

Chủ đề 6

MỘT SỐ KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACOPXKI

A. Kiến thức cần nhớ

1. Giới thiệu bất đẳng thức Bunhiacopxki

Bất đẳng thức Bunhiacopxki có tên gọi chính xác là bất đẳng thức Cauchy – Bunhiacopxki – Schwarz, đây là một bất đẳng thức do ba nhà toán học độc lập phát hiện và đề xuất, nó có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực toán học. Ở nước ta, để cho phù hợp với chương trình sách giáo khoa, trong tài liệu này chúng ta cũng sẽ gọi nó là bất đẳng thức Bunhiacopxki, gọi theo tên nhà Toán học người Nga Bunhiacopxki.

Đây là một bất đẳng thức cổ điển nổi tiếng và quen thuộc đối với phần lớn học sinh nước ta. Nó ứng dụng rất nhiều trong các bài toán về bất đẳng thức và cực trị. Trong phạm vi chương trình Toán THCS, chúng ta cũng chỉ quan tâm đến các trường hợp riêng của bất đẳng thức Bunhiacopxki.

2. Các dạng biểu diễn của bất đẳng thức Bunhiacopxki

a. Dạng tổng quát

+ Cho hai dãy số tùy ý $a_1; a_2; a_3; \dots; a_n$ và $b_1; b_2; b_3; \dots; b_n$. Khi đó ta có:

$$\text{Dạng 1: } (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$

$$\text{Dạng 2: } \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)} \geq |a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n|$$

- Dấu đẳng thức xảy ra ở dạng 1 và dạng 2 là: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$

$$\text{Dạng 3: } \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)} \geq a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$$

- Dấu đẳng thức xảy ra ở dạng 3 là: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \geq 0$

Dạng 4: Cho hai dãy số tùy ý $a_1; a_2; \dots; a_n$ và $x_1; x_2; \dots; x_n$ với $x_1; x_2; \dots; x_n > 0$

$$\text{Khi đó ta có } \frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \dots + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$$

- Dấu đẳng thức xảy ra ở dạng 4 là: $\frac{a_1}{x_1} = \frac{a_2}{x_2} = \dots = \frac{a_n}{x_n} \geq 0$

Trong các dạng trên thì bất đẳng thức dạng 1, dạng 2, dạng 3 gọi là các bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng cơ bản và bất đẳng thức dạng 4 còn được gọi là bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức.

b. Một số dạng đặc biệt

$n = 2$	$n = 3$
$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$	$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$

$\sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)} \geq ax + by $	$\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \geq ay + by + cz $
$\sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)} \geq ax + by$	$\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \geq ay + by + cz$
$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$ (x, y > 0)	$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$ (x, y > 0)
Đẳng thức xảy ra khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$	Đẳng thức xảy ra khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

B. Một số kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki

1. Kỹ thuật chọn điểm rơi

Cũng tương tự như bất đẳng thức Cauchy, khi sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki để chứng minh bất đẳng thức ta cần phải bảo toàn được dấu đẳng thức xảy ra, điều này có nghĩa là ta cần phải xác định được điểm rơi của bài toán khi áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki. Để rõ hơn ta tìm hiểu một số ví dụ sau

Ví dụ 1.1: Cho a là số thực dương thỏa mãn $a \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = a^2 + \frac{1}{a^2}$$

+ **Sai lầm thường gặp:**

Sai lầm 1: $A = a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2a \cdot \frac{1}{a} = 2$.

Sai lầm 2: $A = \frac{1}{2}(1+1)\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) \geq \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 \geq \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$

Do đó giá trị nhỏ nhất của A là 2.

+ **Nguyên nhân sai lầm:** Để có giá trị nhỏ nhất là 2 thì dấu đẳng thức xảy ra tại

$$a = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a = 1 \text{ trái với giả thiết } a \geq 2$$

+ **Phân tích tìm lời giải:** Xét bất đẳng thức $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ với dấu đẳng thức xảy ra

tại $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$. Giả sử với các số $\alpha; \beta$ ta có

$$A = a^2 + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) \cdot (\alpha^2 + \beta^2) \geq \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \left(\alpha a + \frac{\beta}{a}\right)^2$$

Ta cần chọn hai số $\alpha; \beta$ sao cho giá trị nhỏ nhất của A đạt được tại $a = 2$. Từ đó ta có sơ đồ điểm rơi:

$$\begin{cases} a = 2 \\ \frac{a}{\alpha} = \frac{1}{\beta a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

+ **Lời giải đúng:** Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$A = a^2 + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{17} \left(a^2 + \frac{1}{a^2} \right) \cdot (4^2 + 1) \geq \frac{1}{17} \left(4a + \frac{1}{a} \right)^2$$

$$= \frac{1}{5} \left(\frac{a}{4} + \frac{1}{a} + \frac{15a}{4} \right)^2 \geq \frac{1}{17} \left(1 + \frac{15}{2} \right)^2 = \frac{17}{4}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{17}{4}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2$.

Ví dụ 1.2: Cho a, b , là các số thực dương thỏa mãn $a + b = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}}$$

+ **Sai lầm thường gặp:**

$$A = \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} \geq \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Do đó giá trị nhỏ nhất của A là $2\sqrt{2}$.

+ **Nguyên nhân sai lầm:** Để có giá trị nhỏ nhất là $2\sqrt{2}$ thì dấu đẳng thức xảy ra tại

$$a = b = \frac{1}{a} = \frac{1}{b} \Leftrightarrow a = b = 1$$

Khi đó $a + b = 2$ trái với giả thiết $a + b = 4$

+ **Phân tích tìm lời giải:** Xét bất đẳng thức $\sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)} \geq ax + by$ với dấu đẳng thức xảy ra

tại $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} \geq 0$. Khi đó với ý tưởng chuyển đổi một biểu thức trong căn thành một biểu thức ngoài căn.

Giả sử với các số $\alpha; \beta$ ta có

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cdot \sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) \cdot (\alpha^2 + \beta^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left(\alpha a + \frac{\beta}{a} \right) \\ \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cdot \sqrt{\left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right) \cdot (\alpha^2 + \beta^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left(\alpha b + \frac{\beta}{b} \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow A \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left[\alpha(a + b) + \beta \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right]$$

Do A là biểu thức đối xứng với a, b, c nên ta dự đoán giá trị nhỏ nhất của A đạt được tại $a = b = 2$. Từ đó ta có sơ đồ điểm rơi:

$$a = b = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{\alpha} = \frac{1}{\beta a} \\ \frac{b}{\alpha} = \frac{1}{\beta b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

+ **Lời giải đúng:** Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) \cdot (4^2 + 1^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(4a + \frac{1}{a} \right) \\ \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \sqrt{\left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right) \cdot (4^2 + 1^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(4b + \frac{1}{b} \right) \end{cases}$$

Khi đó ta được $A \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left[4(a+b) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right]$

Đề ý ta thấy $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$, do đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy và giả thiết ta được

$$A \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left[4(a+b) + \frac{4}{a+b} \right] = \frac{1}{\sqrt{17}} \left[\frac{a+b}{4} + \frac{4}{a+b} + \frac{15(a+b)}{4} \right] \\ \geq \frac{1}{\sqrt{17}} [2+15] = \sqrt{17}$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{4} = \frac{1}{a} \\ \frac{b}{4} = \frac{1}{b} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\sqrt{17}$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = 2$.

Ví dụ 1.3: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa $a + b + c \geq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}}$$

+ **Sai lầm thường gặp:**

$$A = \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \sqrt{2 \cdot \frac{a}{b}} + \sqrt{2 \cdot \frac{b}{c}} + \sqrt{2 \cdot \frac{c}{a}} \geq 3\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

Do đó giá trị nhỏ nhất của A là $3\sqrt{2}$.

+ **Nguyên nhân sai lầm:** Để có giá trị nhỏ nhất là $3\sqrt{2}$ thì dấu đẳng thức xảy ra tại

$$a = b = c = \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \Leftrightarrow a = b = c = 1$$

Khi đó $a + b + c = 3$ không thỏa mãn giả thiết $a + b + c \geq 6$

+ **Phân tích tìm lời giải:** Xét bất đẳng thức $\sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)} \geq ax + by$ với dấu đẳng thức xảy ra

tại $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} \geq 0$. Khi đó với ý tưởng chuyển đổi một biểu thức trong căn thành một biểu thức ngoài căn.

Giả sử với các số $\alpha; \beta$ ta có

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cdot \sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right) \cdot (\alpha^2 + \beta^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left(\alpha a + \frac{\beta}{b}\right) \\ \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cdot \sqrt{\left(b^2 + \frac{1}{c^2}\right) \cdot (\alpha^2 + \beta^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left(\alpha b + \frac{\beta}{c}\right) \\ \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cdot \sqrt{\left(c^2 + \frac{1}{a^2}\right) \cdot (\alpha^2 + \beta^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left(\alpha c + \frac{\beta}{a}\right) \end{cases} \\ \Rightarrow A \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left[\alpha(a+b+c) + \beta \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \right]$$

Do A là biểu thức đối xứng với a, b, c nên ta dự đoán giá trị nhỏ nhất của A đạt được tại $a = b = c = 2$. Từ đó ta có sơ đồ điểm rơi:

$$a = b = c = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{\alpha} = \frac{1}{\beta b} \\ \frac{b}{\alpha} = \frac{1}{\beta c} \\ \frac{c}{\alpha} = \frac{1}{\beta a} \end{cases} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = ab = bc = ca = \frac{4}{1} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

+ **Lời giải đúng:** Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta có

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right) \cdot (4^2 + 1^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(4a + \frac{1}{b}\right) \\ \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \sqrt{\left(b^2 + \frac{1}{c^2}\right) \cdot (4^2 + 1^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(4b + \frac{1}{c}\right) \\ \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \sqrt{\left(c^2 + \frac{1}{a^2}\right) \cdot (4^2 + 1^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(4c + \frac{1}{a}\right) \end{cases}$$

Khi đó ta được $A \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left[4(a + b + c) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \right]$

Đề ý ta thấy $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a + b + c}$, do đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy và giả thiết ta được

$$\begin{aligned} A &\geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left[4(a + b + c) + \frac{9}{a + b + c} \right] = \frac{1}{\sqrt{17}} \left[\frac{a + b + c}{4} + \frac{9}{a + b + c} + \frac{15(a + b + c)}{4} \right] \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left[\frac{15}{4} \cdot 6 + 2 \cdot \frac{3}{2} \right] = \frac{3\sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{4} = \frac{1}{b} \\ \frac{b}{4} = \frac{1}{c} \\ \frac{c}{4} = \frac{1}{a} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{3\sqrt{17}}{2}$, khi $a = b = c = 2$

Ví dụ 1.4: Cho các số thực dương a, b, c thỏa $a + b + c \geq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \sqrt{a^2 + \frac{1}{b+c}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c+a}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a+b}}$$

Phân tích: Chuyển đổi một biểu thức trong căn thành một biểu thức ngoài căn. Giả sử với các số $\alpha; \beta$ ta có:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{a^2 + \frac{1}{b+c}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \sqrt{\left[a^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b+c}} \right)^2 \right] (\alpha^2 + \beta^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left(\alpha a + \frac{\beta}{\sqrt{b+c}} \right) \\ \sqrt{b^2 + \frac{1}{c+a}} \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left(\alpha b + \frac{\beta}{\sqrt{c+a}} \right) \\ \sqrt{c^2 + \frac{1}{a+b}} \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left(\alpha c + \frac{\beta}{\sqrt{a+b}} \right) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow A \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left[\alpha(a+b+c) + \beta \left(\frac{1}{\sqrt{a+b}} + \frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{c+a}} \right) \right]$$

Do A là biểu thức đối xứng với a, b, c nên ta dự đoán giá trị nhỏ nhất của A đạt tại
 $a = b = c = 2$

Do đó ta có sơ đồ điểm rơi

$$a = b = c = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{\alpha} = \frac{1}{\beta b} \\ \frac{b}{\alpha} = \frac{1}{\beta c} \\ \frac{c}{\alpha} = \frac{1}{\beta a} \end{cases} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = ab = bc = ca = \frac{4}{1} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

Lời giải

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{a^2 + \frac{1}{b+c}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{b+c} \right) \cdot (4^2 + 1^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(4a + \frac{1}{\sqrt{b+c}} \right) \\ \sqrt{b^2 + \frac{1}{c+a}} \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(4b + \frac{1}{\sqrt{c+a}} \right) \\ \sqrt{c^2 + \frac{1}{a+b}} \geq \frac{1}{\sqrt{4^2 + 1^2}} \left(4c + \frac{1}{\sqrt{a+b}} \right) \end{array} \right.$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$A \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left[4(a+b+c) + \left(\frac{1}{\sqrt{a+b}} + \frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{c+a}} \right) \right]$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy và Bunhiacopski ta được

$$\begin{aligned} A &\geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(4(a+b+c) + \frac{9}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a+b} + \sqrt{c+a}} \right) \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(4(a+b+c) + \frac{9}{\sqrt{6(a+b+c)}} \right) \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left[\frac{31}{8}(a+b+c) + \frac{1}{8}(a+b+c) + \frac{9}{2\sqrt{6}(a+b+c)} + \frac{9}{2\sqrt{6}(a+b+c)} \right] \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left[\frac{31}{8} \cdot 6 + 3 \sqrt[3]{\frac{1}{8}(a+b+c)} \cdot \frac{9}{2\sqrt{6}(a+b+c)} \cdot \frac{9}{2\sqrt{6}(a+b+c)} \right] = \frac{3\sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{3\sqrt{17}}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$

Ví dụ 1.5: Cho các số thực dương a, b, c thỏa $a + b + c + \sqrt{2abc} \geq 10$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \sqrt{\frac{8}{a^2} + \frac{9b^2}{2} + \frac{c^2a^2}{4}} + \sqrt{\frac{8}{b^2} + \frac{9c^2}{2} + \frac{a^2b^2}{4}} + \sqrt{\frac{8}{c^2} + \frac{9a^2}{2} + \frac{b^2c^2}{4}}$$

Phân tích: Do biểu thức A là biểu thức đối xứng với a, b, c nên ta dự đoán giá trị nhỏ nhất của A đạt tại $a = b = c = 2$. Do đó ta có sơ đồ điểm rơi

$$a = b = c = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{\alpha} = \frac{1}{\beta b} \\ \frac{b}{\alpha} = \frac{1}{\beta c} \\ \frac{c}{\alpha} = \frac{1}{\beta a} \end{cases} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = ab = bc = ca = \frac{4}{1} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{cases} \sqrt{2+18+4} \cdot \sqrt{\frac{8}{a^2} + \frac{9b^2}{2} + \frac{c^2a^2}{4}} \leq \frac{4}{a} + 9b + ca \\ \sqrt{2+18+4} \cdot \sqrt{\frac{8}{b^2} + \frac{9c^2}{2} + \frac{a^2b^2}{4}} \leq \frac{4}{b} + 9c + ab \\ \sqrt{2+18+4} \cdot \sqrt{\frac{8}{c^2} + \frac{9a^2}{2} + \frac{b^2c^2}{4}} \leq \frac{4}{c} + 9a + bc \end{cases}$$

$$\text{Do đó ta được } A \geq \frac{1}{\sqrt{24}} \left[\left(\frac{4}{a} + \frac{4}{b} + \frac{4}{c} \right) + 9(a+b+c) + (ab+bc+ca) \right]$$

$$\text{Hay } \sqrt{24} \cdot A \geq \left(\frac{4}{a} + \frac{4}{b} + \frac{4}{c} \right) + 9(a+b+c) + (ab+bc+ca)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{24} \cdot A &\geq \left(\frac{4}{a} + a \right) + \left(\frac{4}{b} + b \right) + \left(\frac{4}{c} + c \right) + (2a+bc) + (2b+ac) + (2c+ab) + 6(a+b+c) \\ &\geq 2\sqrt{\frac{4}{a}} \cdot a + 2\sqrt{\frac{4}{b}} \cdot b + 2\sqrt{\frac{4}{c}} \cdot c + 2\sqrt{2abc} + 2\sqrt{2abc} + 2\sqrt{2abc} + 6(a+b+c) \quad \text{Suy ra} \\ &\geq 12 + 6(a+b+c + \sqrt{2abc}) \geq 72 \end{aligned}$$

$$\text{ta được } A \geq \frac{72}{\sqrt{24}} = 6\sqrt{6}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $6\sqrt{6}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$.

Ví dụ 1.6: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \sqrt{4a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{4b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{4c^2 + \frac{1}{c^2}}$$

Phân tích: Trong ví dụ này ta xét biểu thức đại diện $A = \sqrt{4a^2 + \frac{1}{a^2}}$. Một cách tự nhiên ta tìm cách khử căn của biểu thức. Nếu áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki một cách bình thường:

$$\sqrt{4a^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(2a + \frac{1}{a} \right)$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, khi đó nếu áp dụng tương tự thì không thỏa mãn giả thiết của toán.

Dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = \frac{2}{3}$. Khi đó ta cần chọn một bộ số $\alpha; \beta$ để có đánh giá

$$A = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \sqrt{\left(4a^2 + \frac{1}{a^2} \right) (\alpha^2 + \beta^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \sqrt{\left(2a\alpha + \frac{\beta}{a} \right)^2} = \frac{\alpha \cdot 2a + \frac{\beta}{a}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

Đầu đẳng thức xảy ra tại $\frac{\alpha}{2a} = \frac{\beta}{a}$ với $a = \frac{2}{3}$. Từ đó dễ dàng chọn được $\alpha = 8; \beta = 9$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki:

$$\begin{aligned} \sqrt{(8^2 + 9^2) \left(4a^2 + \frac{1}{a^2} \right)} &\geq 16a + \frac{9}{a} \Rightarrow \sqrt{4a^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{145}} \left(16a + \frac{9}{a} \right) \\ \sqrt{(8^2 + 9^2) \left(4b^2 + \frac{1}{b^2} \right)} &\geq 16b + \frac{9}{b} \Rightarrow \sqrt{4b^2 + \frac{1}{b^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{145}} \left(16b + \frac{9}{b} \right) \\ \sqrt{(8^2 + 9^2) \left(4c^2 + \frac{1}{c^2} \right)} &\geq 16c + \frac{9}{c} \Rightarrow \sqrt{4c^2 + \frac{1}{c^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{145}} \left(16c + \frac{9}{c} \right) \end{aligned}$$

Từ đó ta được

$$A \geq \frac{1}{\sqrt{145}} \left[16(a + b + c) + 9 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \right] \geq \frac{1}{\sqrt{145}} \left[16(a + b + c) + \frac{81}{a + b + c} \right] = \frac{\sqrt{145}}{2} \text{ Vậy giá}$$

trị nhỏ nhất của A bằng $\frac{\sqrt{145}}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{2}{3}$.

Ví dụ 1.7: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = \frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}}$$

Phân tích: Xét biểu thức $A = \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$. Nếu áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki một cách trực tiếp thì ta được $\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \left(a + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$. Khi đó dấu đẳng thức không xảy ra tại

$a = b = c = \frac{1}{2}$. Từ đó ta chọn các số p, q, r để có đánh giá như sau:

$$A = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) (p^2 + q^2 + r^2)}$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \sqrt{\left(ap + \frac{q}{a} + \frac{r}{b} \right)^2} = \frac{pa + \frac{q}{a} + \frac{r}{b}}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

Và đẳng thức xảy ra tại $\frac{a}{p} = \frac{\frac{1}{a}}{q} = \frac{\frac{1}{b}}{r}$ với $a = b = c = \frac{2}{3}$. Từ đó ta chọn được một bộ số thỏa

mãn là $p = \frac{1}{2}, q = r = 2$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2^2} + 2^2 + 2^2 \right) \left(a^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \geq \frac{a}{2} + \frac{2}{a} + \frac{2}{b} \Rightarrow \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \geq \frac{2}{\sqrt{33}} \left(\frac{a}{2} + \frac{2}{a} + \frac{2}{b} \right)$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2^2} + 2^2 + 2^2 \right) \left(b^2 + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)} \geq \frac{b}{2} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \Rightarrow \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \geq \frac{2}{\sqrt{33}} \left(\frac{b}{2} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \right)$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2^2} + 2^2 + 2^2 \right) \left(c^2 + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \right)} \geq \frac{c}{2} + \frac{2}{c} + \frac{2}{a} \Rightarrow \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}} \geq \frac{2}{\sqrt{33}} \left(\frac{c}{2} + \frac{2}{c} + \frac{2}{a} \right)$$

Từ đó ta được

$$A \geq \frac{2}{\sqrt{33}} \left[\frac{a+b+c}{2} + 4 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \right] \geq \frac{2}{\sqrt{33}} \left[\frac{3}{4} + \frac{36}{a+b+c} \right] = \frac{3\sqrt{33}}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng $\frac{3\sqrt{33}}{2}$ khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 1.8: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + 4b^2 + 9c^2 = 2015$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = a + b + c$$

Phân tích và lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$P^2 = (a + b + c)^2 = \left(am \cdot \frac{1}{m} + bn \cdot \frac{1}{n} + cp \cdot \frac{1}{p} \right)^2$$

$$\leq \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} \right) (a^2 m^2 + b^2 n^2 + c^2 p^2)$$

Để sử dụng được giả thiết ta $a^2 + 4b^2 + 9c^2 = 1$ cần chọn một bộ số $m; n; p$ sao cho hệ sau thỏa mãn

$$\begin{cases} m^2 a^2 + n^2 b^2 + p^2 c^2 = x^2 + 4y^2 + 9z^2 \\ \frac{am}{m} = \frac{bn}{n} = \frac{cp}{p} \\ \frac{1}{m} = \frac{1}{n} = \frac{1}{p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 2 \\ p = 3 \end{cases}$$

Khi đó ta có lời giải như sau

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\begin{aligned} P^2 &= (a + b + c)^2 = \left(a + 2b \cdot \frac{1}{2} + 3c \cdot \frac{1}{3} \right)^2 \\ &\leq \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \right) (a^2 + 4b^2 + 9c^2) = \frac{14}{36} \end{aligned}$$

Do đó ta được $P \leq \frac{\sqrt{14}}{6}$ hay giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{\sqrt{14}}{6}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a^2 + 4b^2 + 9c^2 = 1 \\ a = 4b = 9c \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{7}; b = \frac{1}{28}; c = \frac{1}{63}$$

Ví dụ 1.9: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + 2b + 3c = 14$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = a^2 + b^2 + c^2$$

Phân tích và lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$(m^2 + n^2 + k^2)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (ma + nb + kc)^2$$

Để áp dụng giả thiết $a + 2b + 3c = 6$ ta cần chọn một bộ số m; n; k thỏa mãn hệ sau

$$\begin{cases} ma + nb + kc = a + 2b + 3c \\ \frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 2 \\ k = 3 \end{cases}$$

Khi đó ta có lời giải như sau

Áp dụng bất đẳng thức Binhiacopxki ta được

$$P = \frac{1}{14} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2)(a^2 + b^2 + c^2) \geq \frac{(a + 2b + 3c)^2}{14} = \frac{14^2}{14} = 14$$

Do đó giá trị nhỏ nhất của P là 14. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 14 \\ \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} \end{cases} \Rightarrow a = 1; b = 2; c = 3$$

Ví dụ 1.10: Cho a, b, c là các số thực dương sao thỏa mãn $4a + 9b + 16c = 49$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{25}{b} + \frac{64}{c} \geq 49$$

Phân tích và lời giải

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$(m^2a + n^2b + k^2c) \left(\frac{1}{a} + \frac{25}{b} + \frac{64}{c} \right) \geq (m + 5n + 8k)^2$$

Như vậy ta cần chọn một bộ số $m; n; k$ sao cho hệ sau thỏa mãn

$$\begin{cases} m^2a + n^2b + k^2c = 4a + 9b + 16c = 49 \\ ma = \frac{nb}{5} = \frac{kc}{8} \end{cases}$$

Thử một số trường hợp ta chọn được $m = 2; n = 5; k = 8$, khi đó ta có lời giải như sau

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$(4a + 9b + 16c) \left(\frac{1}{a} + \frac{25}{b} + \frac{64}{c} \right) \geq (2 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 8)^2 = 49^2$$

Hay
$$49 \left(\frac{1}{a} + \frac{25}{b} + \frac{64}{c} \right) \geq 49^2 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{25}{b} + \frac{64}{c} \geq 49$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{1}{2a} = \frac{5}{3b} = \frac{8}{4c} \\ 4a + 9b + 16c = 49 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}; b = \frac{3}{5}; c = 2$$

Cách 2: Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy có thể sử dụng bất đẳng thức Binhacopxki dạng phân thức.

Tuy nhiên chú ý đến giả thiết $4a + 9b + 16c = 49$, ta cần nhân thêm hệ số để khi áp dụng dưới mẫu xuất hiện $4a + 9b + 16c$. Do đó ta có thể chứng minh bài toán trên như sau

Áp dụng bất đẳng thức Bunhacopcki dạng phân thức ta được

$$\frac{1}{a} + \frac{25}{b} + \frac{64}{c} = \frac{4}{4a} + \frac{225}{9b} + \frac{1024}{16a} \geq \frac{(2 + 15 + 32)^2}{4a + 9b + 16c} = \frac{49^2}{49} = 49$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{1}{2a} = \frac{5}{3b} = \frac{8}{4c} \\ 4a + 9b + 16c = 49 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}; b = \frac{3}{5}; c = 2$$

Ví dụ 1.11: Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a + b = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{4}{ab}$$

+ **Sai lầm thường gặp:** Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$P = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{4}{ab} = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{8}{2ab} \geq \frac{(1 + \sqrt{8})^2}{a^2 + b^2 + 2ab} = \frac{(1 + \sqrt{8})^2}{(a + b)^2} = (1 + \sqrt{8})^2$$

+ **Nguyên nhân sai lầm:** Dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b$ khi đó $\frac{1}{a^2 + b^2} \neq \frac{\sqrt{8}}{2ab}$. Tức là dấu

đẳng thức của bất đẳng thức trên không xảy ra

+ **Phân tích:** Để áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức, ta chọn một số k sao cho

$$\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{k^2}{2ab} \geq \frac{(1+k)^2}{a^2 + b^2 + 2ab} = (1+k)^2 \text{ và đảm bảo dấu đẳng thức xảy ra, tức là thỏa mãn điều kiện}$$

$$\frac{1}{a^2 + b^2} = \frac{k}{2ab} \text{ với } a = b, \text{ do đó ta chọn được } k = 1.$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$P = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{4}{ab} = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab} + \frac{7}{2ab} \geq \frac{(1+1)^2}{a^2 + b^2 + 2ab} + \frac{7}{2ab} = 4 + \frac{7}{2ab}$$

Mặt khác ta lại có

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Do đó ta được $P \geq 18$, hay giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 18. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 1.12: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{9}{ab + bc + ca} \geq 30$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = \frac{1}{3}$. Khi sử dụng bất đẳng thức

Bunhiacopxki dạng phân thức ta chú ý cộng các mẫu để có thể viết được thành $(a + b + c)^2$.

Để ý là nếu đánh giá $\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2}{2(ab + bc + ca)} \geq \frac{(1 + \sqrt{2})^2}{(a + b + c)^2} = (1 + \sqrt{2})^2$, khi đó đẳng

thức không xảy ra vì $\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \neq \frac{\sqrt{2}}{2(ab + bc + ca)}$

Như vậy để có thể áp dụng được bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta làm như sau

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{k^2}{2(ab + bc + ca)} \geq \frac{(1+k)^2}{(a + b + c)^2} = (1+k)^2$$

Ta cần chọn k để đẳng thức sau đúng $\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{k}{2(ab + bc + ca)}$, dễ dàng chọn được giá trị

$k = 2$. Đến đây ta có lời giải như sau

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{9}{ab + bc + ca} &= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{4}{2(ab + bc + ca)} + \frac{7}{ab + bc + ca} \\ &\geq \frac{(1+2)^2}{(a + b + c)^2} + \frac{7}{ab + bc + ca} = 9 + \frac{7}{ab + bc + ca} \end{aligned}$$

Bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được $\frac{7}{ab + bc + ca} \geq 21$. Tuy nhiên, dễ thấy

$$\frac{(a + b + c)^2}{3} \geq ab + bc + ca \Leftrightarrow ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}$$

Do đó ta được $\frac{7}{ab + bc + ca} \geq 21$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 1.13: Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{5a^2 + (b + c)^2} + \frac{b^2}{5b^2 + (c + a)^2} + \frac{c^2}{5c^2 + (a + b)^2} \leq \frac{1}{3}$$

Phân tích và lời giải

Dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$, Trước hết ta để ý đến mẫu số có thể phân tích được $5a^2 + (b + c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + 2(2a^2 + bc)$. Quan sát bất đẳng thức ta thấy có thể áp dụng được bất đẳng thức Bunhiacopxki. Khi vậy ta cần chọn các số $m; n$ để được bất đẳng thức

$$\frac{(m + n)^2 a^2}{5a^2 + (b + c)^2} = \frac{(m + n)^2 a^2}{a^2 + b^2 + c^2 + 2(2a^2 + bc)} \leq \frac{m^2 a^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{n^2 a^2}{2(2a^2 + bc)}$$

Đồng thời đẳng thức $\frac{m}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{n}{2(2a^2 + bc)}$ đúng với $a = b = c$.

Dễ dàng chọn được $m = 1; n = 2$

Khi đó ta có thể giải được bài toán như sau:

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta có

$$\frac{a^2}{5a^2 + (b + c)^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{(1 + 2)^2 a^2}{(a^2 + b^2 + c^2) + 2(2a^2 + bc)} \leq \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2a^2}{2a^2 + bc} \right)$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\frac{b^2}{5b^2 + (c + a)^2} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2b^2}{2b^2 + ca} \right)$$

$$\frac{c^2}{5c^2 + (a + b)^2} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2c^2}{2c^2 + ab} \right)$$

Do đó ta có

$$\frac{a^2}{5a^2 + (b + c)^2} + \frac{b^2}{5b^2 + (c + a)^2} + \frac{c^2}{5c^2 + (a + b)^2}$$

$$\leq \frac{1}{9} \left(1 + \frac{2a^2}{2a^2 + bc} + \frac{2b^2}{2b^2 + ca} + \frac{2c^2}{2c^2 + ab} \right)$$

Ta cần chứng minh được $\frac{1}{9} \left(1 + \frac{2a^2}{2a^2 + bc} + \frac{2b^2}{2b^2 + ca} + \frac{2c^2}{2c^2 + ab} \right) \leq \frac{1}{3}$

Bất đẳng thức đó tương đương với

$$\frac{2a^2}{2a^2 + bc} + \frac{2b^2}{2b^2 + ca} + \frac{2c^2}{2c^2 + ab} \leq 2$$

Hay $\frac{bc}{2a^2 + bc} + \frac{ca}{2b^2 + ca} + \frac{ab}{2c^2 + ab} \geq 1$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức thì

$$\frac{bc}{2a^2 + bc} + \frac{ca}{2b^2 + ca} + \frac{ab}{2c^2 + ab} \geq \frac{(ab + bc + ca)^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c)} = 1$$

Như vậy đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng.

Do đó bất đẳng thức ban đầu được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$.

Ví dụ 1.14: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 \leq abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2 + bc} + \frac{b}{b^2 + ca} + \frac{c}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{2}$$

Phân tích và lời giải

Tương tự như ví dụ trên ta chọn được $m = n = 1$, khi đó áp dụng bất đẳng Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a}{a^2 + bc} = \frac{a^2}{a^3 + abc} \leq \frac{a^2}{a^3 + a^2 + b^2 + c^2} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{a^2}{a^3} + \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right)$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{a}{a^2 + bc} + \frac{b}{b^2 + ca} + \frac{c}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 1 \right)$$

Ta cần chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 1$

Thật vậy, áp dụng một đánh giá quen thuộc và kết hợp với giả thiết, ta được

$$1 \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} \geq \frac{ab + bc + ca}{abc} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 3$

Ví dụ 1.15: Cho các số thực a, b thỏa mãn $2a - b = 2$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a^2 + (b+1)^2} + \sqrt{a^2 + (b-3)^2} \geq 2\sqrt{5}$$

Phân tích: Giả sử đẳng thức xảy ra tại $a = m; b = n; 2a - b = 2$. Từ đó ta mạnh dạn đưa vào các số p, q để có đánh giá như sau

$$\sqrt{a^2 + (b+1)^2} = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}} \sqrt{(p^2 + q^2) [a^2 + (b+1)^2]} \geq \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}} [pa + q(b+1)]$$

Và đánh giá trên xảy ra dấu bằng tại $a = m; b = n; 2a - b = 2$, ta được $\frac{p}{m} = \frac{q}{n+1}$ từ đó ta có thể chọn $p = m, q = n + 1$.

Hoàn toàn tương tự với biểu thức $\sqrt{x^2 + (y-3)^2}$ ta có thể chọn $p = m$, $q = n - 3$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski:

$$\sqrt{a^2 + (b+1)^2} \geq \frac{1}{\sqrt{m^2 + (n+1)^2}} \cdot [ma + (n+1)(b+1)]$$

$$\sqrt{a^2 + (b-3)^2} \geq \frac{1}{\sqrt{m^2 + (n-3)^2}} \cdot [ma + (n-3)(b-3)]$$

Từ đó ta được

$$\begin{aligned} & \sqrt{a^2 + (b+1)^2} + \sqrt{a^2 + (b-3)^2} \\ & \geq \frac{1}{\sqrt{m^2 + (n+1)^2}} [ma + (n+1)(b+1)] + \frac{1}{\sqrt{m^2 + (n-3)^2}} [ma + (n-3)(b-3)] \\ & = \left[\frac{m}{\sqrt{m^2 + (n+1)^2}} + \frac{m}{\sqrt{m^2 + (n-3)^2}} \right] a + \left[\frac{n+1}{\sqrt{m^2 + (n+1)^2}} + \frac{n-3}{\sqrt{m^2 + (n-3)^2}} \right] b \end{aligned}$$

Ta cần chọn m, n sao cho

$$\begin{cases} \frac{m}{\sqrt{m^2 + (n+1)^2}} + \frac{m}{\sqrt{m^2 + (n-3)^2}} - 2 \left[\frac{n+1}{\sqrt{m^2 + (n+1)^2}} + \frac{n-3}{\sqrt{m^2 + (n-3)^2}} \right] \\ 2m - n = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m+2n+2}{\sqrt{m^2 + (n+1)^2}} + \frac{m+2n-6}{\sqrt{m^2 + (n-3)^2}} = 0 \\ 2m - n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ n = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Khi đó ta được $\sqrt{a^2 + (b+1)^2} + \sqrt{a^2 + (b-3)^2} \geq \frac{12\sqrt{5}}{25}a - \frac{6\sqrt{5}}{25}b + \frac{38\sqrt{5}}{25} = 2\sqrt{5}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{2}{3}$; $b = -\frac{2}{3}$

Ví dụ 1.16: Cho các số thực a, b tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{(a+1)^2 + (b-1)^2} + \sqrt{(a-1)^2 + (b+1)^2} + \sqrt{(a+2)^2 + (b+2)^2} \geq \sqrt{6} + 2\sqrt{2}$$

Phân tích: Giả sử đẳng thức xảy ra tại $a = b = m$. Từ đó ta mạnh dạn đưa vào các số p, q để có đánh giá như sau

$$\begin{aligned} \sqrt{(a+1)^2 + (b-1)^2} &= \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}} \cdot \sqrt{(p^2 + q^2) [(a+1)^2 + (b-1)^2]} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}} \cdot [p(a+1) + q(b-1)] \end{aligned}$$

Ta cần chọn p, q sao cho đẳng thức xảy ra khi $x = y = a$ nên $\frac{p}{m+1} = \frac{q}{m-1}$ từ đó ta có thể chọn $p = m+1; q = m-1$.

Tương tự với biểu thức $\sqrt{(a-1)^2 + (b+1)^2}$ ta có thể chọn $p = m-1; q = m+1$ và với biểu thức $\sqrt{(a+2)^2 + (b+2)^2}$ ta có thể chọn $p = q = 1$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki:

$$\sqrt{(a+1)^2 + (b-1)^2} \geq \frac{1}{\sqrt{(m+1)^2 + (m-1)^2}} \cdot [(m+1)(a+1) + (m-1)(b-1)]$$

$$\sqrt{(a-1)^2 + (b+1)^2} \geq \frac{1}{\sqrt{(m-1)^2 + (m+1)^2}} \cdot [(m-1)(a-1) + (m+1)(b+1)]$$

$$\sqrt{(a+2)^2 + (b+2)^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} [1 \cdot (a+2) + 1 \cdot (b+2)]$$

Từ đó ta được

$$\begin{aligned} & \sqrt{(a+1)^2 + (b-1)^2} + \sqrt{(a-1)^2 + (b+1)^2} + \sqrt{(a+2)^2 + (b+2)^2} \\ & \geq \left[\frac{2m}{\sqrt{2(m^2+1)}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right] (a+b) + \frac{4}{\sqrt{2(m^2+1)}} + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Ta cần chọn m sao cho $\frac{2m}{\sqrt{2(m^2+1)}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Với giá trị vừa tìm của m ở trên ta được

$$\sqrt{(a+1)^2 + (b-1)^2} + \sqrt{(a-1)^2 + (b+1)^2} + \sqrt{(a+2)^2 + (b+2)^2} \geq \sqrt{6} + 2\sqrt{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

2. Kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng cơ bản

Bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng cơ bản là những bất đẳng thức đánh giá từ đại lượng $(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$ về đại lượng $(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$ hoặc ngược lại. Để rõ hơn ta xét một số ví dụ sau

Ví dụ 2.1: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq \left(\sqrt{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{b} \cdot \frac{1}{\sqrt{b}} + \sqrt{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} \right)^2 = 9$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 2.2: Cho a, b, c là các số thực dương bất kỳ. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a+b}{a+b+c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a+b+c}} + \sqrt{\frac{c+a}{a+b+c}} \leq \sqrt{6}$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy có thể đưa đại lượng dưới các dấu căn ở vế trái vào trong cùng một căn thức, chú ý chiều bất đẳng thức ta liên tưởng đến bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng cơ bản.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{a+b}{a+b+c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a+b+c}} + \sqrt{\frac{c+a}{a+b+c}} \\ & \leq \sqrt{(1^2 + 1^2 + 1^2) \left(\frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{a+b+c} + \frac{c+a}{a+b+c} \right)} = \sqrt{6} \end{aligned}$$

Do đó ta được
$$\sqrt{\frac{a+b}{a+b+c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a+b+c}} + \sqrt{\frac{c+a}{a+b+c}} \leq \sqrt{6}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 2.3: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

Phân tích: Để ý là $a+b-c + b+c-a = 2b$. Do đó ta nghĩ đến việc đưa hai đại lượng dưới dấu căn vào trong cùng một dấu căn. Chú ý đến chiều của bất đẳng thức ta liên tưởng đến bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng cơ bản

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cơ bản dạng $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$, ta được

$$\left(\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} \right)^2 \leq 2(a+b-c + b+c-a) = 4b$$

Do đó ta được $\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} \leq 2\sqrt{b}$, tương tự ta có

$$\sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq 2\sqrt{c}; \quad \sqrt{c+a-b} + \sqrt{a+b-c} \leq 2\sqrt{a}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$.

Ví dụ 2.4: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$a + b + c \leq 2 \left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \right)$$

Phân tích: Để ý nếu ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

Bất đẳng thức trên gợi ý cho ta sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức. Tuy nhiên ở đây ta thử áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng cơ bản xem sao.

Ta cần đánh giá đại lượng $a+b+c$ sao cho xuất hiện $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}$, do đó ta viết $a+b+c$ thành $\frac{a}{\sqrt{b+c}}\sqrt{b+c} + \frac{b}{\sqrt{c+a}}\sqrt{c+a} + \frac{c}{\sqrt{a+b}}\sqrt{a+b}$, đến đây ta áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng cơ bản.

Lời giải

$$\text{Ta có } a+b+c = \frac{a}{\sqrt{b+c}}\sqrt{b+c} + \frac{b}{\sqrt{c+a}}\sqrt{c+a} + \frac{c}{\sqrt{a+b}}\sqrt{a+b}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} & \frac{a}{\sqrt{b+c}}\sqrt{b+c} + \frac{b}{\sqrt{c+a}}\sqrt{c+a} + \frac{c}{\sqrt{a+b}}\sqrt{a+b} \\ & \leq \left[\left(\frac{a}{\sqrt{b+c}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{c+a}} \right)^2 + \left(\frac{c}{\sqrt{a+b}} \right)^2 \right] \left[(\sqrt{b+c})^2 + (\sqrt{c+a})^2 + (\sqrt{a+b})^2 \right] \end{aligned}$$

$$\text{Do đó ta có } (a+b+c)^2 \leq \left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \right) [2(a+b+c)]$$

$$\text{Suy ra ta được } a+b+c \leq 2 \left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \right)$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Ví dụ 2.5: Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$a\sqrt{1+a} + b\sqrt{1+b} \leq \sqrt{2} + \sqrt{2}$$

Phân tích: Chú ý đến giả thiết có đại lượng $a^2 + b^2$ và trong bất đẳng thức cần chứng minh cho đại lượng $a\sqrt{1+a} + b\sqrt{1+b}$. Chú ý đến chiều của bất đẳng thức ta có đánh giá theo bất đẳng thức Bunhiacopxki là $a\sqrt{1+a} + b\sqrt{1+b} \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(1+a+1+b)}$. Đến đây ta chỉ cần đánh giá $a+b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$ là xong.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} a\sqrt{1+a} + b\sqrt{1+b} & \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(1+a+1+b)} = \sqrt{a+b+2} \\ & \leq \sqrt{\sqrt{2(a^2 + b^2)} + 2} = \sqrt{\sqrt{2} + 2} \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ \frac{a}{\sqrt{a+1}} = \frac{b}{\sqrt{b+1}} \Leftrightarrow a = b = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{a} = \frac{1}{b} \end{cases}$$

Ví dụ 2.6: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq \left(\frac{a+3b}{4}\right)^4 + \left(\frac{b+3c}{4}\right)^4 + \left(\frac{c+3a}{4}\right)^4$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy nếu đánh giá từ vế trái sang vế phải của bất đẳng thức thì rất khó khăn, do đó ta tìm cách đánh giá từ vế phải sang vế trái, tức là ta cần chứng minh được bất đẳng

thức kiểu $\left(\frac{a+3b}{4}\right)^4 \leq ?$. Dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ nên ta viết được

$$\left(\frac{a+3b}{4}\right)^4 = \left[\left(\frac{a}{4} + \frac{b}{4} + \frac{b}{4} + \frac{b}{4}\right)^2\right]^2, \text{ chú ý đến chiều của bất đẳng thức cần chứng minh ta có đánh giá}$$

theo bất đẳng thức Bunhiacopxki là

$$\left(\frac{a}{4} + \frac{b}{4} + \frac{b}{4} + \frac{b}{4}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right)(a^2 + b^2 + b^2 + b^2)$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta đánh giá được $(a^2 + 3b^2)^2$ về $a^4 + 3b^4$, tuy nhiên đánh giá này hoàn toàn có thể thực hiện được nhờ bất đẳng thức Bunhiacopxki.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Binhiacopxki ta có

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+3b}{4}\right)^4 &= \left[\left(\frac{a}{4} + \frac{b}{4} + \frac{b}{4} + \frac{b}{4}\right)^2\right]^2 \leq \left[\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right)(a^2 + b^2 + b^2 + b^2)\right]^2 \\ &\leq \frac{1}{16}(a^2 + b^2 + b^2 + b^2)^2 \leq \frac{1}{16}(1+1+1+1)(a^4 + b^4 + b^4 + b^4) \end{aligned}$$

$$\text{Do đó ta được } \left(\frac{a+3b}{4}\right)^4 \leq \frac{a^4 + 3b^4}{4}$$

$$\text{Hoàn toàn tương tự ta được } \left(\frac{b+3c}{4}\right)^4 \leq \frac{b^4 + 3c^4}{4}; \left(\frac{c+3a}{4}\right)^4 \leq \frac{c^4 + 3a^4}{4}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\left(\frac{a+3b}{4}\right)^4 + \left(\frac{b+3c}{4}\right)^4 + \left(\frac{c+3a}{4}\right)^4 \leq a^4 + b^4 + c^4$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 2.7: Cho các số thực $a; b; c \in (0; 1)$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta thấy trong căn thức thứ nhất có chứa nhân tử a và trong căn thức thứ hai lại có chứa nhân tử $1-a$, để ý là $a + 1-a = 1$ nên ta sẽ sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki để triệt tiêu đi biến a

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} \right)^2 &\leq [a + (1-a)][bc + (1-b)(1-c)] \\ &= bc + (1-b)(1-c) \end{aligned}$$

Khi này ta được $\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} \leq \sqrt{bc + (1-b)(1-c)}$. Không cần quan tâm đến dấu đẳng thức xảy ra nên ta có $\sqrt{bc + (1-b)(1-c)} < \sqrt{bc} + \sqrt{(1-b)(1-c)}$. Đến đây ta lặp lại đánh giá như trên thì bài toán được hoàn tất.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\left(\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} \right)^2 \leq bc + (1-b)(1-c)$$

Do đó ta được $\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} \leq \sqrt{bc + (1-b)(1-c)}$

Để dàng chứng minh được $\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$ ($x, y > 0$). Áp dụng vào bài toán ta được

$$\sqrt{bc + (1-b)(1-c)} < \sqrt{bc} + \sqrt{(1-b)(1-c)}$$

Lại theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\left(\sqrt{bc} + \sqrt{(1-b)(1-c)} \right)^2 \leq [b + (1-b)][c + (1-c)] = 1$$

Hay $\sqrt{bc} + \sqrt{(1-b)(1-c)} \leq 1$

Vậy ta có $\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 2.8: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$3(a+b+c)^2 \leq (a^2+2)(b^2+2)(c^2+2).$$

Phân tích: Bất đẳng thức trên có các biến độc lập nhau, do đó nếu đánh giá làm giảm đi số biến thì bài toán sẽ đơn giản hơn. Ta chú ý đến sự xuất hiện của đại lượng $(a+b+c)^2$ ở vế trái và a^2+2 ở vế phải của bất đẳng thức cần chứng minh. Sự xuất hiện này làm cho ta suy nghĩ đến sử dụng bất đẳng thức

Bunhiacopxki để đánh giá đại lượng $(a + b + c)^2$ làm sao cho xuất hiện đại lượng $a^2 + 2$. Như vậy ta sẽ có đánh giá sau

$$(a + b + c)^2 = \left[a \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot \frac{(b + c)}{\sqrt{2}} \right]^2 \leq (a^2 + 2) \left[1 + \left(\frac{b + c}{\sqrt{2}} \right)^2 \right]$$

Ta quy bài toán về chứng minh $3 \left[1 + \frac{(b + c)^2}{2} \right] \leq (b^2 + 2)(c^2 + 2)$. Bất đẳng thức này chỉ có

hai biến và có thể chứng minh được bằng phép biến đổi tương đương.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ ta được

$$(a + b + c)^2 = \left[a \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot \frac{(b + c)}{\sqrt{2}} \right]^2 \leq (a^2 + 2) \left[1 + \left(\frac{b + c}{\sqrt{2}} \right)^2 \right]$$

Bài toán đưa về chứng minh $3 \left[1 + \frac{(b + c)^2}{2} \right] \leq (b^2 + 2)(c^2 + 2)$

Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được $\frac{(b - c)^2}{2} + (bc - 1)^2 \geq 0$

Bất đẳng thức cuối cùng này hiển nhiên đúng nên bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} b = c \\ a = \frac{2}{b + c} \\ bc = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1$$

Nhận xét: Bất đẳng thức này còn được chứng minh bằng cách sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki kết hợp với nguyên lý Dirichlet như sau:

Theo nguyên lý Dirichlet thì trong ba số a, b, c luôn tồn tại hai số cùng không lớn hơn 1 hoặc không nhỏ hơn 1.

Không mất tính tổng quát ta giả sử hai số đó là b và c , khi đó ta được

$$(b^2 - 1)(c^2 - 1) \geq 0.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$(a + b + c)^2 = (a \cdot 1 + 1 \cdot b + 1 \cdot c)^2 \leq (a^2 + 2)(1 + b^2 + c^2)$$

Bài toán quy về chứng minh $3(1 + b^2 + c^2) \leq (b^2 + 2)(c^2 + 2)$

Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta thu được $(b^2 - 1)(c^2 - 1) \geq 0$.

Bất đẳng thức cuối cùng đúng theo giả sử trên. Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 2.9: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$(ab + bc + ca - 1)^2 \leq (a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$$

Phân tích: Tương tự như trên, ta chú ý đến sự xuất hiện đại lượng $(ab + bc + ca - 1)^2$ ở vế trái và $a^2 + 1$ ở vế phải của bất đẳng thức cần chứng minh. Ta cần đánh giá đại lượng $(ab + bc + ca - 1)^2$ làm sao cho xuất hiện đại lượng $a^2 + 1$. Để thực hiện được đánh giá đó ta đề ý đến phép biến đổi $(ab + bc + ca - 1)^2 = [a \cdot (b + c) + 1 \cdot (bc - 1)]^2$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$(ab + bc + ca - 1)^2 = [a \cdot (b + c) + (bc - 1)]^2 \leq (a^2 + 1)[(b + c)^2 + (bc - 1)^2]$$

Bài toán quy về chứng minh $(b + c)^2 + (bc - 1)^2 \leq (b^2 + 1)(c^2 + 1)$

Đây là một đẳng thức đúng vì $(b + c)^2 + (bc - 1)^2 = (b^2 + 1)(c^2 + 1)$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a(bc - 1) = b + c \Leftrightarrow a + b + c = abc$$

Ví dụ 2.10: Cho a, b, c, d là các số thực thỏa mãn $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)(d^2 + 1) = 16$.

Chứng minh rằng: $-3 \leq ab + ac + ad + bc + bd + cd - abcd \leq 5$

Phân tích: Trước hết ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$(ab + ac + ad + bc + bd + cd - abcd - 1)^2 \leq 16$$

Quan sát giả thiết ta viết bất đẳng thức cần chứng minh được thành

$$(ab + ac + ad + bc + bd + cd - abcd - 1)^2 \leq (a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)(d^2 + 1)$$

Đến đây ta liên tưởng đến bất đẳng thức Bunhiacopxki với cách áp dụng như các ví dụ trên.

Lời giải

Ta viết bất đẳng thức cần chứng minh lại như sau

$$-4 \leq ab + ac + ad + bc + bd + cd - abcd - 1 \leq 4$$

Hay $(ab + ac + ad + bc + bd + cd - abcd - 1)^2 \leq 16$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\begin{aligned} & (ab + ac + ad + bc + bd + cd - abcd - 1)^2 \\ &= [a(b + c + d - bcd) + 1 \cdot (bc + bd + cd - 1)]^2 \\ &\leq (a^2 + 1)[(b + c + d - bcd)^2 + (bc + bd + cd - 1)^2] \end{aligned}$$

Bài toán đưa về chứng minh

$$(b + c + d - bcd)^2 + (bc + bd + cd - 1)^2 \leq (b^2 + 1)(c^2 + 1)(d^2 + 1)$$

Đây là một bất đẳng thức đúng vì

$$(b + c + d - bcd)^2 + (bc + bd + cd - 1)^2 = (b^2 + 1)(c^2 + 1)(d^2 + 1)$$

Ví dụ 2.11: Cho các số thực $a, b, c > 1$ thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} \leq \sqrt{a+b+c}$$

Phân tích: Sự xuất hiện đại lượng $\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1}$ cùng với chiều của bất đẳng thức cần chứng minh là cơ sở để ta nghĩ đến sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki. Tuy nhiên ta cần đánh giá làm sao để xuất hiện $\frac{1}{a}$. Để ý ta có $\sqrt{a-1} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{a}}$ và với sự xuất hiện của đại lượng $\sqrt{a+b+c}$ thì nhận định trên càng có cơ sở.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\begin{aligned} (\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1})^2 &= \left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{\frac{a-1}{a}} + \sqrt{b} \cdot \sqrt{\frac{b-1}{b}} + \sqrt{c} \cdot \sqrt{\frac{c-1}{c}} \right)^2 \\ &\leq (a+b+c) \left(\frac{a-1}{a} + \frac{b-1}{b} + \frac{c-1}{c} \right) \\ &= (a+b+c) \left(3 - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) \end{aligned}$$

Do đó ta được $\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} \leq \sqrt{a+b+c}$
Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \\ \frac{a-1}{a^2} = \frac{b-1}{b^2} = \frac{c-1}{c^2} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{3}{2}$$

Ví dụ 2.12: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}$$

Phân tích: Các đại lượng trong bất đẳng thức có dạng phân thức nên điều đầu tiên ta nghĩ đến là sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức, tuy nhiên do bậc ở mẫu lớn hơn trên tử nên việc đánh giá sẽ khó khăn hơn. Do đó ta tính đến sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng cơ bản, nhưng để dễ đánh giá hơn ta viết bất đẳng thức lại thành

$$(a+b+c) \left[\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \right] \geq \frac{9}{4}$$

Đến đây áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$(a + b + c) \left[\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \right] \geq \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right)^2$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right)^2 \geq \frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Đánh giá cuối cùng chính là bất đẳng thức Neibiz.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Binhiacopxki ta có

$$\begin{aligned} & (a + b + c) \left[\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \right] \\ &= \left[(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2 \right] \left[\left(\frac{\sqrt{a}}{b+c} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{b}}{c+a} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{c}}{a+b} \right)^2 \right] \\ &\geq \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right)^2 \end{aligned}$$

Dễ dàng chứng minh được $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

Do đó ta có
$$(a + b + c) \left[\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \right] \geq \frac{9}{4}$$

Hay
$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 2.13: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^2(c+a)} + \frac{b}{c^2(a+b)} + \frac{c}{a^2(b+c)} \geq \frac{9}{2(ab+bc+ca)}$$

Phân tích: Tương tự như ví dụ trên ta viết lại được bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$(ab+bc+ca) \left[\frac{a}{b^2(c+a)} + \frac{b}{c^2(a+b)} + \frac{c}{a^2(b+c)} \right] \geq \frac{9}{2}$$

Ta thấy $ab+bc+ca = \frac{a(b+c) + b(c+a) + c(a+b)}{2}$ và $a(b+c) \cdot \frac{c}{a^2(b+c)} = \frac{c}{a}$

Đến đây ta có thể áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki như lời giải sau đây

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$(ab+bc+ca) \left[\frac{a}{b^2(c+a)} + \frac{b}{c^2(a+b)} + \frac{c}{a^2(b+c)} \right] \geq \frac{9}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} & \left[\frac{b(c+a) + c(a+b) + a(b+c)}{2} \right] \left[\frac{a}{b^2(c+a)} + \frac{b}{c^2(a+b)} + \frac{c}{a^2(b+c)} \right] \\ & \geq \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{ab(c+a)}{b^2(c+a)}} + \sqrt{\frac{bc(a+b)}{c^2(a+b)}} + \sqrt{\frac{ca(b+c)}{a^2(b+c)}} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{c}} + \sqrt{\frac{c}{a}} \right)^2 \end{aligned}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta có $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{c}} + \sqrt{\frac{c}{a}} \geq 3$.

Do đó ta được $(ab + bc + ca) \left[\frac{a}{b^2(c+a)} + \frac{b}{c^2(a+b)} + \frac{c}{a^2(b+c)} \right] \geq \frac{9}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 2.14: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{ab}{a+b+2c}} + \sqrt{\frac{bc}{b+c+2a}} + \sqrt{\frac{ca}{c+a+2b}} \leq \frac{1}{2}$$

Phân tích: Chú ý đến giả thiết và chiều bất đẳng thức ta có đánh giá theo bất đẳng thức Bunhiacopxki là $4(a+b+2c) = (1+1+2)(a+b+2c) \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b} + 2\sqrt{c})^2$.

Lời giải

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$4(a+b+2c) = (1+1+2)(a+b+2c) \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b} + 2\sqrt{c})^2$$

Kết hợp với bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\sqrt{\frac{ab}{a+b+2c}} = \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{4(a+b+2c)}} \leq \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + 2\sqrt{c}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} + \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} \right)$$

Áp dụng tương tự ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{bc}{b+c+2a}} & \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} \right) \\ \sqrt{\frac{ca}{c+a+2b}} & \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{ca}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{ca}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} \right) \end{aligned}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{\frac{ab}{a+b+2c}} + \sqrt{\frac{bc}{b+c+2a}} + \sqrt{\frac{ca}{c+a+2b}} \leq \frac{1}{2} (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) = \frac{1}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{9}$.

Cách 2: Đặt $x = \sqrt{a}$; $y = \sqrt{b}$; $z = \sqrt{c}$. Từ giả thiết ta suy ra $x + y + z = 1$.

Khi đó bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2z^2}} + \frac{yz}{\sqrt{y^2 + z^2 + 2x^2}} + \frac{zx}{\sqrt{z^2 + x^2 + 2y^2}} \leq \frac{1}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$4(x^2 + y^2 + 2z^2) = (1 + 1 + 2)(x^2 + y^2 + 2z^2) \geq (x + y + 2z)^2$$

Do đó ta có

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2z^2}} = \frac{2xy}{\sqrt{4(x^2 + y^2 + 2z^2)}} \leq \frac{2xy}{x + y + 2z} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{xy}{x + z} + \frac{xy}{y + z} \right)$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{yz}{\sqrt{y^2 + z^2 + 2x^2}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{yz}{x + y} + \frac{yz}{x + z} \right); \quad \frac{zx}{\sqrt{z^2 + x^2 + 2y^2}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{zx}{x + y} + \frac{zx}{y + z} \right)$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2z^2}} + \frac{yz}{\sqrt{y^2 + z^2 + 2x^2}} + \frac{zx}{\sqrt{z^2 + x^2 + 2y^2}} \leq \frac{x + y + z}{2} = \frac{1}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{9}$.

Ví dụ 2.15: Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{(2a^2 + b^2)(2a^2 + c^2)} + \frac{b^3}{(2b^2 + c^2)(2b^2 + a^2)} + \frac{c^3}{(2c^2 + a^2)(2c^2 + b^2)} \leq \frac{1}{a + b + c}$$

Phân tích: Để ý đến đánh giá theo bất đẳng thức Bunhiacopxki là

$$(2a^2 + b^2)(2a^2 + c^2) = (a^2 + a^2 + b^2)(a^2 + c^2 + a^2) \geq (a^2 + ab + ac)^2 = a^2(a + b + c)^2$$

Lời giải

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$(2a^2 + b^2)(2a^2 + c^2) = (a^2 + a^2 + b^2)(a^2 + c^2 + a^2) \geq (a^2 + ab + ac)^2 = a^2(a + b + c)^2$$

Do đó $\frac{a^3}{(2a^2 + b^2)(2a^2 + c^2)} \leq \frac{a}{(a + b + c)^2}$, chứng minh tương tự ta được

$$\frac{b^3}{(2b^2 + c^2)(2b^2 + a^2)} \leq \frac{b}{(a + b + c)^2}; \quad \frac{c^3}{(2c^2 + a^2)(2c^2 + b^2)} \leq \frac{c}{(a + b + c)^2}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^3}{(2a^2 + b^2)(2a^2 + c^2)} + \frac{b^3}{(2b^2 + c^2)(2b^2 + a^2)} + \frac{c^3}{(2c^2 + a^2)(2c^2 + b^2)} \leq \frac{1}{a + b + c}$$

Vậy bất đẳng thức trên được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Ví dụ 2.16: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3b}{1 + ab^2} + \frac{b^3c}{1 + bc^2} + \frac{c^3a}{1 + ca^2} \geq \frac{abc(a + b + c)}{1 + abc}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{a^3b}{1+ab^2} + \frac{b^3c}{1+bc^2} + \frac{c^3a}{1+ca^2} \right) \left(\frac{1+ab^2}{ab} + \frac{1+bc^2}{bc} + \frac{1+ca^2}{ca} \right) \geq (a+b+c)^2 \\
\Leftrightarrow & \left(\frac{a^3b}{1+ab^2} + \frac{b^3c}{1+bc^2} + \frac{c^3a}{1+ca^2} \right) \left(\frac{c+ab^2c}{abc} + \frac{a+abc^2}{abc} + \frac{b+ca^2b}{abc} \right) \geq (a+b+c)^2 \\
\Leftrightarrow & \left(\frac{a^3b}{1+ab^2} + \frac{b^3c}{1+bc^2} + \frac{c^3a}{1+ca^2} \right) \left(\frac{abc+1}{abc} \right) (a+b+c) \geq (a+b+c)^2 \\
\Leftrightarrow & \frac{a^3b}{1+ab^2} + \frac{b^3c}{1+bc^2} + \frac{c^3a}{1+ca^2} \geq \frac{abc(a+b+c)}{1+abc}
\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 2.17: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 2$. Chứng minh rằng:

$$|a^3 + b^3 + c^3 - abc| \leq 2\sqrt{2}$$

Phân tích và lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành $(a^3 + b^3 + c^3 - abc)^2 \leq 8$.

Quan sát giả thiết và chiều bất đẳng thức cần chứng minh ta liên tưởng đến bất đẳng thức Bunhiacopxki. Bất đẳng thức không xảy ra dấu đẳng thức tại $a = b = c$ mà lại xảy ra tại $a = b = 0; c = \pm\sqrt{2}$. Do đó ta có đánh giá bất đẳng thức trên theo hướng giảm biến. Vì vai trò của a, b, c như nhau nên ta giả sử c là số lớn nhất, khi đó ta có đánh giá

$$a^2 + b^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned}
(a^3 + b^3 + c^3 - abc)^2 &= [a^3 + b^3 + c(c^2 - ab)]^2 \\
&\leq [(a+b)^2 + c^2] [(a^2 - ab + b^2) + (c^2 - ab)^2] \\
&= (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab)(2c^4 + 2a^2b^2 + 4 - 4c^2 - 4ab)
\end{aligned}$$

Đến đây ta đặt $t = ab$, do đó ta có $|t| = |ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = 1$

Khi đó ta được

$$|a^3 + b^3 + c^3 - abc|^2 \leq 4(t+1)[t^2 - 2t + 2 + c^2(c^2 - 2)] \leq 4(t+1)(t^2 - 2t + 2)$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $4(t+1)(t^2 - 2t + 2) \leq 8$

$$\text{Hay} \quad (t+1)(t^2 - 2t + 2) \leq 2 \Leftrightarrow t^2(t-1) \leq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = 0; c = \pm\sqrt{2}$ và các hoán vị của nó.

Ví dụ 2.18: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc \geq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^4 + b^3 + c^2} + \frac{1}{b^4 + c^3 + a^2} + \frac{1}{c^4 + a^3 + b^2} \leq 1$$

Phân tích: Để ý đến đánh giá $(a^4 + b^3 + c^2)(1 + b + c^2) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$(a^4 + b^3 + c^2)(1 + b + c^2) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

Do đó ta có $\frac{1}{a^4 + b^3 + c^2} = \frac{1 + b + c^2}{(a^4 + b^3 + c^2)(1 + b + c^2)} \leq \frac{1 + b + c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$

Áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^4 + b^3 + c^2} + \frac{1}{b^4 + c^3 + a^2} + \frac{1}{c^4 + a^3 + b^2} \leq \frac{3 + a + b + c + a^2 + b^2 + c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

Ta cần chứng minh $\frac{3 + a + b + c + a^2 + b^2 + c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} \leq 1$

Hay $(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3 + a + b + c + a^2 + b^2 + c^2$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3\sqrt{abc}(a^2 + b^2 + c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

Mà $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a + b + c)^2}{3} \geq a + b + c$; $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2 b^2 c^2} \geq 3$

Do đó $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c + 3$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 2.19: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^3 + b^2 + c} + \frac{b}{b^3 + c^2 + a} + \frac{c}{c^3 + a^2 + b} \leq 1$$

Phân tích: Để ý đến đánh giá theo bất đẳng thức Bunhiacopxki sau

$$(a^3 + b^2 + c)\left(\frac{1}{a} + 1 + c\right) \geq (a + b + c)^2$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$(a^3 + b^2 + c)\left(\frac{1}{a} + 1 + c\right) \geq (a + b + c)^2$$

Do đó ta được

$$\frac{a}{a^3 + b^2 + c} = \frac{a\left(\frac{1}{a} + 1 + c\right)}{(a^3 + b^2 + c)\left(\frac{1}{a} + 1 + c\right)} \leq \frac{a\left(\frac{1}{a} + 1 + c\right)}{(a + b + c)^2} = \frac{ac + a + 1}{9}$$

Chúng minh tương tự ta được

$$\frac{b}{b^3 + c^2 + a} \leq \frac{ab + b + 1}{9}; \quad \frac{c}{c^3 + a^2 + b} \leq \frac{cb + c + 1}{9}$$

Do đó ta có bất đẳng thức

$$\frac{a}{a^3 + b^2 + c} + \frac{b}{b^3 + c^2 + a} + \frac{c}{c^3 + a^2 + b} \leq \frac{ab + bc + ca + a + b + c + 3}{9}$$

Ta cần chứng minh $\frac{ab + bc + ca + 6}{9} \leq 1$ hay $ab + bc + ca \leq 3$

Thật vậy, theo một đánh giá quen thuộc ta có

$$ab + bc + ca \leq \frac{(a + b + c)^2}{3} = 3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 2.20: Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{3a}{b+c} + \frac{4b}{c+a} + \frac{5c}{a+b}$$

Phân tích: Quan sát biểu thức ta thấy có thể viết biểu thức về dạng

$$P + 12 = (a + b + c) \left(\frac{3}{b+c} + \frac{4}{c+a} + \frac{5}{a+b} \right)$$

Yêu cầu của bài toán cùng với cách phát biểu của biểu thức làm ta liên tưởng đến bất đẳng thức Bunhiacopxki

Lời giải

Biến đổi biểu thức P ta được

$$P + 12 = (a + b + c) \left(\frac{3}{b+c} + \frac{4}{c+a} + \frac{5}{a+b} \right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{1}{2} \left[(b+c) + (c+a) + (a+b) \right] \left(\frac{3}{b+c} + \frac{4}{c+a} + \frac{5}{a+b} \right) \geq \frac{1}{2} (\sqrt{3} + 2 + \sqrt{5})^2$$

$$\text{Nên } P \geq \frac{1}{2} (\sqrt{3} + 2 + \sqrt{5})^2 - 12$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{2} (\sqrt{3} + 2 + \sqrt{5})^2 - 12$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{b+c}{\sqrt{3}} = \frac{c+a}{2} = \frac{a+b}{\sqrt{5}}$$

Ví dụ 2.21: Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T = \frac{3(c-b)}{2b+a} + \frac{4(a-c)}{b+2c} + \frac{5(b-a)}{c+2a}$$

Lời giải

Biến đổi biểu thức ta có

$$\begin{aligned}
T + 12 &= \left(\frac{3(c-b)}{2b+a} + 3 \right) + \left(\frac{4(a-c)}{b+2c} + 4 \right) + \left(\frac{5(b-a)}{c+2a} + 5 \right) \\
&= \frac{3(a+b+c)}{a+2b} + \frac{4(a+b+c)}{b+2c} + \frac{5(a+b+c)}{c+2a} \\
&= (a+b+c) \left(\frac{3}{a+2b} + \frac{4}{b+2c} + \frac{5}{c+2a} \right)
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{1}{3} \left[(a+2b) + (b+2c) + (c+2a) \right] \left(\frac{3}{a+2b} + \frac{4}{b+2c} + \frac{5}{c+2a} \right) \geq \frac{1}{3} (\sqrt{3} + 2 + \sqrt{5})^2$$

Do đó ta được
$$T \geq \frac{1}{3} (\sqrt{3} + 2 + \sqrt{5})^2 - 12$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức T là $\frac{1}{3} (\sqrt{3} + 2 + \sqrt{5})^2 - 12$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi
$$\frac{b+c}{\sqrt{3}} = \frac{c+a}{2} = \frac{a+b}{\sqrt{5}}$$

Ví dụ 2.22: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh một tam giác và x, y, z là các số thực. Chứng minh rằng:

$$\frac{ax^2}{b+c-a} + \frac{by^2}{c+a-b} + \frac{cz^2}{a+b-c} \geq xy + yz + zx$$

Phân tích: Để ý là $\frac{ax^2}{b+c-a} + \frac{x^2}{2} = \frac{(a+b+c)x^2}{2(b+c-a)}$, do đó ta thêm vào hai vế cùng một đại lượng

$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$ và áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki.

Lời giải

Đặt $T = \frac{ax^2}{b+c-a} + \frac{by^2}{c+a-b} + \frac{cz^2}{a+b-c}$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}
T + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} &= \left(\frac{ax^2}{b+c-a} + \frac{x^2}{2} \right) + \left(\frac{by^2}{c+a-b} + \frac{y^2}{2} \right) + \left(\frac{cz^2}{a+b-c} + \frac{z^2}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} (a+b+c) \left[\frac{x^2}{b+c-a} + \frac{y^2}{c+a-b} + \frac{z^2}{a+b-c} \right]
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{1}{2} (a+b+c) \left(\frac{x^2}{b+c-a} + \frac{y^2}{c+a-b} + \frac{z^2}{a+b-c} \right) \geq \frac{1}{2} (x+y+z)^2$$

Do đó ta được
$$T + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \geq \frac{1}{2} (x+y+z)^2$$

Suy ra
$$\frac{ax^2}{b+c-a} + \frac{by^2}{c+a-b} + \frac{cz^2}{a+b-c} \geq xy + yz + zx$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} a = b = c \\ x = y = z \end{cases}$$

Ví dụ 2.23: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}} + \sqrt{\frac{2b}{b+c}} + \sqrt{\frac{2c}{c+a}} \leq 3$$

Phân tích và lời giải

Quan sát bất đẳng thức cần chứng minh thì suy nghĩ đầu tiên là khử căn bậc hai bằng bất đẳng thức Bunhiacopxki

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}} + \sqrt{\frac{2b}{b+c}} + \sqrt{\frac{2c}{c+a}} \leq \sqrt{3 \left(\frac{2a}{a+b} + \frac{2b}{b+c} + \frac{2c}{c+a} \right)}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{2a}{a+b} + \frac{2b}{b+c} + \frac{2c}{c+a} \leq 3$$

Tuy nhiên đánh giá trên lại là một đánh giá ngược chiều.

Để ý ta thấy bất đẳng thức trên là một bất đẳng thức hoán vị, có một kinh nghiệm khi chứng minh bất đẳng thức đó là nếu ta biến đổi từ bất đẳng thức hoán vị về thành bất đẳng thức đối xứng thì bài toán sẽ trở nên đơn giản hơn. Với kinh nghiệm đó ta thử biến đổi bất đẳng thức về dạng đối xứng xem sao. Quan sát đại lượng về trái ta có thể đối xứng hóa như sau

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}} + \sqrt{\frac{2b}{b+c}} + \sqrt{\frac{2c}{c+a}} = \sqrt{\frac{2a(a+c)}{(a+b)(a+c)}} + \sqrt{\frac{2b(a+b)}{(b+c)(b+a)}} + \sqrt{\frac{2c(b+c)}{(c+a)(b+c)}}$$

Đến đây ta có thể khử căn bất đẳng thức trên bằng bất đẳng thức Bunhiacopxki như sau

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{2a(a+c)}{(a+b)(a+c)}} + \sqrt{\frac{2b(a+b)}{(b+c)(b+a)}} + \sqrt{\frac{2c(b+c)}{(c+a)(b+c)}} \\ & \leq (2a+2b+2c) \left(\frac{2a}{(a+b)(a+c)} + \frac{2b}{(b+c)(b+a)} + \frac{2c}{(c+a)(b+c)} \right) \end{aligned}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$(2a+2b+2c) \left(\frac{2a}{(a+b)(a+c)} + \frac{2b}{(b+c)(b+a)} + \frac{2c}{(c+a)(b+c)} \right) \leq 3$$

Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được

$$8(a+b+c)(ab+bc+ca) \leq 9(a+b)(b+c)(c+a)$$

Tiếp tục biến đổi tương đương ta được

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

Đây là một bất đẳng thức đúng.

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 2.24: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{a+b+2c}} + \sqrt{\frac{b}{b+c+2a}} + \sqrt{\frac{2c}{c+a+2b}} \leq \frac{3}{2}$$

Phân tích và lời giải

Ta đối xứng hóa bất đẳng thức trên thành

$$\sqrt{\frac{a(a+2b+c)}{(a+b+2c)(a+2b+c)}} + \sqrt{\frac{b(a+b+2c)}{(b+c+2a)(a+b+2c)}} + \sqrt{\frac{c(b+c+2a)}{(c+a+2b)(b+c+2a)}} \leq \frac{3}{2}$$

Gọi vế trái của bất đẳng thức là A, áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$A^2 \leq \frac{4(a^2 + b^2 + c^2 + 3ab + 3bc + 3ca)(a+b+c)}{(a+b+2c)(b+c+2a)(c+a+2b)}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$16(a^2 + b^2 + c^2 + 3ab + 3bc + 3ca)(a+b+c) \leq 9(a+b+2c)(b+c+2a)(c+a+2b)$$

Biên đổi tương đương ta được

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta được $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$. Do đó ta cần chứng minh được

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$$

Biên đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được

$$abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

Đây là một đánh giá đúng quen thuộc.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

3. Kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức

Bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức là bất đẳng thức có ứng dụng rộng rãi trong chứng minh các bài toán bất đẳng thức. Nó giải quyết được một lớp các bất đẳng thức chứa các đại lượng có dạng phân thức.

Ví dụ 3.1: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

Phân tích: Quan sát các đại lượng bên vế trái và chiều bất đẳng thức, một cách tự nhiên ta nghĩ đến bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{(a+b)+(c+a)+(a+b)} = \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{2}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 3.2: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a^2+2bc} + \frac{b^2}{b^2+2ca} + \frac{c^2}{c^2+2ab} \geq 1$$

Phân tích: Quan sát các đại lượng bên vế trái và chiều bất đẳng thức, một cách tự nhiên ta nghĩ đến bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ca} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} \geq \frac{(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)} = 1$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Nhận xét: Nếu ta thay các biến a, b, c tương ứng bởi $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ thì ta thu được bất đẳng thức

$$\frac{bc}{bc + 2a^2} + \frac{ca}{ca + 2b^2} + \frac{ab}{ab + 2c^2} \geq 1$$

Để ý ta lại thấy $\frac{bc}{bc + 2a^2} = 1 - \frac{2a^2}{bc + 2a^2}$, khi đó ta được bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{bc + 2a^2} + \frac{b^2}{ca + 2b^2} + \frac{c^2}{ab + 2c^2} \leq 1$$

Ví dụ 3.3: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{2b + c} + \frac{b}{2c + a} + \frac{c}{2a + b} \geq 1$$

Phân tích: Quan sát vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh ta cũng có thể nghĩ đến việc vận dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức. Nhưng nếu để như thế mà áp dụng thì không được. Trước hết ta cần tạo ra các biểu thức có dạng bình phương ở tử có 3 phân thức ở vế trái bằng cách nhân thêm vào tử và mẫu các lượng thích hợp.

Để ý là $\frac{a}{2b + c} + \frac{b}{2c + a} + \frac{c}{2a + b} = \frac{a^2}{a(2b + c)} + \frac{b^2}{b(2c + a)} + \frac{c^2}{c(2a + b)}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a}{2b + c} + \frac{b}{2c + a} + \frac{c}{2a + b} = \frac{a^2}{a(2b + c)} + \frac{b^2}{b(2c + a)} + \frac{c^2}{c(2a + b)} \geq \frac{(a + b + c)^2}{3(ab + bc + ca)}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$

Tuy nhiên đánh giá trên ta một đánh giá đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 3.4: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{a + 2b} + \frac{b^3}{b + 2c} + \frac{c^3}{c + 2a} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^3}{a+2b} + \frac{b^3}{b+2c} + \frac{c^3}{c+2a} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a+b+c)^2}$$

Ta lại có
$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2$$

Do đó ta được
$$\frac{a^3}{a+2b} + \frac{b^3}{b+2c} + \frac{c^3}{c+2a} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 3.5: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^4}{1+a^2b} + \frac{b^4}{1+b^2c} + \frac{c^4}{1+c^2a} \geq \frac{abc(a+b+c)}{1+abc}$$

Phân tích: Ở bài toán này tử số của các phân thức đã ở dạng lũy thừa bậc chẵn nên ta có thể nghĩ đến việc vận dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức

$$\frac{a^4}{1+a^2b} + \frac{b^4}{1+b^2c} + \frac{c^4}{1+c^2a} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)}{3+a^2b+b^2c+c^2a}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)}{3+a^2b+b^2c+c^2a} \geq \frac{abc(a+b+c)}{1+abc}$$

Nhưng thực sự bất ngờ khi cách áp dụng như thế này lại không giúp ta giải quyết được bài toán vì đánh giá trên là một đánh giá không đúng. Nên buộc ta phải tìm hướng giải quyết khác

Đề ý ta thấy $c(1+a^2b) + a(1+b^2c) + b(1+c^2a) = (1+abc)(a+b+c)$. Khi đó ta áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức như sau

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} \frac{a^4}{1+a^2b} + \frac{b^4}{1+b^2c} + \frac{c^4}{1+c^2a} &= \frac{a^4c}{c(1+a^2b)} + \frac{b^4a}{a(1+b^2c)} + \frac{c^4b}{b(1+c^2a)} \\ &\geq \frac{(a^2\sqrt{c} + b^2\sqrt{a} + c^2\sqrt{b})^2}{c(1+a^2b) + a(1+b^2c) + b(1+c^2a)} = \frac{(a^2\sqrt{c} + b^2\sqrt{a} + c^2\sqrt{b})^2}{(1+abc)(a+b+c)} \end{aligned}$$

Khi đó ta cần chứng minh được

$$a^2\sqrt{c} + b^2\sqrt{a} + c^2\sqrt{b} \geq \sqrt{abc}(a+b+c) \Leftrightarrow \frac{a^2}{\sqrt{ab}} + \frac{b^2}{\sqrt{ca}} + \frac{c^2}{\sqrt{bc}} \geq a+b+c$$

Theo bất đẳng thức Cauchy và Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{\sqrt{ab}} + \frac{b^2}{\sqrt{ca}} + \frac{c^2}{\sqrt{bc}} \geq \frac{a^2}{\frac{a+b}{2}} + \frac{b^2}{\frac{b+c}{2}} + \frac{c^2}{\frac{c+a}{2}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{\frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+a}{2}} = a+b+c$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 3.6: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{(b+c)^2}{b^2+c^2+a(b+c)} + \frac{(c+a)^2}{c^2+a^2+b(c+a)} + \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+c(a+b)} \leq 3$$

Phân tích: Bất đẳng thức có tử là các lũy thừa bậc hai, tuy nhiên ta không thể áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki như các ví dụ trên vì ta sẽ thu được bất đẳng thức ngược chiều. Để ý ta thấy có thể áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức kiểu

$$\frac{(b+c)^2}{b^2+c^2+a(b+c)} \leq \frac{b^2}{x} + \frac{c^2}{y}$$

Ta cần xác định được x và y sao cho tổng của chúng là $b^2+c^2+a(b+c)$ và đảm bảo dấu đẳng thức xảy ra. Xét đến vai trò đối xứng của b và c trong biểu thức ta có thể xác định được $x = b^2+ab$; $y = c^2+ac$, khi đó ta được

$$\frac{(b+c)^2}{b^2+c^2+a(b+c)} \leq \frac{b^2}{b^2+ab} + \frac{c^2}{c^2+ca} = \frac{b}{a+b} + \frac{c}{c+a}$$

Đến đây ta có thể giải được bài toán trên.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{(b+c)^2}{b^2+c^2+a(b+c)} = \frac{(b+c)^2}{b(a+b)+c(c+a)} \leq \frac{b^2}{b(a+b)} + \frac{c^2}{c(c+a)} = \frac{b}{a+b} + \frac{c}{c+a}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{(c+a)^2}{c^2+a^2+b(c+a)} \leq \frac{c}{b+c} + \frac{a}{a+b}; \quad \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+c(a+b)} \leq \frac{a}{c+a} + \frac{b}{b+c}$$

Cộng các bất đẳng thức trên vế theo vế ta được:

$$\frac{(b+c)^2}{b^2+c^2+a(b+c)} + \frac{(c+a)^2}{c^2+a^2+b(c+a)} + \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+c(a+b)} \leq 3$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 3.7: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{4a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{a^2+4b^2+c^2} + \frac{1}{a^2+b^2+4c^2} \leq \frac{1}{2}$$

Phân tích: Sự xuất hiện biểu thức $\frac{1}{4a^2+b^2+c^2}$ và chiều của bất đẳng thức cần chứng minh làm ta liên tưởng đến bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức với cách đánh giá tương tự như ví dụ trên. Như

vậy ta cần viết $\frac{1}{4a^2+b^2+c^2}$ về dạng $\frac{(A+B+C)^2}{x+y+z}$, ta cần xác định được các đại lượng

$A+B+C$; $x+y+z$ với $x+y+z = 4a^2+b^2+c^2$. Để ý đến giả thiết $a+b+c = 3$ khi đó $(a+b+c)^2 = 9$, do đó ta có thể định được $A+B+C$ theo phép biến đổi

$\frac{1}{4a^2 + b^2 + c^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{(a+b+c)^2}{2a^2 + (a^2 + b^2) + (c^2 + a^2)}$. Đến đây ta có đánh giá theo bất đẳng thức

Bunhiacopxki dạng phân thức là

$$\frac{(a+b+c)^2}{2a^2 + (a^2 + b^2) + (c^2 + a^2)} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{a^2}{2a^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2}{c^2 + a^2} \right)$$

Đến đây ta có thể trình bày lời giải cho bài toán như sau

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta có

$$\frac{1}{4a^2 + b^2 + c^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{(a+b+c)^2}{2a^2 + (a^2 + b^2) + (c^2 + a^2)} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{a^2}{2a^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2}{c^2 + a^2} \right)$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{1}{a^2 + 4b^2 + c^2} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{b^2}{2b^2} + \frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2}{b^2 + c^2} \right)$$

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + 4c^2} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{c^2}{2c^2} + \frac{a^2}{a^2 + c^2} + \frac{b^2}{b^2 + c^2} \right)$$

Cộng các bất đẳng thức trên về theo về ta được

$$\frac{1}{4a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{a^2 + 4b^2 + c^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 + 4c^2} \leq \frac{1}{2}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 3.8: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{b+c}{a^2+bc} + \frac{c+a}{b^2+ca} + \frac{a+b}{c^2+ab} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Phân tích: Để ý đến biến đổi và đánh giá theo bất đẳng thức Bunhiacopxki sau

$$\frac{b+c}{a^2+bc} = \frac{(b+c)^2}{(a^2+bc)(b+c)} = \frac{(b+c)^2}{c(a^2+b^2)+b(c^2+a^2)} \leq \frac{b^2}{c(a^2+b^2)} + \frac{c^2}{b(c^2+a^2)}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Binhiacopxki dạng phân thức ta có

$$\frac{b+c}{a^2+bc} = \frac{(b+c)^2}{(a^2+bc)(b+c)} = \frac{(b+c)^2}{c(a^2+b^2)+b(c^2+a^2)} \leq \frac{b^2}{c(a^2+b^2)} + \frac{c^2}{b(c^2+a^2)}$$

Áp dụng tương tự ta được ,

$$\frac{c+a}{b^2+ca} \leq \frac{c^2}{a(b^2+c^2)} + \frac{a^2}{c(a^2+b^2)}; \quad \frac{a+b}{c^2+ab} \leq \frac{a^2}{b(c^2+a^2)} + \frac{b^2}{a(b^2+c^2)}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{b+c}{a^2+bc} + \frac{c+a}{b^2+ca} + \frac{a+b}{c^2+ab} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét: Nếu ta thay các biến a, b, c trong ứng bởi $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ thì ta thu được bất đẳng thức

$$\frac{a^2(b+c)}{bc+a^2} + \frac{b^2(c+a)}{ca+b^2} + \frac{c^2(a+b)}{ca+b^2} \leq a+b+c$$

Để ý ta lại thấy $\frac{a^2(b+c)}{bc+a^2} = b+c - \frac{bc(b+c)}{bc+a^2}$, khi đó ta được bất đẳng thức

$$\frac{bc(b+c)}{bc+a^2} + \frac{ca(c+a)}{ca+b^2} + \frac{ab(a+b)}{ca+b^2} \geq a+b+c$$

Ví dụ 3.9: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)} + \frac{b^2}{(2b+c)(2b+a)} + \frac{c^2}{(2c+a)(2c+b)} \leq \frac{1}{3}$$

Phân tích: Để ý ta có phép biến đổi $(2a+b)(2a+c) = 2a(a+b+c) + 2a^2 + bc$ khi đó ta có đánh giá theo bất đẳng thức Bunhiacopxki sau

$$\frac{1}{2a(a+b+c) + (2a^2 + bc)} \leq \frac{1}{9} \left[\frac{4}{2a(a+b+c)} + \frac{1}{2a^2 + bc} \right]$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)} &= \frac{1}{9} \cdot \frac{a^2(2+1)^2}{2a(a+b+c) + (2a^2 + bc)} \\ &\leq \frac{1}{9} \left[\frac{4a^2}{2a(a+b+c)} + \frac{a^2}{2a^2 + bc} \right] = \frac{1}{9} \left[\frac{2a}{a+b+c} + \frac{a^2}{2a^2 + bc} \right] \end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{(2b+c)(2b+a)} &\leq \frac{1}{9} \left[\frac{2b}{a+b+c} + \frac{b^2}{2b^2 + ca} \right] \\ \frac{c^2}{(2c+a)(2c+b)} &\leq \frac{1}{9} \left[\frac{2c}{a+b+c} + \frac{c^2}{2c^2 + ab} \right] \end{aligned}$$

Cộng các bất đẳng thức trên vế theo vế ta được

$$\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)} + \frac{b^2}{(2b+c)(2b+a)} + \frac{c^2}{(2c+a)(2c+b)} \leq \frac{1}{3}$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 3.10: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{bc}{a^2+1} + \frac{ca}{b^2+1} + \frac{ab}{c^2+1} \leq \frac{3}{4}$$

Phân tích: Để ý ta có phép biến đổi $a^2 + 1 = 2a^2 + b^2 + c^2$ và theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$ab \leq \frac{(b+c)^2}{4}$. Khi đó ta có đánh giá theo bất đẳng thức Bunhiacopxki sau

$$\frac{bc}{a^2+1} \leq \frac{(b+c)^2}{4(2a^2 + b^2 + c^2)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{b^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2}{c^2 + a^2} \right)$$

Áp dụng tương tự ta có lời giải như sau

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy và bất đẳng thức Bunhiacopki dạng phân thức ta được

$$\frac{bc}{a^2 + 1} \leq \frac{(b + c)^2}{4(2a^2 + b^2 + c^2)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{b^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2}{c^2 + a^2} \right)$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{ca}{b^2 + 1} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{c^2}{b^2 + c^2} + \frac{a^2}{a^2 + b^2} \right); \quad \frac{ab}{c^2 + 1} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{a^2}{c^2 + a^2} + \frac{b^2}{b^2 + c^2} \right)$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{bc}{a^2 + 1} + \frac{ca}{b^2 + 1} + \frac{ab}{c^2 + 1} \leq \frac{3}{4}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 3.11: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{3a + b}{\sqrt{a^2 + 2b^2 + c^2}} + \frac{3b + c}{\sqrt{b^2 + 2c^2 + a^2}} + \frac{3c + a}{\sqrt{c^2 + 2a^2 + b^2}} \leq 6$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta nghĩ đến đánh giá các mẫu bằng bất đẳng thức Cauchy. Tuy nhiên ở đây ta phân tích xem có sử dụng được bất đẳng thức Bunhiacopki để đánh giá bất đẳng thức hay không? Bất đẳng thức có chứa căn và nếu ta làm mất được dấu căn thì tốt quá. Chú ý đến chiều bất đẳng thức ta có đánh giá sau

$$\left(\frac{3a + b}{\sqrt{a^2 + 2b^2 + c^2}} + \frac{3b + c}{\sqrt{b^2 + 2c^2 + a^2}} + \frac{3c + a}{\sqrt{c^2 + 2a^2 + b^2}} \right)^2 \leq 3 \left(\frac{(3a + b)^2}{a^2 + 2b^2 + c^2} + \frac{(3b + c)^2}{b^2 + 2c^2 + a^2} + \frac{(3c + a)^2}{c^2 + 2a^2 + b^2} \right)$$

Như vậy ta cần chứng minh được

$$\frac{(3a + b)^2}{a^2 + 2b^2 + c^2} + \frac{(3b + c)^2}{b^2 + 2c^2 + a^2} + \frac{(3c + a)^2}{c^2 + 2a^2 + b^2} \leq 12$$

Các phân thức ở vế trái bất đẳng thức trên có các tử là các bình phương nên ta có thể áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopki dạng phân thức như các ví dụ trên,

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopki ta được

$$\left(\frac{3a + b}{\sqrt{a^2 + 2b^2 + c^2}} + \frac{3b + c}{\sqrt{b^2 + 2c^2 + a^2}} + \frac{3c + a}{\sqrt{c^2 + 2a^2 + b^2}} \right)^2 \leq 3 \left(\frac{(3a + b)^2}{a^2 + 2b^2 + c^2} + \frac{(3b + c)^2}{b^2 + 2c^2 + a^2} + \frac{(3c + a)^2}{c^2 + 2a^2 + b^2} \right)$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Bunhiacopki dạng phân thức ta được

$$\frac{(3a+b)^2}{a^2+2b^2+c^2} \leq \frac{9a^3}{a^2+b^2+c^2} + \frac{b^2}{b^2} = \frac{9a^3}{a^2+b^2+c^2} + 1$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\begin{aligned} \frac{(3a+b)^2}{a^2+2b^2+c^2} + \frac{(3b+c)^2}{b^2+2c^2+a^2} + \frac{(3c+a)^2}{c^2+2a^2+b^2} \\ \leq \frac{9a^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{9b^2}{b^2+c^2+a^2} + \frac{9c^2}{c^2+a^2+b^2} + 3 = 12 \end{aligned}$$

Do đó
$$\left(\frac{3a+b}{\sqrt{a^2+2b^2+c^2}} + \frac{3b+c}{\sqrt{b^2+2c^2+a^2}} + \frac{3c+a}{\sqrt{c^2+2a^2+b^2}} \right)^2 \leq 3 \cdot 12 = 36$$

Hay
$$\frac{3a+b}{\sqrt{a^2+2b^2+c^2}} + \frac{3b+c}{\sqrt{b^2+2c^2+a^2}} + \frac{3c+a}{\sqrt{c^2+2a^2+b^2}} \leq 6$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$.

Ví dụ 3.12: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{3a-b+c} + \frac{b}{3b-c+a} + \frac{c}{3c-a+b} \geq 1$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức cần chứng minh thì suy nghĩ đầu tiên là áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức

$$\frac{a}{3a-b+c} + \frac{b}{3b-c+a} + \frac{c}{3c-a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3(a^2+b^2+c^2)}$$

Ta cần chứng minh được $\frac{(a+b+c)^2}{3(a^2+b^2+c^2)} \geq 1 \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 3(a^2+b^2+c^2)$, tuy nhiên

đây lại là một đánh giá sai. Do đó ta không thể áp dụng trực tiếp được.

Ta cần phải biến đổi bất đẳng thức trước rồi mới nghĩ đến áp dụng. Chú ý đến giả thiết cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Như vậy có thể bất đẳng thức sẽ liên quan đến các đại lượng $a+b-c; b+c-a; c+a-b$, ta thử biến đổi các đại lượng xem có thể tạo ra các đại lượng $a+b-c; b+c-a; c+a-b$ không

Đề ý là $4a = (3a-b+c) + (a+b-c)$ khi đó ta được

$$\frac{4a}{3a-b+c} = \frac{(3a-b+c) + (a+b-c)}{3a-b+c} = 1 + \frac{a+b-c}{3a-b+c}$$

Đến đây ta có thể áp dụng được bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{4a}{3a-b+c} + \frac{4b}{3b-c+a} + \frac{4c}{3c-a+b} \geq 4$$

Ta có biến đổi sau

$$\frac{4a}{3a-b+c} = \frac{(3a-b+c) + (a+b-c)}{3a-b+c} = 1 + \frac{a+b-c}{3a-b+c}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{4b}{3b-c+a} = 1 + \frac{b+c-a}{3b-c+a}; \quad \frac{4c}{3c-a+b} = 1 + \frac{c+a-b}{3c-a+b}$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{a+b-c}{3a-b+c} + \frac{b+c-a}{3b-c+a} + \frac{c+a-b}{3c-a+b} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} & \frac{a+b-c}{3a-b+c} + \frac{b+c-a}{3b-c+a} + \frac{c+a-b}{3c-a+b} \\ & \geq \frac{(a+b-c+b+c-a+c+a-b)^2}{(a+b-c)(3a-b+c) + (b+c-a)(3b-c+a) + (c+a-b)(3c-a+b)} \\ & = \frac{(a+b+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca} = 1 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét: Ta có thể sử dụng phép đổi biến để chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a+b-c}{3a-b+c} + \frac{b+c-a}{3b-c+a} + \frac{c+a-b}{3c-a+b} \geq 1$$

Đặt $x = a + b - c; y = c + a - b; z = a + b - c$

Khi đó ta được $2a = y + z; 2b = z + x; 2c = x + y$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{x}{2z+x} + \frac{y}{2x+y} + \frac{z}{2y+z} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{x}{2z+x} + \frac{y}{2x+y} + \frac{z}{2y+z} \geq \frac{(x+y+z)^2}{x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)} = 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 3.13: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^2 + bc + c^2} + \frac{b}{c^2 + ca + a^2} + \frac{c}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{a+b+c}{ab+bc+ca}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng cộng mẫu ta được

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b^2 + bc + c^2} + \frac{b}{c^2 + ca + a^2} + \frac{c}{a^2 + ab + b^2} \\ &= \frac{a^2}{ab^2 + abc + ac^2} + \frac{b^2}{bc^2 + bca + a^2b} + \frac{c^2}{a^2c + abc + b^2c} \\ &\geq \frac{(a + b + c)^2}{a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 + 3abc} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{(a + b + c)^2}{a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 + 3abc} = \frac{a + b + c}{ab + bc + ca}$$

Hay $(a + b + c)(ab + bc + ca) = a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 + 3abc$

Đẳng thức trên đúng với mọi a, b, c . Vậy bất đẳng thức trên được chứng minh

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 3.14: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{a + b + c}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng cộng mẫu ta được

$$\begin{aligned} & \frac{a}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c}{c^2 + ca + a^2} \\ &= \frac{a^2}{a^3 + a^2b + ab^2} + \frac{b^2}{b^3 + b^2c + bc^2} + \frac{c^2}{c^3 + c^2a + a^2c} \\ &\geq \frac{(a + b + c)^2}{a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{(a + b + c)^2}{a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2} \geq \frac{a + b + c}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Hay $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2$

Bất đẳng thức trên đúng với mọi a, b, c . Vậy bất đẳng thức trên được chứng minh

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 3.15: Cho a, b là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2} \geq \frac{32(a^2 + b^2)}{(a + b)^4}$$

Bài làm

Ta có
$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{4}{a^2 + b^2} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{a^2b^2(a^2 + b^2)} + \frac{4a^2b^2}{a^2b^2(a^2 + b^2)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{(a^2 + b^2)^2}{a^2 b^2 (a^2 + b^2)} + \frac{4a^2 b^2}{a^2 b^2 (a^2 + b^2)} \geq \frac{(a^2 + b^2 + 2ab)^2}{2a^2 b^2 (a^2 + b^2)} = \frac{(a + b)^4}{2a^2 b^2 (a^2 + b^2)}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{(a + b)^4}{2a^2 b^2 (a^2 + b^2)} \geq \frac{32(a^2 + b^2)}{(a + b)^4}$$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$(a + b)^8 \geq 64a^2 b^2 (a^2 + b^2)^2 \text{ hay } (a + b)^4 \geq 8ab(a^2 + b^2)$$

Triển khai và thu gọn ta được $(a - b)^4 \geq 0$. Bất đẳng thức cuối cùng đúng với mọi số thực a, b .

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

Ví dụ 3.16: Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta thấy có dấu hiệu sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức. Tuy nhiên để áp dụng được ta cần viết các tử số về dạng bình phương. Khi đó ta được

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq \frac{(a + b + c)^2}{a\sqrt{a^2 + 8bc} + b\sqrt{b^2 + 8ca} + c\sqrt{c^2 + 8ab}}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{(a + b + c)^2}{a\sqrt{a^2 + 8bc} + b\sqrt{b^2 + 8ca} + c\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$

Bất đẳng thức trên có mẫu số chứa các căn bậc hai nên ta nghĩ đến đánh giá đưa các đại lượng trong các dấu căn về cùng trong một dấu căn. Để đến đại lượng trên tử số ta có đánh giá theo bất đẳng thức Bunhiacopxki như sau

$$\begin{aligned} & a\sqrt{a^2 + 8bc} + b\sqrt{b^2 + 8ca} + c\sqrt{c^2 + 8ab} \\ &= \sqrt{a}\sqrt{a^3 + 8abc} + \sqrt{b}\sqrt{b^3 + 8abc} + \sqrt{c}\sqrt{c^3 + 8abc} \\ &\leq \sqrt{(a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3 + 24abc)} \end{aligned}$$

Đến đây ta chỉ cần chứng minh được $(a + b + c)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc$ là bài toán được giải quyết xong.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq \frac{(a + b + c)^2}{a\sqrt{a^2 + 8bc} + b\sqrt{b^2 + 8ca} + c\sqrt{c^2 + 8ab}}$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} a\sqrt{a^2 + 8bc} + b\sqrt{b^2 + 8ca} + c\sqrt{c^2 + 8ab} &= \sqrt{a}\sqrt{a^3 + 8abc} + \sqrt{b}\sqrt{b^3 + 8abc} + \sqrt{c}\sqrt{c^3 + 8abc} \\ &\leq \sqrt{(a+b+c)(a^3 + b^3 + c^3 + 24abc)} \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} &\geq \frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{(a+b+c)(a^3 + b^3 + c^3 + 24abc)}} \\ &= \sqrt{\frac{(a+b+c)^3}{a^3 + b^3 + c^3 + 24abc}} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh $(a+b+c)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc$, bất đẳng thức này tương đương với

$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$. Đây là bất đẳng thức đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Ví dụ 3.17: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 3bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 3ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 3ab}} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 3bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 3ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 3ab}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{a^2 + 3bc} + b\sqrt{b^2 + 3ca} + c\sqrt{c^2 + 3ab}}$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} a\sqrt{a^2 + 3bc} + b\sqrt{b^2 + 3ca} + c\sqrt{c^2 + 3ab} &= \sqrt{a}\sqrt{a^3 + 3abc} + \sqrt{b}\sqrt{b^3 + 3abc} + \sqrt{c}\sqrt{c^3 + 3abc} \\ &\leq \sqrt{(a+b+c)(a^3 + b^3 + c^3 + 9abc)} \end{aligned}$$

Do vậy ta được

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 3bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 3ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 3ab}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{(a+b+c)(a^3 + b^3 + c^3 + 9abc)}}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{(a+b+c)(a^3 + b^3 + c^3 + 9abc)}} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{(a+b+c)^3}{a^3 + b^3 + c^3 + 9abc} \geq \frac{9}{4}$$

Thực hiện biến đổi tương đương bất đẳng thức ta được

$$12[ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)] \geq 5(a^3 + b^3 + c^3) + 57abc$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$

Do đó $6(a^3 + b^3 + c^3 + 9abc) \geq 5(a^3 + b^3 + c^3) + 57abc$

Như vậy ta cần chứng minh

$$2[ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)] \geq a^3 + b^3 + c^3 + 9abc$$

$$\text{Hay } (3a-b-c)(b-c)^2 + (b+c-a)(a-b)(a-c) \geq 0$$

Do a, b, c có tính đối xứng, nên không mất tính tổng quát ta chọn a lớn nhất, khi đó bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$.

Ví dụ 3.18: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{c}} + \frac{c}{\sqrt{a}} \geq a + b + c$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{c}} + \frac{c}{\sqrt{a}} = \frac{a^2}{a\sqrt{b}} + \frac{b^2}{b\sqrt{c}} + \frac{c^2}{c\sqrt{a}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a}}$$

$$\text{Ta cần chứng minh } \frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a}} \geq a + b + c$$

$$\text{Hay } a + b + c \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a}$$

Cũng theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$(a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a})^2 = (\sqrt{a}\cdot\sqrt{ab} + \sqrt{b}\cdot\sqrt{bc} + \sqrt{c}\cdot\sqrt{ca})^2 \leq (a+b+c)(ab+bc+ca)$$

$$\text{Hay } a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} \leq \sqrt{(a+b+c)(ab+bc+ca)}$$

$$\text{Ta cần chứng minh } \sqrt{(a+b+c)(ab+bc+ca)} \leq a + b + c$$

Hay ta cần chứng minh

$$ab + bc + ca \leq a + b + c \Leftrightarrow (ab + bc + ca)^2 \leq (a + b + c)^2$$

Mà ta có $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$, như vậy phép chứng minh sẽ hoàn ta nếu ta chỉ ra được $ab + bc + ca \leq 3$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng vì $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 = 3$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$.

Ví dụ 3.19: Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)(a+b+c) \geq 3\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}$$

Phân tích: Theo bất đẳng thức Buniacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{bc} + \frac{c^2}{ca} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$$

Khi đó ta có $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)(a + b + c) \geq \frac{(a + b + c)^3}{ab + bc + ca}$ và phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ

ra được $\frac{(a + b + c)^3}{ab + bc + ca} \geq 3\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}$.

Việc chứng minh bất đẳng thức trên hoàn toàn dễ dàng.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{bc} + \frac{c^2}{ca} \geq \frac{(a + b + c)^2}{ab + bc + ca}$$

$$\text{Do đó } \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)(a + b + c) \geq \frac{(a + b + c)^3}{ab + bc + ca}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{(a + b + c)^3}{ab + bc + ca} \geq 3\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} \Leftrightarrow (a + b + c)^3 \geq 3(ab + bc + ca)\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}$$

Thật vậy, theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} (a + b + c)^2 &= (a^2 + b^2 + c^2) + (ab + bc + ca) + (ab + bc + ca) \\ &\geq 3\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca)^2} \end{aligned}$$

Lũy thừa bậc ba hai vế ta được $(a + b + c)^6 \geq 27(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca)^2$

Lấy căn bậc hai hai vế bất đẳng thức trên ta được

$$(a + b + c)^3 \geq 3(ab + bc + ca)\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}$$

Như vậy bất đẳng thức trên được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Ví dụ 3.20: Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + a + b + c \geq 2\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + a + b + c \geq 2\sqrt{\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right)(a + b + c)}$$

Ta cần chứng minh $\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right)(a + b + c) \geq 3(a^2 + b^2 + c^2)$

Thật vậy, theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} = \frac{a^4}{a^2b} + \frac{b^4}{b^2c} + \frac{c^4}{c^2a} \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^2b + b^2c + c^2a}$$

Ta cần chỉ ra được
$$\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2 (a + b + c)}{a^2b + b^2c + c^2a} \geq 3(a^2 + b^2 + c^2) \text{ hay}$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a)$$

Tức là ta cần chứng minh

$$(a^3 + ab^2) + (b^3 + bc^2) + (c^3 + ca^2) \geq 2(a^2b + b^2c + c^2a)$$

Đánh giá trên đây đúng theo bất đẳng thức Cauchy. Do đó bất đẳng thức ban đầu được chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 3.21: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} &\geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)} \\ &\geq \frac{1}{a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2)} \end{aligned}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có

$$\begin{aligned} a(b^2 + c^2) &= \sqrt{\frac{1}{2} 2a^2 (b^2 + c^2)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} 2a^2 (b^2 + c^2)(b^2 + c^2)} \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{2a^2 + 2b^2 + 2c^2}{3} \right)^3} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Áp dụng tương tự ta được $a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$

Do đó ta được
$$\frac{1}{a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2)} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Từ đó suy ra
$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 3.22: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 + 1}} \leq \frac{9}{2(a + b + c)}$$

Phân tích: Để ý ta thấy

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+1}}\right) \\ = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+1}} + \frac{b+c}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{c+a}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{a+b}{\sqrt{c^2+1}}$$

Ta quy bài toán về chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+1}} \leq \frac{3}{2}; \quad \frac{b+c}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{c+a}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{a+b}{\sqrt{c^2+1}} \leq 3$$

Lời giải

Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+1}}\right) \leq \frac{9}{2}$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+1}} \leq \sqrt{\frac{3a^2}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{3b^2}{a^2+2b^2+c^2} + \frac{3c^2}{a^2+b^2+2c^2}}$$

Mặt khác ta lại có $\frac{3a^2}{2a^2+b^2+c^2} \leq \frac{3}{4}\left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{a^2}{a^2+c^2}\right)$, áp dụng tương tự ta được

$$\sqrt{\frac{3a^2}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{3b^2}{a^2+2b^2+c^2} + \frac{3c^2}{a^2+b^2+2c^2}} \leq \frac{3}{2}$$

Do đó
$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+1}} \leq \frac{3}{2} \quad (1)$$

Áp tương tự như trên ta được

$$\frac{b+c}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{c+a}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{a+b}{\sqrt{c^2+1}} \leq \sqrt{\frac{3(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{3(c+a)^2}{a^2+2b^2+c^2} + \frac{3(a+b)^2}{a^2+b^2+2c^2}}$$

Dễ dàng chứng minh được
$$\frac{3(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2} \leq 3\left(\frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{a^2+c^2}\right)$$

Tương tự ta được
$$\sqrt{\frac{3(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{3(c+a)^2}{a^2+2b^2+c^2} + \frac{3(a+b)^2}{a^2+b^2+2c^2}} \leq 3$$

Hay
$$\frac{b+c}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{c+a}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{a+b}{\sqrt{c^2+1}} \leq 3 \quad (2)$$

Cộng theo về các bất đẳng thức (1) và (2) ta được

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+1}}\right) \leq \frac{9}{2}$$

Vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 3.23: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{(a+b+c + \sqrt[3]{abc})^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} &= \frac{c^2}{c^2(a+b)} + \frac{a^2}{a^2(b+c)} + \frac{b^2}{b^2(c+a)} \\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{c^2(a+b) + a^2(b+c) + b^2(c+a)} \end{aligned}$$

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} &\frac{(a+b+c)^2}{c^2(a+b) + a^2(b+c) + b^2(c+a)} + \frac{1}{2\sqrt[3]{abc}} \\ &= \frac{(a+b+c)^2}{c^2(a+b) + a^2(b+c) + b^2(c+a)} + \frac{(\sqrt[3]{abc})^2}{2abc} \\ &\geq \frac{(a+b+c + \sqrt[3]{abc})^2}{c^2(a+b) + a^2(b+c) + b^2(c+a) + 2abc} = \frac{(a+b+c + \sqrt[3]{abc})^2}{(a+b)(b+c)(c+a)} \end{aligned}$$

Do đó ta được $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{(a+b+c + \sqrt[3]{abc})^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$.

Ví dụ 3.24: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1+a}{b+c} + \frac{1+b}{c+a} + \frac{1+c}{a+b} \leq 2 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right)$$

Lời giải

Biến đổi tương đương bất đẳng thức ta được

$$\begin{aligned} \frac{1+a}{b+c} + \frac{1+b}{c+a} + \frac{1+c}{a+b} \leq 2 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) &\Leftrightarrow \frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} + 3 \leq 2 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{a}{b} - \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c} - \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a} - \frac{c}{a+b} &\geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{ac}{b(b+c)} + \frac{bc}{a(a+b)} + \frac{ab}{c(c+a)} \geq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} \frac{ac}{b(b+c)} + \frac{bc}{a(a+b)} + \frac{ab}{c(c+a)} \\ = \frac{(ac)^2}{abc(b+c)} + \frac{(bc)^2}{abc(a+b)} + \frac{(ab)^2}{abc(c+a)} \geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{2abc(a+b+c)} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh $\frac{(ab+bc+ca)^2}{2abc(a+b+c)} \geq \frac{3}{2}$

Hay
$$(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c)$$

Đánh giá cuối cùng đúng theo bất đẳng thức Cauchy. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 3.25: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{2a^2 + bc} + \frac{b}{2b^2 + ca} + \frac{c}{2c^2 + ab} \geq abc$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{2a^2bc + b^2c^2} + \frac{1}{2ab^2c + c^2a^2} + \frac{1}{2abc^2 + a^2b^2} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki và chú ý một bất đẳng thức quen thuộc

$$(ab + bc + ca)^2 \leq \left[\frac{(a + b + c)^2}{3} \right]^2 = 9$$

Ta có

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2a^2bc + b^2c^2} + \frac{1}{2ab^2c + c^2a^2} + \frac{1}{2abc^2 + a^2b^2} \\ & \geq \frac{9}{a^2b^2 + b^2c^2 + b^2c^2 + 2abc(a + b + c)} = \frac{9}{(ab + bc + ca)^2} \geq 1 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 3.26: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + a + b + c \geq 6$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{bc} + \frac{c^2}{ca} \geq \frac{(a + b + c)^2}{ab + bc + ca}$$

Do đó ta được
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + a + b + c \geq \frac{(a + b + c)^2}{ab + bc + ca} + a + b + c$$

Ta cần chứng minh
$$\frac{(a + b + c)^2}{ab + bc + ca} + a + b + c \geq 6$$

Thật vậy, từ giả thiết ta có

$$ab + bc + ca = \frac{(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2} = \frac{(a + b + c)^2 - 3}{2}$$

Đặt $t = a + b + c \Rightarrow 0 < t \leq 3$. Khi đó ta được bất đẳng thức sau

$$\frac{2t^2}{t^2-3} + t \geq 6 \Leftrightarrow 2t^2 + t(t^2-3) \geq 6(t^2-3) \Leftrightarrow (t-3)^2(t+2) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng với mọi $t > 0$. Vậy bất đẳng thức trên được chứng minh

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 3.27: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{\sqrt{b^3+8}} + \frac{b^2}{\sqrt{c^3+8}} + \frac{c^2}{\sqrt{a^3+8}} \geq 1$$

Phân tích: Dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$, do đó ta chú ý đến đánh giá theo bất đẳng thức Cauchy là $\sqrt{b^3+8} = \sqrt{(b+2)(b^2-2b+4)} \leq \frac{b^2-b+6}{2}$. Khi đó hoàn toàn tương tự ta được bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{\sqrt{b^3+8}} + \frac{b^2}{\sqrt{c^3+8}} + \frac{c^2}{\sqrt{a^3+8}} \geq \frac{2a^2}{b^2-b+6} + \frac{2b^2}{c^2-c+6} + \frac{2c^2}{a^2-a+6}$$

Ta cần chỉ ra được $\frac{a^2}{b^2-b+6} + \frac{b^2}{c^2-c+6} + \frac{c^2}{a^2-a+6} \geq \frac{1}{2}$.

Đến đây ta có thể áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho đánh giá trên.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sqrt{b^3+8} = \sqrt{(b+2)(b^2-2b+4)} \leq \frac{b^2-b+6}{2}$$

Tương tự ta có $a^3+2 \leq \frac{a^2-a+6}{2}$; $c^3+2 \leq \frac{c^2-c+6}{2}$

Khi đó ta được bất đẳng thức sau

$$\frac{a^2}{\sqrt{b^3+8}} + \frac{b^2}{\sqrt{c^3+8}} + \frac{c^2}{\sqrt{a^3+8}} \geq \frac{2a^2}{b^2-b+6} + \frac{2b^2}{c^2-c+6} + \frac{2c^2}{a^2-a+6}$$

Ta cần chứng minh $\frac{a^2}{b^2-b+6} + \frac{b^2}{c^2-c+6} + \frac{c^2}{a^2-a+6} \geq \frac{1}{2}$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{b^2-b+6} + \frac{b^2}{c^2-c+6} + \frac{c^2}{a^2-a+6} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2-(a+b+c)+18}$$

Ta cần chỉ ra được $\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2-(a+b+c)+18} \geq \frac{1}{2}$

Hay $2(a+b+c)^2 \geq a^2+b^2+c^2-(a+b+c)+18$

Hay $(a+b+c)^2 + (a+b+c) - 12 \geq 0$

Hay $(a+b+c+4)(a+b+c-3) \geq 0$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng vì từ $ab + bc + ca = 3$ ta có

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) = 9 \Rightarrow a+b+c \geq 3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 3.28: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{1+ab+bc} + \frac{b^2}{1+bc+ca} + \frac{c^2}{1+ca+ab} \geq 1$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki a được

$$\frac{a^2}{1+ab+bc} + \frac{b^2}{1+bc+ca} + \frac{c^2}{1+ca+ab} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3+2(ab+bc+ca)}$$

Để ý ta thấy $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ nên ta có $3+2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2$

Suy ra
$$\frac{(a+b+c)^2}{3+2(ab+bc+ca)} = 1$$

Do đó ta được
$$\frac{a^2}{1+ab+bc} + \frac{b^2}{1+bc+ca} + \frac{c^2}{1+ca+ab} \geq 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 3.29: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{4a^2+3} + \frac{1}{4b^2+3} + \frac{1}{4c^2+3} \geq \frac{3}{7}$$

Phân tích và lời giải

Quan sát bất đẳng thức trên thì suy nghĩ đầu tiên là áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức

$$\frac{1}{4a^2+3} + \frac{1}{4b^2+3} + \frac{1}{4c^2+3} \geq \frac{9}{4(a^2+b^2+c^2)+9}$$

Phép toán sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{9}{4(a^2+b^2+c^2)+9} \geq \frac{3}{7} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq 3$$

Tuy nhiên đánh giá trên không đúng. Do vậy ta phải tìm hướng giải khác cho bài toán trên.

Để ý bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại là

$$\frac{a^2}{4a^2+3} + \frac{a^2}{4b^2+3} + \frac{c^2}{4c^2+3} \leq \frac{3}{7}$$

Đến đây ta cũng nghĩ đến bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức nhưng áp dụng theo chiều

$$\frac{(a+b)^2}{x+y} \leq \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}. \text{ Để ý tiếp ta lại thấy } 4a^2+3 = a^2+ab+ac+3a^2+bc$$

Do đó để bảo toàn dấu đẳng thức ta có đánh giá

$$\frac{49a^2}{4a^2+3} = \frac{(3+4)a^2}{a^2+ab+ca+3a^2+bc} \leq \frac{9a^2}{a^2+ab+ca} + \frac{16a^2}{3a^2+bc}$$

Suy ra
$$\frac{49a^2}{4a^2+3} \leq \frac{9a}{a+b+c} + \frac{16a^2}{3a^2+bc}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{49b^2}{4b^2 + 3} \leq \frac{9b}{a + b + c} + \frac{16b^2}{3b^2 + ca}; \quad \frac{49c^2}{4c^2 + 3} \leq \frac{9c}{a + b + c} + \frac{16c^2}{3c^2 + ab}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{49a^2}{4a^2 + 3} + \frac{49a^2}{4b^2 + 3} + \frac{49c^2}{4c^2 + 3} \leq 9 + \frac{16a^2}{3a^2 + bc} + \frac{16b^2}{3b^2 + ca} + \frac{16c^2}{3c^2 + ab}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{16a^2}{3a^2 + bc} + \frac{16b^2}{3b^2 + ca} + \frac{16c^2}{3c^2 + ab} \leq 12$$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{bc}{3a^2 + bc} + \frac{ca}{3b^2 + ca} + \frac{ab}{3c^2 + ab} \geq \frac{3}{4}$$

Đến đây ta áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức thì được

$$\frac{bc}{3a^2 + bc} + \frac{ca}{3b^2 + ca} + \frac{ab}{3c^2 + ab} \geq \frac{(ab + bc + ca)^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3abc(a + b + c)}$$

Theo một đánh giá quen thuộc ta có $abc(a + b + c) \leq \frac{1}{3}(ab + bc + ca)^2$ do đó ta được

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3abc(a + b + c) \leq \frac{4}{3}(ab + bc + ca)^2$$

Suy ra $\frac{(ab + bc + ca)^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3abc(a + b + c)} \geq \frac{3}{4}$. Do đó ta được bất đẳng thức

$$\frac{bc}{3a^2 + bc} + \frac{ca}{3b^2 + ca} + \frac{ab}{3c^2 + ab} \geq \frac{3}{4}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Ví dụ 3.30: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{ab + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{bc + c^2}} + \frac{c}{\sqrt{ca + a^2}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Phân tích và lời giải

Quan sát bất đẳng thức ta thấy có thể sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức, tuy nhiên trước hết ta đánh giá mẫu số để làm mất các dấu căn, để ý đến bảo toàn dấu đẳng thức ta được

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sqrt{2b \cdot (a + b)} \leq \frac{2b + (a + b)}{2} = \frac{a + 3b}{2}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{a}{\sqrt{ab + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{bc + c^2}} + \frac{c}{\sqrt{ca + a^2}} \geq \frac{2a\sqrt{2}}{a + 3b} + \frac{2b\sqrt{2}}{b + 3c} + \frac{2c\sqrt{2}}{c + 3a}$$

Ta cần chứng minh $\frac{2a\sqrt{2}}{a + 3b} + \frac{2b\sqrt{2}}{b + 3c} + \frac{2c\sqrt{2}}{c + 3a} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Hay $\frac{a}{a + 3b} + \frac{b}{b + 3c} + \frac{c}{c + 3a} \geq \frac{3}{4}$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức thì được

$$\frac{a}{a+3b} + \frac{b}{b+3c} + \frac{c}{c+3a} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca}.$$

Tương tự như ví dụ trên ta chứng minh được

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca} \geq \frac{4}{3}$$

Do đó ta được
$$\frac{a}{a+3b} + \frac{b}{b+3c} + \frac{c}{c+3a} \geq \frac{3}{4}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 3.31: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{c}} + \frac{c}{\sqrt{a}} \geq a + b + c$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{c}} + \frac{c}{\sqrt{a}} = \frac{a^2}{a\sqrt{b}} + \frac{b^2}{b\sqrt{c}} + \frac{c^2}{c\sqrt{a}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a}}$$

Ta cần chứng minh
$$\frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a}} \geq a + b + c$$

Hay
$$a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} \leq a + b + c$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$a\sqrt{b} \leq \frac{a(b+1)}{2}; \quad b\sqrt{c} \leq \frac{b(c+1)}{2}; \quad c\sqrt{a} \leq \frac{c(b+1)}{2}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} \leq \frac{1}{2}(a+b+c+ab+bc+ca)$$

Mà lại có
$$a^2 + b^2 + c^2 = 3 \Rightarrow a + b + c \leq 3$$

Suy ra
$$(a+b+c)(a+b+c) \geq 3(ab+bc+ca) \geq (a+b+c)(ab+bc+ca)$$

Hay
$$a+b+c \geq ab+bc+ca$$

Do đó ta có

$$a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} \leq \frac{1}{2}(a+b+c+a+b+c) \Leftrightarrow a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} \leq a + b + c$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 3.32: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+bc}{a\sqrt{b+c}} + \frac{b^2+ca}{b\sqrt{c+a}} + \frac{c^2+ab}{c\sqrt{a+b}} \geq \sqrt{2}$$

Phân tích: Để ý là

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 + bc}{a\sqrt{b+c}} + \frac{b^2 + ca}{b\sqrt{c+a}} + \frac{c^2 + ab}{c\sqrt{a+b}} \\ &= \frac{a^2}{a\sqrt{b+c}} + \frac{b^2}{b\sqrt{c+a}} + \frac{c^2}{c\sqrt{a+b}} + \frac{bc}{a\sqrt{b+c}} + \frac{ca}{b\sqrt{c+a}} + \frac{ab}{c\sqrt{a+b}} \end{aligned}$$

Lời giải

Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh như sau

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 + bc}{a\sqrt{b+c}} + \frac{b^2 + ca}{b\sqrt{c+a}} + \frac{c^2 + ab}{c\sqrt{a+b}} \\ &= \frac{a^2}{a\sqrt{b+c}} + \frac{b^2}{b\sqrt{c+a}} + \frac{c^2}{c\sqrt{a+b}} + \frac{bc}{a\sqrt{b+c}} + \frac{ca}{b\sqrt{c+a}} + \frac{ab}{c\sqrt{a+b}} \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a\sqrt{b+c}} + \frac{b^2}{b\sqrt{c+a}} + \frac{c^2}{c\sqrt{a+b}} &\geq \frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{a}\sqrt{ab+ac} + \sqrt{b}\sqrt{bc+ab} + \sqrt{c}\sqrt{ca+bc}} \\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{2(a+b+c)(ab+bc+ca)}} \end{aligned}$$

Mà theo một đánh giá quen thuộc thì $3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2$ nên

$$\frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{2(a+b+c)(ab+bc+ca)}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)\sqrt{\frac{2}{3}(a+b+c)}} = \sqrt{\frac{3(a+b+c)}{2}}$$

Do đó ta được $\frac{a^2}{a\sqrt{b+c}} + \frac{b^2}{b\sqrt{c+a}} + \frac{c^2}{c\sqrt{a+b}} \geq \sqrt{\frac{3(a+b+c)}{2}}$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} \frac{bc}{a\sqrt{b+c}} + \frac{ca}{b\sqrt{c+a}} + \frac{ab}{c\sqrt{a+b}} &\geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{abc(\sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} + \sqrt{a+b})} \\ &\geq \frac{3abc(a+b+c)}{abc\sqrt{6(a+b+c)}} = \sqrt{\frac{3(a+b+c)}{2}} \end{aligned}$$

Do đó ta được $\frac{a^2 + bc}{a\sqrt{b+c}} + \frac{b^2 + ca}{b\sqrt{c+a}} + \frac{c^2 + ab}{c\sqrt{a+b}} \geq \sqrt{6(a+b+c)}$

Lại có $a+b+c \geq \frac{1}{3}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 = \frac{1}{3}$ nên $\sqrt{6(a+b+c)} \geq \sqrt{2}$

Hay $\frac{a^2 + bc}{a\sqrt{b+c}} + \frac{b^2 + ca}{b\sqrt{c+a}} + \frac{c^2 + ab}{c\sqrt{a+b}} \geq \sqrt{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{9}$.

4. Kỹ thuật thêm bớt

Có những bất đẳng thức (hay biểu thức cần tìm GTLN, GTNN) nếu để nguyên dạng như đề bài cho đôi khi khó hoặc thậm chí không thể giải quyết bằng cách áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki. Khi đó ta chịu khó biến đổi một số biểu thức bằng cách thêm bớt các số hay biểu thức phù hợp ta có thể vận dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki một cách dễ dàng hơn. Ta cùng xem xét các ví dụ sau để minh họa cho điều đó.

Ví dụ 4.1: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + 2} + \frac{1}{b^2 + 2} + \frac{1}{c^2 + 2} \leq 1$$

Phân tích: Các đại lượng vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh có dạng phân thức nên suy nghĩ đầu tiên là sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức. Nếu áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức một cách trực tiếp ta thu được bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^2 + 2} + \frac{1}{b^2 + 2} + \frac{1}{c^2 + 2} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 6 \right)$$

Để hoàn thành phép chứng minh ta cần đánh giá được $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leq 3$. Tuy nhiên để ý là đại lượng $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ trội nhất nên không thể đánh giá về đại lượng trội hơn

Do đó ta không thể áp dụng trực tiếp bất đẳng thức Bunhiacopxki để chứng minh được, vì vậy ta tính đến phương án đổi chiều bất đẳng thức trước. Chú ý là

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2 + 1} = \frac{a^2}{a^2 + 2}$$

Như vậy ta có phép biến đổi tương đương bất đẳng thức như sau

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2 + 2} + \frac{1}{b^2 + 2} + \frac{1}{c^2 + 2} \leq 1 &\Leftrightarrow - \left(\frac{2}{a^2 + 2} + \frac{2}{b^2 + 2} + \frac{2}{c^2 + 2} \right) \geq -2 \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{a^2 + 2} + 1 - \frac{1}{b^2 + 2} + 1 - \frac{1}{c^2 + 2} &\geq 3 - 2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{a^2 + 2} + \frac{b^2}{b^2 + 2} + \frac{c^2}{c^2 + 2} \geq 1 \end{aligned}$$

Đến đây ta có thể áp dụng được bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức để đánh giá bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{a^2 + 2} + \frac{b^2}{b^2 + 2} + \frac{c^2}{c^2 + 2} \geq 1$$

Lời giải

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$3 - 2 \left(\frac{1}{a^2 + 2} + \frac{1}{b^2 + 2} + \frac{1}{c^2 + 2} \right) \geq 1$$

Hay
$$\frac{a^2}{a^2 + 2} + \frac{b^2}{b^2 + 2} + \frac{c^2}{c^2 + 2} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức bunhiacopxki dạng cộng mẫu kết hợp với giả thiết ta được

$$\frac{a^2}{a^2 + 2} + \frac{b^2}{b^2 + 2} + \frac{c^2}{c^2 + 2} \geq \frac{(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + 6} = \frac{(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)} = 1$$

Do đó bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 4.2: Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$\frac{ab}{c^2 + 2ab} + \frac{bc}{a^2 + 2bc} + \frac{ca}{b^2 + 2ca} \leq 1$$

Phân tích: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{c^2}{c^2 + 2ab} + \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ca} \geq 1$$

Đến đây ta có thể áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức được.

Lời giải

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$3 - 2 \left(\frac{ab}{c^2 + 2ab} + \frac{bc}{a^2 + 2bc} + \frac{ca}{b^2 + 2ca} \right) \geq 1$$

Hay
$$\frac{c^2}{c^2 + 2ab} + \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ca} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng cộng mẫu ta được

$$\frac{c^2}{c^2 + 2ab} + \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ca} \geq \frac{(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)} = 1$$

Do đó bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 4.3: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2 + a^2} + \frac{1}{2 + b^2} + \frac{1}{2 + c^2} \leq 1$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a^2}{2 + a^2} + \frac{b^2}{2 + b^2} + \frac{c^2}{2 + c^2} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{2 + a^2} + \frac{b^2}{2 + b^2} + \frac{c^2}{2 + c^2} \geq \frac{(a + b + c)^2}{6 + a^2 + b^2 + c^2}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{(a + b + c)^2}{6 + a^2 + b^2 + c^2} \geq 1 \Leftrightarrow (a + b + c)^2 \geq 6 + a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow ab + bc + ca \geq 3.$$

Từ giả thiết của bài toán ta được $abc(a + b + c) = ab + bc + ca$ và từ đánh giá quen thuộc

$$(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c), \text{ suy ra ta được}$$

$$(ab + bc + ca)^2 \geq 3(ab + bc + ca) \Leftrightarrow ab + bc + ca \geq 3.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 4.4: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \leq \frac{9}{2}$$

Lời giải

Đặt $P = \frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca}$.

Xét

$$\begin{aligned} \frac{P-3}{2} &= \frac{1}{2-2ab} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2-2bc} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2-2ca} - \frac{1}{2} = \frac{ab}{2-2ab} + \frac{bc}{2-2bc} + \frac{ca}{2-2ca} \\ &= \frac{ab}{2(a^2+b^2+c^2)-2ab} + \frac{bc}{2(a^2+b^2+c^2)-2bc} + \frac{ca}{2(a^2+b^2+c^2)-2ca} \\ &\leq \frac{ab}{a^2+b^2+2c^2} + \frac{bc}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{ca}{a^2+2b^2+c^2} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy và Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} &\frac{ab}{a^2+b^2+2c^2} + \frac{bc}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{ca}{a^2+2b^2+c^2} \\ &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+2c^2} + \frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{(c+a)^2}{a^2+2b^2+c^2} \right) \\ &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{a^2}{a^2+c^2} + \frac{b^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{a^2+c^2} + \frac{c^2}{b^2+c^2} + \frac{a^2}{a^2+b^2} \right) = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Do đó ta được $\frac{P-3}{2} \leq \frac{3}{4} \Rightarrow P \leq \frac{9}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Ví dụ 4.5: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{2a^2+bc} + \frac{b^2}{2b^2+ca} + \frac{c^2}{2c^2+ab} \leq 1$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{2a^2}{2a^2+bc} + \frac{2b^2}{2b^2+ca} + \frac{2c^2}{2c^2+ab} \leq 2$$

Hay $1 - \frac{2a^2}{2a^2+bc} + 1 - \frac{2b^2}{2b^2+ca} + 1 - \frac{2c^2}{2c^2+ab} \geq 1$

Hay $\frac{bc}{2a^2+bc} + \frac{ca}{2b^2+ca} + \frac{ab}{2c^2+ab} \geq 1$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} \frac{bc}{2a^2 + bc} + \frac{ca}{2b^2 + ca} + \frac{ab}{2c^2 + ab} &= \frac{(bc)^2}{bc(2a^2 + bc)} + \frac{(ca)^2}{ca(2b^2 + ca)} + \frac{(ab)^2}{ab(2c^2 + ab)} \\ &\geq \frac{(ab + bc + ca)^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c)} = 1 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$.

Ví dụ 4.6: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a + 2b}{2a + 4b + 3c^2} + \frac{b + 2c}{2b + 4c + 3a^2} + \frac{c + 2a}{2c + 4a + 3b^2} \leq 1$$

Lời giải

Biến đổi tương đương bất đẳng thức ta được

$$\begin{aligned} &\frac{2(a + 2b)}{2a + 4b + 3c^2} + \frac{2(b + 2c)}{2b + 4c + 3a^2} + \frac{2(c + 2a)}{2c + 4a + 3b^2} \leq 2 \\ \text{Hay } &1 - \frac{2(a + 2b)}{2a + 4b + 3c^2} - 1 + \frac{2(b + 2c)}{2b + 4c + 3a^2} + 1 - \frac{2(c + 2a)}{2c + 4a + 3b^2} \geq 1 \\ \text{Hay } &\frac{c^2}{2a + 4b + 3c^2} + \frac{a^2}{2b + 4c + 3a^2} + \frac{b^2}{2c + 4a + 3b^2} \geq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} &\frac{c^2}{2a + 4b + 3c^2} + \frac{a^2}{2b + 4c + 3a^2} + \frac{b^2}{2c + 4a + 3b^2} \\ &= \frac{c^2}{c(2a + 4b + 3c^2)} + \frac{a^2}{a(2b + 4c + 3a^2)} + \frac{b^2}{b(2c + 4a + 3b^2)} \\ &\geq \frac{(\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3})^2}{3(a^3 + b^3 + c^3) + 6(ab + bc + ca)} \end{aligned}$$

$$\text{Ta cần chứng minh } \frac{(\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3})^2}{3(a^3 + b^3 + c^3) + 6(ab + bc + ca)} \geq \frac{1}{3}$$

$$\text{Hay } \sqrt{a^3b^3} + \sqrt{b^3c^3} + \sqrt{c^3a^3} \geq ab + bc + ca$$

Thật vậy, Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} &\sqrt{a^3b^3} + \sqrt{b^3c^3} + \sqrt{c^3a^3} \\ &= (\sqrt{a^3b^3} + \sqrt{ab}) + (\sqrt{b^3c^3} + \sqrt{bc}) + (\sqrt{c^3a^3} + \sqrt{ca}) - (\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) \\ &\geq 2(ab + bc + ca) - (\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) \\ &\geq ab + bc + ca + 3 - \sqrt{3(ab + bc + ca)} = ab + bc + ca \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$.

Ví dụ 4.7: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \geq \frac{ab}{a^2 + ab + bc} + \frac{bc}{b^2 + bc + ca} + \frac{ca}{c^2 + ca + ab}$$

Lời giải

Theo một đánh giá quen thuộc ta có $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Rightarrow \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \geq 1$

Do đó ta cần chứng minh $1 \geq \frac{ab}{a^2 + ab + bc} + \frac{bc}{b^2 + bc + ca} + \frac{ca}{c^2 + ca + ab}$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\begin{aligned} 3 &\geq \frac{ab}{a^2 + ab + bc} + \frac{bc}{b^2 + bc + ca} + \frac{ca}{c^2 + ca + ab} + 2 \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{ab}{a^2 + ab + bc} + 1 - \frac{bc}{b^2 + bc + ca} + 1 - \frac{ca}{c^2 + ca + ab} &\geq 2 \\ \Leftrightarrow \frac{a^2 + bc}{a^2 + ab + bc} + \frac{b^2 + ca}{b^2 + bc + ca} + \frac{c^2 + ab}{c^2 + ca + ab} &\geq 2 \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a^2 + ab + bc} + \frac{b^2}{b^2 + bc + ca} + \frac{c^2}{c^2 + ca + ab} &\geq \frac{(a + b + c)^2}{(a + b + c)^2} = 1 \\ \frac{bc}{a^2 + ab + bc} + \frac{ca}{b^2 + bc + ca} + \frac{ab}{c^2 + ca + ab} &\geq \frac{(ab + bc + ca)^2}{(ab + bc + ca)^2} = 1 \end{aligned}$$

Cộng theo về hai bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^2 + bc}{a^2 + ab + bc} + \frac{b^2 + ca}{b^2 + bc + ca} + \frac{c^2 + ab}{c^2 + ca + ab} \geq 2$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét: Qua các ví dụ trên ta nhận thấy chỉ với việc thêm bớt vào bất đẳng thức một đại lượng phù hợp ta có thể đổi chiều bất đẳng thức và áp dụng được bất đẳng thức Bunhiacopxki để chứng minh bài toán. Kỹ thuật này gọi là kỹ thuật thêm – bớt trong bất đẳng thức Bunhiacopxki. Vậy thì kỹ thuật thêm bớt còn được sử dụng trong các trường hợp nào nữa, ta tiếp tục tìm hiểu các ví dụ sau đây

Ví dụ 4.8: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \geq 3$$

Phân tích: Nếu áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki một cách trực tiếp ta được

$$\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \geq \frac{9}{6 - (a + b + c)}$$

Trong khi đó ta có $0 < a + b + c \leq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} = 3$ nên $\frac{9}{6 - (a + b + c)} \leq 3$

Như vậy đánh giá như trên không chứng minh được bài toán.

Bất đẳng thức cần chứng minh không cần phải đổi chiều như các ví dụ trên nhưng khi áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức thì không đem lại hiệu quả. Để có một đánh giá tốt hơn ta cần thay đổi cách phát biểu các đại lượng của bất đẳng thức xem sao? Chú ý một tí ta sẽ có biến đổi khá thú vị

sau $\frac{1}{2-a} - \frac{1}{2} = \frac{a}{2(2-a)}$. Lúc này bất đẳng thức trở thành $\frac{a}{2-a} + \frac{b}{2-b} + \frac{c}{2-c} \geq 3$. Với bất đẳng

thức này hy vọng ta sẽ chứng minh được.

Lời giải

Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh như sau

$$\left(\frac{1}{2-a} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2-a} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2-a} - \frac{1}{2}\right) \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{2-a} + \frac{b}{2-b} + \frac{c}{2-c} \geq 3$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a}{2-a} + \frac{b}{2-b} + \frac{c}{2-c} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a(2-a) + b(2-b) + c(2-c)} = \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c) - 3}$$

Ta cần chứng minh được $\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c) - 3} \geq 3$ hay $(a+b+c)^2 \geq 6(a+b+c) - 9$

$$\text{Hay } (a+b+c)^2 - 6(a+b+c) + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (a+b+c-3)^2 \geq 0$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét: Như vậy bằng việc thêm – bớt một đại lượng ta đã biến đổi bất đẳng thức đã cho về dạng khác và khi đó có thể dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki một cách thuận lợi hơn. Vậy thì làm thế nào để ta có thể chọn được đại lượng phù hợp?

Xét ý tưởng sau đây: Ta sẽ tìm một số m dương sao cho $\frac{1}{2-a} - m = \frac{1-m(1-a)}{2-a}$ có tử số là

$1 - m(1-a)$ là một đại lượng dương và đánh giá càng chặt càng tốt. Do đó ta chọn được $m = \frac{1}{2}$,

khi đó thì $\frac{1}{2-a} - \frac{1}{2} = \frac{a}{2(2-a)} > 0$.

Để chứng minh bất đẳng thức $\frac{a}{2-a} + \frac{b}{2-b} + \frac{c}{2-c} \geq 3$ ta có thể áp dụng bất đẳng thức

Bunhiacopxki dạng phân thức theo cách khác sau

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} \frac{a}{2-a} + \frac{b}{2-b} + \frac{c}{2-c} &= \frac{a^4}{a^3(2-a)} + \frac{b^4}{b^3(2-b)} + \frac{c^4}{c^3(2-c)} \\ &\geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{2(a^3 + b^3 + c^3) - (a^4 + b^4 + c^4)} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh được

$$\begin{aligned} 3 &\geq 2(a^3 + b^3 + c^3) - (a^4 + b^4 + c^4) \\ \Leftrightarrow (a^4 + b^4 + c^4) + (a^2 + b^2 + c^2) &\geq 2(a^3 + b^3 + c^3) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $a^4 + a^2 \geq 2a^3$; $b^4 + b^2 \geq 2b^3$; $c^4 + c^2 \geq 2c^3$.

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được bất đẳng thức cuối cùng.

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Ví dụ 4.9: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{3a-b+c} + \frac{b}{3b-c+a} + \frac{c}{3c-a+b} \geq 1$$

Phân tích: Để áp dụng được bất đẳng thức Bunhiacopxki ta cần tìm số m dương sao cho

$$\frac{a}{3a-b+c} - m = \frac{a(1-3m) + mb - mc}{3a-b+c}$$
 có tử số là $a(1-3m) + mb - mc$ là một số dương và

đánh giá trên càng chặt càng tốt. Để ý giả thiết a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên ta nghĩ đến chọn m

sao cho tử số trên có dạng $a+b-c$. Từ những nhận định đó ta chọn được $m = \frac{1}{4}$. Khi đó ta có lời giải

như sau

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a}{3a-b+c} - \frac{1}{4} + \frac{4b}{3b-c+a} - \frac{1}{4} + \frac{4c}{3c-a+b} - \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}$$

Hay bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{a+b-c}{3a-b+c} + \frac{b+c-a}{3b-c+a} + \frac{c+a-b}{3c-a+b} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} & \frac{a+b-c}{3a-b+c} + \frac{b+c-a}{3b-c+a} + \frac{c+a-b}{3c-a+b} \\ & \geq \frac{(a+b-c+b+c-a+c+a-b)^2}{(a+b-c)(3a-b+c) + (b+c-a)(3b-c+a) + (c+a-b)(3c-a+b)} \\ & = \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca} = 1 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 4.10: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{5a+3b}{3a+b+2c} + \frac{5b+3c}{3b+c+2a} + \frac{5c+3a}{3c+a+2b} \geq 4$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức trên thì suy nghĩ đầu tiên là áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức

$$\begin{aligned} & \frac{5a+3b}{3a+b+2c} + \frac{5b+3c}{3b+c+2a} + \frac{5c+3a}{3c+a+2b} \\ & \geq \frac{(5a+3b+5b+3c+5c+3a)^2}{(5a+3b)(3a+b+2c) + (5b+3c)(3b+c+2a) + (5c+3a)(3c+a+2b)} \end{aligned}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{(5a + 3b + 5b + 3c + 5c + 3a)^2}{(5a + 3b)(3a + b + 2c) + (5b + 3c)(3b + c + 2a) + (5c + 3a)(3c + a + 2b)} \geq 4$$

Hay

$$\frac{64(a + b + c)^2}{18(a^2 + b^2 + c^2) + 30(ab + bc + ca)} \geq 4 \Leftrightarrow ab + bc + ca \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Tuy nhiên đánh giá trên là sai. Do đó ta không thể áp dụng được trực tiếp bất đẳng thức Bunhiacopxki mà cần biến đổi bất đẳng thức về một dạng khác. Với ý tưởng đó ta cần tìm số m dương sao cho

$$\frac{5a + 3b}{3a + b + 2c} - m = \frac{a(5 - 3m) + (3 - m)b - 2mc}{3a + b + 2c} = \frac{k(a + b - c)}{3a + b + 2c}$$

Và đánh giá trên càng chặt càng tốt. Từ những nhận định đó ta chọn được $m = 1$. Khi đó ta có lời giải như sau

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{5a + 3b}{3a + b + 2c} - 1 + \frac{5b + 3c}{3b + c + 2a} - 1 + \frac{5c + 3a}{3c + a + 2b} - 1 \geq 1$$

Hay

$$\frac{2(a + b - c)}{3a + b + 2c} + \frac{2(b + c - a)}{3b + c + 2a} + \frac{2(c + a - b)}{3c + a + 2b} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{2(a + b - c)}{3a + b + 2c} + \frac{2(b + c - a)}{3b + c + 2a} + \frac{2(c + a - b)}{3c + a + 2b} \geq \frac{2(a + b - c + b + c - a + c + a - b)^2}{(a + b - c)(3a + b + 2c) + (b + c - a)(3b + c + 2a) + (c + a - b)(3c + a + 2b)}$$

Ta cần chứng minh được

$$\frac{2(a + b - c + b + c - a + c + a - b)^2}{(a + b - c)(3a + b + 2c) + (b + c - a)(3b + c + 2a) + (c + a - b)(3c + a + 2b)} \geq 1$$

Hay

$$\frac{2(a + b + c)^2}{2(a^2 + b^2 + c^2) + 4(ab + bc + ca)} \geq 1$$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 4.11: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{3a + b}{2a + c} + \frac{3b + c}{2b + a} + \frac{3c + a}{2c + b} \geq 4$$

Phân tích: Để ý đến phép biến đổi $\frac{3a + b}{2a + c} - 1 = \frac{a + b - c}{2a + c}$.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a + b - c}{2a + c} + \frac{b + c - a}{2b + a} + \frac{c + a - b}{2c + b} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a+b-c}{2a+c} + \frac{b+c-a}{2b+a} + \frac{c+a-b}{2c+b}$$

$$\geq \frac{(a+b-c+b+c-a+c+a-b)^2}{(a+b-c)(2a+c) + (b+c-a)(2b+a) + (c+a-b)(2c+a)}$$

Ta cần chứng minh được

$$\frac{(a+b-c+b+c-a+c+a-b)^2}{(a+b-c)(2a+c) + (b+c-a)(2b+a) + (c+a-b)(2c+a)} \geq 1$$

Hay

$$\frac{(a+b+c)^2}{(a^2+b^2+c^2) + 2(ab+bc+ca)} \geq 1$$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 4.12: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \leq \frac{5}{2}$$

Phân tích: Để ý đến phép biến đổi $1 - \frac{a}{b+c} = \frac{b+c-a}{b+c}$.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{b+c-a}{b+c} + \frac{c+a-b}{c+a} + \frac{a+b-c}{a+b} \geq \frac{1}{2} + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$$

Hay

$$\frac{b+c-a}{b+c} + \frac{c+a-b}{c+a} + \frac{a+b-c}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiachopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{b+c-a}{b+c} + \frac{c+a-b}{c+a} + \frac{a+b-c}{a+b}$$

$$\geq \frac{(a+b-c+b+c-a+c+a-b)^2}{(b+c)(b+c-a) + (c+a)(c+a-b) + (a+b)(a+b-c)}$$

$$= \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 4.13: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(b+c)}{a^2+2bc} + \frac{b(c+a)}{b^2+2ca} + \frac{c(a+b)}{c^2+2ab} \leq 2$$

Phân tích: Để ý đến phép biến đổi $1 - \frac{a(b+c)}{a^2+2bc} = \frac{a^2+2bc-a(b+c)}{a^2+2bc}$. Ta lại có

$$a^2 + 2bc - a(b+c) = bc + (a-b)(a-c) \geq bc - |(a-b)(a-c)| > 0$$

Lại thấy $a^2 + 2bc - a(b+c) + b^2 + 2ca - b(c+a) + c^2 + 2ab - c(a+b) = a^2 + b^2 + c^2$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a^2 + 2bc - a(b+c)}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2 + 2ca - b(c+a)}{b^2 + 2ca} + \frac{c^2 + 2ab - c(a+b)}{c^2 + 2ab} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 + 2bc - a(b+c)}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2 + 2ca - b(c+a)}{b^2 + 2ca} + \frac{c^2 + 2ab - c(a+b)}{c^2 + 2ab} \\ & \geq \frac{\left[a^2 + 2bc - a(b+c) + b^2 + 2ca - b(c+a) + c^2 + 2ab - c(a+b) \right]^2}{M} \end{aligned}$$

Với

$$M = (a^2 + 2bc) \left[a^2 + 2bc - a(b+c) \right] + (b^2 + 2ca) \left[b^2 + 2ca - b(c+a) \right] + (c^2 + 2ab) \left[c^2 + 2ab - c(a+b) \right]$$

Ta cần chứng minh được

$$\begin{aligned} & (a^2 + b^2 + c^2)^2 + a^3b + ab^3 + b^3c + bc^3 + c^3a + ca^3 \\ & \geq a^4 + b^4 + c^4 + 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \end{aligned}$$

$$\text{Hay } ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \geq 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2$$

Đánh giá cuối cùng đúng theo bất đẳng thức Cauchy.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 4.14: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{7+a^2} + \frac{1}{7+b^2} + \frac{1}{7+c^2} - \frac{1}{14} \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \leq \frac{15}{56}$$

Phân tích: Để ý ta thấy $\frac{1}{7+a^2} = \frac{1}{7} - \frac{1}{7} \cdot \frac{a^2}{7+a^2}$ khi đó ta quy bài toán về chứng minh

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} + 2 \left(\frac{a^2}{7+a^2} + \frac{b^2}{7+b^2} + \frac{c^2}{7+c^2} \right) \geq \frac{9}{4}$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{1}{7+a^2} = \frac{1}{7} - \frac{1}{7} \cdot \frac{a^2}{7+a^2}; \quad \frac{1}{7+b^2} = \frac{1}{7} - \frac{1}{7} \cdot \frac{b^2}{7+b^2}; \quad \frac{1}{7+c^2} = \frac{1}{7} - \frac{1}{7} \cdot \frac{c^2}{7+c^2}$$

Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh như sau:

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} + 2 \left(\frac{a^2}{7+a^2} + \frac{b^2}{7+b^2} + \frac{c^2}{7+c^2} \right) \geq \frac{9}{4}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{(b+c) + (c+a) + (a+b)} = \frac{9}{2(a+b+c)}$$

$$\frac{a^2}{7+a^2} + \frac{b^2}{7+b^2} + \frac{c^2}{7+c^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{(7+a^2) + (7+b^2) + (7+c^2)} = \frac{(a+b+c)^2}{24}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{9}{a+b+c} + \frac{(a+b+c)^2}{6} \geq \frac{9}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} \frac{9}{a+b+c} + \frac{(a+b+c)^2}{6} &= \frac{9}{2(a+b+c)} + \frac{9}{2(a+b+c)} + \frac{(a+b+c)^2}{6} \geq 3\sqrt[3]{\frac{9}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{6}} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Do vậy đánh giá giá cuối cùng đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Nhận xét: Ở đây ta được sử dụng kỹ năng thêm bớt bằng cách đưa vào tham số m để lý luận và đưa vào các điều kiện ràng buộc hợp lý để tìm ra m .

Ví dụ 4.15: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 - a + 1} + \frac{1}{b^2 - b + 1} + \frac{1}{c^2 - c + 1} \leq 3$$

Phân tích: Chú ý đến phép biến đổi $\frac{4}{3} - \frac{1}{a^2 - a + 1} = \frac{(2a-1)^2}{3(a^2 - a + 1)}$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh cần chứng minh với

$$\frac{(2a-1)^2}{a^2 - a + 1} + \frac{(2b-1)^2}{b^2 - b + 1} + \frac{(2c-1)^2}{c^2 - c + 1} \geq 3$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta có

$$\frac{(2a-1)^2}{a^2 - a + 1} + \frac{(2b-1)^2}{b^2 - b + 1} + \frac{(2c-1)^2}{c^2 - c + 1} \geq \frac{(2a + 2b + 2c - 3)^2}{a^2 + b^2 + c^2 - (a + b + c) + 3}$$

Ta cần chứng minh được $\frac{(2a + 2b + 2c - 3)^2}{a^2 + b^2 + c^2 - (a + b + c) + 3} \geq 3$

Hay $(a + b + c)^2 + 6(ab + bc + ca) \geq 9(a + b + c)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$ab + bc + ca \geq \sqrt{3abc(a + b + c)} = \sqrt{3(a + b + c)}$$

Ta quy bài toán về chứng minh

$$(a + b + c)^2 + 6\sqrt{3(a + b + c)} \geq 9(a + b + c)$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{a + b + c}{3}} \geq 1$, khi đó bất đẳng thức trên được viết lại thành

$$(3t^2)^2 + 18t \geq 27t^2 \Leftrightarrow 9t(t^3 + 2 - 3t) \geq 0$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có $t^3 + 2 = t^3 + 1 + 1 \geq 3t$ và $t \geq 1$ nên bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Ví dụ 4.16: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{2a+1} + \frac{b^2}{2b+1} + \frac{c^2}{2c+1} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 6}}$$

Phân tích: Áp dụng ý tưởng như các ví dụ trên là cần tìm một số dương m sao cho đánh giá $m - \frac{a^2}{2a+1} = \frac{2ma + m - a^2}{2a+1}$ có tử số $2ma + m - a^2$ dương và đánh giá càng chặt càng tốt. Để ý đến

dấu đẳng thức xảy ra ta chọn được $m = \frac{1}{2}$, tuy nhiên nếu chọn như vậy thì ta không đảm bảo được tử số

luôn dương. Do đó nếu chọn được m mà làm triệt tiêu được a^2 thì mới đảm bảo được tử dương. Để ý đến $a + b + c = 3$ khi đó ta chọn $m = \frac{a}{2}$. Áp dụng tương tự ta có lời giải như sau

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a}{2} - \frac{a^2}{2a+1} + \frac{b}{2} - \frac{b^2}{2b+1} + \frac{c}{2} - \frac{c^2}{2c+1} \geq \frac{a+b+c}{2} - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 6}}$$

Hay
$$\frac{a}{2a+1} + \frac{b}{2b+1} + \frac{c}{2c+1} + \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 6}} \geq 3$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a}{2a+1} + \frac{b}{2b+1} + \frac{c}{2c+1} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2 + b^2 + c^2) + 3}$$

Khi đó ta cần chứng minh được

$$\frac{9}{2(a^2 + b^2 + c^2) + 3} + \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 6}} \geq 3$$

Đặt $t = a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$, khi đó bất đẳng thức được viết lại thành

$$\begin{aligned} \frac{9}{2t+3} + \frac{2t}{\sqrt{t+6}} \geq 3 &\Leftrightarrow \frac{9}{2t+3} - 1 + \frac{2t}{\sqrt{t+6}} - 2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2(3-t)}{2t+3} + \frac{2t-2\sqrt{t+6}}{\sqrt{t+6}} \geq 0 &\Leftrightarrow (t-3) \left(\frac{t+2}{\sqrt{t+6}(t+\sqrt{t+6})} - \frac{1}{2t+3} \right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow (t+2)(2t+3) - \sqrt{t+6}(t+\sqrt{t+6}) \geq 0 &\Leftrightarrow t(2t+6-\sqrt{t+6}) \geq 0 \end{aligned}$$

Do $t \geq 3$ nên bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 4.17: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{3a+1} + \frac{b^2}{3b+1} + \frac{c^2}{3c+1} \leq \frac{1}{18(ab+bc+ca)}$$

Phân tích: Áp dụng ý tưởng như các ví dụ trên là cần tìm một số dương m sao cho đánh giá $m - \frac{a^2}{3a+1} = \frac{3ma+m-a^2}{2a+1}$ có tử số $3ma+m-a^2$ dương và đánh giá càng chặt càng tốt. Khi đó nếu áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta thấy có sự xuất hiện của các hạng tử bậc 3 và nếu quy đồng thì ta thu được một bất đẳng thức bậc 5 thì khó đánh giá.

Để ý đến đánh giá $\frac{a^2}{3a+1} < \frac{a^2}{3a} = \frac{a}{3}$, đây là một đánh giá khá chặt. Khi đó xét biến đổi sau $\frac{a}{3} - \frac{a^2}{3a+1} = \frac{a}{3(3a+1)}$, hoàn toàn tương tự ta có thể áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức có bất đẳng thức sau

$$\frac{a}{3(3a+1)} + \frac{b}{3(3b+1)} + \frac{c}{3(3c+1)} + \frac{1}{18(ab+bc+ca)} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a}{3(3a+1)} + \frac{b}{3(3b+1)} + \frac{c}{3(3c+1)} + \frac{1}{18(ab+bc+ca)} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

Hay
$$\frac{a}{3a+1} + \frac{b}{3b+1} + \frac{c}{3c+1} + \frac{1}{6(ab+bc+ca)} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a}{3a+1} + \frac{b}{3b+1} + \frac{c}{3c+1} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3(a^2+b^2+c^2)+a+b+c} = \frac{1}{3(a^2+b^2+c^2)+1}$$

Khi đó ta quy bài toán về chứng minh

$$\frac{1}{3(a^2+b^2+c^2)+1} + \frac{1}{6(ab+bc+ca)} \geq 1$$

Đến đây ta áp dụng bất đẳng thức Binhiacopxki dạng phân thức thì được

$$\frac{1}{3(a^2+b^2+c^2)+1} + \frac{1}{6(ab+bc+ca)} \geq \frac{4}{3(a^2+b^2+c^2)+6(ab+bc+ca)+1} = 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

Ví dụ 4.18: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{9a+1} + \frac{b^2}{9b+1} + \frac{c^2}{9c+1} \leq \frac{1}{12\sqrt{3}(ab+bc+ca)}$$

Phân tích: Để ý đến phép biến đổi $\frac{a}{9} - \frac{a^2}{9a+1} = \frac{a}{9(9a+1)}$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a}{9} - \frac{a^2}{9a+1} + \frac{b}{9} - \frac{b^2}{9b+1} + \frac{c}{9} - \frac{c^2}{9c+1} \geq \frac{a+b+c}{9} - \frac{1}{12\sqrt{3}(ab+bc+ca)}$$

Hay
$$\frac{a}{9a+1} + \frac{b}{9b+1} + \frac{c}{9c+1} + \frac{3}{4\sqrt{3}(ab+bc+ca)} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a}{9a+1} + \frac{b}{9b+1} + \frac{c}{9c+1} \geq \frac{(a+b+c)^2}{9(a^2+b^2+c^2)+a+b+c} = \frac{1}{9(a^2+b^2+c^2)+1}$$

Lại theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{3}{4\sqrt{3}(ab+bc+ca)} \geq \frac{3}{2[1+3(ab+bc+ca)]}$$

Ta quy bài toán về chứng minh

$$\frac{1}{9(a^2+b^2+c^2)+1} + \frac{3}{2[1+3(ab+bc+ca)]} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} & \frac{1}{9(a^2+b^2+c^2)+1} + \frac{3}{2[1+3(ab+bc+ca)]} \\ &= \frac{1}{9(a^2+b^2+c^2)+1} + \frac{9}{6[1+3(ab+bc+ca)]} \\ &\geq \frac{(1+3)^2}{9(a^2+b^2+c^2)+1+6[1+3(ab+bc+ca)]} = \frac{16}{9(a+b+c)^2+7} = 1 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

5. Kỹ thuật đổi biến trong bất đẳng thức Bunhiacopxki

Có một số bất đẳng thức, nếu ta để nguyên dạng phát biểu của nó thì rất khó để phát hiện ra cách chứng minh. Tuy nhiên bằng một số phép đổi biến nho nhỏ ta có thể đưa chúng về dạng quan thuộc mà bất đẳng thức Bunhiacopxki có thể áp dụng được. Trong mục này chúng ta cùng tìm hiểu kỹ thuật đổi biến trong bất đẳng thức Bunhiacopxki.

Với bất đẳng thức ba biến a, b, c ta có thể sử dụng một số phép biến đổi như

- 1) $(a; b; c) \rightarrow \left(\frac{1}{x}; \frac{1}{y}; \frac{1}{z}\right); \left(\frac{1}{xy}; \frac{1}{yz}; \frac{1}{zx}\right); \left(\frac{1}{\sqrt{xy}}; \frac{1}{\sqrt{yz}}; \frac{1}{\sqrt{zx}}\right); \dots$
- 2) $(a; b; c) \rightarrow (yz; zx; xy); (\sqrt{yz}; \sqrt{zx}; \sqrt{xy}); \dots$
- 3) $(a; b; c) \rightarrow (y+z; z+x; x+y); (y+z-x; z+x-y; x+y-z); \dots$

Với một số bất đẳng thức có giả thiết là $abc = 1$ ta có thể đổi biến

- 1) $(a; b; c) \rightarrow \left(\frac{1}{x}; \frac{1}{y}; \frac{1}{z}\right); \left(\frac{1}{\sqrt{x}}; \frac{1}{\sqrt{y}}; \frac{1}{\sqrt{z}}\right); \dots$
- 2) $(a; b; c) \rightarrow \left(\frac{x}{y}; \frac{y}{z}; \frac{z}{x}\right); \left(\frac{b}{a}; \frac{c}{b}; \frac{a}{c}\right); \left(\sqrt{\frac{x}{y}}; \sqrt{\frac{y}{z}}; \sqrt{\frac{z}{x}}\right); \dots$
- 3) $(a; b; c) \rightarrow \left(\frac{yz}{x^2}; \frac{zx}{y^2}; \frac{ab}{z^2}\right); \left(\frac{x^2}{yz}; \frac{y^2}{zx}; \frac{z^2}{xy}\right); \dots$
- 4) $(a; b; c) \rightarrow \left(\frac{\sqrt{yz}}{x}; \frac{\sqrt{zx}}{y}; \frac{\sqrt{xy}}{z}\right); \left(\frac{x}{\sqrt{yz}}; \frac{y}{\sqrt{zx}}; \frac{z}{\sqrt{xy}}\right); \dots$

Ví dụ 5.1: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ac = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2abc + ab^2} + \frac{1}{2abc + bc^2} + \frac{1}{2abc + ca^2} \geq \frac{a + b + c}{3}$$

Phân tích: Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{ac}{2ac + ab} + \frac{ab}{2ab + bc} + \frac{bc}{2bc + ca} \geq \frac{abc(a + b + c)}{3}$$

Để ý ta thấy bất đẳng thức có sự lặp lại của các đại lượng $ab; bc; ca$ và chú ý ta nhận thấy $abc(a + b + c) = ab \cdot bc + bc \cdot ca + ca \cdot ab$. Do vậy một cách tự nhiên ta nghĩ đến phép đổi biến là $x = ab; y = bc; z = ca$.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{ac}{2ac + ab} + \frac{ab}{2ab + bc} + \frac{bc}{2bc + ca} \geq \frac{abc(a + b + c)}{3}$$

Đặt $x = ab; y = bc; z = ca$, khi đó ta được $x + y + z = 3$, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{y}{2y + z} + \frac{z}{2z + x} + \frac{x}{2x + y} \geq \frac{xy + yz + zx}{3}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} \frac{y}{2y + z} + \frac{z}{2z + x} + \frac{x}{2x + y} &= \frac{y^2}{y(2y + z)} + \frac{z^2}{z(2z + x)} + \frac{x^2}{x(2x + y)} \\ &\geq \frac{(x + y + z)^2}{2(x^2 + y^2 + z^2) + xy + yz + zx} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh $\frac{(x + y + z)^2}{2(x^2 + y^2 + z^2) + xy + yz + zx} \geq \frac{xy + yz + zx}{3}$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$\begin{aligned} 9(x + y + z)^2 &\geq 3(xy + yz + zx) \left[2(x^2 + y^2 + z^2) + xy + yz + zx \right] \\ \Leftrightarrow (x + y + z)^4 &\geq 3(xy + yz + zx) \left[2(x^2 + y^2 + z^2) + xy + yz + zx \right] \end{aligned}$$

Đặt $A = x^2 + y^2 + z^2$; $B = xy + yz + zx$ suy ra $A + 2B = (x + y + z)^2 = 9$, khi đó ta cần chứng minh $(A + 2B)^2 \geq 3B(2A + B) \Leftrightarrow A^2 + B^2 \geq 2AB$.

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 5.2: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + a^2}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Phân tích: Bất đẳng thức được viết lại thành

$$\sqrt{\frac{a^2}{a^2 + b^2}} + \sqrt{\frac{b^2}{b^2 + c^2}} + \sqrt{\frac{c^2}{c^2 + a^2}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Quan sát bất đẳng thức trên ta nghĩ đến phép đổi biến $x = a^2$; $y = b^2$; $z = c^2$, khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\sqrt{\frac{x}{x + y}} + \sqrt{\frac{y}{y + z}} + \sqrt{\frac{z}{z + x}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Đây là bất đẳng thức được chứng minh trong mục 2 với phép đối xứng hóa.

Lời giải

Đặt $x = a^2$; $y = b^2$; $z = c^2$, khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\sqrt{\frac{x}{x + y}} + \sqrt{\frac{y}{y + z}} + \sqrt{\frac{z}{z + x}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{\frac{x}{x + y}} + \sqrt{\frac{y}{y + z}} + \sqrt{\frac{z}{z + x}} \right)^2 \\ &= \left(\sqrt{\frac{x(x + z)}{(x + y)(x + z)}} + \sqrt{\frac{y(y + x)}{(y + z)(y + x)}} + \sqrt{\frac{z(z + y)}{(z + x)(z + y)}} \right)^2 \\ &\leq 2(x + y + z) \left(\frac{x}{(x + y)(x + z)} + \frac{y}{(y + z)(y + x)} + \frac{z}{(z + x)(z + y)} \right) \\ &= \frac{4(x + y + z)(xy + yz + zx)}{(x + y)(y + z)(z + x)} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh
$$\frac{4(x + y + z)(xy + yz + zx)}{(x + y)(y + z)(z + x)} \leq \frac{9}{2}$$

Hay
$$8(x + y + z)(xy + yz + zx) \leq 9(x + y)(y + z)(z + x)$$

Hay
$$8xyz \leq (x + y)(y + z)(z + x)$$

Bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$.

Ví dụ 5.3: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} \geq 3 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)$$

Phân tích: Quan sát giả thiết ta thấy có thể viết lại giả thiết thành $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Đến đây ta đặt

$x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$ và khi này ta viết lại được bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} \geq 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy dấu hiệu sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopski dạng phân thức.

Lời giải

Từ giả thiết $ab + bc + ca = abc$ suy ra $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$

Đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$, từ giả thiết suy ra $x + y + z = 1$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} \geq 3(x^2 + y^2 + z^2)$

Theo Bunhiacopski dạng phân thức ta được

$$\frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} = \frac{x^4}{x^2z} + \frac{y^4}{y^2x} + \frac{z^4}{z^2y} \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^2z + y^2x + z^2y}$$

Ta cần chứng minh
$$\frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^2z + y^2x + z^2y} \geq 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

Hay
$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 3(x^2z + y^2x + z^2y)$$

Vì $x + y + z = 1$, nên bất đẳng thức trên trở thành

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) \geq 3(x^2z + y^2x + z^2y)$$

Hay
$$x^3 + y^3 + z^3 + xz^2 + yx^2 + zy^2 \geq 2(x^2z + y^2x + z^2y)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$x^3 + xz^2 \geq 2x^2z; \quad y^3 + yx^2 \geq 2y^2x; \quad z^3 + zy^2 \geq 2z^2y$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$x^3 + y^3 + z^3 + xz^2 + yx^2 + zy^2 \geq 2(x^2z + y^2x + z^2y)$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 3$.

Nhân xét: Bất đẳng thức trên còn được chứng minh theo cách sau

Biến đổi tương đương bất đẳng thức ta được

$$\begin{aligned}
& \frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} \geq 3(x^2 + y^2 + z^2) \\
\Leftrightarrow & \frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} - (x + y + z)^2 \geq 3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2 \\
\Leftrightarrow & \frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} - (x + y + z) \geq 3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2 \\
\Leftrightarrow & \frac{(x - z)^2}{z} + \frac{(y - x)^2}{x} + \frac{(z - y)^2}{y} \geq (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \\
\Leftrightarrow & (x - y)^2 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) + (y - z)^2 \left(\frac{1}{y} - 1 \right) + (z - x)^2 \left(\frac{1}{z} - 1 \right) \geq 0
\end{aligned}$$

Vì $x + y + z = 1$ nên $\frac{1}{x}; \frac{1}{y}; \frac{1}{z} > 1$. Do đó bất đẳng thức cuối cùng đúng.

Phép chứng minh hoàn tất.

Ví dụ 5.4: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{ab}}{c + 3\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{bc}}{a + 3\sqrt{bc}} + \frac{\sqrt{ca}}{b + 3\sqrt{ca}} \leq \frac{3}{4}$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức nghĩ đến đổi biến $x = \sqrt{a}; y = \sqrt{b}; z = \sqrt{c}$. Khi đó bất đẳng thức

được viết lại thành $\frac{xy}{z^2 + 3xy} + \frac{yz}{a^2 + 3yz} + \frac{zx}{y^2 + 3zx} \leq \frac{3}{4}$.

Ta có thể chứng minh bất đẳng thức trên bằng kỹ thuật thêm – bớt.

Lời giải

Đặt $x = \sqrt{a}; y = \sqrt{b}; z = \sqrt{c}$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{xy}{z^2 + 3xy} + \frac{yz}{a^2 + 3yz} + \frac{zx}{y^2 + 3zx} \leq \frac{3}{4}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned}
& \frac{xy}{z^2 + 3xy} + \frac{yz}{x^2 + 3yz} + \frac{zx}{y^2 + 3zx} \leq \frac{3}{4} \\
\Leftrightarrow & \frac{1}{3} - \frac{xy}{z^2 + 3xy} + \frac{1}{3} - \frac{yz}{x^2 + 3yz} + \frac{1}{3} - \frac{zx}{y^2 + 3zx} \geq 1 - \frac{3}{4} \\
\Leftrightarrow & \frac{z^2}{z^2 + 3xy} + \frac{x^2}{x^2 + 3yz} + \frac{y^2}{y^2 + 3zx} \geq \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức và một đánh giá quen thuộc ta được

$$\begin{aligned} \frac{z^2}{z^2 + 3xy} + \frac{x^2}{x^2 + 3yz} + \frac{y^2}{y^2 + 3zx} &\geq \frac{(x + y + z)^2}{x^2 + y^2 + z^2 + 3(xy + yz + zx)} \\ &\geq \frac{(x + y + z)^2}{(x + y + z)^2 + \frac{(x + y + z)^2}{3}} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Do đó bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 5.5: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = abc$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a + bc} + \sqrt{b + ca} + \sqrt{c + ab} \geq \sqrt{abc} + \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

Phân tích: Trước hết ta viết lại giả thiết thành $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, khi đó ta nghĩ đến phép đổi biến

$x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$. Bất đẳng thức được viết lại thành

$$\sqrt{x + yz} + \sqrt{y + zx} + \sqrt{z + xy} \geq 1 + \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$$

Để ý đến giả thiết $x + y + z = 1$, áp dụng bất đẳng thức Bunhiacpxki ta được

$$\sqrt{x + yz} = \sqrt{x(x + y + z) + yz} = \sqrt{(x + y)(x + z)} \geq x + \sqrt{yz}$$

Áp dụng tương tự ta có lời giải như sau

Lời giải

Từ giả thiết $ab + bc + ca = abc$ suy ra $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.

Đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$, khi đó ta được $x + y + z = 1$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\sqrt{x + yz} + \sqrt{y + zx} + \sqrt{z + xy} \geq 1 + \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacpxki ta được

$$\sqrt{x + yz} = \sqrt{x(x + y + z) + yz} = \sqrt{(x + y)(x + z)} \geq x + \sqrt{yz}$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\sqrt{y + zx} \geq y + \sqrt{zx}; \quad \sqrt{z + xy} \Leftrightarrow z + \sqrt{xy}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{x + yz} + \sqrt{y + zx} + \sqrt{z + xy} &\geq x + y + z + \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} \\ &= 1 + \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$ hay $a = b = c = 3$.

Ví dụ 5.6: Cho các số dương a, b, c thỏa mãn hệ thức $ab + bc + ca = abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{b^2 + 2a^2}}{ab} + \frac{\sqrt{c^2 + 2b^2}}{cb} + \frac{\sqrt{a^2 + 2ac}}{ac} \geq \sqrt{3}$$

Lời giải

Từ giả thiết ta được $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Đặt $x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{b}; z = \frac{1}{c}$, khi đó ta có $x + y + z = 1$.

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\sqrt{x^2 + 2y^2} + \sqrt{y^2 + 2z^2} + \sqrt{z^2 + 2x^2} \geq \sqrt{3}$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$(x + 2y)^2 = (1 \cdot x + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}y)^2 \leq 3(x^2 + 2y^2)$$

Do đó ta được

$$\sqrt{x^2 + 2y^2} \geq \sqrt{\frac{(x + 2y)^2}{3}} = \frac{x + 2y}{\sqrt{3}}$$

Tương tự ta có

$$\sqrt{y^2 + 2z^2} \geq \frac{y + 2z}{\sqrt{3}}; \sqrt{z^2 + 2x^2} \geq \frac{z + 2x}{\sqrt{3}}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên về theo về ta được

$$\sqrt{x^2 + 2y^2} + \sqrt{y^2 + 2z^2} + \sqrt{z^2 + 2x^2} \geq \frac{x + 2y}{\sqrt{3}} + \frac{y + 2z}{\sqrt{3}} + \frac{z + 2x}{\sqrt{3}} = \frac{3(x + y + z)}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$ hay $a = b = c = 3$.

Ví dụ 5.7: Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{bc}{a^2(b+c)} + \frac{ca}{b^2(c+a)} + \frac{ab}{c^2(a+b)} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta thấy vế phải có đại lượng $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, để ý đến phép biến đổi

$$\frac{bc}{a^2(b+c)} = \frac{1}{a^2 \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)}. \text{ Từ đó rất tự nhiên ta nghĩ đến phép đổi biến.}$$

Lời giải

Đặt $x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{b}; z = \frac{1}{c}$, khi đó bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = \frac{x+y+z}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 5.8: Cho các số thực $a, b, c > 1$ thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a+b+c} \geq \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1}$$

Phân tích: Chính sự xuất hiện giả thiết $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$ làm cho ta suy nghĩ đến việc sử dụng phép đổi

$$\text{biến } x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{b}; z = \frac{1}{c}.$$

Lời giải

Đặt $x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{b}; z = \frac{1}{c}$, khi đó $x; y; z \in (0;1)$ và $x + y + z = 2$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \geq \sqrt{\frac{1-x}{x}} + \sqrt{\frac{1-y}{y}} + \sqrt{\frac{1-z}{z}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}} + \sqrt{\frac{1-y}{y}} + \sqrt{\frac{1-z}{z}} \right)^2 \leq \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) (3 - x - y - z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{3}{2}$.

Ví dụ 5.9: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c + 2 = abc$. Chứng minh rằng:

$$2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) \leq a + b + c + 6$$

Phân tích: Để ý ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{2(a+b+c+2)}$$

Trước hết ta biến đổi giả thiết thành

$$\begin{aligned} (a+1)(b+1)(c+1) &= (a+1)(b+1) + (b+1)(c+1) + (c+1)(a+1) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} &= 1 \end{aligned}$$

Khi đó ta nghĩ đến phép đổi biến $x = \frac{1}{a+1}; y = \frac{1}{b+1}; z = \frac{1}{c+1}$. Để ý là từ cách đổi biến đó ta

được $a = \frac{1-x}{x} = \frac{y+z}{x}; b = \frac{1-y}{y} = \frac{z+x}{y}; c = \frac{1-z}{z} = \frac{x+y}{z}$. Bất đẳng thức được viết lại thành

$$\sqrt{\frac{y+z}{x}} + \sqrt{\frac{z+x}{y}} + \sqrt{\frac{x+y}{z}} \leq \sqrt{2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)}. \text{ Đến đây ta có thể áp dụng bất đẳng thức}$$

Bunhiacopxki để chứng minh bài toán

Lời giải

$$\text{Ta có } 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \right)^2 - (a + b + c)$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\begin{aligned} & (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 - (a + b + c) \leq a + b + c + 6 \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 \leq 2(a + b + c + 3) \\ \Leftrightarrow & \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{2(a + b + c + 3)} \end{aligned}$$

Giả thiết được viết lại thành

$$\begin{aligned} & (a + 1)(b + 1)(c + 1) = (a + 1)(b + 1) + (b + 1)(c + 1) + (c + 1)(a + 1) \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{a + 1} + \frac{1}{b + 1} + \frac{1}{c + 1} = 1 \end{aligned}$$

Đặt $x = \frac{1}{a + 1}$; $y = \frac{1}{b + 1}$; $z = \frac{1}{c + 1}$, suy ra $x + y + z = 1$.

Khi đó ta được $a = \frac{1 - x}{x} = \frac{y + z}{x}$; $b = \frac{1 - y}{y} = \frac{z + x}{y}$; $c = \frac{1 - z}{z} = \frac{x + y}{z}$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\sqrt{\frac{y + z}{x}} + \sqrt{\frac{z + x}{y}} + \sqrt{\frac{x + y}{z}} \leq \sqrt{2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\sqrt{\frac{y + z}{x}} + \sqrt{\frac{z + x}{y}} + \sqrt{\frac{x + y}{z}} \leq \sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)(2x + 2y + 2z)} = \sqrt{2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$

Ví dụ 5.10: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b}{a\sqrt{b^2 + 1}} + \frac{c}{b\sqrt{c^2 + 1}} + \frac{a}{c\sqrt{a^2 + 1}} \geq \frac{3}{2}$$

Phân tích: Từ giả thiết ta được $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 1$, khi đó rất tự nhiên ta nghĩ đến phép đổi biến

$x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$, suy ra $xy + yz + zx = 1$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại

thành

$$\frac{x}{\sqrt{y^2 + 1}} + \frac{y}{\sqrt{z^2 + 1}} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq \frac{3}{2}$$

Đề ý đến phép biến đổi $\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{x^2 + xy + yz + zx} = \sqrt{(x + y)(x + z)}$. Hoàn toàn tương tự ta có thể chứng minh được bài toán.

Lời giải

Từ giả thiết $a + b + c = abc$ suy ra $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 1$.

Đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$, Khi đó giả thiết của bài toán trở thành $xy + yz + zx = 1$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\frac{x}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{y}{\sqrt{z^2+1}} + \frac{z}{\sqrt{x^2+1}} \geq \frac{3}{2}$.

Để thấy $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2+xy+yz+zx} = \sqrt{(x+y)(x+z)}$

Tương tự ta được $\sqrt{y^2+1} = \sqrt{(y+z)(y+x)}$; $\sqrt{z^2+1} = \sqrt{(z+x)(z+y)}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{y}{\sqrt{z^2+1}} + \frac{z}{\sqrt{x^2+1}} &= \frac{x}{\sqrt{(y+x)(y+z)}} + \frac{y}{\sqrt{(z+x)(z+y)}} + \frac{z}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} \\ &\geq \frac{2x}{x+2y+z} + \frac{2y}{x+y+2z} + \frac{2z}{2x+y+z} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh $\frac{2x}{x+2y+z} + \frac{2y}{x+y+2z} + \frac{2z}{2x+y+z} \geq \frac{3}{2}$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} \frac{2x}{x+2y+z} + \frac{2y}{x+y+2z} + \frac{2z}{2x+y+z} \\ \geq \frac{2(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2 + xy + yz + zx} \geq \frac{2(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2 + \frac{(x+y+z)^2}{3}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Như vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = \sqrt{3}$.

Ví dụ 5.11: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b+c}{a^2} + \frac{c+a}{b^2} + \frac{a+b}{c^2} \geq 2$$

Phân tích: Quan sát giả thiết của bài toán ta nghĩ đến phép đổi biến $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$.

Khi đó bất đẳng thức được viết lại thành $\frac{x^2(y+z)}{yz} + \frac{y^2(z+x)}{zx} + \frac{z^2(x+y)}{xy} \geq 2$.

Để ý đến đánh giá $4xy \leq (x+y)^2$. Ta quy bài toán về chứng minh

$$\frac{4x^2}{y+z} + \frac{4y^2}{z+x} + \frac{4z^2}{x+y} \geq 2$$

Bất đẳng thức trên dễ dàng chứng minh được bằng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức.

Lời giải

Đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$. Từ giả thiết suy ra $x + y + z = 1$.

Bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{x^2(y+z)}{yz} + \frac{y^2(z+x)}{zx} + \frac{z^2(x+y)}{xy} \geq 2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}; yz \leq \frac{(y+z)^2}{4}; zx \leq \frac{(z+x)^2}{4}$$

Khi đó ta được bất đẳng thức sau

$$\frac{x^2(y+z)}{yz} + \frac{y^2(z+x)}{zx} + \frac{z^2(x+y)}{xy} \geq \frac{4x^2}{y+z} + \frac{4y^2}{z+x} + \frac{4z^2}{x+y}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta có

$$\frac{4x^2}{y+z} + \frac{4y^2}{z+x} + \frac{4z^2}{x+y} \geq \frac{4(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = 2(x+y+z) = 2$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 3$.

Nhận xét: Ngoài cách chứng minh như trên ta có thể áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki chứng minh theo cách sau

$$\text{Bất đẳng thức được viết lại thành } x^2 \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + y^2 \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x} \right) + z^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq 2$$

Theo một đánh giá quen thuộc ta có

$$\begin{aligned} x^2 \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) &= \frac{x^2}{y+z} (y+z) \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq \frac{4x^2}{y+z} \\ y^2 \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x} \right) &= \frac{y^2}{z+x} (z+x) \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x} \right) \geq \frac{4y^2}{z+x} \\ z^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) &= \frac{z^2}{x+y} (x+y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq \frac{4z^2}{x+y} \end{aligned}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{x^2(y+z)}{yz} + \frac{y^2(z+x)}{zx} + \frac{z^2(x+y)}{xy} \geq \frac{4x^2}{y+z} + \frac{4y^2}{z+x} + \frac{4z^2}{x+y}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} &\frac{4x^2}{y+z} + \frac{4y^2}{z+x} + \frac{4z^2}{x+y} \\ &= 2 \left[(x+y) + (y+z) + (z+x) \right] \left[\frac{x^2}{(y+z)} + \frac{y^2}{(z+x)} + \frac{z^2}{(x+y)} \right] \\ &\geq 2 \left(\frac{x}{\sqrt{y+z}} \sqrt{y+z} + \frac{y}{\sqrt{z+x}} \sqrt{z+x} + \frac{z}{\sqrt{x+y}} \sqrt{x+y} \right)^2 = 2(x+y+z)^2 = 2 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 5.12: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{a}}{2 + b\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{b}}{2 + c\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{c}}{2 + a\sqrt{c}} \geq 1$$

Phân tích: Từ giả thiết $abc = 1$ của bài toán, rất tự nhiên ta nghĩ đến phép đổi biến dạng $a = \frac{x}{y}; b = \frac{y}{z}; c = \frac{z}{x}$, chú ý đến các căn bậc hai có trong bất đẳng thức cần chứng minh, ta chọn

cách đổi biến là $\sqrt{a} = \frac{x}{y}; \sqrt{b} = \frac{y}{z}; \sqrt{c} = \frac{z}{x}$. Khi đó bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{xz^2}{2z^2y + y^2x} + \frac{yx^2}{2x^2z + z^2y} + \frac{zy^2}{2y^2x + x^2z} \geq 1.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh có dấu hiệu sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức. Do đó ta thử áp dụng xem có thể chứng minh được bài toán không?

Lời giải

Vì $abc = 1$ nên tồn tại các số thực dương để $\sqrt{a} = \frac{x}{y}; \sqrt{b} = \frac{y}{z}; \sqrt{c} = \frac{z}{x}$.

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{xz^2}{2z^2y + y^2x} + \frac{yx^2}{2x^2z + z^2y} + \frac{zy^2}{2y^2x + x^2z} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} \frac{xz^2}{2z^2y + y^2x} + \frac{yx^2}{2x^2z + z^2y} + \frac{zy^2}{2y^2x + x^2z} &= \frac{x^2z^2}{2xyz^2 + x^2y^2} + \frac{y^2x^2}{2x^2yz + z^2y^2} + \frac{z^2y^2}{2xy^2z + x^2z^2} \\ &\geq \frac{(xy + yz + zx)^2}{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2xyz(x + y + z)} = \frac{(xy + yz + zx)^2}{(xy + yz + zx)^2} = 1 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 5.13: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + a + 1} + \frac{1}{b^2 + b + 1} + \frac{1}{c^2 + c + 1} \geq 1$$

Phân tích: Nếu ta sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki trực tiếp kiểu

$$\frac{1}{a^2 + a + 1} + \frac{1}{b^2 + b + 1} + \frac{1}{c^2 + c + 1} \geq \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c + 3}$$

Khi đó để phép chứng minh được hoàn tất ta phải chỉ ra được

$$\frac{9}{a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c + 3} \geq 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c \leq 6$$

Với giả thiết $abc = 1$ thì đánh giá cuối cùng là một đánh giá sai.

Để ý đến giả thiết $abc = 1$ ta nghĩ đến phép đặt ẩn phụ, vấn đề đặt ra là ta chọn cách đặt ẩn phụ nào? Trước hết ta thấy bất đẳng thức có tính đối xứng do đó để không làm mất tính đối xứng của nó ta sẽ

không đặt ẩn phụ kiểu $\frac{x}{y}; \frac{y}{z}; \frac{z}{x}$ hoặc $\frac{y}{x}; \frac{z}{y}; \frac{x}{z}$. Đầu tiên ta sử dụng phép đổi biến

$a = \frac{1}{x}; b = \frac{1}{y}; c = \frac{1}{z}$ khi bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{x^2}{x^2 + x + 1} + \frac{y^2}{y^2 + y + 1} + \frac{z^2}{z^2 + z + 1} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{x^2}{x^2 + x + 1} + \frac{y^2}{y^2 + y + 1} + \frac{z^2}{z^2 + z + 1} \geq \frac{(x + y + z)^2}{x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z + 3}$$

Ta cần chứng minh được $(x + y + z)^2 \geq x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z + 3$

Tuy nhiên đánh giá này lại sai. Do đó cách đổi biến này không khả thi

Như vậy ta tính đến cách đổi biến $a = \frac{x^2}{yz}; b = \frac{y^2}{zx}; c = \frac{z^2}{xy}$ và $a = \frac{yz}{x^2}; b = \frac{zx}{y^2}; c = \frac{xy}{z^2}$. Trong hai

cách đổi biến trên, suy nghĩ một chút ta sẽ loại cách đặt thứ nhất vì bất đẳng thức chỉ chứa biến ở mẫu nên khi đổi biến và quy đồng mỗi phân thức ta sẽ thu được một phân thức thức mà trên tử có chứa các đại lượng $y^2z^2; z^2x^2; x^2y^2$ còn dưới mẫu lại chứa các đại lượng $x^4; y^4; z^4$ trộn hơn, nên muốn đánh giá

các mẫu theo chiều tăng lên là rất khó. Do đó ta chỉ còn cách đổi biến $a = \frac{yz}{x^2}; b = \frac{zx}{y^2}; c = \frac{xy}{z^2}$, hy vọng

sẽ chứng minh được bài toán.

Khi này bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{x^4}{x^4 + x^2yz + y^2z^2} + \frac{y^4}{y^4 + y^2zx + z^2x^2} + \frac{z^4}{z^4 + z^2xy + x^2y^2} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} \frac{x^4}{x^4 + x^2yz + y^2z^2} + \frac{y^4}{y^4 + y^2zx + z^2x^2} + \frac{z^4}{z^4 + z^2xy + x^2y^2} \\ \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x + y + z) + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2} \end{aligned}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 \geq x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x + y + z) + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$$

Biến đổi tong đương và thu gọn ta được

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq xyz(x + y + z)$$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét: Nếu chấp nhận biến bất đẳng thức trên từ dạng đối xứng về dạng hoán vị thì với cách đổi biến

$a = \frac{y}{x}; b = \frac{z}{y}; c = \frac{x}{z}$, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{a^2}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^2}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^2}{c^2 + ca + a^2} \geq 1$$

Khi đó bất đẳng thức tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{a^2 + ab + b^2} - \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca} \\ &= \frac{a^2(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca - a^2 - ab - b^2)}{(a^2 + ab + b^2)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)} \\ &= \frac{a^2c(a + b + c)}{(a^2 + ab + b^2)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)} \end{aligned}$$

Áp dụng tương tự ta quy bài toán về chứng minh

$$\frac{a^2c}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^2c}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^2c}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{ab + bc + ca}{a + b + c}$$

Áp dụng dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} & \frac{a^2c}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^2a}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^2b}{c^2 + ca + a^2} \\ & \geq \frac{(ab + bc + ca)^2}{c(a^2 + bc + b^2) + a(b^2 + bc + a^2) + b(c^2 + ca + a^2)} = \frac{ab + bc + ca}{a + b + c} \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 5.14: Cho các số thực $a; b; c \neq 1$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{(1-a)^2} + \frac{b^2}{(1-b)^2} + \frac{c^2}{(1-c)^2} \geq 1$$

Phân tích: Chú ý đến giả thiết $abc = 1$ và tính đối xứng của bất đẳng thức ta nghĩ đến phép đổi biến.

Ngoài ra ta cũng thấy các phân thức chứa biến trên tử nên ta có thể chọn cách đổi biến

$$a = \frac{x^2}{yz}; b = \frac{y^2}{zx}; c = \frac{z^2}{xy}$$

Lời giải

Đặt $a = \frac{x^2}{yz}; b = \frac{y^2}{zx}; c = \frac{z^2}{xy}$ với $x; y; z > 0$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{x^4}{(x^2 - yz)^2} + \frac{y^4}{(y^2 - zx)^2} + \frac{z^4}{(z^2 - xy)^2} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{x^4}{(x^2 - yz)^2} + \frac{y^4}{(y^2 - zx)^2} + \frac{z^4}{(z^2 - xy)^2} \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{(x^2 - yz)^2 + (y^2 - zx)^2 + (z^2 - xy)^2}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{(x^2 - yz)^2 + (y^2 - zx)^2 + (z^2 - xy)^2} \geq 1$$

Hay tương đương với

$$\begin{aligned} & (x^2 + y^2 + z^2)^2 - \left[(x^2 - yz)^2 + (y^2 - zx)^2 + (z^2 - xy)^2 \right] \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (xy + yz + zx)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Đánh giá cuối cùng luôn là một đánh giá đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 5.15: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \frac{1}{(c+1)(c+2)} \geq \frac{1}{2}$$

Phân tích: Chú ý đến giả thiết $abc = 1$ và tính đối xứng của bất đẳng thức ta có thể đổi biến

$$a = \frac{yz}{x^2}; b = \frac{zx}{y^2}; c = \frac{xy}{z^2}.$$

Lời giải

Đặt $a = \frac{yz}{x^2}; b = \frac{zx}{y^2}; c = \frac{xy}{z^2}$ với $x; y; z > 0$, khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{x^4}{(x^2 + yz)(2x^2 + yz)} + \frac{y^4}{(y^2 + zx)(2y^2 + zx)} + \frac{z^4}{(z^2 + xy)(2z^2 + xy)} \geq \frac{1}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} & \frac{x^4}{(x^2 + yz)(2x^2 + yz)} + \frac{y^4}{(y^2 + zx)(2y^2 + zx)} + \frac{z^4}{(z^2 + xy)(2z^2 + xy)} \\ & \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{(x^2 + yz)(2x^2 + yz) + (y^2 + zx)(2y^2 + zx) + (z^2 + xy)(2z^2 + xy)} \end{aligned}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn nếu ta chỉ ra được

$$\frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{(x^2 + yz)(2x^2 + yz) + (y^2 + zx)(2y^2 + zx) + (z^2 + xy)(2z^2 + xy)} \geq \frac{1}{2}$$

Hay ta cần chứng minh

$$2(x^2 + y^2 + z^2)^2 \geq (x^2 + yz)(2x^2 + yz) + (y^2 + zx)(2y^2 + zx) + (z^2 + xy)(2z^2 + xy)$$

Khai triển và thu gọn ta được $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq xyz(x + y + z)$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng. Bất đẳng thức được chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 5.16: Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $abcd = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(c+1)^2} + \frac{1}{(d+1)^2} \geq 1$$

Lời giải

Cách 1: Đặt $a = \frac{x}{z}$; $b = \frac{y}{z}$; $c = \frac{x}{t}$; $d = \frac{t}{x}$ với $x, y, z, t > 0$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{x^2}{(x+y)^2} + \frac{y^2}{(y+z)^2} + \frac{z^2}{(z+t)^2} + \frac{t^2}{(t+x)^2} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức và bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{(x+y)^2} + \frac{y^2}{(y+z)^2} + \frac{z^2}{(z+t)^2} + \frac{t^2}{(t+x)^2} \\ & \geq \frac{[x(t+x) + y(x+y) + z(y+z) + t(z+t)]^2}{(x+y)^2(x+t)^2 + (y+z)^2(x+y)^2 + (z+t)^2(y+z)^2 + (t+x)^2(z+t)^2} \\ & = \frac{[x(t+x) + y(x+y) + z(y+z) + t(z+t)]^2}{[(x+y)^2 + (z+t)^2][(x+t)^2 + (y+z)^2]} \\ & = \frac{[(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+t)^2 + (x+t)^2]^2}{4[(x+y)^2 + (z+t)^2][(x+t)^2 + (y+z)^2]} \geq 1 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 1$.

Cách 2: Đặt $a = \frac{yz}{x^2}$; $b = \frac{zt}{y^2}$; $c = \frac{tx}{z^2}$; $d = \frac{xy}{t^2}$ với $x, y, z, t > 0$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{x^4}{(x^2 + yz)^2} + \frac{y^4}{(y^2 + zt)^2} + \frac{z^4}{(z^2 + tx)^2} + \frac{t^4}{(t^2 + xy)^2} \geq 1$$

Áp dụng liên tục bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} \frac{x^4}{(x^2 + yz)^2} + \frac{z^4}{(z^2 + tx)^2} & \geq \frac{(x^2 + z^2)^2}{(x^2 + yz)^2 + (z^2 + tx)^2} \\ & \geq \frac{(x^2 + z^2)^2}{(x^2 + y^2)(x^2 + z^2) + (z^2 + x^2)(z^2 + t^2)} = \frac{x^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2 + t^2} \end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{y^4}{(y^2 + zt)^2} + \frac{t^4}{(t^2 + xy)^2} \geq \frac{y^2 + t^2}{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{x^4}{(x^2 + yz)^2} + \frac{y^4}{(y^2 + zt)^2} + \frac{z^4}{(z^2 + tx)^2} + \frac{t^4}{(t^2 + xy)^2} \geq 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.