thứ nhất thành công thì xác suất thành công của thí nghiệm thứ hai là $0,9$. Nếu thí nghiệm thứ nhất không thành công thì xác suất để thành công thí nghiệm thứ hai là $0,4$. Tìm xác suất để:

1. Cả hai thí nghiệm thành công.
2. Cả hai thí nghiệm đều không thành công.
3. Thí nghiệm thứ nhất thành công và thí nghiệm thứ hai không thành công.

Lời giải.
Gọi A, B lần lượt là biến cố "Thí nghiệm thứ nhất thành công" và "Thí nghiệm thứ hai thành công".

1. AB là biến cố "Cả hai thí nghiệm thành công". Theo giả thiết ta có $P(A) = 0,7$, $P(B|A) = 0,9$. Suy ra $P(AB) = P(A)P(B|A) = 0,7 \times 0,9 = 0,63$.
2. $\overline{A} \cdot \overline{B}$ là biến cố "Cả hai thí nghiệm đều không thành công". Theo giả thiết ta có $P\left(\overline{A}\right) = 0,3$, $P\left(\overline{B}|\overline{A}\right) = 0,6$. Suy ra $P\left(\overline{A} \cdot \overline{B}\right) = P\left(\overline{A}\right) P\left(\overline{B}|\overline{A}\right) = 0,3 \times 0,6 = 0,18$.
3. $A\overline{B}$ là biến cố "Thí nghiệm thứ nhất thành công nhưng thí nghiệm thứ hai không thành công". Theo giả thiết ta có $P\left(\overline{B}|A\right) = 1 - 0,9 = 0,1$. Suy ra $P\left(A\overline{B}\right) = P(A)P\left(\overline{B}|A\right) = 0,7 \times 0,1 = 0,07$.

□

Câu 2. Một công ti một ngày sản xuất được 850 sản phẩm trong đó có 50 sản phẩm không đạt chất lượng. Lần lượt lấy ra ngẫu nhiên không hoàn lại 2 sản phẩm để kiểm tra.

1. Tính xác suất để sản phẩm thứ hai không đạt chất lượng biết sản phẩm thứ nhất đạt chất lượng.
2. Tính xác suất để sản phẩm thứ hai không đạt chất lượng.

Lời giải.

1. Gọi A_k là biến cố sản phẩm thứ k không đạt chất lượng $(k = 1, 2)$. Do sản phẩm thứ nhất không đạt chất lượng nên còn 49 sản phẩm không đạt chất lượng trong tổng số 849 sản phẩm. Vậy xác suất cần tìm là
$$P(A_2|A_1) = \frac{49}{849}.$$
2. Do A_1 và $\overline{A_1}$ là hệ biến cố đầy đủ nên theo công thức xác suất toàn phần ta có
$$P(A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) + P\left(\overline{A_1}\right) P\left(A_2|\overline{A_1}\right) = \frac{50}{850} \cdot \frac{49}{849} + \frac{800}{850} \cdot \frac{50}{849} = \frac{1}{17}.$$

□

Câu 3. Gieo liên tiếp một con súc sắc.

1. Tính xác suất để lần gieo thứ k là lần đầu tiên ra mặt "bốn".
2. Tính xác suất để trong $k - 1$ lần gieo trước đó, không có lần nào ra mặt "ba".

3. Tính xác suất để mặt "bốn" xuất hiện trước mặt "ba".

Lời giải.

1. Gọi A_i là biến có lần thứ i gieo được mặt "bốn". Khi đó $A = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdots \overline{A_{k-1}} A_k$ là biến cố lần thứ k là lần đầu tiên gieo được mặt "bốn". Theo công thức nhân xác suất ta có
$$P(A) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}.$$

2. Gọi B là biến cố $k-1$ lần đầu không có lần nào ra mặt "ba". Suy ra
$$P(AB) = \frac{1}{6}\left(\frac{4}{6}\right)^{k-1} \Rightarrow P(B|A) = \frac{P(AB)}{A} = \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}.$$

3. Gọi C là biến cố mặt "bốn" xuất hiện trước mặt "ba", C_1, C_2, C_3 lần lượt là các biến cố "lần đầu ra mặt bốn", "lần đầu ra mặt ba", "lần đầu không ra cả mặt ba và bốn". Khi đó C_1, C_2, C_3 là hệ biến cố đầy đủ. Suy ra
$$\begin{aligned} P(C) &= P(C_1)P(C|C_1) + P(C_2)P(C|C_2) + P(C_3)P(C|C_3) \\ &= \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{4}{6} \cdot P(C) \\ \Rightarrow P(C) &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

Câu 4. Một gia đình có n người con. Tính xác suất để cả n người con là con trai biết rằng có ít nhất một người con là con trai.

Lời giải.
Gọi A, B lần lượt là biến cố "cả n người con đều là con trai" và "có ít nhất một người con là con trai". Khi đó $P(A) = \frac{1}{2^n}$, $P(B) = 1 - P\left(\overline{B}\right) = 1 - \frac{1}{2^n}$. Suy ra xác suất cần tìm là
$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{1}{2^n - 1}.$$

□

Câu 5. Từ một hộp có 100 quả cầu trắng và 50 quả cầu đen. Người ta rút ngẫu nhiên không hoàn lại từng quả một và rút hai lần. Tính xác suất để lần thứ hai mới rút được là quả cầu trắng.

Lời giải.
Kí hiệu A_k là biến cố "lần thứ k rút được quả trắng" $(k = 1, 2, \ldots)$. Theo công thức nhân xác suất ta có
$$P\left(\overline{A_1}A_2\right) = P\left(\overline{A_1}\right) P\left(A_2|\overline{A_1}\right) = \frac{50}{100+50} \cdot \frac{100}{100+50-1} = \frac{100}{447}.$$

Vậy xác suất cần tìm là $\frac{100}{447}$. □

Câu 6. Từ một hộp có 50 quả cầu trắng và 100 quả cầu đen. Người ta rút ngẫu nhiên không hoàn lại từng quả một và rút hai lần. Tính xác suất để lần đầu rút được quả trắng biết lần thứ hai cũng rút được quả trắng.

Lời giải.
Kí hiệu A_k là biến cố "lần thứ k rút được quả trắng" ($k = 1, 2, \ldots$). Khi đó $\{A_1, \overline{A_1}\}$ là một hệ đầy đủ. Suy ra

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_1)P(A_2|A_1) + P\left(\overline{A_1}\right)P\left(A_2|\overline{A_1}\right) \\ &= \frac{50}{50+100}\cdot\frac{50-1}{50+100-1} + \frac{100}{50+100}\cdot\frac{50}{50+100-1} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Xác suất cần tìm là $P(A_1|A_2)$. Áp dụng công thức Bayes ta có

$$P\left(A_1|A_2\right) = \frac{P(A_1)P(A_2|A_1)}{A_2} = \frac{49}{149}.$$

□

Câu 7. Một cuộc thi có ba vòng thi. Vòng 1 lấy 90% thí sinh, vòng 2 lấy 80% số thí sinh đỗ vòng 1, vòng 3 lấy 60% số thí sinh đỗ vòng 2. Tính xác suất để một thí sinh bị loại ở vòng ba.

Lời giải.
Gọi B_k là biến cố "thí sinh đó bị loại ở vòng k" ($k = 1, 2, 3$). Ta có

$$\begin{aligned} &P(B_1) = 0,1 \\ &P(B_2) = P\left(\overline{B}_1 B_2\right) = P\left(\overline{B_1}\right)P\left(B_2|\overline{B_1}\right) = 0,9 \times 0,2 = 0,18 \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} P(B_3) &= P\left(\overline{B_1}\,\overline{B_2}B_3\right) = P\left(\overline{B_1}\,\overline{B_2}\right)P\left(B_3|\overline{B_1}\,\overline{B_2}\right) \\ &= P\left(B_3|\overline{B_1}\,\overline{B_2}\right)P\left(\overline{B_2}|\overline{B_1}\right)P\left(\overline{B_1}\right) = 0,9 \times 0,8 \times 0,4 \\ &= 0,228. \end{aligned}$$

□

Câu 8. Biết rằng tỉ lệ nhóm máu O, A, B và AB trong cộng đồng lần lượt là $33,7\%$, $37,5\%$, $20,9\%$ và $7,9\%$. Chọn ngẫu nhiên một người cho máu và một người nhận máu. Tính xác suất để có thể thực hiện truyền máu (làm tròn đến ba chữ số sau dấu phẩy).

Lời giải.
Gọi H, O, A, B, C là các biến cố "có thể thực hiện truyền máu", "người nhận có nhóm máu O", "người nhận có nhóm máu A", "người nhận có nhóm máu B", người nhận có nhóm máu AB".
Khi đó $\{O, A, B, C\}$ là một hệ đầy đủ. Theo công thức xác suất toàn phần ta có

$$\begin{aligned} P(H) &= P(O)P(H|O) + P(A)P(H|A) + P(B)P(H|B) + P(C)P(H|C) \\ &= 0,337\cdot 0,337 + 0,375\cdot(0,375+0,337) + 0,209\cdot(0,209+0,337) + 0,079\cdot 1 \\ &\approx 0,574. \end{aligned}$$

□

Câu 9. Một nhà máy có hai xưởng sản xuất: xưởng I chiếm 65% tổng sản phẩm, xưởng II chiếm 35% tổng sản phẩm. Biết rằng tỉ lệ đạt sản phẩm chất lượng tốt của hai xưởng lần lượt là 90% và 85%. Lấy ra ngẫu nhiên một sản phẩm của nhà máy. Tính xác suất để sản phẩm đó đạt chất lượng tốt.

Lời giải.

Goi H, A_1, A_2 lần lượt là các biến cố "sản phẩm lấy ra đạt chất lượng tốt", "sản phẩm do xưởng I sản xuất", sản phẩm do xưởng II sản xuất".
Khi đó $\{A_1, A_2\}$ là một hệ đầy đủ. Theo công thức xác suất toàn phần ta có

$$\begin{aligned} P(H) &= P(A_1)P(H|A_1) + P(A_2)P(H|A_2) \\ &= 0,65 \times 0,9 + 0,35 \times 0,85 \\ &= 0,8825. \end{aligned}$$

□

Câu 10. Trong một hộp có chứa 8 thẻ số, mỗi thẻ được ghi một trong các chữ số từ 1 đến 7. Lấy ngẫu nhiên một thẻ ra, ghi lại con số rồi bỏ lại thẻ vào trong hộp, lần thứ hai cũng lấy thẻ ra, ghi lại con số và bỏ vào trong hộp, làm tương tự như vậy đủ 5 lần để có 5 chữ số. Tính xác suất để lấy được 3 thẻ mang số chẵn và 2 thẻ mang số lẻ.

Lời giải.
Hướng dẫn: Gọi A_1 là biến cố "lấy ra được thẻ mang số lẻ" và A_2 là biến cố "lấy ra được thẻ mang số chẵn". Ta có C_5^3 cách để lấy được 3 thẻ mang số chẵn và 2 thẻ mang số lẻ. Do đó với A là biến cố "lấy được 3 thẻ mang số chẵn và 2 thẻ mang số lẻ" thì

$$P(A) = C_5^3 P(A_1.A_1.A_2.A_2.A_2) = 10.\left(\frac{4}{7}\right)^2.\left(\frac{3}{7}\right)^3 = \frac{4320}{16807}$$

□

Câu 11. Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất n lần. Tìm n để xác suất để ít nhất một lần xuất hiện mặt 6 chấm lớn hơn 0,9.

Lời giải.
Hướng dẫn: Gọi A_i, $i \in \{1, \dots, n\}$ là biến cố "gieo lần thứ i được mặt 6 chấm" và A là biến cố "gieo được ít nhất một lần xuất hiện mặt 6 chấm". Khi đó

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A_1}.\overline{A_2}\dots\overline{A_n}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

. Từ đó suy ra để xác suất $P(A) > 0,9$ thì $n \geqslant 13$. □

Câu 12. Một hộp đựng 10 sản phẩm tốt và 5 sản phẩm xấu. Lấy đồng thời 3 sản phẩm. Tính xác suất để:

1. Cả 3 sản phẩm được lấy ra đều tốt.
2. Trong 3 sản phẩm được lấy ra có ít nhất 2 sản phẩm là tốt.

Lời giải.

1. Gọi A là biến cố "Cả 3 sản phẩm được lấy ra đều tốt".

$$P(A) = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{4.5.6}{13.7.5} = \frac{24}{91}$$

2. Gọi B là biến cố "Trong 3 sản phẩm được lấy ra có ít nhất 2 sản phẩm là tốt".

$$P(B) = \frac{C_{10}^2}{C_{15}^2} + \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{45}{105} + \frac{24}{91} = \frac{63}{91}$$

□

Câu 13. Gieo đồng thời hai con súc sắc phân biệt nhau. Tìm xác suất để được hai mặt sao cho

1. tổng số chấm bằng 7.
2. tổng số chấm nhỏ hơn 8.
3. ít nhất một mặt 6 chấm.

Lời giải.

1. Nhận xét $7 = 6 + 1 = 5 + 2 = 4 + 3$.
   Gọi A là biến cố "Tổng số chấm của hai con súc sắc bằng 7" $\Rightarrow P(A) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.

2. Gọi B là biến cố "Tổng số chấm của hai con súc sắc nhỏ hơn 8".
   Gọi B_k là biến cố "Tổng số chấm của hai con súc sắc bằng k". Ta xét các tình huống sau:

   - Tổng số chấm bằng 8: $P(B_8) = \dfrac{5}{36}$.
   - Tổng số chấm bằng 9: $P(B_9) = \dfrac{4}{36}$.
   - Tổng số chấm bằng 10: $P(B_{10}) = \dfrac{3}{36}$.
   - Tổng số chấm bằng 11: $P(B_{11}) = \dfrac{2}{36}$.
   - Tổng số chấm bằng 12: $P(B_{12}) = \dfrac{1}{36}$.

   Vậy $P(B) = 1 - \dfrac{1+2+3+4+5}{36} = \dfrac{7}{12}$.

3. Gọi C là biến cố "Có ít nhất một mặt 6 chấm" $\Rightarrow P(C) = \dfrac{11}{36}$.

□

Câu 14. Thang máy của một tòa nhà 7 tầng xuất phát từ tầng 1 với 3 khách. Tìm xác suất để:

1. Tất cả ra ở cùng một tầng.
2. Mỗi người ra ở một tầng khác nhau.

Lời giải.

1. Gọi A là biến cố "Tất cả ra ở cùng một tầng" $\Rightarrow P(A) = \dfrac{7}{7^3} = \dfrac{1}{49}$.

2. Gọi B là biến cố "Mỗi người ra ở một tầng khác nhau" $\Rightarrow P(B) = \dfrac{7.6.5}{7^3} = \dfrac{30}{49}$.

□

Câu 15. Bốn nam và 4 nữ được xếp ngồi vào 8 ghế xếp thành 2 hàng, mỗi hàng có 4 ghế đối diện nhau. Tính xác suất:

1. Nam, nữ ngồi đối diện nhau.
2. Các bạn nam ngồi đối diện nhau.

Lời giải.

1. Gọi A là biến cố "Nam, nữ ngồi đối diện nhau". Xét ở mỗi hàng:

   - Ở vị trí thứ nhất ta có 8 cách xếp và ở vị trí đối diện có 4 cách xếp.
   - Ở vị trí thứ hai ta có 6 cách xếp và ở vị trí đối diện có 3 cách xếp.
   - Ở vị trí thứ ba ta có 4 cách xếp và ở vị trí đối diện có 2 cách xếp.
   - Ở vị trí thứ tư ta có 2 cách xếp và ở vị trí đối diện có 1 cách xếp.

$$P(A) = \frac{2.(8.4.6.3.4.2.2.1)}{8!} = \frac{16}{35}$$

2. Gọi B là biến cố "Các bạn nam ngồi đối diện nhau".
   - Số cách chọn hai ghế đối diện trong 8 ghế là $C_4^1 = 4$ cách.
   - Số cách xếp 2 bạn nam vào hai ghế đối diện được chọn là $A_4^2 = 12$ cách.
   - Số cách xếp 2 bạn nam còn lại vào hai ghế đối diện là $3.2 = 6$ cách.
   - Số cách xếp 4 bạn nữ vào 4 vị trí còn lại là $4!$.

$$P(B) = \frac{4.12.6.4!}{8!} = \frac{6}{35}$$

□

Câu 16. Gọi X là tập hợp các số tự nhiên có 8 chữ số được lập từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5. Chọn ngẫu nhiên một số từ X. Tính xác suất để có thể chọn được một số thỏa mãn số 5 lặp lại 3 lần và các số còn lại xuất hiện 1 lần.

Lời giải.
Số phần tử của X là 5.6^7.
Gọi A là biến cố "Chọn được một số thỏa mãn số 5 lặp lại 3 lần và các số còn lại xuất hiện 1 lần".

- Coi vai trò của tất cả các số là như nhau.
  - Số các vị trí xếp số 5 là $C_8^3 = 56$.
  - Cách xếp các số còn lại vào 5 vị trí còn lại là $5!$.
- Xét trường hợp số 0 đứng đầu.
  - Số các vị trí xếp số 5 là $C_7^3 = 35$.
  - Cách xếp các số còn lại vào 4 vị trí còn lại là $4!$.

Số phần tử của A là $56.5! - 35.4! = 5880 \Rightarrow P(A) = \dfrac{5880}{5.6^7} = 0,0042$ □

Câu 17. Gọi X là tập hợp các số tự nhiên có 5 chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập X. Tính xác suất để chọn được số tự nhiên thỏa mãn số đứng trước luôn lớn hơn số đứng đằng sau.

Lời giải.
Số phần tử của tập X là 9.10^4.
Gọi A là biến cố "Chọn được số tự nhiên thỏa mãn số đứng trước luôn lớn hơn số đứng đằng sau". Vì số đứng đầu không thể là số 0 nên ta xét các chữ số từ 1 đến 9.

- Số cách chọn 5 số bất kỳ trong 9 số là $C_9^5 = 126$.
- Vì 5 số bất kỳ ta chỉ có một cách xếp sao cho số đứng sau luôn lớn hơn số đứng trước nên số các số tự nhiên thỏa mãn số đứng sau luôn lớn hơn số đứng trước là 126.

$$P(A) = \frac{126}{9.10^4} = \frac{7}{5000}$$

□

Câu 18. Gọi X là tập hợp các số tự nhiên có 5 chữ số phân biệt được lập từ các số 1, 2, 3, 4, 5. Chọn ngẫu nhiên một số từ X. Tính xác suất để có thể chọn được một số thỏa mãn 5 chữ số phân biệt nhỏ hơn 45000.

Lời giải.
Số lượng phần tử của X là $5! = 120$.
Gọi A là biến cố "Chọn được một số thỏa mãn 5 chữ số phân biệt nhỏ hơn 45000".
Gọi số có 5 chữ số được lập từ các số 1, 2, 3, 4, 5 là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \{1; 2; 3; 4; 5\})$

- $a_1 < 4$:
  - Vị trí a_1 có 3 cách chọn.
  - Số cách xếp 4 số vào 4 vị trí còn lại là $4! = 24$ cách.
- $a_1 = 4, a_2 < 5$:
  - Vị trí a_1 có 1 cách chọn.
  - Vị trí a_2 có 3 cách chọn.
  - Số cách xếp 3 số vào 3 vị trí còn lại là $3! = 6$ cách.

$$P(A) = \frac{90}{120} = \frac{3}{4}$$

□

Câu 19. Gọi X là tập hợp các số tự nhiên có 3 chữ số phân biệt được lập từ các số $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Chọn ngẫu nhiên một số từ X. Tính xác suất để có thể chọn được một số không chia hết cho 3.

Lời giải.
Số lượng phần tử của X là $5.5.4 = 100$.
Gọi A là biến cố "Chọn được một số không chia hết cho 3".
Dấu hiệu chia hết cho 3 là tổng các chữ số là một số chia hết cho 3 nên ta xét các trường hợp sau.

- Tổng các chữ số bằng 12 $\Rightarrow$ xét tập các chữ số $\{3;4;5\}$: có $3! = 6$ số.
- Tổng các chữ số bằng 9:
  - Xét tập các chữ số $\{0;4;5\}$: có 4 số.
  - Xét tập các chữ số $\{1;3;5\}$: có 6 số.
  - Xét tập các chữ số $\{2;3;4\}$: có 6 số.
- Tổng các chữ số bằng 6:
  - Xét tập các chữ số $\{0;1;5\}$: có 4 số.
  - Xét tập các chữ số $\{0;2;4\}$: có 4 số.
  - Xét tập các chữ số $\{1;2;3\}$: có 6 số.
- Tổng các chữ số bằng 3 $\Rightarrow$ xét tập các chữ số $\{0;1;2\}$: có 4 số.

$$P(A) = 1 - \frac{40}{100} = 0,6$$

□

Câu 20. Trong một kì thi một học sinh làm bài thi trắc nghiệm gồm 50 câu (trong đó có 1 câu đúng và 3 câu sai) và chấm theo thang điểm sau: mỗi câu đúng được $0,2$ điểm và mỗi câu sai bị trừ $0,05$ điểm. Một học sinh đó vì không học bài nên chọn đáp án ngẫu nhiên. Tính xác xuất để học sinh đó được $4,5$ điểm, biết cậu học sinh đó không bỏ khoanh câu nào.

Lời giải.
Gọi a, b lần lượt là số câu đúng và số câu sai được chọn $\Rightarrow \begin{cases} a + b = 50 \\ 0,2a - 0,05b = 4,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 28 \\ b = 22 \end{cases}$.
Vì xác suất để chọn được một câu đúng là $0,25$ và xác suất chọn được một câu sai là $0,75$ nên xác suất để học sinh đó được $4,5$ điểm là $2,197.10^{-6}$. □

1.2 Bài toán chia kẹo của Euler.

Bài toán chia kẹo của Euler là bài toán nổi tiếng trong Lý thuyết tổ hợp. Với những học sinh chuyên Toán cấp 3 thì đây là bài toán quen thuộc và có nhiều ứng dụng. Dưới đây là một cách tiếp cận bài toán chia kẹo của Euler cho học sinh lớp 6 & 7 để thấy rằng các bài toán đếm nói riêng và các bài toán tổ hợp nói chung luôn là những bài toán mà lời giải của nó chứa đựng sự hồn nhiên và ngây thơ. Trước hết, xin phát biểu lại bài toán chia kẹo của Euler.

Bài toán. Có n cái kẹo (giống nhau) chia cho k em bé, hỏi có bao nhiêu cách chia sao cho em nào cũng có kẹo.
Một cách hợp lí, ta hãy xét bài toán trong trường hợp cụ thể, đơn giản hơn để từ đó định hướng đưa ra lời giải cho bài toán tổng quát.

Bài toán 1. Có 20 cái kẹo (giống nhau) chia cho 3 em bé, hỏi có bao nhiêu cách chia sao cho

1. Mỗi em có ít nhất 1 cái kẹo.
2. Mỗi em có ít nhất 2 cái kẹo.
3. Em thứ nhất có ít nhất 1 cái kẹo, em thứ hai có ít nhất 2 cái kẹo và em thứ ba có nhiều nhất 3 cái kẹo.

Lời giải.
Nhận thấy rằng, vì mỗi em có ít nhất một cái kẹo nên số kẹo của em thứ nhất nhận được ít nhất là 1 và nhiều nhất là 18. Xét các trường hợp.

- **Trường hợp 1.** Em thứ nhất nhận được 1 cái kẹo, thì số kẹo của em thứ hai có thể là $1, 2, 3, ..., 18$ em thứ ba nhận số kẹo còn lại sau khi chia cho em thứ nhất và em thứ hai xong, nghĩa là trong trường hợp này có 18 cách chia kẹo.
- **Trường hợp 2.** Em thứ nhất nhận được 2 cái kẹo, khi đó số kẹo của em thứ hai có thể là $1, 2, 3, ..., 17$ em thứ ba nhận số kẹo còn lại, nghĩa là trong trường hợp này có 17 cách chia kẹo... Hoàn toàn tương tự cho các trường hợp còn lại, ta nhận thấy số cách chia 20 cái kẹo cho 3 em bé sao cho em nào cũng có kẹo là $18 + 17 + ... + 2 + 1 = 171$.

Phát biểu tổng quát.
Nếu $k = 1$ thì chỉ có 1 cách chia kẹo.
Nếu $k \geqslant 2$ ta trải n chiếc kẹo thành dàn hàng ngang, tiếp theo ta dùng $(k-1)$ chiếc thước đặt vào $(n-1)$ khe giữa các viên kẹo để nó chia thành k phần. Như vậy có tất cả C_{n-1}^{k-1} cách.
Cả 2 trường hợp ta đều có C_{n-1}^{k-1} cách chia kẹo. □
Trên đây là lời giải của bài toán chia kẹo Euler – bài toán đếm nổi tiếng với nhiều ứng dụng trong các bài toán đếm khác. Bài này tác giả sẽ trình bày bài toán gốc cơ bản và một số bài toán đếm dạng ứng dụng mà nếu đếm theo cách thông thường sẽ rất khó khăn, nhưng khi hiểu theo các đếm của bài toán Euler thì bài toán lại trở thành đơn giản. Sau đây ta sẽ cùng tìm hiểu một ứng dụng rất lớn trong việc đếm số nghiệm nguyên của phương trình.

Bài toán 2. Phương trình $\sum_{i=1}^{k} x_i = n \; (n \geqslant k)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

Lời giải.
Coi x_i là phần kẹo của em nhỏ thứ i trong bài toán chia kẹo thì số nghiệm của phương trình chính là số cách chia n chiếc kẹo cho k em nhỏ. Vậy phương trình có C_{n-1}^{k-1} nghiệm nguyên dương. □

Bài toán 3. Phương trình $\sum_{i=1}^{k} x_i = n \; (n \geqslant k)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

Lời giải.
Ta có $x_1 + x_2 + ... + x_k = n \Leftrightarrow (x_1 + 1) + (x_2 + 1) + ... + (x_k + 1) = n + k$.
Đặt $x_i{}' = x_i + 1$ thì $x_i{}'$ là các số nguyên dương.
Áp dụng bài toán gốc ta có tất cả C_{n+k-1}^{k-1} nghiệm nguyên không âm của phương trình. □

Bài toán 4. Bất phương trình $\sum_{i=1}^{k} x_i < n\ (n \geqslant k+1)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

Lời giải.
Ta luôn có

$$\sum_{i=1}^{k} x_i < n \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} x_i + x' = n\ (x' \geqslant 1)$$

Vậy có tất cả C_{n-1}^{k} nghiệm nguyên dương của phương trình. □

Bài toán 5. Bất phương trình $\sum_{i=1}^{k} x_i \leqslant n\ (n \geqslant k)$có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

Lời giải.
Ta có

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \leqslant n \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} x_i + x' = n\ (x' \geqslant 0) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} x_i + x'' = n+1\ (x'' = x'+1)$$

Áp dụng bài toán Euler ta có C_n^k nghiệm. □

Bài toán 6. Phương trình $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện

$$x_i \geqslant d_i\ (d_i \geqslant 0)\,, n \geqslant \sum_{i=1}^{k} d_i\ (k \geqslant 1)$$

Lời giải.
Đặt $x_i{}' = x_i - d_i + 1 \Rightarrow \begin{cases} x_i{}' \geqslant 1 \\ \sum_{i=1}^{k} x_i{}' = n + k - \sum_{i=1}^{k} d_i \end{cases}.$

Đặt $D = \sum_{i=1}^{k} d_i$ thì theo bài toán chia kẹo, phương trình có $C_{n+k-D-1}^{k-1}$ nghiệm. □

1.3 Một số kết quả của bài toán đếm có yếu tố hình học

Bài toán 1. Cho đa giác có n đỉnh. Xét tam giác có 3 đỉnh là 3 đỉnh của đa giác

- Có đúng 1 cạnh chung với đa giác $n\,(n-4)$.
- Có đúng 2 cạnh chung với đa giác n.
- Không có cạnh chung với đa giác $C_n^3 - n - n\,(n-4)$.

Bài toán 2. Cho đa giác đều có $2n$ đỉnh. Số tam giác vuông có 3 đỉnh là 3 đỉnh của đa giác là$n\,(2n-2)$.

Bài toán 3. Cho đa giác đều có n đỉnh. Số tam giác tù được tạo thành từ 3 trong n đỉnh của đa giác là
$\left[\begin{array}{l} n = 2k \to n.C_{\frac{n-2}{2}}^2 \\ n = 2k+1 \to n.C_{\frac{n-1}{2}}^2 \end{array}\right.$

Bài toán 4. Cho đa giác đều có n đỉnh. Số tam giác nhọn được tạo thành từ 3 trong n đỉnh của đa giác $= C_n^3 -$(số tam giác tù + số tam giác vuông).

Bài toán 5. Cho đa giác đều có n đỉnh. Công thức tổng quát tính số tam giác tù.

- Nếu n chẵn $\to n.C_{\frac{n-2}{2}}^2$.
- Nếu n lẻ $\to n.C_{\frac{n-1}{2}}^2$.

Bài toán 6. Cho đa giác có n đỉnh. Xét tứ giác có 4 đỉnh là 4 đỉnh của đa giác

- Có đúng 1 cạnh chung với đa giác $n \times \left[C_{n-4}^2 - (n-5)\right] = A$.
- Có đúng 2 cạnh chung với đa giác $n(n-5) + \dfrac{n(n-5)}{2} = B$.
- Có đúng 3 cạnh chung với đa giác $n = C$.
- Không có cạnh chung với đa giác $C_n^4 - (A+B+C)$.

Và ta có thể chứng minh được $C_n^4 - (A+B+C) = \dfrac{n}{4} C_{n-5}^3$.

Bài toán 7. Cho đa giác đều có $2n$ đỉnh. Số tứ giác có 4 đỉnh là 4 đỉnh của đa giác và tạo thành **hình chữ nhật** là C_n^2.

Bài toán 8. Cho đa giác điều có $3n$ đỉnh, khi đó trong số các tam giác có 3 đỉnh là đỉnh của đa giác thì

- Số tam giác đều là n.
- Số tam giác cân không đều là
  1. $3n\left(\dfrac{3n-2}{2} - 1\right)$ nếu n chẵn.
  2. $3n\left(\dfrac{3n-1}{2} - 1\right)$ nếu n lẻ.

Bài toán 9. Cho đa giác đều có $4n$ đỉnh. Số tứ giác có 4 đỉnh là 4 đỉnh của đa giác và tạo thành **hình vuông** là n.

Phần chứng minh các kết quả trên xin nhường lại cho bạn đọc! Các bạn có thể tham khảo tại 2 đường link sau (mọi người bấm vào 2 dòng text ở dưới nhé!).

1. Các bài toán đếm liên quan tới đa giác - Lê Thảo.
2. Các bài toán đếm, xác suất khó - Tạp chí và tư liệu toán học.

2 Các bài toán tổng hợp

Câu 1. Trong lễ tổng kết năm học 2017 – 2018, lớp 12T nhận được 20 cuốn sách gồm 5 cuốn sách Toán, 7 cuốn sách Vật lí, 8 cuốn sách Hoá học, các sách cùng môn học là giống nhau. Số sách này được chia đều cho 10 học sinh trong lớp, mỗi học sinh chỉ nhận được hai cuốn sách khác môn học. Bình và Bảo là 2 trong số 10 học sinh đó. Tính xác suất để 2 cuốn sách mà Bình nhận được giống 2 cuốn sách của Bảo.

Lời giải.
Vì mỗi học sinh chỉ nhận được hai cuốn sách khác môn học nên từ 20 quyển sách ta chia ra 10 phần quà. Trong đó mỗi phần quà đó hoặc là gồm 1 cuốn sách Toán và 1 cuốn sách Vật lí (loại 1), hoặc là gồm 1 cuốn sách Toán và 1 cuốn sách Hoá (loại 2), hoặc là gồm 1 cuốn sách Vật lí và 1 cuốn sách Hoá (loại 3).
Gọi x, y, z lần lượt là số phần quà loại 1, loại 2 và loại 3.
Ta có $\begin{cases} x+y=5 \\ x+z=7 \\ y+z=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=5. \end{cases}$. Số cách chia phần quà cho Bình và Bảo là

- Cùng nhận loại 1: có $C_2^2 = 1$ cách.
- Cùng nhận loại 2: có $C_3^2 = 3$ cách.
- Cùng nhận loại 3: có $C_5^2 = 10$ cách.

Gọi biến cố A: " 2 cuốn sách mà Bình và Bảo nhận được giống nhau ".
Ta có $n(\Omega) = C_{10}^2 = 45$ và $n(A) = 14$. Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{14}{45}$. □

Câu 2. Cho (H) là đa giác đều $2n$ đỉnh nội tiếp đường tròn tâm (O) $(n \in \mathbb{N}^*, n \geqslant 2)$. Gọi S là tập hợp các tam giác có ba đỉnh là các đỉnh của đa giác (H). Chọn ngẫu nhiên một tam giác thuộc tập S, biết rằng xác suất chọn được một tam giác vuông trong tập S là $\dfrac{3}{29}$. Tìm n?

Lời giải.
Số phần tử của tập hợp S là C_{2n}^3, số phần tử không gian mẫu $n(\Omega) = C_{2n}^3$.
Gọi A là biến cố "Chọn được tam giác vuông". Đa giác đều $2n$ đỉnh có n đường chéo qua tâm O. Mỗi tam giác vuông được tạo bởi hai đỉnh nằm trên cùng một đường chéo qua tâm O và một đỉnh trong $2n-2$ đỉnh còn lại. Suy ra số tam giác vuông tạo thành là $C_n^1 \cdot C_{2n-2}^1$.
Theo bài ra ta có $P(A) = \dfrac{C_n^1 \cdot C_{2n-2}^1}{C_{2n}^3} = \dfrac{3}{29} \Rightarrow n = 15$. □

Câu 3. Một hộp đựng 26 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 26. Bạn Hải rút ngẫu nhiên cùng một lúc ba tấm thẻ. Hỏi có bao nhiêu cách rút sao cho bất kỳ hai trong ba tấm thẻ lấy ra đó có hai số tương ứng ghi trên hai tấm thẻ luôn hơn kém nhau ít nhất 2 đơn vị?

Lời giải.
Số kết quả của không gian mẫu $n(\Omega) = C_{26}^3 = 2600$. Số cách rút ra ba thẻ, sao cho trong ba thẻ đó luôn có ít nhất hai thẻ mà số ghi trên hai thẻ đó là hai số tự nhiên liên tiếp, ta có các trường hợp

- Rút hai thẻ liên tiếp có cặp số là $1; 2$, thì thẻ thứ 3 ta có 24 cách rút.
- Rút hai thẻ liên tiếp có cặp số là $2; 3$, thì thẻ thứ 3 không thể là thẻ có số 1, suy ra có 23 cách rút thẻ thứ 3.
- Rút hai thẻ liên tiếp có cặp số là $3; 4$, thì thẻ thứ 3 không thể là thẻ có số 2, suy ra có 23 cách rút thẻ thứ 3.

- ...
- Rút hai thẻ liên tiếp có cặp số là 24; 25, thì thẻ thứ 3 không thể là thẻ có số 23, suy ra có 23 cách rút thẻ thứ 3.
- Rút hai thẻ liên tiếp có cặp số là 25; 26, thì thẻ thứ 3 không thể là thẻ có số 24, suy ra có 23 cách rút thẻ thứ 3.

Từ đó suy ra, có $24 + 23 \cdot 24 = 576$ cách rút ra ba thẻ sao cho trong ba thẻ luôn có ít nhất hai thẻ mà số ghi trên hai thẻ đó là hai số tự nhiên liên tiếp. Vậy số cách rút ra ba thẻ mà trong hai thẻ bất kỳ lấy ra có hai số tương ứng luôn hơn kém nhau ít nhất hai đơn vị là $n(\Omega) - 576 = 2024$. □

Câu 4. Cho đa giác đều (H) có 15 đỉnh. Người ta lập một tứ giác có 4 đỉnh là 4 đỉnh của (H). Tính số tứ giác được lập thành mà không có cạnh nào là cạnh của (H).

Lời giải.
Gọi đa giác là $A_1A_2 \ldots A_{15}$. Giả sử chọn đỉnh thứ nhất là A_1. Ta chọn các đỉnh còn lại là theo thứ tự tứ giác là A_m, A_n, A_p. Gọi số đỉnh nằm giữa A_1 và A_m là x; số đỉnh nằm giữa A_m và A_n là y; số đỉnh nằm giữa A_n và A_p là z; số đỉnh nằm giữa A_p và A_1 là t. Khi đó ta có hệ $\begin{cases} x+y+z+t=11 \\ x,y,z,t \geqslant 1 \\ x,y,x,t \in \mathbb{N} \end{cases}$ (1)

Xếp 11 thước kẻ nhỏ thành một hàng ngang $\Rightarrow$ Có 10 khoảng trống giữa các thước này. Số nghiệm của hệ (1) là số cách đặt 2 thước kẻ lớn vào 10 khoảng trống kia để chia làm ba phần.
$\Rightarrow$ CóC_{10}^3 cách đặt.
$\Rightarrow$ Hệ(1) có C_{10}^3 nghiệm.
Như vậy có $15 \cdot C_{10}^3$ tứ giác thỏa mãn. Tuy nhiên, theo cách chọn này, mỗi tứ giác $A_1A_mA_nA_p$ lặp lại 4 lần khi chọn các đỉnh thứ nhất lần lượt là A_1, A_m, A_n, A_p. Do đó, số tứ giác cần tính là $\dfrac{15 \cdot C_{10}^3}{4} = 450$. □

Câu 5. Chia ngẫu nhiên 9 viên bi gồm 4 viên bi màu đỏ và 5 viên bi màu xanh có cùng kích thước thành ba phần, mỗi phần 3 viên. Xác suất để không có phần nào gồm 3 viên cùng màu bằng

Lời giải.
Khi chia các bi vào 3 phần sẽ xảy ra các khả năng số bi đỏ ở 3 phần có số lượng như sau
Trường hợp 1. $(0;1;3)$ có nghĩa là 1 phần không có đỏ, 1 phần có 1 đỏ và phần còn lạicó 3 đỏ. Sau đó ta bổ sung số bi xanh vào cho đủ 3 bi. Vậy số cách chia là $C_4^1 \cdot C_3^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = 40$ cách.
Trường hợp 2. $(0;2;2)$ tương tự với trường hợp 1 số cách chia là $\dfrac{C_4^2 \cdot C_2^2 \cdot C_5^3 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1}{2!} = 60$ cách.
Trường hợp 3. $(1;1;2)$ tương tự với trường hợp 1 số cách chia là $\dfrac{C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_2^2 \cdot C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot C_1^1}{2!} = 180$ cách.
Vậy $n(\Omega) = 40 + 60 + 180 = 280$.
Trong 3 trường hợp chỉ có trường hợp 3 sẽ không có phần nào gồm 3 viên cùng màu nên $n(A) = 180$.
Vậy xác suất để không có phần nào gồm 3 viên cùng màu bằng $P(A) = \dfrac{180}{280} = \dfrac{9}{14}$. □

Câu 6. Cho đa giác đều 2018 đỉnh. Hỏi có bao nhiêu tam giác có đỉnh là đỉnh của đa giác và có một góc lớn hơn $100°$?

Lời giải.
Xét đa giác đều $A_1A_2 \cdots A_{2018}$ nội tiếp đường tròn (O). Khi đó, các đỉnh của đa giác chia đường tròn (O) thành 2018 cung nhỏ bằng nhau, mỗi cung có số đo bằng $\left(\dfrac{180}{1009}\right)^\circ$. Xét tam giác $A_iA_1A_j$ với $2 \leqslant i < j \leqslant 2018$. Khi đó

$$\widehat{A_iA_1A_j} = \frac{1}{2}(j-i) \cdot \left(\frac{180}{1009}\right)^\circ.$$

Do đó

$$\widehat{A_iA_1A_j} > 100^\circ \Leftrightarrow \frac{1}{2}(j-i)\cdot\left(\frac{180}{1009}\right)^\circ > 100^\circ \Leftrightarrow j-i > \frac{10\cdot 1009}{9}$$
$$\Leftrightarrow j-i > 1121 \Leftrightarrow 2 \leqslant i < j-1121 \leqslant 897. \quad (1)$$

Số tam giác $A_iA_1A_j$ thoản mãn $\widehat{A_iA_1A_j} > 100^\circ$ chính bằng số cách chọn cặp $(i;j)$ thỏa (1) và có C_{896}^2 cách chọn cặp $(i;j)$. Do đó có tất cả $2018\cdot C_{896}^2$ số tam giác thỏa yêu cầu bài toán. □

Câu 7. Người ta dùng 18 cuốn sách bao gồm 7 cuốn sách Toán, 6 cuốn sách Lý và 5 cuốn sách Hóa (các cuốn sách cùng loại thì giống nhau) để làm phần thưởng cho 9 học sinh $A, B, C, D, E, F, G, H, I$, mỗi học sinh nhận được 2 cuốn sách khác thể loại (không tính thứ tự các cuốn sách). Tính xác suất để hai học sinh A, B nhận được phần thưởng giống nhau

Lời giải.
Giả sử có x quyển Toán ghép với Lý $\Rightarrow$ có $7-x$ quyển Toán ghép với Hóa.
Quyển Lý còn $6-x$, ghép với $5-(7-x)$ quyển Hóa.
Ta có phương trình $6-x = -2+x \Leftrightarrow x = 4$.
Vậy có 4 học sinh nhận Toán và Lý, 3 học sinh nhận Toán và Hóa, 2 học sinh nhận Lý và Hóa.
$\Rightarrow n(\Omega) = C_9^4\cdot C_5^3 = 1260$.

- Nếu A,B nhận sách Toán và Lý, có $C_7^2\cdot C_5^3 = 210$.
- Nếu A, B nhận sách Toán và Hóa, có $C_7^1{\cdot}C_6^4 = 105$.
- Nếu A,B nhận Lý và Hóa, có $C_7^3 = 35$.

Vậy xác suất để A,B nhận thưởng giống nhau là $P = \dfrac{210+105+35}{1260} = \dfrac{5}{18}$. □

Câu 8. Gọi S là tập hợp gồm các số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một số trong tập S. Xác suất để số lấy ra có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ thỏa mãn $a_1 < a_2 < a_3$ và $a_3 > a_4 > a_5$ bằng

Lời giải.
Sắp số $a_1, (a_1 \neq 0)$ có 9 cách.
Sắp 4 số còn lại có A_9^4 cách.
Do đó, tập S có $9\cdot A_9^4 = 27216$ phần tử $\Rightarrow n(\Omega) = 27216$.
Gọi A là biến cố số lấy ra có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ thỏa mãn $a_1 < a_2 < a_3$ và $a_3 > a_4 > a_5$.
Trường hợp 1. Chọn 5 số khác nhau và khác 0 có C_9^5 cách chọn.
Từ yêu cầu bài toán, ta có a_3 là số lớn nhất nên sắp a_3 có 1 cách.
Chọn 2 trong 4 số còn lại và sắp theo thứ tự $a_1 < a_2$ có C_4^2 cách.
Sắp 2 số còn lại vào vị trí a_4, a_5 có 1 cách.
Nên có $C_9^5\cdot C_4^2$ cách sắp.
Trường hợp 2. Chọn 5 số khác nhau, trong đó có số 0 có C_9^4 cách.
Từ điều kiện suy ra $a_5 = 0$.
Sắp a_3 có 1 cách.
Chọn 2 trong 3 số còn lại sắp vào a_1, a_2 có C_3^2 cách.
Sắp a_4 còn lại có 1 cách.
Nên có $C_9^4\cdot C_3^2$.
Suy ra $n(A) = C_9^5\cdot C_4^2 + C_9^4\cdot C_3^2 = 1134$.
Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{24}$. □

Câu 9. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có năm chữ số. Tính xác suất để số được chọn có dạng $\overline{abcde}$ trong đó $1 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e \leqslant 9$.

Lời giải.

- Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử. Ta có $n(\Omega) = 9 \cdot 10^4$.
- Gọi A là biến cố: " Lấy được số dạng $\overline{abcde}$ trong đó $1 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e \leqslant 9$".
  Ta có $1 \leqslant a < b+1 < c+2 < d+3 < e+4 \leqslant 13$. Suy ra $n(A) = C_{13}^5$.
  Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{C_{13}^5}{9 \cdot 10^4} = \dfrac{143}{10000}$.

□

Câu 10. Một thầy giáo có 12 cuốn sách đôi một khác nhau, trong đó có 5 cuốn sách văn học, 4 cuốn sách âm nhạc và 3 cuốn sách hội họa. Thầy lấy ngẫu nhiên ra 6 cuốn tặng cho 6 học sinh mỗi em một cuốn. Tính xác suất để sau khi tặng xong mỗi thể loại văn học, âm nhạc, hội họa đều còn lại ít nhất một cuốn.

Lời giải.

- Số cách lấy ra 6 cuốn sách và tặng cho 6 học sinh là A_{12}^6.
- Số cách lấy ra 6 cuốn sách ngẫu nhiên bất kì trong 12 cuốn là C_{12}^6.
- Số cách lấy ra 6 cuốn sách chỉ có hai loại trong ba loại sách văn học, âm nhạc, hội họa là $C_7^6 + C_8^6 + C_9^6$.
- Số cách lấy ra 6 cuốn sách sao cho mỗi loại văn học, âm nhạc, hội họa đều còn lại ít nhất một cuốn là $C_{12}^6 - \left(C_7^6 + C_8^6 + C_9^6\right)$.
- Số cách tặng sách thỏa đề bài là $6! \cdot \left[C_{12}^6 - \left(C_7^6 + C_8^6 + C_9^6\right)\right]$.

Vậy xác suất cần tính bằng
$$P = \frac{6! \cdot \left[C_{12}^6 - \left(C_7^6 + C_8^6 + C_9^6\right)\right]}{A_{12}^6} = \frac{115}{132}.$$

□

Câu 11. Cho 5 chữ số $1, 2, 3, 4, 6$. Lập các số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau từ 5 chữ số đã cho. Tính tổng của tất cả các số lập được.

Lời giải.
Xét tập $X = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.
Số các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau lấy từ tập X là $5 \times 4 \times 3 = 60$.
Do vai trò các chữ số là như nhau, nên số lần xuất hiện của mỗi chữ số trong tập X tại mỗi hàng trăm, hàng chục, hàng đơn vị là $\dfrac{60}{5} = 12$. Tổng các số lập được $S = (1+2+3+4+6) \times 12 \times 111 = 21312$. □

Câu 12. Cho đa giác đều gồm 2018 đỉnh $A_1A_2 \ldots A_{2018}$. Chọn ngẫu nhiên ra 3 đỉnh trong 2018 đỉnh của đa giác, tìm xác suất để 3 đỉnh được chọn là 3 đỉnh của một tam giác tù.

Lời giải.
Chọn 3 đỉnh ngẫu nhiên ta có C_3^{2018} cách chọn.
Suy ra $|\Omega| = C_3^{2018}$.
Gọi A là biến cố để chọn được 3 đỉnh là 3 đỉnh của một tam giác tù.
Giả sử chọn tam giác tù ABC với A nhọn, B tù và C nhọn.
Chọn một đỉnh bất kì làm đỉnh A suy ra có 2018 cách chọn.
Qua đỉnh vừa chọn, ta kẻ đường kính, chia đa giác làm hai phần.
Để tạo thành tam giác tù thì hai đỉnh B và C sẽ phải cùng nằm về một phía.
Suy ra có $C_{1008}^2 + C_{1008}^2 = 2C_{1008}^2$.
Vì vai trò của A, C như nhau nên mỗi tam giác được tính hai lần.
Do vậy $|A| = 2018 \cdot C_{1008}^2$.
Suy ra $P(A) = \dfrac{2018 \cdot 2 \cdot C_{1008}^2}{C_3^{2018}} = \dfrac{3021}{4034}$. □

Câu 13. Có 8 bạn cùng ngồi xung quanh một cái bàn tròn, mỗi bạn cầm một đồng xu như nhau. Tất cả 8 bạn cùng tung đồng xu của mình, bạn có đồng xu ngửa thì đứng, bạn có đồng xu sấp thì ngồi. Tính xác suất để không có hai bạn liền kề cùng đứng.

Lời giải.
Gọi A là biến cố "không có hai người liền kề cùng đứng".
Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 2^8 = 256$.
Rõ ràng nếu nhiều hơn 4 đồng xu ngửa thì biến cố A không xảy ra.
Để biến cố A xảy ra ta có các trường hợp sau:

- **Trường hợp 1.** Có nhiều nhất 1 đồng xu ngửa. Kết quả của trường hợp này là $1 + 8 = 9$.
- **Trường hợp 2.** Có 2 đồng xu ngửa.
  2 đồng xu ngửa kề nhau, có 8 khả năng.
  Suy ra, số kết quả của trường hợp này là $C_8^2 - 8 = 20$.
- **Trường hợp 3.** Có 3 đồng xu ngửa.
  Cả 3 đồng xu ngửa kề nhau, có 8 khả năng.
  Trong 3 đồng xu ngửa có đúng 2 đồng xu ngửa kề nhau, có $8 \cdot 4 = 32$ kết quả. Suy ra, số kết quả của trường hợp này là $C_8^3 - 8 - 32 = 16$.
- **Trường hợp 4.** Có 4 đồng xu ngửa.
  Trường hợp này có 2 kết quả thỏa mãn biến cố A xảy ra.

Như vậy: $n(A) = 9 + 20 + 16 + 2 = 47$.
Xác suất để không có hai bạn liền kề cùng đứng là : $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{47}{256}$. □

Câu 14. Học sinh A thiết kế bảng điều khiển điện tử mở cửa phòng học của lớp mình. Bảng gồm 10 nút, một nút được ghi một số tự nhiên từ 0 đến 9 và không có hai nút nào được ghi cùng một số. Để mở cửa cần nhấn 3 nút liên tiếp khác nhau sao cho 3 số trên 3 nút theo thứ tự đã nhấn tạo thành một dãy tăng và có tổng bằng 10. Học sinh B chỉ nhớ được chi tiết 3 nút tạo thành dãy số tăng. Tính xác suất để B mở được cửa phòng học đó biết rằng nếu bấm sai 3 lần liên tiếp của sẽ tự động khóa lại (không cho mở nữa).

Lời giải.
Đặt $\mathscr{S} = \{(a,b,c) |\ a < b < c \text{và} a,b,c \in \{0,1,\ldots,9\}\}$; $\mathscr{T} = \{(a,b,c) |\ a < b < c, a+b+c = 10 \text{và} a,b,c \in \{0,1,\ldots,9\}\}$.
Dễ thấy $|\mathscr{S}| = C_{10}^3$, $\mathscr{T} = \{(0,1,9);(0,2,8);(0,3,7);(0,4,6);(1,2,7);(1,3,6);(1,4,5);(2,3,5)\}$; $|\mathscr{T}| = 8$. Xác suất B thành công trong một lần mở là

$$\frac{|\mathscr{T}|}{|\mathscr{S}|} = \frac{8}{C_{10}^3} = \frac{1}{15}.$$

Để B mở được cửa thì B thành công trong lần mở thứ nhất hoặc B thất bại trong lần đầu tiên và thành công trong lần thứ hai hoặc thất bại trong hai lần đầu và thành công trong lần thứ ba. Từ đó suy ra xác suất B mở được cửa phòng là

$$P = \frac{1}{15} + \frac{14}{15} \cdot \frac{1}{15} + \left(\frac{14}{15}\right)^2 \cdot \frac{1}{15} = \frac{631}{3375}.$$

□

Câu 15. Cho (H) là đa giác đều $2n$ đỉnh nội tiếp đường tròn tâm O $(n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2)$. Gọi S là tập hợp các tam giác có 3 đỉnh là các đỉnh của đa giác (H). Chọn ngẫu nhiên một tam giác thuộc tập S, biết rằng xác suất chọn một tam giác vuông trong tập S là $\dfrac{3}{29}$. Tìm n?

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu S là số cách chọn 3 trong $2n$ đỉnh của đa giác H nên bằng C_{2n}^3. Đa giác đều H có n đường chéo chính là đường kính của đường tròn ngoại tiếp (H). Để chọn ra một tam giác vuông. Đầu tiên ta chọn ra một cạnh huyền trong n đường kính, nên có n cách chọn. Tiếp theo chọn 1 điểm trong $2n-2$ điểm còn lại làm đỉnh góc vuông của tam giác, nên có $2n-2$ cách chọn. Số cách chọn ra một tam giác vuông bằng $n\cdot(2n-2)$ cách. Xác suất để chọn ra một tam giác vuông là

$$P=\frac{n\cdot(2n-2)}{C_{2n}^3}=\frac{6n(2n-2)}{(2n)(2n-1)(2n-2)}=\frac{3}{2n-1}.$$

Theo giả thiết $P=\dfrac{3}{29}$, suy ra $2n-1=29$ hay $n=15$. □

Câu 16. Một bảng vuông gồm 100×100 ô vuông đơn vị có cạnh bằng 1 cm. Chọn ngẫu nhiên một ô hình chữ nhật. Tính xác suất để ô được chọn là hình vuông có cạnh lớn hơn 50 cm.

Lời giải.
Gọi A là biến cố "Chọn ngẫu nhiên một ô hình chữ nhật được ô là hình vuông có cạnh lớn hơn 50cm."Ta đặt bảng vuông trong hệ trục Oxy sao cho 100×100 ô vuông đơn vị được tạo bởi 101 đường thẳng có phương trình $x=0, x=1, x=2,\ldots, x=100$ và 101 đường thẳng $y=0, y=1, y=2,\ldots, y=100$. Hai đường thẳng $x=a, x=b$ cùng với hai đường thẳng $y=m, y=n$ tạo ra một hình chữ nhật. Số hình chữ nhật có được trong bảng vuông là $n(\Omega)=C_{101}^2\cdot C_{101}^2=25502500$. Ta đếm số cách chọn một hình vuông có cạnh lớn hơn 50cm

- Số hình vuông có cạnh 1 cm là $100\cdot100=100^2$.
- Với 4 đường thẳng $x=a, x=b, y=m, y=n$ với $a-b=2, m-n=2$, cho ta 1 hình vuông có cạnh 2 cm. Số hình vuông có cạnh 2 cm là $99\cdot99=99^2$.
- Với 4 đường thẳng $x=a, x=b, y=m, y=n$ với $a-b=3, m-n=3$, cho ta 1 hình vuông có cạnh 3 cm. Số hình vuông có cạnh 3 cm là $98\cdot98=98^2$.
- ......
- Với 4 đường thẳng $x=a, x=b, y=m, y=n$ với $a-b=99, m-n=99$, cho ta 1 hình vuông có cạnh 99 cm. Số hình vuông có cạnh 99 cm là $2\cdot2=2^2$.
- Dĩ nhiên có 1 hình vuông cạnh bằng 100 cm.

Số cách chọn một hình vuông có cạnh lớn hơn 50cm

$$\begin{aligned}n(A)&=\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+50^2+\cdots+100^2\right)-\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+50^2\right)\\&=\frac{100(100+1)(2\cdot100+1)}{6}-\frac{50(50+1)(2\cdot50+1)}{6}=295425.\end{aligned}$$

Xác suất để ô được chọn là hình vuông có cạnh lớn hơn 50cm là

$$P=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{295425}{25502500}=0{,}01158.$$

□

Câu 17. Trong một bài thi trắc nghiệm khách quan có 10 câu. Mỗi câu có bốn phương án trả lời, trong đó chỉ có một phương án đúng. Mỗi câu trả lời đúng thì được 1 điểm, trả lời sai thì bị trừ 0,5 điểm. Một thí sinh do không học bài nên làm bài bằng cách với mỗi câu đều chọn ngẫu nhiên một phương án trả lời. Tính xác suất để thí sinh đó làm bài được số điểm không nhỏ hơn 7.

Lời giải.

Gọi x là số câu đúng $(0 \leqslant x \leqslant 10)$, $10 - x$ là số câu sai. Ta có bất phương trình

$$x + \frac{x - 10}{2} \geqslant 7 \Leftrightarrow 8 \leqslant x \leqslant 10.$$

Xác suất để thí sinh đó làm bài được số điểm không nhỏ hơn 7 là

$$C_{10}^{8}\left(\frac{1}{4}\right)^{8}\left(\frac{3}{4}\right)^{2} + C_{10}^{9}\left(\frac{1}{4}\right)^{9}\left(\frac{3}{4}\right)^{1} + C_{10}^{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^{0} = \frac{109}{262144}$$

□

Câu 18. Có 20 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 20. Chọn đúng ngẫu nhiên 8 tấm thẻ, tính xác suất để chọn được 5 tấm mang số lẻ, 3 tấm mang số chẵn trong đó có đúng 3 tấm thẻ mang số chia hết cho 3.

Lời giải.
Số cách chọn 8 tấm thẻ trong 20 tấm thẻ là $|\Omega| = C_{20}^{8} = 125970$ (cách).
Gọi A là biến cố "5 tấm thẻ mang số lẻ, 3 tấm thẻ mang số chẵn trong đó có đúng 3 tấm thẻ mang số chia hết cho 3".
Nhận xét: Trong 20 tấm thẻ có 10 tấm thẻ mang số chẵn, 10 tấm thẻ mang số lẻ và 6 tấm mang số chia hết cho 3. Để tìm số phần tử của A ta xét bốn trường hợp sau:

- Trường hợp 1. Có 5 tấm thẻ mang số lẻ không chia hết cho 3 và 3 tấm thẻ chẵn chia hết cho 3. Số cách chọn là $C_7^5 C_3^3 = 21$ (cách chọn).
- Trường hợp 2. Có 4 tấm thẻ mang số lẻ không chia hết cho 3, 1 tấm thẻ lẻ chia hết cho ba, 1 tấm thẻ chẵn không chia hết cho 3 và 2 tấm thẻ chẵn chia hết cho 3. Số cách chọn là $C_7^4 C_3^1 C_7^1 C_3^2 = 2205$ (cách chọn).
- Trường hợp 3. Có 3 tấm thẻ mang số lẻ không chia hết cho 3, 2 tấm thẻ mang số lẻ chia hết cho 3, 2 tấm thẻ chẵn không chia hết cho 3 và 1 tấm thẻ chẵn chia hết cho 3. Số cách chọn là $C_7^3 C_3^2 C_7^2 C_3^1 = 6615$ (cách chọn).
- Trường hợp 4. Có 2 tấm thẻ lẻ không chia hết cho 3, 3 tấm thẻ lẻ chia hết cho 3, 3 tấm thẻ chẵn không chia hết cho 3. Số cách chọn là $C_7^2 C_3^3 C_7^3 = 735$ (cách chọn).

Suy ra, số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 21 + 2205 + 6615 + 735 = 9576$.
Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{9576}{125970} = \dfrac{84}{1105}$. □

Câu 19. Ba cầu thủ sút phạt đền 11m, mỗi người sút một lần với xác suất ghi bàn tương ứng là x, y và 0,6 (với $x > y$). Biết xác suất để ít nhất một trong ba cầu thủ ghi bàn là 0,976 và xác suất để cả ba cầu thủ đều ghi bàn là 0,336. Tính xác suất để có đúng hai cầu thủ ghi bàn.

Lời giải.
Xác suất để ít nhất một trong ba cầu thủ ghi bàn là 0,976 $\Rightarrow$ xác suất không cầu thủ nào ghi bàn là
$(1-x)(1-y)(1-0{,}6) = 1 - 0{,}976 \Rightarrow (1-x)(1-y) = 0{,}06$. (1)
xác suất để cả ba cầu thủ đều ghi bàn là 0,336 $\Rightarrow x \cdot y \cdot 0{,}6 = 0{,}336 \Rightarrow xy = 0{,}56$. (2)
Từ (1),(2) ta có hệ $\begin{cases} (1-x)(1-y) = 0{,}06 \\ xy = 0{,}56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1{,}5 \\ xy = 0{,}56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0{,}8 \\ y = 0{,}7 \end{cases}$ (vì $x > y$).
Đúng hai cầu thủ ghi bàn thì có thể xảy ra các trường hợp sau

- Trường hợp 1. Người 1, 2 ghi bàn, người 3 không ghi bàn: $P_1 = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0,4 = 0{,}224$.
- Trường hợp 2. Người 1, 3 ghi bàn, người 2 không ghi bàn: $P_1 = 0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}144$.
- Trường hợp 3. Người 2, 3 ghi bàn, người 1 không ghi bàn: $P_1 = 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}084$.

Vậy xác suất đúng hai cầu thủ ghi bàn là: $P = 0{,}224 + 0{,}144 + 0{,}084 = 0{,}452$ □

Câu 20. Một hộp chứa 6 quả bóng đỏ (được đánh số từ 1 đến 6), 5 quả bóng vàng (được đánh số từ 1 đến 5), 4 quả bóng xanh (được đánh số từ 1 đến 4). Tính xác suất để 4 quả bóng lấy ra có đủ ba màu mà không có hai quả bóng nào có số thứ tự trùng nhau.

Lời giải.
Gọi A là biến cố "Lấy được 4 quả bóng lấy ra có đủ ba màu mà không có hai quả bóng nào có số thứ tự trùng nhau".
Có tất cả $6+5+4=15$ quả bóng, nên không gian mẫu có số phần tử là $n(\Omega)=C_{15}^4=1365$. Để chọn được 4 quả bóng lấy ra có đủ ba màu mà không có hai quả bóng nào có số thứ tự trùng nhau, ta xét các khả năng sau

1. Chọn 2 quả bóng xanh, 1 quả bóng vàng và 1 quả bóng đỏ:
    - Chọn 2 quả bóng xanh, có C_4^2 cách chọn.
    - Chọn 1 quả bóng vàng, có 3 cách chọn (bỏ đi các quả bóng vàng có số trùng với các số của 2 quả bóng xanh đã chọn).
    - Chọn 1 quả bóng đỏ, có 3 cách chọn (bỏ đi các quả bóng đỏ có số trùng với các số của 2 quả bóng xanh và 1 quả bóng vàng đã chọn). Trường hợp này có $C_4^2\cdot 3\cdot 3=54$ cách chọn.
2. Chọn 1 quả bóng xanh, 2 quả bóng vàng và 1 quả bóng đỏ. Trường hợp này có $4\cdot C_4^2\cdot 3=72$ cách chọn.
3. Chọn 1 quả bóng xanh, 1 quả bóng vàng và 2 quả bóng đỏ. Trường hợp này có $4\cdot 4\cdot C_4^2=96$ cách chọn.

Suy ra $n(A)=54+72+96=222$. Do đó $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{222}{1365}=\dfrac{74}{455}$. □

Câu 21. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên, mỗi số không có quá 3 chữ số và tổng các chữ số bằng 9. Lấy ngẫu nhiên một số từ S. Tính xác suất để số lấy ra có chữ số hàng trăm là 4.

Lời giải.
Cách 1: Liệt kê.

- Trường hợp 1. số có 1 chữ số lấy từ $\{9\}$ có 1 số.
- Trường hợp 2. số có 2 chữ số lấy từ
    - $\{0;9\}$ có 1 số.
    - $\{1;8\},\{2;7\},\{3;6\},\{4;5\}$ có $2\cdot 4=8$ số.
- Trường hợp 3. số có 3 chữ số lấy từ
    - $\{0;0;9\},\{3;3;3\}$ có 2 số.
    - $\{0;1;8\},\{0;2;7\},\{0;3;6\},\{0;4;5\}$ có $4\cdot 4=16$ số.
    - $\{1;1;7\},\{2;2;5\},\{4;4;1\}$ có $3\cdot 3=9$ số.
    - $\{1;2;6\},\{1;3;5\},\{2;3;4\}$ có $3\cdot 6=18$ số

Ta có không gian mẫu $n(\Omega)=1+1+8+2+16+9+18=55$ số.
Gọi A là biến cố "Số được lấy ra là số tự nhiên có 3 chữ số, tổng các chữ số bằng 9 và chữ số hàng trăm bằng 4".
Ta được $n(A)=6$.
Vậy ta có $P(A)=\dfrac{6}{55}$.
Cách 2: dùng vách ngăn.
Ta có $n(\Omega)=1+C_9^1+C_9^2+C_9^1=55$.
Ta có $n(A)=C_6^1=6$. □

Câu 22. Cho một đa giác đều n đỉnh (n lẻ, $n \geqslant 3$). Chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh của đa giác đều đó. Gọi P là xác suất sao cho 3 đỉnh đó tạo thành một tam giác tù. Tìm n biết $P = \frac{45}{62}$.

Lời giải.
Đa giác đều n đỉnh nội tiếp được trong một đường tròn.
Chọn đỉnh thứ nhất của tam giác. Có n cách chọn. Sau khi chọn đỉnh thứ nhất, để tạo thành một tam giác tù, hai đỉnh còn lại được chọn trong số $\frac{n-1}{2}$ đỉnh nằm trên cùng một nửa đường tròn với đỉnh đầu tiên, tức là có $C^2_{\frac{n-1}{2}}$ cách chọn hai đỉnh còn lại (sở dĩ chọn như thế vì khi ba đỉnh của một tam giác nằm trên cùng một nửa đường tròn thì chắc chắn trong tam giác có một góc nội tiếp chắn một cung lớn hơn nửa đường tròn và do đó góc đó là góc tù).Và vì có hai nửa đường tròn nên có tất cả $2C^2_{\frac{n-1}{2}}$ cách chọn hai đỉnh còn lại, tức là có $n \cdot 2C^2_{\frac{n-1}{2}}$ tam giác tù. Tuy nhiên, do sự xoay chuyển các đỉnh nên mỗi tam giác được tính 2 lần. Như vậy có tất cả $n \cdot C^2_{\frac{m-1}{2}} = \frac{n(n-1)(n-3)}{8}$ tam giác tù.
Trong khi đó có tất cả $C^3_n = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ tam giác.
Vậy ta có $P = \frac{3(n-3)}{4(n-2)} = \frac{45}{62} \Leftrightarrow n = 33 \Rightarrow n$ có 4 ước nguyên dương. □

Câu 23. Từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ lập số tự nhiên có 8 chữ số đôi một khác nhau. Tính xác suất để số được lập chia hết cho 1111.

Lời giải.
Gọi số cần lập chia hết cho 1111 là $\overline{a_1a_2\ldots a_8}$.
Do $1 + 2 + \ldots + 8 = 36 \vdots 9$ nên $\overline{a_1a_2\ldots a_8} \vdots 9 \Rightarrow \overline{a_1a_2\ldots a_8} \vdots 9999$.
Lại có $\overline{a_1a_2\ldots a_8} = 10^4 \cdot \overline{a_1a_2a_3a_4} + \overline{a_5a_6a_7a_8} = 9999 \cdot \overline{a_1a_2a_3a_4} + \left(\overline{a_1a_2a_3a_4} + \overline{a_5a_6a_7a_8}\right)$.
Suy ra $\left(\overline{a_1a_2a_3a_4} + \overline{a_5a_6a_7a_8}\right) \vdots 9$.
Mặt khác $0 < \overline{a_1a_2a_3a_4} + \overline{a_5a_6a_7a_8} < 2 \cdot 9999 \Rightarrow \overline{a_1a_2a_3a_4} + \overline{a_5a_6a_7a_8} = 9999$.
Suy ra $(a_1 + a_5) = (a_2 + a_6) = (a_3 + a_7) + (a_4 + a_8) = 9$.
Như vậy các cặp $(a_1; a_5), (a_2; a_6), (a_3; a_7), (a_4; a_8)$ được lấy từ các bộ $(1; 8), (2; 7), (3; 6), (4; 5)$.
Ta có 4! cách xếp vị trí cho 4 bộ số trên, mỗi vị trí của 1 bộ số đó thì có 2! cách đổi vị trí cho 2 chữ số tương ứng đó.
Như vậy có tất cả $4! \cdot 2^4$ số thỏa mãn.
Vậy xác suất cần tính là $\frac{4! \cdot 2^4}{8!} = \frac{1}{105}$. □

Câu 24. Gọi X là tập hợp gồm 27 số tự nhiên từ 1 đến 27. Chọn ngẫu nhiên ba phần tử của tập X. Tính xác suất để ba phần tử được chọn luôn hơn kém nhau ít nhất 3 đơn vị.

Lời giải.
Đặt $T = \{(a_1; a_2; a_3) \,|a_1, a_2, a_3 \in A; a_1 < a_2 < a_3; a_2 - a_1 \geqslant 3; a_3 - a_2 \geqslant 3\}$.
Với mỗi bộ (a_1, a_2, a_3), xét tương ứng với bộ (b_1, b_2, b_3) cho bởi $b_1 = a_1; b_2 = a_2 - 3; b_3 = a_3 - 4$.
Lúc này ta có: $1 \leqslant b_1 < b_2 < b_3 \leqslant 23$ và tương ứng này là tương ứng $1 - 1$ do

- Với mỗi bộ $(a_1; a_2; a_3)$ cho tương ứng với một bộ (b_1, b_2, b_3) bởi công thức $b_1 = a_1$; $b_2 = a_2 - 3$; $b_3 = a_3 - 4$.
- Ngược lại, với mỗi bộ (b_1, b_2, b_3) cho tương ứng với một bộ $(a_1; a_2; a_3)$ bởi công thức $a_1 = b_1$; $a_2 = b_2 + 3$; $a_3 = b_3 + 4$.

Đặt $B = \{1;2;3;4;5;6;7;\ldots;22;23\}$. Tập các bộ (b_1, b_2, b_3) là các tập con có 3 phần tử của B.
Vậy số tập con $(a_1;a_2;a_3)$ cần tìm là C_{23}^3. Xác suất cần tìm là $\dfrac{C_{23}^3}{C_{29}^3} = \dfrac{1771}{2925}$. □

Câu 25. Có tất cả bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số $\overline{abc}$ sao cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác cân?

Lời giải.
Nếu a, b, c là ba cạnh của một tam giác, thì tất cả phải khác 0 và $a, b, c \in \{1;2;\ldots;9\}$.

- Nếu tam giác tạo thành là tam giác đều, có 9 số có tính chất như vậy.
- Nếu tam giác tạo thành là cân nhưng không đều. Trong số đó có đúng 2 chữ số khác nhau trong 3 chữ số. Gọi chúng là a và b. Số các cặp (a, b) là $2 \cdot C_9^2$. Nhưng nếu số lớn hơn (chẳng hạn là a) là độ dài cạnh đáy thì a phải thỏa mãn điều kiện $b < a < 2b$ để đảm bảo bất đẳng thức tam giác. Tất cả các cặp không thỏa mãn điều kiện được liệt kê dưới bảng sau (có 20 cặp).

a	9	8	7	6	5	4	3	2	1
b	$4,3,2,1$	$4,3,2,1$	$3,2,1$	$3,2,1$	$2,1$	$2,1$	1	1	

  Mặt khác, có C_3^2 số được lập từ một cặp (a, b) cho trước. Suy ra có $C_3^2\left(2 \cdot C_9^2 - 20\right) = 156$ số.

Vậy số các số thỏa mãn là $9 + 156 = 165$. □

Câu 26. Cho đa giác đều n đỉnh (n lẻ, $n \geqslant 3$). Chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh của đa giác đều đó. Gọi P là xác suất sao cho 3 đỉnh đó tạo thành một tam giác tù. Tìm n biết rằng $P = \dfrac{45}{62}$.

Lời giải.
Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega) = C_n^3$. Giả sử chọn được một tam giác tù ABC với góc A nhọn, B tù và C nhọn. Chọn một đỉnh bất kì lấy làm đỉnh A có n cách. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp đa giác đều. Kẻ đường kính AA', chia đường tròn thành hai phần (trái và phải). Do n lẻ nên A' không phải là đỉnh của đa giác đều. Để tạo thành tam giác tù thì hai đỉnh còn lại được chọn sẽ hoặc cùng nằm bên trái hoặc cùng nằm bên phải. Số cách chọn hai đỉnh cùng ở một bên là $2C_{\frac{n-1}{2}}^2$. Ứng với mỗi tam giác vai trò góc nhọn của A và C như nhau nên số tam giác tù tạo thành là

$$\frac{n \cdot 2C_{\frac{n-1}{2}}^2}{2} = n \cdot C_{\frac{n-1}{2}}^2.$$

Ta có $P = \dfrac{n \cdot C_{\frac{n-1}{2}}^2}{C_n^3} = \dfrac{45}{62} \Leftrightarrow \dfrac{n\left(\dfrac{n-1}{2}\right)\left(\dfrac{n-1}{2} - 1\right)}{2} \cdot \dfrac{6}{n(n-1)(n-2)} = \dfrac{45}{62} \Leftrightarrow n = 33$. □

Câu 27. Cho đa giác đều $4n$ đỉnh ($n \geqslant 2$). Chọn ngẫu hiên bốn đỉnh từ các đỉnh của đa giác đã cho. Tìm n biết rằng xác suất để bốn đỉnh được chọn là bốn đỉnh của một hình chữ nhật không phải là hình vuông bằng $\dfrac{6}{455}$.

Lời giải.
Gọi A là biến cố để 4 đỉnh được chọn là bốn đỉnh của một hình chữ nhật không phải là hình vuông. Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = C_{4n}^4$. Đa giác đều $4n$ đỉnh có $2n$ đường chéo là đường kính nên sẽ có C_{2n}^2 cách chọn hai đường kính và đó cũng là số cách chọn bốn đỉnh trên là bốn đỉnh của một hình chữ nhật. Trong $2n$ đường kính đó có chỉ có n cặp đường chéo vuông góc với nhau nên trong số hình chữ nhật trên

có đúng n hình vuông. Do đó số hình chữ nhật không phải là hình vuông là $n(A) = C_{2n}^2 - n$. Theo đề bài ta có

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_{2n}^2 - n}{C_{4n}^4} = \frac{6}{455} \Leftrightarrow 455(n-1) = (4n-1)(2n-1)(4n-3).$$

$$\Leftrightarrow 32n^3 - 48n^2 - 433n + 452 = 0 \Rightarrow n = 4.$$

Vậy $n = 4$. □

Câu 28. Trên giá sách có 20 cuốn sách. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 3 cuốn sách sao cho giữa hai cuốn lấy được bất kì luôn có ít nhất hai cuốn không được lấy.

Lời giải.
Đánh số thứ tự cho các cuốn sách lần lượt từ 1 đến 20.
Việc chọn ra ba cuốn sách chính là việc chọn ra ba số $1 \leqslant a_1 < a_2 - 2 < a_3 - 4 \leqslant 16$.
Vậy bài toán chính là việc chọn ra ba số nguyên phân biệt $a_1, a_2 - 2, a_3 - 4 \in [1;16]$.
Do đó có C_{16}^3 cách chọn thỏa mãn. □

Câu 29. Lấy ngẫu nhiên một số tự nhiên có 5 chữ số. Tính xác suất để chọn được số tự nhiên có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ mà $a_1 \leqslant a_2 + 1 \leqslant a_3 - 3 < a_4 \leqslant a_5 + 2$.

Lời giải.
Số các số tự nhiên có 5 chữ số bằng $99999 - 10000 + 1 = 90000$ (số). Suy ra $n(\Omega) = 90000$.
Gọi A là biến cố: "số chọn được có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ mà $a_1 \leqslant a_2 + 1 \leqslant a_3 - 3 < a_4 \leqslant a_5 + 2$".
Theo giả thiết bài toán, ta có

$$\begin{aligned} & 1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 + 1 \leqslant a_3 - 3 < a_4 \leqslant a_5 + 2 \\ \Leftrightarrow\ & 1 \leqslant a_1 < a_2 + 2 < a_3 - 1 < a_4 + 2 < a_5 + 5 \leqslant 14. \end{aligned}$$

Suy ra số cách chọn bộ $(a_1, a_2, \ldots, a_5)$ bằng số cách chọn ra 5 phần tử phân biệt trong 14 phần tử $\{1;2;3;\ldots;14\}$. Từ đó $n(A) = C_{14}^5 = 2002$.
Vậy xác suất cần tìm bằng $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{2002}{90000} = \dfrac{1001}{45000}$. □

Câu 30. Cho A là tập các số tự nhiên có 7 chữ số. Lấy một số bất kì của tập hợp A. Tính xác suất để lấy được số lẻ và chia hết cho 9.

Lời giải.
Xét số có dạng $a = \overline{a_1a_2a_3\ldots a_7}$ với $a_1 \neq 0, a_1, a_2, \ldots, a_7 \in \{0;1;2;\ldots;9\}$. Ta sẽ đếm số các số dạng này thỏa mãn a lẻ và chia hết cho 9. Trước hết a_7 có 5 cách chọn. Ta chọn các số $a_2, a_3, \ldots, a_6$ một cách bất kì, sẽ có 10^5 cách chọn. Chú ý rằng a chia hết cho 9 khi và chỉ khi $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_7$ chia hết cho 9. Mặt khác tổng số dư của tổng $a_2 + a_3 + \cdots + a_7$ khi chia cho 9 thuộc vào tập $\{0;1;2;\ldots;8\}$, với mỗi trường hợp đó ta đều có duy nhất một cách chọn $a_1 \in \{1;2;3;\ldots;9\}$ sao cho tổng S chia hết cho 9. Do đó số cách số a lẻ chia hết cho 9 là $5 \cdot 10^5$. Mà có $9 \cdot 10^6$ số tự nhiên có 7 chữ số nên xác suất cần tìm là $\dfrac{5 \cdot 10^5}{9 \cdot 10^6} = \dfrac{1}{18}$. □

Câu 31. Mồng 3 Mậu Tuất vừa rồi ông Đại Gia đến chúc tết và lì xì cho 3 anh em trai tôi. Trong ví của ông Đại Gia chỉ có 4 tờ mệnh giá 200000 đồng và 5 tờ mệnh giá 100000 đồng được sắp xếp một cách lộn xộn trong ví. Ông gọi 3 anh em tôi đứng xếp hàng có thứ tự, anh Cả đứng trước lì xì trước, anh Hai đứng sau lì xì sau và tôi thằng Út đứng sau cùng nên lì xì sau cùng. Hỏi xác suất p bằng bao nhiêu để tôi nhận tiền lì xì có mệnh giá lớn nhất, biết rằng ông Đại Gia lì xì bằng cách rút ngẫu nhiên cho anh em tôi mỗi người chỉ một tờ giấy tiền trong túi của ông?

Lời giải.
Khi Út nhận tờ tiền có mệnh giá lớn nhất có các trường hợp sau xảy ra.

- Trường hợp 1. anh Cả và anh hai nhận mỗi người 100000 đồng, Út nhận 200000 đồng, xác suất của trường hợp này là $\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}=\frac{10}{63}$.
- Trường hợp 2. anh Cả nhận 100000 đồng và anh hai nhận 200000 đồng, Út nhận 200000 đồng, xác suất của trường hợp này là $\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}=\frac{5}{42}$.
- Trường hợp 3. anh Cả nhận 200000 đồng và anh hai nhận 100000 đồng, Út nhận 200000 đồng, xác suất của trường hợp này là $\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}=\frac{5}{42}$.
- Trường hợp 4. cả ba người đều nhận 200000 đồng, xác suất của trường hợp này là $\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}=\frac{5}{21}$.

Vậy xác suất để Út nhận tờ tiền có mệnh giá lớn nhất là $\frac{10}{63}+\frac{5}{42}+\frac{5}{42}+\frac{5}{21}=\frac{4}{9}$.
Chú ý. Ta có công thức $P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)$, trong đó $P(B|A)$ là xác suất của biến cố B khi A đã xảy ra, $P(C|AB)$ là xác suất của biến cố C khi A và B đã xảy ra. □

Câu 32. Gieo đồng thời ba con súc sắc. Bạn là người thắng cuộc nếu xuất hiện ít nhất hai mặt 6 chấm. Tính xác suất để trong 6 lần chơi thắng ít nhất bốn lần gần.

Lời giải.
Trong một lần chơi

- Xác suất để hai trong ba con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm là $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot 3=\frac{5}{72}$
- Xác suất để cả ba con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm là $\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}$.

Vậy xác suất thắng trong một lần chơi là $\frac{5}{72}+\frac{1}{216}=\frac{2}{27}$. Do đó, xác suất thua trong một lần chơi là $\frac{25}{27}$.
Trong 6 lần chơi

- Xác suất để thắng 4 lần là $C_6^4\cdot\left(\frac{2}{27}\right)^4\cdot\left(\frac{25}{27}\right)^2$.
- Xác suất để thắng 5 lần là $C_6^5\cdot\left(\frac{2}{27}\right)^5\cdot\left(\frac{25}{27}\right)$.
- Xác suất để thắng 6 lần là $\left(\frac{2}{27}\right)^6$.

Vậy xác suất cần tính là $C_6^4\cdot\left(\frac{2}{27}\right)^4\cdot\left(\frac{25}{27}\right)^2+C_6^5\cdot\left(\frac{2}{27}\right)^5\cdot\left(\frac{25}{27}\right)+\left(\frac{2}{27}\right)^6\approx 4\cdot 10^{-4}$. □

Câu 33. Cho các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập một số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau dạng $\overline{abcdef}$. Tính xác suất để số lập được thỏa mãn $a+b=c+d=e+f$?

Lời giải.
Lập một số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau, có không gian mẫu là $n_{(\Omega)}=6\times A_6^5=4320$.
Gọi A là biến cố lấy một số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau thỏa mãn bài toán.

- Trường hợp 1. các cặp số thỏa mãn điều kiện $a+b=c+d=e+f$ là $(0;6)$, $(1;5)$, $(2;4)$.
  - Với $(a;b)=(0;6)$, ta có
    - $(c;d)=(1;5)$ và $(e;f)=(2;4)$ có $1\times 2\times 2=4$ (số).

    * $(c;d)=(2;4)$ và $(e;f)=(1;5)$ có $1\times2\times2=4$ (số).

  Vậy có 8 cách.

  – Với $(a;b)=(1;5)$, ta có

    * $(c;d)=(0;6)$ và $(e;f)=(2;4)$ có $2\times2\times2=8$ (số).
    * $(c;d)=(2;4)$ và $(e;f)=(0;6)$ có $2\times2\times2=8$ (số).

  Vậy có 16 cách.

  – Tương tự với cặp số $(a;b)=(2;4)$ ta cũng có 16 cách.

- Trường hợp 2. các cặp số thỏa mãn điều kiện $a+b=c+d=e+f$ là $(2;5)$, $(3;4)$, $(1;6)$. Tương tự với trường hợp $(a;b)=(1;5)$, trường hợp 2 có $16\times3=48$ (số).

- Trường hợp 3. các cặp số thỏa mãn điều kiện $a+b=c+d=e+f$ là $(2;3)$, $(1;4)$, $(0;5)$. Tương tự trường hợp 1, trường hợp 3 cũng có 40 (số).

Vậy có 128 số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau thỏa mãn $a+b=c+d=e+f$.
Suy ra xác xuất để lập được một số có 6 chữ số thỏa mãn $a+b=c+d=e+f$ là $P(A)=\dfrac{128}{4320}=\dfrac{4}{135}$. □

Câu 34. Lấy ngẫu nhiên 3 đỉnh trong 2018 đỉnh của đa giác đều 2018 cạnh. Tính xác suất để 3 đỉnh lấy được tạo thành một tam giác không nhọn.

Lời giải.
Trường hợp 1. Ba điểm được chọn tạo thành tam giác vuông:
Chọn 2 đỉnh không phải là đỉnh góc vuông có 1009 cách (Có 1009 đường chéo đi qua tâm hình tròn ngoại tiếp đa giác). Chọn đỉnh còn lại có 2016 cách. Số tam giác vuông là: $1009\cdot2016=2034144$.
Trường hợp 2. Ba điểm được chọn tạo thành tam giác tù (Giả sử tam giác ABC có góc A,C nhọn và góc B tù). Chọn đỉnh A có 2018 cách. Sau đó kẻ đường kính qua điểm vừa chọn chia đường tròn thành hai phần. Hai đỉnh còn lại nằm về cùng một phía so với đường kính vừa kẻ. Chọn hai đỉnh còn lại có $2\cdot C_{1008}^2$. Ứng với mỗi tam giác, vai trò của hai góc nhọn là như nhau nên số tam giác tù được tạo thành là $\dfrac{2018\cdot 2C_{1008}^2}{2}=1024191504$.
Số tam giác không nhọn được tạo thành là: $2034144+1024191504=1026225648$.
Gọi A: "Chọn 3 đỉnh tạo thành một tam giác không nhọn "$\Rightarrow n(A)=1026225648$.
Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega)=C_{2018}^3=1367622816$.
Vậy $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=0,75$. □

Câu 35. Cho đa giác đều 20 đỉnh. Lấy ngẫu nhiên 4 đỉnh trong các đỉnh của đa giác. Tính xác suất để 4 đỉnh lấy được tạo thành tứ giác có 2 góc ở 2 đỉnh kề chung một cạnh của tứ giác là 2 góc tù.

Lời giải.
Lấy ngẫu nhiên 4 đỉnh trong các đỉnh cảu đa giác đều có $C_{20}^4=4845$ cách.
Nhận xét: Tổng hai góc đối của tứ giác nội tiếp là 180°. Do đó, tứ giác có hai góc ở hai đỉnh kề chung một cạnh của tứ giác là hai góc tù nhau khi và chỉ khi tứ giác đó không có góc vuông.
Đa giác đều 20 đỉnh có 10 đường chéo qua tâm. Tứ giác có góc vuông phải có ít nhất một đường chéo qua tâm. Suy ra có $10.9.9-C_{10}^2$ tứ giác có góc vuông.
Vậy số cách chọn tứ giác không có góc vuông là $C_{20}^4-\left(10.9.9-C_{10}^2\right)=4080$ (cách).
Xác suất cần tìm là $P=\dfrac{4080}{4845}=\dfrac{16}{19}$. □

Câu 36. Chọn ngẫu nhiên ba đỉnh từ các đỉnh của một đa giác đều nội tiếp đường tròn tâm O, biết đa giác có 170 đường chéo. Tính xác suất P của biến cố chọn được ba đỉnh sao cho ba đỉnh được chọn tạo thành một tam giác vuông không cân.

Lời giải.
Gọi n là số đỉnh của đa giác đều $(n \in \mathbb{N}^*)$. Ta đi tìm số đường chéo của đa giác đều.
Số cách chọn 2 đỉnh từ n đỉnh là C_n^2. Do đó số đường chéo của đa giác đều bằng $C_n^2 - n = 170$.
Suy ra $\dfrac{n!}{2!(n-2)!} - n = 170 \Leftrightarrow \dfrac{n^2-n}{2} - n = 170 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 340 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 20 (\text{nhận}) \\ x = -17 (\text{loại}) \end{array}\right.$.
Số phần tử của không gian mẫu: Chọn 3 đỉnh từ 20 đỉnh có $C_{20}^3 = 1140$ cách.
Gọi A là biến cố: Ba đỉnh được chọn tạo thành một tam giác vuông không cân.

- Để 3 đỉnh được chọn là tam giác vuông ta cần chọn cạnh huyền từ 10 đường kính của đường tròn tâm O: có 10 cách.
- Sau khi chọn được cạnh huyền của tam giác vuông ta còn lại 18 đỉnh, (giả sử đó là đỉnh thứ 1 và thứ 11 của đa giác đều) ta cần chọn điểm còn lại để tạo thành tam giác vuông không cân. Cần chọn các đỉnh khác với đỉnh thứ 6 và 16, suy ra có 16 cách chọn.
- Số cách chọn để ba đỉnh tạo thành một tam giác vuông không cân là $10 \cdot 16 = 160$ cách.

Vậy $P(A) = \dfrac{160}{1140} = \dfrac{8}{57}$. □

Câu 37. Có bao nhiêu cách phân phát 10 phần quà giống nhau cho 6 học sinh, sao cho mỗi học sinh có ít nhất một phần thưởng?

Lời giải.
Ta sắp xếp 10 phần quà thành hàng ngang, khi đó sẽ có 9 chỗ trống giữa các phần quà. Mỗi cách chia quà tương ứng với một cách chọn ra 5 chỗ trống từ 9 chỗ trống giữa các phần quà. Như vậy có $C_9^5 = 126$ (cách) chia quà. □

Câu 38. Chọn ngẫu nhiên 6 số từ tập $M = \{1; 2; 3; ...; 2018\}$. Tính xác suất để chọn được 6 số lập thành cấp số nhân tăng có công bội là một số nguyên dương.

Lời giải.
Số cách chọn 6 số bất kì từ tập M là C_{2018}^6.
Giả sử dãy số là cấp số nhân có số hạng đầu tiên là u_1 $(u_1 \geqslant 1)$ và công bội $q > 1$, suy ra số hạng $u_6 = u_1 \cdot q^5$.
Theo bài ra ta có $u_6 \leqslant 2018$. $(*)$

- Trường hợp 1. $q = 2$, theo $(*)$ ta có $u_1 \leqslant \dfrac{2018}{2^5} = 63{,}0625$, suy ra có 63 cách chọn u_1, suy ra có 63 dãy số có công bội bằng 2.
- Trường hợp 2. $q = 3$, theo $(*)$ ta có $u_1 \leqslant \dfrac{2018}{3^5} = \dfrac{2018}{243} \approx 8{,}305$, suy ra có 8 cách chọn u_1, suy ra có 8 dãy số có công bội bằng 3.
- Trường hợp 3. $q = 4$, theo $(*)$ ta có $u_1 \leqslant \dfrac{2018}{4^5} = \dfrac{2018}{1024} \approx 1{,}97$, suy ra có 1 cách chọn u_1, suy ra có 1 dãy số có công bội bằng 4.
- Trường hợp 4. $q = 5$, theo $(*)$ ta có $u_1 \leqslant \dfrac{2018}{5^5} = 0{,}64576$, suy ra có 0 cách chọn u_1.

Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{63 + 8 + 1}{C_{2018}^6} = \dfrac{72}{C_{2018}^6}$. □

Câu 39. Cho A là tập hợp tất cả các số có năm chữ số đôi một khác nhau được lập từ các số $0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$. Lấy ngẫu nhiên một số từ A. Tính xác suất để lấy được một số luôn có mặt hai chữ số $1; 7$ và hai chữ số đó đứng kề nhau, chữ số 1 nằm bên trái chữ số 7.

Lời giải.
Số các số có năm chữ số lập được là $7 \cdot A_7^4 = 5880$ số.
Xét tập hợp A các số có dạng $\overline{abcde}$, ta xét các trường hợp

- $a = 1$, có một cách sắp xếp cặp 17, ba vị trí còn lại có $A_6^3 \Rightarrow$ có $1 \cdot A_6^3 = 120$ số.
- $a \neq 1$, khi đó a có 5 cách chọn do $a \neq 0; 1; 7$.
  Xếp cặp 17 có 3 cách, hai vị trí còn lại có $A_5^2 \Rightarrow$ có $5 \cdot 3 \cdot A_5^2 = 300$ số.

Khi đó tập hợp A có $120 + 300 = 420$ số $\Rightarrow P(A) = \dfrac{420}{5880} = \dfrac{1}{14}$. □

Câu 40. Cho 16 phiếu ghi các số thứ tự từ 1 đến 16. Lấy lần lượt 8 phiếu không hoàn lại, gọi a_i là số ghi trên phiếu thứ i lấy được $(1 \leqslant i \leqslant 8)$. Tính xác suất P để 8 phiếu lấy được thỏa mãn $a_1 < a_2 < \cdots < a_8$ và không có bất kỳ hai phiếu nào có tổng các số bằng 17.

Lời giải.
Ta có $|\Omega| = A_{16}^8$. Do 8 phiếu lấy được thỏa mãn điều kiện $a_1 < a_2 < \cdots < a_8$, nên ta có thể xem 8 phiếu lấy được như là một tập con của tập có 16 phần tử.
Gọi $S = \{1, 2, 3, \ldots, 16\}$ và $E \subset S$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Từ 1 đến 16 có 8 cặp số có tổng bằng 17 chia thành hai tập tương ứng là $M = \{1, 2, \ldots, 8\}$ và $N = \{16, 15, \ldots, 9\}$. Nếu E có k phần tử thuộc M thì có C_8^k cách chọn và khi đó E sẽ có tối đa $8 - k$ phần tử thuộc N nên có 2^{8-k} cách chọn, với $k \in \{0, 1, ..., 8\}$.
Vậy số tập hợp E thỏa mãn yêu cầu bài toán là $C_8^0 \cdot 2^8 + C_8^1 \cdot 2^7 + \cdots + C_8^8 \cdot 2^0 = 3 \Rightarrow P = \dfrac{3^8}{A_{16}^8}$. □

Câu 41. Xếp 10 quyển sách tham khảo gồm 1 quyển sách Văn, 3 quyển sách Tiếng Anh và 6 quyển sách Toán (trong đó có 2 quyển Toán T_1 và T_2) thành một hàng ngang trên giá sách. Tính xác suất để mỗi quyển sách Tiếng Anh xếp giữa hai quyển sách Toán, đồng thời 2 quyển Toán T_1 và T_2 luôn cạnh nhau.

Lời giải.
Số cách xếp 10 quyển sách tham khảo bất kì là: 10!.
Số cách xếp thỏa mãn bài toán: $2 \cdot 5! A_4^3 \cdot 3$.
2 quyển Toán T_1 và T_2 coi như 1 vị trí (có 2 cách xếp), như vậy có 5 vị trí cho sách Toán.
Xếp sách Toán trước: có 5! cách.
Giữa các quyển sách Toán có 4 vị trí trống, ta xếp 3 sách Anh: có A_4^3 cách.
Xếp quyển sách Văn cuối cùng: có 3 vị trí.
Vậy xác suất cần tìm là $P = \dfrac{2 \cdot 5! A_4^3 \cdot 3}{10!} = \dfrac{1}{210}$. □

Câu 42. Trong một buổi dạ hội có 10 thành viên nam và 12 thành viên nữ, trong đó có 2 cặp vợ chồng. Ban tổ chức muốn chọn ra 7 đôi, mỗi đôi gồm 1 nam và 1 nữ để tham gia trò chơi. Tính xác suất để trong 7 đôi đó, có đúng một đôi là cặp vợ chồng. Biết rằng trong trò chơi, người vợ có thể ghép đôi với một người khác chồng mình và người chồng có thể ghép đôi với một người khác vợ mình.

Lời giải.
Số cách chọn ngẫu nhiên 7 đôi nam nữ là $C_{10}^7 \cdot C_{12}^7 \cdot 7!$. Để chọn 7 đôi nam nữ, sao cho có đúng một đôi ghép thành cặp vợ chồng có các trường hợp sau

- **Trường hợp 1.** Chọn đúng một cặp là vợ chồng, 6 người nam và 6 người nữ từ nhóm không là vợ chồng ghép thành 6 cặp, số cách ghép là $2 \cdot C_8^6 \cdot C_{10}^6 \cdot 6!$.
- **Trường hợp 2.** Chọn một cặp là vợ chồng và 1 người nam trong nhóm vợ chồng, 5 người nam và 6 người nữ từ nhóm không là vợ chồng ghép thành 6 cặp, số cách ghép là $2 \cdot C_8^5 \cdot C_{10}^6 \cdot 6!$.

- **Trường hợp 3.** Chọn một cặp là vợ chồng và 1 người nữ trong nhóm vợ chồng, 5 người nữ và 6 người nam từ nhóm không là vợ chồng ghép thành 6 cặp, số cách ghép là $2 \cdot C_{10}^{5} \cdot C_{8}^{6} \cdot 6!$.
- **Trường hợp 4.** Lấy ra cả hai cặp vợ chồng và 5 nam, 5 nữ từ nhóm không là vợ chồng, ghép thành 7 cặp trong đó có đúng một cặp là vợ chồng, số cách ghép là $2 \cdot C_{8}^{5} \cdot C_{10}^{5} \cdot 5 \cdot 5!$.

Xác suất cần tìm là

$$P = \frac{2 \cdot C_8^6 \cdot C_{10}^6 \cdot 6! + 2 \cdot C_8^5 \cdot C_{10}^6 \cdot 6! + 2 \cdot C_{10}^5 \cdot C_8^6 \cdot 6! + 2 \cdot C_8^5 \cdot C_{10}^5 \cdot 5 \cdot 5!}{C_{10}^7 \cdot C_{12}^7 \cdot 7!} = \frac{217}{1980}$$

□

Câu 43. Có hai cái giỏ đựng trứng gồm giỏ A và giỏ B, các quả trứng trong mỗi giỏ đều có hai loại là trứng lành và trứng hỏng. Tổng số trứng trong hai giỏ là 20 quả và số trứng trong giỏ A nhiều hơn số trứng trong giỏ B. Lấy ngẫu nhiên mỗi giỏ một quả trứng, biết xác suất để lấy được hai quả trứng lành là $\frac{55}{84}$. Tìm số trứng lành trong giỏ A.

Lời giải.
Gọi số trứng trong giỏ A là x ($x \geqslant 11$ và $x \in \mathbb{N}^*$) (do số trứng trong giỏ A nhiều hơn số trứng trong giỏ B). Suy ra số trứng trong giỏ B là $20 - x$. Gọi số trứng lành trong giỏ A là a, số trứng lành trong giỏ B là b. Khi đó, xác suất để lấy được một quả trứng lành từ giỏ A là $\frac{a}{x}$, xác suất để lấy được một quả trứng lành từ giỏ B là $\frac{b}{20-x}$. Vậy khi lấy ngẫu nhiên mỗi giỏ một quả trứng thì xác suất để lấy được hai quả trứng lành là

$$\frac{a}{x} \cdot \frac{b}{20-x} = \frac{55}{84} \Leftrightarrow ab = \frac{55x(20-x)}{84}$$

Do $ab \in \mathbb{N}^*$ và $(55; 84) = 1$ nên $x(20-x) \vdots 84$ (1)
$\Rightarrow x(20-x) \geqslant 84 \Leftrightarrow 6 \leqslant x \leqslant 14$ suy ra $11 \leqslant x \leqslant 14$.
Thử lại các giá trị $x = 11, x = 12, x = 13, x = 14$ lần lượt vào (1) ta được $x = 14$ thỏa mãn suy ra $20 - x = 6$ và $ab = 55$. Kết hợp với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $1 \leqslant a \leqslant 14, 1 \leqslant b \leqslant 6$ nên $a = 11$ và $b = 5$.
Vậy số trứng lành trong giỏ A là 11. □

Câu 44. Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6 lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 8 chữ số sao cho trong mỗi số đó có đúng ba chữ số 1, các chữ số còn lại đôi một khác nhau và hai chữ số chẵn không đứng cạnh nhau?

Lời giải.
Số hoán vị 5 chữ số lẻ 1; 1; 1; 3; 5 là $\frac{5!}{3!}$.
Ứng với mỗi hoán vị có 6 vị trí đầu, cuối và xen kẽ giữa hai chữ số lẻ. Do đó có A_6^3 cách sắp xếp ba chữ số chẵn 2; 4; 6 vào trong 6 vị trí đó để được số thỏa mãn đề bài. Vậy số các số thỏa mãn đề bài là $\frac{5!}{3!} \cdot A_6^3 = 2400$.
□

Câu 45. 2 học sinh lớp A, 3 học sinh lớp B và 4 học sinh lớp C xếp thành một hàng ngang sao cho giữa hai học sinh lớp A không có học sinh nào của lớp C. Hỏi có bao nhiêu cách xếp hàng như vậy?

Lời giải.
Xếp 4 học sinh lớp C thành một hàng ngang có 4! cách.
Xem 2 học sinh lớp A là 1 và xếp vào 5 khoảng trống do 4 học sinh lớp C tạo ra ta có $5 \times 2!$ cách.
Xếp 3 học sinh lớp B tùy ý vào 7 khoảng trống do các học sinh lớp A và C tạo ra (có thể xếp nhiều hơn 1 học sinh vào 1 khoảng trống) ta có $7 \times 8 \times 9$ cách.
Theo quy tắc nhân ta có $4! \times 5 \times 2! \times 7 \times 8 \times 9 = 120960$ cách. □

Câu 46. Ba bạn Nhung, Nhâm, Việt mỗi bạn viết lên bảng một số tự nhiên nhỏ hơn 32. Tính xác suất để tích ba số được viết lên bảng chia hết cho 4 nhưng không chia hết cho 16.

Lời giải.
Số phần tử không gian mẫu 32^3. Để tích ba số viết ra chia hết cho 4 nhưng không chia hết cho 16 ta xét hai trường hợp

1. Có một bạn viết ra một số chia hết cho 4 nhưng không chia hết cho 16 tức là viết ra một số thuộc tập $\{4; 8; 12; 20; 24; 28\}$ có 6 số như vậy. Khi đó có hai trường hợp
   - Cả hai bạn còn lại đều viết ra hai số lẻ có 16 số lẻ. Suy ra có $6 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 3 = 4608$ cách.
   - Một bạn viết ra 1 số lẻ và bạn còn lại viết ra 1 số chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4, có 8 số như vậy. Trường hợp này phải bỏ đi số 8 ở tập trên do đó có $5 \cdot 16 \cdot 8 \cdot 3! = 3840$.
2. Không có bạn nào viết ra số chia hết cho 4. Có hai trường hợp
   - 2 số chẵn không chia hết cho 4 và 1 lẻ có $8 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 3 = 3072$ cách.
   - 3 số chẵn không chia hết cho 4 có $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$ cách.

Xác suất thỏa mãn đề bài là $\dfrac{4608 + 3840 + 3072 + 512}{32^3} = \dfrac{47}{128}$. □

Câu 47. Một con châu chấu nhảy từ gốc tọa độ đến điểm có tọa độ là $A(9; 0)$ dọc theo trục Ox của hệ trục tọa độ Oxy. Hỏi con châu chấu có bao nhiêu cách nhảy để đến điểm A, biết mỗi lần nó có thể nhảy 1 bước hoặc 2 bước (1 bước có độ dài 1 đơn vị).

Lời giải.
Gọi a là số bước nhảy 1 bước, b là số bước nhảy 2 bước của con châu chấu với $a, b \in \mathbb{N}, 0 \leqslant a, b \leqslant 9$. Với mỗi cặp $(a; b)$ thì số cách di chuyển của châu chấu là C_{a+b}^{a} cách.
Theo giả thiết ta có $a + 2b = 9$, suy ra a lẻ và $a \in \{1; 3; 5; 7; 9\}$.

- Với $a = 1 \Rightarrow b = 4$: Số cách di chuyển của châu chấu là $C_5^1 = 5$ cách.
- Với $a = 3 \Rightarrow b = 3$: Số cách di chuyển của châu chấu là $C_6^3 = 20$ cách.
- Với $a = 5 \Rightarrow b = 2$: Số cách di chuyển của châu chấu là $C_7^5 = 21$ cách.
- Với $a = 7 \Rightarrow b = 1$: Số cách di chuyển của châu chấu là $C_7^8 = 8$ cách.
- Với $a = 9 \Rightarrow b = 0$: Số cách di chuyển của châu chấu là $C_9^9 = 1$ cách.

Vậy con châu chấu có cố cách di chuyển là $5 + 20 + 21 + 8 + 1 = 55$ cách. □

Câu 48. Trò chơi quay bánh xe số trong chương trình truyền hình "Hãy chọn giá đúng" của kênh VTV3 Đài truyền hình Việt Nam, bánh xe số có 20 nấc điểm: $5, 10, 15, ..., 100$ với vạch chia đều nhau và giả sử rằng khả năng chuyển từ nấc điểm đã có tới các nấc điểm còn lại là như nhau. Trong mỗi lượt chơi có 2 người tham gia, mỗi người được quyền chọn quay 1 hoặc 2 lần, và điểm số của người chơi được tính như sau

- Nếu người chơi chọn quay 1 lần thì điểm của người chơi là điểm quay được.
- Nếu người chơi chọn quay 2 lần và tổng điểm quay được không lớn hơn 100 thì điểm của người chơi là tổng điểm quay được.
- Nếu người chơi chọn quay 2 lần và tổng điểm quay được lớn hơn 100 thì điểm của người chơi là tổng điểm quay được trừ đi 100.

Luật chơi quy định, trong mỗi lượt chơi người nào có điểm số cao hơn sẽ thắng cuộc, hòa nhau sẽ chơi lại lượt khác. An và Bình cùng tham gia một lượt chơi, An chơi trước và có điểm số là 75. Tính xác suất để Bình thắng cuộc ngay ở lượt chơi này.

Lời giải.
Bình có 2 khả năng thắng cuộc

- Thắng cuộc sau lần quay thứ nhất. Nếu Bình quay vào một trong 5 nấc: $80, 85, 90, 95, 100$ thì sẽ thắng nên xác suất thắng cuộc của Bình trường hợp này là $P_1 = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.
- Thắng cuộc sau 2 lần quay. Nếu Bình quay lần 1 vào một trong 15 nấc: $5, 10, ..., 75$ thì sẽ phải quay thêm lần thứ 2. Ứng với mỗi nấc quay trong lần thứ nhất, Bình cũng có 5 nấc để thắng cuộc trong lần quay thứ 2, vì thế xác suất thắng cuộc của Bình trường hợp này là $P_2 = \frac{15 \times 5}{20 \times 20} = \frac{3}{16}$.

Từ đó, xác suất thắng cuộc của Bình là $P = P_1 + P_2 = \frac{7}{16}$. □

Câu 49. Chọn ngẫu nhiên ba số a, b, c trong tập hợp $S = \{1; 2; 3; \cdots; 20\}$. Tính xác suất để ba số tìm được thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2$ chia hết cho 3.

Lời giải.
Vì số chính phương chia 3 dư 1 hoặc 0 nên $a^2 + b^2 + c^2$ chia hết cho 3 chỉ có 2 khả năng xảy ra như sau

- **Trường hợp 1.** Cả 3 số a, b, c cùng chia hết cho 3.
- **Trường hợp 2.** Cả 3 số a, b, c cùng không chia hết cho 3.

Trong tập S gồm có 6 số chia hết cho 3 và 14 số không chia hết cho 3.
Xác suất để tìm được 3 số thoả mãn yêu cầu bài toán bằng $\frac{C_6^3 + C_{14}^3}{C_{20}^3} = \frac{32}{95}$.
Từ đó ta có $S = m + n = 32 + 95 = 127$. □

Câu 50. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Tại đỉnh A có một con sâu, mỗi lần di chuyển, nó bò theo cạnh của hình hộp chữ nhật và đi đến đỉnh kề với đỉnh nó đang đứng. Tính xác suất sao cho sau 9 lần di chuyển, nó đứng tại đỉnh C'.

Lời giải.

- Mỗi lần di chuyển, con sâu có 3 phương án đi nên số phần tử của không gian mẫu là 3^9.
- Ta gắn tọa độ điểm $A(0; 0; 0)$ và $C'(1; 1; 1)$. Mỗi lần di chuyển, tọa độ mà nó đang đứng thay đổi đúng một trong ba thành phần x hoặc y hoặc z và thay đổi từ 0 thành 1 hoặc từ 1 thành 0.
- Vì tọa độ ban đầu là $(0; 0; 0)$ và tọa độ kết thúc là $(1; 1; 1)$ nên số lần thay đổi ở mỗi thành phần là số lẻ và tổng số lần thay đổi bằng 9.
- Có thể thấy số lần thay đổi ở các thành phần là $1 - 7 - 1$; $3 - 3 - 3$; $3 - 5 - 1$ và các hoán vị của nó. Do đó, số đường đi là $3C_9^7 C_2^1 + C_9^3 C_6^3 + 3! C_9^5 C_4^3 = 4920$.

Vậy xác suất cần tìm là $P = \frac{4920}{3^9} = \frac{1640}{6561}$. □

Câu 51. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 5 chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S. Tính xác suất để chọn được một số mà trong số đó, chữ số đứng sau luôn lớn hơn hoặc bằng chữ số đứng trước và ba chữ số đứng giữa đôi một khác nhau.

Lời giải.

Số phần tử của tập S là $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90000$.
Chọn ngẫu nhiên một phần tử của tập Sta được $n(\Omega) = C^1_{90000}$.
Gọi biến cố A: "Chọn được một số mà trong số đó, chữ số đứng sau luôn lớn hơn hoặc bằng chữ số đứng trước và ba chữ số đứng giữa đôi một khác nhau".
Gọi số cần chọn có dạng $\overline{abcde}$ với $a, b, c, d, e \in \mathbb{N}$ và $1 \leqslant a \leqslant b < c < d \leqslant e \leqslant 9$.
Đặt $a_1 = a - 1, e_1 = e + 1$, ta có $0 \leqslant a_1 < b < c < d < e_1 \leqslant 10$.
Số các bộ số có dạng a_1bcde_1 với $0 \leqslant a_1 < b < c < d < e_1 \leqslant 10$ là C^5_{11}.
Với mỗi bộ số có dạng a_1bcde_1 ta được một số dạng $\overline{abcde}$, nên $n(A) = C^5_{11}$.
Vậy $P(A) = \dfrac{C^5_{11}}{C^1_{90000}} = \dfrac{77}{15000}$. □

Câu 52. Chia ngẫu nhiên 9 viên bi gồm 4 viên màu đỏ và 5 viên màu xanh có cùng kích thước thành ba phần, mỗi phần 3 viên. Tính xác xuất để không có phần nào gồm 3 viên cùng màu.

Lời giải.
Ta có nhận xét: Xác suất không thay đổi khi ta coi ba phần này có xếp thứ tự 1, 2, 3.
Chia ngẫu nhiên 9 viên bi gồm 4 viên màu đỏ và 5 viên màu xanh có cùng kích thước thành ba phần, mỗi phần 3 viên như sau:

- Chọn 3 viên cho phần 1: có C^3_9 cách.
- Chọn 3 viên cho phần 2: có C^3_6 cách.
- Chọn 3 viên lại cho phần 3: có 1 cách.

Do đó số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C^3_9 \cdot C^3_6 = 1680$.
Gọi A là biến cố không có phần nào gồm 3 viên cùng màu, khi đó ta chia các viên bi thành 3 bộ như sau:

- Bộ 1: 2 đỏ - 1 xanh: có $C^2_4C^1_5$ cách chọn.
- Bộ 2: 1 đỏ - 2 xanh: có $C^1_2C^2_4$ cách chọn.
- Bộ 3: gồm các viên bi còn lại (1 đỏ - 2 xanh).

Vì bộ 2 và 3 có các viên bi giống nhau để không phân biệt hai bộ này nên có $\dfrac{3!}{2!}$ sắp xếp 3 bộ vào 3 phần trên.
Do đó $n(A) = \dfrac{3!}{2!}C^2_4C^1_5C^1_2C^2_4 = 1080$.
Vậy xác xuất để không có phần nào gồm 3 viên cùng màu là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1080}{1680} = \dfrac{9}{14}$. □

Câu 53. Có 5 bạn học sinh nam và 5 bạn học sinh nữ trong đó có một bạn nữ tên Tự và một bạn nam tên Trọng. Xếp ngẫu nhiên 10 bạn vào một dãy 10 ghế sao cho mỗi ghế có đúng một người ngồi. Tính xác suất để không có hai học sinh nam nào ngồi kề nhau và bạn Tự ngồi kề với bạn Trọng.

Lời giải.
Kí hiệu nam là A và nữ là B.
Ta có 2 trường hợp nam, nữ xen kẽ nhau và 4 trường hợp hai bạn nữ ngồi cạnh nhau.

- Trường hợp 1. Nam nữ ngồi xen kẽ nhau gồm
  Nam phía trước $ABABABABAB$.
  Nữ phía trước $BABABABABA$.
- Trường hợp 2. Hai bạn nữ ngồi cạnh nhau $ABBABABABA$ hoặc $ABABBABABA$.
  Tương tự có thêm 2 trường hợp nữa. Các bước xếp như sau.

Bước 1. Xếp 5 bạn nam.

Bước 2. Xếp cặp Tự - Trọng.

Bước 3. Xếp các bạn nữ còn lại.

Khi đó số kết quả xếp cho 2 trường hợp trên như sau:
Nam, nữ xen kẽ nhau có $2 \cdot 9 \cdot 4! \cdot 4!$.
Hai bạn nữ ngồi cạnh nhau có $4 \cdot 8 \cdot 4! \cdot 4!$.
Vậy xác suất cần tìm là $P = \dfrac{50 \cdot 4! \cdot 4!}{10!} = \dfrac{1}{126}$. □

Câu 54. Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1;19]$. Tính xác suất để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3.

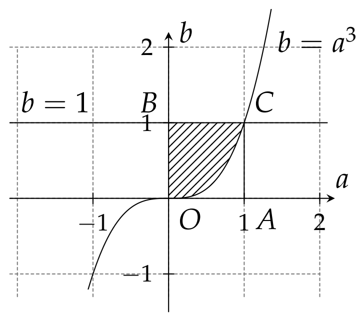
Lời giải.
Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = 19^3 = 6859$. Ta tính số cách viết ra ba số để tổng của chúng là bội của 3.
Xét ba tập hợp $X = \{3;6;9;12;15;18\}$ có 6 phần tử, $Y = \{1;4;7;10;13;16;19\}$ có 7 phần tử, $Z = \{2;5;8;11;14;17\}$ có 6 phần tử. Ba số được chọn có tổng chia hết cho 3 nếu cả ba cùng thuộc một tập X hoặc Y hoặc Z hay mỗi số thuộc một tập trong ba tập hợp nói trên. Do vậy số phần tử của tập hợp thuận lợi cho biến cố bằng

$$n(A) = 6^3 + 7^3 + 6^3 + 3!6.7.6 = 2287.$$

số 3! chỉ số hoán vị khi cho 3 bạn A, B, C chọn ba số từ các tập hợp X, Y, Z. Vậy xác suất của biến cố cần tìm là $P(A) = \dfrac{2287}{6859}$. □

Câu 55. Chọn ngẫu nhiên hai số thực $a, b \in [0;1]$. Tính xác suất để phương trình $2x^3 - 3ax^2 + b = 0$ có tối đa hai nghiệm.

Lời giải.
Xét $y = 2x^3 - 3ax^2 + b$, $y' = 0 \Leftrightarrow 6x(x-a) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = a \end{array}\right.$.



Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y(0) \cdot y(a) \geqslant 0 \Leftrightarrow b(b - a^3) \geqslant 0$.
Mà $b \in [0;1]$ nên $b(b - a^3) \geqslant 0 \Leftrightarrow b \geqslant a^3$.
Ta thấy việc chọn ngẫu nhiên hai số $a, b \in [0;1]$ chính là việc chọn ngẫu nhiên một điểm $M(a;b)$ **khi xét trên hệ trục toạ độ** aBb.
Gọi A là biến cố thỏa mãn bài toán. Ta có Ω là tập hợp các điểm $M(a;b)$ sao cho $a, b \in [0;1]$ và chính là các điểm thuộc hình vuông $OACB$ trên hình vẽ, do đó $n(\Omega) = S_{OACB} = 1$.
$n(A)$ là tập hợp các điểm thuộc hình phẳng $(\mathscr{H})$ giới hạn bởi các đồ thị $b = 1$, $b = a^3$, $a = 0$ (phần gạch chéo trên đồ thị). Xét phương trình hoành độ giao điểm $a^3 = 1 \Leftrightarrow a = 1$.

$$\Rightarrow n(A) = \int_0^1 |1 - a^3|\, dx = \left|\int_0^1 (1 - a^3)\, dx\right| = \left(a - \frac{a^4}{4}\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Vậy xác suất cần tìm là $P = \dfrac{\frac{3}{4}}{1} = \dfrac{3}{4}$. □

Câu 56. Có 8 người ngồi xung quanh một bàn tròn, mỗi người cầm một đồng xu như nhau. Tất cả 8 người cùng tung một đồng xu của họ, người có đồng xu ngửa thì đứng, còn người có đồng xu xấp thì ngồi. Tính xác suất để không có hai người liền kề cùng đứng.

Lời giải.
Gọi Ω = "Tất cả 8 người cùng tung một đồng xu".
Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = 2^8 = 256$.
Gọi A là biến cố: "Không có hai người liền kề cùng đứng"

A_1 là biến cố: "Có 0 người chơi được mặt ngửa".
A_2 là biến cố: "Có 1 người chơi được mặt ngửa".
A_3 là biến cố: "Có 2 người chơi được mặt ngửa và 2 người này không ngồi cạnh nhau".
A_4 là biến cố: "Có 3 người chơi được mặt ngửa, trong đó không có 2 người nào ngồi cạnh nhau".
A_5 là biến cố: "Có 4 người chơi được mặt ngửa, trong đó không có 2 người nào ngồi cạnh nhau".
Suy ra $n(A) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + n(A_4) + n(A_5)$

$$= 1 + 8 + \left(C_5^1 + C_6^2\right) + \left(C_4^2 + C_5^3\right) + \left(C_3^3 + C_4^4\right).$$

Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{57}{256}$. □

Câu 57. Cho tập $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Gọi B là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau được lập từ A. Chọn ngẫu nhiên 2 số thuộc tập B. Tính xác suất để trong 2 số vừa chọn có đúng một số có mặt chữ số 3.

Lời giải.
Ta có $n(B) = A_6^4 = 360$ và $n(\Omega) = C_{360}^2 = 64620$.
Số các số không có chữ số 3 bằng $A_5^4 = 120$.
Suy ra số các số có mặt chữ số 3 bằng $A_6^4 - A_5^4 = 240$.
Vậy xác suất trong 2 số có đúng một số có chữ số 3 là $P = \dfrac{C_{120}^1 \cdot C_{240}^1}{64620} = \dfrac{160}{359}$. □

Câu 58. Có bao nhiêu số tự nhiên có 2018 chữ số sao cho trong mỗi số, tổng các chữ số bằng 5?

Lời giải.
Ta có $5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 1 + 3 + 1 = 2 + 2 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 2$.
Giả sử số tự nhiên thỏa mãn đề bài có dạng $N = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{2018}}$, $a_1 \neq 0$.

- Trường hợp N chỉ có 1 chữ số khác 0, có duy nhất 1 số thỏa mãn với $a_1 = 5$, $a_2 = a_3 = \cdots = a_{2018} = 0$.
- Trường hợp N chỉ có 2 chữ số khác 0 và tổng của chúng bằng 5.
  Chọn cho vị trí a_1 có 4 cách ($a_1 \in \{4; 1; 3; 2\}$).
  Chọn chữ số khác 0 tiếp theo có 1 cách (vì tổng của nó với chữ số ở vị trí a_1 bằng 5) và chọn vị trí cho chữ số này có 2017 cách. Vậy trường hợp này có $4C_{2017}^1$ số thỏa mãn.
- Trường hợp N chỉ có 3 chữ số khác 0 và tổng của chúng bằng 5.
  Khi đó trong 3 chữ số này có 2 chữ số giống nhau.
  - Nếu a_1 khác 2 chữ số còn lại thì chọn a_1 có 2 cách. Chọn vị trí cho 2 chữ số (giống nhau) còn lại có C_{2017}^2 cách.
  - Nếu a_1 giống một trong hai chữ số còn lại thì chọn a_1 có 2 cách. Chọn vị trí cho 2 chữ số (khác nhau) còn lại có A_{2017}^2 cách.

  Vậy trường hợp này có $2\left(C_{2017}^2 + A_{2017}^2\right)$ số thỏa mãn.
- Trường hợp N chỉ có 4 chữ số khác 0 và tổng của chúng bằng 5.
  Khi đó trong 4 chữ số này có 3 chữ số giống nhau và bằng 1, chữ số còn lại bằng 2.
  - Nếu $a_1 = 2$, chọn vị trí cho 3 chữ số 1 có C_{2017}^3 cách.
  - Nếu $a_1 = 1$, chọn vị trí cho 2 chữ số 1 còn lại có C_{2017}^2 cách. Cuối cùng chọn vị trí cho chữ số 2 có 2015 cách.

  Vậy trường hợp này có $C_{2017}^3 + 2015C_{2017}^2$ số thỏa mãn.

- Trường hợp N chỉ có 5 chữ số khác 0 và tổng của chúng bằng 5.
  Khi đó 5 chữ số này đều bằng nhau và bằng 1.
  Chọn cho a_1 có 1 cách là $a_1 = 1$.
  Chọn vị trí cho 4 chữ số 1 còn lại có C_{2017}^4. Vậy trường hợp này có C_{2017}^4 số thỏa mãn.

Vậy tổng số các số thỏa mãn bằng

$$1 + 4C_{2017}^1 + 2\left(C_{2017}^2 + A_{2017}^2\right) + C_{2017}^4 + C_{2017}^3 + 2015C_{2017}^2 = 1 + 4C_{2017}^1 + 2017C_{2017}^2 + 2A_{2017}^2 + C_{2017}^3 + C_{2017}^4$$

□

Câu 59. Số các số tự nhiên có n (với $8 \leqslant n \leqslant 10$) chữ số khác nhau đôi một và đồng thời có mặt bốn chữ số 1, 2, 3, 4 đôi một không kề nhau là

Lời giải.
Xét các số có dạng $N = \overline{a_1a_2\ldots a_{n-4}}$, $a_i \in S = \{0;5,6,7,8,9\}$, $i = \overline{1,n-4}$. Để tạo ra một số thỏa mãn yêu cầu bài toán ta thêm các chữ số 1, 2, 3, 4 vào $n-3$ vị trí ở giữa các chữ số a_i hoặc ở hai đầu (vị trí đánh dấu $\times$, như hình vẽ).

$$\times \quad a_1 \quad \times \quad a_2 \quad \times \quad a_3 \quad \cdots \quad \times \quad a_{n-4} \quad \times$$

Có A_6^{n-4} cách chọn các chữ số a_i từ S và A_{n-3}^4 cách thêm các chữ số 1, 2, 3, 4 vào các vị trí đánh dấu $\times$.
Có A_5^{n-5} các chọn các chữ số a_i từ S sao cho $a_1 = 0$ và A_{n-4}^4 cách thêm các chữ số 1, 2, 3, 4 vào các vị trí đánh dấu $\times$ sao cho vị trí đầu tiên bỏ trống.
Vậy số các số thỏa mãn bài toán là $A_6^{n-4}A_{n-3}^4 - A_5^{n-5}A_{n-4}^4$. □

Câu 60. Có 8 phong bì được đánh số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 và 8 tem thư cũng được đánh số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Dán 8 tem thư lên 8 bì thư (mỗi bì thư chỉ dán 1 tem). Hỏi có thể có bao nhiêu cách dán tem thư lên bì thư sao cho có ít nhất một bì thư được dán tem thư có số trùng với số của bì thư đó?

Lời giải.
Gọi S là tập hợp các hoán vị của $\{1;2;\cdots;n\}$ và A_i là tập hợp các hoán vị $(a_1;a_2;\cdots;a_n)$ của $\{1;2;\cdots;n\}$ sao cho $a_i = i, (1 \leqslant i \leqslant n)$. Ta cần tính $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$. Ta có

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| &= \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i \cap A_j| + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i \cap A_j \cap A_k| \\ &- \cdots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n|.\end{aligned}$$

Ta có $|A_i| = (n-1)!, |A_i \cap A_j| = (n-2)!, \cdots, |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$. Do đó ta có

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n| &= C_n^1(n-1)! - C_n^2(n-2)! + C_n^3(n-3)! - ... + (-1)^{n-1}C_n^n 0! \\ &= n!\left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\right).\end{aligned}$$

Áp dụng với $n = 8$ ta có kết quả là 25484 cách dán tem thử thoả mãn yêu cầu. □

Câu 61. Ba cầu thủ sút phạt đền 11m, mỗi người đá một lần với xác suất làm bàn tương ứng là x, y và 0,6 (với $x > y$). Biết xác suất để ít nhất một trong ba cầu thủ ghi bàn là 0,976 và xác suất để cả ba cầu thủ đều ghi bàn là 0,336. Tính xác suất để có đúng hai cầu thủ ghi bàn.

Lời giải.
Gọi A_i là biến cố "người thứ i ghi bàn", với $i = 1,2,3$.
Ta có A_i độc lập với nhau và $P(A_1) = x$, $P(A_2) = y$ và $P(A_3) = 0,6$.

Gọi A là biến cố: "Có ít nhất một trong ba cầu thủ ghi bàn".
B là biến cố: "Cả ba cầu thủ đều ghi bàn".
C là biến cố: "Có đúng hai cầu thủ ghi bàn".
Ta có $\overline{A} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \Rightarrow P\left(\overline{A}\right) = P\left(\overline{A_1}\right) \cdot P\left(\overline{A_2}\right) \cdot P\left(\overline{A_3}\right) = 0{,}4(1-x)(1-y)$. Do đó

$$P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) \Leftrightarrow 0{,}976 = 1 - 0{,}4(1-x)(1-y) \Leftrightarrow xy - x - y = -\frac{47}{50}. \quad (1)$$

Tương tự $B = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, suy ra

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \Leftrightarrow 0{,}336 = 0{,}6xy \Leftrightarrow xy = \frac{14}{25} \quad (2).$$

Từ (1), (2) và điều kiện $x > y$ ta có $\begin{cases} xy = \dfrac{14}{25} \\ x + y = \dfrac{3}{2} \\ x > y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0{,}8 \\ y = 0{,}7 \end{cases}$.
Ta có $C = \overline{A_1}A_2A_3 + A_1\overline{A_2}A_3 + A_1A_2\overline{A_3}$. Do đó

$$P(C) = (1-x)y \cdot 0{,}6 + x(1-y) \cdot 0{,}6 + xy \cdot 0{,}4 = 0{,}452.$$

□

Câu 62. Cho đa giác đều 10 cạnh nội tiếp đường tròn (O). Hỏi có bao nhiêu hình thang cân có bốn đỉnh là đỉnh của đa giác đều đó?

Lời giải.
Ta đếm hai loại hình

- Hình thang cân không là hình chữ nhật.
- Hình chữ nhật.

Đối với hình thang cân không là hình chữ nhật thì ta cố định một đỉnh và các đỉnh còn lại theo chiều kim đồng hồ. Gọi x, y, y, z lần lượt là số các cạnh của đa giác đều nằm trong đáy nhỏ, hai cạnh bên và đáy lớn của hình thang, ta có:

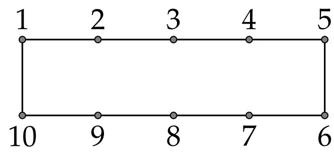
$$\begin{cases} 1 \leqslant x, y, z \in \mathbb{Z} \\ x < z \\ x + 2y + z = 10 \ (*) \end{cases}$$

Ta có $(*) \Leftrightarrow x + z = 10 - 2y \ (**)$ với $y \geqslant 1$. Dễ thấy $(**)$ có $10 - 2y - 1 = 9 - 2y$ nghiệm (x, z). Trong các nghiệm này có một nghiệm $x = z$ nên số nghiệm (x, z) mà $x < z$ là $\dfrac{9 - 2y - 1}{2} = 4 - y$. Vậy số hình thang khác hình chữ nhật từ một đỉnh là $\displaystyle\sum_{y=1}^{3}(4-y) = 6$. Do đó, tổng số hình thang không là hình chữ nhật mà các đỉnh là đỉnh của đa giác đều đã cho là $10 \times 6 = 60$.
Đối với hình thang là các hình chữ nhật thì cứ 2 đường kính trong 5 đường kính của đường tròn mà là đường chéo của đa giác cho ta một hình chữ nhật. Do đó, số hình chữ nhật tạo thành là $C_5^2 = 10$. Vậy số hình thang cân kể cả trường hợp hình chữ nhật mà 4 đỉnh là các đỉnh của đa giác đều đã cho là $60 + 10 = 70$ hình thang. □

Câu 63. Có 5 học sinh lớp A, 5 học sinh lớp B được xếp ngẫu nhiên vào hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy 5 ghế (xếp mỗi học sinh một ghế). Tính xác suất để xếp được 2 học sinh bất kì cạnh nhau và đối diện nhau khác lớp.

Lời giải.

Ta đánh số các ghế như hình vẽ bên.
Không gian mẫu là $n(\Omega) = 10!$.
Có hai phương án xếp thỏa yêu cầu bài toán.



- Phương án 1: Ghế lẻ xếp học sinh lớp A, ghế chẵn xếp học sinh lớp B khi đó 2 học sinh ngồi cạnh hoặc đối diện nhau khác lớp có $5!5!$ cách.
- Phương án 2: Đảo lại ghế lẻ xếp học sinh lớp B, ghế chẵn xếp học sinh lớp A khi đó cũng có $5!5!$ cách.

Suy ra số tổng số các phương án thỏa mãn là $2(5!5!)$ cách.
Vậy xác suất là $P = \dfrac{2(5!5!)}{10!} = \dfrac{2(5!)^2}{10!}$. □

Câu 64. Gọi X là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một số thuộc tập X. Tính xác suất để số lấy được luôn chứa đúng ba số thuộc tập $Y = \{1;2;3;4;5\}$ và ba số đứng cạnh nhau, số chẵn đúng giữa hai số lẻ.

Lời giải.
Gọi $\overline{abcdef}$ là số có 6 chữ số đôi một khác nhau cần tìm.
Chọn $a \neq 0$ có 9 cách. Chọn $b,c,d,e,f \in \{0,1,2,\ldots,9\} \setminus \{a\}$ có A_9^5 cách. Vậy $n(\Omega) = 9 \cdot A_9^5 = 136080$.
Gọi A là biến cố số lấy được luôn chưa đúng ba số thuộc tập $Y = \{1,2,3,4,5\}$ và ba số đứng cạnh nhau, số chẵn đứng giữa hai số lẻ.
Gọi $y = \overline{b_1b_2b_3}$ với $b_2 \in \{2,4\}$, $b_3 \in \{1,3,5\}$, $b_1 \neq b_2 \neq b_3$. Thì số các số y là $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ số.
Gọi x là số thuộc X, chưa đúng ba số thuộc Y và ba chữ số thuộc Y đứng cạnh nhau, số chẵn đứng giữa hai số lẻ.
Ta có các trường hợp sau: $x = \overline{ya_1a_2a_3}$, $x = \overline{a_1ya_2a_3}$, $x = \overline{a_1a_2ya_3}$, $x = \overline{a_1a_2a_3y}$.

- **Trường hợp 1.** $x = \overline{ya_1a_2a_3}$ với $a_1, a_2, a_3 \in \{0,6,7,8,9\}$, suy ra số các số là $12 \cdot A_5^3 = 720$ số.
- **Trường hợp 2.** $x = \overline{a_1ya_2a_3}$ có số các số là $12 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 576$ số.

Các trường hợp còn lại tương tự. Do đó, $n(A) = 720 + 3 \cdot 576 = 2448$. Như vậy, $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{2448}{136080} = \dfrac{17}{945}$. □

Câu 65. Trong một lớp có n hoc sinh gồm 3 bạn Chuyên, Hà, Tĩnh cùng $n-3$ học sinh khác. Tìm n biết rằng khi xếp tùy ý các học sinh này vào dãy ghế được đánh số từ 1 đến n, mỗi học sinh ngồi một ghế thì xác suất để số ghế của Hà bằng trung bình cộng số ghế của Chuyên và số ghế của Tĩnh là $\dfrac{13}{675}$.

Lời giải.
Số cách sắp xếp tùy ý n học sinh vào n chỗ là $n!$(cách xếp). Giả sử số ghế của 3 bạn Chuyên, Hà, Tĩnh lần lượt là a,b,c. Khi đó ta có $b = \dfrac{a+c}{2}$ hay $2b = a + c$. Do đó a,c phải cùng tính chẵn lẻ.

1. Nếu $n = 2m$ (n là số chẵn).
   Nếu a,c cùng chẵn hoặc cùng lẻ thì Chuyên và Tĩnh có $A_{\frac{n}{2}}^2$ cách xếp, Hà có 1 cách xếp và có $(n-3)!$ cách xếp các học sinh còn lại.
   Do đó ta có $\dfrac{2(n-3)!A_{\frac{n}{2}}^2}{n!} = \dfrac{13}{675} \Leftrightarrow m = \dfrac{701}{52}$ (loại).
2. $n = 2m + 1$ (n là số lẻ).
   - Nếu a,c chẵn thì Chuyên và Tĩnh có A_m^2 cách xếp, Hà có 1 cách xếp và có $(2m-2)!$ cách xếp các học sinh còn lại.

- Nếu a, c lẻ thì Chuyên và Tĩnh có A_{m+1}^2 cách xếp, Hà có 1 cách xếp và có $(2m-2)!$ cách xếp các học sinh còn lại.

Khi đó

$$\frac{(2m-2)!\left(A_m^2+A_{m+1}^2\right)}{(2m+1)!}=\frac{13}{675}\Leftrightarrow\frac{m(m-1)+m(m+1)}{(2m+1)2m(2m-1)}\Leftrightarrow m=13\Leftrightarrow n=27.$$

□

Câu 66. Từ các chữ số thuộc tập hợp $S=\{1,2,3,\ldots,8,9\}$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có chín chữ số khác nhau sao cho chữ số 1 đứng trước chữ số 2, chữ số 3 đứng trước chữ số 4 và chữ số 5 đứng trước chữ số 6?

Lời giải.

- Số các số có chín chữ số khác nhau là 9!. Trong 9! số này, số các số mà chữ số 1 đứng trước chữ số 2 hoặc chữ số 1 đứng sau chữ số 2 là bằng nhau. Do đó, số các số mà chữ số 1 đứng trước chữ số 2 là $\frac{9!}{2}$.
- Tương tự, số các số mà chữ số 1 đứng trước chữ số 2 và chữ số 3 đứng trước chữ số 4 là $\frac{9!}{4}$.
- Số các số cần tìm là $\frac{9!}{8}=45360$.

□

Câu 67. Gọi X là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 8 chữ số được lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Lấy ngẫu nhiên một số trong tập hợp X. Gọi A là biến cố lấy được số có đúng hai chữ số 1, có đúng hai chữ số 2, bốn chữ số còn lại đôi một khác nhau, đồng thời các chữ số giống nhau không đứng liền kề nhau. Tính xác suất của biến cố A.

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu. Ta có $n(\Omega)=9^8$.
Gọi B là biến cố lấy được số có đúng hai chữ số 1, có đúng hai chữ số 2, bốn chữ số còn lại đôi một khác nhau.
Gọi C là biến cố lấy được số có đúng hai chữ số 1, có đúng hai chữ số 2, bốn chữ số còn lại đôi một khác nhau, đồng thời hai chữ số 1 hoặc hai chữ số 2 đứng liền kề nhau. Khi đó $n(A)=n(B)-n(C)$.

- Xác định số phần tử của B: Trước hết, chọn vị trí cho 2 chữ số 1 có C_8^2 cách. Tiếp theo, chọn vị trí cho 2 chữ số 2 có C_6^2 cách. Cuối cùng chọn 4 chữ số cho 4 vị trí còn lại có A_7^4 cách. Vậy $n(B)=C_8^2\cdot C_6^2\cdot A_7^4=352800$.
- Xác định số phần tử của C qua các bước
  - Bước 1: Xác định số phần tử của C có 2 chữ số 1 đứng liền kề nhau, 2 chữ số 2 tùy ý: Chọn vị trí cho 2 chữ số 1 có 7 cách, chọn vị trí cho 2 chữ số 2 có C_6^2 cách, chọn 4 chữ số cho 4 vị trí còn lại có A_7^4 cách. Vậy có $7\cdot C_6^2\cdot A_7^4$ số thỏa mãn.
  - Bước 2: Xác định số phần tử của C có 2 chữ số 2 đứng liền kề nhau, 2 chữ số 1 tùy ý: Chọn vị trí cho 2 chữ số 2 có 7 cách, chọn vị trí cho 2 chữ số 1 có C_6^2 cách, chọn 4 chữ số cho 4 vị trí còn lại có A_7^4 cách. Vậy có $7\cdot C_6^2\cdot A_7^4$ số thỏa mãn.
  - Bước 3: Xác định số phần tử của C có 2 chữ số 1 đứng liền kề nhau, 2 chữ số 2 đứng liền kề nhau: Ghép 2 chữ số 1 thành số X, 2 chữ số 2 thành số Y. Chọn vị trí cho X có 6 cách, chọn vị trí cho Y có 5 cách, chọn 4 chữ số cho 4 chữ số còn lại có A_7^4 cách. Vậy có $6\cdot 5\cdot A_7^4$ số thỏa mãn.
  - Bước 4: Vì các số thỏa mãn ở bước 3 vừa nằm trong các số thỏa mãn ở bước 1 vừa nằm trong các số thỏa mãn ở bước 2 nên ta có $n(C)=7\cdot C_6^2\cdot A_7^4+7\cdot C_6^2\cdot A_7^4-6\cdot 5\cdot A_7^4=151200$.

- Suy ra $n(A) = 352800 - 151200 = 201600$.

Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{201600}{9^8}$. □

Câu 68. Từ các chữ số $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ ta lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số (các chữ số đôi một khác nhau), mà luôn có mặt nhiều hơn một chữ số lẻ và đồng thời trong đó hai chữ số kề nhau không cùng là số lẻ?

Lời giải.
Gọi số cần tìm có dạng $m = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ với $a_i \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$, $a_1 \neq 0$ và $i \in \{1;2;3;4;5;6\}$.
Vì các chữ số $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ là đôi một khác nhau, có nhiều hơn một chữ số lẻ và đồng thời trong đó có hai chữ số kề nhau không cùng là số lẻ nên ta xét hai trường hợp sau:

1. Trường hợp 1. Có 4 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ.
   - Chữ số 0 đứng ở vị trí bất kì.
     - Lấy 4 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ có $C_5^4 \cdot C_5^2$.
     - Xếp 4 chữ số chẵn có $4!$.
     - Xếp 2 chữ số lẻ có A_5^2.
       Vậy trường hợp này có $C_5^4 \cdot C_5^2 \cdot 4! \cdot A_5^2 = 24000$ số.
   - Chữ số $a_1 = 0$.
     - Lấy thêm 3 chữ số chẵn; 2 chữ số lẻ có $C_4^3 \cdot C_5^2$.
     - Xếp 3 chữ số chẵn có $3!$.
     - Xếp 2 chữ số lẻ có A_4^2.
       Vậy trường hợp này có $C_4^3 \cdot C_5^2 \cdot 3! \cdot A_4^2 = 2880$.
2. Trường hợp 2. Có 3 chữ số chẵn và 3 chữ số lẻ.
   - Chữ số 0 đứng ở vị trí bất kì.
     - Lấy 3 chữ số chẵn và 3 chữ số lẻ có $C_5^3 \cdot C_5^3$.
     - Xếp 3 chữ số chẵn có $3!$.
     - Xếp 3 chữ số lẻ có A_4^3.
       Vậy trường hợp này có $C_5^3 \cdot C_5^3 \cdot 3! \cdot A_4^3 = 14400$ số.
   - Chữ số $a_1 = 0$.
     - Lấy thêm 2 chữ số chẵn; 3 chữ số lẻ có $C_4^2 \cdot C_5^3$.
     - Xếp 2 chữ số chẵn có $2!$.
     - Xếp 3 chữ số lẻ có $A_3^3 = 3!$.
       Vậy trường hợp này có $C_4^2 \cdot C_5^3 \cdot 2! \cdot 3! = 720$.

Vậy có $(24000 - 2880) + (14400 - 720) = 34800$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Câu 69. Một người bỏ ngẫu nhiên 4 lá thư vào 4 bì thư đã được ghi sẵn địa chỉ cần gửi. Tính xác xuất để có ít nhất 1 lá thư bỏ đúng phong bì của nó.

Lời giải.
Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1. Chỉ có 1 lá thư được bỏ đúng địa chỉ. Giả sử ta chọn 1 trong 4 lá để bỏ đúng phong bì của nó thì có 4 cách chọn. Trong mỗi cách chọn đó ta lại chọn một lá để bỏ sai, khi đó có 2 cách và có đúng 1 cách để bỏ sai hai lá thư còn lại. Vậy trường hợp 1 sẽ có $4 \cdot 2 \cdot 1 = 8$ cách.
- Trường hợp 2. Có đúng 2 lá thư được bỏ đúng phong bì của nó. Số cách chọn 2 lá để bỏ đúng là $C_4^2 = 6$ cách. 2 lá còn lại nhất thiết phải bỏ sai nên có 1 cách bỏ. Vậy trường hợp 2 có $6 \cdot 1 = 6$ cách.

- Trường hợp 3. Có 3 lá thư được bỏ đúng phong bì của nó, khi này đương nhiên là cả 4 phong bì đều bỏ đúng địa chỉ. Trường hợp này có đúng 1 cách.

Kết hợp cả 3 trường hợp ta có $8 + 6 + 1 = 15$ cách chọn. Số phần tử không gian mẫu là $4! = 24$.
Xác suất cần tìm là $P = \dfrac{15}{24} = \dfrac{5}{8}$. □

Câu 70. Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh gồm 4 học sinh 11A, 1 học sinh 11B và 5 học sinh 11C thành một hàng ngang. Tính xác suất cách xếp trong 10 học sinh trên không có 2 học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau.

Lời giải.
Số cách xếp 10 học sinh thành một hàng ngang là $n(\Omega) = 10!$ cách.
Gọi A là biến cố: "Trong 10 học sinh trên không có 2 học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau".

	C_1		C_2		C_3		C_4		C_5	

Sắp xếp 5 học sinh 11C vào 5 vị trí, có 5! cách. Ứng với mỗi cách xếp 5 học sinh lớp 11C sẽ có 6 khoảng trống gồm 4 vị trí ở giữa và hai vị trí hai đầu để xếp các học sinh còn lại.

- **Trường hợp 1.** Xếp 4 học sinh lớp 11A vào 4 vị trí trống ở giữa (không xếp vào hai đầu), có 4! cách. 1 học sinh 11B còn lại có 10 vị trí để xếp, có 10 cách. Theo quy tắc nhân, ta có $5! \cdot 4! \cdot 10$ cách.

- **Trường hợp 2.** Xếp 3 trong 4 học sinh lớp 11A xếp vào 4 vị trí trống ở giữa và học sinh còn lại xếp vào hai đầu, có $C_4^3 \cdot A_4^3 \cdot 2$ cách. 1 học sinh 11B còn lại xếp vào vị trí trống còn lại ở giữa (để hai học sinh lớp 11C không được ngồi cạnh nhau), có 1 cách. Theo quy tắc nhân, ta có $5! \cdot C_4^3 \cdot A_4^3 \cdot 2 \cdot 1$ cách.

Do đó số cách xếp để không có 2 học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau là

$$n(A) = 5! \cdot 4! \cdot 10 + 5! \cdot C_4^3 \cdot A_4^3 \cdot 2 \cdot 1 = 51840 \text{ cách.}$$

Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{51840}{10!} = \dfrac{1}{70}$. □

Câu 71. Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 song song với nhau. Trên d_1 có 10 điểm phân biệt, trên d_2 có n điểm phân biệt $(n \geqslant 2)$. Tìm n biết rằng có 1725 tam giác có các đỉnh là ba trong số các điểm thuộc d_1 và d_2 nói trên. 6

Lời giải.
Số cách chọn ba điểm trong $n + 10$ điểm đã cho là C_{n+10}^3.
Số cách chọn ba điểm trong 10 trên d_1 là C_{10}^3.
Số cách chọn ba điểm trong n trên d_2 là C_n^3.
Số tam giác được tạo thành là $C_{n+10}^3 - C_{10}^3 - C_n^3$.
Từ giả thiết ta có phương trình $C_{n+10}^3 - C_{10}^3 - C_n^3 = 1725$. (1)

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(n+10)(n+9)(n+8)}{6} - 120 - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 1725 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 15 \\ n = -23. \end{array}\right.$$

Vì $n \geqslant 2$ nên $n = 15$. Vậy tổng các chữ số của n bằng 6.
Chọn đáp án (B) □

Câu 72. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có 4 chữ số. Tính xác suất để số được chọn có dạng $\overline{abcd}$, trong đó $1 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant 9$.

Lời giải.
Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có dạng $s = \overline{abcd}$, trong đó $1 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant 9$, $N = \{1; 2; 3; \ldots, 9\}$. Ta có các trường hợp

- **Trường hợp 1.** Các số a, b, c, d đôi một phân biệt.
Khi đó mỗi số s tương ứng với một tập con có 4 phần tử của N. Do đó ta có $C_9^4 = 126$ số.
- **Trường hợp 2.** Trong các số a, b, c, d có đúng một cặp số bằng nhau.
Ta có C_9^3 cách chọn ra một tập con có 3 phần tử của N, giả sử là $\{x, y, z\}$ $(x < y < z)$. Với mỗi tập con này, ta có 3 cách tạo ra một phần tử của A là $\overline{xxyz}$, $\overline{xyyz}$, $\overline{xyzz}$. Vậy trong trường hợp này ta có $3C_9^3 = 252$ số.
- **Trường hợp 3.** Trong các số a, b, c, d có đúng ba số bằng nhau.
Ta có C_9^2 cách chọn ra một tập hợp có hai phần tử của N, giả sử là $\{x, y\}$ $(x < y)$. Với mỗi tập con này ta có hai cách tạo ra một phần tử của A là $\overline{xxxy}$ hoặc $\overline{xyyy}$. Trong trường hợp này ta có $2C_9^2 = 72$ số.
- **Trường hợp 4.** Trong các số a, b, c, d có đúng hai cặp số bằng nhau và hai cặp này khác nhau.
Ta có C_9^2 cách chọn ra một tập hợp có hai phần tử của N, giả sử là $\{x, y\}$ $(x < y)$. Với mỗi tập con này ta có một cách tạo ra một phần tử của A là $\overline{xxyy}$. Trong trường hợp này ta có $C_9^2 = 36$ số.
- **Trường hợp 5.** $a = b = c = d$. Dễ thấy có 9 số thỏa mãn.

Vậy số phần tử của A là $126 + 252 + 72 + 36 + 9 = 495$. Suy ra xác suất cần tìm là $\dfrac{495}{9000} = 0{,}055$. □

Câu 73. Trong chuyện cổ tích Cây tre trăm đốt (các đốt được đánh thứ tự từ 1 đến 100), khi không vác được cây tre dài tận 100 đốt như vậy về nhà, anh Khoai ngồi khóc, Bụt liền hiện lên, bày cho anh ta: "Con hãy hô câu thần chú **xác suất**, **xác suất** thì cây tre sẽ rời ra, con sẽ mang được về nhà". Biết rằng cây tre 100 đốt được tách ra một cách ngẫu nhiên thành các đoạn ngắn có chiều dài 2 đốt và 5 đốt (có thể chỉ có một loại). Tính xác suất để số đoạn 2 đốt nhiều hơn số đoạn 5 đốt đúng 1.

Lời giải.
Giả sử có x đoạn 2 đốt và y đoạn 5 đốt được tách ra từ cây tre 100 đốt đã cho $(x, y \in \mathbb{N})$.

Ta có $2x + 5y = 100 \Rightarrow x \vdots 5 \Rightarrow x = 5m \Rightarrow 2m + y = 20 \Rightarrow y \in \{0; 2; 4; 6; \ldots; 20\}$.
Với mỗi bộ các số $(x; y)$ tìm được cho ta số các đoạn 2 đốt và 5 đốt được tách ra từ đó có số các cách để tách cây tre 100 đốt thành x đoạn 2 đốt và y đoạn 5 đốt là C_{x+y}^y.
Do đó, số cách để tách cây tre 100 đốt thành các đoạn 2 đốt và đoạn 5 đốt là

$$C_{50}^0 + C_{47}^2 + C_{44}^4 + C_{41}^6 + C_{38}^8 + C_{35}^{10} + C_{32}^{12} + C_{29}^{14} + C_{26}^{16} + C_{23}^{18} + C_{20}^{20} = 545813094.$$

Để tách cây tre 100 thành các đoạn ngắn có chiều dài 2 đốt và 5 đốt sao cho số đoạn 2 đốt nhiều hơn số đoạn 5 đốt đúng 1 đoạn thì ta còn phải có $x - y = 1$. Khi đó $x = 15$ và $y = 14$.
Số cách để tách cây tre 100 đốt thành 15 đoạn 2 đốt và 14 đoạn 5 đốt là C_{29}^{15}. Vậy xác suất để số đoạn 2 đốt nhiều hơn số đoạn 5 đốt đúng 1 đoạn là $\dfrac{C_{29}^{15}}{545813094} \approx 0{,}1421$. □

Câu 74. Cho một đa giác (H) có 60 đỉnh nội tiếp một đường tròn (O). Người ta lập một tứ giác tùy ý có bốn đỉnh là các đỉnh của (H). Tính xác suất để lập được một tứ giác có bốn cạnh đều là đường chéo của (H).

Lời giải.
Gọi A là biến cố "Lập được một tứ giác có bốn đỉnh là đỉnh của (H) và cả bốn cạnh đều là đường chéo của (H)".
Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{60}^4$.
Để đếm số phần tử của A, ta đặt thứ tự các đỉnh theo chiều kim đồng hồ. Chọn đỉnh đầu tiên của tứ giác có 60 cách. Đánh số các đỉnh của đa giác lần lượt là 1, 2, 3, ..., 60 trong đó số 1 là đỉnh đã chọn. Cần chọn thêm 3 đỉnh nữa ứng với bộ (a, b, c) thuộc từ 3 đến 59, theo yêu cầu $3 \leqslant a < b - 1 < c - 2 \leqslant 57$, nên có $60 \cdot C_{55}^3$, theo cách đếm này các tứ giác bị lặp lại 4 lần nên kết quả là $\dfrac{60 \cdot C_{55}^3}{4} = 15 \cdot C_{55}^3$. Xác suất cần tìm $P = \dfrac{15 \cdot C_{55}^3}{C_{60}^4} \approx 0{,}807$. □

Câu 75. Từ các tập con của tập $A = \{1;2;3;\ldots;2020\}$, người ta chọn ngẫu nhiên ra hai tập. Tính xác suất của biến cố cả hai tập được chọn đều khác rỗng đồng thời có số phần tử là một số chẵn nhỏ hơn 1009.

Lời giải.
Số tập con của A là 2^{2020}, do đó số phần tử của không gian mẫu là $C^2_{2^{2020}}$.
Số tập con khác rỗng của A có số phần tử chẵn nhỏ hơn 1009 là

$$\begin{aligned}
& C^2_{2020} + C^4_{2020} + C^6_{2020} + \cdots + C^{2k}_{2020} + \cdots + C^{1008}_{2020} \\
= \; & C^0_{2020} + C^2_{2020} + C^4_{2020} + \cdots + C^{2k}_{2020} + \cdots + C^{1010}_{2020} - 1 \\
= \; & \frac{1}{2}\left(C^0_{2020} + C^2_{2020} + C^4_{2020} + \cdots + C^{2k}_{2020} + \cdots + C^{2020}_{2020}\right) - 1 \\
= \; & \frac{1}{2} \cdot 2^{2019} - 1 = \cdot 2^{2018} - 1.
\end{aligned}$$

Số cách lấy hai tập hợp khác rỗng có số phần tử chẵn nhỏ hơn 1009 là $C^2_{2^{2018}-1}$.

Suy ra xác suất cần tìm là $P = \dfrac{C^2_{2^{2018}-1}}{C^2_{2^{2020}}}$. □

Câu 76. Cho tập $X = \{1;2;3;\ldots;8\}$. Lập từ X số tự nhiên có 8 chữ số đôi một khác nhau. Tính xác suất để lập được số chia hết cho 1111.

Lời giải.
Số phần tử không gian mẫu $n(\Omega) = 8!$.
Gọi số cần tạo có dạng $A = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$, $a_i \in X$, $a_i \neq a_j$ với $i \neq j$.
Do X có tổng tất cả các phần tử bằng 36 nên A chia hết cho 9 mà $(9, 1111) = 1$ nên A chia hết cho 9999. Ta có

$$A = \overline{a_1a_2a_3a_4} \cdot 10^4 + \overline{a_5a_6a_7a_8} = \overline{a_1a_2a_3a_4} \cdot 9999 + \overline{a_1a_2a_3a_4} + \overline{a_5a_6a_7a_8}.$$

Vì A và $\overline{a_1a_2a_3a_4} \cdot 9999$ chia hết cho 9999 nên $\overline{a_1a_2a_3a_4} + \overline{a_5a_6a_7a_8}$ cũng phải chia hết cho 9999.
Mặt khác $a_i \in X$ nên $\overline{a_1a_2a_3a_4} + \overline{a_5a_6a_7a_8} < 2 \cdot 9999$ vì thế $\overline{a_1a_2a_3a_4} + \overline{a_5a_6a_7a_8} = 9999$.
Cứ mỗi cách chọn a_i, $i \in \{1,2,3,4\}$ thì có duy nhất một cách chọn a_{i+4} để $a_i + a_{i+4} = 9$.
Chọn a_1 có 8 cách, a_2 có 6 cách, a_3 có 4 cách và a_4 có 2 cách.
Như vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{8!} = \dfrac{384}{8!}$. □

Câu 77. Cho tập hợp S có 12 phần tử. Hỏi có bao nhiêu cách chọn hai tập con (không kể thứ tự) của S mà hợp của chúng bằng S?

Lời giải.
Để xây dựng cặp tập con (có tính thứ tự) (A, B) mà $A \cup B = S$, ta lấy phần tử $x \in S$ rồi cho vào A hoặc B theo một trong 3 cách

- $x \in A$ và $x \notin B$;
- $x \notin A$ và $x \in B$;
- $x \in A$ và $x \in B$.

Vì S có 12 phần tử nên số cặp thứ tự (A, B) là 3^{12}, trong đó chỉ có một trường hợp $A = B$ là $A = S$ và $B = S$.
Vậy số cặp A, B không tính thứ tự là $\dfrac{3^{12} - 1}{2} + 1 = \dfrac{3^{12} + 1}{2}$. □

Câu 78. Một hộp đựng 26 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 26. Bạn Hải rút ngẫu nhiên cùng một lúc ba tấm thẻ. Tính xác suất sao cho bất kỳ hai trong ba tấm thẻ lấy ra đó có hai số tương ứng ghi trên hai tấm thẻ luôn hơn kém nhau ít nhất 2 đơn vị?

Lời giải.
Để bất kỳ hai trong ba tấm thẻ lấy ra đó có hai số tương ứng ghi trên hai tấm thẻ luôn hơn kém nhau ít nhất 2 đơn vị thì phải rút được ba thẻ sao cho trong đó không có hai thẻ nào là hai số tự nhiên liên tiếp.
Số phần tử của không gian mẫu (số cách rút ba thẻ bất kì) là: C_{26}^3.
Số cách rút ba thẻ có đúng 2 số tự nhiên liên tiếp:
Chọn các bộ hai số tự nhiên liên tiếp: $(1;2), (2,3), \cdots (25;26)$.
Nếu chọn hai thẻ là $(1;2)$ và $(25;26)$ thì có 2 cách, thẻ còn lại không được là 3 hoặc 24. Vậy ở trường hợp này có tất cả $2(26-3) = 46$ cách chọn.
Nếu chọn hai thẻ là $(2;3), (3,4), \cdots (24;25)$ thì có 23 cách, thẻ còn lại chỉ có $26-4 = 22$ cách. Vậy ở trường hợp này có tất cả $23 \cdot 22 = 506$ cách chọn.
Số cách rút ba thẻ trong đó ba ba thẻ đều là ba số tự nhiên liên tiếp là 24 cách.
Suy ra có $C_{26}^3 - 46 - 506 - 24 = 2024$ cách rút được ba thẻ sao cho trong đó không có hai thẻ nào là hai số tự nhiên liên tiếp. Vậy xác suất cần tìm là $P = \dfrac{2024}{C_{26}^3} = \dfrac{253}{325}$. □

Câu 79. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có 2018 chữ số. Tính xác suất để số chọn được là một số tự nhiên chia hết cho 9 mà mỗi số trong đó có ít nhất hai chữ số 9.

Lời giải.
Gọi số tự nhiên cần tìm là $x = \overline{a_1a_2\ldots a_{2017}a_{2018}}$.
Khi đó số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 9 \cdot 10^{2017}$.
Số các số tự nhiên chia hết cho 9 là 10^{2017}.
Gọi biến cố A: "số chọn được là một số tự nhiên chia hết cho 9 mà mỗi số trong đó có ít nhất hai chữ số 9".
Khi đó biến cố $\overline{A}$: "số chọn được là một số tự nhiên chia hết cho 9 mà mỗi số trong đó có nhiều nhất một chữ số 9".

- **Trường hợp 1.** Số được chọn chia hết cho 9 mà trong đó không có số 9 nào thì ta có $8 \cdot 9^{2016}$ (số).
- **Trường hợp 2.** Số được chọn chia hết cho 9 mà trong đó có một số 9 được xếp vị trí đầu tiên thì ta có 9^{2016} (số).
- **Trường hợp 3.** Số được chọn chia hết cho 9 mà trong đó có một số 9 được xếp ở một trong các vị trí từ a_2 đến a_{2018} thì ta có 2017 cách chọn vị trí cho chữ số 9.

Do $a_1 \neq 0$ và $a_1 \neq 9$ có 8 cách. Xếp các vị trí còn lại ta có 9^{2015}.
Do đó ta có $8 \cdot 2017 \cdot 9^{2015}$ (số).
Vậy $n(\overline{A}) = 8 \cdot 9^{2016} + 9^{2016} + 8 \cdot 2017 \cdot 9^{2105} = 16217 \cdot 9^{2105}$.
Vậy xác suất của biến cố A là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{10^{2017} - 16217 \cdot 9^{2105}}{9 \cdot 10^{2017}} = \dfrac{1}{9} - \dfrac{16217}{900} \cdot (0{,}9)^{2015}$. □

Câu 80. Cho tập hợp $S = \{m \in \mathbb{Z} | -10 \leqslant m \leqslant 100\}$. Có bao nhiêu tập hợp con của S có số phần tử lớn hơn 2 và các phần tử đó tạo thành một cấp số cộng có tổng bằng 0?

Lời giải.
Giả sử $\{u_1; u_2; ...; u_n\} \subset S$, $n > 2$ là một tập hợp thỏa mãn yêu cầu bài toán. Không mất tính tổng quát giả sử $u_1 < u_2 < ... < u_n$ theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng công sai $d > 0$. Ta có $S_n = 0 \Leftrightarrow u_1 + u_n = 0$, lại có $u_1 + (n-1)d = u_n$ nên suy ra $(n-1)d = 2u_n$, điều này chứng tỏ d là một ước nguyên dương của $2u_n$ và $d \neq 2u_n$ vì $n > 2$. Như vậy số tập hợp thỏa YCBT chính là tổng số số các ước thực sự của $2u_n$ với $u_n \in \{1; 2; ...; 10\}$. Bằng cách liệt kê ta có tất cả 34 ước của $2u_n$ với $u_n \in \{1; 2; ...; 10\}$. □

Câu 81. Trò chơi quay bánh xe số trong chương trình truyền hình "Hãy chọn giá đúng" của kênh VTV3 Đài truyền hình Việt Nam, bánh xe số có 20 nấc điểm: 5, 10, 15, ..., 100 với vạch chia đều nhau và giả sử rằng khả năng chuyển từ nấc điểm đã có tới các nấc điểm còn lại là như nhau. Trong mỗi lượt chơi có 2 người tham gia, mỗi người được quyền chọn quay 1 hoặc 2 lần, và số điểm được tính như sau

- Nếu người chơi chọn quay 1 lần thì điểm của người chơi là điểm quay được.
- Nếu người chơi chọn quay 2 lần và tổng điểm sau 2 lần quay được không lớn hơn 100 thì điểm của người chơi là tổng điểm quay được.
- Nếu người chơi chọn quay 2 lần và tổng điểm sau 2 lần quay được lớn hơn 100 thì điểm của người chơi là tổng điểm quay được trừ đi 100.

Luật chơi quy định, trong mỗi lượt chơi người nào có điểm số cao hơn sẽ thắng cuộc, hòa nhau sẽ chơi lại lượt khác. An và Bình cùng tham gia một lượt chơi, An chơi trước và có điểm số là 75. Tính xác suất để Bình thắng cuộc ngay ở lượt chơi này.

Lời giải.
Bình có 2 cách thắng cuộc

- **Thắng cuộc sau lần quay thứ nhất.** Nếu Bình quay vào một trong 5 nấc 80, 85, 90, 95 và 100 thì Bình sẽ thắng ngay lần quay thứ nhất. Xác suất thắng của Bình trong trường hợp này là $P_1 = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.
- **Thắng cuộc sau hai lần quay.** Nếu Bình quay lần một vào một trong 15 nấc 5, 10, ..., 75 thì Bình phải quay thêm lần thứ hai (để đủ điểm thắng). Ứng với mỗi nấc quay được trong lần quay thứ nhất, Bình có 5 nấc để thắng cuộc trong lần quay thứ hai. Xác suất thắng cuộc của Bình trường hợp này là $P_2 = \frac{15}{20} \cdot \frac{5}{20} = \frac{3}{16}$.

Vậy xác suất thắng cuộc của Bình là $P = P_1 + P_2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{7}{16}$. □

Câu 82. Một lớp có 36 ghế đơn được xếp thành hình vuông 6×6. Giáo viên muốn xếp 36 học sinh, trong đó có hai anh em Kỷ và Hợi. TÍnh xác suất để hai anh em Kỷ và Hợi được ngồi cạnh nhau theo hàng ngang hoặc hàng dọc.

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = 36!$.
Gọi A là biến cố: "Kỷ và Hợi được ngồi cạnh nhau".
Ta xét các trường hợp

- **Trường hợp 1.** Kỷ và Hợi ngồi cạnh nhau theo hàng ngang.
Có 6 khả năng chọn hàng ngang, mỗi cách chọn hàng ngang có 5 cách chọn 2 ghế liên tiếp cho Kỷ và Hợi, có 2! cách hoán đổi ghế Kỷ và Hợi, có 34! cách xếp 34 học sinh vào 34 ghế còn lại.
Số cách sắp xếp cho Kỷ và Hợi ngồi cạnh nhau theo hàng ngang là $6 \times 5 \times 2! \times 34!$.
- **Trường hợp 2.** Kỷ và Hợi ngồi cạnh nhau theo hàng dọc.
Tương tự, số cách sắp xếp cho Kỷ và Hợi ngồi cạnh nhau theo hàng dọc là $6 \times 5 \times 2! \times 34!$.

Do đó số phần tử của biến cố A là $n(A) = 2 \times 6 \times 5 \times 2! \times 34!$.
Xác suất của biến cố A là
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2 \times 6 \times 5 \times 2! \times 34!}{36!} = \frac{2}{21}.$$
□

Câu 83. Cho một đa giác (H) có 60 đỉnh nội tiếp đường tròn (O). Người ta lập một tứ giác tùy ý có bốn đỉnh là các đỉnh của (H). Tính xác suất để lập được một tứ giác có bốn cạnh đều là đường chéo của (H).

Lời giải.
Gọi các đỉnh của đa giác là $A_1, A_2, \ldots, A_{60}$. Ta đi tìm các tứ giác lồi có ít nhất một cạnh là cạnh của đa giác. Ta xét các trường hợp sau:

1. Trường hợp 1. Tứ giác có một cạnh là cạnh của đa giác
   - Tứ giác có ba đỉnh $A_1A_2A_4$, số cách chọn đỉnh còn lại là C_{54}^1.
   - Tứ giác có ba đỉnh $A_1A_2A_5$, số cách chọn đỉnh còn lại là C_{53}^1. ...
   - Tứ giác có ba đỉnh $A_1A_2A_{57}$, số cách chọn đỉnh còn lại là C_1^1.

   Tương tự với cạnh còn lại. Vậy trường hợp này có $60\left(C_{54}^1 + C_{53}^1 + \cdots + C_1^1\right) = 89100$ (tứ giác).
2. Trường hợp 2.Tứ giác có hai cạnh là hai cạnh của đa giác. Xét hai khả năng xảy ra
   - Nếu hai cạnh đó là hai cạnh kề nhau khi đó có $60 \cdot C_{55}^1$ (tứ giác).
   - Nếu hai cạnh đó không kề nhau, thì mỗi cạnh A_1A_2 có C_{55}^1 cách chọn cạnh còn lại. Do đó có $\frac{60 \cdot C_{55}^1}{2}$ (tứ giác).
3. Trường hợp 3. Tứ giác có 3 cạnh là ba cạnh của tứ giác. Khi đó ta có 60 tứ giác.

Vậy số tứ giác lồi có ít nhất một cạnh là cạnh của đa giác là $89100 + 60 \cdot C_{55}^1 + \frac{60 \cdot C_{55}^1}{2} + 60 = 94110$.
Số tứ giác có 4 cạnh là đường chéo của đa giác là

$$C_{60}^4 - 94110 = 393525.$$

Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \frac{393525}{C_{60}^4} = 0.807$. □

Câu 84. Cho A là tập hợp tất cả các số có năm chữ số đôi một khác nhau được lập từ các số $0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$. Lấy ngẫu nhiên một số từ A. Tính xác suất để lấy được một số luôn có mặt hai chữ số $1; 7$ và hai chữ số đó đứng kề nhau, chữ số 1 nằm bên trái chữ số 7.

Lời giải.
Số các số có năm chữ số lập được là $7 \cdot A_7^4 = 5880$ số.
Xét tập hợp A các số có dạng $\overline{abcde}$, ta xét các trường hợp

- $a = 1$, có một cách sắp xếp cặp 17, ba vị trí còn lại có $A_6^3 \Rightarrow$ có $1 \cdot A_6^3 = 120$ số.
- $a \neq 1$, khi đó a có 5 cách chọn do $a \neq 0; 1; 7$.
  Xếp cặp 17 có 3 cách, hai vị trí còn lại có $A_5^2 \Rightarrow$ có $5 \cdot 3 \cdot A_5^2 = 300$ số.

Khi đó tập hợp A có $120 + 300$ số $\Rightarrow P(A) = \frac{420}{5880} = \frac{1}{14}$. □

Câu 85. Người ta sử dụng 7 cuốn sách Toán, 8 cuốn sách Vật lí, 9 cuốn sách Hóa học (các cuốn sách cùng loại giống nhau) để làm phần thưởng cho 12 học sinh, mỗi học sinh được 2 cuốn sách khác loại. Trong số 12 học sinh trên có hai bạn Thảo và Hiền. Tính xác suất để hai bạn Thảo và Hiền có phần thưởng giống nhau.

Lời giải.
Từ 24 cuốn sách, ta chia thành 12 phần thưởng, gồm 3 phần thưởng Toán-Lý, 4 phần thưởng Toán-Hóa và 5 phần thưởng Lý-Hóa. Gọi A là biến cố "Thảo và Hiền nhận được phần quà giống nhau". Do đó $n(\Omega) = C_{12}^2$.

- **Trường hợp 1.** cùng phần thưởng Toán-Lý có C_3^2 cách.
- **Trường hợp 2.** cùng phần thưởng Toán-Hóa có C_4^2 cách.
- **Trường hợp 3.** cùng phần thưởng Lý-Hóa có C_5^2 cách.

Nên $n(A) = C_3^2 + C_4^2 + C_5^2$.
Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{19}{66}$. □

Câu 86. Gọi S là tập các số tự nhiên có bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ bảy chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Lấy một số thuộc S. Tính xác suất để lấy được một số chẵn và trong mỗi số đó có tổng hai chữ số hàng chục và hàng trăm bằng 5.

Lời giải.
Số phần tử của tập S là $n(S) = A_7^4 - A_6^3 = 720$.
Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4} \in S$ là số chẵn và trong đó có $a_3 + a_2 = 5$.
Khi đó $\{a_3, a_2\} \in \{\{0,5\}; \{1,4\}; \{2,3\}\}$.
Ta có các trường hợp sau

- Trường hợp $a_4 = 0$. Khi đó, $\overline{a_2a_3}$ có 4 cách chọn vì $\overline{a_2a_3} \in \{14, 41, 23, 32\}$. Còn lại a_1 có 4 cách chọn. Vì thế có $4 \times 4 = 16$ số.
- Trường hợp $a_4 = 2$.

  +) Nếu $\overline{a_2a_3} \in \{05, 50\}$ thì a_1 có 4 cách chọn. Như thế có $2 \times 4 = 8$ số.
  +) Nếu $\overline{a_2a_3} \in \{14, 41\}$ thì a_1 có 3 cách chọn. Như thế có $2 \times 3 = 6$ số.

  Do đó, trong trường hợp này có tất cả $8 + 6 = 14$ số.
- Trường hợp $a_4 = 4$.

  +) Nếu $\overline{a_2a_3} \in \{05, 50\}$ thì a_1 có 4 cách chọn. Như thế có $2 \times 4 = 8$ số.
  +) Nếu $\overline{a_2a_3} \in \{23, 32\}$ thì a_1 có 3 cách chọn. Như thế có $2 \times 3 = 6$ số.

  Do đó, trong trường hợp này có tất cả $8 + 6 = 14$ số.
- Trường hợp $a_4 = 6$.

  +) Nếu $\overline{a_2a_3} \in \{05, 50\}$ thì a_1 có 4 cách chọn. Như thế có $2 \times 4 = 8$ số.
  +) Nếu $\overline{a_2a_3} \in \{14, 41, 23, 32\}$ thì a_1 có 3 cách chọn. Như thế có $4 \times 3 = 12$ số.

  Do đó, trong trường hợp này có tất cả $8 + 12 = 20$ số.

Tóm lại, có tất cả $16 + 14 + 14 + 20 = 64$ số chẵn có 4 chữ số khác nhau và trong mỗi số có tổng hai chữ số hàng chục và hàng trăm bằng 5.
Vậy xác suất cần tính là $P = \dfrac{64}{720} = \dfrac{4}{45}$. □

Câu 87. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên nhỏ hơn 10^6 được thành lập từ hai chữ số 0 và 1. Lấy ngẫu nhiên hai số trong S. Tính xác suất để lấy được ít nhất một số chia hết cho 3.

Lời giải.
Số tự nhiên nhỏ hơn 10^6 có tối đa 6 chữ số.
Số các số tự nhiên nhỏ hơn 10^6, được lập từ hai chữ số 0 và 1 bằng $2 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 64$ (số). Suy ra $n(S) = 64$.
Vì số cần lập chia hết cho 3 nên trong cấu tạo số của nó, hoặc không có chữ số 1 nào (là số 0), hoặc có đúng 3 chữ số 1, hoặc có đúng 6 chữ số 1 (là số 111111).

Xét số có 3 chữ số, trong đó có ba chữ số 1 và không có chữ số 0. Có thể lập được 1 số như thế.
Xét số có 4 chữ số, trong đó có ba chữ số 1 và một chữ số 0. Có thể lập được C_3^2 số như thế.
Xét số có 5 chữ số, trong đó có ba chữ số 1 và hai chữ số 0. Có thể lập được C_4^2 số như thế.
Xét số có 6 chữ số, trong đó có ba chữ số 1 và ba chữ số 0. Có thể lập được C_5^2 số như thế.
Vậy có thể lập được $3 + C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 = 22$ số chia hết cho 3.
Lấy 2 số từ S, có C_{64}^2 cách. Suy ra $n(\Omega) = C_{64}^2 = 2016$.
Gọi A là biến cố: "lấy ngẫu nhiên hai số từ S được ít nhất một số chia hết cho 3".
Ta có $n(A) = C_{22}^2 + C_{22}^1 \cdot C_{42}^1 = 1155$.
Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1155}{2016} = \dfrac{55}{96}$. □

Câu 88. Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất ba lần liên tiếp. Gọi P là tích của ba số ở ba lần gieo (mỗi số là số chấm trên mặt súc sắc). Tính xác suất sao cho P không chia hết cho 6.

Lời giải.

Ta có $n(\Omega) = 6^3 = 216$. Gọi A là biến cố "$P \not\vdots\, 6$", ta xét các trường hợp sau.
Cách 1: Tính trực tiếp.

- Trường hợp 1: Không xuất hiện mặt 3 chấm và 6 chấm. Có 4^3 khả năng.
- Trường hợp 2: Có ít nhất 1 lần xuất hiện mặt 3 chấm và không xuất hiện mặt có số chấm chẵn.
  - Có 1 mặt 3 chấm: $3(1 \cdot 2 \cdot 2)$ khả năng.
  - Có 2 mặt 3 chấm: $3(1 \cdot 1 \cdot 2)$ khả năng.
  - Có 3 mặt 3 chấm: $1 \cdot 1 \cdot 1$ khả năng.

Vậy có tổng cộng $4^3 + 3(1 \cdot 2 \cdot 2) + 3(1 \cdot 1 \cdot 2) + 1 \cdot 1 \cdot 1 = 83$ khả năng $P \not\vdots\, 6$.
Do đó $P(A) = \dfrac{83}{216}$.
Cách 2: Phần bù. Ta đếm số khả năng $P = abc \,\vdots\, 6$.

- **Trường hợp 1.** Có ít nhất 1 lần xuất hiện mặt 6 chấm. Có $6^3 - 5^3$ khả năng.
- **Trường hợp 2.** Có ít nhất 1 lần xuất hiện mặt 3 chấm, không có mặt 6 chấm và P là số chẵn.
  - Có 1 mặt 3 chấm: $3(2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2)$ khả năng (b, c cùng chẵn; b chẵn, c lẻ và ngược lại).
  - Có 2 mặt 3 chấm: $C_3^2 \cdot 2$ khả năng.

Vậy có tổng cộng $6^3 - 5^3 + 3(4 + 2 \cdot 2 \cdot 2) + C_3^2 \cdot 2 = 133$ khả năng $P \,\vdots\, 6$. Do đó $P(A) = 1 - \dfrac{133}{216} = \dfrac{83}{216}$. □

Câu 89. Có 5 học sinh không quen biết nhau cùng đến một cửa hàng kem có 6 quầy phục vụ. Tính xác suất để có 3 học sinh vào cùng một quầy và 2 học sinh còn lại vào cùng một quầy khác.

Lời giải.
Mỗi học sinh có 6 cách chọn vào 1 quầy, suy ra $n(\Omega) = 6^5$.
Gọi A là biến cố: " 3 học sinh vào cùng một quầy và 2 học sinh còn lại vào cùng một quầy khác".
Số cách chọn 3 học sinh từ 5 học sinh để vào cùng một quầy là C_5^3.
Số cách chọn 1 quầy từ 6 quầy để 3 học sinh trên cùng vào là C_6^1. □

Câu 90. Cho một đa giác lồi (H) có 30 đỉnh. Chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh của đa giác đó. Tính xác suất sao cho 4 đỉnh được chọn tạo thành một tứ giác có bốn cạnh đều là đường chéo của (H).

Lời giải.

Số cách chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh trong 30 đỉnh là $C_{30}^4 = 27405$.
Xét tứ giác lồi $A_1A_xA_yA_z$. Để 4 cạnh là đường chéo thì $3 \leqslant x < y - 1 < z - 2 \leqslant 27$.
Như vậy, ta có C_{25}^3 cách chọn bộ $(x;y;z)$. Suy ra có C_{25}^3 tứ giác lồi $A_1A_xA_yA_z$.
Vậy có $30 \times C_{25}^3$tứ giác lồi có các cạnh là đường chéo.
Tuy nhiên, mỗi tứ giác lồi bị lặp lại 4 lần nên sẽ có $\dfrac{30 \cdot C_{25}^3}{4} = 17250$ tứ giác thỏa mãn. Vậy $P = \dfrac{17250}{27405} \approx 0.6294$ □

Câu 91. Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số $\overline{abcde}$ thỏa mãn $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e$ hoặc $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d \geqslant e$.

Lời giải.
Cách 1.

- Xét trường hợp $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e$. Mỗi một bộ gồm 5 số tự nhiên có một chữ số chỉ xếp được duy nhất một số có dạng $abcde$ thoả mãn $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e$. Do ta xét số tự nhiên có 5 chữ số nên a, b, c, d, e chỉ nhận giá trị từ 1 đến 9. Xảy ra các trường hợp sau
  - Trường hợp tất cả các chữ số đều khác nhau có C_9^5 số thỏa mãn.
  - Trường hợp chỉ có 1 chữ số lặp lại i lần $(2 \leqslant i \leqslant 5)$: Chọn chữ số lặp lại có 9 cách, chọn bộ $5 - i$ chữ số từ 8 số còn lại có C_8^{5-i} cách. Vậy trường hợp này có $9 \cdot (C_8^3 + C_8^2 + C_8^1 + C_8^0)$ cách.
  - Trường hợp có đúng 2 chữ số khác nhau lặp lại 2 lần có $C_9^2 \cdot C_7^1$ số thỏa mãn.
  - Trường hợp có đúng 1 chữ số lặp lại 2 lần và đúng 1 chữ số khác lặp lại 3 lần có $2C_9^2$ số thỏa mãn.

  Vậy trường hợp $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e$ có tất cả số các số thỏa mãn bằng
  $$C_9^5 + 9 \cdot (C_8^3 + C_8^2 + C_8^1 + C_8^0) + C_9^2 \cdot C_7^1 + 2C_9^2 = 1287.$$

- Xét trường hợp $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d \geqslant e$. Tương tự trường hợp trên, với a, b, c, d, e có thể nhận giá trị từ 0 đến 9 và có số dạng 00000 là không thỏa mãn. Vậy trường hợp này có tất cả số các số thỏa mãn bằng
  $$C_{10}^5 + 10 \cdot (C_9^3 + C_9^2 + C_9^1 + C_9^0) + C_{10}^2 \cdot C_8^1 + 2C_{10}^2 - 1 = 2001.$$

Vì có 9 số có 5 chữ số giống nhau được tính 2 lần nên số các số tự nhiên có 5 chữ số $\overline{abcde}$ thỏa mãn $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e$ hoặc $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d \geqslant e$ bằng $1287 + 2001 - 9 = 3279$.
Cách 2.

- Trường hợp $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e$: Đặt $a' = a$, $b' = b + 1$, $c' = c + 2$, $d' = d + 3$, $e' = e + 4$, ta có $a' < b' < d' < c' < d' < e'$. Vì $a \geqslant 1$, $e \leqslant 9$ nên $a' \geqslant 1$, $e' \leqslant 13$. Khi đó một số $\overline{abcde}$ ứng với một bộ gồm 5 số phân biệt a', b', c', d', e' được chọn từ tập $\{1; 2; \ldots; 13\}$. Suy ra trường hợp này có $C_{13}^5 = 1287$ số thỏa mãn.

- Trường hợp $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d \geqslant e$: Đặt $a' = a + 4$, $b' = b + 3$, $c' = c + 2$, $d' = d + 1$, $e' = e$, ta có $a' > b' > d' > c' > d' > e'$. Vì $e \geqslant 0$, $a \leqslant 9$ nên $e' \geqslant 0$, $a' \leqslant 13$. Khi đó một số dạng $abcde$ ứng với một bộ gồm 5 số phân biệt a', b', c', d', e' được chọn từ tập $\{0; 1; 2; \ldots; 13\}$. Vì số dạng 00000 không thỏa mãn, nên trường hợp này có $C_{14}^5 - 1 = 2001$ số thỏa mãn.

Vì có 9 số có 5 chữ số giống nhau được tính 2 lần nên số các số tự nhiên có 5 chữ số $\overline{abcde}$ thỏa mãn $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e$ hoặc $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d \geqslant e$ bằng $1287 + 2001 - 9 = 3279$. □

Câu 92. Có 5 học sinh lớp A, 5 học sinh lớp B được xếp ngẫu nhiên vào hai dãy ghế đối diện nhau mỗi dãy 5 ghế (xếp mỗi học sinh một ghế). Tính xác suất để 2 học sinh bất kì ngồi đối diện nhau khác lớp.

Lời giải.

Gọi D là biến cố để xếp được học sinh thỏa mãn 2 học sinh bất kì ngồi đối diện nhau khác lớp.
Số cách sắp xếp 10 học sinh hai trường A, B vào chỗ là $10!$.
Ta đi tìm số cách sắp xếp 10 học sinh thỏa mãn bài toán.
Không mất tính tổng quát ta có thể xét trường hợp sau
Học sinh thứ nhất của trường A có 10 cách chọn ghế
Chọn học sinh trường B ngồi đối diện học sinh thứ nhất trường A có 5 cách.
Chọn học sinh thứ hai trường A có 8 cách chọn ghế.
Chọn học sinh trường B ngồi đối diện học sinh thứ hai trường A có 4 cách.
Chọn học sinh thứ ba trường A có 6 cách chọn ghế.
Chọn học sinh trường B ngồi đối diện học sinh thứ ba trường A có 3 cách.
Chọn học sinh thứ tư trường A có 4 cách chọn ghế.
Chọn học sinh trường B ngồi đối diện học sinh thứ tư trường A có 2 cách.
Chọn học sinh thứ năm trường A có 2 cách chọn ghế.
Chọn học sinh trường B ngồi đối diện học sinh thứ năm trường A có 1 cách.
Vậy có $10 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 2^5 \cdot (5!)^2$.
Do đó $P(D) = \dfrac{2^5 \cdot (5!)^2}{10!}$. □

Câu 93. Có 50 học sinh là cháu ngoan Bác Hồ, trong đó có 4 cặp là anh em sinh đôi (không có anh chị em sinh ba trở lên). Cần chọn ra 5 học sinh trong 50 học sinh trên. Có bao nhiêu cách chọn mà trong nhóm 5 em chọn ra không có cặp anh em sinh đôi nào?

Lời giải.

1. Số cách chọn 5 học sinh trong 50 học sinh là C_{50}^5.
2. Gọi A là số cách chọn 5 học sinh mà có hai cặp sinh đôi. ta tính A:
   - Chọn 2 cặp sinh đôi trong 4 cặp có C_4^2 cách.
   - Chọn một học sinh trong 46 học sinh còn lại có C_{46}^1 cách. Vậy $A = C_4^2 \cdot C_{46}^1$.
3. Gọi B là số cách chọn 5 học sinh có đúng một cặp sinh đôi.Ta tính B.
   - Chọn 1 cặp sinh đôi trong 4 cặp có C_4^1 cách.
   - Gọi B' là số cách chọn 3 học sinh trong 48 học sinh còn lại sao cho không có cặp sinh đôi nào. Khi đó $B = C_4^1 B'$. Ta tính B'.
     - Chọn 3 học sinh trong 48 học sinh có C_{48}^3 cách.
     - Chọn 3 học sinh trong 48 học sinh sao cho có đúng một cặp sinh đôi có $C_3^1 \cdot C_{46}^1$.

     Suy ra $B' = C_{48}^3 - C_3^1 \cdot C_{46}^1$.
     Vậy $B = C_4^1(C_{48}^3 - C_3^1 \cdot C_{46}^1)$.

   Vậy số cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán là $C_{50}^5 - A - B = C_{50}^5 - C_4^2 \cdot C_{46}^1 - C_4^1(C_{48}^3 - C_3^1 \cdot C_{46}^1) = 2049852$.

□

Câu 94. Có bao nhiêu số tự nhiên có 30 chữ số sao cho mỗi số chỉ có mặt hai chữ số 0 và 1, đồng thời số chữ số 1 có mặt trong số tự nhiên đó là số lẻ?

Lời giải.
Số cần lập có dạng $\overline{1a_2a_3\ldots a_{30}}$. Suy ra số cần lập có số chữ số 1 lẻ khi và chỉ khi số chữ số 1 xuất hiện trong số tự nhiên đang xét là chẵn.

- Không có chữ số 1, ta có C_{29}^0 số.
- Có hai chữ số 1, có C_{29}^2 số.

- ...
- Có 28 chữ số 1, có C_{29}^{28} số.

Do đó, có tất cả $C_{29}^{0}+C_{29}^{2}+C_{29}^{4}+\cdots+C_{29}^{28}$ số. Ta có

$$(1+x)^{29}=C_{29}^{0}+xC_{29}^{1}+x^2C_{29}^{2}+\cdots+x^{29}C_{29}^{29}\quad(*).$$

Lần lượt thay $x=1, x=-1$ vào $(*)$, ta được

$$\begin{cases}C_{29}^{0}-C_{29}^{1}+C_{29}^{2}+\cdots-C_{29}^{29}=0 & (1)\\ C_{29}^{0}+C_{29}^{1}+C_{29}^{2}+\cdots+C_{29}^{29}=2^{29} & (2).\end{cases}$$

Cộng vế với vế của (1) và (2), ta có

$$2\left(C_{29}^{0}+C_{29}^{2}+C_{29}^{4}+\cdots+C_{29}^{28}\right)=2^{29}.$$

Vậy có tất cả $C_{29}^{0}+C_{29}^{2}+C_{29}^{4}+\cdots+C_{29}^{28}=2^{28}$ số. □

Câu 95. Cho tập hợp $A=\{1;2;3;4;\ldots;100\}$. Gọi S là tập hợp gồm tất cả các tập con của A, mỗi tập con này gồm 3 phần tử của A và có tổng bằng 91. Chọn ngẫu nhiên một phần tử của S. Tính xác suất chọn được phần tử có ba số lập thành một cấp số nhân.

Lời giải.
Trước tiên, ta đếm số phần tử của S.
Mỗi tập con thuộc S sẽ có dạng $\{a,b,c\}, 0<a<b<c<100, a+b+c=91$. Khi đó ta có $91\geqslant a+(a+1)+(a+2)$ nên $a\leqslant 29$. Với mỗi $1\leqslant a\leqslant 29$, ta có $b+c=91-a$, mà $c\geqslant b+1$ nên $2b\leqslant 90-a\Rightarrow b\leqslant\left\lfloor\dfrac{90-a}{2}\right\rfloor$ và $b\geqslant a+1$ nên có $\left\lfloor\dfrac{90-a}{2}\right\rfloor-a$ cách chọn b. Suy ra số tập con của A thuộc S là $\sum\limits_{a=1}^{29}\left(\left\lfloor\dfrac{90-a}{2}\right\rfloor-a\right)=645$.
Hay số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=645$.
Tiếp theo, ta sẽ đếm số cấp số nhân trong S. Vì các số hạng của cấp số nhân là số nguyên dương nên công bội sẽ là số hữu tỷ dương, giả sử số bé nhất của cấp số nhân là a và công bội là $\dfrac{m}{n}$, với $a,m,n\in\mathbb{Z}^+, a\leqslant 30; m>n, \gcd(m,n)=1$.
Khi đó ta có $a\left(1+\dfrac{m}{n}+\dfrac{m^2}{n^2}\right)=91\Leftrightarrow a\left(m^2+mn+n^2\right)=91n^2$.

Vì $\gcd(m,n)=1$ nên $\gcd\left(m^2+mn+n^2,n^2\right)=1$ nên suy ra $a\,\vdots\,n^2$. Mà $a\leqslant 30$ nên $n^2\leqslant 30\Rightarrow n\leqslant 5$.

- Với $n=1$, ta có $a\left(m^2+m+1\right)=91$. Phương trình này có các nghiệm nguyên dương $(a;m)\in\{(1;9),(7;3),(13;2)\}$, nên có các cấp số nhân $(1;9;81), (7;21;63), (13;26;52)$.
- Với $n=2$, ta có $a\left(m^2+2m+4\right)=364$, không có nghiệm nguyên dương.
- Với $n=3$, ta có $a\left(m^2+3m+9\right)=819$, không có nghiệm nguyên dương.
- Với $n=4$, ta có $a\left(m^2+4m+16\right)=1456$, không có nghiệm nguyên dương.
- Với $n=5$, ta có $a\left(m^2+5m+25\right)=2275$. Phương trình này có nghiệm nguyên dương $(a;m)=(25;6)$, ta nhận được cấp số nhân $(25;30;36)$.

Vậy có 4 cấp số nhân trong S. Gọi A là biến cố "chọn được phần tử có ba số lập thành một cấp số nhân" thì $n(A)=4$.
Suy ra: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{4}{645}$. □

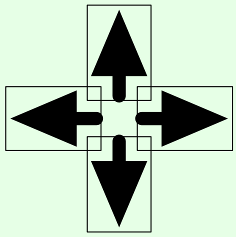
Câu 96. Cho tập A gồm 2018 phần tử, hãy tính tổng số tập con khác rỗng của tập A có số phần tử là số chẵn.

Lời giải.
Số tập con của A có n phần tử là C_{2018}^{n} với $0 \leqslant n \leqslant 2018$.
Số tập con của A khác rỗng có số phần tử là số chẵn

$$C_{2018}^{2} + C_{2018}^{4} + \cdots + C_{2018}^{2016} + C_{2018}^{2018} = C_{2018}^{0} + C_{2018}^{2} + \cdots + C_{2018}^{2016} + C_{2018}^{2018} - 1 = \frac{2^{2018}}{2} - 1 = 2^{2017} - 1.$$

□

Câu 97.
Bạn A chơi game trên máy tính điện tử, máy có bốn phím di chuyển như hình vẽ bên. Mỗi lần nhấn phím di chuyển, nhân vật trong game sẽ di chuyển theo hướng mũi tên và độ dài các bước đi luôn bằng nhau. Tính xác suất để sau bốn lần di chuyển, nhân vật trong game trở về đúng vị trí ban đầu.



Lời giải.
Số cách di chuyển tùy ý từ 4 phím với 4 lần bấm phím là 4^4. Để nhân vật về vị trí ban đầu có 2 trường hợp.

- Mỗi phím bấm 1 lần, có $4! = 24$ cách.
- Bấm 2 lần phím lên trên và 2 lần phím xuống dưới, hoặc bấm 2 lần phím sang trái và 2 lần phím sang phải, có $6 + 6 = 12$ cách.

Xác suất cần tìm là $\dfrac{24 + 12}{4^4} = \dfrac{9}{64}$. □

Câu 98. Ba bạn A, B, C viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1; 14]$. Tính xác suất để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3.

Lời giải.
Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega) = 14^3$.
Trong 14 số tự nhiên thuộc đoạn $[1; 14]$ có:

(i). 5 số chia cho 3 dư 1. (i). 5 số chia cho 3 dư 2. (i). 4 số chia hết cho 3.

Để tổng 3 số chia hết cho 3 ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1. Cả 3 chữ số đều chia hết cho 3 có: 4^3 (cách).

Trường hợp 2. Cả 3 số chia cho 3 dư 1 có: 5^3 (cách).

Trường hợp 3. Cả 3 số chia cho 3 dư 2 có: 5^3 (cách).

Trường hợp 4. Trong 3 số có một số chia hết cho 3; một số chia cho 3 dư 1; một số chia 3 dư 2 được ba người viết lên bảng nên có: $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3!$ (cách).

Gọi biến cố E: "Tổng 3 số chia hết cho 3".
Ta có $n(E) = 4^3 + 5^3 + 5^3 + 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3! = 914$.
Vậy xác suất cần tìm: $P(E) = \dfrac{914}{14^3} = \dfrac{457}{1372}$. □

Câu 99. Một hộp đựng 26 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 26. Bạn Hải rút ngẫu nhiên cùng một lúc ba tấm thẻ. Hỏi có bao nhiêu cách rút sao cho bất kỳ hai trong ba tấm thẻ lấy ra đó có hai số tương ứng ghi trên hai tấm thẻ luôn hơn kém nhau ít nhất 2 đơn vị?

Lời giải.
Để rút được bất kỳ hai trong ba tấm thẻ lấy ra đó có hai số tương ứng ghi trên hai tấm thẻ luôn hơn kém nhau ít nhất 2 đơn vị thì 3 thẻ rút được phải không có hai thẻ nào là hai số tự nhiên liên tiếp.
Số cách rút 3 thẻ bất kì là C_{26}^3.
Số cách rút ra 3 thẻ có đúng hai số tự nhiên liên tiếp được xác định như sau:
Chọn 2 số tự nhiên liên tiếp: $\{1,2\}$; $\{2,3\}$;...; $\{25,26\}$.

1. Chọn hai thẻ liên tiếp là $\{1,2\}$ hoặc $\{25,26\}$ có hai cách, thẻ còn lại không được chọn là thẻ số 3 hoặc 24 do đó có 23 cách. Vậy có $2 \cdot 23 = 46$ cách.

2. Chọn hai thẻ là một trong các cặp $\{2,3\}$; $\{3,4\}$; ...; $\{24,25\}$ có 23 cách, chọn thẻ còn lại chỉ có $26 - 4 = 22$ cách. Vậy có $23 \cdot 22 = 506$ cách.

Số cách chọn 3 thẻ trong đó 3 thẻ được đánh số tự nhiên liên tiếp là $\{1,2,3\}$; $\{2,3,4\}$; ...; $\{24,25,26\}$ có 24 cách.
Vậy có $C_{26}^3 - 46 - 506 - 24 = 2024$ cách chọn bất kỳ hai trong ba tấm thẻ lấy ra đó có hai số tương ứng ghi trên hai tấm thẻ luôn hơn kém nhau ít nhất 2 đơn vị. □

Câu 100. Một túi đựng 10 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 10. Rút ngẫu nhiên ba tấm thẻ từ túi đó. Tính xác suất để tổng số ghi trên ba thẻ rút được là một số chia hết cho 3.

Lời giải.
Gọi $A_0 = \{3;6;9\}$, $A_1 = \{1;4;7;10\}$, $A_2 = \{2;5;8\}$. Để ba số nhận được có tổng chia hết cho 3, ta có các trường hợp
i) Lấy ba phần tử từ A_0 hoặc lấy ba phần tử từ A_1 hoặc lấy ba phần tử từ A_2, trường hợp này có $2C_3^3 + C_4^3$ cách.
ii) Chọn từ mỗi tập A_0, A_1, A_2 đúng một phần tử, trường hợp này có $C_3^1C_3^1C_4^1$ cách.
Vậy xác suất để tổng số ghi trên ba thẻ rút được là một số chia hết cho 3 bằng $\dfrac{2C_3^3 + C_4^3 + C_3^1C_3^1C_4^1}{C_{10}^3}$ □

Câu 101. Cho đa giác đều 12 đỉnh. Chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh trong 12 đỉnh của đa giác. Tính xác suất để 3 đỉnh được chọn tạo thành tam giác đều.

Lời giải.

- Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = C_{12}^3 = 220$.
- Ta chia 12 đỉnh của đa giác đều thành ba nhóm, cứ 4 đỉnh liền nhau tạo thành một nhóm. Mỗi nhóm ta chọn ra 1 đỉnh sao cho chúng cách đều nhau suy ra có 4 tam giác đều $\Rightarrow n(A) = 4$.
- Xác suất $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{4}{220} = \dfrac{1}{55}$.

□

Câu 102. Lấy ngẫu nhiên một số tự nhiên có 9 chữ số khác nhau. Tính xác suất để số đó chia hết cho 3.

Lời giải.
Ta có $X = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.
Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử: "Lấy ngẫu nhiên một số tự nhiên có 9 chữ số khác nhau ".
Ta có $n(\Omega) = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 9 \cdot 9!$.

Gọi biến cố A: "lấy được số tự nhiên chia hết cho 3 ".
Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9}$.

- **Trường hợp 1.** Trong các số $a_i, i \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ không chứa số 0. Số cách chọn n là 9!.
- **Trường hợp 2.** Trong các số $a_i, i \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ có chứa số 0. Khi đó để số n chia hết cho 3 thì các số $a_i, i \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ buộc phải có 7 số $\{0; 1; 2; 4; 5; 7; 8\}$ và 2 trong 3 số $\{3; 6; 9\}$. Số cách chọn n là $C_3^2 \cdot 8 \cdot 8!$.
  Do đó: số cách chọn được số chia hết cho 3 là $n(A) = 9! + C_3^2 \cdot 8 \cdot 8! = 33 \cdot 8!$.

Vậy xác suất để chọn được số chia hết cho 3 là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{33 \cdot 8!}{9 \cdot 9!} = \dfrac{11}{27}$. □

Câu 103. Một đề kiểm tra trắc nghiệm 45 phút môn Tiếng Anh của lớp 10 là một đề gồm 25 câu hỏi độc lập, mỗi câu hỏi có 4 đáp án trả lời trong đó chỉ có một đáp án đúng. Mỗi câu trả lời đúng được 0,4 điểm, câu trả lời sai không được điểm. Bạn Bình vì học rất kém môn Tiếng Anh nên làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên câu trả lời cho tất cả 25 câu. Gọi A là biến cố "Bình làm đúng k câu", biết xác suất của biến cố A đạt giá trị lớn nhất. Tính k.

Lời giải.
Vì đề thi có 25 câu và mỗi câu có 4 phương án trả lời nên xác suất để Bình làm đúng k câu là

$$P = C_{25}^k \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{25-k} = \frac{C_{25}^k \cdot 3^{25-k}}{4^{25}}$$

với $0 \leqslant k \leqslant 25$. Xét hàm $f(k) = C_{25}^k \cdot 3^{25-k}$ với $k \in \mathbb{N}$ và $k \leqslant 25$.
Ta có $f(k)$ lớn nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} f(k) \geqslant f(k-1) \\ f(k) \geqslant f(k+1) \end{cases} \Leftrightarrow 6{,}5 \geqslant k \geqslant 5{,}5 \Rightarrow k = 6$.
Suy ra $\max\limits_{0 \leqslant k \leqslant 25} f(k) = f(6)$.
Vậy $k = 6$. □

Câu 104. Hai chuồng nhốt thỏ, mỗi con thỏ chỉ mang màu trắng hoặc màu đen. Bắt ngẫu nhiên mỗi chuồng 1 con thỏ. Biết tổng số thỏ trong hai chuồng là 35 và xác suất để bắt được hai con thỏ lông màu đen là $\dfrac{247}{300}$. Tính xác suất để bắt được hai con thỏ lông màu trắng.

Lời giải.
Gọi số thỏ ở chuồng số 1 là x, khi đó số thỏ ở chuồng số 2 là $35 - x$. Số phần tử không gian mẫu $n(\Omega) = C_x^1 \cdot C_{35-x}^1$.
Gọi a là số thỏ đen ở chuồng số 1.
Gọi b là số thỏ đen ở chuồng số 2.
Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geqslant b$. Ta có xác suất bắt được hai con thỏ đen là

$$\frac{C_a^1 \cdot C_b^1}{C_x^1 C_{35-x}^1} = \frac{247}{300} \Leftrightarrow \frac{ab}{x(35-x)} = \frac{247}{300}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ab \,\vdots\, 247 (= 19 \cdot 13 = 247 \cdot 1) \\ x(35-x) \,\vdots\, 300 \\ a, b < 35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 19 \\ b = 13 \\ x(35-x) \,\vdots\, 300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 19 \\ b = 13 \\ x = 20. \end{cases}$$

Vậy xác suất để bắt được hai con thỏ lông trắng là $P(A) = \dfrac{1 \cdot 2}{300} = \dfrac{1}{150}$. □

Câu 105. Từ các chữ số $\{0;1;2;3;4;5;6\}$ viết ngẫu nhiên một số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$. Tính xác suất để viết được số thỏa mãn điều kiện $a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6$.

Lời giải.

- Số các số gồm 6 chữ số khác nhau từ tập hợp $\{0,1,2,3,4,5,6\}$:
  Chọn $a_1 \neq 0$ có 6 cách, sắp xếp các số còn lại có A_6^5 cách nên có tổng số $6 \cdot A_6^5 = 4320$ số.
- Số các số thỏa mãn điều kiện $a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6$:
  Ta có $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=3(a_1+a_2)$ là số chia hết cho 3.
  Mà $0+1+2+3+4+5+6=21$ là số chia hết cho 3 nên chữ số không xuất hiện trong số được lập phải là số chia hết cho 3.

Trường hợp 1. Chữ số 0 không có mặt trong số được lập.
Ta có $\{a_1,a_2,\ldots,a_6\}=\{1,2,3,4,5,6\}$.
Khi đó $a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6=7$ nên $\{\{a_1,a_2\},\{a_3,a_4\},\{a_5,a_6\}\}=\{\{1,6\},\{2,5\},\{3,4\}\}$.
Có 3! cách xếp các cặp $\{1,6\}$, $\{2,5\}$, $\{3,4\}$ vào các vị trí của các cặp $\{a_1,a_2\}$, $\{a_3,a_4\}$, $\{a_5,a_6\}$, trong mỗi cặp vị trí lại có 2 cách xếp nên có $3! \cdot 2^3 = 48$ số.
Trường hợp 2. Chữ số 3 không có mặt trong số được lập.
Ta có $\{a_1;a_2;\ldots,a_6\}=\{0;1;2;4;5;6\}$.
Khi đó $a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6=6$ nên $\{\{a_1,a_2\},\{a_3,a_4\},\{a_5,a_6\}=\{\{0,6\},\{1,5\},\{2,4\}\}$.
Tương tự như trên nếu coi chữ số 0 như các chữ số khác, ta có 48 cách.
Nhưng cần loại các số có số 0 đứng đầu, có dạng $\overline{06a_3a_4a_5a_6}$. Lý luận tương tự, có $2\cdot2\cdot2=8$ số như thế.
Suy ra trường hợp này, ta có $48-8=40$ số.
Trường hợp 3. Chữ số 6 không có mặt trong số được lập. Ta có $\{a_1;a_2;\ldots;a_6\}=\{0;1;2;3;4;5\}$. Tương tự như trường hợp 2, ta có $48-8=40$ số.
Vậy có $48+40+40=128$ số thỏa mãn điều kiện $a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6$.
Xác suất cần tìm là $p=\dfrac{128}{4320}=\dfrac{4}{135}$. □

Câu 106. Từ các chữ số $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ viết ngẫu nhiên một số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$. Tính xác suất p để viết được số thỏa mãn điều kiện $a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6$.

Lời giải.
Các cặp số $\{a_1,a_2\}$; $\{a_3,a_4\}$; $\{a_5,a_6\}$ thỏa mãn bài toán $a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6$ là

- **Trường hợp 1.** $\{0,6\}$; $\{1,5\}$; $\{2,4\}$
- **Trường hợp 2.** $\{0,5\}$; $\{1,4\}$; $\{2,3\}$
- **Trường hợp 3.** $\{1,6\}$; $\{2,5\}$; $\{3,4\}$

Khi đó không gian mẫu là $n(\Omega)=6\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2=4320$.
Số các số thỏa mãn bài toán kể cả trường hợp $a_1=0$ khi đó số các số là $3\cdot(2!)^3\cdot3!$.
Khi $a_1=0$ khi đó số các số là $2\cdot(2!)^2\cdot2!$. Suy ra số các số thỏa mãn bài toán là $144-16=128$.
Do đó $p=\dfrac{128}{4320}=\dfrac{4}{135}$. □

Câu 107. Một nhóm hóc sinh gồm 6 nam trong đó có Bình và 4 bạn nữ trong đó có An được xếp ngẫu nhiên vào 10 ghế trên một hàng ngang dự lễ tổng kết năm học. Tính xác suất để xếp được hai bạn nữ gần nhau có đúng 2 bạn nam, đồng thời Bình không ngồi cạnh An.

Lời giải.
Số cách xếp 10 bạn vào ghế ngồi là $|\Omega|=10!$.
Gọi A là biến cố để "xếp được hai bạn nữ gần nhau có đúng 2 bạn nam, đồng thời Bình không ngồi cạnh An". Có hai trường hợp sau

- Trường hợp 1. An ngồi ở hai đầu.
  Có hai cách xếp An.
  Số cách xếp Bình là 5.
  Số cách xếp 3 bạn nữ còn lại là 3!.
  Số cách xếp 5 bạn nam còn lại là 5!.
  Số cách xếp để An ngồi ở đầu hàng hoặc cuối hàng là $5! \cdot 3! \cdot 5 \cdot 2$.

- Trường hợp 2. An ngồi ở giữa.
  Có hai cách xếp An.
  Số cách xếp Bình là 4.
  Số cách xếp 3 bạn nữ còn lại là 3!.
  Số cách xếp 5 bạn nam còn lại là 5!.
  Số cách xếp để An ngồi ở đầu hàng hoặc cuối hàng là $5! \cdot 3! \cdot 4 \cdot 2$.

Vậy số cách xếp để được hai bạn nữ gần nhau có đúng 2 bạn nam, đồng thời Bình không ngồi cạnh An là $|A| = 5! \cdot 3! \cdot 5 \cdot 2 + 5! \cdot 3! \cdot 4 \cdot 2$.
Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{5! \cdot 3! \cdot 5 \cdot 2 + 5! \cdot 3! \cdot 4 \cdot 2}{10!} = \dfrac{1}{280}$. □

Câu 108. Mẹ của Bình có một gói kẹo gồm 20 viên khác nhau. Mẹ cho Bình lấy một cách ngẫu nhiên một số viên kẹo trong một lần, phần kẹo còn lại là của anh trai Bình. Biết rằng cả hai anh em Bình đều có kẹo. Tính xác suất để số kẹo của hai anh em Bình bằng nhau.

Lời giải.
Số phần tử không gian mẫu bằng số cách chọn k viên kẹo tùy ý với $1 \leqslant k \leqslant 19$ nên

$$n(\Omega) = C_{20}^{1} + C_{20}^{2} + \cdots + C_{20}^{19} = 2^{20} - 2.$$

Số cách chọn kẹo để số kẹo của hai anh em Bình bằng nhau là C_{20}^{10}. Xác suất cần tính bằng

$$\frac{C_{20}^{10}}{2^{20} - 2} = 0,1761.$$

□

Câu 109. Tung hai con súc sắc 3 lần độc lập với nhau. Tính xác suất để có đúng một lần tổng số chấm xuất hiện trên hai mặt của hai con súc sắc bằng 6.

Lời giải.
Mỗi lần gieo đồng thời hai con súc sắc, có 36 kết quả có thể xảy ra.
Gọi A: "tổng số chấm xuất hiện trên hai mặt của con súc sắc bằng 6 ".
Khi đó, $A = \{(1;5), (2;4), (3;3), (4;2), (5;1)\} \Rightarrow n(A) = 5, n\left(\overline{A}\right) = 31$ và $P(A) = \dfrac{5}{36}, P\left(\overline{A}\right) = \dfrac{31}{36}$.
Gọi B: "có đúng một lần tổng số chấm xuất hiện trên hai mặt của con súc sắc bằng 6 ", ta có $B = \overline{A}AA + A\overline{A}A + AA\overline{A}$.
Do đó,

$$\begin{aligned} P(B) &= P\left(\overline{A}\right) P(A)P(A) + P(A)P\left(\overline{A}\right) P(A) + P(A)P(A)P\left(\overline{A}\right) \\ &= \frac{5}{36} \cdot \frac{31}{36} \cdot \frac{31}{36} + \frac{31}{36} \cdot \frac{5}{36} \cdot \frac{31}{36} + \frac{31}{36} \cdot \frac{31}{36} \cdot \frac{5}{36} \\ &\approx 0{,}309. \end{aligned}$$

□

Câu 110. Xếp chỗ cho 6 học sinh trong đó có học sinh A và 3 thầy giáo vào 9 ghế thành hàng ngang (mỗi ghế xếp một người). Tính xác xuất sao cho thầy giáo ngồi giữa hai học sinh và học sinh A ngồi ở một trong hai đầu hàng.

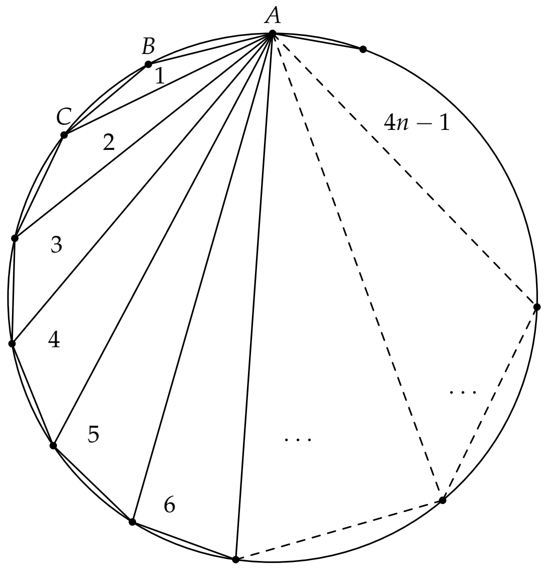
Lời giải.
Gọi M là biến cố: "Thầy giáo ngồi giữa hai học sinh và học sinh A ngồi ở một trong hai đầu hàng". Ta sẽ tính số phần tử của M.

- Xếp 5 học sinh (không có A), có 5! cách.
- Xếp học sinh A ở đầu hoặc cuối dãy, có 2 cách.
- Xếp 3 giáo viên vào 5 khoảng hở do 6 học sinh tạo ra, có A_5^3 cách.

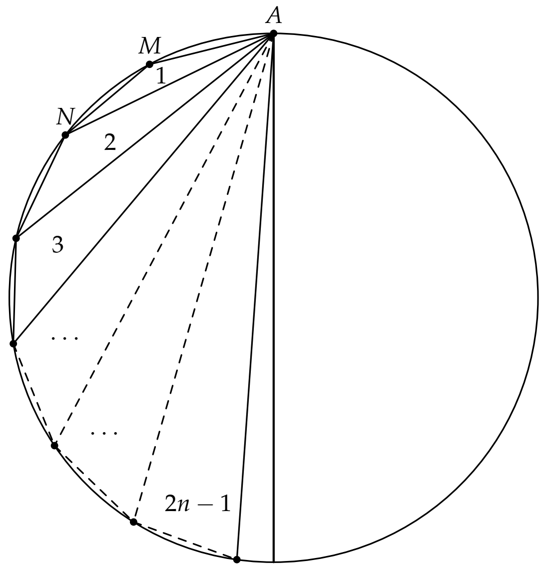
Do đó, $n(M) = 5! \cdot 2 \cdot A_5^3$.
Vì có 9! cách xếp 9 người vào 9 vị trí nên $n(\Omega) = 9!$.
Vậy $P(M) = \dfrac{5}{126}$. □

Câu 111. Chọn ngẫu nhiên ba đỉnh từ $4n+1$ đỉnh của đa giác đều $4n+1, n \in \mathbb{N}^*$ đỉnh. Tính xác suất ba đỉnh được chọn là ba đỉnh của tam giác tù.

Lời giải.



Hình 1



Hình 2

Từ đỉnh A của hình 1, ta thấy có thể vẽ $1+2+\cdots+(4n-1)$ tam giác "kiểu" $\triangle ABC$ trong đó vai trò các đỉnh A, B, C là như nhau. Do vậy, ta có

$$n(\Omega) = (4n+1)\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{(4n-1)\cdot(1+4n-1)}{2} = \frac{2n\cdot(4n+1)\cdot(4n-1)}{3}.$$

Từ đỉnh A của hình 2, ta thấy có thể vẽ $1+2+\cdots+(2n-1)$ tam giác tù "kiểu" $\triangle AMN$ trong đó vài trò các đỉnh M, N là như nhau. Do vậy, ta có

$$n(A) = (4n+1)\cdot 2\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{(2n-1)\cdot(1+2n-1)}{2}\right] = n\cdot(4n+1)\cdot(2n-1).$$

Vậy $P(A) = \dfrac{3\cdot(2n-1)}{2\cdot(4n-1)}$. □

Câu 112. Cho đa giác lồi n cạnh ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 5$). Lấy ngẫu nhiên 4 đỉnh của đa giác. Tính xác suất để 4 đỉnh lấy ra tạo thành một tứ giác có tất cả các cạnh đều là đường chéo của đa giác đã cho bằng $\dfrac{30}{91}$.

Lời giải.
Không gian mẫu là tập các khả năng lấy ra 4 đỉnh trong n đỉnh, do đó $n(\Omega) = C_n^4$.
Gọi A là biến cố 4 đỉnh lấy ra tạo thành tứ giác có các cạnh đều là đường chéo. Để đếm số phần tử của A, ta làm như sau.
Kí hiệu các đỉnh của đa giác là $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Để chọn được một tứ giác thỏa mãn yêu cầu, ta thực hiện qua các công đoạn

- Chọn một đỉnh: có n cách chọn.
- Chọn ba đỉnh còn lại. Giả sử công đoạn một ta chọn đỉnh A_1, ba đỉnh còn lại là A_i, A_j, A_k. Thế thì 3 đỉnh A_i, A_j, A_k phải thỏa mãn $3 \leqslant i < j-1 < k-2 \leqslant n-3$. Suy ra số cách chọn 3 đỉnh A_i, A_j, A_k bằng số cách lấy ra 3 số phân biệt trong $(n-3)-3+1 = n-5$ số, tức là có C_{n-5}^3 cách.

Vậy số tứ giác có các cạnh đều là đường chéo là $n \cdot C_{n-5}^3$. Tuy nhiên, trong số này mỗi tứ giác ta đếm lặp 4 lần. Do đó số tứ giác có các cạnh đều là đường chéo bằng $\dfrac{n \cdot C_{n-5}^3}{4}$.
Từ đó $n(A) = \dfrac{n \cdot C_{n-5}^3}{4}$. Theo giả thiết suy ra

$$P(A) = \frac{n \cdot C_{n-5}^3}{4 \cdot C_n^4} = \frac{30}{91} \Leftrightarrow n = 15.$$

□

Câu 113. Có 12 người xếp thành một hàng dọc (vị trí của mỗi người trong hàng là cố định). Chọn ngẫu nhiên 3 người trong hàng. Tính xác suất để 3 người được chọn không có hai người nào đứng cạnh nhau.

Lời giải.
Không gian mẫu Ω có $n(\Omega) = C_{12}^3 = 220$.
Giả sử chọn 3 người có số thứ tự trong hàng lần lượt là a, b, c.
Theo giả thiết ta có $a < b < c$ và $b - a > 1, c - b > 1$ nên $a < b - 1$ và $b < c - 1$.
Suy ra $1 \leqslant a < b - 1 < c - 2 \leqslant 10$.
Đặt $a' = a, b' = b - 1, c' = c - 2$, ta có $1 \leqslant a' < b' < c' = c - 2 \leqslant 10$.
Gọi A là biến cố chọn ngẫu nhiên 3 người trong hàng.
Việc chọn ngẫu nhiên 3 người trong hàng tương ứng với việc chọn 3 số a', b', c' bất kỳ trong tập hợp $\{1; 2; 3; \ldots; 10\}$ nên có $n(A) = C_{10}^3 = 120$.
Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{120}{220} = \dfrac{6}{11}$. □

Câu 114. Từ một hộp có 1000 thẻ được đánh số từ 1 đến 1000. Chọn ngẫu nhiên ra hai thẻ. Tính xác suất để chọn được hai thẻ sao cho tổng của các số ghi trên hai thẻ đó nhỏ hơn 700.

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{1000}^2$.
Gọi a, b lần lượt là số của hai tấm thẻ được chọn, ta có $a + b = n, (a, b, n \in \mathbb{N}, 1 < n < 700, a \neq b)$.
Xét phương trình $a + b = n, \ (a, b, n \in \mathbb{N}, 1 < n < 700)$. (1)
Bước 1. Ta đếm số nghiệm của phương trình (1).

- Với $n = 2$ thì có số nghiệm là C_1^1 nghiệm.

- Với $n = 3$ thì có số nghiệm là C_2^1.

  ...

- Với $n = 699$ thì có số nghiệm là C_{698}^1.

Vậy tổng số nghiệm $(a; b; n)$ của phương trình (1) là

$$C_1^1 + C_2^1 + C_3^1 + \cdots + C_{698}^1 = \frac{698 \times 699}{2} = 243951.$$

Bước 2. Đếm số nghiệm của phương trình (1) thoả mãn $a = b$.
Khi đó $a + b = n \Leftrightarrow 2a = n$ nên ta chỉ cần xét n chẵn. Ta có n có dạng $n = 2k, (k \in \mathbb{N}, 1 \leqslant k \leqslant 349)$, mỗi giá trị của k ta có một nghiệm của phương trình (1) là $(a; b; n) = (k; k; 2k)$. Do $1 < n = 2k < 700 \Rightarrow$ có tất cả 349 nghiệm dạng $(k; k; n)$ với $n = 2k$ của phương trình (1). Từ các kết quả trên ta có tổng số nghiệm $(a; b; n)$ của (1) thoả mãn $a \neq b$ là

$$243951 - 349 = 243602.$$

Với mỗi giá trị n thì mỗi cặp $(a; b)$ chọn được thoả mãn $a + b = n$, $a \neq b$ ứng với hai nghiệm của phương trình (1) nên tổng số cách chọn là

$$n(A) = \frac{243602}{2} = 121801.$$

Từ đó suy ra xác suất cần tính là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{121801}{C_{1000}^2}$. □

Câu 115. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có chín chữ số được lập từ các số $1; 2; 3; 4; 5$. Lấy ngẫu nhiên một số từ S. Tính xác suất để lấy được số thỏa mãn điều kiện: các chữ số $1; 2; 3; 4$ có mặt đúng hai lần, chữ số 5 có mặt đúng một lần và các chữ số lẻ nằm ở vị trí lẻ (tính từ trái qua phải).

Lời giải.
Gọi số tạo thành có dạng $\overline{a_1 a_2 \cdots a_9}$.
Do mỗi số $a_1, a_2, \ldots, a_9$ có 5 cách chọn nên theo quy tắc nhân có 5^9 số tạo thành.
Vậy $n(\Omega) = C_{5^9}^1 = 5^9$. Các số lẻ vừa đủ 5 vị trí lẻ nên các số chẵn sẽ nằm ở vị trí chẵn. Ta xếp hai số 2 và hai số 4 vào 4 vị trí a_2, a_4, a_6, a_8. Giả sử các chữ số là khác nhau thì ta có 4! cách xếp. Tuy nhiên do ta có hai số 2 và hai số 4 nên số cách xếp hai số 2 vào 4 vị trí bị lặp 2! lần; số cách xếp hai số 4 vào 4 vị trí cũng bị lặp 2! lần. Do đó số cách xếp hai số 2 và hai số 4 vào 4 vị trí a_2, a_4, a_6, a_8 là $\dfrac{4!}{2! \times 2!} = 6$.
Xếp hai số 1, hai số 3 và một số 5 vào 5 ví trí lẻ còn lại. Lập luận tương tự như trên ta có $\dfrac{5!}{2!2!1!} = 30$ cách xếp.
Vậy có $6 \times 30 = 180$ số thỏa mãn các tính chất của biến cố.
Do đó $P = \dfrac{180}{5^9}$. □

Câu 116. Có bao nhiêu số hạng là số nguyên trong khai triển của biểu thức $(\sqrt[3]{3} + \sqrt[5]{5})^{2019}$.

Lời giải.
Ta có $(\sqrt[3]{3} + \sqrt[5]{5})^{2019} = \sum\limits_{k=0}^{2019} C_{2019}^k \cdot \left(\sqrt[3]{3}\right)^{2019-k} \cdot \left(\sqrt[5]{5}\right)^k = \sum\limits_{k=0}^{2019} C_{2019}^k \cdot 3^{\frac{2019-k}{3}} \cdot 5^{\frac{k}{5}}$.
Để trong khai triển có số hạng là số nguyên thì

$$\begin{cases} k \in \mathbb{N} \\ 0 \leqslant k \leqslant 2019 \\ \dfrac{2019-k}{3} \in \mathbb{N} \\ \dfrac{k}{5} \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \in \mathbb{N} \\ 0 \leqslant k \leqslant 2019 \\ 673 - \dfrac{k}{3} \in \mathbb{N} \\ \dfrac{k}{5} \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \in \mathbb{N} \\ 0 \leqslant k \leqslant 2019 \\ k \,\vdots\, 15. \end{cases}$$

Cách 1:
Ta có $k \vdots 15 \Rightarrow k = 15m$ mà $0 \leqslant k \leqslant 2019 \Leftrightarrow 0 \leqslant 15m \leqslant 2019 \Leftrightarrow 0 \leqslant m \leqslant 134{,}6$. Suy ra có 135 số hạng là số nguyên trong khai triển của biểu thức.
Cách 2:
Số lớn nhất bé hơn 2019 và chia hết cho 15 là 2010.
Các số k cần tìm tạo thành cấp số cộng có n số hạng, số hạng đầu $u_1 = 0$, số hạng cuối $u_n = 2010$ và công sai $d = 15$.
Ta có $u_n = u_1 + (n-1) \cdot d \Leftrightarrow n = 135$. □

Câu 117. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $OMNP$ với $M(0;10)$, $N(100;10)$, $P(100;0)$. Gọi S là tập hợp tất cả các điểm $A(x;y)$ với $x, y \in \mathbb{Z}$ nằm bên trong (kể cả trên cạnh) của hình chữ nhật $OMNP$. Lấy ngẫu nhiên một điểm $A(x;y) \in S$. Tính xác suất để $x + y \leqslant 90$.

Lời giải.
Tập hợp S có $11 \cdot 101 = 1111$ điểm.
Ta xét $S' = \{(x;y) : x + y > 90\}$ với $0 \leqslant x \leqslant 100$ và $0 \leqslant y \leqslant 10$.
Khi $y = 0 \Rightarrow x > 90 \Rightarrow x = \overline{91;100} \Rightarrow$ có 10 giá trị của x.
Khi $y = 1 \Rightarrow x > 89 \Rightarrow x = \overline{90;100} \Rightarrow$ có 11 giá trị của x.
...
Khi $y = 10 \Rightarrow x > 80 \Rightarrow x = \overline{81;100} \Rightarrow$ có 20 giá trị của x.
Như vậy S' có 165 phần tử. Vậy xác suất cần tìm là: $\dfrac{1111 - 165}{1111} = \dfrac{86}{101}$. □

Câu 118. Trong vòng loại một cuộc thi chạy 1000 m có 9 bạn tham gia trong đó có 2 bạn lớp $A1$, 3 bạn lớp A_2 và 4 bạn đến từ các lớp khác nhau. Thầy giáo xếp ngẫu nhiên các bạn kể trên thành một hàng ngang để xuất phát. Tính xác suất sao cho không có học sinh nào cùng lớp đứng kề nhau.

Lời giải.
Gọi 3 bạn lớp A_2 là M_2, N_2, P_2, hai bạn lớp A_1 là M_1, N_1.
Số cách xếp ngẫu nhiên 9 bạn vào cùng một hàng ngang là 9! cách.
Nhận xét. Số cách xếp sao cho không có bạn nào cùng lớp bằng số cách xếp sao cho ba bạn M_2, N_2, P_2 không đứng cạnh nhau trừ đi số cách xếp sao cho ba bạn M_2, N_2, P_2 không đứng cạnh nhau và hai bạn M_1, N_1 đứng cạnh nhau.

1. Đếm số cách xếp sao cho ba bạn M_2, N_2, P_2 không đứng cạnh nhau. Đầu tiên ta xếp ba bạn M_2, N_2, P_2 đứng cạnh nhau, có $3! = 6$ cách. Xét trường hợp ba bạn này được xếp theo thứ tự M_2, N_2, P_2. Tiếp theo, ta xếp các bạn còn lại vào sao cho ba bạn M_2, N_2, P_2 không đứng cạnh nhau. Gọi $x_1; x_2; x_3; x_4$ lần lượt là số bạn xếp phía bên trái M_2, giữa M_2, N_2, giữa N_2, P_2 và bên phải P_2. Số nghiệm nguyên của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$, trong đó $x_2 \geqslant 1, x_3 \geqslant 1, x_1 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0$, bằng số nghiệm nguyên của phương trình $x_1 + x_2' + x_3' + x_4 = 4$, trong đó $x_1 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0, x_2' = x_2 - 1 \geqslant 0, x_3' = x_3 - 1 \geqslant 0$. Suy ra có 28 trường hợp x_1, x_2, x_3, x_4. Vậy, nếu tính cả các hoán vị, ta có số cách xếp sao cho ba bạn M_2, N_2, P_2 không đứng cạnh nhau là $6.28.6! = 120960$ cách.

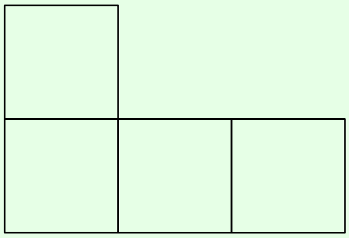
2. Đếm số cách xếp sao cho ba bạn M_2, N_2, P_2 không đứng cạnh nhau và hai bạn M_1, N_1 đứng cạnh nhau. Đầu tiên ta xếp ba bạn M_2, N_2, P_2 đứng cạnh nhau, có $3! = 6$ cách. Xét trường hợp ba bạn này được xếp theo thứ tự M_2, N_2, P_2. Vì M_1, N_1 đứng ở vị trí liên tiếp nên ta có thể coi M_1, N_1 là một bạn P_1 nào đó. Ta sẽ xếp P_1 và 4 bạn khác lớp còn lại vào sao cho M_2, N_2, P_2 không đứng cạnh nhau. Gọi $y_1; y_2; y_3; y_4$ lần lượt là số bạn xếp phía bên trái M_2, giữa M_2, N_2, giữa N_2, P_2 và bên phải P_2. Số nghiệm nguyên của phương trình $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 5$, trong đó $y_2 \geqslant 1, y_3 \geqslant 1, y_1 \geqslant 0, y_4 \geqslant 0$, bằng số nghiệm nguyên của phương trình $y_1 + y_2' + y_3' + y_4 = 3$, trong đó $y_1 \geqslant 0, y_4 \geqslant 0, y_2' = x_2 - 1 \geqslant 0, y_3' = y_3 - 1 \geqslant 0$. Suy ra có 19 trường hợp $y_1; y_2; y_3; y_4$. Vậy, nếu tính cả các hoán vị, ta có số cách xếp sao cho ba bạn M_2, N_2, P_2 không đứng cạnh nhau và hai bạn M_1, N_1 đứng cạnh nhau là $6.19.2!.4! = 5472$ cách.

Vậy, xác xuất sao cho không có học sinh nào cùng lớp đứng kề nhau là

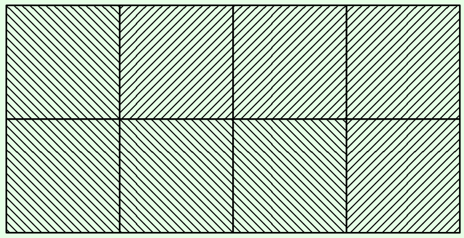
$$P = \frac{120960 - 5472}{9!} = \frac{401}{1260}.$$

$\square$

Câu 119. Trong một hộp có chứa các tấm bìa dạng hình chữ nhật có kích thước đôi một khác nhau, các cạnh của hình chữ nhật có kích thước là m và n ($m, n \in \mathbb{N}; 1 \leqslant m,\ n \leqslant 20$, đơn vị là cm). Biết rằng mỗi bộ kích thước (m, n) đều có tấm bìa tương ứng. Ta gọi một tấm bìa là "tốt" nếu tấm bìa đó có thể được lắp ghép từ các miếng bìa dạng hình chữ L gồm 4 ô vuông, mỗi ô có độ dài cạnh là 1 cm để tạo thành nó (Xem hình vẽ minh họa một tấm bìa "tốt" bên dưới)



Một miếng bìa chữ L



Một tấm bìa tốt kích thước $(2, 4)$

Rút ngẫu nhiên một tấm bìa từ hộp, tính xác suất để tấm bìa vừa rút được là tấm bìa "tốt".

Lời giải.

Trước tiên, ta đi chứng minh bài toán đếm cặp số (m, n) với $m, n > 1$ và $m \cdot n \,\vdots\, 8$.

- Giả sử tấm bìa tốt kích cỡ $m \times n$ phủ bằng N miếng bìa hình chữ L. Lúc đó diện tích tấm bìa tốt sẽ là $m \times n = 4N$.
- Rõ ràng $m, n > 1$. Giả sử m chẵn, ta tiến hành tô màu các dòng của tấm bìa tốt bằng cách đam xen xanh – đỏ với quy tắc dòng lẻ tô xanh, dòng chẵn tô đỏ. Khi đó mỗi chữ L có số ô được tô xanh là lẻ, đồng thời trên bảng số ô xanh sẽ bằng số ô đỏ. Vì thế N chẵn Từ đây ta có $m \cdot n \,\vdots\, 8$.
- Nếu $m \,\vdots\, 4$ và $n \,\vdots\, 2$ thế thì ta phân hoạch tấm bìa cỡ $m \times n$ thành $\left(\dfrac{m}{4}\right) \times \left(\dfrac{n}{2}\right)$ hình chữ nhật 4×2, các hình chữ nhật này mỗi hình phủ được bằng hai chữ hai chữ L. Còn nếu $m \,\vdots\, 8$ và n là số lẻ thì do $n > 1$ nên viết $n = 2l + 3$. Ta phân hoạch tấm bìa cỡ $m \times n$ thành $\left(\dfrac{m}{4}\right) \times l$ tấm bìa kích cỡ 4×2 cùng một kích cỡ 8×3, tấm bìa kích cỡ 8×3 có thể phủ bằng 6 chữ L.

Tóm lại, một tấm bìa tốt khi và chỉ khi nó có kích cỡ $m \times n$ với $m, n > 1$ và $m \cdot n \,\vdots\, 8$.
Chọn cặp (m, n) với $m \neq n$ thuộc tập $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$, có C_{20}^2 cách.
Chọn cặp (m, n) với $m = n$ thuộc tập $\{1; 2; 3; \ldots; 20\}$, có 20 cách.
Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{20}^2 + 20 = 210$.
Gọi A là biến cố: "tấm bìa rút được là tấm bìa "tốt"".
Do hình chữ nhật có bộ kích thước (m, n) cũng chính là hình chữ nhật có bộ kích thước (n, m) nên ta chỉ cần xét với kích thước $m > 2$.

Ta cần đếm các bộ (m, n) mà $m, n \geqslant 2$ đồng thời $m \cdot n \,\vdots\, 8$.

- $m \in \{8, 16\}$ khi đó ta chọn n bất kì thuộc tập $\{2, 3, \ldots 20\}$ suy ra có $19 + 18 = 37$ tấm bìa "tốt".
- $m \in \{4, 12, 20\}$. Do $4 = 4 \cdot 1; 12 = 4 \cdot 3; 20 = 4 \cdot 5$ nên muốn $m \cdot n$ chia hết cho 8 thì n phải chẵn. Tập $\{2, 4, 6, 10, 12, 14, 18, 20\}$ có 8 phần tử.
  - Với $m = 4$, có 8 cách chọn n.
  - Với $m = 12$, có 7 cách chọn n.
  - Với $m = 20$, có 6 cách chọn n.

  Trong trường hợp này có $8 + 7 + 6 = 21$ cách chọn.

Suy ra $n(A) = 37 + 21 = 58$.

Vậy xác suất để rút được tấm bìa "tốt" là $P(A) = \dfrac{58}{210} = \dfrac{29}{105}$. □

Câu 120. Một bảng vuông gồm 100×100 ô vuông đơn vị. Chọn ngẫu nhiên một hình chữ nhật. Tính xác suất để hình được chọn là hình vuông.

Lời giải.

Mỗi hình chữ nhật được tạo bởi 2 đường lưới dọc và 2 đường lưới ngang. Có C_{101}^2 cách chọn 2 đường lưới dọc và C_{101}^2 cách chọn 2 đường lưới ngang nên số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{101}^2 \cdot C_{101}^2$.

Gọi A là biến cố "hình được chọn là hình vuông". Có 100^2 hình vuông có kích thước 1×1, 99^2 hình vuông có kích thước 2×2, 98^2 hình vuông có kích thước 3×3, $\ldots$, 1^2 hình vuông có kích thước 100×100 nên số trường hợp thuận lợi cho biến cố A là

$$n(A) = 100^2 + 99^2 + 98^2 + \cdots + 1^2 = \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} = 338350$$

Suy ra xác suất của biến cố A là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{338350}{C_{101}^2 \cdot C_{101}^2} = \dfrac{67}{5050} \approx 0{,}0133$. □

Câu 121. Gọi S là tập các số tự nhiên có 6 chữ số được lập từ $A = \{0; 1; 2; \ldots; 9\}$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S. Tính xác suất để chọn được số tự nhiên có tích các chữ số bằng 7875.

Lời giải.

Ta có $7875 = 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7$. Gọi số cần lập là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$. Ta có $n(\Omega) = 9 \cdot 10^5$.

A: "Chọn được số tự nhiên có tích các chữ số bằng 7875".

Để có $a_1 \cdot a_2 \cdots a_6 = 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$ chỉ có các trường hợp

- Trường hợp 1. Lập từ $3; 3; 5; 5; 5; 7 \Rightarrow$ có $\dfrac{6!}{2! \cdot 3!} = 60$ số.
- Trường hợp 2. Lập từ $9; 1; 5; 5; 5; 7 \Rightarrow$ có $\dfrac{6!}{3!} = 120$ số.

$\Rightarrow n(A) = 180$. Vậy $P(A) = \dfrac{1}{5000}$. □

Câu 122. Có bao nhiêu cách phân tích số 15^9 thành tích của ba số nguyên dương, biết rằng các cách phân tích mà các nhân tử chỉ khác nhau về thứ tự thì chỉ được tính một lần?

Lời giải.

Ta có $15^9 = 3^9 \cdot 5^9$.

Ba nhân tử có dạng $3^{a_1} \cdot 5^{a_1}, 3^{a_2} \cdot 5^{a_2}, 3^{a_3} \cdot 5^{a_3}$ trong đó $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = 9$ và $a_i, b_i \in \{0; 1; \ldots; 9\}$.

Chia ngẫu nhiên các bộ số mũ:

- chọn a_1 có 10 cách;
- chọn a_2 có $10 - a_1$ cách;
- chọn a_3 có 1 cách.

Vậy có $\sum\limits_{a_1=0}^{10} (10 - a_1) = 55$ cách chọn các a_i để $a_1 + a_2 + a_3 = 9$.

Tương tự, có 55 cách chọn các bộ b_i, suy ra có $55 \cdot 55$ cách chia ngẫu nhiên các bộ số mũ.

Khi chia như trên thì xảy ra các trường hợp bộ số mũ trùng nhau hoặc các bộ số mũ chỉ là hoán vị của nhau.

1. Số cách chia mà cả ba bộ số mũ trùng nhau: chỉ có 1 cách, đó là $(3; 3)$, $(3; 3)$, $(3; 3)$.

2. Số cách chia mà chỉ có hai bộ số mũ trùng nhau: có 5 cách để chọn $a_i = a_j$ và 5 cách để chọn $b_i = b_i$ (cùng bằng từ 0 đến 4), do đó có $5 \cdot 5 = 25$ cách, tuy nhiên ta phải trừ đi 1 cách khi cả ba bộ trùng nhau, do đó còn 24 cách. Mỗi cách này ta có 3 hoán vị.

Do mỗi cách chọn mà ba bộ (a_i, b_i) khác nhau ta có $3! = 6$ hoán vị, theo đề bài, 6 hoán vị này chỉ được tính 1 lần, do vậy số các cách thỏa mãn đề bài là $k = \dfrac{55 \cdot 55 - 3 \cdot 24 - 1}{6} + 24 + 1 = 517$. □

Câu 123. Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1; 17]$. Tính xác suất để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3.

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = \left(C_{17}^1\right)^3 = 4913$.
Từ 1 đến 17 có 5 số chia hết cho 3, có 6 số chia cho 3 dư 1 và có 6 số chia cho 3 dư 2.

1. Cả ba bạn đều viết số chia hết cho 3. Có $\left(C_5^1\right)^3$ cách viết để tổng của chúng chia hết cho 3.
2. Ba bạn đều viết số chia cho 3 dư 1. Có $\left(C_6^1\right)^3$ cách viết để tổng của chúng chia hết cho 3.
3. Ba bạn đều viết số chia cho 3 dư 2. Có $\left(C_6^1\right)^3$ cách viết để tổng của chúng chia hết cho 3.
4. Cả ba bạn viết các số chia cho 3 có số dư lần lượt là $0, 1, 2$. Có $C_5^1 \cdot C_6^1 \cdot C_6^1 \cdot 3!$ cách viết để tổng của chúng chia hết cho 3.

Do đó: $n(A) = \left(C_5^1\right)^3 + \left(C_6^1\right)^3 + \left(C_6^1\right)^3 + C_5^1 \cdot C_6^1 \cdot C_6^1 \cdot 3! = 1637$.

Vậy xác suất để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3 là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1637}{4913}$. □

Câu 124. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có 4 chữ số. Tính xác suất để số được chọn có dạng $\overline{abcd}$, trong đó $1 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant 9$.

Lời giải.
Gọi A là biến cố "số được chọn có dạng $\overline{abcd}$, trong đó $1 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant 9$".
Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$.
Xét các số $x = a + 1, y = b + 1, z = c + 2, t = d + 3$.
Vì $1 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant 9 \Rightarrow 1 \leqslant x$. Mỗi bộ 4 số $(x; y; z; t)$ được chọn từ tập hợp $\{1; 2; 3; \ldots; 12\}$ ta đều thu được bộ số thỏa mãn điều kiện ban đầu.
Do đó số cách chọn 4 trong 12 số là $C_{12}^4 = 495$ số. Do đó $n(A) = 495$.

Vậy $P(A) = \dfrac{495}{9000} = \dfrac{11}{200} = 0{,}055$. □

Câu 125. Có 2 học sinh lớp A, 3 học sinh lớp B và 4 học sinh lớp C xếp thành một hàng ngang sao cho giữa hai học sinh lớp A không có học sinh lớp B. Hỏi có bao nhiêu cách xếp hàng như vậy?

Lời giải.
Có các trường hợp xảy ra như sau:

- Hai học sinh lớp A luôn đứng cạnh nhau, các học sinh lớp còn lại xếp tùy ý: $2!8!$.
- Có đúng một học sinh lớp C đứng giữa hai học sinh lớp A: $A_4^1 2!7!$.
- Có đúng hai học sinh lớp C đứng giữa hai học sinh lớp A: $A_4^2 2!6!$.
- Có đúng ba học sinh lớp C đứng giữa hai học sinh lớp A: $A_4^3 2!5!$.
- Có đúng bốn học sinh lớp C đứng giữa hai học sinh lớp A: $A_4^4 2!4!$.

Vậy có $2!8! + A_4^1 2!7! + A_4^2 2!6! + A_4^3 2!5! + A_4^4 2!4! = 145152$ cách xếp hàng thỏa đề bài. □

Câu 126. Ba bạn Nhung, Nhâm, Việt mỗi bạn viết lên bảng một số tự nhiên nhỏ hơn 32. Tính xác suất để tích ba số được viết lên bảng chia hết cho 4 nhưng không chia hết cho 16.

Lời giải.
Số phần tử không gian mẫu 32^3. Để tích ba số viết ra chia hết cho 4 nhưng không chia hết cho 16 ta xét hai trường hợp

1. Có một bạn viết ra một số chia hết cho 4 nhưng không chia hết cho 16 tức là viết ra một số thuộc tập $\{4; 8; 12; 20; 24; 28\}$ có 6 số như vậy. Khi đó có hai trường hợp
   - Cả hai bạn còn lại đều viết ra hai số lẻ có 16 số lẻ.
     Suy ra có $6 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 3 = 4608$ cách.
   - Một bạn viết ra 1 số lẻ và bạn còn lại viết ra 1 số chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4, có 8 số như vậy.
     Trường hợp này phải bỏ đi số 8 ở tập trên do đó có $5 \cdot 16 \cdot 8 \cdot 3! = 3840$.
2. Không có bạn nào viết ra số chia hết cho 4. Có hai trường hợp
   - 2 số chẵn không chia hết cho 4 và 1 lẻ có $8 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 3 = 3072$ cách.
   - 3 số chẵn không chia hết cho 4 có $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$ cách.

Xác suất thỏa mãn đề bài là $\dfrac{4608 + 3840 + 3072 + 512}{32^3} = \dfrac{47}{128}$. □

Câu 127. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên gồm 7 chữ số khác nhau có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$. Tính xác suất để số được chọn luôn có mặt chữ số 2 và thỏa mãn $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 > a_5 > a_6 > a_7$.

Lời giải.
Số cách chọn một số tự nhiên gồm 7 chữ số khác nhau có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$ là $A_{10}^7 - A_9^6 = 544320$. Chọn bộ số $(a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7)$ gồm 7 chữ số khác nhau, sắp thứ tự, luôn chứa chữ số 2 và thỏa mãn $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 > a_5 > a_6 > a_7$.

- Có C_9^6 cách lấy thêm 6 số,
- Chọn ra 3 trong 6 số để xếp vào các vị trí $a_1a_2a_3$ có C_6^3 cách,
- 3 số còn lại đặt vào vị trí $a_5a_6a_7$.

Vậy ta có $C_9^6 \cdot C_6^3 = 1680$ (cách). Số cách chọn bộ số $(0a_2a_3a_4a_5a_6a_7)$ gồm 7 chữ số khác nhau, sắp thứ tự, luôn chứa chữ số 2 và thỏa mãn $0 < a_2 < a_3 < a_4 > a_5 > a_6 > a_7$ là $C_8^5 \cdot C_5^3 = 560$.
Vậy xác suất cần tìm là $P = \dfrac{1680 - 560}{544320} = \dfrac{1}{486}$. □

Câu 128. Trong một lớp có $2x + 3$ học sinh gồm Hùng, Hải, Hường và $2x$ học sinh khác. Khi xếp tùy ý các học sinh này vào dãy ghế được đánh số từ 1 đến $2x + 3$, mỗi học sinh ngồi 1 ghế thì xác suất để số ghế của Hải bằng trung bình cộng số ghế của Hùng và số ghế của Hường là $\dfrac{12}{575}$. Tính số học sinh trong lớp.

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu, ta có $|\Omega| = (2x + 3)!$.
Gọi A là biến cố số ghế của Hải bằng trung bình cộng của Hường và Hùng. Ta có Hường và Hùng phải có số ghế cùng tính chẵn lẻ, và khi số ghế của Hường và Hùng có cùng tính chẵn lẻ thì ghế của Hải là duy nhất. Sắp xếp vị trí cho 3 bạn Hải, Hùng, Hường:

$$(x+1)x + (x+2)(x+1) = 2(x+1)^2 |A| = 2(x+1)^2(2x)!, P(A) = \frac{2(x+1)^2(2x)!}{(2x+3)!} = \frac{x+1}{(2x+1)(2x+3)}.$$

$$P(A)=\frac{12}{575}\Leftrightarrow\frac{x+1}{(2x+1)(2x+3)}=\frac{12}{575}\Leftrightarrow x=11(\text{vì} x\in\mathbb{N}).$$

Vậy số học sinh của lớp là 25. □

Câu 129. Cho tập hợp $A=\{1;2;3;4;5;6\}$. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau thuộc tập A. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S. Tính xác suất để chọn được số có tổng 3 chữ số đầu nhỏ hơn tổng ba chữ số sau 3 đơn vị.

Lời giải.
Ta có $S=\{\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}\mid a_i\in A, a_i\neq a_j,\forall i\neq j\}$. Số được chọn thỏa mãn

$$a_1+a_2+a_3+3=a_4+a_5+a_6.$$

Chú ý rằng $a_1+a_2+\cdots+a_6=21$ nên từ đó $a_1+a_2+a_3=9$. Suy ra mỗi bộ số $(a_1;a_2;a_3)$ là một hoán vị của các bộ số $(1;2;6)$, $(1;3;5)$, $(2;3;4)$. Ứng với mỗi bộ số (a_1,a_2,a_3) ta lại có 3! cách chọn bộ số $(a_4;a_5;a_6)$. Do đó có $3!\times 3!\times 3=108$ số thỏa mãn.
Vậy xác suất cần tìm là $\frac{108}{|S|}=\frac{108}{6!}=\frac{3}{20}$. □

Câu 130. Một đoàn tình nguyện đến một trường tiểu học miền núi để trao tặng 20 suất quà cho 10 em học sinh nghèo học giỏi. Trong 20 suất quà đó gồm 7 chiếc áo mùa đông, 9 thùng sữa tươi và 4 chiếc cặp sách. Tất cả các suất quà đều có giá trị tương đương nhau. Biết rằng mỗi em được nhận 2 suất quà khác loại (ví dụ: 1 chiếc áo và 1 thùng sữa tươi). Trong số các em được nhận quà có hai em Việt và Nam. Tính xác suất để hai em Việt và Nam đó nhận được suất quà giống nhau?

Lời giải.
Với 3 loại quà khác nhau ta chia làm 3 nhóm

- Nhóm I gồm 1 áo và 1 sữa.
- Nhóm II gồm 1 cặp và 1 sữa.
- Nhóm III gồm 1 áo và 1 cặp.

Gọi x, y, z là số học sinh nhận các suất quà thuộc các nhóm I, II, III. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}x+y+z=10\\x+z=7\\x+y=9\\y+z=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\y=3\\z=1.\end{cases}$$

Số cách chọn trao quà cho 10 học sinh là $C_{10}^6\cdot C_4^3\cdot C_1^1=840$ cách.
Để Việt và Nam nhận được suất quà giống nhau thì

- Việt, Nam nhận được suất quà nhóm I có $C_8^4\cdot C_4^3\cdot C_1^1=280$ cách.
- Việt, Nam nhận được suất quà nhóm II có $C_8^6\cdot C_2^1\cdot C_1^1=56$ cách.

Vậy xác suất để hai em Việt và Nam đó nhận được suất quà giống nhau là

$$P=\frac{280+56}{840}=\frac{2}{5}.$$

□

Câu 131. Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết ngẫu nhiên một số tự nhiên thuộc đoạn $[1;16]$ được kí hiệu theo thứ tự là a, b, c rồi lập phương trình bậc hai $ax^2+2bx+c=0$. Tính xác suất để phương trình lập được có nghiệm kép là.

Lời giải.
Mỗi bạn chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên thuộc đoạn $[1; 16]$ nên $|\Omega| = 16^3$.
Phương trình $ax^2 + 2bx + c = 0$ có nghiệm kép khi $\Delta' = b^2 - ac = 0 \Leftrightarrow b^2 = ac$.

- Nếu $a = b = c$ thì có 16 cách chọn.
- Nếu a, b, c khác nhau đôi một. Ta có thể liệt kê các bộ sau

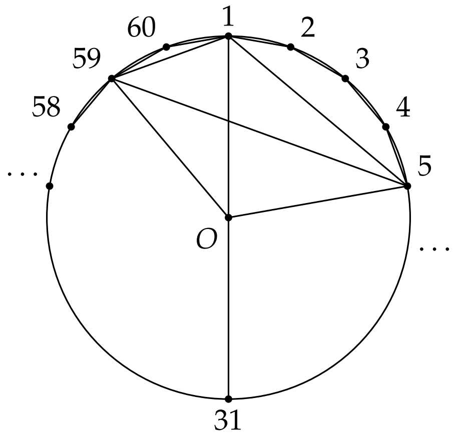
$$(1;2;4), (1;3;9), (1;4;16), (2;4;8), (3;6;12), (4;6;9), (4;8;16), (9;12;16).$$

  Suy ra có $8 \cdot 2!$ cách chọn (a, c hoán vị).

Xác suất cần tìm là $P = \dfrac{16 + 8 \cdot 2!}{16^3} = \dfrac{1}{128}$. □

Câu 132. Cho đa giác đều 60 đỉnh nội tiếp một đường tròn. Tính số tam giác tù được tạo thành từ 3 trong 60 đỉnh của đa giác.

Lời giải.



Ta đánh số các đỉnh của đa giác là $1, 2, 3, \ldots, 60$ theo chiều kim đồng hồ như hình vẽ. Ta sẽ đếm số tam giác tù đỉnh 1. Gọi a, b $(2 \leqslant a < b \leqslant 60)$ là hai đỉnh còn lại. Tam giác gồm ba đỉnh $1, a, b$ tù tại đỉnh 1 khi và chỉ khi góc này chắn cung có số đo lớn hơn 180°. Điều này tương đương $\dfrac{360}{6}(b - a) > 180^\circ$ hay $b - 30 > a$. Ta sẽ đếm số bộ số gồm hai số a và $b - 30$ thỏa mãn $2 \leqslant a < b - 30 \leqslant 30$. Có tất cả C_{29}^2 bộ số như vậy, từ đó có C_{29}^2 cách chọn ra hai đỉnh a, b.
Hoàn toàn tương tự, số các tam giác tù tại các đỉnh $2, 3, \ldots, 60$ cũng là C_{29}^2. Vậy có tất cả $60 \cdot C_{29}^2 = 24306$ tam giác tù. □

Câu 133. Cho lục giác lồi $ABCDEF$. Tính số tam giác có đỉnh là các đỉnh của lục giác đã cho nhưng có cạnh không phải là cạnh của lục giác đó.

Lời giải.

- Ta tính số tam giác tạo được từ các đỉnh của lục giác đã cho.
  Chọn đỉnh thứ nhất của tam giác ta có 6 cách chọn.
  Chọn đỉnh thứ hai của tam giác ta có 5 cách chọn.
  Chọn đỉnh thứ ba của tam giác ta có 4 cách chọn.
  Với cách chọn như trên thì một tam giác được lặp lại 3! lần nên số tam giác tạo được là $\dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20$ tam giác.

- Ta tính số tam giác có hai cạnh là hai cạnh của lục giác, có tất cả 6 tam giác như thế.
- Ta tính số tam giác có một cạnh là cạnh của lục giác là số tam giác có 2 đỉnh là 2 đỉnh liên tiếp của lục giác và đỉnh còn lại không kế tiếp hai đỉnh đó.
  Xét một cạnh bất kỳ có C_2^1 cách chọn 1 trong 2 đỉnh còn lại của lục giác.
  Nên số tam giác là $6 \cdot C_2^1 = 12$ tam giác.

Vậy có $20 - 12 - 6 = 2$ tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Câu 134. Cho tam giác ABC. Xét m đường thẳng phân biệt song song với cạnh AB, n đường thẳng phân biệt song song với cạnh AC và 2 đường thẳng phân biệt song song với cạnh BC, với $m, n \in \mathbb{N}, m \geqslant 2, n \geqslant 2$. Biết rằng có tất cả 43 hình bình hành được lập từ $m + n + 2$ đường thẳng nói trên. Tìm tất cả các bộ số $(m; n)$ thỏa mãn đề bài?

Lời giải.
Ta chia các đường thẳng thàng 3 nhóm:

- Nhóm 1: Gồm m đường thẳng song song với AB.
- Nhóm 2: Gồm n đường thẳng song song với AC.
- Nhóm 3: Gồm 2 đường thẳng song song với BC.

Để tạo ra một hình bình hành ta lấy 2 đường thẳng từ một nhóm bất kì, rồi lấy thêm 2 đường thẳng nữa từ một nhóm khác. Vậy số hình bình hành là

$$C_m^2 C_n^2 + C_m^2 C_2^2 + C_n^2 C_2^2 = 43 \Leftrightarrow (C_m^2 + 1)(C_n^2 + 1) = 44.$$

Do $m \geqslant 2, n \geqslant 2$ nên $C_m^2 + 1 \geqslant 2, C_n^2 + 1 \geqslant 2$. Nên 44 chỉ có 2 cách phân tích thỏa mãn là $44 = 2 \cdot 22 = 4 \cdot 11$.

- Với $C_m^2 + 1 = 2$ và $C_n^2 + 1 = 22$ ta được $m = 2$ và $n = 7$;
- Với $C_m^2 + 1 = 4$ và $C_n^2 + 1 = 11$ ta được $m = 3$ và $n = 5$.

Hoán vị các cặp $(m; n)$ nói trên ta được tất cả 4 cặp thỏa mãn đề bài. □

Câu 135. Xếp 10 quyển sách tham khảo khác nhau gồm: 1 quyển sách Văn, 3 quyển sách tiếng Anh và 6 quyển sách Toán (trong đó có hai quyển Toán T1 và Toán T2) thành một hàng ngang trên giá sách. Tính xác suất để mỗi quyển sách tiếng Anh đều được xếp ở giữa hai quyển sách Toán, đồng thời hai quyển Toán T1 và toán T2 luôn được xếp cạnh nhau.

Lời giải.
Số phần tử không gian mẫu bằng số cách xếp túy ý 10 cuốn sách thành một hàng ngang: 10! cách.
Trước hết ta xếp hai cuốn Toán T1 và Toán T2 đứng cạnh nhau thành một xem như một vị trí kí hiệu là T có 2! cách. Bây giờ xếp T với bốn cuốn sách Toán còn lại có 5! cách xếp. Khi đó 3 cuốn sách tiếng Anh sẽ được xếp vào 3 trong 4 khoảng trống giữa các cuốn sách Toán vừa xếp nên có A_4^3 cách xếp. Cuối cùng quyển sách Văn chỉ có thể xếp vào một trong ba vị trí để thỏa đề bài. Vậy số cách xếp thỏa đề bài bằng $2! \cdot 5! \cdot A_4^3 \cdot 3$.
Vậy xác suất cần tính bằng

$$P(A) = \frac{2! \cdot 5! \cdot A_4^3 \cdot 3}{10!} = \frac{1}{210}.$$

□

Câu 136. Ba bạn A, B, C, mỗi bạn viết ngẫu nhiên một số tự nhiên thuộc đoạn $[1; 16]$ được kí hiệu theo thứ tự là a, b, c, rồi lập phương trình bậc hai $ax^2 + 2bx + c = 0$. Tính xác suất để phương trình lập được có nghiệm kép.

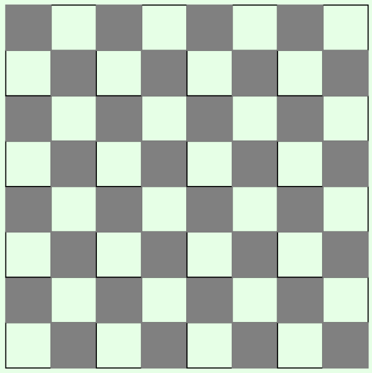
Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử. A là biến cố: "Phương trình lập được có nghiệm kép". Ta có $n(\Omega) = 16 \cdot 16 \cdot 16 = 16^3$.
Phương trình có nghiệm kép khi và chỉ khi $\Delta' = 0 \Leftrightarrow b^2 = ac$. Do đó $a = b = c$ hoặc a, b, c đôi một khác nhau.

- Trường hợp chọn $a = b = c$ có 16 cách.
- Trường hợp chọn a, b, c đôi một khác nhau. Cho b nhận các giá trị từ 1 đến 16, ta nhận được 16 bộ số $(a; b; c)$ thỏa mãn $(1;2;4), (4;2;1), (1;3;9), (9;3;1), (1;4;16), (16;4;1), (2;4;8), (8;4;2),$ $(3;6;12), (12;6;3), (4;6;9), (9;6;4), (4;8;16), (16;8;4), (9;12;16), (16;12;9)$.

Vậy $n(A) = 16 + 16 = 32$. Suy ra $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{32}{16^3} = \dfrac{1}{128}$. □

Câu 137.
Một quân vua được đặt trên một ô giữa bàn cờ. Mỗi bước di chuyển, quân vua được chuyển sang một ô khác chung cạnh hoặc đỉnh với ô đang đứng (xem hình minh họa). Bạn An di chuyển quân vua ngẫu nhiên 3 bước. Tính xác suất sau cho 3 bước quân vua trở về ô xuất phát.



Lời giải.
Bước di chuyển đầu tiên của quân vua có 8 cách, bước di chuyển thứ hai của quân vua có 8 cách và bước di chuyển thứ ba của quân vua có 8 cách. Vậy số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 8^3$.
Gọi A là biến cố: "Sau ba bước quân vua trở về ô xuất phát"
Xét hai trường hợp sau:

- **Trường hợp 1.** Trước tiên di chuyển quân vua sang ô đen liền kề có 4 cách, tiếp theo di chuyển quân vua sang ô trắng có chung cạnh hoặc ô đen có chung đỉnh cạnh ô xuất phát của quân vua có 4 cách, cuối cùng di chuyển quân vua về vị trí cũ có 1 cách. Do đó có $4 \cdot 4 \cdot 1 = 16$ cách.
- **Trường hợp 2.** Trước tiên di chuyển quân vua sang ô trắng được đánh có chung đỉnhvới cạnh ô quân vua đang đứng có 4 cách, tiếp theo di chuyển quân vua sang ô đen cạnh ô quân vua xuất phát có 2 cách, cuối cùng di chuyển quân vua về vị trí cũ có 1 cách. Do đó có $4 \cdot 2 \cdot 1 = 8$ cách.

Suy ra số các kết quả thuận lợi của biến cố A là $n(A) = 16 + 8 = 24$ cách.
Vậy xác xuất cần tính là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{24}{8^3} = \dfrac{3}{64}$. □

Câu 138. Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số $\overline{abc}$ sao cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác cân.

Lời giải.

Trường hợp 1. a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác đều.
Trường hợp này có 9 số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2. a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác cân và không đều.
Không làm mất tính tổng quát, giả sử $a = b$.

- $a = b > c$
  $+ a = b = 2 \Rightarrow c = 1$.

+ $a = b = 3 \Rightarrow c = 1, 2.$
+ $a = b = 4 \Rightarrow c = 1, 2, 3.$
....
+ $a = b = 9 \Rightarrow c = 1, 2, 3, \ldots, 8.$
$\Rightarrow$ có $1 + 2 + 3 + \ldots + 8 = 36$ số thỏa mãn bài toán.

- $a = b < c$. Do $a + b > c$ nên $\dfrac{c}{2} < a < c$.

+ $c = 9 \Rightarrow \dfrac{9}{2} < a < 9 \Rightarrow a = 5, 6, 7, 8.$
+ $c = 8 \Rightarrow 4 < a < 8 \Rightarrow a = 5, 6, 7.$
+ $c = 7 \Rightarrow \dfrac{7}{2} < a < 7 \Rightarrow a = 4, 5, 6.$
+ $c = 6 \Rightarrow 3 < a < 6 \Rightarrow a = 4, 5.$
+ $c = 5 \Rightarrow \dfrac{5}{2} < a < 5 \Rightarrow a = 3, 4.$
+ $c = 4 \Rightarrow 2 < a < 4 \Rightarrow a = 3.$
+ $c = 2, 1$ không có a tương ứng
$\Rightarrow$ có $4 + 3 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1 = 16$ số thỏa mãn bài toán
$\Rightarrow$ trường hợp $a = b \neq c$ có $36 + 16 = 52$ số thỏa mãn.

Tương tự, mỗi trường hợp $b = c \neq a$, $c = a \neq b$ đều có 52 số thỏa mãn.

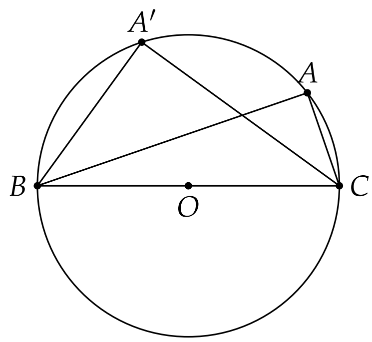
Theo quy tắc cộng ta có $9 + 52 \cdot 3 = 165$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Câu 139. Một đa giác đều n đỉnh (n lẻ, $n \geqslant 3$). Chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh của đa giác đó. Gọi P là xác suất sao cho 3 đỉnh đó tạo thành một tam giác tù. Tìm n biết $P = \dfrac{45}{62}$.

Lời giải.
Cố định 1 đỉnh làm đỉnh của tam giác tù ứng với góc tù, có n cách chọn như vậy.
Với tam giác tù có đỉnh cố định ở trên, ta gọi x, y $(x, y \in \mathbb{N}^*)$ là số cạnh của đa giác đều lần lượt nằm trong hai cạnh bên của tam giác tù. Điều kiện cần và đủ của x, y để tam giác tù là $x + y < \dfrac{n}{2}$ (tổng số đo cung hai cạnh bên chưa được nửa đường tròn). Do n lẻ nên với $x, y \in \mathbb{N}^*$, $x + y < \dfrac{n}{2} \Leftrightarrow x + y \leqslant \dfrac{n-1}{2}$ $(*)$. Bây giờ ta chỉ cần đi tìm số nghiệm nguyên dương của $(*)$. Hơn nữa, số nghiệm nguyên dương của $(*)$ bằng số nghiệm nguyên dương của phương trình $x + y + z = \dfrac{n-1}{2} + 1$ $(**)$ (z chính là phần bù nguyên dương để bất phương trình $(*)$ thành phương trình). Theo bài toán chia kẹo Euler, $\dfrac{n-1}{2} + 1$ mà đem chia thành ba phần kẹo x, y, z có $C^2_{\frac{n-1}{2}}$ cách chia, hay $(**)$ có $C^2_{\frac{n-1}{2}}$ nghiệm nguyên dương.
Vậy có tất cả $nC^2_{\frac{n-1}{2}} = \dfrac{n(n-1)(n-3)}{8}$ tam giác tù. Trong khi đó, có tất cả $C^3_n = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ tam giác.
Vậy có $P = \dfrac{3(n-3)}{4(n-2)} = \dfrac{45}{62} \Leftrightarrow n = 33 \Rightarrow n$ có 4 ước nguyên dương. □

Câu 140. Cho đa giác đều 18 cạnh. Nối tất cả các đỉnh với nhau. Chọn 2 tam giác trong số các tam giác vuông tạo thành từ 3 đỉnh trong 18 đỉnh. Tính xác suất để chọn được hai tam giác vuông có cùng chu vi.

Lời giải.
Xét hai tam giác vuông ABC và $A'BC$ có chung cạnh huyền và có chu vi bằng nhau. Đặt $\varphi = \widehat{ABC}$, $\varphi' = \widehat{A'BC}$, $0° < \varphi, \varphi' < 90°$.



Chu vi hai tam giác bằng nhau khi

$$\begin{aligned} & BC(\sin\varphi + \cos\varphi) = BC(\sin\varphi' + \cos\varphi') \\ \Leftrightarrow\ & \sin(\varphi + 45^\circ) = \sin(\varphi' + 45^\circ) \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \varphi = \varphi' \\ \varphi = 90^\circ - \varphi' \end{array}\right. \end{aligned}$$

Suy ra hai tam giác ABC và $A'BC$ bằng nhau. Gọi $\mathscr{S}$ là tập hợp tất cả các tam giác vuông, ta có $|\mathscr{S}| = 4C_9^2 = 144$ và

$$\mathscr{S} = \bigcup_{\varphi\in\Omega} S_\varphi$$

trong đó S_φ là tập hợp các tam giác vuông có một góc bằng φ, $\Omega = \left\{10^\circ; 20^\circ; 30^\circ; 40^\circ\right\}$. Dễ thấy

$$|S_{10^\circ}| = |S_{20^\circ}| = |S_{30^\circ}| = |S_{40^\circ}| = 4\cdot 9 = 36.$$

Xác suất để chọn được hai tam giác có chu vi bằng nhau là

$$P = \frac{4\cdot C_{36}^2}{C_{144}^2} = \frac{35}{143}.$$

□

Câu 141. Có 2 học sinh lớp A, 3 học sinh lớp B và 4 học sinh lớp C xếp thành một hàng ngang sao cho giữa hai học sinh lớp A không có học sinh lớp B. Hỏi có bao nhiêu cách xếp hàng như vậy?

Lời giải.
Có các trường hợp xảy ra như sau:

- Hai học sinh lớp A luôn đứng cạnh nhau, các học sinh lớp còn lại xếp tùy ý: $2!8!$.
- Có đúng một học sinh lớp C đứng giữa hai học sinh lớp A: $A_4^1 2!7!$.
- Có đúng hai học sinh lớp C đứng giữa hai học sinh lớp A: $A_4^2 2!6!$.
- Có đúng ba học sinh lớp C đứng giữa hai học sinh lớp A: $A_4^3 2!5!$.
- Có đúng bốn học sinh lớp C đứng giữa hai học sinh lớp A: $A_4^4 2!4!$.

Vậy có $2!8! + A_4^1 2!7! + A_4^2 2!6! + A_4^3 2!5! + A_4^4 2!4! = 145152$ cách xếp hàng thỏa đề bài. □

Câu 142. Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết lên bảng một số ngẫu nhiên thuộc đoạn $[1; 19]$. Tính xác suất để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3.

Lời giải.
Ta có $n(\Omega) = 19^3$.
Trong các số tự nhiên thuộc đoạn $[1; 19]$ có 6 số chia hết cho 3, đó là $\{3; 6; 9; 12; 15; 18\}$, có 7 số chia cho 3 dư 1, đó là $\{1; 4; 7; 10; 13; 16; 19\}$ và có 6 số chia cho 3 dư 2, đó là $\{2; 5; 8; 11; 14; 17\}$.
Để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3 cần phải xảy ra các trường hợp sau

- **Trường hợp 1.** Cả ba số viết ra đều chia hết cho 3: có 6^3 cách viết.
- **Trường hợp 2.** Cả 3 số viết ra đều chia cho 3 dư 1: có 7^3 cách viết.
- **Trường hợp 3.** Cả 3 số viết ra đều chia cho 3 dư 2: có 6^3 cách viết.
- **Trường hợp 4.** Trong ba số viết ra có 1 số chia hết cho 3, 1 số chia cho 3 dư 1 và 1 chia cho 3 dư 2: có $6 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 3!$ cách viết.

Vậy xác suất cần tìm là $p = \dfrac{6^3 + 7^3 + 6^3 + 6 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 3!}{19^3} = \dfrac{2287}{6859}$. □

Câu 143. Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên có 7 chữ số và chia hết cho 9. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để các chữ số của số đó đôi một khác nhau.

Lời giải.
Nhận thấy $S = \{1000008, 1000017, \ldots, 9999990, 9999999\}$ nên số phần tử của S là

$$\frac{9999999 - 1000008}{9} + 1 = 100000$$

Ta sẽ đếm số các phần tử của S có các chữ số đôi một khác nhau.
Tổng của 7 chữ số được sử dụng chia hết cho 9 mà $0 + 1 + 2 + \cdots + 9 = 45$ chia hết cho 9 nên 3 chữ số không được sử dụng trong các số thoả mãn có tổng chia hết cho 9.
Nếu 3 chữ số không được sử dụng là $(0;1;8)$, $(0;2;7)$, $(0;3;6)$, $(0;4;5)$ thì mỗi bộ 7 chữ số còn lại sẽ tạo được $7!$ số có 7 chữ số.
Nếu 3 chữ số không được sử dụng là $(1;2;6)$, $(1;3;5)$, $(1;8;9)$, $(2;3;4)$, $(2;7;9)$, $(3;6;9)$, $(3,7,8)$, $(4;5;9)$, $(4;6;8)$, $(5;6;7)$ thì mỗi bộ 7 chữ số còn lại sẽ tạo được $6 \cdot 6!$ số có 7 chữ số.
Vậy có tổng cộng $4 \cdot 7! + 10 \cdot 6 \cdot 6! = 63360$ số thuộc S có các chữ số khác nhau.
Suy ra xác suất số nhận được có các chữ số khác nhau là: $\dfrac{63360}{100000} = \dfrac{396}{625}$. □

Câu 144. Trong công viên có n em bé và một bàn tròn có n ghế ($n > 2$). Các ghế được gắn cố định vào một vòng sắt, vòng sắt có thể xoay tròn xung quanh bàn. Có bao nhiêu cách xếp n em bé vào n ghế (hai cách xếp được gọi là như nhau nếu từ cách này, xoay một vòng sắt đi một góc ta được cách kia)?

Lời giải.
Ta gọi số cách sắp xếp cần tìm theo bài là Q_n và gọi số cách sắp xếp theo nghĩa, hai cách sắp xếp nếu từ cách này, xoay vòng sắt đi một góc đi được cách kia vẫn tính là hai cách khác nhau, là A_n.
Ta nhận thấy ngay $A_n = n!$. Từ một cách sắp xếp của Q_n ta nhận được n cách sắp xếp trong A_n bằng cách quay đi n góc khác nhau. Như vậy $Q_n = \dfrac{1}{n} \cdot A_n = (n-1)!$. □

Câu 145. Cho hình đa giác đều (H) có 24 đỉnh, chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh của hình (H). Tính xác suất để 4 đỉnh được chọn tạo ra một hình chữ nhật, không phải hình vuông.

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = C_{24}^4$.
Vẽ đường tròn ngoại tiếp đa giác đều (H). Vẽ đường kính của đường tròn này, nó sẽ chia thành hai nửa đường tròn, mỗi phần chứa 12 đỉnh của đa giác. Với một điểm thuộc nửa đường tròn này, có một điểm đối xứng thuộc nửa đường tròn kia. Như vậy, với hai điểm thuộc nửa đường tròn cho ta một hình chữ nhật, suy ra có tất cả C_{12}^2 hình chữ nhật được tạo ra. Ta thấy rằng trong các hình chữ nhật được tạo thành có 6 hình vuông. Gọi A là biến cố để 4 đỉnh được chọn tạo ra một hình chữ nhật, không phải hình vuông suy ra $n(A) = C_{12}^2 - 6$.
Suy ra $\mathbb{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{10}{1771}$. □

Câu 146. Cho lăng trụ lục giác đều $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$. Hỏi có tất cả bao nhiêu hình chóp tứ giác có 5 đỉnh là đỉnh của lăng trụ?

(A) 200. (B) 360. (C) 492. (D) 510.

Lời giải.

Hình chóp có 5 đỉnh tạo thành từ 5 đỉnh của hình lăng trụ khi ta chọn 4 đỉnh đồng phẳng và 1 đỉnh không đồng phẳng với 4 đỉnh đã chọn.

- **Trường hợp 1.** 4 đỉnh thuộc $\{A, B, C, D, E, F\}$ và 1 đỉnh chọn từ $\{A', B', C', D', E', F'\}$và ngược lại 1 đỉnh thuộc $\{A, B, C, D, E, F\}$ và 4 đỉnh chọn từ $\{A', B', C', D', E', F'\}$.
  Trường hợp này có $2 \times C_6^4 \times 6 = 180$ (hình chóp).
- **Trường hợp 2.**
  4 đỉnh được chọn từ 1 cạnh thuộc $\{AB, CF, DE\}$ và 1 cạnh thuộc $\{A'B', C'F', D'E'\}$
  hoặc 1 cạnh thuộc $\{BC, DA, FE\}$ và 1 cạnh thuộc $\{B'C', D'A', F'E'\}$
  hoặc 1 cạnh thuộc $\{CD, BE, AF\}$ và 1 cạnh thuộc $\{C'D', B'E', A'F'\}$
  và 1 đỉnh trong 8 đỉnh còn lại của lăng trụ.
  Trường hợp này có tất cả $3 \times 9 \times 8 = 216$ (hình chóp).
- **Trường hợp 3.** 4 đỉnh được chọn từ 1 cạnh thuộc $\{AC, FD\}$ và 1 cạnh thuộc $\{A'C', F'D'\}$
  hoặc 1 cạnh thuộc $\{BD, AE\}$ và 1 cạnh thuộc $\{B'D', A'E'\}$
  hoặc 1 cạnh thuộc $\{CE, BF\}$ và 1 cạnh thuộc $\{C'E', B'F'\}$
  và 1 đỉnh trong 8 đỉnh còn lại của lăng trụ.
  Trường hợp này có tất cả $3 \times 4 \times 8 = 96$ (hình chóp).

Vậy số hình chóp thỏa mãn yêu cầu bài toán là $180 + 216 + 96 = 492$ hình chóp.

Chọn đáp án (C) □

Câu 147. Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1; 17]$. Tính xác suất để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3.

(A) $\dfrac{1728}{4913}$. (B) $\dfrac{23}{68}$. (C) $\dfrac{1079}{4913}$. (D) $\dfrac{1637}{4913}$.

Lời giải.

Không gian mẫu có số phần tử là $17^3 = 4913$. Lấy một số tự nhiên từ 1 đến 17 ta có các nhóm số sau

- Số chia hết cho 3: có 5 số thuộc tập $\{3; 6; 9; 12; 15\}$.
- Số chia cho 3 dư 1: có 6 số thuộc tập $\{1; 4; 7; 10; 13; 16\}$.
- Số chia cho 3 dư 2: có 6 số thuộc tập $\{2; 5; 8; 11; 14; 17\}$.

Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1; 17]$ thỏa mãn ba số đó có tổng chia hết cho 3 thì các khả năng xảy ra như sau

- **Trường hợp 1.** Ba số đều chia hết cho 3 có $5^3 = 125$ cách.
- **Trường hợp 2.** Ba số đều chia cho 3 dư 1 có $6^3 = 216$ cách.
- **Trường hợp 3.** Ba số đều chia cho 3 dư 2 có $6^3 = 216$ cách.
- **Trường hợp 4.** Một số chia hết cho 3, một số chia cho 3 dư 1, chia cho 3 dư 2 có $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3! = 1080$ cách.

Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{125 + 216 + 216 + 1080}{4913} = \dfrac{1637}{4913}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 148. Hai bạn A và B mỗi bạn lên bảng viết ngẫu nhiên một số tự nhiên gồm ba chữ số đôi một khác nhau. Tính xác suất để các chữ số có mặt ở hai số đó giống nhau đồng thời tổng lập phương các chữ số đó chia hết cho 3.

Lời giải.
Đặt $M = \{3; 6; 9\}$, $N = \{1; 4; 7\}$ và $P = \{2; 5; 8\}$.

Xét số $\overline{abc}$, với $a \neq 0$; a, b, c phân biệt và $(a^3 + b^3 + c^3) \vdots 3$.
Ta có $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b)(b + c)(c + a)$.

Do đó $(a^3 + b^3 + c^3) \vdots 3 \Leftrightarrow (a + b + c)^3 \vdots 3 \Leftrightarrow (a + b + c) \vdots 3$.
Không gian mẫu đề bài cung cấp có số phần tử là: $n(\Omega) = (9 \cdot 9 \cdot 8)^2$.
Gọi X là biến cố "A và B viết được các số có 3 chữ số $\overline{abc}, \overline{def}$ sao cho $\{a; b; c\} = \{d; e; f\}$".

- Nếu $\{a; b; c\}$ có chứa số 0 và 2 phần tử còn lại:
  + cùng thuộc M thì số cách chọn là: $(C_3^2) \cdot 4^2$.
  + có 1 phần tử thuộc N, 1 phần tử thuộc P thì số cách chọn là: $(C_3^1 C_3^1) \cdot 4^2$.
- Nếu $\{a; b; c\}$ không chứa số 0, có 2 khả năng xảy ra:
  + a, b, c cùng thuộc M hoặc N hoặc P thì số cách chọn là: $(3!)^2 + (3!)^2 + (3!)^2$.
  + Mỗi số $a; b; c$ thuộc 1 tập khác nhau trong M, N, P thì số cách chọn là: $(C_3^1 C_3^1 C_3^1) \cdot (3!)^2$.

Vậy $n(X) = (C_3^2) \cdot 4^2 + (C_3^1 C_3^1) \cdot 4^2 + 3(3!)^2 + (C_3^1 C_3^1 C_3^1) \cdot (3!)^2 = 1272 \Rightarrow P(X) = \dfrac{n(X)}{n(\Omega)} = \dfrac{53}{17496}$. □

Câu 149. Lớp $11A$ có n học sinh, trong đó có 18 học sinh giỏi Toán, 12 học sinh giỏi Văn và 10 học sinh không giỏi môn nào. Giáo viên chủ nhiệm chọn ra 2 học sinh giỏi Toán hoặc Văn để đi dự hội nghị. Xác suất để trong 2 học sinh được chọn có đúng 1 học sinh giỏi cả Toán và Văn là $\dfrac{9}{23}$. Tính số học sinh của lớp $11A$.

Lời giải.
Cách 1:
Gọi a là số học sinh chỉ giỏi Toán, b là số học sinh giỏi cả Toán và Văn, c là số học sinh chỉ giỏi Văn $(a,\ b,\ c \in \mathbb{N})$. Theo bài ra ta có

$$\begin{cases} a + b = 18 \\ b + c = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 + c \\ a + b + c = 18 + c \\ b = 12 - c. \end{cases}$$

Số học sinh giỏi Toán hoặc Văn là $a + b + c = 18 + c$.
Chọn 2 học sinh giỏi Toán hoặc Văn có $C_{18+c}^2 = \dfrac{(18 + c)(17 + c)}{2}$ cách.
Chọn 2 học sinh giỏi Toán hoặc Văn trong có đúng 1 học sinh giỏi cả Toán và Văn có $(a + c) \cdot b = (6 + 2c) \cdot (12 - c)$ cách. Xác suất để trong 2 học sinh được chọn có đúng 1 học sinh giỏi cả Toán và Văn là

$$P = \frac{2(6 + 2c)(12 - c)}{(18 + c)(17 + c)} = \frac{9}{23} \Leftrightarrow 101c^2 - 1143c - 558 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = -\dfrac{93}{101} \text{(loại)} \\ c = 6 \end{array}\right.$$

Với $c = 6 \Rightarrow a = 12$; $b = 6$. Vậy số học sinh của lớp 11A là: $n = a + b + c + 10 = 12 + 6 + 6 + 10 = 34$.
Cách 2:
Gọi A: Học sinh giỏi Toán., B: Học sinh giỏi Văn. Ta có $n - 10 = n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.
Đặt $n(A \cap B) = m \Rightarrow n - 10 = 30 - m \Leftrightarrow m = 40 - n$.
Chọn 2 học sinh giỏi Toán hoặc Văn có: C_{n-10}^2 cách.

Chọn 2 học sinh giỏi Toán hoặc Văn trong có đúng 1 học sinh giỏi cả Toán và Văn có $C_{40-n}^1 \cdot C_{2n-50}^1$ cách.

Theo giả thiết ta có: $\dfrac{C_{40-n}^1 \cdot C_{2n-50}^1}{C_{n-10}^2} = \dfrac{9}{23} \Rightarrow n = 34.$ □

Câu 150. Có hai hộp đựng bi, mỗi viên bi chỉ mang một màu đen hoặc trắng. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp đúng 1 viên bi. Biết tổng số bi trong hai hộp là 20 và xác suất lấy được 2 viên bi đen là $\dfrac{55}{84}$. Tính xác suất để lấy được 2 viên bi trắng?

Lời giải.

Gọi hộp 1 có a viên bi trắng, b viên bi đen; hộp 2 có c viên bi trắng, d viên bi đen với a, b, c, d là các số nguyên dương.

Theo giả thiết, ta có $(a+b)+(c+d) = 20$ và $\dfrac{bd}{(a+b)\cdot(c+d)} = \dfrac{55}{84}$.

Ta có $100 = \left[\dfrac{(a+b)+(c+d)}{2}\right]^2 \geqslant (a+b)(c+d) \Rightarrow (a+b)(c+d) = 84$. Khi đó, ta có

$$\begin{cases}(a+b)+(c+d) = 20\\(a+b)(c+d) = 84\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a+b = 14\\c+d = 6\end{cases} \text{hoặc} \begin{cases}a+b = 6\\c+d = 14.\end{cases}$$

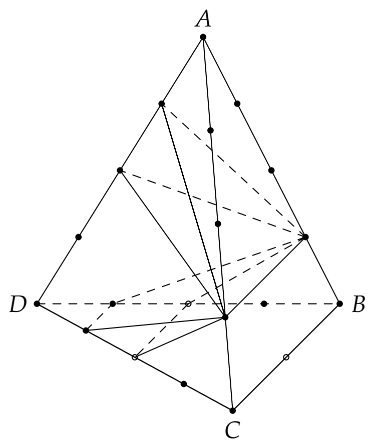
Không giảm tổng quát, xét $a+b = 14$, $c+d = 6$.

Lại có $bd = 55 = 5\cdot 11$, chọn $b = 11; d = 5 \Rightarrow a = 3; c = 1$.

Xác suất để lấy được hai viên bi trắng là $P = \dfrac{ac}{(a+b)(c+d)} = \dfrac{3}{84} = \dfrac{1}{28}$. □

Câu 151. Cho tứ diện đều $ABCD$. Trên mỗi cạnh của tứ diện, ta đánh dấu 3 điểm chia đều các cạnh tương ứng thành các phần bằng nhau. Gọi S là tập hợp tất cả các tam giác có 3 đỉnh lấy từ 18 điểm đã đánh dấu. Lấy ra từ S một tam giác, tính xác suất để mặt phẳng chứa tam giác đó song song với đúng một cạnh của tứ diện đã cho.

Lời giải.



Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{18}^3 - 6$.

Xét trường hợp mặt phẳng chứa tam giác song song với BC

- Số mặt phẳng chỉ song song với BC đồng thời cắt hai mặt $(ABC), (DBC)$ là $2\times 3 = 6$ mặt.
- Số mặt chỉ song song với BC và cắt AD là $3\times 2 + 3\times 2 = 12$ mặt.

Suy ra có đúng 18 mặt chứa tam giác chỉ song song với cạnh BC.

Tương tự với các cạnh còn lại của tứ diện, mỗi cạnh đều có đúng 18 mặt chỉ song song với đúng cạnh đó.

Gọi A là biến cố: "Mặt phẳng chứa tam giác được chọn song song với đúng một cạnh của tứ diện".

Ta có $n(A) = 6\times 18 = 108$.

Xác suất của A là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{108}{C_{18}^3 - 6} = \dfrac{2}{15}$.

□

Câu 152. Tập S gồm các số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau được thành lập từ các chữ số $0;1;2;3;4;5;6;7;8$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S. Tính xác suất để số được chọn không có hai chữ số chẵn đứng cạnh nhau.

Lời giải.

Số cách lập số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau thỏa đề bài là $A_9^6 - A_8^5 = 53760$.
Ta có không gian mẫu $n(\Omega) = 53760$.
Gọi biến cố A: "Số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau không có hai chữ số chẵn đứng cạnh nhau."

1. Số có 6 chữ số khác nhau trong đó có 3 chữ số lẻ, 3 chữ số chẵn và 2 chữ số chẵn không đứng cạnh nhau.
   Số cách chọn 3 chữ số lẻ để xếp: A_4^3.
   Số cách chọn 3 chữ số chẵn để xếp
   - có chứa chữ số 0: C_4^2
   - không chứa chữ số 0: C_4^3

   Như vậy có $A_4^3 \cdot C_4^2 \left(C_4^3 \cdot 3! - C_3^2 \cdot 2!\right) + A_4^3 \cdot C_4^3 \cdot C_4^3 \cdot 3! = 2592 + 2304 = 4896$ cách lập.
2. Số có 6 chữ số khác nhau trong đó có 4 chữ số lẻ, 2 chữ số chẵn và 2 chữ số chẵn không đứng cạnh nhau.
   Số cách chọn 4 chữ số lẻ để xếp A_4^4.
   Số cách chọn 2 chữ số chẵn để xếp
   - có chứa chữ số 0: C_4^1.
   - không chứa chữ số 0: C_4^2.

   Như vậy có $A_4^4 \cdot C_4^1 \left(C_5^2 \cdot 2! - C_4^1\right) + A_4^4 \cdot C_4^3 \cdot C_5^2 \cdot 2! = 1536 + 2880 = 4416$ cách lập.

Ta có $n(A) = 9312$.
Ta có $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{9312}{53760} = \dfrac{97}{560}$. □

Câu 153. Một người chơi trò gieo súc sắc. Mỗi ván gieo đồng thời ba con súc sắc. Người chơi thắng cuộc nếu xuất hiện ít nhất 2 mặt sáu chấm. Tính xác suất để trong 3 ván, người đó thắng ít nhất hai ván.

Lời giải.

- Gọi S_i là biến cố "Súc sắc thứ i xuất hiện mặt sáu chấm", S là biến cố "Người chơi thắng cuộc". Ta có $S = S_1S_2\overline{S_3} \cup S_1S_3\overline{S_2} \cup S_2S_3\overline{S_1} \cup S_1S_2S_3$.
- Ta có $P(S_1) = P(S_2) = P(S_3) = \dfrac{1}{6}$, $P\left(\overline{S_1}\right) = P\left(\overline{S_2}\right) = P\left(\overline{S_3}\right) = \dfrac{5}{6}$. Khi đó

$$\begin{aligned} P(S) &= P(S_1)P(S_2)P\left(\overline{S_3}\right) + P(S_1)P(S_3)P\left(\overline{S_2}\right) + P(S_2)P(S_3)P\left(\overline{S_1}\right) + P(S_1)P(S_2)P(S_3) \\ &= \frac{5}{6^3} + \frac{5}{6^3} + \frac{5}{6^3} + \frac{1}{6^3} = \frac{2}{27}. \end{aligned}$$

- Gọi V_i là biến cố "Người chơi thắng ván thứ i", V là biến cố "Người chơi thắng ít nhất hai ván". Ta có $V = V_1V_2\overline{V_3} \cup V_1V_3\overline{V_2} \cup V_2V_3\overline{V_1} \cup V_1V_2V_3$.
- Ta có $P(V_1) = P(V_2) = P(V_3) = \dfrac{2}{27}$, $P\left(\overline{V_1}\right) = P\left(\overline{V_2}\right) = P\left(\overline{V_3}\right) = \dfrac{25}{27}$. Khi đó

$$\begin{aligned} P(V) &= P(V_1)P(V_2)P\left(\overline{V_3}\right) + P(V_1)P(V_3)P\left(\overline{V_2}\right) + P(V_2)P(V_3)P\left(\overline{V_1}\right) + P(V_1)P(V_2)P(V_3) \\ &= \frac{100}{27^3} + \frac{100}{27^3} + \frac{100}{27^3} + \frac{8}{27^3} = \frac{308}{19683}. \end{aligned}$$

□

Câu 154. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có ba chữ số (không nhất thiết khác nhau) được lập từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Chọn ngẫu nhiên một số $\overline{abc}$ từ S. Tính xác suất để số được chọn thỏa mãn $a \leqslant b \leqslant c$.

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.
Gọi A là biến cố lấy được số $\overline{abc}$ sao cho $a \leqslant b \leqslant c$.
Các số $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ được xếp thứ tự từ 1 đến 10.
Cách 1: Chữ số $a = n$, $b = k$ với $k \geqslant n$ thì c có $10 - k$ cách chọn. Suy ra số cách chọn $\overline{abc}$ là

$$\sum_{n=1}^{9}\sum_{k=n}^{10}(10-k) = \sum_{n=1}^{9}(1+2+\cdots+10-n) = \sum_{n=1}^{9}\frac{(10-n)(11-n)}{2} = 165(\text{cách})$$

Cách 2: Vì $1 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant 9$ nên suy ra $1 \leqslant a < b+1 < c+2 \leqslant 11$.
Số cách chọn $\overline{abc}$ là $C_{11}^{3} = 165$ cách.
Vậy xác suất để chọn được số $\overline{abc}$ thỏa mãn đề bài là $\dfrac{165}{900} = \dfrac{11}{60}$. □

Câu 155. Có 6 xe xếp cạnh nhau thành hàng ngang gồm: 1 xe màu xanh, 2 xe màu vàng và 3 xe màu đỏ. Tính xác suất để hai xe cùng màu không xếp cạnh nhau.

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử, A là biến cố "Hai xe cùng màu không xếp cạnh nhau". Ta có $n(\Omega) = 6!$. Giả sử có 6 vị trí xếp lần lượt là $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Xếp để hai xe cùng màu không đứng cạnh nhau có các trường hợp sau:

- Trường hợp xếp 3 xe đỏ cách đều nhau (vị trí $1, 3, 5$ hoặc $2, 4, 6$) có $2 \cdot 3!$ cách. Xếp 2 xe vàng và 1 xe xanh vào 3 vị trí còn lại có $3!$ cách.
- Trường hợp xếp 2 xe đỏ ở vị trí 1 và 6 có A_3^2 cách. Vì hai xe đỏ không được đứng cạnh nhau nên xếp cho xe đỏ còn lại có 2 cách (vị trí 3 hoặc 4). Xếp xe xanh sao cho hai xe vàng không đứng cạnh nhau có 2 cách. Xếp 2 xe vàng vào hai vị trí còn lại có $2!$ cách. Vậy tổng số cách xếp là $n(A) = 2 \cdot 3! \cdot 3! + A_3^2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2! = 120$. Suy ra $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{6}$.

□

Câu 156. Từ tập hợp tất cả các số tự nhiên có năm chữ số mà các chữ số đều khác 0, lấy ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để trong số tự nhiên được lấy ra chỉ có mặt 3 chữ số khác nhau.

Lời giải.
Ta có $|\Omega| = 9^5 = 59049$. Tính $|A|$.

1. Có 1 chữ số lặp lại 3 lần.
   - Chọn chữ số lặp lại 3 lần: có 9 cách.
   - Xếp chữ số vừa chọn vào 3 vị trí: có C_5^3 cách.
   - Chọn chữ số thứ hai: có 8 cách.
   - Xếp chữ số thứ hai vào vị trí: có 2 cách.
   - Chọn chữ số còn lại và xếp vào: có 7 cách.

   Vậy có $\dfrac{9 \times C_5^3 \times 8 \times 2 \times 7}{2} = 5040$ số.
2. Có 2 chữ số mà mỗi chữ số lặp lại 2 lần.
   - Chọn chữ số thứ nhất: có 9 cách.
   - Xếp chữ số thứ nhất: có C_5^2 cách.

- Chọn chữ số thứ hai: có 8 cách.
- Xếp chữ số thứ hai: có C_3^2 cách.
- Chọn chữ số thứ ba và xếp vào: có 7 cách.

Vậy có $\dfrac{9 \times C_5^2 \times 8 \times C_3^2 \times 7}{2} = 7560$ số.

Ta được $|A| = 5040 + 7560 = 12600$.
Vậy $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{12600}{59049}$. □

Câu 157. Học sinh A thiết kế bảng điều khiển điện tử mở cửa phòng học của lớp mình. Bảng gồm 10 nút, một nút được ghi một số tự nhiên từ 0 đến 9 và không có hai nút nào được ghi cùng một số. Để mở cửa cần nhấn 3 nút liên tiếp khác nhau sao cho 3 số trên 3 nút theo thứ tự đã nhấn tạo thành một dãy tăng và có tổng bằng 10. Học sinh B chỉ nhớ được chi tiết 3 nút tạo thành dãy số tăng. Tính xác suất để B mở được cửa phòng học đó biết rằng nếu bấm sai 3 lần liên tiếp của sẽ tự động khóa lại (không cho mở nữa).

Lời giải.
Số cách chọn ba số là $C_{20}^3 = 120$. Vì chọn ba số thì chỉ có một cách sắp xếp theo thứ tự tăng dần nên số cách chọn được ba số tạo thành dãy số tăng là 120 cách. Để mở được cửa thì dãy số có thể là

$$\{0;1;9\}, \{0;2;8\}, \{0;3;7\}, \{0;4;6\}, \{1;2;7\}, \{1;3;6\}, \{1;4;5\}, \{2;3;5\}$$

Xác suất để mở cửa trong lần một là $\dfrac{8}{120}$.
Xác suất để mở được cửa trong lần hai (bỏ số đã bấm ở lần một) là $\dfrac{8}{119}$.
Xác suất để mở được cửa trong lần ba (bỏ số đã bấm ở hai lần trước) là $\dfrac{8}{118}$.
Vậy xác suất để mở được cửa phòng học là $\dfrac{8}{120} + \dfrac{112}{120} \cdot \dfrac{8}{119} + \dfrac{112}{120} \cdot \dfrac{111}{119} \cdot \dfrac{8}{118} = \dfrac{189}{1003}$. □

Câu 158. Một nhóm học sinh đi dự hội nghị có 5 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 2 học sinh lớp 12C được xếp ngẫu nhiên vào một bàn tròn, mỗi học sinh ngồi một ghế. Tính xác suất để không có 2 học sinh nào cùng lớp ngồi cạnh nhau.

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu, ta có $n(\Omega) = 9!$.
Gọi X là biến cố không có 2 học sinh nào cùng lớp ngồi cạnh nhau.
Chọn một học sinh lớp $12A$ làm mốc và xếp vào một chỗ.
4 học sinh lớp $12A$ còn lại xếp vào 4 vị trí cách nhau một chỗ: có 4! cách.
Còn lại 3 học sinh lớp $12B$ và 2 học sinh lớp $12C$ xếp vào 5 chỗ trống: có 5! cách.
Suy ra có $4! \cdot 5! = 2880$ cách sắp xếp, hay $n(X) = 2880$.
Vậy xác suất cần tính là

$$P(X) = \frac{n(X)}{n(\Omega)} = \frac{2880}{9!} = \frac{1}{126}.$$

□

Câu 159. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật $OMNP$ với $M(0;10)$, $N(100;10)$ và $P(100;0)$. Gọi S là tập hợp tất cả các điểm $A(x;y)$ với $x, y \in \mathbb{Z}$ nằm bên trong (kể cả trên cạnh) của $OMNP$. Lấy ngẫu nhiên một điểm $A(x;y) \in S$. Tính xác suất để $x + y \leqslant 90$.

Lời giải.

Điểm $A(x;y)$ nằm bên trong (kể cả trên cạnh) của $OMNP$ suy ra $0 \leqslant x \leqslant 100$, $0 \leqslant y \leqslant 10$.
Có 101 cách chọn x, 11 cách chọn y. Do đó, số cách chọn điểm A là $101 \cdot 11$.
Để điểm $A(x;y)$ thỏa điều kiện $x + y \leqslant 90$ ta chỉ rõ từng trường hợp cụ thể

- Với $y = 0$ thì chọn $x \in \{0;1;2;\ldots;90\}$.
- Với $y = 1$ thì chọn $x \in \{0;1;2;\ldots;89\}$.
- ...
- Với $y = 10$ thì chọn $x \in \{0;1;2;\ldots;80\}$.

Do đó, số cách chọn điểm $A(x;y)$ thỏa điều kiện $x + y \leqslant 90$ là $81 + 82 + \cdots + 91 = 946$.
Vậy xác suất cần tìm là $P = \dfrac{946}{101 \cdot 11} = \dfrac{86}{101}$. □

Câu 160. Trong một bài thi trắc nghiệm khách quan có 10 câu. Mỗi câu có bốn phương án trả lời, trong đó chỉ có một phương án đúng. Mỗi câu trả lời đúng thì được 1 điểm, trả lời sai thì bị trừ 0,5 điểm. Một thí sinh do không học bài nên làm bài bằng cách với mỗi câu đều chọn ngẫu nhiên một phương án trả lời. Tính xác suất để thí sinh đó làm bài được số điểm không nhỏ hơn 7.

Lời giải.
Gọi x là số câu đúng $(0 \leqslant x \leqslant 10)$, $10 - x$ là số câu sai. Ta có bất phương trình

$$x + \frac{x-10}{2} \geqslant 7 \Leftrightarrow 8 \leqslant x \leqslant 10.$$

Xác suất để thí sinh đó làm bài được số điểm không nhỏ hơn 7 là

$$C_{10}^{8}\left(\frac{1}{4}\right)^{8}\left(\frac{3}{4}\right)^{2} + C_{10}^{9}\left(\frac{1}{4}\right)^{9}\left(\frac{3}{4}\right)^{1} + C_{10}^{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^{0} = \frac{109}{262144}$$

□

Câu 161. Cho một tập A gồm 8 phần tử. Có bao nhiêu cặp tập con khác rỗng không giao nhau của tập A?

Lời giải.
Gọi hai tập con không giao nhau của tập A là B, C. Kí hiệu (B,C) là cặp tập con không giao nhau của A. Ta đếm các cặp tập con (B,C) như sau:

- Mỗi phần tử của tập A có 3 lựa chọn là thuộc B, thuộc C hoặc không thuộc cả hai nên có 3^8 cặp có thứ tự, trong đó có cả cặp (B,C) là cặp rỗng-rỗng. Như vậy, mỗi cặp (B,C) đếm hai lần.
- Xét những cặp có đúng một tập rỗng dạng $(B,\varnothing)$, có $2^8 - 1$ số tập con khác rỗng của tập A nên có $2^8 - 1$ cặp có đúng một tập rỗng dạng $(B,\varnothing)$.

Do đó, ta có $\dfrac{3^8-1}{2} - (2^8 - 1) = 3025$ cặp tập con khác rỗng không giao nhau của tập A. □

Câu 162. Gọi X là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một số thuộc tập X. Tính xác suất để số lấy được luôn chứa đúng ba số thuộc tập $Y = \{1;2;3;4;5\}$ và ba số này đứng cạnh nhau, có số chẵn đứng giữa hai số lẻ.

Lời giải.
Ta có $n(\Omega) = A_{10}^{6} - A_{9}^{5}$. Ký hiệu 3 số của tập Y đứng cạnh nhau có số chẵn đứng giữa hai số lẻ là D. Số cách chọn D là $2A_3^2$. Xem D như là một chữ số. Với mỗi số D, ta tìm số các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau lấy trong tập $U = \{D,0,6,7,8,9\}$ sao cho luôn có mặt số D.

Xét số nhận cả 0 đứng đầu. A có 4 cách xếp vào 4 vị trí, các số còn lại có A_5^3 cách chọn. Số cách chọn là $4A_5^3$.
Xét số có dạng $\overline{0b_2b_3b_4}$. Số cách chọn là $3A_4^2$.

Các số cần lập là $2A_3^2(4A_5^3 - 3A_4^2)$. Vậy $P = \dfrac{2A_3^2(4A_5^3 - 3A_4^2)}{A_{10}^6 - A_9^5} = \dfrac{37}{945}$. □

Câu 163. Cho S là tập các số tự nhiên có 7 chữ số. Lấy ngẫu nhiên một số từ S. Tính xác suất để số lấy được có chữ số tận cùng bằng 3 và chia hết cho 7 (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn)?

Lời giải.
Số các số tự nhiên có 7 chữ số là $9.10^6 = 9000000$ (số).
Gọi số tự nhiên có 7 chữ số chia hết cho 7 và có chữ số tận cùng bằng 3 là $\overline{abcdef3}$.

Ta có: $\overline{abcdef3} = 10\overline{abcdef} + 3 = 3\overline{abcdef} + 7\overline{abcdef} + 3 \vdots 7 \Leftrightarrow 3\overline{abcdef} + 3 \vdots 7$.

Đặt $3\overline{abcdef} + 3 = 7k (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \overline{abcdef} = 2k - 1 + \dfrac{k}{3}$ là số nguyên khi $k = 3l (l \in \mathbb{Z})$.

Khi đó $\overline{abcdef} = 7l - 1 \Rightarrow 100000 \leqslant 7l - 1 \leqslant 999999 \Leftrightarrow \dfrac{100001}{7} \leqslant l \leqslant \dfrac{1000000}{7}$.

Suy ra $l \in \{14286; \ldots; 142857\}$, nên có 128572 giá trị của l, tức là có 128572 số tự nhiên có 7 chữ số chia hết cho 7 và có chữ số tận cùng bằng 3.

Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{128572}{9000000} \approx 0,014$. □

Câu 164. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật $OMNP$ với $M(0;10)$, $N(100;10)$ và $P(100;0)$. Gọi S là tập hợp tất cả các điểm $A(x;y)$, $(x, y \in \mathbb{R})$ nằm bên trong (kể cả trên cạnh) của $OMNP$. Lấy ngẫu nhiên một điểm $A(x;y) \in S$. Tính xác suất để $x + y \leqslant 90$.

Lời giải.
Điểm $A(x;y), (x, y \in \mathbb{R})$ nằm bên trong (kể cả trên cạnh) của $OMNP$.
Có 101 cách chọn x, 11 cách chọn y.
Không gian mẫu là tập hợp các điểm có tọa độ nguyên nằm trên hình chữ nhật $OMNP$.
Vậy số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 101 \cdot 11$.
Gọi X là biến cố: "Các điểm $A(x;y)$ thỏa mãn $x + y \leqslant 90$.

Vì $x \in [0;100], y \in [0;10]$ và $x + y \leqslant 90 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \Rightarrow x = \{0;1;2;...;90\} \\ ... \\ y = 1 \Rightarrow x = \{0;1;2;...;89\}. \end{array}\right.$

Khi đó $91 + 90 + ... + 81 = \dfrac{(81 + 91)11}{2} = 946$ cặp $(x;y)$ thỏa mãn.

Vậy xác suất cần tính là $P = \dfrac{n(X)}{n(\Omega)} = \dfrac{946}{101 \cdot 11} = \dfrac{86}{101}$. □

Câu 165. Cho một đa giác đều gồm $2n$ đỉnh $(n \geqslant 2, n \in \mathbf{N})$. Chọn ngẫu nhiên ba đỉnh trong số $2n$ đỉnh của đa giác, xác suất ba đỉnh được chọn tạo thành một tam giác vuông là $\dfrac{1}{5}$. Tìm n.

Lời giải.

- Để ba đỉnh tạo thành một tam giác vuông thì hai đỉnh phải tạo thành đường chéo đi qua tâm, đỉnh còn lại bất kì.
- Không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{2n}^3$.
- Xét A: "Ba đỉnh được chọn tạo thành một tam giác vuông". Ta đếm $n(A)$ như sau:
  - Chọn 1 trong các đường chéo: n (cách).
  - Chon 1 đỉnh trong các đỉnh còn lại: $2n - 2$ (cách).

$$\Rightarrow n(A) = n(2n-2) \Rightarrow P(A) = \frac{n(2n-2)}{C_{2n}^3}.$$

- Theo đề bài thì $P(A) = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{n(2n-2)}{C_{2n}^3} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{3}{2n-1} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow n = 8.$

. □

Câu 166. Xếp 3 bạn học sinh lớp A, 2 bạn học sinh lớp B, 1 bạn học sinh lớp C thành một hàng dọc. Có bao nhiêu cách xếp sao cho hai bạn học sinh cùng lớp không đứng liền nhau.

Lời giải.

- Trường hợp 1.

1	A	2	A	3	A	4

Xếp 3 bạn học sinh lớp A vào các ô đánh dấu A, có $3! = 6$ cách xếp.
Xếp 3 học sinh còn lại vào 3 ô $\{1; 2; 3\}$, hoặc vào 3 ô $\{2; 3; 4\}$, có $2 \cdot 3! = 12$ cách xếp.
Trường hợp này có $6 \cdot 12 = 72$ cách xếp.

- Trường hợp 2.

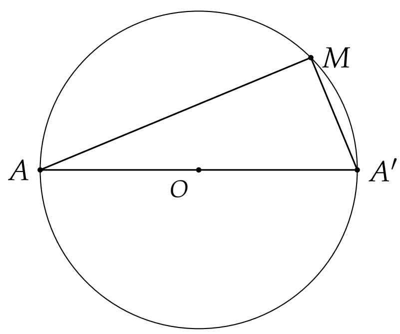
A	1	A	2	A

Xếp 3 bạn học sinh lớp A vào các ô đánh dấu A, có $3! = 6$ cách xếp.
Chọn 1 học sinh lớp B và 1 học sinh lớp C xếp vào một trong hai ô $\{1; 2\}$, có $2 \cdot 2 \cdot 2! = 8$ cách xếp.
Xếp học sinh còn lại vào ô còn lại.
Trường hợp này có $6 \cdot 8 = 48$ cách xếp.

Vậy có $72 + 48 = 120$ cách xếp sao cho hai bạn học sinh cùng lớp không đứng liền nhau. □

Câu 167. Cho một đa giác đều 48 đỉnh. Lấy ngẫu nhiên ba đỉnh của đa giác. Tìm xác suất để tam giác tạo thành từ ba đỉnh đó là một tam giác nhọn.

Lời giải.



Gọi Ω là không gian mẫu. Ta có $n_\Omega = C_{48}^3$. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp đa giác. Giả sử A là 1 đỉnh bất kỳ của đa giác, kẻ đường kính AA' thì A' cũng là một đỉnh của đa giác. Đường kính AA' chia (O) thành hai nửa đường tròn.
Gọi T: "là biến cố lấy ba đỉnh tạo thành một tam giác nhọn". Suy ra $\overline{T}$ "là biến cố lấy ba đỉnh tạo thành một tam giác vuông hoặc tam giác tù ".
Chọn một đỉnh A có 48 cách.
Chọn 2 đỉnh còn lại, thoả mãn ba đỉnh tạo thành một tam giác vuông hoặc tam giác tù.
Ta sẽ có hai đỉnh còn lại cùng thuộc một trong hai nửa đường tròn bao gồm cả A'. Suy ra tất cả có 24 điểm.
Chọn 2 điểm từ 24 điểm có C_{24}^2 cách $\Rightarrow P(\overline{T}) = 48 \cdot C_{24}^2$. Vậy $P(T) = 1 - P(\overline{T}) = \frac{11}{47}$. □

Câu 168. Gọi X là tập hợp các số tự nhiên có 5 chữ số. Lấy ngẫu nhiên hai số từ tập X. Tìm xác suất để nhận được ít nhất một số chia hết cho 4.

Lời giải.
Có tất cả $9 \cdot 10^4$ số có 5 chữ số. Vì vậy số phần tử của tập X là 90000. Do đó số phần tử của phép thử chọn 2số ngẫu nhiên từ X là $n(\Omega) = (90000)^2$. Gọi A là biến cố chọn từ X được 2 số mà có ít nhất một số chia

hết cho 4. Khi đó $\overline{A}$ là biến cố chọn từ X được 2 số mà không có số nào chia hết cho 4. Với lưu ý rằng: số chia hết cho 4 là số mà 2 chữ số tận cùng chia hết cho 4. Số chia hết cho 4 mà bé hơn 100 có dạng và thoả mãn $0 \leqslant 4k \leqslant 99$. Do đó từ 0 đến 99 có tất cả 25 số chia hết cho 4. Xét số có 5 chữ số $\overline{abcde}$ và chia hết cho 4. Chọn trước $\overline{de}$ có 25 cách chọn. Còn lại chọn số $\overline{abc}$ có $9 \cdot 10^2 = 900$. Như vậy có: $900 \cdot 25 = 22500$ số có 5 chữ số và chia hết cho 4. Suy ra có $90000 - 22500 = 67500$ số có 5 chữ số và không chia hết cho 4. Bây giờ ta tính số phần tử của biến cố $\overline{A}$: $n\left(\overline{A}\right) = (67500)^2$. Và xác suất của biến cố chọn được 2 số mà có ít nhất một số chia hết cho 4 là

$$P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{n\left(\overline{A}\right)}{n\left(\Omega\right)} = 1 - \frac{(67500)^2}{(90000)^2} = \frac{7}{16} \approx 0{,}4375$$

□

Câu 169. Từ các chữ số $1, 2, 3, 5, 6, 8, 9$ lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số phân biệt và chia hết cho 3?

Lời giải.
Tổng các chữ số trên bằng 34. Để 5 chữ số có tổng chia hết cho 3 ta bỏ đi hai chữ số mà có tổng chia 3 dư 1. Có 6 bộ như vậy: $(1;3)$, $(2;5)$, $(1;6)$, $(2;8)$, $(1;9)$, $(5;8)$. Vậy có tất cả $6 \cdot 5! = 720$ số. □

Câu 170. Trước kì thi học kì hai lớp 11 tại trường FIVE, giáo viên Toán lớp FIVE A giao cho học sinh đề cương ôn tập gồm có $2n$ bài toán, n là số nguyên dương lớn hơn 1. Đề thi học kì của lớp FIVE A sẽ gồm 3 bài toán được chọn ngẫu nhiên trong số $2n$ bài toán đó. Một học sinh muốn không phải thi lại, sẽ phải làm được ít nhất 2 trong số 3 bài toán đó. Học sinh TWO chỉ giải chính xác được đúng 1 nửa số bài trong đề cương trước khi đi thi, nửa còn lại học sinh đó không thể giải được. Tính xác suất để TWO không phải thi lại.

Lời giải.
Gọi B là biến cố "Học sinh TWO làm đúng 2 trong 3 bài toán thi".
Gọi C là biến cố "Học sinh TWO làm đúng cả 3 bài toán thi".
Gọi A là biến cố " Học sinh TWO không phải thi lại".
Ta có $A = B \cup C$ và B, C là hai biến cố xung khắc.
Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{2n}^3$.

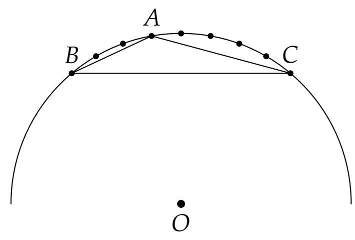
- Xét biến cố B.
  - Chọn 2 bài trong n bài học sinh TWO làm được là C_n^2.
  - Chọn 1 bài trong n bài học sinh TWO làm được là C_n^1.

  Từ đó suy ra $P(B) = \dfrac{C_n^2 \cdot C_n^1}{C_{2n}^3}$.
- Tương tự với biến cố C ta được $P(C) = \dfrac{C_n^3}{C_{2n}^3}$.

Vậy $P(A) = P(B) + P(C) = \dfrac{1}{2}$. □

Câu 171. Cho đa giác đều 2018 đỉnh. Gọi S là tập hợp các tam giác có đỉnh là đỉnh của đa giác. Chọn ngẫu nhiên một tam giác trong tập S. Tính xác suất để chọn được tam giác có một góc lớn hơn 140 độ.

Lời giải.



Số tam giác có đỉnh là đỉnh của đa giác đều là C_{2018}^3.
Hai đỉnh liên tiếp của đa giác đều 2018 đỉnh chắn một cung tròn (nhỏ) có số đo $\dfrac{360^\circ}{2018} = \dfrac{180^\circ}{1009}$.
Xét tam giác ABC có các đỉnh là các đỉnh của đa diện đều và $\widehat{A} > 140^\circ$. Khi đó ta có số đo các góc A, B, C là bội của $\dfrac{90^\circ}{1009}$.

- Ta có số cách chọn đỉnh A là 2018 cách.
- Xét số cách chọn hai đỉnh B, C. Gọi $n \cdot \dfrac{90^\circ}{1009}$ là tổng số đo của hai góc B, C với $n \geqslant 2$.
  Do $\widehat{A} > 140^\circ$ nên $n \cdot \dfrac{90^\circ}{1009} < 40^\circ \Rightarrow 2 \leqslant n \leqslant 448$.
  Với mỗi n phần tử xếp thành hàng ngang có $n-1$ khoảng trống ở giữa nên với mỗi số $n \in \{2; 3; \ldots; 448\}$ có $n-1$ cặp góc B, C thỏa mãn yêu cầu.
- Vậy số tam giác có một góc lớn hơn 140° tạo thành từ ba đỉnh của đa giác đều đã cho là
  $$2018 \cdot (1 + 2 + \cdots + 447) = 2018 \cdot C_{448}^2.$$

Vậy xác suất để chọn được tam giác có một góc lớn hơn 140° là $p = \dfrac{2018 \cdot C_{448}^2}{C_{2018}^3} = \dfrac{298}{2017}$. □

Câu 172. Trong kỳ thi THPT Quốc gia năm 2018, mỗi phòng thi gồm 24 thí sinh xếp vào 24 chiếc bàn khác nhau. Bạn An là một thí sinh dự thi 4 môn (Toán, Văn, Ngoại Ngữ, Khoa học tự nhiên), cả 4 lần thi đều thi tại 1 phòng thi duy nhất. Giám thị xếp thí sinh vào vị trí một cách ngẫu nhiên. Tính xác suất để trong 4 lần thi An có đúng 2 lần ngồi vào cùng 1 vị trí.

Lời giải.
Xác suất để bạn An ngồi vào một vị trí nào đó là $\dfrac{1}{24}$. Xác suất để bạn An ngồi đúng 2 lần vào 1 vị trí là $24 \cdot \left(\dfrac{1}{24}\right)^2 \cdot \dfrac{23}{24} \cdot \dfrac{22}{24} \cdot C_4^2 = \dfrac{253}{1152}$. □

Câu 173. Cho A là tập các số tự nhiên có 9 chữ số. Lấy ngẫu nhiên một số thuộc tập A. Tính xác suất lấy được một số lẻ và chia hết cho 9.

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 9 \cdot 10^8$.
Gọi B là biến cố thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Ta có các số lẻ có 9 chữ số chia hết cho 9 là 100000017, 100000035, 100000053,..., 999999999 lập thành một cấp số cộng với $u_1 = 100000017$ và công sai $d = 18$.
Nên số phần tử của dãy là $\dfrac{999999999 - 100000017}{18} + 1 = 50000000$.
Vậy $n(B) = 5 \cdot 10^7$. Xác suất là $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{5 \cdot 10^7}{9 \cdot 10^8} = \dfrac{1}{18}$. □

Câu 174. Cho tập hợp X gồm các số tự nhiên có sáu chữ số đôi một khác nhau có dạng $\overline{abcdef}$. Từ tập hợp X lấy ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để số lấy ra là số lẻ và thỏa mãn $a < b < c < d < e < f$.

Lời giải.
Không gian mẫu của phép thử là $\Omega = X$.
Loại 1, số tự nhiên có a tùy ý (có thể là chữ số 0), có A_{10}^6 (số).
Loại 2, số tự nhiên có dạng $\overline{0bcdef}$, có A_9^5 (số).
Do đó, số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = A_{10}^6 - A_9^5 = 136080$.

Gọi A là biến cố: "Số lấy ra là số lẻ và thỏa mãn $a < b < c < d < e < f$". Vì số lấy ra là số lẻ nên $f \in \{1;3;5;7;9\}$, kết hợp điều kiện $1 \leqslant a < b < c < d < e < f$ ta được $f \in \{7;9\}$.

- **Trường hợp 1.** Số tự nhiên có dạng $\overline{abcde7}$, lựa chọn các chữ số a, b, c, d, e từ $\{1;2;3;4;5;6\}$ thì chỉ lập được 1 số thỏa mãn $a < b < c < d < e$, suy ra có C_6^5 (số).

- **Trường hợp 2.** Số tự nhiên có dạng $\overline{abcde9}$, lựa chọn các chữ số a, b, c, d, e từ $\{1;2;3;4;5;6;7;8\}$ thì chỉ lập được 1 số thỏa mãn $a < b < c < d < e$, suy ra có C_8^5 (số).

Do đó, số phần tử của biến cố A là $n(A) = C_6^5 + C_8^5 = 62$.
Vậy xác suất cần tính là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{62}{136080} = \dfrac{31}{60480}$. □

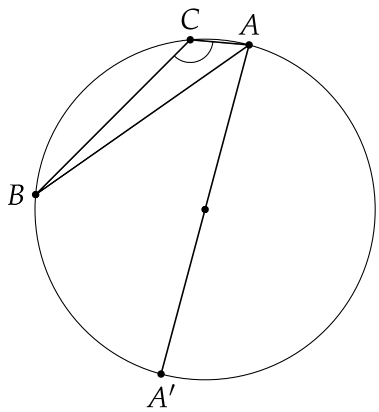
Câu 175. Xếp 6 chữ số 1, 2, 3, 1, 2 và 4 theo một hàng ngang. Tính xác suất để xảy ra biến cố: "2 chữ số giống nhau thì không xếp cạnh nhau."

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \dfrac{6!}{2!2!} = 180$. Gọi A là biến cố: "2 chữ số giống nhau thì không xếp cạnh nhau." Khi đó, $n(\overline{A}) = \dfrac{5!}{2!} + \dfrac{5!}{2!} - 4! = 96$.
Vậy, xác suất của biến cố A là $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{96}{180} = \dfrac{7}{15}$. □

Câu 176. Cho đa giác đều 100 đỉnh. Chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh của đa giác. Tính xác suất để 3 đỉnh được chọn là 3 đỉnh của một tam giác tù.

Lời giải.
Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp đa giác đều 100 đỉnh.
Xét A là một đỉnh tùy ý của đa giác, kẻ đường kính $AA' \Rightarrow A'$ cũng là một đỉnh của đa giác. Đường kính AA' chia (O) thành hai nửa đường tròn, với mỗi cách chọn ra 2 điểm B, C là 2 đỉnh của đa giác và cùng thuộc một nửa đường tròn, ta được 1 tam giác tù ABC. Khi đó số cách chọn B và C là $2 \cdot C_{49}^2$. Đa giác có 100 đỉnh nên số đường chéo là đường kính của đường tròn ngoại tiếp đa giác là 50. Do đó số cách chọn ra 3 đỉnh để lập thành một tam giác tù là

$$50 \cdot 2 \cdot C_{49}^2 = 100 \cdot C_{49}^2$$



Ta có $n(\Omega) = C_{100}^3$. Gọi biến cố E: "chọn được 3 đỉnh lập thành một tam giác tù." Vậy $P(E) = \dfrac{100 \cdot C_{49}^2}{C_{100}^3} = \dfrac{8}{11}$. □

Câu 177. Chọn ngẫu nhiên hai số a, b khác nhau từ tập hợp $A = \{2; 2^2; 2^3; \ldots; 2^{25}\}$. Tính xác suất để $\log_a b$ là số nguyên.

Lời giải.
Đặt $\log_a b = t$, ta được $b = a^t$.
Đặt $\begin{cases} a = 2^x \\ b = 2^y \end{cases} \Rightarrow (2^x)^t = 2^y \Leftrightarrow y = x \cdot t \Rightarrow y \,\vdots\, x$. Vì $t \in \mathbb{Z}$ và $x, y \in \{1; 2; \ldots; 25\}$ nên ta có bảng sau

Giá trị của x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số cách chọn y	24	11	7	5	4	3	2	2	1	1	1	1

Ta có $\begin{cases} n(A) = 62 \\ n(\Omega) = A_{25}^2. \end{cases}$ Vậy $P(A) = \dfrac{31}{300}$.

Cách khác. Ta có

$$n(A) = \sum_{x=1}^{12} \left[\frac{25}{x} - 1\right] = 24 + 11 + 5 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 62$$

□

Câu 178. Có 10 học sinh lớp A, 8 học sinh lớp B được xếp ngẫu nhiên vào một bàn tròn (hai cách xếp được coi là giống nhau nếu cách xếp này là kết quả của cách xếp kia khi ta thực hiện phép quay bàn ở tâm một góc nào đó). Tính xác suất để không có hai học sinh bất kì nào của lớp B đứng cạnh nhau.

Lời giải.
Để tránh đi các khả năng bị trùng khi ta thực hiện đếm thì ta thực hiện thao tác cố định một học sinh xác đinh ở lớp A tại 1 vị trí. Bây giờ ta chuyển về bài toán: **Xếp 9 học sinh lớp A và 8 học sinh lớp B thành một hàng dọc với bạn đứng đầu là một bạn C khác 17 bạn trên. Tính xác suất để không có hai học sinh bất kì nào của lớp B đứng cạnh nhau**.
Không gian mẫu là $|\Omega| = 17!$.
Ta cần đếm số cách xếp để không có hai học sinh bất kì nào của lớp B đứng cạnh nhau, tức là giữa hai học sinh lớp B luôn có ít nhất một học sinh lớp A. Do đó ta thực hiện thuật toán để tính số cách xếp như sau:

- Chọn 8 vị trí bất kì trong 10 vị trí để xếp các học sinh lớp B và đánh số từ trái qua phải là $x_1, x_2, \cdots, x_8$. Có C_{10}^8 cách chọn.
- Thêm vào ngay bên trái các vị trí x_i $i = 2, 3, \cdots, 8$ một vị trí để cho một học sinh của lớp A xếp vào. Có 1 cách thêm.
- Xếp 8 học sinh lớp B vào 8 vị trí $x_1, x_2, \cdots, x_8$. Có 8! cách xếp.
- Xếp 9 học sinh lớp A vào 9 vị trí còn lại. Có 9! cách xếp.

Vậy có $9! \cdot 8! \cdot C_{10}^8 = 9! A_{10}^8$ cách xếp thỏa mãn hay xác suất cần tìm là $\dfrac{9! A_{10}^8}{17!}$. □

Câu 179. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; \ldots; 2018\}$ và các số a, b, c thuộc A. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên có dạng abc sao cho $a < b < c$ và $a + b + c = 2016$.

Lời giải.
Xét phương trình $a + b + c = 2016$. Phương trình này có C_{2015}^2 nghiệm $(a; b; c)$. Ta tìm các nghiệm mà có cặp số trùng nhau.

- Trường hợp 1. $a = b = c \Rightarrow a = b = c = \dfrac{2016}{3} = 672$, do đó trường hợp này có 1 nghiệm.
- Trường hợp 2. Chỉ có 2 số trùng nhau. Nếu $a = b$ thì $2a + c = 2016$, suy ra số c nhận các giá trị chẵn là $2; 4; \ldots; 2014$ nên có 1007 nghiệm, trừ đi 1 nghiệm $(672; 672; 672)$ ta còn 1006 nghiệm. Xét tương tự nếu $b = c, c = a$, do đó trường hợp này có $3 \times 1006 = 3018$ nghiệm.

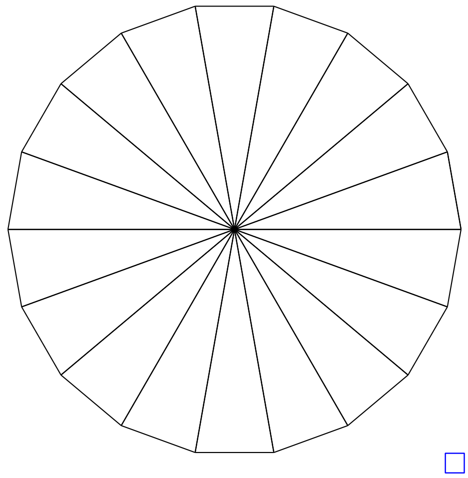
Suy ra, phương trình $a + b + c = 2016$ có $C_{2015}^2 - 1 - 3018 = 2026086$ nghiệm $(a; b; c)$ trong đó ba số a, b, c đôi một khác nhau. Trong số 2026086 nghiệm trên, chỉ có $\dfrac{2026086}{3!} = 337681$ nghiệm thỏa mãn $a < b < c$.
Vậy có tất cả 337681 số tự nhiên abc thỏa đề bài. □

Câu 180. Cho một đa giác đều có 18 đỉnh nội tiếp trong một đường tròn tâm O. Gọi X là tập các tam giác có các đỉnh là các đỉnh của của đai giác trên. Tính xác suất để chọn được một tam giác từ tập X

là tam giác cân nhưng không phải là tam giác đều.

Lời giải.

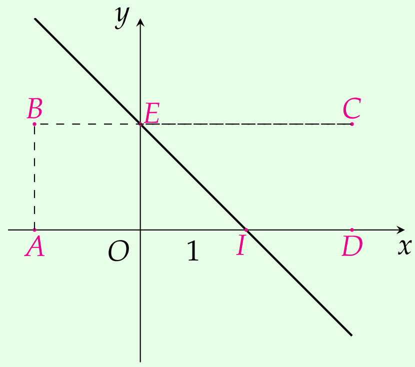
Qua ba đỉnh của đa giác luôn tạo thành một tam giác nên số tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh của đa giác là $n(\Omega) = C_{18}^3$. Có 18 cách chọn một đỉnh của đa giác mỗi đỉnh có 7 cách chọn 2 đỉnh còn lại để được một tam giác cân không đều. Số các tam giác cân không đều là $18.7 = 126$. Xác suất cần tìm $P(A) = \dfrac{128}{C_{18}^3} = \dfrac{21}{136}$.



□

Câu 181.

Trên mặt phẳng Oxy, ta xét một hình chữ nhật $ABCD$ với các điểm $A(-2;0)$, $B(-2;2)$, $C(4;2)$, $D(4;0)$ (hình vẽ). Một con châu chấu nhảy trong hình chữ nhật đó tính cả trên cạnh hình chữ nhật sao cho chân nó luôn đáp xuống mặt phẳng tại các điểm có tọa độ nguyên (tức là điểm có cả hoành độ và tung độ đều nguyên). Tính xác suất để nó đáp xuống các điểm $M(x;y)$ mà $x+y<2$.



Lời giải.

Số các điểm có tọa độ nguyên thuộc hình chữ nhật là $7 \cdot 3 = 21$ điểm vì

$$\begin{cases} x \in \{-2;-1;0;1;2;3;4\} \\ y \in \{0;1;2\}. \end{cases}$$

Để con châu chấu đáp xuống các điểm $M(x,y)$ có $x+y<2$ thì con châu chấu sẽ nhảy trong khu vực hình thang $BEIA$. Để $M(x,y)$ có tọa độ nguyên thì $\begin{cases} x \in \{-2;-1;0;1;2\} \\ y \in \{0;1;2\} \end{cases}$ Nếu $x \in \{-2;-1\}$ thì $y \in \{0;1;2\} \Rightarrow$ có $2 \cdot 3 = 6$ điểm.

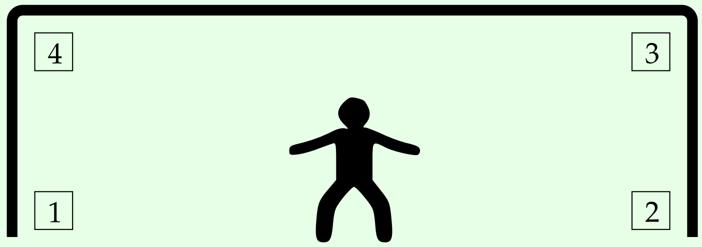
Nếu $x=0$ thì $y \in \{0;1\} \Rightarrow$ có 2 điểm.

Nếu $x=1 \Rightarrow y=0 \Rightarrow$ có 1 điểm.

Suy ra có tất cả $6+2+1=9$ điểm thỏa mãn.

Vậy xác suất cần tính $P = \dfrac{9}{21} = \dfrac{3}{7}$. □

Câu 182. Trong trận đấu bóng đá giữa hai đội U23 Việt Nam và U23 Iraq, trọng tài cho đội Iraq được hưởng một quả đá phạt 11m. Cầu thủ sút phạt ngẫu nhiên vào một trong bốn vị trí 1, 2, 3, 4 và thủ môn bay người cản phá ngẫu nhiên đến một trong bốn vị trí đó với xác suất như nhau (thủ môn và cầu thủ sút phạt đều không đoán được ý định của đối phương). Biết nếu cầu thủ sút và thủ môn bay cùng vào vị trí 1 hoặc 2 thì thủ môn cản phá được cú sút đó, nếu cùng vào vị trí 3 hoặc 4 thì xác suất cản phá thành công là 50%. Tính xác suất để cú sút đó không vào lưới.



Lời giải.

Gọi A_i là biến cố cầu thủ sút vào vị trí i; B_i là biến cố thủ môn bay người đến vị trí i ($i = 1, 2, 3, 4$).

Dễ thấy $P(A_i) = P(B_i) = \dfrac{1}{4}$. Gọi C là biến cố cú sút không vào lưới. Ta có

$$P(C) = P(A_1)P(B_1) + P(A_2)P(B_2) + \frac{1}{2}P(A_3)P(B_3) + \frac{1}{2}P(A_4)P(B_4) = \frac{3}{16}.$$

□

Câu 183. Cho A là tập tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập A, tính xác suất để chọn được một số chia hết cho 7 và chữ số hàng đơn vị là chữ số 1.

Lời giải.

Gọi A là biến cố "Chọn được một số chia hết cho 7 và chữ số hàng đơn vị là chữ số 1".

Ta có số các số tự nhiên có 5 chữ số là $9 \cdot 10^4 = 90000$, suy ra $n(\Omega) = 90000$.

Gọi số tự nhiên có 5 chữ số, chia hết cho 7 và chữ số hàng đơn vị là chữ số 1 là $x = \overline{abcd1}$.

Ta có $x = \overline{abcd1} = 10\overline{abcd} + 1 = \left(3\overline{abcd} + 1\right) + 7\overline{abcd}$. Do đó x chia hết cho 7 khi $3\overline{abcd} + 1$ chia hết cho 7, nghĩa là

$$\begin{aligned}
& 3\overline{abcd} + 1 = 7k,\ k \in \mathbb{N} \\
\Leftrightarrow\ & \overline{abcd} = 2k + \frac{k-1}{3},\ k \in \mathbb{N} \\
\Leftrightarrow\ & \overline{abcd} = 7t + 2,\ t = \frac{k-1}{3},\ t \in \mathbb{N} \\
\Rightarrow\ & 1000 \leqslant 7t + 2 \leqslant 9999,\ t \in \mathbb{N} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{998}{7} \leqslant t \leqslant \frac{9997}{7},\ t \in \mathbb{N} \\
\Leftrightarrow\ & t \in \{143; 144; \ldots; 1428\}.
\end{aligned}$$

Suy ra $n(A) = 1286 \Rightarrow P(A) = \dfrac{1286}{90000} = \dfrac{643}{45000}$. □

Câu 184. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, chọn ngẫu nhiên một điểm thuộc tập $S = \{(a; b) | a, b \in \mathbb{Z}; |a| \leqslant 4; |b| \leqslant 4\}$. Nếu các điểm đều có cùng xác suất được chọn như nhau, hãy tính xác suất để chọn được một điểm mà khoảng cách đến gốc tọa độ không vượt quá 2.

Lời giải.

Tính số phần tử không gian mẫu $n(\Omega)$.

Gọi $M(x; y)$ là điểm sao cho $x, y \in \mathbb{Z}$ và $\begin{cases} |x| \leqslant 4 \\ |y| \leqslant 4 \end{cases}$, khi đó $\begin{cases} x \in \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4\} \\ y \in \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4\} \end{cases}$

Vậy số điểm $M(x; y)$ là: $n(\Omega) = 9.9 = 81$.

Tính số phần tử biến cố A. Gọi $M(x; y)$ thỏa mãn $x, y \in \mathbb{Z}$ và $OM \leqslant 2 \Leftrightarrow x, y \in \mathbb{Z}$ và $\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 2 \Leftrightarrow$ $x, y \in \mathbb{Z}$ và $x^2 + y^2 \leqslant 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ x \in \{0; \pm 1; \pm 2\} \\ y^2 \leqslant 4 - x^2 \end{cases}$.

- Nếu $x = 0$ thì $y^2 \leqslant 4 \Rightarrow y \in \{0; \pm 1; \pm 2\}$. Có 5 cách chọn.
- Nếu $x = \pm 1$ thì $y^2 \leqslant 3 \Rightarrow y \in \{0; \pm 1\}$. Có 2. 3= 6 cách chọn.
- Nếu $x = \pm 2$ thì $y^2 \leqslant 0 \Rightarrow y = 0$. Có 2 cách chọn.

Vậy có tất cả $5 + 6 + 2 = 13$ cách chọn điểm M. Tức $n(A) = 13$. Vậy $P(A) = \dfrac{13}{81}$. □

Câu 185. Cho tập hợp $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Gọi M là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau lấy từ S sao cho tổng các chữ số hàng đơn vị, hàng chục và hàng trăm lớn hơn tổng chữ số các hàng còn lại 3 đơn vị. Tính tổng T của các phần tử trong tập hợp M.

Lời giải.
Gọi số có 6 chữ số thỏa mãn yêu cầu bài ra, có dạng $\overline{abcdef}$.

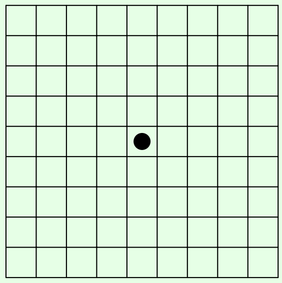
Ta có $a + b + c + 3 = d + e + f$, suy ra $\begin{cases} d + e + f = 12 \\ a + b + c = 9. \end{cases}$

Các tập số thỏa mãn $\{a, b, c\}$ là $\{1, 2, 6\}$, $\{2, 3, 4\}$ và $\{1, 3, 5\}$.
Các tập số tương ứng thỏa mãn bộ $\{d, e, f\}$ là $\{3, 4, 5\}$, $\{1, 5, 6\}$ và $\{2, 4, 6\}$.
Có ba tập số $\{a, b, c\}$, $\{d, e, f\}$ mà mỗi tập số thì các số a, b, c, d, e và f đều xuất hiện 12 lần.
Tổng số các số của tập M là

$$T = 3 \cdot 12 \left[(a + b + c)(10^5 + 10^4 + 10^3) + (d + e + f)(10^2 + 10 + 1) \right] = 36.011.952.$$

□

Câu 186.
Cho một quân cờ đứng ở vị trí trung tâm của một bàn cờ 9×9 (xem hình vẽ). Biết rằng, mỗi lần di chuyển, quân cờ chỉ di chuyển sang ô có cùng một cạnh với ô đang đứng. Tính xác suất để sau bốn lần di chuyển, quân cờ không trở về đúng vị trí ban đầu.



Lời giải.
Quân cờ có bốn hướng di chuyển trái, phải, lên, xuống. Số cách quân cờ di chuyển tùy ý sau 4 lần di chuyển là 4^4. Để quân cờ về vị trí ban đầu có 2 trường hợp.

- Mỗi hướng 1 lần, có $4! = 24$ cách.
- Di chuyển 2 lần lên trên và 2 lần xuống dưới, hoặc di chuyển 2 lần sang trái và 2 lần sang phải, có $2 \cdot \dfrac{4!}{2! \cdot 2!} = 12$ cách.

Xác suất cần tìm là $1 - \dfrac{24 + 12}{4^4} = \dfrac{55}{64}$. □

Câu 187. Một bài trắc nghiệm có 10 câu hỏi, mỗi câu hỏi có 4 phương án lựa chọn trong đó có 1 đáp án đúng. Giả sử mỗi câu trả lời đúng được 4 điểm và mỗi câu trả lời sai bị trừ đi 2 điểm. Một học sinh không học bài và đánh hú họa các câu trả lời (giả sử học sinh đó chọn đáp án cho đủ 10 câu hỏi). Tìm xác suất để học sinh này nhận điểm dưới 1.

Lời giải.
Gọi a và b lần lượt là số câu chọn được đáp án đúng và sai ($a, b \in \mathbb{N}$, $a + b = 10$).
Để nhận được dưới 1 điểm thì $4a - 2b < 1$. Vì $a + b = 10$ nên $b = 10 - a$. Do vậy,

$$4a - 2(10 - a) < 1 \Leftrightarrow 6a < 21 \Leftrightarrow a < 3{,}5.$$

- Với $a = 0 \Rightarrow b = 10 \Rightarrow$ xác suất xảy ra trường hợp này là $0{,}75^{10} = 0{,}05631$.
- Với $a = 1 \Rightarrow b = 9 \Rightarrow$ xác suất xảy ra trường hợp này là $C_{10}^1 \cdot 0{,}25^1 \cdot 0{,}75^9 = 0{,}18771$.
- Với $a = 2 \Rightarrow b = 8 \Rightarrow$ xác suất xảy ra trường hợp này là $C_{10}^2 \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^8 = 0{,}28156$.
- Với $a = 3 \Rightarrow b = 7 \Rightarrow$ xác suất xảy ra trường hợp này là $C_{10}^3 \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75^7 = 0{,}22028$.

Vậy xác suất để học sinh đó nhận được dưới 1 điểm là

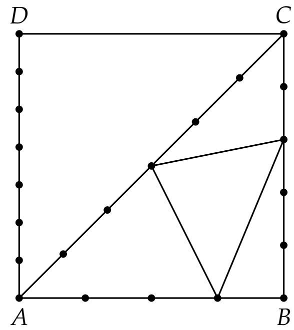
$$0{,}05631 + 0{,}18771 + 0{,}28156 + 0{,}22028 = 0{,}77586.$$

□

Câu 188. Cho tứ giác $ABCD$. Trên các cạnh AB, BC, CA, AD lần lượt lấy 3; 4; 5; 6 điểm phân biệt khác các điểm A, B, C, D sao cho ba điểm trên ba cạnh bất kì không thẳng hàng. Số tam giác phân biệt có các đỉnh là các điểm vừa lấy là

Lời giải.

Số cách lấy ra 3 điểm bất kì từ các điểm đã lấy là C_{18}^3.
Để lấy ra bộ ba điểm không tạo thành một tam giác, ta lấy ba điểm nằm trên một cạnh và số bộ như vậy là $C_3^3 + C_4^3 + C_5^3 + C_6^3 = 35$.
Vậy số tam giác có ba đỉnh thuộc các điểm đã cho là $C_{18}^3 - 35 = 781$.



□

Câu 189. Cho tập $X = \{6;7;8;9\}$, gọi E là tập các số tự nhiên khác nhau có 2018 chữ số lập từ các chữ số của tập X. Chọn ngẫu nhiên một số trong tập E, tính xác suất để chọn được số chia hết cho 3.

Lời giải.

Gọi A_n, B_n là tập con của E gồm các số có n chữ số với A_n là tập các số chia hết cho 3 và B_n là tập các số không chia hết cho 3.
Với mỗi số thuộc A_n có hai cách thêm vào cuối một chữ số 6 hoặc 9 để được A_{n+1} và hai cách thêm vào cuối chữ số 7 hoặc chữ số 8 để được B_{n+1}.
Với mỗi số thuộc B_n có một cách thêm vào cuối một chữ số 7 hoặc chữ số 8 để được A_{n+1} và có ba cách thêm một số để được B_{n+1}.
Như vậy $\begin{cases} |A_{n+1}| = 2|A_n| + |B_n| \\ |B_{n+1}| = 2|A_n| + 3|B_n| \end{cases} \Rightarrow |B_{n+1}| = 3|A_{n+1}| - 4|B_n| \Rightarrow |A_{n+1}| = 5|A_n| - 4|A_{n-1}|$.
Hay $|A_n| = 5|A_{n-1}| - 4|A_{n-2}|$.
Xét dãy $a_n = |A_n|$, ta có $a_1 = 2$, $a_2 = 6$, $a_n = 5a_{n-1} - 4a_{n-2}$ với $n \geqslant 3$.
Nên $a_n = \alpha + \beta \cdot 4^n = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} \cdot 4^n$. Suy ra, có $\dfrac{4^{2018} + 2}{3}$ số chia hết cho 3.
Mà $|E| = 4^{2018}$. Vậy xác suất cần tìm là $P = \dfrac{1}{3} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{2^{4035}}\right)$. □

Câu 190. Chọn ngẫu nhiên một hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f(1) = 3$, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) \in \mathbb{Z}$ và $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) \in [-10; 10]$; $\int\limits_{-2}^{-1} f(x)\, dx \leqslant \int\limits_{1}^{2} f(x)\, dx$; $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}, \forall x \neq 0$. Tính xác suất để hàm số được chọn thỏa mãn $f(-1) \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} + C_1 & \text{khi} \quad x > 0 \\ \dfrac{1}{x} + C_2 & \text{khi} \quad x < 0 \end{cases}$. Từ giả thiết ta có

$$f(1) = 3 \Leftrightarrow 1 + C_1 = 3 \Leftrightarrow C_1 = 2$$

Và đồng thời

$$\int_{-2}^{-1} f(x)\, dx \leqslant \int_{1}^{2} f(x)\, dx \Leftrightarrow (\ln|x| + C_2 x)|_{-2}^{-1} \leqslant (\ln|x| + C_1 x)|_{2}^{1}$$

$$\Leftrightarrow C_2 - \ln 2 \leqslant 2 + \ln 2 \Leftrightarrow C_2 \leqslant 2 + 2\ln 2 \qquad (1)$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (-2 + C_2) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow C_2 \in \mathbb{Z} \qquad (2)$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) \in [-10\,;\,10] \Leftrightarrow -10 \leqslant -2 + C_2 \leqslant 10 \Leftrightarrow -8 \leqslant C_2 \leqslant 12 \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow C_2 \in \{-8\,;\,-7\,;\,...\,;\,3\}$. Suy ra có 12 hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn các giả thiết của bài toán. Do đó $n(\Omega) = 12$. Gọi A là biến cố: "Hàm số được chọn thỏa mãn $f(-1) \in \mathbb{N}^*$". Ta có

$$f(-1) \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow (-1 + C_2) \in \mathbb{N}^* \Rightarrow C_2 \in \{2\,;\,3\} \Rightarrow n(A) = 2$$

Vậy xác suất cần tính là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$.

□

Câu 191. Từ 1 hộp đựng 100 thẻ đánh số thứ tự từ 1 đến 100 lấy ngẫu nhiên 3 thẻ. Tính xác suất của biến cố A="Số ghi trên 3 thẻ là số đo 3 cạnh của một tam giác".

Lời giải.

Ta có $n(\Omega) = C_{100}^3 = 161700$. Gọi x, y, z là số ghi trên 3 thẻ được lấy ra thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Đặt $A_k = \{(x;y;z) | x, y, z \in \{1, 2, ..., 100\}, 1 \leqslant x < y < z = k, x + y > z\}$. $\Rightarrow n(A) = |A_1| + |A_2| + |A_3| + ... + |A_{100}|$
Tính A_k với $4 \leqslant k \leqslant 100$.Dễ thấy rằng $|A_1| = |A_2| = |A_3| = 0$.

- **Trường hợp 1.** k chẵn,$k = 2m (m \geqslant 2)$.
Xét $1 \leqslant x \leqslant m$,$\Rightarrow k = 2m \geqslant 2x \Rightarrow k - x \geqslant x\,;\, x + y > z \Rightarrow y > k - x \geqslant x \Rightarrow k - x + 1 \leqslant y \leqslant z - 1$. Ta có số cách chọn y là $(k-1) - (k - x + 1) + 1 = (x - 1)$. Xét $x > m \Rightarrow x + y > 2x > 2m = z$, thỏa mãn điều kiện. Suy ra $x + 1 \leqslant y \leqslant z - 1 = 2m - 1$. Ta có số cách chọn y là $(2m - 1) - (x + 1) + 1 = (2m - x + 1)$. Vậy, với $k = 2m$ ta có $|A_k| = \sum\limits_{x=1}^{m} (x-1) + \sum\limits_{x=m+1}^{2m-1} (2m - x - 1) = (m-1)^2$.

- **Trường hợp 2.** k lẻ,$k = (2m+1) (m \geqslant 2)$.
Xét $1 \leqslant x \leqslant m$, ta có $k = 2m + 1 > 2x \Rightarrow (k - x) > x; x + y > z \Rightarrow y > k - x > x \Rightarrow k - x + 1 \leqslant y \leqslant z - 1$. Ta có số cách chọn y là $(k-1) - (k - x + 1) + 1 = x - 1$. Xét $x > m$, ta thấy rằng $\forall y$ sao cho $(x+1) \leqslant y \leqslant (z-1)$ ta có$x + y \geqslant x + x + 1 = 2x + 1 > 2m + 1 = z$, thỏa mãn điều kiện. Ta có số cách chọn y là $(2m + 1 - 1) - (x + 1) + 1 = (2m - x)$. Vậy, với $k = 2m + 1$ ta có

$$|A_k| = \sum_{x=1}^{m} (x-1) + \sum_{x=m+1}^{2m} (2m - x) = m(m-1)$$

$$\Rightarrow n(A) = |A_1| + |A_2| + |A_3| + ... + |A_{100}| = (|A_1| + |A_3| + ... + |A_{99}|) + (|A_2| + |A_4| + ... + |A_{100}|)$$

$$\Rightarrow n(A) = \sum_{m=0}^{49} m(m-1) + \sum_{m=1}^{50} (m-1)^2 = 39200 + 40425 = 79625$$

Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{79625}{161700} = \dfrac{65}{132}$. □

Câu 192. Cho tập hợp số $A = \{1; 2; 3; ...; 2019\}$. Lấy ngẫu nhiên ra hai số, tính xác suất để lấy được hai số mà bình phương số này cộng ba lần số kia đều là các số chính phương.

Lời giải.
Gọi hai số được lấy ra đồng thời từ tập A thỏa mãn yêu cầu bài toán là $x, y\ (x,\ y \in \mathbb{Z}_+^*, x \neq y)$. Không làm mất tính tổng quát giả sử $x > y$. Ta có $x^2 + 3y = k^2\ (k \in \mathbb{Z}_+^*, k > x)$. Ta thấy rằng $4x > 3x > 3y$. Đặt $k = x + t\ (t \geqslant 1)$.
Nếu $t \geqslant 2$ thì $x^2 + 2xt + t^2 = k^2 \Rightarrow 2xt + t^2 = 3y \Rightarrow 3y \geqslant 2xt \geqslant 4x$, vô lý.
Nên $t < 2 \Rightarrow t = 1$. Khi đó, $2x + 1 = 2y \Rightarrow x = \dfrac{3y-1}{2}$, $3x = \dfrac{9y-3}{2} < 6y$ $(*)$
Tương tự $y^2 + 3x = m^2\ (m \in \mathbb{Z}_+^*, m > y)$. Đặt $m = y + z$.
Nếu $z \geqslant 3$ thì $m^2 = y^2 + 2yz + z^2 \Rightarrow 3x = 2yz + z^2 \Rightarrow 3x \geqslant 2yz \geqslant 6y$ (vô lý với $(*)$), nên $z < 3 \Rightarrow z = \{1, 2\}$.
Với $z = 1 \Rightarrow \dfrac{9y-3}{2} = 2y + 1 \Rightarrow y = 1,\ x = 1$ (loại).
Với $z = 2 \Rightarrow \dfrac{9y-3}{2} = 4y + 4 \Rightarrow y = 11,\ x = 16$
Suy ra $(x; y) = (16; 11)$, số phần tử của biến cố bằng 1. Vậy xác suất của biến cố là $\dfrac{1}{C_{2019}^2}$. □

Câu 193. Nhân dịp chào năm mới 2019 và cũng là sinh nhật lần thứ 27 của ông chủ shop thời trang nổi tiếng tại Bắc Giang. Shop mở chương trình tri ân khách hàng bốc thăm trúng thưởng. Mỗi khách hàng sẽ được bốc ngẫu nhiên 3 phiếu trong 2019 phiếu được đánh số là các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 2019. Biết giải nhất dành cho khách hàng bốc được ba phiếu mà tích số ghi trên ba phiếu đó chia hết cho 27. Cô Huệ là khách hàng thân thiết được mời bốc thăm đầu tiên. Xác suất (được làm tròn đến hàng phần trăm) để cô Huệ trúng giải nhất là

Lời giải.
Bài toán viết gọn lại như sau. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} | 1 \leqslant x \leqslant 2019\}$. Lấy ngẫu nhiên ba số từ tập A. Tính xác suất để lấy được ba số có tích chia hết cho 27 (xác suất được làm tròn đến hàng phần trăm).
Số phần tử của không gian mẫu $|\Omega| = C_{2019}^3$. Ta chia tập A thành các tập sau

- Tập X gồm các số chia hết cho 27 $|X| = \left[\dfrac{2019}{27}\right] = 74$.
- Tập Y gồm các số chia hết cho 9 nhưng không chia hết cho 27 $|Y| = \left[\dfrac{2019}{9}\right] - 74 = 150$.
- Tập K gồm các số chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 $|K| = \left[\dfrac{2019}{3}\right] - 74 - 150 = 449$.
- Tập T gồm các số không chia hết cho 3 $|T| = 2019 - \left[\dfrac{2019}{3}\right] = 1346$.

Tính số khả năng xảy ra để tích ba số lấy được không chia hết cho 27.

- Trường hợp 1. Lấy 3 số thuộc tập T có C_{1346}^3 cách.
- Trường hợp 2 Lấy 2 số thuộc tập T và 1 số thuộc tập K có $C_{1346}^2.C_{449}^1$ cách.
- Trường hợp 3 Lấy 2 số thuộc tập T và 1 số thuộc tập Y có $C_{1346}^2.C_{150}^1$ cách.
- Trường hợp 4 Lấy 1 số thuộc tập T và 2 số thuộc tập K có $C_{1346}^1.C_{449}^2$ cách.

Vậy xác suất để cô Huệ trúng giải nhất là $1 - \dfrac{C_{1346}^3 + C_{1346}^2.C_{449}^1 + C_{1346}^2.C_{150}^1 + C_{1346}^1.C_{449}^2}{C_{2019}^3} \approx 0,21$. □

Câu 194. Xét tập hợp gồm $A = \{ax^2+bx+c, ax^2+bx, ax^2+c, ax^2\}$ (trong đó a,b,c là các số nguyên dương nhỏ hơn). Lấy ngẫu nhiên ra một tam thức bậc hai thuộc A. Tính xác suất để lấy được tam thức bậc hai mà khi ghép các hệ số của x theo thứ tự từ bậc cao tới bậc thấp được một số chia hết cho 7 hoặc 11.

Lời giải.
Vì tam thức bậc hai có bốn dạng xảy ra

- Dạng đầy đủ ax^2+bx+c khi đó ta thu được số nguyên abc.
- Dạng khuyết c. ax^2+bx khi đó ta thu được số nguyên ab.
- Dạng khuyết b. ax^2+c khi đó ta thu được số nguyên ac.
- Dạng khuyết b,c. ax^2 khi đó ta thu được số nguyên a.

trong đó, $a,b,c \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Do có 729 số có các chữ số khác 0; 81 số có hai chữ số có các chữ số khác 0 và 9 số có 1 chữ số khác không. Suy ra có $729 \times 81 \times 2 + 9 = 900$ tam thức bậc hai. Vì vậy, số phần tử của không gian mẫu là 900.
Nhận xét. Các số nguyên chia hết cho d đều có dạng dk với k là số nguyên dương. Do đó, số các số nguyên dương chia hết cho d và không vượt quá n sẽ bằng số các số nguyên k với $0 < kd \leqslant n$ hay $0 < k \leqslant \frac{n}{d}$. Vì vậy có $\left[\frac{n}{d}\right]$ số nguyên không vượt quá n chia hết cho d. Trong đó $\left[\frac{n}{d}\right]$ là số nguyên không vượt quá n. Theo nhận xét trên thì

- Số các số có 1 chữ số (các chữ số khác 0) chia hết cho 7 là 1;
- Số các số có 2 chữ số (các chữ số khác 0) chia hết cho 7 là 12;
- Số các số có 3 chữ số (các chữ số khác 0) chia hết cho 7 là 115;
- Số các số có 1 chữ số (các chữ số khác 0) chia hết cho 11 là 0;
- Số các số có 2 chữ số (các chữ số khác 0) chia hết cho 11 là 9;
- Số các số có 3 chữ số (các chữ số khác 0) chia hết cho 11 là 72;
- Số các số có 1 chữ số (các chữ số khác 0) chia hết cho 77 là 0;
- Số các số có 2 chữ số (các chữ số khác 0) chia hết cho 77 là 1;
- Số các số có 3 chữ số (các chữ số khác 0) chia hết cho 77 là 10;

Suy ra có $(1+12+115)+(0+9+72)+(12+9-1)-0-1-10 = 218$ tam thức bậc hai có hệ số ghép (theo thứ tự từ bậc cao tới bậc thấp) tạo thành số chia hết cho 7 hoặc 11. Vậy xác suất để lấy ra 1 tam thức bậc hai thỏa mãn bài toán là $P = \frac{218}{900}$. □

Câu 195. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau Số hạng thứ n là số các số tự nhiên có n chữ số trong đó chỉ gồm các chữ số 1, 2, 3 và mỗi số có mặt ít nhất 1 lần. Tìm tổng của 9 số hạng đầu tiên.

Lời giải.
Ta sẽ tìm số hạng tổng quát của (u_n). Xét $n=1, n=2$ thì rõ ràng $u_1 = u_2 = 0$.
Bài toán phụ. Ta sẽ xác định xem có bao nhiêu số có n chữ số, trong đó các chữ số chỉ là $1,2,3$ sao cho các chữ số xuất hiện trong đó là một hay hai trong ba chữ số đã cho.

- Số các số có n chữ số trong đó có mặt một trong ba chữ số $\{1,2,3\}$ là 3 (11...1, 22...2, 33...3).
- Trong ba số 1, 2, 3 có C_3^2 tập gồm 2 chữ số.

Xét các số chỉ gồm hai số là 1,2. Mỗi chữ số có 2 cách chọn nên có 2^n số có n chữ số tạo thành từ$\{1,2\}$. Nên có 2^n-2 số có n chữ số được tạo thành từ $\{1,2\}$ và mỗi chữ số có mặt ít nhất 1 lần (trừ 11...1, 22...2). Từ đó, số các số gồm n chữ số chỉ có mặt hai trong ba chữ số $\{1,2,3\}$ là $C_3^2\left(2^n-2\right)$. Mặt khác có tất cả 3^n số các số tự nhiên có n chữ số được tạo thành từ các chữ số $\{1,2,3\}$. Do đó có tất cả $3^n-C_3^2\left(2^n-2\right)-3=3^n-3.2^n+3$ số các số tự nhiên có n chữ số được tạo thành từ các chữ số $\{1,2,3\}$ và mỗi số có mặt ít nhất 1 lần.

Suy ra dãy số (u_n) $\begin{cases} u_1=u_2=0 \\ u_n=3^n-3.2^n+3\ (n\geqslant 3)\end{cases}$ hay $(u_n)=3^n-3.2^n+3$

Vậy $\sum\limits_{i=1}^{9}u_i=\sum\limits_{i=1}^{9}\left(3^i-3.2^i+3\right)=\sum\limits_{i=1}^{9}3^i-3\sum\limits_{i=1}^{9}2^i+27=\dfrac{3^{10}-3}{3-1}-3.\dfrac{2^{10}-2}{2-1}+27=26484.$ □

Câu 196. Hai người bắn độc lập vào một mục tiêu, mỗi người bắn 1 lần. Xác suất trúng của người thứ nhất là 0,9; của người thứ hai là 0,7. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=13p-10p^2$, trong đó p là xác suất của một biến cố.

Lời giải.

Gọi A_1 là biến cố người thứ nhất bắn trúng, A_2 là biến cố người thứ hai bắn trúng. Khi đó $p\left(A_1\right)=0,9;\ p\left(A_2\right)=0,7$. Ta có $M=13p-10p^2=\dfrac{169}{40}-10\left(p-\dfrac{13}{20}\right)^2$. Do đó M lớn nhất khi và chỉ khi $\left|p-\dfrac{13}{20}\right|$ nhỏ nhất. Giả sử p là xác suất của biến cố A. Ta quy ước $\begin{cases}0.A=\varnothing\\ 1.A=A\end{cases}$

Khi đó $A=xA_1A_2+y\overline{A_1}A_2+zA_1\overline{A_2}+t\overline{A_1}\ \overline{A_2}$, trong đó $x,y,z,t\in\{0;1\}$. Ta có

$$p=p(A)=x.p\left(A_1A_2\right)+y.p\left(\overline{A_1}A_2\right)+z.p\left(A_1\overline{A_2}\right)+t.p\left(\overline{A_1}\ \overline{A_2}\right)=0,63x+0,07y+0,27z+0,03t$$

$$\left|p-\frac{13}{20}\right|=|0,63x+0,07y+0,27z+0,03t-0,65|=|0,63x+0,07y+0,27z+0,03t-0,65|$$

Nếu $x=1$ thì $\left|p-\dfrac{13}{20}\right|=|0,07y+0,27z+0,03t-0,02|$

Nhẩm với $y;z;t\in\{0;1\}$ thì $|0,07y+0,27z+0,03t-0,02|$ nhỏ nhất khi $\begin{cases}y=0\\ z=0\\ t=1\end{cases}$. Khi đó $\left|p-\dfrac{13}{20}\right|=0,01$

Nếu $x=0$ thì $\left|p-\dfrac{13}{20}\right|=|0,07y+0,27z+0,03t-0,65|$

Ta có $y;z;t\in\{0;1\}\Rightarrow 0\leqslant y;z;t\leqslant 1\Rightarrow 0\leqslant 0,07y+0,27z+0,03t\leqslant 0,37$.

$$-0,65\leqslant 0,07y+0,27z+0,03t-0,65\leqslant -0,28\Rightarrow 0,65\geqslant|0,07y+0,27z+0,03t-0,65|\geqslant 0,28$$

$$\left|p-\frac{13}{20}\right|\geqslant 0,28>0,01$$

Từ 2 trường hợp trên ta thấy $\left|p-\dfrac{13}{20}\right|_{\min}=0,01\Leftrightarrow\begin{cases}x=t=1\\ y=z=0\end{cases}$

Khi đó $M_{\max}=\dfrac{169}{40}-10.0,01^2=\dfrac{528}{125}$. □

Câu 197. Hỏi từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 ta có thể lập được tất cả bao nhiêu số có 15 chữ số mà trong mỗi số mỗi chữ số đều có mặt đúng 3 lần và không có chữ số nào chiếm 3 vị trí liên tiếp trong số?

Lời giải.

Gọi X là tập gồm tất cả các số thoả mãn yêu cầu đề bài, A là tập gồm tất cả các số có 15 chữ số được lập nên bởi các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 mà mỗi chữ số đều có mặt đúng 3 lần trong số. Khi đó

$$X=A\backslash\left(\bigcup_{i=1}^{5}A_i\right)$$

Với A_i là tập gồm tất cả các số thuộc A mà chữ số i chiếm đúng 3 vị trí liên tiếp $(i = 1,2,3,4,5)$. Xét $1 \leqslant k \leqslant 5$ ta chứng minh được

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \frac{(15-2k)!}{3^{5-k}}$$

và $|A| = \dfrac{15!}{3^5}$. Áp dụng công thức

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1 < i_2 \dots i_x \leqslant i_n} \left|\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right| \Rightarrow |X| = \frac{15!}{3^5} - C_5^1\frac{13!}{3^4} + C_5^2\frac{11!}{3^3} - C_5^3\frac{9!}{3^2} + C_5^4\frac{7!}{3!} - C_5^5\frac{5!}{3^0}$$

Bài toán được giải quyết. □

Câu 198. Hai đấu thủ A và B thi đấu trong một giải cờ vua. Người thắng một ván được một điểm và không có ván hoà. Xác suất thắng một ván của đấu thủ A là α và của β là p. Ai hơn đối thủ hai điểm thì thắng giải. Tính xác suất thắng giải của mỗi đấu thủ.

Lời giải.

Giả sử $\alpha > \beta$. Kí hiệu $P_n(A)$là xác suất thắng giải của A sau n ván; A_i và B_i là các biến số tương ứng A và B thắng ván đầu tiên. Khi đó

$$P_n(A) = P(A_1)P_{n-1}(A|A_1) + P(B_1)P_{n-1}(A|B_1) = \alpha P_{n-1}(A|A_1) + \beta P_{n-1}(A|B_1) \quad (*)$$

Trong đó $P_{n-1}(A|A_1)$là xác suất A thắng giải sau $n-1$ ván còn lại, khi A đã thắng ván đầu tiên; $P_{n-1}(A|B_1)$là xác suất A thắng giải sau $n-1$ ván còn lại, khi B đã thắng ván đầu tiên. Xét $n > 2$. Để A thắng giải sau $n-1$ ván còn lại, khi A đã thắng ván đầu, thì B phải thắng ván thứ hai, nghĩa là

$$P_{n-1}(A|A_1) = P(B_1)P_{n-2}(A) = \beta P_{n-2}(A)$$

Tương tự

$$P_{n-1}(A|B_1) = P(A_1)P_{n-2}(A) = \alpha P_{n-2}(A)$$

Từ đó và (*) ta có $P_n(A) = 2\alpha P_{n-2}(A)$, và suy ra

$$P_4(A) = 2\alpha\beta\alpha^2, \dots, P_{2n}(A) = 2\alpha\beta^{n-1}\alpha^2$$

Khi $n = 2$ta có $P_2(A) = \alpha^2$. Vì không có ván hoà nên $\alpha + \beta = 1$, do đó xác suất thắng giải của A là:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{2k}(A) = \alpha^2\left[1 + 2\alpha\beta + (2\alpha\beta)^2 + \dots\right] = \frac{\alpha^2}{1-2\alpha\beta} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}$$

Bài toán được giải quyết. □

——— **Hết** ———

Tài liệu

[1] Tổ hợp xác suất Nguyễn Minh Đức.

[2] Trắc nghiệm nâng cao tổ hợp xác suất – Đặng Việt Đông.

[3] Bài toán chia kẹo Euler và ứng dụng – Lục Trí Tuyên.

[4] Tổ hợp xác suất – Nhóm ham học toán.

[5] Các đề thi thử trên cả nước.

[6] Tuyển tập các câu hỏi VDC xác suất - Strong Team Toán VD - VDC.

[7] Nguồn tài liệu từ Internet