Chương 4

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

§1. BẤT ĐẲNG THỨC

I. Tóm tắt lí thuyết

1. Các khái niệm

Khái niệm (Bất đẳng thức). Cho hai số thực a,b. Các mệnh đề "$a > b$", "$a < b$","$a \geq b$", "$a \leq b$" được gọi là các bất đẳng thức.

Khái niệm (Bất đẳng thức cùng chiều, trái chiều). Cho bốn số thực a,b,c,d.

Các bất đẳng thức "$a > b$", "$c > d$" được gọi là bất đẳng thức cùng chiều.

Các bất đẳng thức "$a > b$", "$c < d$" được gọi là bất đẳng thức trái chiều.

Khái niệm (Bất đẳng thức hệ quả). Nếu mệnh đề "$a > b \Rightarrow c > d$"đúng thì ta nói bất đẳng thức "$c > d$" là bất đẳng thức hệ quả của bất đẳng thức "$a > b$" và viết $a > b \Rightarrow c > d$.

Khái niệm (Bất đẳng thức tương đương). Nếu bất đẳng thức "$a > b$" là hệ quả của bất đẳng thức "$c > d$" và ngược lại thì ta nói hai bất đẳng thức tương đương với nhau và viết $a > b \Leftrightarrow c > d$.

2. Tính chất

Tính chất		Tên gọi
Điều kiện	**Nội dung**	
	$a < b \Leftrightarrow a+c < b+c$	Cộng hai vế của bất đẳng thức với một số.
$c > 0$	$a < b \Leftrightarrow ac < bc$	Nhân hai vế của bất đẳng thức với một số.
$c < 0$	$a < b \Leftrightarrow ac > bc$	
	$a < b$ và $c < d \Rightarrow a+c < b+d$	Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều.
$a > 0, c > 0$	$a < b$ và $c < d \Rightarrow ac < bd$	Nhân hai bất đẳng thức cùng chiều.
$n \in \mathbb{N}^*$	$a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$	Nâng hai vế của bất đẳng thức lên một lũy thừa.
$n \in \mathbb{N}^*$ và $a > 0$	$a < b \Leftrightarrow a^{2n} < b^{2n}$	
$a > 0$	$a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$ $a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$	Khai căn hai vế của một bất đẳng thức.

II. Các dạng toán

Dạng 1. Sử dụng phép biến đổi tương đương

Để chứng minh một bất đẳng thức ta có thể sử dụng các cách sau:

+ Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với một bất đẳng thức đã biết.

+ Sử dụng một bất đẳng thức đã biết, biến đổi để dẫn đến bất đẳng thức cần chứng minh.

Một số bất đẳng thức thông dụng:

+ $a^2 \geq 0$;

+ $a^2 + b^2 \geq 0$;

+ $a \cdot b \geq 0$, với $a, b \geq 0$;

+ $a^2 + b^2 \geq \pm 2ab$.

Ví dụ 1. Chứng minh $\sqrt{1-x} + \sqrt{x+2} \leq \sqrt{6}$, $\forall x \in [-2;1]$.

Lời giải. Với $x \in [-2;1]$, ta có

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{x+2} \leq \sqrt{6} \Leftrightarrow 3 + 2\sqrt{(1-x)(x+2)} \leq 6 \Leftrightarrow 4(1-x)(x+2) \leq 9 \Leftrightarrow (2x+1)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng. Vậy, bài toán được chứng minh.

Ví dụ 2. Chứng minh $a^2 + b^2 + 2 \geq 2(a+b)$, với mọi số thực a, b.

Lời giải. Với mọi số thực a, b ta luôn có

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2 \geq 2(a+b).$$

Bài toán đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

Ví dụ 3. Cho các số thực x, y, z. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$;

b) $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$.

Lời giải.

a) Bất đẳng thức tương đương với

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx \Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$. Phép chứng minh hoàn tất.

b) Ta có $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2 - 2xy - 2x - 2y \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0$. Đẳng thức có được khi và chỉ khi $x = y = 1$. Bài toán đã được chứng minh.

Ví dụ 4. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $a^3+b^3 \geq ab(a+b)$, với $a,b \geq 0$;

b) $a^4+b^4 \geq a^3b+ab^3$, với $a,b \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

a) Ta có $a^3+b^3 \geq ab(a+b) \Leftrightarrow (a+b)(a^2-ab+b^2) \geq ab(a+b) \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 \geq 0$.
Bất đẳng thức này luôn đúng với mọi a,b không âm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

b) Biến đổi bất đẳng thức đã cho tương đương với $(a-b)^2(a^2-ab+b^2) \geq 0$ (hiển nhiên đúng).
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Ví dụ 5. Cho a,b là các số thực thỏa mãn $ab \geq 1$. Chứng minh $\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2} \geq \dfrac{2}{1+ab}$.

Lời giải. Ta có

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab} \Leftrightarrow \frac{1}{1+a^2}-\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+b^2}-\frac{1}{1+ab} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{ab-a^2}{(1+a^2)(1+ab)}+\frac{ab-b^2}{(1+ab)(1+b^2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a(b-a)(1+b^2)-b(b-a)(1+a^2)}{(1+a^2)(1+b^2)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(b-a)(a+ab^2-b-a^2b)}{(1+a^2)(1+b^2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(b-a)^2(ab-1)}{(1+a^2)(1+b^2)} \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng với mọi a,b thỏa mãn $ab \geq 1$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ab=1$ hoặc $a=b$.

Ví dụ 6. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{y}$. Chứng minh:

$$\frac{x+y}{2x-y}+\frac{y+z}{2z-y} \geq 4.$$

Lời giải. Từ giả thiết $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{y} \Rightarrow y=\dfrac{2xz}{x+z}$. Do đó

$$\frac{x+y}{2x-y}+\frac{y+z}{2z-y} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{\frac{x(x+3z)}{x+z}}{\frac{2x^2}{x+z}}+\frac{\frac{z(z+3x)}{x+z}}{\frac{2z^2}{x+z}} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{x+3z}{x}+\frac{z+3x}{z} \geq 8 \Leftrightarrow (x-z)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng).}$$

Vậy, bài toán được chứng minh. Đẳng thức có được khi và chỉ khi $x=y=z$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh $a^4+b^4+c^4 \geq a^3+b^3+c^3$.
Lời giải. HD: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$3(a^4+b^4+c^4) \geq (a+b+c)(a^3+b^3+c^3)$$

Thực hiện biến đổi tương đương quy về bất đẳng thức

$$(a-b)^2(a^2+ab+b^2)+(b-c)^2(b^2+bc+c^2)+(a-c)^2(a^2+ac+c^2) \geq 0.$$

Bài 2. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x+y+1}+\frac{1}{y+z+1}+\frac{1}{z+x+1}\le 1.$$

Lời giải. Đặt $x=a^3, y=b^3, z=c^3$, với a,b,c dương và $abc=1$. Bất đẳng thức đã cho trở thành

$$\frac{1}{a^3+b^3+1}+\frac{1}{b^3+c^3+1}+\frac{1}{c^3+a^3+1}\le 1.$$

Ta có $(a-b)^2(a+b)\ge 0 \Leftrightarrow a^3+b^3\ge ab(a+b)$.
Tương tự, ta cũng có $b^3+c^3\ge bc(b+c), a^3+c^3\ge ac(a+c)$. Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^3+b^3+1}+\frac{1}{b^3+c^3+1}+\frac{1}{c^3+a^3+1}&\le\frac{1}{ab(a+b)+1}+\frac{1}{bc(b+c)+1}+\frac{1}{ac(a+c)+1}\\&=\frac{1}{ab(a+b)+abc}+\frac{1}{bc(b+c)+abc}+\frac{1}{ac(a+c)+abc}\\&=\frac{1}{abc}=1.\end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 3. Cho a,b,c,d,e là các số thực tùy ý. Chứng minh

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\ge a(b+c+d+e).$$

Lời giải. HD: Biến đổi bất đẳng thức thành $\left(\frac{a}{2}-b\right)^2+\left(\frac{a}{2}-c\right)^2+\left(\frac{a}{2}-d\right)^2+\left(\frac{a}{2}-e\right)^2\ge 0.$

Bài 4. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a)=2$. Chứng minh rằng

$$(a^2+bc)(b^2+ac)(c^2+ab)\le 1.$$

Lời giải. Không giảm tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$. Khi đó, ta có

$$4(a^2+bc)(b^2+ac)(c^2+ab)\le 4(a^2+ac)(b^2+ac)(bc+ab)=4ab(b^2+ac)(a+c)^2.$$

Mặt khác, ta có $(b^2+ca-ab)^2\ge 0\Leftrightarrow 4ab(b^2+ca)\le(ab+b^2+ca)^2$. Do đó

$$4(a^2+bc)(b^2+ac)(c^2+ab)\le(ab+b^2+ca)^2(a+c)^2\le(a+b)^2(b+c)^2(a+c)^2=4.$$

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1, c=0$ (với giả sử $a\ge b\ge c$).

Bài 5. Cho $a,b\in\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$. Chứng minh $\left|\frac{\tan a-\tan b}{1-\tan a\tan b}\right|<1.$

Lời giải. Với $a,b\in\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$ thì $\tan^2 a,\tan^2 b\in(0;1)$. Do đó

$$\begin{aligned}\left|\frac{\tan a-\tan b}{1-\tan a\tan b}\right|<1&\Leftrightarrow|\tan a-\tan b|<|1-\tan a\tan b|\\&\Leftrightarrow\tan^2 a+\tan^2 b-2\tan a\tan b<1-2\tan a\tan b+\tan^2 a\tan^2 b\\&\Leftrightarrow(1-\tan^2 a)(\tan^2 b-1)<0\text{ (luôn đúng với giả thiết đã cho).}\end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh.

Dạng 2. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si

Khi gặp các bất đẳng thức, trong đó có chứa *tổng*, *tích của các số không âm*, ta có thể áp dụng những bất đẳng thức sau đây để chứng minh:

a) Bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm.
Cho $a \geq 0$ và $b \geq 0$, ta có: $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

Các dạng khác của bất đẳng thức trên:

+ $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $(a \geq 0,\, b \geq 0)$;
+ $ab \leq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$, $(\forall a,\, b)$;
+ $ab \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$, $(\forall a,\, b)$;
+ $a^2+b^2 \geq 2ab$, $(\forall a,\, b)$.

b) Bất đẳng thức Cô-si cho ba số không âm.
Cho $a \geq 0$, $b \geq 0$ và $c \geq 0$, ta có: $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Các dạng khác của bất đẳng thức trên:

+ $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$, $(\forall a,b,c \geq 0)$;
+ $abc \leq \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3$, $(\forall a,b,c \geq 0)$;
+ $abc \leq \dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}$, $(\forall a,b,c \geq 0)$;
+ $a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$, $(\forall a,b,c \geq 0)$.

c) Tổng quát, nếu $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ thì:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n \geq 0$.

Chú ý:

a) $a^2+b^2 \geq 2ab$ với mọi a, b.

b) Dựa vào bất đẳng thức cần chứng minh, giả thuyết về số dương, số không âm,... và chiều của bất đẳng thức, dấu bằng xảy ra... để định hướng biến đổi thích hợp.

c) Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh về dạng có thể áp dụng được bất đẳng thức Cô-si với các kĩ thuật tách số hoặc ghép số, ghép cặp hai, ghép cặp ba, tăng hoặc giảm số hạng, tăng hoặc giảm bậc của lũy thừa,...

Chẳng hạn với $a > 0$, $b > 0$ thì có nhiều hướng đánh giá và khai thác:

- $a+b \geq 2\sqrt{ab}; a+b = a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{b}{2} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{ab^2}{4}}$;
- $a+2b = a+b+b$; $a+1 = \dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2}+1 = a+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}$;

- $1+a+b \geq 3\sqrt[3]{ab}$; $2+a = 1+1+a \geq 3\sqrt[3]{a}$;
- $a^2+\frac{1}{a} = a^2+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$; $ab = a\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}$; $ab^2 = a\cdot b\cdot b$;...

d) Cô-si ngược dấu, với a,b,c dương thì:

$$\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{2\sqrt{ab}}; \frac{1}{a+1} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}; \frac{1}{a+b+c} \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{abc}}, \ldots$$

Ví dụ 1. Cho a,b là hai số dương. Chứng minh:

a) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4$;

b) $a^2+b^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq 2(\sqrt{a}+\sqrt{b})$.

Lời giải.

a) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai cặp số dương a,b và $\frac{1}{a},\frac{1}{b}$ ta được:

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} > 0;$$
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}} > 0.$$

Nhân theo vế hai bất đẳng thức trên, ta được $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 2\sqrt{ab}\cdot\frac{2}{\sqrt{ab}} = 4$.

b) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai cặp số dương $a^2,\frac{1}{a}$ và $b^2,\frac{1}{b}$ ta được:

$$a^2+\frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a^2\cdot\frac{1}{a}} = 2\sqrt{a};$$
$$b^2+\frac{1}{b} \geq 2\sqrt{b^2\cdot\frac{1}{b}} = 2\sqrt{b}.$$

Cộng theo vế của hai bất đẳng thức trên, ta được $a^2+b^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq 2(\sqrt{a}+\sqrt{b})$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng nếu a,b cùng dấu thì $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$ và a,b trái dấu thì $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \leq -2$.

Lời giải. Nếu a,b là hai số cùng dấu thì $\frac{a}{b}$ và $\frac{b}{a}$ là hai số dương nên áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta được:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}} = 2.$$

Nếu a,b là hai số trái dấu thì tương tự $\left(-\frac{a}{b}\right)+\left(-\frac{b}{a}\right) \geq 2$ và vì vậy $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \leq -2$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu $a^2+b^2=1$ thì $|a+b| \leq \sqrt{2}$.

Lời giải. Ta có, với mọi a,b thì $a^2+b^2 \leq 2\sqrt{a^2b^2} = 2|ab| \geq 2ab$ hay $2ab \leq a^2+b^2$ nên

$$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab \leq a^2+b^2+a^2+b^2 = 2(a^2+b^2) = 2.$$

Vậy, nếu $a^2+b^2=1$ thì $|a+b| \leq \sqrt{2}$.

Ví dụ 4. Chứng minh với ba số $a,b,c \geq 0$ thì $a+b+c \geq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$. Dấu bằng của đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm, ta được:

$$a+b \geq 2\sqrt{ab};$$
$$b+c \geq 2\sqrt{bc};$$
$$c+a \geq 2\sqrt{ca}.$$

Cộng từng vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$$2(a+b+c) \geq 2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}) \Rightarrow a+b+c \geq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}.$$

Dấu bất đẳng thức xảy ra khi $a=b=c \geq 0$.

Ví dụ 5. Cho a,b dương. Chứng minh bất đẳng thức:

$$(a+b)(1+ab) \geq 4ab.$$

Dấu bằng đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương:

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} > 0;$$
$$1+ab \geq 2\sqrt{ab} > 0$$

Khi đó, $(a+b)(1+ab) \leq 4(\sqrt{ab})^2 = 4ab$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b$ và $1=ab \Leftrightarrow a=b=1$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho a,b,c dương. Chứng minh bất đẳng thức

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Dấu bằng đẳng thức xảy ra khi nào?
Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương:

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$
$$b+c \geq 2\sqrt{bc}$$
$$c+a \geq 2\sqrt{ca}$$

Vậy nên

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\cdot 2\cdot 2\cdot \sqrt{ab}\cdot\sqrt{bc}\cdot\sqrt{ca} = 8abc.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c>0$.

Bài 2. Cho a,b,c dương. Chứng minh bất đẳng thức

$$(a+1)(b+1)(a+c)(b+c) \geq 16abc.$$

Dấu bằng đẳng thức xảy ra khi nào?
Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương:

$$a+1 \geq 2\sqrt{a}$$
$$b+1 \geq 2\sqrt{b}$$
$$a+c \geq 2\sqrt{ac}$$
$$b+c \geq 2\sqrt{bc}$$

Vậy nên

$$(a+1)(b+1)(a+c)(b+c) \geq 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{ac}\sqrt{bc} = 16abc.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 3. Chứng minh rằng với mọi a thì:

$$\frac{a^2+6}{\sqrt{a^2+2}} \geq 4.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Ta có:

$$\frac{a^2+6}{\sqrt{a^2+2}} = \frac{(a^2+2)+4}{\sqrt{a^2+2}} = \sqrt{a^2+2} + \frac{4}{\sqrt{a^2+2}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương:

$$\sqrt{a^2+2} + \frac{4}{\sqrt{a^2+2}} \geq 2\sqrt{4} = 4.$$

Do đó, $\dfrac{a^2+6}{\sqrt{a^2+2}} \geq 4$. Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\sqrt{a^2+2} = \frac{4}{\sqrt{a^2+2}} \Leftrightarrow a^2+2=4 \Leftrightarrow a^2=2 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2}.$$

Bài 4. Chứng minh với mọi a,b,c khác 0 thì có bất đẳng thức:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \geq \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{b^2}{c^2}} = 2\sqrt{\frac{a^2}{c^2}} = 2\left|\frac{a}{c}\right| \geq 2\frac{a}{c}$$

Tương tự, ta cũng có:

$$\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \geq 2\frac{b}{a} \text{ và } \frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2} \geq 2\frac{c}{b}.$$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức, ta được:

$$2\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right) \geq 2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right) \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \geq \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}.$$

Bài 5. Cho a,b,c dương. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c} \geq 6.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta có

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c} = \left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right) \geq 2+2+2=6.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 6. Cho 4 số a,b,c,d dương. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4 \geq abcd.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta có

$$\begin{aligned}
&a+b \geq 2\sqrt{ab}, c+d \geq 2\sqrt{cd}\\
&\Rightarrow a+b+c+d \geq 2(\sqrt{ab}+\sqrt{cd})\\
&\Rightarrow \left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2 \geq (\sqrt{ab}+\sqrt{cd})^2 = ab+cd+2\sqrt{abcd} \geq 4\sqrt{abcd}\\
&\Rightarrow \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2 \geq \sqrt{abcd}\\
&\Rightarrow \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4 \geq abcd.
\end{aligned}$$

Bài 7. Cho 4 số a,b,c,d dương. Chứng minh:

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \geq 16.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 4 số dương, ta có:

$$(a+b+c+d)^2 \geq 16abcd > 0;$$
$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)^2 \geq \frac{16}{abcd} > 0.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
&(a+b+c+d)^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)^2 \geq 16abcd\cdot\frac{16}{abcd} = 16^2\\
&\Rightarrow (a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \geq 16.
\end{aligned}$$

Bài 8. Cho hai số $a \geq 1$ và $b \geq 1$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1} \leq ab.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số không âm, ta có:

$$a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1} = a\sqrt{(b-1)\cdot 1}+b\sqrt{(a-1)\cdot 1} \leq a\left(\frac{b-1+1}{2}\right)+b\left(\frac{a-1+1}{2}\right) = ab.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a-1=b-1=1 \Leftrightarrow a=b=2$.

Bài 9. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $B = b^2+\dfrac{1}{b}$, với $b>0$.

Lời giải. Với $b>0$, ta có:

$$B = b^2+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2b} \geq 3\sqrt[3]{b^2\cdot\frac{1}{2b}\cdot\frac{1}{2b}} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $b^2=\dfrac{1}{2b} \Leftrightarrow b=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của B là $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

Bài 10. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và p là nửa chu vi của tam giác đó. Chứng minh

a) $(p-a)(p-b) \leq \frac{c^2}{4}$;

b) $(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{abc}{8}$.

Lời giải.

a) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số x, y: $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$, ta có:

$$(p-a)(p-b) \leq \left(\frac{(p-a)+(p-b)}{2}\right)^2 = \left(\frac{2p-a-b}{2}\right)^2 = \frac{c^2}{4}.$$

b) Áp dụng kết quả câu a), ta có:

$$0 < (p-a)(p-b) \leq \frac{c^2}{4};$$
$$0 < (p-b)(p-c) \leq \frac{a^2}{4};$$
$$0 < (p-c)(p-a) \leq \frac{b^2}{4}.$$

Nhân vế theo vế các bất đẳng thức trên, ta được:

$$(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2 \leq \frac{a^2b^2c^2}{64} \Rightarrow (p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{abc}{8}.$$

Bài 11. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab} \geq a+b+c$. Dấu bằng đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương ta có

$$\frac{a^4+b^4}{2} \geq a^2b^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b > 0$.
Do đó,

$$a^4+b^4+c^4 \geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$$

và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta có

$$\frac{a^2b^2+b^2c^2}{2} \geq ab^2c.$$

Do đó,

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq abc(a+b+c).$$

Vì vậy

$$a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c).$$

Chia hai vế đẳng thức này cho abc ta được điều cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c > 0$.

Bài 12. Cho a,b,c. Chứng minh bất đẳng thức $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}}+\sqrt{\dfrac{b}{c+a}}+\sqrt{\dfrac{c}{a+b}}\geq 2$.

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương ở mẫu, ta có

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}=\frac{a}{\sqrt{(b+c)\cdot a}}\geq\frac{a}{\dfrac{a+b+c}{2}}=\frac{2a}{b+c+a}.$$

$$\sqrt{\frac{b}{a+c}}=\frac{b}{\sqrt{(a+c)\cdot b}}\geq\frac{b}{\dfrac{a+b+c}{2}}=\frac{2b}{b+c+a}.$$

$$\sqrt{\frac{c}{a+b}}=\frac{c}{\sqrt{(b+a)\cdot c}}\geq\frac{c}{\dfrac{a+b+c}{2}}=\frac{2c}{b+c+a}.$$

Cộng lại 3 bất đẳng thức vế theo vế, ta có

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\geq\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2.$$

Bài 13. Cho x,y,z dương thỏa mãn: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=4$. Chứng minh

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\leq 1.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương a,b:

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{\frac{1}{ab}}=4.$$

Nên $\dfrac{1}{a+b}\leq\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$, do đó:

$$\frac{1}{2x+y+z}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{y+z}\right)\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\right).$$

Tương tự ta có:

$$\frac{1}{x+2y+z}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2y}+\frac{1}{x+z}\right)\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2y}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)\right).$$

$$\frac{1}{x+y+2z}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2z}+\frac{1}{x+y}\right)\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2z}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y}\right)\right).$$

Cộng lại các bất đẳng thức trên vế theo vế, ta có:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\\&\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2y}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2z}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y}\right)\right)\\&\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1.\end{aligned}$$

Dạng 3. Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki

Định lí 1. *Cho a,b,c,d là các số thực tùy ý, ta có bất đẳng thức sau*

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geq (ac+bd)^2 \text{ (Bunhiacopxki)}$$

Dấu " = " xảy ra khi $ad = bc \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Hệ quả 1. Bất đẳng thức Bunhiacopxki mở rộng.
Cho $2n$ số $a_1;a_2;\ldots;a_n$ và $b_1;b_2;\ldots;b_n$ ta có bất đẳng thức sau

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2) \geq (a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2$$

Dấu " = " xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$.

Hệ quả 2. Bất đẳng thức cộng mẫu.
Cho n số $a_1;a_2;\ldots;a_n$ và n số dương $x_1;x_2;\ldots;x_n$ ta có bất đẳng thức sau.

$$\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\ldots+\frac{a_n}{x_n} \geq \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{x_1+x_2+\ldots+x_n}$$

Dấu " = " xảy ra khi $\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \ldots = \frac{x_n}{a_n}$.

Ví dụ 1. Cho $x^2+y^2 = 5$ tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $A = x+2y$.

Lời giải. Sử dụng Bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$2 = (x+2y)^2 \leq (x^2+y^2)(1^2+2^2) = 25$$
$$\Rightarrow -5 \leq A \leq 5.$$

Vậy $\max y = 5$ xảy ra khi $x = 1; y = 2$.
Vậy $\min y = -5$ xảy ra khi $x = -1; y = -2$.

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \sqrt{1-x}+2\sqrt{x+1}$.

Lời giải. ĐK: $-1 \leq x \leq 1$.
Sử dụng Bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có
$A^2 = \left(\sqrt{1-x}+2\sqrt{x+1}\right)^2 \leq (1^2+2^2)\left((\sqrt{1-x})^2+(\sqrt{x+1})^2\right) = 10$
$\Rightarrow A \leq \sqrt{10}$.
Vậy $\max y = \sqrt{10}$ xay ra khi $\sqrt{1-x} = \frac{\sqrt{x+1}}{2} \Leftrightarrow 1-x = \frac{1+x}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Biết x,y là 2 số thực dương thỏa mãn $x+2\sqrt{2}y = 5$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^4+y^4$.
Lời giải. Sử dụng Bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$5A = (x^4+y^4)(1^2+2^2) \geq (x^2+2y^2)^2$$
$$(x^2+2y^2)(1+4) \geq (x+2\sqrt{2}y)^2 = 25$$
$$\Rightarrow A \geq 5$$

Vậy $\min y = 5$. Dấu " = " xảy ra khi $x = \frac{y}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = 1; y = \sqrt{2}$.

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $A=\sqrt{1-2x}+3\sqrt{1+x}$

Lời giải. ĐK: $-1\le x\le \dfrac{1}{2}$.

Ta có

$A=\sqrt{1-2x}+3\sqrt{1+x}=\sqrt{1-2x}+\dfrac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{2+2x}$

$\Rightarrow A^2\le\left(1+\dfrac{9}{2}\right)\left((\sqrt{1-2x})^2+(\sqrt{2+2x})^2\right)=\dfrac{33}{2}$

$\Rightarrow A\le\dfrac{\sqrt{66}}{2}$. Vậy $\max A=\dfrac{\sqrt{66}}{2}$. Dấu " = " xay ra khi $\sqrt{2+2x}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{1-2x}\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{22}$.

Bài 3. Giải phương trình $\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}=x^2-10x+27$.

Lời giải. Ta có

$\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}\right)^2\le(1^1+1^1)(x-4+6-x)=4\Rightarrow\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}\le 2$

$x^2-10x+27=(x-5)^2+2\ge 2$.

Vậy phương trình $\Leftrightarrow x=4$.

Dạng 4. Sử dụng các bất đẳng thức hệ quả

Ta có thể sử dụng Bất đẳng thức Bunhiacopxki cho nhiều số, hoặc trong những bài toán có mẫu, ta có thể sử dụng Bất đẳng thức cộng mẫu.

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\sqrt{1-2x}+4\sqrt{1+x}$

Lời giải. ĐK: $-1\le x\le\dfrac{1}{2}$.

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau:

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\ge(ax+by+cz)^2;\forall a,b,c,x,y,z\in\mathbb{R}$.

Thật vậy bđt $\Leftrightarrow(ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2\ge 0$.

Dấu " = " xảy ra khi $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$.

Sử dụng bất đẳng thức trên ta có

$A=\sqrt{1-2x}+4\sqrt{1+x}$

$=\sqrt{1-2x}+2\sqrt{1+x}+2\sqrt{1+x}\le(1^2+2^2+2^2)\left((\sqrt{1-2x})^2+(\sqrt{1+x})^2+(\sqrt{1+x})^2\right)=27\Rightarrow A\le 3\sqrt{3}$

Vậy $\max y=3\sqrt{3}$ xảy ra khi $\dfrac{\sqrt{x+1}}{2}=\sqrt{1-2x}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$.

Ví dụ 2. Cho x,y,z là độ dài 3 cạnh của một tam giác thỏa mãn $x+y+z=3$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\dfrac{1}{x+y-z}+\dfrac{4}{y+z-x}+\dfrac{9}{z+x-y}$.

Lời giải. Ta luôn có bất đẳng thức sau:

$\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}+\dfrac{c^2}{z}\ge\dfrac{(a+b+c)^2}{x+y+z};\forall x,y,z$ là các số thực dương.

Ta có $x+y-z;y+z-x;z+x-y$ là các số dương vì x,y,z là độ dài ba cạnh của tam giác nên ta có

$A=\dfrac{1}{x+y-z}+\dfrac{4}{y+z-x}+\dfrac{9}{z+x-y}\ge\dfrac{(1+2+3)^2}{x+y-z+y+z-x+z+x-y}=\dfrac{36}{3}=12.$

Vậy $\min y=12$. Dấu " = " xảy ra khi $\dfrac{x+y-z}{1}=\dfrac{y+z-x}{2}=\dfrac{z+x-y}{3}\Leftrightarrow x=1;y=\dfrac{3}{4};z=\dfrac{5}{4}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\sqrt{1-x}+\sqrt{2+3x}$

Lời giải. ĐK: $\frac{-3}{x} \leq x \leq 1$.
Ta có
$3A = 3\sqrt{1-x} + 3\sqrt{2+3x} = \sqrt{1-x} + \sqrt{1-x} + \sqrt{1-x} + 3\sqrt{2+3x}$
$\Rightarrow 9A^2 \leq (1+1+1+9)(1-x+1-x+1-x+2+3x) = 60$
$\Rightarrow A \leq \frac{\sqrt{60}}{3}$. Vậy $\max y = \frac{\sqrt{60}}{3}$. Dấu "$=$" xảy ra khi $x = \frac{7}{12}$.

Bài 2. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$A = \frac{1}{x^2+2yz} + \frac{1}{y^2+2zx} + \frac{4}{z^2+2zx}$.

Lời giải. Ta có
$A = \frac{1}{x^2+2yz} + \frac{1}{y^2+2zx} + \frac{4}{z^2+2zx} \geq \frac{(1+1+2)^2}{x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx} = \frac{16}{(x+y+z)^2} = \frac{16}{9}$.
Vậy $\min y = \frac{16}{9}$

Bài 3. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} + \sqrt{x^2+y^2+z^2} \geq \sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2+(c+z)^2}, \forall x, y, z, a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Ta có $\sqrt{a^2+b^2+c^2} + \sqrt{x^2+y^2+z^2} \geq \sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2+(c+z)^2}$
$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2+c^2} + \sqrt{x^2+y^2+z^2}^2 \geq \sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2+(c+z)^2}^2$
$\Leftrightarrow \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)} \geq ax+by+cz$.
Điều này luôn đúng vì ta có
$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$.
Dấu "$=$" xảy ra khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.

Tổng quát: Ta luôn có bất đẳng thức sau: (**Bất đẳng thức khoảng cách**)
$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2} + \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2} \geq \sqrt{(a_1+x_1)^2+(a_2+x_2)^2+\ldots+(a_n+x_n)^2}$.

Dạng 5. Chứng minh bất đẳng thức dựa vào tọa độ véc -tơ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng: $\sqrt{(a+c)^2+b^2} + \sqrt{(a-c)^2+b^2} \geq \sqrt{a^2+b^2}$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Đặt $\overrightarrow{u} = (a+c, b)$ và $\overrightarrow{v} = (a-c, b)$.
Ta có $|\overrightarrow{u}| = \sqrt{(a+c)^2+b^2}$, $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{(a-c)^2+b^2}$ và $|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}| = \sqrt{a^2+b^2}$.
Áp dụng $|\overrightarrow{u}| + |\overrightarrow{v}| \geq |\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|$, ta có bđt cần cm.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng: $\sqrt{a^2+4b^2+6a+9} + \sqrt{a^2+4b^2-2a-12b+10} \geq 5$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Ta có $VT = \sqrt{(a+3)^2+(2b)^2} + \sqrt{(a-1)^2+(2b-3)^2}$.
Đặt $\overrightarrow{u} = (a+3, 2b)$ và $\overrightarrow{v} = (a-1, 2b-3)$ thì $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = (4, 3)$
Ta có $|\overrightarrow{u}| = \sqrt{(a+3)^2+(2b)^2}$, $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{(a-1)^2+(2b-3)^2}$ và $|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$.
Áp dụng $|\overrightarrow{u}| + |\overrightarrow{v}| \geq |\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}|$, ta có bđt cần cm.

Ví dụ 3. Tìm GTNN của $P = \sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x^2+x+1}$.

Lời giải. Ta có $P = \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} + \sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$.
Đặt $\overrightarrow{u} = (x-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ và $\overrightarrow{v} = (x+\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ thì $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = (1, \sqrt{3})$
Ta có $|\overrightarrow{u}| = \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$, $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$ và $|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}| = 2$.

Áp dụng $|\overrightarrow{u}|+|\overrightarrow{v}| \geq |\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}|$, ta được $P \geq 2$.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{-v}$ cùng hướng $\leftrightarrow x-\frac{1}{2}=-x-\frac{1}{2} \leftrightarrow x=0$.
Vậy $minP=2$ tại $x=0$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Chứng minh rằng: $\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{a^2+ac+c^2} \geq \sqrt{c^2+cb+b^2}$ với $a,b,c \in \mathbb{R}$.
Lời giải. HD: $VT=\sqrt{(a+\frac{1}{2}b)^2+(\frac{3}{2}b)^2}+\sqrt{(-a-\frac{1}{2}c)^2+(\frac{3}{2}c)^2}$

Bài 2. Chứng minh rằng: $\sqrt{(a-b)^2+c^2}+\sqrt{(a+b)^2+c^2} \geq 2\sqrt{c^2+a^2}$ với $a,b,c \in \mathbb{R}$.
Lời giải. HD: $\sqrt{(a-b)^2+c^2}+\sqrt{(a+b)^2+(-c)^2} \geq 2\sqrt{c^2+a^2}$

Bài 3. Chứng minh rằng: $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$ với $a,b,c \in \mathbb{R}, a>c>0, b>c$.
Lời giải. HD: Sử dụng $|\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}| \leq |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|$.
trong đó $\overrightarrow{u}=(\sqrt{c},\sqrt{a-c})$, $\overrightarrow{v}=(\sqrt{b-c},\sqrt{c})$.

Bài 4. Tìm GTNN của $P=\sqrt{x^2-6x+13}+\sqrt{x^2+2x+2}$.
Lời giải. HD: $\overrightarrow{u}=(x-3,2)$, $\overrightarrow{v}=(-x-1,1)$.

Bài 5. Tìm GTNN của $P=\sqrt{x^2+10x+26}+\sqrt{x^2+4x+5}$.
Lời giải. HD: $\overrightarrow{u}=(x+5,1)\overrightarrow{v}=(-x-2,1)$

Dạng 6. Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối

Ví dụ 1. Chứng minh $\dfrac{|a-b|}{1+|a-b|} \leq \dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$.

Lời giải. Quy đồng, nhân chéo ta được bất đẳng thức tương đương
$|a-b|(1+|a|+|b|+|ab|) \leq (1+|a-b|)(|a|+|b|+2|ab|)$
$\Leftrightarrow |a-b| \leq |a|+|b|+|ab(a-b)|+2|ab|$ (đúng).
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=0$ hoặc $b=0$.

Ví dụ 2. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $|ax^2+bx+c| \leq 1, \forall |x| \leq 1$.
Chứng minh rằng $|a|+2|b|+3|c| \leq 7$.

Lời giải. Đặt $f(x)=ax^2+bx+c$. Khi đó:
$f(1)=a+b+c$, $f(-1)=a-b+c$, $f(0)=c$.
Do đó, $a=\dfrac{1}{2}(f(1)+f(-1)-2f(0)), b=\dfrac{1}{2}(f(1)-f(-1)), c=f(0)$.
Suy ra,

$$\begin{aligned}
|a|+2|b|+3|c| &= \frac{1}{2}|f(1)+f(-1)-2f(0)|+|f(1)-f(-1)|+3|f(0)| && (4.1)\\
&\leq \frac{3}{2}|f(1)|+\frac{3}{2}|f(-1)|+4|f(0)| && (4.2)\\
&\leq 7. && (4.3)
\end{aligned}$$

Ví dụ 3. Tìm GTNN của biểu thức $A=|x+2017|+|x-y-6|+|2x-y+44|$.

Lời giải. Ta có $A \geq |x+2017+x-y-6-2x+y-44|$ hay $A \geq 1967$.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x+2017 \geq 0 \\ x-y-6 \geq 0 \\ 2x-y+44 \geq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x+2017 \leq 0 \\ x-y-6 \leq 0 \\ 2x-y+44 \leq 0 \end{cases}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm GTNN của $A = |x+5| + |2x-7| + |3x+12|$.
Lời giải. HD: $A \geq |x+5+2x-7-3x-12|$ hay $A \geq 14$.

Bài 2. Tìm GTNN của $A = |x-1| + |y-2| + |z-3|$ với $|x| + |y| + |z| = 2017$
Lời giải. HD: $A = |x-1| + |y-2| + |z-3| \geq |x| - 1 + |y| - 2 + |z| - 3$ hay $A \geq 2011$

Bài 3. Cho các số thực thỏa mãn $|a+b+c| \leq 1$, $|a-b+c| \leq 1$, $|4a+2b+c| \leq 8$, $|4a-2b+c| \leq 8$.
Chứng minh rằng: $|a| + 3|b| + |c| \leq 7$.
Lời giải. HD: Chứng minh $|a+c| + |b| \leq 1$ (1), $|4a+c| + 2|b| \leq 8$ (2).
Cộng từng vế (1) và (2) được $|a| + |b| \leq 3$.
Nhân từng vế (1) với 4 rồi cộng từng vế với (2) được $2|b| + |c| \leq 4$.

Bài 4. Chứng minh $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \dfrac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$.
Lời giải. HD: Nhân chéo

Bài 5. Chứng minh rằng: Nếu $|a| < 1, |b-1| < 10, |a-c| < 10$ thì $|ab-c| < 20$.
Lời giải. HD: $|ab-c| \leq |ab-a| + |a-c| = |a||b-1| + |a-c|$.

§2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

I. Tóm tắt lí thuyết

Định nghĩa 1. *Bất phương trình bậc nhất một ẩn* là bất phương trình (bpt) sau khi thu gọn có dạng $ax+b>0, ax+b<0, ax+b\geq 0, ax+b\leq 0$ trong đó a,b là các số thực với $a\neq 0$ và x là *ẩn số*.

1. Giải và biện luận bất phương trình $ax+b>0$

- Với $a>0$, bpt $\Leftrightarrow x>-\dfrac{b}{a}$. Tập nghiệm của bpt là $S=\left(-\dfrac{b}{a};+\infty\right)$;
- Với $a<0$, bpt $\Leftrightarrow x<-\dfrac{b}{a}$. Tập nghiệm của bpt là $S=\left(-\infty;-\dfrac{b}{a}\right)$;
- $a=0$, bpt thành $0x+b>0$. Ta xét hai trường hợp:

  $b\leq 0$, tập nghiệm của bpt là $S=\emptyset$;

  $b>0$, tập nghiệm của bpt là $S=\mathbb{R}$.

2. Giải và biện luận bất phương trình $ax+b\leq 0$

- Với $a>0$, bpt $\Leftrightarrow x\leq -\dfrac{b}{a}$. Tập nghiệm của bpt là $S=\left(-\infty;-\dfrac{b}{a}\right]$;
- Với $a<0$, bpt $\Leftrightarrow x\geq -\dfrac{b}{a}$. Tập nghiệm của bpt là $S=\left[-\dfrac{b}{a};+\infty\right)$;
- $a=0$, bpt thành $0x+b\leq 0$. Ta xét hai trường hợp:

  $b\leq 0$, tập nghiệm của bpt là $S=\mathbb{R}$;

  $b>0$, tập nghiệm của bpt là $S=\emptyset$.

II. Các dạng toán

Dạng 1. Giải bất phương trình bậc nhất một ẩn

Xét bất phương trình bậc nhất một ẩn dạng: $ax+b>0$ (*).

- Nếu $a>0$ thì bất phương trình (*) có các nghiệm $x>-\dfrac{b}{a}$ hay bất phương trình có tập nghiệm là $S=\left(-\dfrac{b}{a};+\infty\right)$.
- Nếu $a<0$ thì bất phương trình (*) có các nghiệm $x<-\dfrac{b}{a}$ hay bất phương trình có tập nghiệm là $S=\left(-\infty;-\dfrac{b}{a}\right)$.

Các bất phương trình dạng $ax+b<0$, $ax+b\geq 0$, $ax+b\leq 0$ có cách giải tương tự.
Các bất phương trình khác ta biến đổi bất phương trình về dạng $ax+b>0$ (hoặc về dạng $ax+b<0$, $ax+b\geq 0$, $ax+b\leq 0$).

Ví dụ 1. Giải các bất phương trình sau:

a) $3x-1 \geq 0$.

b) $2x+3 < 4x-5$.

c) $(x-3)(2x+5) \leq 2x^2+4x-7$.

Lời giải.

a) $3x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{3}$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left[\dfrac{1}{3};+\infty\right)$.

b) $2x+3 < 4x-5 \Leftrightarrow 2x-4x < -5-3 \Leftrightarrow -2x < -8 \Leftrightarrow x > 4$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (4;+\infty)$.

c) $(x-3)(2x+5) \leq 2x^2+4x-7 \Leftrightarrow 2x^2-x-15 \leq 2x^2+4x-7 \Leftrightarrow -5x \leq 8 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{8}{5}$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left[-\dfrac{8}{5};+\infty\right)$.

Ví dụ 2. Giải các bất phương trình sau:

a) $\dfrac{3-2x}{x^2+1} \geq 0$.

b) $\dfrac{x^2+3x-2}{x^2+2x+3} < \dfrac{x^2-x-2}{x^2+2x+3}$.

Lời giải.

a) $\dfrac{3-2x}{x^2+1} \geq 0$.
Ta có $x^2+1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó bất phương trình đã cho tương đương:
$3-2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{3}{2}$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S = \left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right]$.

b) $\dfrac{x^2+3x-2}{x^2+2x+3} < \dfrac{x^2-x-2}{x^2+2x+3}$.
Ta có: $x^2+2x+3 = (x+1)^2+2 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó bất phương trình đã cho tương đương:
$x^2+3x-2 < x^2-x-2 \Leftrightarrow 4x < 0 \Leftrightarrow x < 0$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S = (-\infty;0)$.

Ví dụ 3. Giải các bất phương trình sau:

a) $\sqrt{x-1}(3x-8) \leq 0$.

b) $\dfrac{4x+3}{\sqrt{2-x}} \geq 0$.

c) $\dfrac{6-5x}{\sqrt{2x+1}} > \sqrt{2x+1}$.

d) $\dfrac{x-1}{2-x} < 1$.

Lời giải.

a) $\sqrt{x-1}(3x-8) \leq 0$.
Điều kiện: $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

- Ta thấy $x = 1$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.
- Với $x > 1$, bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình:
  $3x - 8 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{8}{3}$.
  Kết hợp điều kiện $x > 1$ ta được: $1 < x \leq \frac{8}{3}$.
- Vậy bất phương trình đã cho có các nghiệm $1 \leq x \leq \frac{8}{3}$.

b) $\frac{4x+3}{\sqrt{2-x}} \geq 0$. Điều kiện: $2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2$.
Với $x < 2$, bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình:
$4x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{4}$.
Kết hợp điều kiện $x < 2$ ta được: $-\frac{3}{4} \leq x < 2$.
Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left[-\frac{3}{4}; 2\right)$.

c) $\frac{6-5x}{\sqrt{2x+1}} > \sqrt{2x+1}$.
Điều kiện: $2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$.
Với $x > -\frac{1}{2}$, bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình:
$6 - 5x > 2x + 1 \Leftrightarrow -7x > -5 \Leftrightarrow x < \frac{5}{7}$.
Kết hợp điều kiện $x > -\frac{1}{2}$ ta được: $-\frac{1}{2} < x < \frac{5}{7}$.
Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{7}\right)$.

d) $\frac{x-1}{2-x} < 1$.
Điều kiện: $2 - x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

- Với $x < 2$, bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình:
  $x - 1 < 2 - x \Leftrightarrow 2x < 3 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$.
  Kết hợp điều kiện $x < 2$ ta được $x < \frac{3}{2}$.
- Với $x > 2$, bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình:
  $x - 1 > 2 - x \Leftrightarrow 2x > 3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$.
  Kết hợp điều kiện $x > 2$ ta được $x > 2$.
- Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải các bất phương trình sau:

a) $-4x + 1 > 0$.

b) $5x - 6 \leq 0$.

c) $10x + 9 < 0$.

d) $-2x + 8 \leq 0$.

Lời giải.

a) $-4x+1>0 \Leftrightarrow x<\frac{1}{4}$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)$.

b) $5x-6\leq 0 \Leftrightarrow x\leq \frac{6}{5}$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=\left(-\infty;\frac{6}{5}\right]$.

c) $10x+9<0 \Leftrightarrow x<-\frac{9}{10}$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=\left(-\infty;-\frac{9}{10}\right)$.

d) $-2x+8\leq 0 \Leftrightarrow x\geq 4$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=[4;+\infty)$.

Bài 2. Giải các bất phương trình sau:

a) $3(x-1)+2>2x+3$.

b) $4x+3<2x-1$.

c) $x^2-3x+4\leq x^2-2$.

d) $3x^2-10x+8\geq 3x(x+1)$.

Lời giải.

a) Tập nghiệm của bất phương trình là $S=(4;+\infty)$.

b) Tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;-2)$.

c) Tập nghiệm của bất phương trình là $S=[2;+\infty)$.

d) Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\infty;\frac{8}{13}\right]$.

Bài 3. Giải các bất phương trình sau:

a) $3-\frac{2x+1}{5}>x+\frac{3}{4}$.

b) $-2x+\frac{3}{5}>\frac{3(2x-7)}{3}$.

c) $2+\frac{3(x+1)}{8}<3-\frac{x-1}{4}$.

d) $\frac{x+1}{2}-\frac{x+2}{3}<2+\frac{x}{6}$.

Lời giải.

a) $3-\frac{2x+1}{5}>x+\frac{3}{4} \Leftrightarrow 60-4(2x+1)>20x+15 \Leftrightarrow -28x>-41 \Leftrightarrow x<\frac{41}{28}$.
Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\infty;\frac{41}{28}\right)$.

b) $-2x+\frac{3}{5}>\frac{3(2x-7)}{3} \Leftrightarrow -2x+\frac{3}{5}>2x-7 \Leftrightarrow -4x>-\frac{38}{5} \Leftrightarrow x<\frac{19}{10}$.
Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\infty;\frac{19}{10}\right)$.

c) $2+\frac{3(x+1)}{8}<3-\frac{x-1}{4} \Leftrightarrow \frac{3x+3}{8}+\frac{x-1}{4}<1 \Leftrightarrow 5x<7 \Leftrightarrow x<\frac{7}{5}$.
Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\infty;\frac{7}{5}\right)$.

d) $\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{x+2}{3}<2+\dfrac{x}{6}\Leftrightarrow 3(x+1)-2(x+2)<12+x\Leftrightarrow 3x+3-2x-4<12+x\Leftrightarrow 0\cdot x<13$ (luôn đúng $\forall x\in\mathbb{R}$).
Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\mathbb{R}$.

Bài 4. Giải các bất phương trình sau:

a) $\dfrac{x+2}{x^2+2}\geq 0$.

b) $\dfrac{3(x-1)-2}{x^2+4x+5}<0$.

c) $\dfrac{2x-3}{x^2+x+1}\leq\dfrac{4x+3}{x^2+x+1}$.

d) $\dfrac{x^2+x+2}{4x^2+4x+2}>\dfrac{(x+1)(x-2)}{4x^2+4x+2}$.

Lời giải.

a) Ta có $x^2+2>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Do đó bất phương trình đã cho tương đương:
$x+2\geq 0\Leftrightarrow x\geq -2$.
Tập nghiệm của bất phương trình là $S=[-2;+\infty)$.

b) Ta có $x^2+4x+5=(x+2)^2+1>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Do đó bất phương trình đã cho tương đương:
$3(x-1)-2<0\Leftrightarrow 3x-5<0\Leftrightarrow x<\dfrac{5}{3}$.
Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\infty;\dfrac{5}{3}\right)$.

c) Ta có $x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Do đó bất phương trình đã cho tương đương:
$2x-3\leq 4x+3\Leftrightarrow 2x\geq -6\Leftrightarrow x\geq -3$.
Tập nghiệm của bất phương trình là $S=[-3;+\infty)$.

d) Ta có $4x^2+4x+2=(2x+1)^2+1>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Do đó bất phương trình đã cho tương đương:
$x^2+x+2>(x+1)(x-2)\Leftrightarrow 2x>-4\Leftrightarrow x>-2$.
Tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-2;+\infty)$.

Bài 5. Giải các bất phương trình sau:

a) $(3x-6)\sqrt{3-x}\leq 0$.

b) $\dfrac{\sqrt{6x+3}}{2-x}>0$.

c) $\dfrac{1-4x}{\sqrt{x+5}}<\sqrt{x+5}$.

d) $(2x-1)^2(x+3)\geq 0$.

e) $\dfrac{3x-2}{5x+1}\leq 0$.

f) $\dfrac{8x+1}{2x-3}>2$.

Lời giải.

a) Điều kiện: $3-x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 3$.
Rõ ràng $x=3$ là một nghiệm của bất phương trình đã cho.
Với $x<3$ bất phương trình đã cho trở thành:
$3x-6\leq 0\Leftrightarrow x\leq 2$.
Tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;2]\cup\{3\}$.

b) Điều kiện: $6x+3\geq 0\Leftrightarrow x\geq -\dfrac{1}{2}$.
Với $x=-\dfrac{1}{2}$ không là nghiệm của bất phương trình đã cho.
Với $x>-\dfrac{1}{2}$ bất phương trình đã cho trở thành:
$2-x>0\Leftrightarrow x<2$.

Kết hợp điều kiện $x > -\frac{1}{2}$ ta được $-\frac{1}{2} < x < 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\frac{1}{2}; 2\right)$.

c) Điều kiện: $x+5 > 0 \Leftrightarrow x > -5$.

Với $x > -5$ bất phương trình đã cho trở thành:

$1-4x < x+5 \Leftrightarrow 5x > -4 \Leftrightarrow x > -\frac{4}{5}$.

Kết hợp điều kiện $x > -5$ ta được $x > -\frac{4}{5}$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\frac{4}{5}; +\infty\right)$.

d) Trường hợp $2x-1 = 0$ hay $x = \frac{1}{2}$ rõ ràng là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

Trường hợp $2x-1 \neq 0$ hay $x \neq \frac{1}{2}$ bất phương trình đã cho trở thành:

$x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-3; +\infty)$.

e) Điều kiện: $x \neq -\frac{1}{5}$.

Trường hợp $x < -\frac{1}{5}$ bất phương trình đã cho trở thành:

$3x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$.

Kết hợp điều kiện: $x < -\frac{1}{5}$ ta được bất phương trình vô nghiệm.

Trường hợp $x > -\frac{1}{5}$ bất phương trình đã cho trở thành:

$3x-2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}$.

Kết hợp điều kiện: $x > -\frac{1}{5}$ ta được $-\frac{1}{5} < x \leq \frac{2}{3}$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\frac{1}{5}; \frac{2}{3}\right]$.

f) Điều kiện: $x \neq \frac{3}{2}$.

Trường hợp $x < \frac{3}{2}$ bất phương trình đã cho trở thành:

$8x+1 < 4x-6 \Leftrightarrow x < -\frac{7}{4}$.

Kết hợp điều kiện: $x < \frac{3}{2}$ ta được $x < -\frac{7}{4}$.

Trường hợp $x > \frac{3}{2}$ bất phương trình đã cho trở thành:

$8x+1 > 4x-6 \Leftrightarrow x > -\frac{7}{4}$.

Kết hợp điều kiện: $x > \frac{3}{2}$ ta được $x > \frac{3}{2}$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; -\frac{7}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Dạng 2. Giải và biện luận bất phương trình bậc nhất một ẩn

Xét bất phương trình một ẩn dạng: $ax+b>0$ (*).

① Trường hợp $a \neq 0$:

- Nếu $a>0$ thì bất phương trình (*) có các nghiệm $x>-\dfrac{b}{a}$ hay bất phương trình có tập nghiệm là $S=\left(-\dfrac{b}{a};+\infty\right)$.
- Nếu $a<0$ thì bất phương trình (*) có các nghiệm $x<-\dfrac{b}{a}$ hay bất phương trình có tập nghiệm là $S=\left(-\infty;-\dfrac{b}{a}\right)$.

② Trường hợp $a=0$:

- Nếu $b>0$ thì bất phương trình (*) luôn nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ hay bất phương trình có tập nghiệm $S=\mathbb{R}$.
- Nếu $b\le 0$ thì bất phương trình (*) vô nghiệm hay bất phương trình có tập nghiệm $S=\varnothing$.

Các bất phương trình dạng $ax+b<0$, $ax+b\ge 0$, $ax+b\le 0$ có cách giải và biện luận tương tự.
Các bất phương trình khác ta biến đổi bất phương trình về dạng $ax+b>0$ (hoặc về dạng $ax+b<0$, $ax+b\ge 0$, $ax+b\le 0$).

Ví dụ 1. Giải và biện luận bất phương trình $mx+6>2x+3$.

Lời giải. $mx+6>2x+3 \Leftrightarrow (m-2)x>-3$.

- Trường hợp $m-2=0$ hay $m=2$ thì bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.
- Trường hợp $m-2>0$ hay $m>2$ thì bất phương trình đã cho có các nghiệm $x>\dfrac{-3}{m-2}$.
- Trường hợp $m-2<0$ hay $m<2$ thì bất phương trình đã cho có các nghiệm $x<\dfrac{-3}{m-2}$.

Ví dụ 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $(m^2-4m+3)x+2m-4<0$ vô nghiệm.

Lời giải. Bất phương trình đã cho vô nghiệm khi:

$$\begin{cases} m^2-4m+3=0 \\ 2m-4\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=3 \end{array}\right. \\ m\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow m=3.$$

Vậy $m=3$ là giá trị thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 3. Giải và biện luận bất phương trình $\sqrt{x-1}\,(x-m+2)>0$.

Lời giải. Điều kiện $x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1$.

- Trường hợp $x=1$ không là nghiệm của bất phương trình đã cho.
- Trường hợp $x>1$ ta được bất phương trình:
  $x-m+2>0 \Leftrightarrow x>m-2$.

- Nếu $m-2 \geq 1$ hay $m \geq 3$ thì bất phương trình có tập nghiệm $S=(m-2;+\infty)$.
- Nếu $m-2<1$ hay $m<3$ thì bất phương trình có tập nghiệm $S=(1;+\infty)$.

- Vậy: với $m \geq 3$ thì bất phương trình có tập nghiệm $S=(m-2;+\infty)$;
với $m<3$ thì bất phương trình có tập nghiệm $S=(1;+\infty)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải và biện luận bất phương trình $(1-m)x-2m>-2x-6$.
Lời giải. $(1-m)x-2m>-2x-6 \Leftrightarrow (3-m)x>2m-6$.

- Trường hợp $3-m=0$ hay $m=3$ thì bất phương trình đã cho vô nghiệm.
- Trường hợp $3-m>0$ hay $m<3$ thì bất phương trình đã cho có các nghiệm $x>\dfrac{2m-6}{3-m}$ hay $x>-2$.
- Trường hợp $3-m<0$ hay $m>3$ thì bất phương trình đã cho có các nghiệm $x<\dfrac{2m-6}{3-m}$ hay $x<-2$.

Bài 2. Cho bất phương trình $(m^2+3m)x+4 \geq -2(x+m)$. Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Lời giải. $(m^2+3m)x+4 \geq -2(x+m) \Leftrightarrow (m^2+3m+2)x+2m+4 \geq 0$.
Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi:

$$\begin{cases} m^2+3m+2=0 \\ 2m+4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-2 \end{array}\right. \\ m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-2 \end{array}\right. .$$

Vậy $m=-1, m=-2$ là giá trị thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 3. Giải và biện luận bất phương trình $(2x-3m+2)\sqrt{2-x}<0$.
Lời giải. Điều kiện $2-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.

- Trường hợp $x=2$ không là nghiệm của bất phương trình đã cho.
- Trường hợp $x<2$ ta được bất phương trình:
$2x-3m+2>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{3m-2}{2}$.
- Nếu $\dfrac{3m-2}{2}<2$ hay $m<2$ thì bất phương trình có tập nghiệm $S=\left(\dfrac{3m-2}{2};2\right)$.
- Nếu $\dfrac{3m-2}{2} \geq 2$ hay $m \geq 2$ thì bất phương trình vô nghiệm.
- Vậy: với $m \geq 2$ thì bất phương trình có tập nghiệm $S=\varnothing$;
với $m<2$ thì bất phương trình có tập nghiệm $S=\left(\dfrac{3m-2}{2};2\right)$.

Dạng 3. Tìm giá trị của tham số để bất phương trình có tập nghiệm thỏa điều kiện cho trước

- Biến đổi bất phương trình về một trong bốn dạng sau

$$ax+b>0, ax+b<0, ax+b \geq 0, ax+b \leq 0.$$

- Nêu điều kiện mà bất phương trình phải thỏa, từ đó tìm được giá trị của tham số.

Ví dụ 4. Cho bất phương trình $(4m^2-6m)x+7m \geq (3m^2-5)x+4+5m$. Định m để bất phương trình thỏa với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Bpt $\Leftrightarrow (m^2-6m+5)x+2m-4\geq 0$.

Bpt thỏa với mọi $x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-6m+5=0 \\ 2m-4\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \text{ hoặc } m=5 \\ m\geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m=5.$

Vậy bpt thỏa với mọi $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m=5$.

Ví dụ 5. Định m để bất phương trình $mx+3m^3\geq -3(x+4m^2-m-12)$ có tập nghiệm là $[-24;+\infty)$.

Lời giải.

Bpt $\Leftrightarrow (m+3)x+3m^3+12m^2-3m-36\geq 0 \Leftrightarrow (m+3)\left[x+3(m^2+m-4)\right]\geq 0$.

- $m=-3$, bpt có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ (loại).
- $m<-3$, bpt $\Leftrightarrow x+3(m^2+m-4)\leq 0\Leftrightarrow x\leq -3(m^2+m-4)$ (loại).
- $m>-3$, bpt $\Leftrightarrow x+3(m^2+m-4)\geq 0\Leftrightarrow x\geq -3(m^2+m-4)$. Bpt có tập nghiệm là $\left[-3(m^2+m-4);+\infty\right)$.

Do đó, bpt có tập nghiệm $[-24;+\infty)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m>-3 \\ -3(m^2+m-4)=-24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-3 \\ m^2+m-12=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m>-3 \\ m=-4 \text{ hay } m=3 \end{cases} \Leftrightarrow m=3.$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 4. Tìm tất cả các giá trị m để bất phương trình vô nghiệm

$$(6m^2+m-2)x-7m\geq (6m^2+5)x-5m-6.$$

Lời giải.

Bpt $\Leftrightarrow (m-7)x-2m+6\geq 0$.

Bpt vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-7=0 \\ -2m+6<0 \end{cases} \Leftrightarrow m=7.$

Bài 5. Tìm tất cả các giá trị m để bất phương trình sau thỏa với mọi $x\in\mathbb{R}$.

a) $m^2(x-1)\geq 25x+5m-6$;

b) $\sqrt{(m^2-9)x+m+7}>3$;

Lời giải.

a) Bpt $\Leftrightarrow (m^2-25)x-m^2-5m+6\geq 0$.

Bpt thỏa với mọi $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-25=0 \\ -m^2-5m+6\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=-5.$

b) Bpt $\Leftrightarrow (m^2-9)x+m+7>9\Leftrightarrow (m^2-9)x+m-2>0$.

Bpt thỏa với mọi $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-9=0 \\ m-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow m=3.$

Bài 6. Định m để hàm số $y=\sqrt{(m+3)x+m-5}$ xác định với mọi $x\in[0;5]$.

Lời giải.

Hàm số y xác định với mọi $x\in[0;5]\Leftrightarrow(m+3)x+m-5\geq 0$ (*), với mọi $x\in[0;5]$.

Bpt (*) thỏa với mọi $x\in[0;5]\Rightarrow$ bpt (*) thỏa tại $x=0\Rightarrow m-5\geq 0\Rightarrow m\geq 5$.

Khi đó, (*) $\Leftrightarrow x\geq\dfrac{-m+5}{m+3}$.

Vậy YCBT $\Leftrightarrow\begin{cases}m\geq 5\\ \dfrac{-m+5}{m+3}\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow m\geq 5$.

Bài 7. Tìm m để bất phương trình $\sqrt{5-x}\left[(m^2+3)x-4m\right]\geq 0$ có tập nghiệm là $[1;5]$.

Lời giải.

Bpt $\Leftrightarrow x=5$ hoặc $\begin{cases}x<5\\(m^2+3)x-4m\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x=5$ hoặc $\begin{cases}x<5\\x\geq\dfrac{4m}{m^2+3}\end{cases}$.

YCBT $\Leftrightarrow\dfrac{4m}{m^2+3}=1\Leftrightarrow m^2-4m+3=0\Leftrightarrow m=1$ hoặc $m=3$.

Bài 8. Định m để hai bất phương trình sau tương đương

a) $x-9<0$ và $5mx-3m-42<0$;

b) $3mx+2-2m>0$ và $(3m-1)x+3-2m>0$.

Lời giải.

a) Bpt $x-9<0$ có tập nghiệm là $S=(-\infty;9)$.

YCBT $\Leftrightarrow\begin{cases}5m>0\\ \dfrac{3m+42}{5m}=9\end{cases}\Leftrightarrow m=1$.

b) YCBT $\Leftrightarrow\begin{cases}3m(3m-1)>0\\ \dfrac{2m-2}{3m}=\dfrac{2m-3}{3m-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0 \text{ hoặc } m>\dfrac{1}{3}\\ m=-2\end{cases}\Leftrightarrow m=-2$.

Dạng 4. Hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn

Khi cho một hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn thì tập hợp nghiệm của hệ là giao của các tập hợp nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

- **Các bước thực hành giải toán:**
  1. Tìm điều kiện của hệ (nếu có).
  2. Biến đổi để đưa hệ bất phương trình về dạng đặc trưng $\begin{cases}a_1x+b_1\leq 0\ (1)\\a_2x+b_2\leq 0\ (2)\end{cases}$.
  3. Giải từng bất phương trình trong hệ. Gọi S_1,S_2 lần lượt là tập nghiệm của phương trình $(1),(2)$ trong hệ.
  4. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $S=S_1\cap S_2$.

Ví dụ 6. Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases}3-x\geq 0\\5-2x\geq 0\end{cases}$.

Lời giải. Ta có: $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 5-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \leq \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq \dfrac{5}{2}$.

Tập nghiệm của hệ bất phương trình $S = \left(-\infty; \dfrac{5}{2}\right]$.

Ví dụ 7. Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} 2x - \dfrac{3}{5} < \dfrac{7-2x}{3} \\ 2x-1 < 5(3x-1) \end{cases}$.

Lời giải. $\begin{cases} 2x - \dfrac{3}{5} < \dfrac{7-2x}{3} \\ x-1 < 5(3x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30x-9 < 35-10x \\ 2x-1 < 15x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{4}{13} < x < \dfrac{11}{10}$.

Tập nghiệm của hệ bất phương trình $S = \left(\dfrac{4}{13}; \dfrac{11}{10}\right)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 9. Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} (x-1)(x+2) \leq 2x^2 - x - (x+3)(x-1) \\ x-1 < 0 \end{cases}$.

Lời giải. $\begin{cases} (x-1)(x+2) \leq 2x^2 - x - (x+3)(x-1) \\ x-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-5 \leq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \dfrac{5}{4} \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x < 1$.

Tập nghiệm của hệ bất phương trình $S = (-\infty; 1)$.

Bài 10. Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} 3x-1 \leq x+5 \\ 2x-1 < x^2 - (x-1)(x+1) \end{cases}$.

Lời giải. $\begin{cases} 3x-1 \leq x+5 \\ 2x-1 < x^2 - (x-1)(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x < 1$.

Tập nghiệm của hệ bất phương trình $S = (-\infty; 1)$.

Bài 11. Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} 6x + \dfrac{5}{7} < 4x+7 \\ \dfrac{8x+3}{2} < 2x+5 \end{cases}$.

Lời giải. $\begin{cases} 6x + \dfrac{5}{7} < 4x+7 \\ \dfrac{8x+3}{2} < 2x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < \dfrac{44}{7} \\ 4x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{22}{7} \\ x < \dfrac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x < \dfrac{7}{4}$.

Tập nghiệm của hệ bất phương trình $S = \left(-\infty; \dfrac{7}{4}\right)$.

Bài 12. Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x-3}{\sqrt{x-4}} > 0 \\ x < 2(x+1) \end{cases}$.

Lời giải. $\begin{cases} \dfrac{x-3}{\sqrt{x-4}} > 0 \\ x < 2(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x > 3 \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 4$.

Tập nghiệm của hệ bất phương trình $S = (4; +\infty)$.

Dạng 5. Giải và biện luận hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn

Giải và biện luận hệ bất phương trình: $\begin{cases} a_1x+b_1 \le 0 \\ a_2x+b_2 \le 0 \end{cases}$ (I).

- Xét các trường hợp tồn tại dấu của a_1 và a_2.
- Với mỗi trường hợp riêng biệt nhận được ở trên, thông thường ta có các trường hợp sau:
  - ***TH1:*** Nếu $a_1, a_2 > 0$. Khi đó $(I) \Leftrightarrow x \le \min\left\{-\dfrac{b_1}{a_1}, -\dfrac{b_2}{a_2}\right\}$.
  - ***TH2:*** Nếu $a_1, a_2 < 0$. Khi đó $(I) \Leftrightarrow x \ge \max\left\{-\dfrac{b_1}{a_1}, -\dfrac{b_2}{a_2}\right\}$.
  - ***TH3:*** Nếu $a_1 > 0; a_2 < 0$. Khi đó $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -\dfrac{b_1}{a_1} \\ x \ge -\dfrac{b_2}{a_2} \end{cases}$.

    Hệ có nghiệm điều kiện là: $-\dfrac{b_2}{a_2} \le -\dfrac{b_1}{a_1}$.

    Khi đó nghiệm của hệ là: $-\dfrac{b_2}{a_2} \le x \le -\dfrac{b_1}{a_1}$.
  - ***TH4:*** Nếu $a_1 = 0$ hoặc $a_2 = 0$. Khi đó thay trực tiếp giá trị tham số vào hệ (I).

Ví dụ 8. Tìm tất cả các giá trị của m để hệ bất phương trình: $\begin{cases} x+m \le 0 \\ -x+3<0 \end{cases}$ có nghiệm.

Lời giải. $\begin{cases} x+m \le 0 \\ -x+3<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -m \\ x > 3 \end{cases}$.

Để hệ bất phương trình có nghiệm thì $-m > 3 \Leftrightarrow m < -3$.

Ví dụ 9. Tìm m để hệ bất phương trình: $\begin{cases} x+4m^2 \le 2mx+1 \\ 3x+2 > 2x-1 \end{cases}$ có nghiệm.

Lời giải. $\begin{cases} x+4m^2 \le 2mx+1 & (1) \\ 3x+2 > 2x-1 & (2) \end{cases}$.

$(2) \Leftrightarrow x > -3$.

$(1) \Leftrightarrow (1-2m)x \le 1-4m^2$. Xét các trường hợp:

- TH1: Nếu $1-2m = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$. Khi đó (1) có tập nghiệm $S_1 = \mathbb{R}$.
  Khi đó hệ có tập nghiệm $S = (-3; +\infty)$.
- TH2: Nếu $1-2m < 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{1}{2}$.
  Suy ra (1) có nghiệm: $x \ge \dfrac{1-4m^2}{1-2m} \Leftrightarrow x \ge 1+2m$.
  Khi đó hệ có tập nghiệm $S = [1+2m; +\infty)$ (do $1+2m > 2 > -3$).
- TH3: Nếu $1-2m > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{1}{2}$ thì (1) có nghiệm $x \le 1+2m$.
  Hệ bất phương trình có nghiệm khi: $1+2m > -3 \Leftrightarrow m > -2$.
  Với $-2 < m < \dfrac{1}{2}$ thì hệ bất phương trình có tập nghiệm $S = (-3; 1+2m)$.

Vậy với $m > -2$ hệ bất phương trình có nghiệm.

Ví dụ 10. Tìm m để hệ bất phương trình: $\begin{cases} mx+9 < 3x+m^2 \\ 4x+1 < -x+6 \end{cases}$ vô nghiệm.

Lời giải. $\begin{cases} mx+9 < 3x+m^2 \ (1) \\ 4x+1 < -x+6 \quad (2) \end{cases}$.

$(2) \Leftrightarrow x < 1$.

$(1) \Leftrightarrow (m-3)x < m^2-9$. Xét các trường hợp:

- TH1: Nếu $m-3=0 \Leftrightarrow m=3$. Khi đó (1) có tập nghiệm $S_1 = \varnothing$.
  Với $m=3$ hệ bất phương trình vô nghiệm.
- TH2: Nếu $m-3<0 \Leftrightarrow m<3$.
  Suy ra (1) có nghiệm: $x > m+3$.
  Khi đó hệ vô nghiệm khi $m+3 \geq 1 \Leftrightarrow m \geq -2$.
  Với $-2 \leq m < 3$ hệ bất phương trình vô nghiệm.
- TH3: Nếu $m-3>0 \Leftrightarrow m>3$ thì (1) có nghiệm $x < m+3$.
  Với $m>3$ hệ bất phương trình luôn có nghiệm.

Vậy hệ bất phương trình vô nghiệm khi $-2 \leq m \leq 3$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 13. Tìm tất cả các giá trị của m để hệ bất phương trình: $\begin{cases} x-2 \leq 0 \\ m+x > 1 \end{cases}$ có nghiệm.

Lời giải. $\begin{cases} x-2 \leq 0 \\ m+x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x > 1-m \end{cases}$.

Để hệ bất phương trình có nghiệm thì $1-m < 2 \Leftrightarrow m > -1$.

Bài 14. Tìm tất cả các giá trị của m để hệ bất phương trình: $\begin{cases} 2x+7 < 8x-1 \\ -2x+m+5 > 0 \end{cases}$ vô nghiệm.

Lời giải. $\begin{cases} 2x+7 < 8x-1 \\ -2x+m+5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{4}{3} \\ x < \dfrac{m+5}{2} \end{cases}$.

Để hệ bất phương trình vô nghiệm thì $\dfrac{m+5}{2} \leq \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow m \leq -\dfrac{7}{3}$.

Bài 15. Với giá trị nào của m thì hệ $\begin{cases} 3x+2-2m \leq 0 \\ mx+m-1 \leq 0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Lời giải. $\begin{cases} 3x+2-2m \leq 0 \ (1) \\ mx+m-1 \leq 0 \ \ (2) \end{cases}$.

$(1) \Leftrightarrow x \leq \dfrac{2m-2}{3}$.

$(2) \Leftrightarrow mx \leq 1-m$ (3). Xét các trường hợp:

- TH1: Nếu $m=0$, khi đó bất phương trình $(3) \Leftrightarrow 0x \leq 1$ luôn đúng.
  Vậy nghiệm của hệ bất phương trình là $x \leq -\dfrac{2}{3}$ và nghiệm là không duy nhất.
- TH2: Nếu $m>0$, khi đó bất phương trình $(3) \Leftrightarrow x \leq \dfrac{1-m}{m}$.
  Khi đó nghiệm của hệ là $x \leq \min\left\{\dfrac{2m-2}{3}, \dfrac{1-m}{m}\right\}$ và nghiệm là không duy nhất.

- TH3: Nếu $m < 0$, khi đó bất phương trình $(3) \Leftrightarrow x \geq \dfrac{1-m}{m}$.

  Khi đó để hệ có nghiệm duy nhất thì $\dfrac{2m-2}{3} = \dfrac{1-m}{m} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$.

Vậy với $m = -\dfrac{3}{2}$ hệ có nghiệm duy nhất.

Bài 16. Với giá trị nào của m thì hệ $\begin{cases} mx + 6 > 2x + 3m \\ m(x-m) < x - 1 \end{cases}$ có nghiệm.

Lời giải. Viết lại hệ bất phương trình dưới dạng $\begin{cases} (m-2)x > 3m - 6 \ (1) \\ (m-1)x < m^2 - 1 \ (2) \end{cases}$ (I).

Xét các trường hợp:

- TH1: Nếu $m < 1$, khi đó hệ $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x > m + 1 \end{cases} \Rightarrow m + 1 < x < 3$.

  Khi đó tập nghiệm của hệ là $S = (m+1; 3)$.

- TH2: Nếu $m = 1$, khi đó hệ $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ 0x < 0 \end{cases} \Rightarrow$ hệ vô nghiệm.

- TH3: Nếu $1 < m < 2$, khi đó hệ $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x < m + 1 \end{cases} \Rightarrow x < \min\{3, m+1\} = m + 1$.

  Khi đó tập nghiệm của hệ $S = (-\infty; m+1)$.

- TH4: Nếu $m = 2$, khi đó hệ $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 0x > 0 \\ x < 3 \end{cases} \Rightarrow$ hệ vô nghiệm.

- TH5: Nếu $m > 2$, khi đó hệ $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < m + 1 \end{cases} \Rightarrow 3 < x < m + 1$.

  Khi đó tập nghiệm của hệ $S = (3; m+1)$.

Vậy hệ bất phương trình có nghiệm khi $m \neq 1$ và $m \neq 2$.

Dạng 6. Tìm giá trị của tham số để hệ bất phương trình có tập nghiệm thỏa điều kiện cho trước

Ví dụ 11. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x - m + 1 > 0 \\ m + 2 - x \geq 0. \end{cases}$ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình

a) Nghiệm đúng với mọi $x \in [-2; -1)$.

b) Có duy nhất một nghiệm thuộc $[1; 3)$.

c) Có nghiệm thuộc $\left[-1; \dfrac{1}{2}\right]$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} x - m + 1 > 0 \\ m + 2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > m - 1 \\ x \leq m + 2. \end{cases}$ Suy ra hệ có tập nghiệm $S = (m-1; m+2]$.

a) Hệ có nghiệm đúng với mọi $x \in [-2; -1)$ khi và chỉ khi

$$[-2;-1) \subset S \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 < -2 \\ m+2 \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m < -1.$$

b) Hệ có duy nhất một nghiệm thuộc $[1;3) \Leftrightarrow m+2 = 1 \Leftrightarrow m = -1$.

c) Hệ không có nghiệm thuộc $\left[-1;\frac{1}{2}\right]$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} \leq m-1 \\ m+2 < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq \frac{3}{2} \\ m < -3. \end{array}\right.$$

Vậy hệ có nghiệm thuộc $\left[-1;\frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow -3 \leq m < \frac{3}{2}$.

Ví dụ 12. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x+m > 1 \\ mx + m^2 - 2m \geq 0. \end{cases}$ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình

a) Nghiệm đúng với mọi $x \in [-1;+\infty)$.

b) Có nghiệm thuộc $[0;3)$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} x+m > 1 \\ mx + m^2 - 2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1-m & (1) \\ mx \geq m(2-m). & (2) \end{cases}$ Gọi S_1, S_2, S lần lượt là tập nghiệm của $(1), (2)$ và của hệ. Khi đó $S_1 = (1-m;+\infty)$ và
- Với $m = 0$ ta có $S_2 = \mathbb{R} \Rightarrow S = S_1 \cap S_2 = (1-m;+\infty)$.
- Với $m > 0$ ta có $S_2 = [2-m;+\infty) \Rightarrow S = S_1 \cap S_2 = [2-m;+\infty)$.
- Với $m < 0$ ta có $S_2 = (-\infty;2-m] \Rightarrow S = S_1 \cap S_2 = (1-m;2-m]$.

a) Hệ có nghiệm đúng với mọi $x \in [-1;+\infty) \Leftrightarrow [-1;+\infty) \subset S$.
- Với $m = 0$ ta có $S = (1;+\infty) \not\supset [-1;+\infty) \Rightarrow m = 0$ không thỏa mãn.
- Với $m > 0$ ta có $[-1;+\infty) \subset S \Leftrightarrow 2-m \leq -1 \Leftrightarrow m \geq 3$. Kết hợp điều kiện $m > 0$ ta có $m \geq 3$ thoả mãn.
- Với $m < 0$ ta có $S = (1-m;2-m] \not\supset [-1;+\infty) \Rightarrow m < 0$ không thỏa mãn.

Vậy tập các giá trị m thỏa mãn là $[3;+\infty)$.

b) Hệ có nghiệm thuộc $[0;3) \Leftrightarrow [3;0) \cap S \neq \emptyset$.
- Với $m = 0$ ta có $[0;3) \cap S = (1;3) \neq \emptyset \Rightarrow m = 0$ thỏa mãn.
- Với $m > 0$ ta có $[0;3) \cap S \neq \emptyset \Leftrightarrow 2-m < 3 \Leftrightarrow m > -1$. Kết hợp điều kiện $m > 0$ ta có $m > 0$ thoả mãn.
- Với $m < 0$ ta có $[0;3) \cap S \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m < 3 \\ 2-m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 2$. Kết hợp điều kiện $m < 0$ ta có $-2 < m < 0$ thỏa mãn.

Vậy tập các giá trị m thỏa mãn là $(-2;+\infty)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 17. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x+2m-1 > 0 \\ 6m-2-x \geq 0. \end{cases}$ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ có nghiệm đúng với mọi $x \in [-2;3]$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} x+2m-1>0 \\ 6m-2-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1-2m \\ x\leq 6m-2. \end{cases}$ Hệ có nghiệm đúng với mọi $x\in[-2;3] \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2m<-2 \\ 3\leq 6m-2 \end{cases} \Leftrightarrow$ $m>\dfrac{3}{2}$.

Bài 18. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x+m>2 \\ (m-1)x-m^2+4m-3>0. \end{cases}$ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ

a) Có nghiệm thuộc $(-\infty;2)$.

b) Có nghiệm thuộc $[-1;3]$.

c) Nghiệm đúng với mọi $x\in[-1;3]$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} x+m>2 \\ (m-1)x-m^2+4m-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2-m \\ (m-1)x>(m-1)(m-3). \end{cases}$ Giải và biện luận hệ ta có

• Với $m\leq 1$ ta có hệ vô nghiệm.

• Với $m>1$, hệ có tập nghiệm $S=(\max\{m-3;2-m\};+\infty)$.

a) Hệ có nghiệm thuộc $(-\infty;2)$

$$\Leftrightarrow \max\{m-3;2-m\}<2 \Leftrightarrow \begin{cases} m-3<2 \\ 2-m<2 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m<5.$$

Kết hợp điều kiện $m>1$ ta có $1<m<5$ thỏa mãn.

b) Hệ có nghiệm thuộc $[-1;3]$

$$\Leftrightarrow \max\{m-3;2-m\}<3 \Leftrightarrow \begin{cases} m-3<3 \\ 2-m<3 \end{cases} \Leftrightarrow -1<m<6.$$

Kết hợp điều kiện $m>1$ ta có $1<m<5$ thỏa mãn.

c) Hệ có nghiệm đúng với mọi $x\in[-1;3]$

$$\Leftrightarrow \max\{m-3;2-m\}<-1 \Leftrightarrow \begin{cases} m-3<-1 \\ 2-m<-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<2 \\ m>3 \end{cases} \text{vô nghiệm } m.$$

Bài 19. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} mx-1<0 \\ (3m-2)x-m<0. \end{cases}$ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ nghiệm đúng với mọi x dương.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} mx-1<0 \\ (3m-2)x-m<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx<1 \\ (3m-2)x<m. \end{cases}$ Ta có

• Với $m=0$, hệ có tập nghiệm $S=(0;+\infty) \Rightarrow m=0$ thỏa mãn.

• Với $m=\dfrac{2}{3}$, hệ có tập nghiệm $S=\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right)\not\supset(0;+\infty) \Rightarrow m=\dfrac{2}{3}$ không thỏa mãn.

• Với $m<0$, hệ có tập nghiệm $S=\left(\dfrac{m}{3m-2};+\infty\right)$. Hệ có nghiệm đúng với mọi x dương $\Leftrightarrow \dfrac{m}{3m-2}\leq 0 \Leftrightarrow$ $0<m<\dfrac{2}{3}$ không thỏa mãn điều kiện $m<0$.

• Với $0 < m < \frac{2}{3}$, hệ vô nghiệm.

• Với $m > \frac{2}{3}$, hệ có tập nghiệm $\left(-\infty; \min\left\{\frac{1}{m}; \frac{m}{3m-2}\right\}\right) \not\supset (0; +\infty) \Rightarrow m > \frac{2}{3}$ không thỏa mãn.

Vậy có duy nhất giá trị $m = 0$ thỏa mãn đề bài.

Bài 20. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} m(x-1)+2 \geq 0 \\ x - m \leq 2. \end{cases}$ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in [0;1]$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} m(x-1)+2 \geq 0 \\ x-m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx \geq m-2 \\ x \leq m+2. \end{cases}$

• Với $m = 0$, hệ có tập nghiệm $S = (-\infty; 2) \supset [0;1] \Rightarrow m = 0$ thỏa mãn.

• Với $m < 0$, hệ có tập nghiệm $S = \left(-\infty; \min\left\{\frac{m-2}{m}; m+2\right\}\right)$. Hệ nhận mọi $x \in [0;1]$ là nghiệm $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \frac{m-2}{m} \geq 1 \\ m+2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq -1$. Kết hợp điều kiện $m < 0$ ta có $-1 \leq m < 0$ thỏa mãn.

• Với $m > 0$, hệ nhận mọi $x \in [0;1]$ là nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m-2}{m} \leq 0 \\ m+2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 2$. Kết hợp điều kiện $m > 0$ ta có $0 < m \leq 2$ thỏa mãn.

Vậy tập các giá trị m thỏa mãn là $[-1;2]$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 21. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x+2m-1 \geq 0 \\ \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} \leq \frac{m+1}{\sqrt{4-x^2}}. \end{cases}$ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình nhận tập xác định là tập nghiệm.

Lời giải. TXĐ $D = (-2;2)$. Ta có $\begin{cases} x+2m-1 \geq 0 \\ \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} \leq \frac{m+1}{\sqrt{4-x^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1-2m \\ x \leq \frac{m+1}{2}. \end{cases}$

Hệ có nghiệm đúng với mọi $x \in (-2;2) \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2m \leq -2 \\ m+1 \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 3$.

Bài 22. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x+m-1 \leq 0 \\ \frac{2x}{\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+2x}} \geq \frac{m+1}{\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+2x}}. \end{cases}$ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ có nghiệm.

Lời giải. TXĐ $D = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. Ta có $\begin{cases} x+m-1 \leq 0 \\ \frac{2x}{\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+2x}} \geq \frac{m+1}{\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+2x}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1-m \\ x \geq \frac{m+1}{2}. \end{cases} \quad (*)$

Hệ ban đầu có nghiệm khi và chỉ khi hệ $(*)$ có tập nghiệm S thỏa mãn $\begin{cases} S \neq \emptyset \\ S \cap \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \neq \emptyset. \end{cases}$

• $S \neq \emptyset \Leftrightarrow \frac{m+1}{2} \leq 1-m \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{3}$.

• $S \cap \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] = \emptyset \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{m+1}{2} > \frac{1}{2} \\ 1-m < -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow m > 0 \Rightarrow S \cap \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \neq \emptyset \Leftrightarrow m \leq 0$.

Kết hợp điều kiện $m \leq \frac{1}{3}$ ta có $m \leq 0$ thỏa mãn.

§3. DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

I. Tóm tắt lí thuyết

1. Nhị thức bậc nhất

Định nghĩa 1. Nhị thức bậc nhất đối với x là biểu thức dạng $f(x) = ax + b$ trong đó a, b là hai số đã cho, $a \neq 0$.

Ví dụ 1. a) $-2x + 3$ là nhị thức bậc nhất đối với x.

b) $7y - 9$ là nhị thức bậc nhất đối với y.

c) $5u$ là nhị thức bậc nhất đối với u.

2. Định lý về dấu của nhị thức bậc nhất

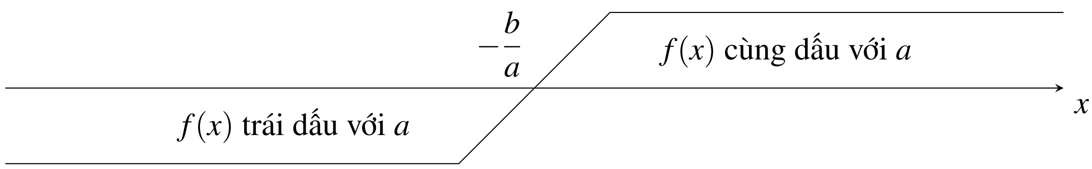
Định lí 1. *Nhị thức $f(x) = ax + b$ có giá trị cùng dấu với hệ số a khi x lấy các giá trị trong khoảng $\left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$, trái dấu với hệ số a khi x lấy các giá trị trong khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$.*

- Các kết quả của định lý trên được thể hiện qua bảng sau

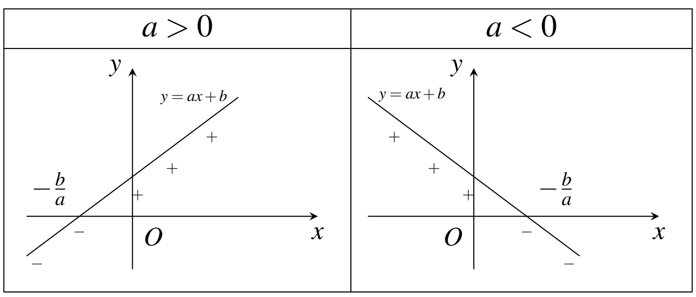
x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x) = ax + b$		trái dấu với a	0	cùng dấu với a	

Ta gọi bảng này là *bảng xét dấu* nhị thức $f(x) = ax + b$.

- Biểu diễn trên trục số



- Minh họa bằng đồ thị



⚠ *Định lý trên có thể rút gọn bằng một trong hai quy tắc sau:* ***phải cùng trái trái*** hoặc ***trước trái sau cùng***.

3. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 2. Xét dấu của nhị thức bậc nhất: $f(x) = 2x + 1$

Lời giải. $f(x) = 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$
Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
y		$-$	0	$+$	

Ví dụ 3. Xét dấu biểu thức: $f(x) = 4mx - 3$

Lời giải. Xét $m = 0$ thì $f(x) = -3 < 0\ \forall x \in \mathbb{R}$
Xét $m \neq 0$ ta có hai trường hợp:

- Trường hợp 1: $m > 0$.
  Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\dfrac{3}{4m}$		$+\infty$
y		$-$	0	$+$	

- Trường hợp 2: $m < 0$.
  Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\dfrac{3}{4m}$		$+\infty$
y		$+$	0	$-$	

Kết luận:
$m = 0$ thì $f(x) < 0\ \forall x \in \mathbb{R}$;
$m > 0$ thì $f(x) < 0$ khi $x < \dfrac{-3}{4m}$, $f(x) > 0$ khi $x > \dfrac{-3}{4m}$;
$m < 0$ thì $f(x) < 0$ khi $x > \dfrac{-3m}{4}$, $f(x) > 0$ khi $x < \dfrac{-3}{4m}$.

II. Các dạng toán

Dạng 1. Xét dấu tích - thương các nhị thức bậc nhất

Giả sử $f(x)$ là một tích (hoặc thương) của các nhị thức bậc nhất. Ta xét dấu $f(x)$ theo các bước như sau:

Bước 1: Tìm nghiệm của các nhị thức bậc nhất và sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

Bước 2: Lập bảng xét dấu: Xét dấu các nhị thức bậc nhất và suy ra dấu của $f(x)$.

Bước 3: Kết luận về dấu của $f(x)$.

Ví dụ 4. Xét dấu biểu thức $f(x) = (3x-1)(2-x)$.

Lời giải. Ta có

- $3x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$.
- $2-x=0 \Leftrightarrow x=2$.

Bảng xét dấu của $f(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$3x-1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$2-x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu ta thấy

- $f(x)>0$ khi $x \in \left(\dfrac{1}{3};2\right)$.
- $f(x)<0$ khi $x \in \left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right) \cup (2;+\infty)$.
- $f(x)=0$ khi $x=\dfrac{1}{3}$ hoặc $x=2$.

Ví dụ 5. Xét dấu biểu thức $g(x) = \dfrac{(x+1)(3x-5)}{-2x+4}$.

Lời giải. Ta có

- $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.
- $3x-5=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{3}$.
- $-2x+4=0 \Leftrightarrow x=2$.

Bảng xét dấu của $g(x)$:

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{3}$		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$3x-5$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$-2x+4$		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Từ bảng xét dấu ta thấy

- $g(x)>0$ khi $x \in (-\infty;-1) \cup \left(\dfrac{5}{3};2\right)$.

- $g(x) < 0$ khi $x \in \left(-1; \dfrac{5}{3}\right) \cup (2; +\infty)$.
- $g(x) = 0$ khi $x = \dfrac{5}{3}$ hoặc $x = -1$.
- $g(x)$ không xác định khi $x = 2$ (trong bảng xét dấu kí hiệu bởi ||).

Ví dụ 6. Xét dấu biểu thức $h(x) = \dfrac{2x+1}{(6-2x)(5-x)}$.

Lời giải. Ta có

- $2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$.
- $6-2x = 0 \Leftrightarrow x = 3$.
- $5-x = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

Bảng xét dấu của $h(x)$:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		5		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$6-2x$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$5-x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$h(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	||	$+$	

Từ bảng xét dấu ta thấy

- $h(x) > 0$ khi $x \in \left(-\dfrac{1}{2}; 3\right) \cup (5; +\infty)$.
- $h(x) < 0$ khi $x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right) \cup (3; 5)$.
- $h(x) = 0$ khi $x = -\dfrac{1}{2}$.
- $h(x)$ không xác định khi $x = 3$ và $x = 5$.

Ví dụ 7. Xét dấu biểu thức $h(x) = \dfrac{2}{x+1} + \dfrac{3}{4-2x}$.

Lời giải. Ta có $h(x) = \dfrac{2}{x+1} + \dfrac{3}{4-2x} = \dfrac{11-x}{(x+1)(4-2x)}$

- $11-x = 0 \Leftrightarrow x = 11$.
- $x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.
- $4-2x = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng xét dấu của $h(x)$:

x	$-\infty$		-1		2		11		$+\infty$
$11-x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$4-2x$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$h(x)$		$-$	||	$+$	||	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta thấy

- $h(x) > 0$ khi $x \in (-1;2) \cup (11;+\infty)$.
- $h(x) < 0$ khi $x \in (-\infty;-1) \cup (2;11)$.
- $h(x) = 0$ khi $x = 11$.
- $h(x)$ không xác định khi $x = -1$ và $x = 2$.

Ví dụ 8. Xét dấu biểu thức $f(x) = 3x^2 - x - 2$.

Lời giải. Ta có $f(x) = 3x^2 - x - 2 = 3(x-1)\left(x+\dfrac{2}{3}\right)$

- $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
- $x + \dfrac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{2}{3}$.

Bảng xét dấu của $f(x)$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{2}{3}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+\dfrac{2}{3}$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta thấy

- $f(x) > 0$ khi $x \in \left(-\infty;-\dfrac{2}{3}\right) \cup (1;+\infty)$.
- $f(x) < 0$ khi $x \in \left(-\dfrac{2}{3};1\right)$.
- $f(x) = 0$ khi $x = -\dfrac{2}{3}$ hoặc $x = 1$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Xét dấu biểu thức $f(x) = (3-x)(5x-2)(x-1)$.

Lời giải. Ta có bảng xét dấu của $f(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{2}{5}$		1		3		$+\infty$
$3-x$		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$5x-2$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$x-1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Bài 2. Xét dấu biểu thức $f(x) = \dfrac{1-x}{2x+3}$.

Lời giải. Ta có bảng xét dấu của $f(x)$:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$2x+3$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Bài 3. Xét dấu biểu thức $f(x) = \dfrac{x-3}{(2x-1)(-x+2)}$.

Lời giải. Ta có bảng xét dấu của $f(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$2x+1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$-x+2$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Bài 4. Xét dấu biểu thức $f(x) = \dfrac{(x-3)(4-x)}{x}$.

Lời giải. Ta có bảng xét dấu của $f(x)$:

x	$-\infty$		0		3		4		$+\infty$
$x-3$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$4-x$		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
x		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$f(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	

Bài 5. Xét dấu biểu thức $f(x) = x^2 - 4$.

Lời giải. Ta có $f(x) = x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$. Bảng xét dấu của $f(x)$ là

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Bài 6. Xét dấu biểu thức $f(x)=\dfrac{3}{2x-1}+\dfrac{1}{x-2}$.

Lời giải. Ta có $f(x)=\dfrac{5x-7}{(2x-1)(x-2)}$. Bảng xét dấu của $f(x)$ là

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{7}{5}$		2		$+\infty$
$5x-7$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$2x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	

Bài 7. Xét dấu biểu thức $f(x)=\dfrac{x^2-2x+5}{x^2-4}-1$.

Lời giải. Ta có $f(x)=\dfrac{-2x+9}{x^2-4}=\dfrac{-2x+9}{(x-2)(x+2)}$. Bảng xét dấu của $f(x)$ là

x	$-\infty$		-2		2		$\frac{9}{2}$		$+\infty$
$-2x+9$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$+$	||	$-$	||	$+$	0	$-$	

Bài 8. Xét dấu biểu thức $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{x-1}+\dfrac{3}{x-2}$.

Lời giải. Ta có $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{x-1}+\dfrac{3}{x-2}=\dfrac{2x+2}{x(x-1)(x-2)}$. Bảng xét dấu của $f(x)$ là

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$2x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	||	$-$	||	$+$	

Dạng 2. Xét dấu nhị thức có chứa tham số

Khi xét dấu của nhị thức có chứa tham số cần lưu ý, nếu hệ số a có chứa tham số cần xét các trường hợp:

TH1: $a = 0$.

TH2: $a > 0$.

TH3: $a < 0$.

Mỗi trường hợp ta có bảng xét dấu tương ứng.

Ví dụ 9. Xét dấu biểu thức: $f(x) = -mx + 2$.

Lời giải. Nếu $m = 0$ thì $f(x) = 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Xét $m \neq 0$. Khi đó $f(x)$ là một nhị thức bậc nhất, có nghiệm $x_0 = \dfrac{2}{m}$. Mặt khác, $a > 0 \Leftrightarrow m < 0$ và $a < 0 \Leftrightarrow m > 0$. Vậy ta có bảng xét dấu trong hai trường hợp như sau:

- Trường hợp 1: $m < 0$

x	$-\infty$		$\dfrac{2}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

- Trường hợp 2: $m > 0$

x	$-\infty$		$\dfrac{2}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Kết luận:
$m = 0$ thì $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$;
$m < 0$ thì $f(x) < 0$ khi $x < \dfrac{2}{m}$, $f(x) > 0$ khi $x > \dfrac{2}{m}$;
$m > 0$ thì $f(x) < 0$ khi $x > \dfrac{2}{m}$, $f(x) > 0$ khi $x < \dfrac{2}{m}$.

Ví dụ 10. Xét dấu của biểu thức $f(x) = -\dfrac{m}{2}x + 5$.

Lời giải. Xét $m = 0$ thì $f(x) = 5 > 0$.
Xét $m \neq 0$, ta có hai trường hợp:

- Trường hợp 1: $\dfrac{-m}{2} < 0 \Leftrightarrow m > 0$
  Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$\dfrac{10}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

- Trường hợp 2: $\dfrac{-m}{2} > 0 \Leftrightarrow m < 0$
  Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$\dfrac{10}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Ví dụ 11. Xét dấu của biểu thức $f(x) = (m-2)x - 3 + 2m$

Lời giải. Xét $m = 2$, ta có $f(x) = 1 > 0$.
Xét $m \neq 2$, ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3-2m}{m-2}$.
Lập bảng xét dấu:

- Trường hợp 1: $m > 2$

x	$-\infty$		$\dfrac{3-2m}{m-2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

- Trường hợp 2: $m < 2$

x	$-\infty$		$\dfrac{3-2m}{m-2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Ví dụ 12. Xét dấu biểu thức $f(x) = (m-1)x - 1$ với m là một tham số đã cho.

Lời giải. Nếu $m = 1$ thì $f(x) = -1 < 0$ với mọi x.
Nếu $m \neq 1$ thì $f(x)$ là một nhị thức bậc nhất có nghiệm $x_0 = \dfrac{1}{m-1}$.
Ta có bảng xét dấu nhị thức $f(x)$ trong hai trường hợp như sau:

- Trường hợp 1: $m > 1$

x	$-\infty$		$\dfrac{1}{m-1}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

- Trường hợp 2: $m < 1$

x	$-\infty$		$\dfrac{1}{m-1}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

Bài 9. Xét dấu của biểu thức $f(x) = (m-1)x + m^2 - 1$.
Lời giải. Nếu $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ thì $f(x) = 0$.
Nếu $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ thì $f(x)$ là một nhị thức bậc nhất có nghiệm $x_0 = \dfrac{m^2-1}{m-1} = m+1$.
Ta có bảng xét dấu nhị thức $f(x)$ trong hai trường hợp như sau:

- Trường hợp 1: $m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$
  Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$m+1$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

- Trường hợp 2: $m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$
  Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$m+1$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Bài 10. Xét dấu của biểu thức $f(x) = (m^2 - 3m + 2)x + m$.
Lời giải. Xét $m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 2 \end{array}\right.$
+ Với $m = 1$ thì $f(x) = 1 > 0$.
+ Với $m = 2$ thì $f(x) = 2 > 0$.
Xét $m^2 - 3m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$ thì $f(x)$ là một nhị thức bậc nhất có nghiệm $x_0 = \dfrac{m}{m^2 - 3m + 2}$.
Ta có bảng xét dấu nhị thức $f(x)$ trong hai trường hợp như sau:

- Trường hợp 1: $m^2 - 3m + 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m > 2 \end{array}\right.$
  Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$\dfrac{m}{m^2-3m+2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

- Trường hợp 2: $m^2 - 3m + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2$
  Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$\dfrac{m}{m^2-3m+2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Bài 11. Xét dấu biểu thức:

$$f(x) = (2m-3)x + 2018$$

Lời giải. Nếu $m = \dfrac{3}{2}$ thì $f(x) = 2018 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Nếu $m \neq \dfrac{3}{2}$ thì $f(x)$ là một nhị thức bậc nhất, có nghiệm $x_0 = -\dfrac{2018}{2m-3}$.
Mặt khác, $a > 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{2}{3}$ và $a < 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{2}{3}$.
Vậy ta có bảng xét dấu nhị thức $f(x)$ trong hai trường hợp như sau:

- Trường hợp 1: $m > \dfrac{2}{3}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{2018}{2m-3}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

- Trường hợp 2: $m < \dfrac{2}{3}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{2018}{2m-3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Bài 12. Xét dấu biểu thức:

$$f(x) = (m^2+1)x - 4$$

Lời giải. Ta có với mọi $m \in \mathbb{R}$ thì $m^2 + 1 > 0$. Do đó $f(x)$ luôn là một nhị thức bậc nhất có hệ số $a > 0$ và có nghiệm $x_0 = \dfrac{4}{m^2+1}$. Vậy với mọi m, ta có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		$\dfrac{4}{m^2+1}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Bài 13. Xét dấu của biểu thức sau: $f(x) = (2x-m)(x+m)$
Lời giải. Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{m}{2} \vee x = -m$. Lập bảng xét dấu:

- Trường hợp 1: $m \geq 0$

x	$-\infty$		$-m$		$\dfrac{m}{2}$		$+\infty$
$2x-m$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+m$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- Trường hợp 2: $m < 0$

x	$-\infty$		$\frac{m}{2}$		$-m$		$+\infty$
$2x-m$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+m$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Bài 14. Xét dấu của biểu thức sau: $f(x) = \dfrac{2-x}{x-2m+1}$

Lời giải.

- Trường hợp 1: $2m-1 = 2 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$, khi đó ta có:

$$\frac{2-x}{x-2} = -1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Trường hợp 2: $m > \frac{3}{2}$. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		2		$2m-1$		$+\infty$
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-2m+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{2-x}{x-2m+1}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

- Trường hợp 3: $m < \frac{3}{2}$. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		$2m-1$		2		$+\infty$
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-2m+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{2-x}{x-2m+1}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

Dạng 3. Giải bất phương trình tích

Dạng. $P(x) > 0, P(x) \geq 0, P(x) < 0, P(x) \leq 0$ với $P(x)$ là tích của các nhị thức bậc nhất.
Phương pháp. Lập bảng xét dấu của biểu thức $P(x)$ từ đó suy ra tập nghiệm của bất phương trình đã cho.

Ví dụ 13. Giải bất phương trình $(x+1)(2-x) > 0$.

Lời giải. Ta có: $x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1; 2-x = 0 \Leftrightarrow x = 2$.
Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
VT		$-$	0	$+$	0	$-$	

Từ đó suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-1;2)$.

Ví dụ 14. Giải bất phương trình $(2x+1)(x+5)\geq 0$.

Lời giải. Ta có: $2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}, x+5=0 \Leftrightarrow x=-5$.
Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-5		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
VT		$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;-5]\cup\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Ví dụ 15. Giải bất phương trình $(x+1)(x-2)(10-2x)\leq 0$.

Lời giải. Ta có: $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1, x-2=0 \Leftrightarrow x=2, 10-2x=0 \Leftrightarrow x=5$.
Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$10-2x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
VT		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S=[-1;2]\cup[5;+\infty)$.

Ví dụ 16. Giải bất phương trình $(x+2)^2(x-1)(x+3)<0$.

Lời giải. Ta có: $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2, x-1=0 \Leftrightarrow x=1, x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$.
Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		-2		1		$+\infty$
$(x+2)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
VT		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Ví dụ 17. Giải bất phương trình $x^3+x^2-5x+3\leq 0$.

Lời giải. Ta có $x^3+x^2-5x+3\leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+3)\leq 0$.
Cho $x-1=0 \Leftrightarrow x=1; x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$.
Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
VT		$-$	0	$+$	0	$+$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -3]$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 15. Giải bất phương trình $(x-3)\left(\sqrt{2}-x\right) > 0$.
Lời giải.

x	$-\infty$		$\sqrt{2}$		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$\sqrt{2}-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x-3)(\sqrt{2}-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Tập nghiệm $S = \left(\sqrt{2}; 3\right)$.

Bài 16. Giải bất phương trình $(3-2x)(x-4) \leq 0$.
Lời giải.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
$3-2x$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$(3-2x)(x-4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Tập nghiệm $S = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right] \cup [4; +\infty)$.

Bài 17. Tìm tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{4-x^2}$.
Lời giải. Hàm số xác định khi và chỉ khi $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2-x)(2+x) \geq 0$.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$2+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2-x)(2+x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = [-2; 2]$.

Bài 18. Giải bất phương trình $(x+1)(x-2)(3-x) < 0$.
Lời giải.

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x+1)(x-2)(3-x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-1; 2) \cup (3; +\infty)$.

Dạng 4. Giải bất phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Dạng. $\dfrac{P(x)}{Q(x)} > 0, \dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0, \dfrac{P(x)}{Q(x)} < 0, \dfrac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$, với $P(x), Q(x)$ là tích của các nhị thức bậc nhất.

Phương pháp. Lập bảng xét dấu của biểu thức $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ để từ đó suy ra tập nghiệm của bất phương trình đã cho.

Ví dụ 18. Giải bất phương trình $\dfrac{2-x}{3x+6} < 0$.

Lời giải. Ta có: $2-x=0 \Leftrightarrow x=2; 3x+6=0 \Leftrightarrow x=-2$.
Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$3x+6$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{2-x}{3x+6}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

Tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

Ví dụ 19. Giải bất phương trình $\dfrac{x+7}{(x+2)(2x-1)} > 0$.

Lời giải. Ta có: $x+7=0 \Leftrightarrow x=-7; x+2=0 \Leftrightarrow x=-2; 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.
Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-7		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x+7$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
VT		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	

Tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-7;-2)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Ví dụ 20. Giải bất phương trình $\dfrac{(x-3)(x+2)}{x^2-1} \geq 1$.

Lời giải. Ta có $\dfrac{(x-3)(x+2)}{x^2-1} \geq 1 \Leftrightarrow \dfrac{(x-3)(x+2)}{x^2-1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x-5}{(x-1)(x+1)} \geq 0$.
Đặt $VT = \dfrac{-x-5}{(x-1)(x+1)}$.
Khi đó: $-x-5=0 \Leftrightarrow x=-5; x-1=0 \Leftrightarrow x=1; x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.
Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-5		-1		1		$+\infty$
$-x-5$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
VT		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;-5]\cup(-1;1)$.

Ví dụ 21. Giải bất phương trình $\dfrac{1}{x-2} \leq \dfrac{1}{2x+1}$.

Lời giải. Ta có $\dfrac{1}{x-2} \leq \dfrac{1}{2x+1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{2x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+3}{(x-2)(2x+1)} \leq 0$.
Đặt $VT = \dfrac{x+3}{(x-2)(2x+1)}$.
Cho $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3; x-2=0 \Leftrightarrow x=2; 2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.
Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
VT		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;-3]\cup\left(-\frac{1}{2};2\right)$.

Ví dụ 22. Giải bất phương trình $\dfrac{x-1}{mx-2}>0 \quad (1)$ (m là tham số).

Lời giải. Đặt $f(x)=\dfrac{x-1}{mx-2}$.

TH1: Nếu $m=0$ thì $f(x)=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}>0 \Leftrightarrow x<1$.

TH2: Nếu $m\neq 0$ thì $x-1=0\Leftrightarrow x=1; mx-2=0\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{m}$.

Để so sánh 1 và $\dfrac{2}{m}$ ta xét hiệu $1-\dfrac{2}{m}=\dfrac{m-2}{m}=g(m)$.

Bảng xét dấu của $g(m)$ như sau:

m	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$m-2$		$-$		$-$	0	$+$	
m		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{m-2}{m}$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

- Với $m<0$ thì $g(m)>0$ nên $1>\dfrac{2}{m}$.

x	$-\infty$		$\frac{2}{m}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$mx-2$		$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{x-1}{mx-2}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

Từ đó tập nghiệm của (1) là $S=\left(\dfrac{2}{m};1\right)$.

- Với $0<m\leq 2$ thì $g(m)\leq 0$ nên $1\leq\dfrac{2}{m}$.

x	$-\infty$		1		$\frac{2}{m}$		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$mx-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x-1}{mx-2}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

Từ đó tập nghiệm của (1) là $S=(-\infty;1)\cup\left(\dfrac{2}{m};+\infty\right)$.

- Với $m>2$ thì $g(m)>0$ nên $1>\dfrac{2}{m}$.

x	$-\infty$		$\frac{2}{m}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$mx-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-1}{mx-2}$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

Từ đó tập nghiệm của (1) là $S=\left(-\infty;\dfrac{2}{m}\right)\cup(1;+\infty)$.

Kết luận:

- $m=0:\ S=(-\infty;1)$.
- $m<0:\ S=\left(\dfrac{2}{m};1\right)$.
- $0<m\le 2:\ S=(-\infty;1)\cup\left(\dfrac{2}{m};+\infty\right)$.
- $m>2:\ S=\left(-\infty;\dfrac{2}{m}\right)\cup(1;+\infty)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 19. Giải bất phương trình $\dfrac{3x-1}{(x-4)(3-2x)}<0$.

Lời giải.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
$3x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$3-2x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{3x-1}{(x-4)(3-2x)}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	

Tập nghiệm $S=\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{3}{2}\right)\cup(4;+\infty)$.

Bài 20. Giải bất phương trình $\dfrac{3}{2-x}\ge 1$.

Lời giải. Ta có: $\dfrac{3}{2-x}\ge 1\Leftrightarrow \dfrac{3}{2-x}-1\ge 0\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{2-x}\ge 0$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{x+1}{2-x}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

Tập nghiệm của bất phương trình là $S=[-1;2)$.

Bài 21. Giải bất phương trình $\dfrac{2}{x-1}\le\dfrac{5}{2x-1}$.

Lời giải. Ta có: $\dfrac{2}{x-1}\le\dfrac{5}{2x-1}\Leftrightarrow\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{5}{2x-1}\le 0\Leftrightarrow\dfrac{-x+3}{(x-1)(2x-1)}\le 0$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		3		$+\infty$
$-x+3$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{-x+3}{(x-1)(2x-1)}$		$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

Tập nghiệm $S=\left(\dfrac{1}{2};1\right)\cup[3;+\infty)$

Bài 22. Giải bất phương trình $\dfrac{x^2-x+2}{x-2}\ge 2x-1$.

Lời giải. Ta có $\dfrac{x^2-x+2}{x-2}\ge 2x-1\Leftrightarrow\dfrac{x^2-x+2}{x-2}-2x+1\ge 0\Leftrightarrow\dfrac{-x(x-4)}{x-2}\ge 0$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-x(x-4)}{x-2}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

Tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;0]\cup(2;4]$.

Dạng 5. Giải bất phương trình bậc nhất chứa dấu giá trị tuyệt đối.

Cách giải: Xét dấu để phá dấu trị tuyệt đối.
Một số dạng thường gặp: Cho $a>0$, ta có

- $|f(x)|<a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)<a \\ f(x)>-a \end{cases}$.
- $|f(x)|\geq a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)\geq a \\ f(x)\leq -a \end{array}\right.$.
- $|f(x)|<|g(x)| \Leftrightarrow [f(x)+g(x)].[f(x)-g(x)]<0$.

Ví dụ 23. Giải bất phương trình $|3-2x|<x+1$.

Lời giải.

Với $3-2x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq \frac{3}{2}$ thì ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x\leq \frac{3}{2} \\ 3-2x<x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq \frac{3}{2} \\ 3x>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq \frac{3}{2} \\ x>\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3}<x\leq \frac{3}{2}.$$

Với $3-2x<0 \Leftrightarrow x>\frac{3}{2}$ thì ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x>\frac{3}{2} \\ 2x-3<x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{3}{2} \\ x<4 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2}<x<4.$$

Kết hợp hai trường hợp, ta có $\frac{2}{3}<x<4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S=\left(\frac{2}{3};4\right)$.

Ví dụ 24. Giải bất phương trình $|2x-2|+|3-x|>3$.

Lời giải. Bỏ dấu giá trị tuyệt đối ở vế trái của phương trình ta có:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$\|2x-2\|$		$2-2x$	0	$2x-2$	$\vdots$	$2x-2$	
$\|3-x\|$		$3-x$	$\vdots$	$3-x$	0	$x-3$	
VT		$5-3x$	$\vdots$	$1+x$	$\vdots$	$3x-5$	

Bất phương trình $|2x-2|+|3-x|>3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1 \\ 5-3x>3 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} 1<x\le 3 \\ 1+x>3 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x>3 \\ 3x-5>3 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1 \\ x<\dfrac{2}{3} \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} 1<x\le 3 \\ x>2 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x>3 \\ x>\dfrac{8}{3} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow x<\frac{2}{3} \text{ hoặc } 2<x\le 3 \text{ hoặc } x>3.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<\dfrac{2}{3} \\ x>2 \end{array}\right..$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S=\left(-\infty;\dfrac{2}{3}\right)\cup(2;+\infty)$.

Ví dụ 25. Giải bất phương trình $|5-8x|<11$.

Lời giải. Vì $11>0$ nên $|5-8x|<11 \Leftrightarrow \begin{cases} 5-8x<11 \\ 5-8x>-11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{3}{4} \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{3}{4}<x<2.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S=\left(-\dfrac{3}{4};2\right)$.

Ví dụ 26. Giải bất phương trình $|2x-4|\ge 2$.

Lời giải. Vì $2>0$ nên $|2x-4|\ge 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-4\ge 2 \\ 2x-4\le -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x\ge 6 \\ 2x\le 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 3 \\ x\le 1 \end{array}\right..$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S=(-\infty;1]\cup[3;+\infty)$.

Ví dụ 27. Giải bất phương trình $\left|\dfrac{x+3}{2}\right|<\left|\dfrac{6-2x}{5}\right|$.

Lời giải. Bất phương trình

$$\begin{aligned} \left|\frac{x+3}{2}\right|<\left|\frac{6-2x}{5}\right| &\Leftrightarrow 5|x+3|<2|6-2x| \\ &\Leftrightarrow (5x+15)^2<(12-4x)^2 \\ &\Leftrightarrow (5x+15+12-4x)(5x+15-12+4x)<0 \\ &\Leftrightarrow (x+27)(9x+3)<0. \end{aligned}$$

Lập bảng xét dấu của biểu thức $f(x)=(x+27)(9x+3)$, ta được:

x	$-\infty$		-27		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$x+27$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$9x+3$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	|	$-$	|	$+$	

Do đó $f(x) = (x+27)(9x+3) < 0 \Leftrightarrow -27 < x < -\frac{1}{3}$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S = \left(-27; -\frac{1}{3}\right)$.

Ví dụ 28. Giải bất phương trình $\frac{|x-1|}{x^2+3x-4} \geq 2$.

Lời giải. Điều kiện: $x^2+3x-4 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -4 \end{cases}$.
Nếu $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ thì $|x-1| = x-1$ và bất phương trình trở thành:

$$\frac{x-1}{(x-1)(x+4)} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x+4} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{-2x-7}{x+4} \geq 0 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq -\frac{7}{2}.$$

Kết hợp $x \geq 1$, ta có $x \in \varnothing$.
Nếu $x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$ thì $|x-1| = 1-x$ và bất phương trình trở thành:

$$\frac{1-x}{(x-1)(x+4)} \geq 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{x+4} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{-2x-7}{x+4} \leq 0 \Leftrightarrow x \geq -4 \text{ hoặc } x \leq -\frac{7}{2}.$$

Kết hợp $x < 1$, ta có $x \leq -4$ hoặc $-\frac{7}{2} \leq x < 1$.
Kết hợp với điều kiện, ta được $x < -4$ hoặc $-\frac{7}{2} \leq x < 1$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S = (-\infty; -4) \cup \left[-\frac{7}{2}; 1\right)$.

Ví dụ 29. Giải bất phương trình $\frac{|x+3|-x}{x} \geq 1$.

Lời giải. Điều kiện: $x \neq 0$.
Nếu $x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$ thì bất phương trình trở thành:

$$\frac{(x+3)-x}{x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{3}{x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{3-x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 3.$$

Kết hợp với $x \geq -3$ và điều kiện $x \neq 0$, ta có $0 < x \leq 3$.
Nếu Nếu $x+3 < 0 \Leftrightarrow x < -3$ thì bất phương trình trở thành:

$$\frac{-(x+3)-x}{x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{-2x-3}{x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{-3x-3}{x} \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 0.$$

Kết hợp với $x < -3$ và điều kiện $x \neq 0$, ta có $x \in \varnothing$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (0; 3]$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 23. Giải các bất phương trình sau.

a) $|3x-5| \leq 2$.

b) $|6-2x| > 6$.

c) $|7x+10| - 3 \geq 0$.

d) $\left|\frac{8}{x+1}\right| < 2$.

Lời giải.

a) $|3x-5| \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5 \leq 2 \\ 3x-5 \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \dfrac{7}{3}$.

b) $|6-2x| > 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6-2x > 6 \\ 6-2x < -6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 6 \end{array}\right.$.

c) $|7x+10| - 3 \geq 0 \Leftrightarrow |7x+10| \geq 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x+10 \geq 3 \\ 7x+10 < -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq -1 \\ x \leq -\dfrac{13}{7} \end{array}\right.$.

d) $\left|\dfrac{8}{x+1}\right| < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ 8 < 2|x+1| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ |x+1| > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ \left[\begin{array}{l} x+1 > 4 \\ x+1 < -4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < -5 \end{array}\right.$.

Bài 24. Giải bất phương trình $|2x-4| < x+1$.

Lời giải.

$$|2x-4| < x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x-4 < x+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2 \\ 4-2x < x+1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 2 \\ x < 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2 \\ x > 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 \leq x < 5 \\ 1 < x < 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow 1 < x < 5.$$

Bài 25. Giải bất phương trình $|x+5| + 9 \geq 3x$.

Lời giải.

$$|x+5| + 9 \geq 3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq -5 \\ x+5+9 \geq 3x \end{cases} \\ \begin{cases} x < -5 \\ -x-5+9 \geq 3x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq -5 \\ x \leq 7 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -5 \\ x \leq 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -5 \leq x \leq 7 \\ x < -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \leq 7.$$

Bài 26. Giải bất phương trình $|2x-9| > |7-8x|$.

Lời giải.

$$|2x-9| > |7-8x| \Leftrightarrow (2x-9)^2 > (7-8x)^2 \Leftrightarrow (-6x-2)(10x-16) > 0.$$

Lập bảng xét dấu cho biểu thức $f(x) = (-6x-2)(10x-16)$, ta được $f(x) > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{8}{5}$.

Bài 27. Giải bất phương trình $|2x+6| + |5-5x| < 2x+1$.

Lời giải. Bỏ dấu giá trị tuyệt đối ở vế trái của phương trình ta có:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$\|2x+6\|$		$-2x-6$	0	$2x+6$		$2x+6$	
$\|5-5x\|$		$5-5x$		$5-5x$	0	$5x-5$	
VT		$-1-7x$		$11-3x$		$7x+1$	

Bất phương trình $|2x+6|+|5-5x|<2x+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le -3 \\ -1-7x < 2x+1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} -3 < x \le 1 \\ 11-3x < 2x+1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x > 1 \\ 7x+1 < 2x+1 \end{cases}.$$

$\Leftrightarrow 2 < x \le 1.$

Bài 28. Giải bất phương trình $2|x-4|+3|1+x|-|x| \le 3$.

Lời giải. Bỏ dấu giá trị tuyệt đối ở vế trái của phương trình ta có:

x	$-\infty$		-1		0		4		$+\infty$
$\|x-4\|$		$4-x$		$4-x$		$4-x$	0	$x-4$	
$\|1+x\|$		$-1-x$	0	$1+x$		$1+x$		$1+x$	
$\|x\|$		$-x$		$-x$	0	x		x	
VT		$3-3x$		$5-x$		$5+x$		$3x-3$	

Bất phương trình $2|x-4|+3|1+x|-|x| \le 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le -1 \\ 3-3x \le 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} -1 < x \le 0 \\ 5-x \le 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 0 < x \le 4 \\ 5+x \le 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x > 4 \\ 3x-3 \le 3 \end{cases}.$$

$\Leftrightarrow x \in \varnothing.$

Bài 29. Giải bất phương trình $\big|x-|x-1|\big| < 2$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \big|x-|x-1|\big| < 2 &\Leftrightarrow \begin{cases} x-|x-1| < 2 \\ x-|x-1| > -2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |x-1| > x-2 \text{ (đúng với mọi } x \in \mathbb{R}) \\ |x-1| < x+2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow |x-1| < x+2 \\ &\Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 30. Giải bất phương trình $\dfrac{1}{x-1} > \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x+2}$.

Lời giải. Ta có: $\dfrac{1}{x-1} > \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x+2} \Leftrightarrow \dfrac{x(x-4)}{(x-1)(x+2)(x-2)} > 0.$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		0		1		2		4		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x(x-4)}{(x-1)(x+2)(x-2)}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

Tập nghiệm của bất phương trình $S=(-2;0)\cup(1;2)\cup(4;+\infty)$.

Bài 31. Tìm nghiệm của bất phương trình $(x-1)(4x-5)(2x-4)>0$ thỏa mãn $|x|<1$.
Lời giải. Giải bất phương trình $(x-1)(4x-5)(2x-4)>0$.

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{4}$		2		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$4x-5$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)(4x-5)(2x-4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(1;\dfrac{5}{4}\right)\cup(2;+\infty)$.
Ta có $|x|<1\Leftrightarrow -1<x<1$.
Do đó ta được $S=\emptyset$.

Bài 32. Giải bất phương trình $\left|\dfrac{2-|x|}{1+x}\right|<2$.

Lời giải. Điều kiện: $x\neq -1$.
Nếu $x\geq 0$ thì bất phương trình trở thành

$$\left|\frac{2-x}{1+x}\right|<2\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2-x}{1+x}<2\\ \dfrac{2-x}{1+x}>-2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\ x>0\end{array}\right..$$

Kết hợp với $x\geq 0$ và điều kiện $x\neq -1$, ta được $x>0$.
Nếu $x<0$ thì bất phương trình trở thành

$$\left|\frac{2+x}{1+x}\right|<2\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2+x}{1+x}<2\\ \dfrac{2+x}{1+x}>-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<-1\\ x>0\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x>-1\\ x<-\dfrac{4}{3}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>0\\ x<-\dfrac{4}{3}\end{array}\right..$$

Kết hợp với $x<0$ và điều kiện $x\neq -1$, ta được $x<-\dfrac{4}{3}$.

Vậy $x>0$ hoặc $x<-\dfrac{4}{3}$.

Bài 33. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2-|x-2|}\leq x$.
Lời giải. Nếu $x-2\geq 0\Leftrightarrow x\geq 2$ thì bất phương trình trở thành:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-x+2}\leq x\\ x^2-x+2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x^2-x+2\leq x^2\Leftrightarrow x\geq 2.$$

Kết hợp $x\geq 2$ ta được $x\geq 2$.
Nếu $x-2<0\Leftrightarrow x<2$ thì bất phương trình trở thành:

$$\sqrt{x^2+x-2}\leq x\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x-2\geq 0\\ x\geq 0\\ x^2+x-2\leq x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)(x+2)\geq 0\\ x\geq 0\\ x\leq 2\end{cases}\Leftrightarrow 1\leq x\leq 2.$$

Kết hợp với $x<2$, ta được $1\leq x<2$. Vậy $x\geq 1$.

Bài 34. Giải và biện luận bất phương trình sau: $2(m+1)x \leq (m+1)^2(x-1)$

Lời giải. Bất phương trình đã cho tương đương với:

$$[(m+1)^2 - 2(m+1)]x \geq (m+1)^2 \Leftrightarrow (m-1)(m+1)x \geq (m+1)^2$$

TH1. Với $m = -1$ bất phương trình trở thành $0 \geq 0$. Tập nghiệm của bất phương trình này là $\mathbb{R}$.

TH2. Với $m < -1$ hoặc $m > 1$ thì $(m-1)(m+1) > 0$, do đó: $x \geq \dfrac{m+1}{m-1}$. Vậy $S = \left(\dfrac{m+1}{m-1}; +\infty\right)$.

TH3. Với $-1 < m < 1$ thì $(m-1)(m+1) < 0$, do đó: $x \leq \dfrac{m+1}{m-1}$. Vậy $S = \left(-\infty; \dfrac{m+1}{m-1}\right)$.

Bài 35. Giải và biện luận hệ bất phương trình sau $\begin{cases} (x-\sqrt{5})(1-2x) > 0 & (1) \\ x - m \leq 0 & (2) \end{cases}$.

Lời giải. Tập nghiệm của bất phương trình (1) $S = \left(\dfrac{1}{2}; \sqrt{5}\right)$.

TH1. Nếu $m \leq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq m \leq \dfrac{1}{2}$. Hệ bất phương trình này vô nghiệm

TH2. Nếu $\dfrac{1}{2} < m < \sqrt{5}$, khi đó $x \leq m$. Tập nghiệm của hệ là $S = \left(\dfrac{1}{2}; m\right]$ với $m < \sqrt{5}$

TH3. Nếu $m \geq \sqrt{5}$, bất phương trình $(2) \Leftrightarrow x \leq m$.

Để hệ bất phương trình này có nghiệm thì $x \in \left(\dfrac{1}{2}; \sqrt{5}\right)$.

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình $S = \left(\dfrac{1}{2}; \sqrt{5}\right)$.

Bài 36. Giải và biện luận các bất phương trình sau

a) $(2x-4)(x-m) > 0$;

b) $\dfrac{\sqrt{2}-x}{x-2m+1} \leq 0$;

Lời giải.

a) TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Trường hợp 1. $m = 2$, bất phương trình đã cho tương đương $2(x-2)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Trường hợp 2. $m < 2$. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		m		2		$+\infty$
$2x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-m$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2x-4)(x-m)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $(2x-4)(x-m) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; m) \cup (2; +\infty)$.

Trường hợp 3. $m > 2$. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		2		m		$+\infty$
$2x-4$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-m$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2x-4)(x-m)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $(2x-4)(x-m) \Leftrightarrow x \in (-\infty;2)\cup(m;+\infty)$.

Vậy bất phương trình đã cho luốn có vô số nghiệm, tập nghiệm là

- $S=\mathbb{R}\backslash\{2\}$ với $m=2$;
- $S=(-\infty;m)\cup(2;+\infty)$ nếu $m<2$
- $S=(-\infty;2)\cup(m;\infty)$ nếu $m>2$.

b) TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{2m-1\}$.

Trường hợp 1. $2m-1=\sqrt{2} \Leftrightarrow m=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$, bất phương trình đã cho tương đương

$$-1\leq 0,\ \text{(luôn đúng với mọi } x\in\mathbb{R}).$$

Trường hợp 2. $2m-1<\sqrt{2} \Leftrightarrow m<\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		$2m-1$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$\sqrt{2}-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-2m+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{\sqrt{2}-x}{x-2m+1}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu $\dfrac{\sqrt{2}-x}{x-2m+1}\leq 0$ khi $x\in(-\infty;2m-1)\cup x\in[\sqrt{2};+\infty)$.

Trường hợp 3. $2m-1>\sqrt{2} \Leftrightarrow m>\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\sqrt{2}$		$2m-1$		$+\infty$
$\sqrt{2}-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-2m+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{\sqrt{2}-x}{x-2m+1}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu $\dfrac{\sqrt{2}-x}{x-2m+1}\leq 0$ khi $x\in(-\infty;\sqrt{2}]\cup x\in(2m-1;+\infty)$.

Vậy bất phương trình đã cho luôn có vô số nghiệm, tập nghiệm

- $S = \mathbb{R}$ nếu $m = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$;
- $S = (-\infty; 2m-1) \cup [\sqrt{2}; +\infty)$ nếu $m < \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$;
- $S = (-\infty; \sqrt{2}] \cup (2m-1; +\infty)$ nếu $m > \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$.

Bài 37. Tìm các giá trị của tham số m sao cho hệ bất phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} \dfrac{-2}{3}x + \dfrac{7}{2} & > \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{2} \\ m^2x + 1 & \geq m^4 - x. \end{cases}$$

Lời giải. TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Ta có

$$\begin{cases} \dfrac{-2}{3}x + \dfrac{7}{2} & > \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{2} \\ m^2x + 1 & \geq m^4 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ (m^2+1)x \geq m^4 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x \geq m^2 - 1. \end{cases}$$

Do đó hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$m^2 - 1 < 3 \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow (m-2)(m+2) < 0.$$

Bảng xét dấu

m	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$m-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$m+2$		$+$	0	$-$		$-$	
$(m-2)(m+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu ta có $m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ là các giá trị cần tìm.

§4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

I. Tóm tắt lí thuyết

1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Định nghĩa 1. **Bất phương trình bậc nhất hai ẩn** x, y có dạng tổng quát là

$$ax+by \leq c \qquad (1)$$

$$(ax+by<c; ax+by \geq c; ax+by>c)$$

trong đó a,b,c là những số thực đã cho, a và b không đồng thời bằng 0, x và y là các ẩn.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm bất phương trình (1) được gọi là **miền nghiệm** của nó.

⚠ *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, đường thẳng $ax+by=c$ chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng, một trong hai mặt phẳng đó là miền nghiệm của bất phương trình $ax+by \leq c$, nửa mặt phẳng kia là miền nghiệm của bất phương trình $ax+by \geq c$.*

2. Hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn

Định nghĩa 2. *Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn* gồm một số bất phương trình bậc nhất 2 ẩn x,y mà ta phải tìm các nghiệm chung của chúng. Mỗi nghiệm chung đó được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Cũng như bất phương trình bậc nhất hai ẩn, ta có thể *biểu diễn hình học tập nghiệm* của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

II. Các dạng toán

Dạng 1. Biểu diễn tập nghiệm bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Quy tắc biểu diễn hình học tập nghiệm (hay biểu diễn miền nghiệm) của bất phương trình $ax+by \leq c$ như sau:

Bước 1. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ đường thẳng Δ: $ax+by=c$.

Bước 2. Lấy một điểm $M_0(x_0;y_0)$ **không** thuộc Δ (lấy tọa độ có nhiều số 0 nhất có thể)

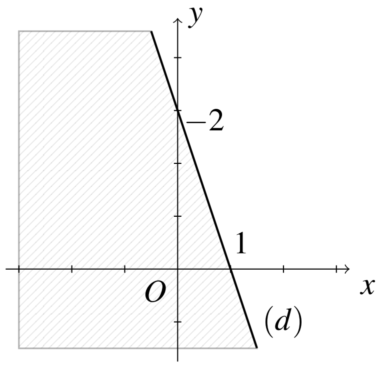
Bước 3. Tính ax_0+by_0 và so sánh với c.

Bước 4. Kết luận
Nếu $ax_0+by_0<c$ thì nửa mặt phẳng kể cả bờ Δ chứa M_0 là miền nghiệm của $ax+by \leq c$.
Nếu $ax_0+by_0>c$ thì nửa mặt phẳng kể cả bờ Δ **không** chứa M_0 là miền nghiệm của $ax+by \leq c$.

⚠ *Miền nghiệm của bất phương trình $ax+by \leq c$ bỏ đi đường thẳng $ax+by=c$ là miền nghiệm của phương trình $ax+by<c$.*

Ví dụ 1. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $3x+y \geq 3$.

Lời giải.

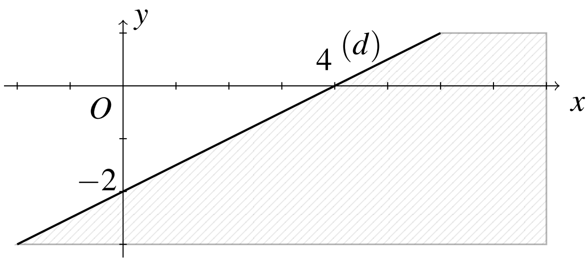


Vẽ đường thẳng $d: 3x+y=3$.
Thay tọa độ điểm $O(0;0)$ vào vế trái phương trình đường thẳng (d), ta được: $0<3$.
Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng không chứa điểm O, kể cả bờ (d). (Trên hình là nửa mặt phẳng không bị gạch bỏ).

Ví dụ 2. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $2x-4y<8$.

Lời giải.

Vẽ đường thẳng $d: 2x-4y=8$.
Thay tọa độ điểm $O(0;0)$ vào vế trái phương trình đường thẳng (d), ta được: $0<8$.
Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng chứa điểm O. (Trên hình là nửa mặt phẳng không bị gạch bỏ).



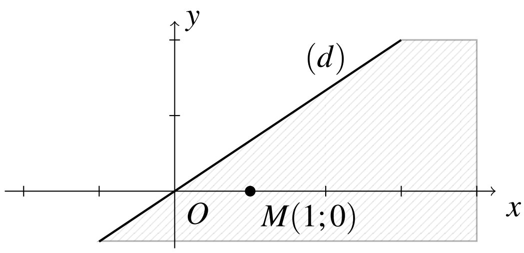
Ví dụ 3. a) Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

$$-2x+3y>0.$$

b) Cho hai điểm $A(2;1)$ và $B(3;3)$, hỏi hai điểm này cùng phía hay khác phía đối với bờ (d).

Lời giải.

a) Vẽ đường thẳng $d: -2x+3y=0$.
Thay tọa độ điểm $M(1;0)$ vào vế trái phương trình đường thẳng (d), ta được: $-2<0$.
Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng không chứa điểm M. (Trên hình là nửa mặt phẳng không bị gạch bỏ).



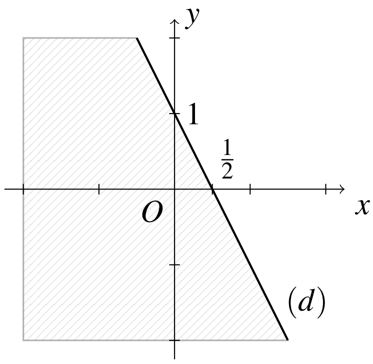
b) Thế tọa độ điểm A vào vế trái của phương trình đường thẳng (d) ta được $-2\cdot2+3\cdot1=-1<0$. (1)
Thế tọa độ điểm B vào vế trái của phương trình đường thẳng (d) ta được $-2\cdot3+3\cdot3=3>0$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra hai điểm nằm ở hai phía đối với bời (d).

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

Bài 1. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $x+\frac{3}{2}y\geq 1-x+\frac{1}{2}y$.

Lời giải.

$x+\frac{3}{2}y \geq 1-x+\frac{1}{2}y \Leftrightarrow 2x+y \geq 1$
Vẽ đường thẳng $d: 2x+y=1$.
Thay tọa độ điểm $O(0;0)$ vào vế trái phương trình đường thẳng (d), ta được: $0<1$.
Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng không chứa điểm O, kể cả bờ (d). (Trên hình là nửa mặt phẳng không bị gạch bỏ).

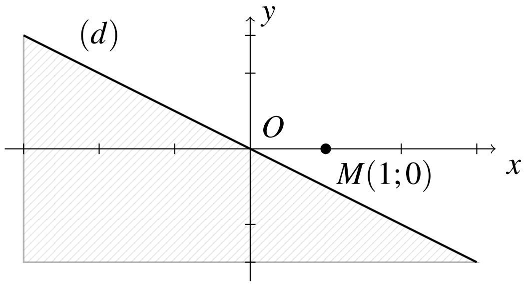


Bài 2. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

$$-2017x-2018y \leq 2016y.$$

Lời giải.

$-2017x-2018y \leq 2016y \Leftrightarrow -x-2y \leq 0$
Vẽ đường thẳng $d: -x-2y=0$.
Thay tọa độ điểm $M(1;0)$ vào vế trái phương trình đường thẳng (d), ta được: $-1<0$.
Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng chứa điểm M, kể cả bờ (d). (Trên hình là nửa mặt phẳng không bị gạch bỏ).

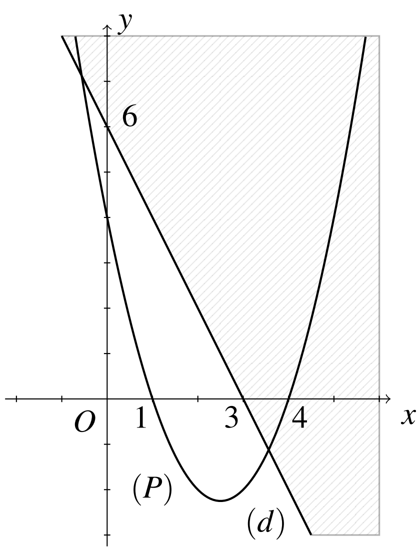


Bài 3. a) Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}<1$.
b) Tìm điểm A thuộc miền nghiệm của bất phương trình trên. Biết rằng điểm A là giao điểm của parabol (P) có dạng $y=x^2-5x+4$ và trục hoành.

Lời giải.

a) $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}<1 \Leftrightarrow 2x+y<6$
Vẽ đường thẳng $d: 2x+y=6$.
Thay tọa độ điểm $O(0;0)$ vào vế trái phương trình đường thẳng (d), ta được: $0<6$.
Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng chứa điểm O. (Trên hình là nửa mặt phẳng không bị gạch bỏ).

b) Điểm A nằm trên parabol (P) có dạng $y=x^2-5x+4$ và trục hoành nên hoành độ của A là nghiệm của phương trình $x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=4.\end{array}\right.$
Suy ra ta được hai điểm $(1;0)$ và $(4;0)$. Lần lượt thế tọa độ từng điểm vào vế trái của phương trình đường thẳng (d), do A thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho nên ta được A có tọa độ là $(1;0)$.



Dạng 2. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

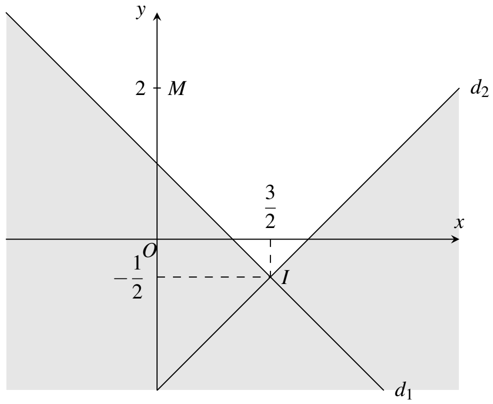
- Viết các bất phương trình trong hệ dưới dạng phương trình đường thẳng (thay dấu lớn, bé bởi dấu bằng).
- Vẽ các đường thẳng trên cùng một hệ trục tọa độ.
- Xác định một điểm M thỏa các bất phương trình trong hệ.
- Lần lượt tô đậm các nửa mặt phẳng không chứa M và có bờ là các đường thẳng đã vẽ. Ta được miền nghiệm của hệ.

Ví dụ 4. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} x+y>1 \\ x-y<2 \end{cases}$$

Lời giải.

Vẽ các đường thẳng
$d_1 : x+y=1$;
$d_2 : x-y=2$.
Vì điểm $M(0,2)$ có tọa độ thỏa mãn các bất phương trình trong hệ nên ta tô đậm các nửa mặt phẳng bờ d_1, d_2 không chứa M.
Miền không bị tô đậm trong hình vẽ và không chứa các tia giới hạn miền là miền nghiệm của hệ đã cho.

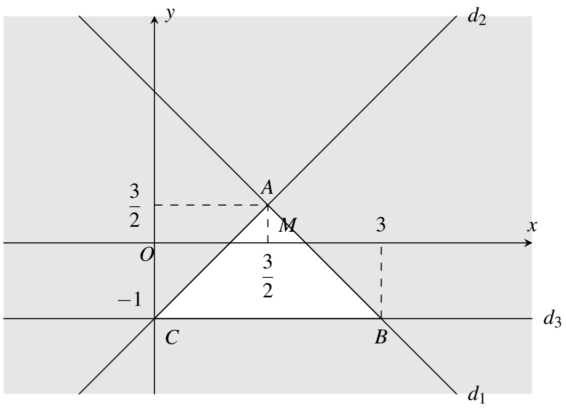


Ví dụ 5. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} x+y<2 \\ x-y>1 \\ \quad y>-1 \end{cases}$$

Lời giải.

Vẽ các đường thẳng
$d_1 : x+y=2$,
$d_2 : x-y=1$,
$d_3 : y=-1$.
Vì điểm $M\left(\dfrac{3}{2},0\right)$ có tọa độ thỏa mãn các bất phương trình trong hệ nên ta tô đậm các nửa mặt phẳng bờ d_1, d_2, d_3 không chứa M. Miền không bị tô đậm trong hình vẽ, không bao gồm các đoạn giới hạn miền là miền nghiệm của hệ đã cho.



Ví dụ 6. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} 2x+5y>2 \\ x-3y\geq 1 \\ x+y<3 \end{cases}$$

Lời giải.

Vẽ các đường thẳng

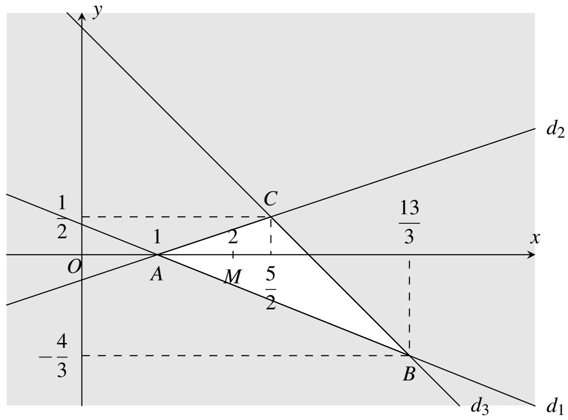
$d_1: 2x+5y=2$,

$d_2: x-3y=1$,

$d_3: x+y=3$.

Vì điểm $M(2,0)$ có tọa độ thỏa mãn các bất phương trình trong hệ nên ta tô đậm các nửa mặt phẳng bờ d_1, d_2, d_3 không chứa M.

Miền không bị tô đậm trong hình vẽ có chứa đoạn AC và không chứa các điểm A, C, không chứa các đoạn AB, BC là miền nghiệm của hệ đã cho.



Ví dụ 7. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} 2x+y\geq 2 \\ x-2y\leq 1 \\ y\leq 2 \\ x\leq 3 \end{cases}$$

Lời giải.

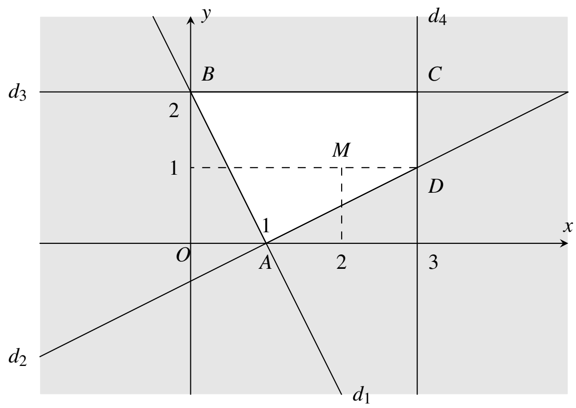
Vẽ các đường thẳng

$d_1: 2x+y=2$,

$d_2: x-2y=1$,

$d_3: y=2$, $d_4: x=3$.

Vì điểm $M(2,1)$ có tọa độ thỏa mãn các bất phương trình trong hệ nên ta tô đậm các nửa mặt phẳng bờ d_1, d_2, d_3, d_4 không chứa M. Miền không bị tô đậm trong hình vẽ là miền nghiệm của hệ đã cho bao gồm các đoạn thẳng xác định miền.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 4. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} x+2y\geq 1 \\ 3x-y\leq 2 \end{cases}$$

Bài 5. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} x-2y<1 \\ x+3y>-2 \\ -x+y<2 \end{cases}$$

Bài 6. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} 3x+y \leq 5 \\ x+y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Bài 7. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} 3x+y \geq 9 \\ x > y-2 \\ 3y \geq 4-x \\ y \leq 5 \end{cases}$$

Bài 8. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}-1<0 \\ x-\dfrac{2y}{3} \leq 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Bài 9. Xác định hình tính của đa giác biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} 2x+y \geq 1 \\ x-2y \geq -2 \\ 2x+y \leq 5 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

Lời giải. Hướng dẫn: đa giác biểu diễn miền nghiệm là hình thang vuông.

Bài 10. Xác định hình tính của đa giác biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} x+4y \geq 9 \\ x+4y \leq 17 \\ x-4y \geq -7 \\ x-4y \leq 1 \end{cases}$$

Lời giải. Hướng dẫn: Đa giác biểu diễn miền nghiệm là hình bình hành.

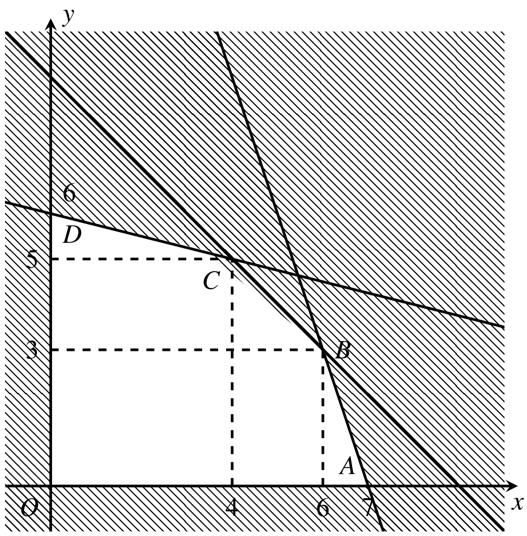
Dạng 3. Các bài toán thực tiễn

Ví dụ 8. Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa $24g$ hương liệu, 9 lít nước và $210g$ đường để pha chế nước cam và nước táo. Để pha chế 1 lít nước cam cần $30g$ đường, 1 lít nước và $1g$ hương liệu; pha chế 1 lít nước táo cần $10g$ đường, 1 lít nước và $4g$ hương liệu. Mỗi lít nước cam nhận được 60 điểm thưởng, mỗi lít nước táo nhận được 80 điển thưởng. Hỏi cần pha chế bao nhiêu lít nước trái cây mỗi loại để được số điểm thưởng là lớn nhất.

Lời giải.

- Gọi x, y lần lượt là số lít nước cam và táo của một đội pha chế $(x, y \geq 0)$.

- Số điểm thưởng của đội chơi này là $f(x;y) = 60x + 80y$.
- Số gam đường cần dùng là $30x + 10y$.
- Số lít nước cần dùng là $x + y$.
- Số gam hương liệu cần dùng là $x + 4y$
- Vì trong cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi sử dụng tối đa $24g$ hương liệu, 9 lít nước và $210g$ đường nên ta có hệ bất phương trình $\begin{cases} 30x + 10y \leq 210 \\ x + y \leq 9 \\ x + 4y \leq 24 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y \leq 21 \\ x + y \leq 9 \\ x + 4y \leq 24 \\ x, y \geq 0 \end{cases} (*)$.
- Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x;y)$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình $(*)$.
- Miền nghiệm của hệ bất phương trình$(*)$ là ngũ giác $OABCD$ (kể cả biên). Hàm số $f(x;y) = 60x + 80y$ sẽ đạt giá trị lớn nhất trên miền nghiệm của hệ bất phương trình $(*)$ khi $(x;y)$ là toạ độ của một trong các đỉnh $O(0;0), A(7;0), B(6;3), C(4;5), D(0;6)$.
- Ta có: $f(0;0) = 0; f(7;0) = 420; f(6;3) = 600; f(4;5) = 640; f(0;6) = 480$.
  Suy ra $f(4;5)$ là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x;y)$ trên miền nghiệm của hệ $(*)$.
  Như vậy để được số điểm thưởng là lớn nhất cần pha chế 6 lít nước cam và 5 lít nước táo.



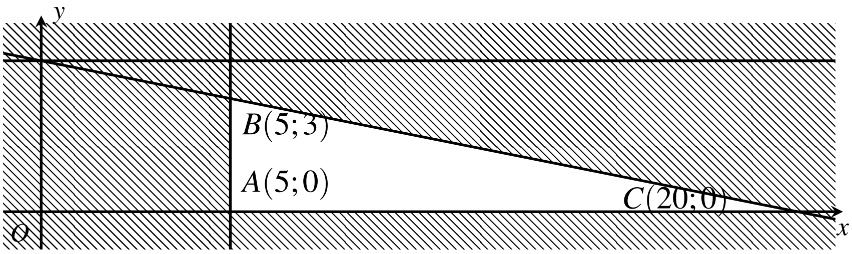
Ví dụ 9. Một công ty kinh doanh thương mại chuẩn bị cho một đợt khuyến mại nhằm thu hút khách hàng bằng cách tiến hành quảng cáo sản phẩm của công ty trên hệ thống phát thanh và truyền hình. Chi phí cho 1 phút quảng cáo trên sóng phát thanh là 800.000 đồng, trên sóng truyền hình là 4.000.000 đồng. Đài phát thanh chỉ nhận phát các chương trình quảng cáo dài ít nhất là 5 phút. Do nhu cầu quảng cáo trên truyền hình lớn nên đài truyền hình chỉ nhận phát các chương trình dài tối đa là 4 phút. Theo các phân tích, cùng thời lượng một phút quảng cáo, trên truyền hình sẽ có hiệu quả gấp 6 lần trên sóng phát thanh. Công ty dự định chi tối đa 16.000.000 đồng cho quảng cáo. Công ty cần đặt thời lượng quảng cáo trên sóng phát thanh và truyền hình như thế nào để hiệu quả nhất?

Lời giải. Gọi thời lượng công ty đặt quảng cáo trên sóng phát thanh là x (phút), trên truyền hình là y (phút).
Chi phí cho việc này là: $800.000x + 4.000.000y$ (đồng).
Mức chi này không được phép vượt qúa mức chi tối đa, tức $800.000x + 4.000.000y \leq 16.000.000$ hay $x + 5y - 20 \leq 0$.

Do các điều kiện đài phát thanh, truyền hình đưa ra, ta có $x \geq 5, y \leq 4$.
Đồng thời do x, y là thời lượng nên $x \geq 0, y \geq 0$.
Hiệu quả chung của quảng cáo là $x + 6y$.
Bài toán trở thành: Tìm x, y sao cho $f(x;y) = x + 6y$ đạt giá trị lớn nhất với các điều kiện

$$\begin{cases} x + 5y - 20 \leq 0 \\ x \geq 5 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases} \quad (*).$$

Hàm số $f(x;y) = x + 6y$ sẽ đạt giá trị lớn nhất trên miền nghiệm của hệ bất phương trình $(*)$ khi $(x;y)$ là tọa độ của một trong các đỉnh $A(5;0)$, $B(5;3)$, $C(20;0)$.
Ta có $f(5;3) = 23, f(5;0) = 5, f(20,0) = 20$.
Suy ra giá trị lớn nhất của $M(x;y)$ bằng 23 tại $(5;3)$ tức là nếu đặt thời lượng quảng cáo trên sóng phát thanh là 5 phút và trên truyền hình là 3 phút thì sẽ đạt hiệu quả nhất?



Ví dụ 10. Trong một cuộc thi gói bánh vào dịp năm mới, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 20 kg gạo nếp, 2 kg thịt ba chỉ, 5 kg đậu xanh để gói bánh chưng và bánh ống. Để gói một cái bánh chưng cần $0,4$ kg gạo nếp, $0,05$ kg thịt và $0,1$ kg đậu xanh; để gói một cái bánh ống cần $0,6$ kg gạo nếp, $0,075$ kg thịt và $0,15$ kg đậu xanh. Mỗi cái bánh chưng nhận được 5 điểm thưởng, mỗi cái bánh ống nhận được 7 điểm thưởng. Hỏi cần phải gói mấy cái bánh mỗi loại để được nhiều điểm thưởng nhất?

Lời giải.

- Gọi số bánh chưng gói được là x, số bánh ống gói được là y. Khi đó số điểm thưởng là $f(x;y) = 5x + 7y$.
- Số kg gạo nếp cần dùng là $0,4x + 0,6y$.
- Số kg thịt ba chỉ cần dùng là $0,05x + 0,075y$.
- Số kg đậu xanh cần dùng là $0,1x + 0,15y$.
- Vì trong cuộc thi này chỉ được sử dụng tối đa 20 kg gạo nếp, 2 kg thịt ba chỉ và 5 kg đậu xanh nên ta có hệ bất phương trình

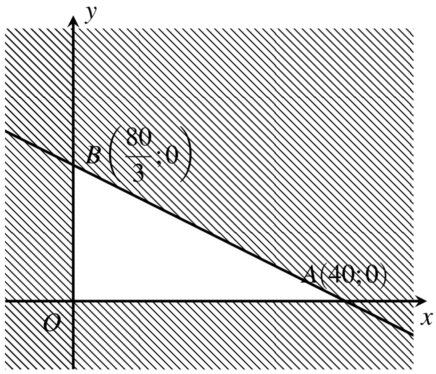
$$\begin{cases} 0,4x + 0,6y \leq 201 \\ 0,05x + 0,075y \leq 2 \\ 0,1x + 0,15y \leq 5 \\ 0,1x + 0,15y \leq 5 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y \leq 100 \\ 2x + 3y \leq 80 \\ 2x + 3y \leq 100 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y \leq 80 \\ x, y \geq 0 \end{cases} (*).$$

- Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x;y)$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình $(*)$.
- Miền nghiệm của hệ bất phương trình $(*)$ là tam giác OAB (kể cả biên).

- Hàm số $f(x;y) = 5x + 5y$sẽ đạt giá trị lớn nhất trên miền nghiệm của hệ bất phương trình $(*)$ khi $(x;y)$ là toạ độ một trong các đỉnh $O(0;0), A(40;0), B\left(0;\dfrac{80}{3}\right)$.

- Ta có: $f(0;0) = 0, f(40;0) = 200, f\left(0;\dfrac{80}{3}\right) = \dfrac{560}{3}$.

- Suy ra $f(x;y)$ lớn nhất khi $(x;y) = (40;0)$. Do đó cần phải gói 40 cái bánh chưng để nhận được số điểm thưởng là lớn nhất.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 11. Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kg thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit. Mỗi kg thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit. Biết rằng gia đình này chỉ mua tối đa $1,6$ kg thịt bò và $1,1$ kg thịt lợn; giá tiền 1 kg thịt bò là 45 nghìn đồng, 1 kg thịt lợn là 35 nghìn đồng. Hỏi gia đình đó phải mua bao nhiêu kg thịt mỗi loại để số tiền bỏ ra là ít nhất?

Lời giải.

- Gọi x và y lần lượt là số kg thịt bò và thịt lợn mà gia đình đó mua mỗi ngày $(0 \le x \le 1,6; 0 \le y \le 1,1)$.

- Khi đó chi phí để mua số thịt trên là $f(x;y) = 45x + 35y$ nghìn đồng.

- Trong x kg thịt bò chứa $800x$ đơn vị protein và $200x$ đơn vị lipit.

- Trong y kg thịt lợn chứa $600x$ đơn vị protein và $400y$ đơn vị lipit.

- Suy ra số đơn vị protein và số đơn lipit lần lượt là $800x + 600y$ đơn vị và $200x + 400y$ đơn vị.

- Do gia đình này cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày nên ta có hệ bất phương trình sau $\begin{cases} 800x + 600y \ge 900 \\ 200x + 400y \ge 400 \\ 0 \le x \le 1,6 \\ 0 \le y \le 1,1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 6y \ge 9 \\ x + 2y \ge 2 \\ 0 \le x \le 1,6 \\ 0 \le y \le 1,1 \end{cases} (*)$

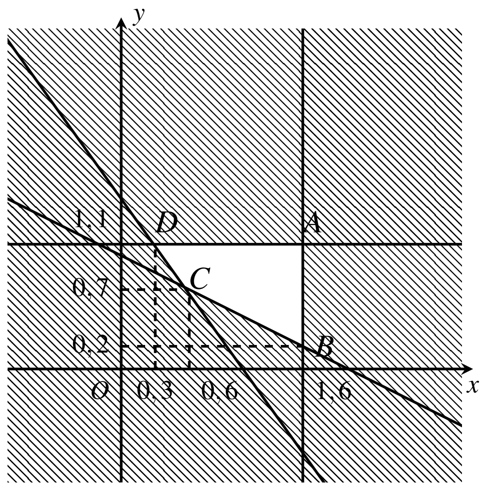
- Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x;y)$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình $(*)$.

- Miền nghiệm của hệ bất phương trình $(*)$ là tứ giác $ABCD$ (kể cả biên).

- Hàm số $f(x;y) = 45x + 35y$ sẽ đạt giá trị nhỏ nhất khi $(x;y)$ là tọa độ của một trong các đỉnh $A(1,6;1,1)$, $B(1,6;0,2)$, $C(0,6;0,7)$, $D(0,3;1,1)$.

- Ta có: $f(1,6;1,1) = 110,5$; $f(1,6;0,2) = 79$; $f(0,6;0,7) = 51,5$; $f(0,3;1,1) = 52$.

- Suy ra $f(x;y)$ nhỏ nhất khi $(x;y) = (0,6;0,7)$. Do đó gia đình này cần phải mua $0,6$ kg thịt bò và $0,7$ kg thịt lợn để số tiền bỏ ra là ít nhất.

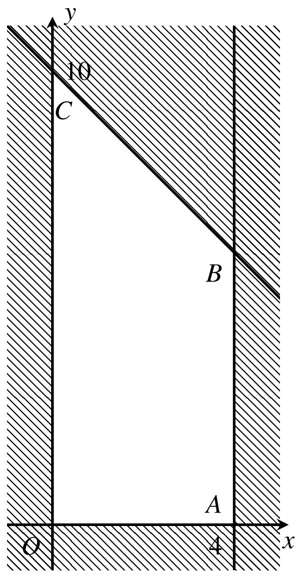


Bài 12. Một gia đình định trồng cà phê và ca cao trên diện tích 10 ha. Nếu trồng cà phê thì cần 20 công và thu về 10.000.000 đồng trên diện tích mỗi ha, nếu trồng cà thì cần 30 công và thu 12.000.000 đồng trên diện tích mỗi ha. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên với diện tích là bao nhiêu để thu được nhiều tiền nhất. Biết rằng cà phê do các thành viên trong gia đình tự chăm sóc và số công không vượt quá 80, còn ca cao gia đình thuê người làm với giá 100.000 đồng cho mỗi công?

Lời giải. Gọi x và y lần lượt là số ha cà phê và ca cao mà hộ nông dân này trồng $(x, y \geq 0)$.
Số tiền cần bỏ ra để thuê người trồng ca cao là $30y.100000 = 3000000y$ (trồng).
Lợi nhuận thu được là $f(x;y) = 1000000x + 12000000 - 3000000y$
$\Rightarrow f(x;y) = 10000000x + 9000000y$ (đồng).
Vì số công để trồng cà phê không vượt qua 80 nên $20x \leq 80 \Leftrightarrow x \leq 4$.

Ta có hệ bất phương trình sau $\begin{cases} x + y \leq 10 \\ 0 \leq x \leq 4 \quad (*). \\ y \geq 0 \end{cases}$

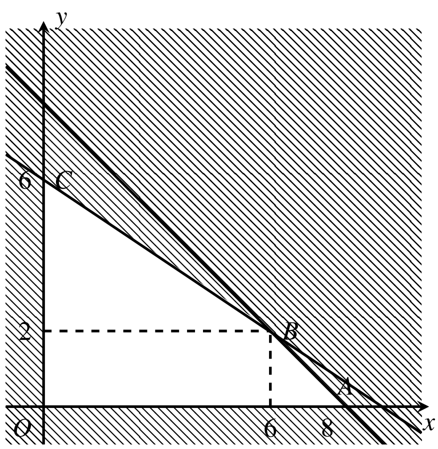
Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $f(x;y)$ trên miền nghiệm của hệ $(*)$.
Miền nghiệm của hệ $(*)$ là tứ giác $OABC$ (kể cả biên). Hàm số $f(x;y)$ sẽ đạt giá trị lớn nhất khi $(x;y)$ là toạ độ của một trong các đỉnh $O(0;0)$, $A(4;0)$, $B(4;6)$, $C(0;10)$. Suy ra $f(x;y)$ lớn nhất khi $(x;y) = (4;6)$. Như vậy cần phải trồng 4 ha cà phê và 6 ha ca cao để thu về lợi nhuận lớn nhất



Bài 13. Một hộ nông dân định trồng đậu và cà trên diện tích 8 ha. Nếu trồng đậu thì cần 20 công và thu 3000000 đồng trên diện tích mỗi ha, nếu trồng cà thì cần 30 công và thu 4000000 đồng trên diện tích mỗi

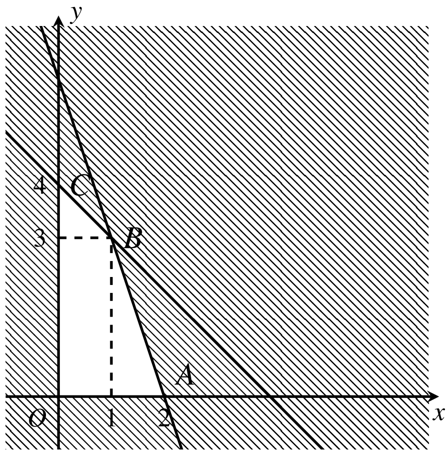
ha. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên với diện tích là bao nhiêu để thu được nhiều tiền nhất biết rằng tổng số công không quá 180?

Lời giải. Gọi số ha đậu và cà mà hộ nông dân này trồng lần lượt là x và $y (x, y \geq 0)$.
Lợi nhuận thu được là $f(x;y) = 3000000x + 4000000y$ (đồng).
Tổng số công dùng để trông x ha đậu và y ha cà là $20x + 30y$.
Ta có hệ bất phương trình sau $\begin{cases} x+y \leq 8 \\ 20x+30y \leq 180 \\ x,y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \leq 8 \\ 2x+3y \leq 18 \\ x,y \geq 0 \end{cases}$.
Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x;y)$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình $(*)$. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $(*)$ là tứ giác $OABC$ (kể cả biên).
Hàm số $f(x;y)$ sẽ đạt giá trị lớn nhất khi $(x;y)$ là tọa độ của một trong các đỉnh $O(0;0)$, $A(8;0)$, $B(6;2)$, $C(0;6)$.
Ta có: $f(0;0) = 0, f(8;0) = 24000000, f(6;2) = 26000000, f(0;6) = 2400000$.
Suy ra $f(x;y)$ lớn nhất khi $(x;y) = (6;2)$ tức là hộ nông dân này cần phải tròng 6 ha đậu và 2 ha cà thì sẽ thu về lợi nhuận lớn nhất.



Bài 14. Một phân xưởng có hai máy đặc chủng M_1, M_2 sản xuất hai loại sản phẩm kí hiệu là A và B. Một tấn sản phẩm loại A lãi 2 triệu đồng, một tấn sản phẩm loại B lãi $1,6$ triệu đồng. Muốn sản xuất một tấn sản phẩm loại A phải dùng máy M_1 trong 3 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Muốn sản xuất một tấn sản phẩm loại B phải dùng máy M_1 trong 1 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Một máy không thể dùng để sản xuất đồng thời hai loại sản phẩm. Máy M_1 làm việc không quá 6 giờ một ngày, máy M_2 làm việc không quá 4 giờ một ngày. Hỏi số tiền lãi lớn nhất mà phân xưởng này có thể thu được trong một ngày là bao nhiêu?

Lời giải. Gọi x, y lần lượt là số tấn sản phẩm loại A, B mà phân xưởng này sản xuất trong một ngày $(x, y > 0)$.
Khi đó số tiền lãi một ngày của phân xưởng này là $f(x;y) = 2x + 1,6y$ (triệu đồng); số giờ làm việc trong ngày của máy M_1 là $3x + y$ và số giờ làm việc trong ngày của máy M_2 là $x + y$.
Vì mỗi ngày máy M_1 làm việc không quá 6 giờ và máy M_2 làm việc không quá 4 giờ nên ta có hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x+y \leq 6 \\ x+y \leq 4 \quad (*). \\ x,y \geq 0 \end{cases}$
Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x;y)$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình $(*)$.
Miền nghiệm của hệ bất phương trình $(*)$ là tứ giác $OABC$ (kể cả biên).
Hàm số $f(x;y)$ sẽ đạt giá trị lớn nhất trên miền nghiệm của hệ bất phương trình $(*)$ khi $(x;y)$ là toạ độ một trong các đỉnh $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(1;3)$, $C(0;4)$.
Ta có $f(0;0) = 0; f(2;0) = 4; f(1;3) = 6,8; f(0;4) = 6,4$.
Suy ra $\max f(x;y) = 6,8$ khi $(x;y) = (1;3)$.



Bài 15. Một công ty cần thuê xe để chở 140 người và 9 tấn hàng. Nơi thuê xe có hai loại xe A và B, trong đó loại xe A có 10 chiếc và loại xe B có 9 chiếc. Một chiếc xe loại A cho thuê với giá 4 triệu đồng, một chiếc xe loại B cho thuê với giá 3 triệu. Biết rằng mỗi xe loại A có thể chở tối đa 20 người và $0,6$ tấn hàng; mỗi xe loại B có thể chở tối đa 10 người và $1,5$ tấn hàng. Hỏi phải thuê bao nhiêu xe mỗi loại để chi phí bỏ ra là ít nhất?

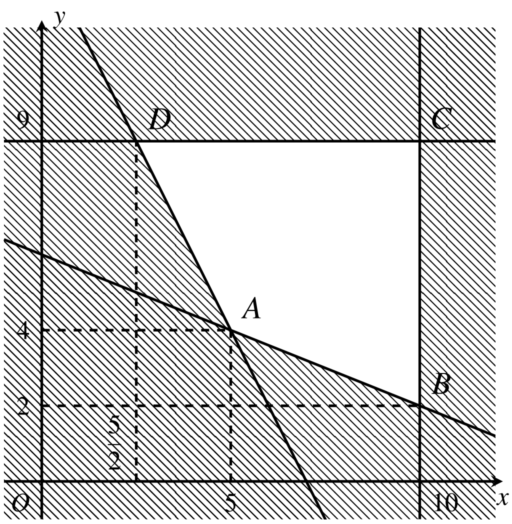
Lời giải. Gọi x, y lần lượt là số xe loại A và B. Khi đó số tiền cần bỏ ra để thuê xe là $f(x;y) = 4x + 3y$. Ta có x xe loại A sẽ chở được $20x$ người và $0,6x$ tấn hàng; y xe loại B sẽ chở được $10y$ người và $1,5y$ tấn hàng. Suy ra x xe loại A và y xe loại B se chở được $20x + 10y$ người và $0,6x + 1,5y$ tấn hàng.

Ta có hệ bất phương trình sau $\begin{cases} 20x + 10 \geq 40 \\ 0,6x + 1,5y \geq 9 \\ 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y \geq 14 \\ 2x + 5y \geq 30 \\ 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \end{cases} (*)$

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x;y)$ trên miền nghiệm của hệ $(*)$. Miền nghiệm của hệ $(*)$ là tứ giác $ABCD$ (kể cả biên). Hàm số $f(x;y) = 4x + 3y$ sẽ đạt giá trị nhỏ nhất trên miền nghiệm của hệ bất phương trình $(*)$ khi $(x;y)$ là tọa độ của một trong các đỉnh $A(5;4)$, $B(10;2)$, $C(10;9)$, $D\left(\dfrac{5}{2};9\right)$.

Ta có: $f(5;4) = 32; f(10;2) = 46; f(10;9) = 67; f\left(\dfrac{5}{2};9\right) = 37$.

Suy ra $f(x;y)$ nhỏ nhất khi $(x;y) = (5;4)$. Như vậy để chi phí vận chuyển thấp nhất cần thuê 5 xe loại A và 4 xe loại B.

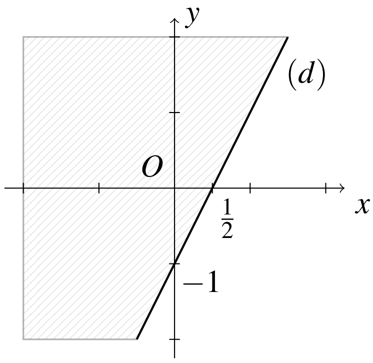


BÀI TẬP TỔNG HỢP

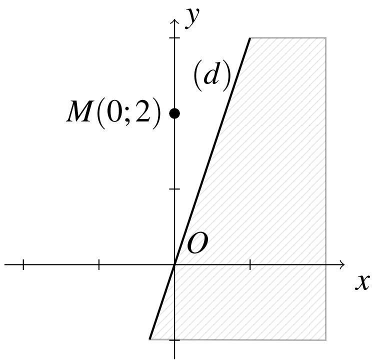
Bài 16. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $x - y > 1 - 3x$.

Lời giải.

$x-y>1-3x \Leftrightarrow 2x-y>1$
Vẽ đường thẳng $d: 2x-y=1$.
Thay tọa độ điểm $O(0;0)$ vào vế trái phương trình đường thẳng (d), ta được: $0<1$.
Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng không chứa điểm O. (Trên hình là nửa mặt phẳng không bị gạch bỏ).

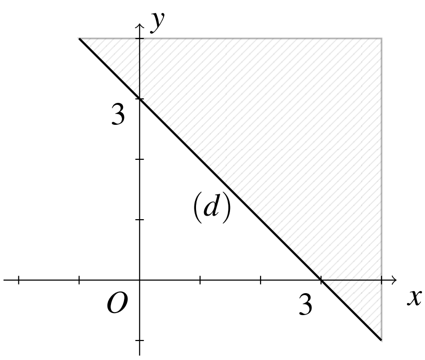


Bài 17. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $3x-y \leq 0$.
Lời giải.
Vẽ đường thẳng $d: 3x-y=0$.
Thay tọa độ điểm $M(0;2)$ vào vế trái phương trình đường thẳng (d), ta được: $-2<0$.
Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng không chứa điểm M, kể cả bờ (d). (Trên hình là nửa mặt phẳng không bị gạch bỏ).



Bài 18. a) Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $x+y-3<0$.
b) Tìm điều kiện của m và n để mọi điểm thuộc đường thẳng (d'): $(m^2-2)x-y+m+n=0$ đều là nghiệm của bất phương trình trên.
Lời giải.

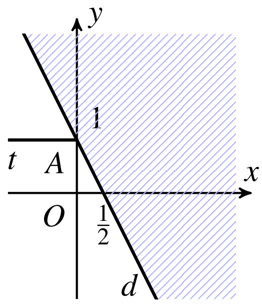
a) Vẽ đường thẳng $d: x+y=3$.
Thay tọa độ điểm $O(0;0)$ vào vế trái phương trình đường thẳng (d), ta được: $0<3$.
Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng chứa điểm O. (Trên hình là nửa mặt phẳng không bị gạch bỏ).



b) Để mọi điểm thuộc đường thẳng (d') đều là nghiệm của bất phương trình thì điều kiện cần là (d') phải song song với (d). Ta có $d: y=-x+3$ và $d': y=(m^2-2)x+m+n$. Để (d) song song (d') thì $\begin{cases} m^2-2=-1 \\ m+n \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m=1 \\ n \neq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} m=-1 \\ n \neq 4 \end{cases} \end{array}\right.$
Với $\begin{cases} m=1 \\ n \neq 2 \end{cases}$ thì ta được $d': y=-x+n+1$. Để thỏa yêu cầu bài toán thì điều kiện đủ là đường thẳng (d') là đồ thị của đường thẳng (d) khi (d) tịnh tiến xuống dưới theo trục Oy. Tức $n+1<3 \Leftrightarrow n<2$.

Bài 19. Cho bất phương trình $2x+y-1 \leq 0$.
a) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình đã cho trong mặt phẳng tọa độ Oxy.
b) Tìm tất cả giá trị tham số m để điểm $M(m,1)$ nằm trong miền nghiệm của bất phương trình đã và biểu diễn tập hợp M tìm được trong cùng hệ trục tọa độ Oxy ở câu a).
Lời giải.

a) Đường thẳng $(d){:}\,2x+y-1=0$ có đồ thị như hình vẽ bên. Ta có $2.0+0-1<0$. Do đó, miền nghiệm là đường thẳng (d) và miền không gạch chéo như hình vẽ bên (Miền chứa gốc tọa độ).
b) Để M là một nghiệm thì $2m+1-1\le 0 \Leftrightarrow m\le 0$. Vì M nằm trên đường thẳng $(\Delta): y=1$. Do đó, tập hợp tất cả điểm M là nghiệm của bất phương trình trình đã cho là tia At như hình vẽ.



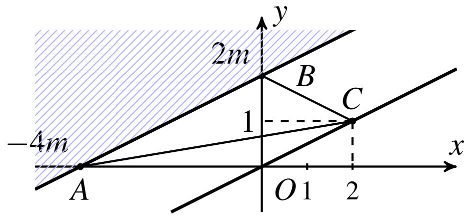
Bài 20. Cho bất phương trình $x-2y+4m>0$.

a) Tùy theo giá trị tham số m, hãy biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình đã cho trong hệ trục tọa độ Oxy.

b) Gọi A,B lần lượt là giao của đường thẳng $x-2y+4m=0$ với trục hoành và trục tung. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để tập nghiệm của bất phương trình đã cho chứa điểm $C(2;1)$ sao cho diện tích tam giác ABC bằng 4.

Lời giải.

a) Xét đường thẳng $(d_m){:}\,x-2y+4m=0$ có đồ thị như hình vẽ bên. Ta có $0-2.0+4m=4m$. Do đó, với mọi $m\neq 0$ miền nghiệm luôn chứa gốc tọa độ. Nếu $m=0$ thì miền nghiệm chứa điểm $(1;0)$. Vậy với mọi m miền nghiệm là miền không gạch chéo như hình vẽ bên.
b) Để C là một nghiệm của bất phương trình đã cho thì $2-2+4m>0\Leftrightarrow m>0$. Khi đó, $OC \parallel (d_m)$, suy ra $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABO}=4m^2$. Theo giả thiết, ta có $4m^2=4\Leftrightarrow m=1$.



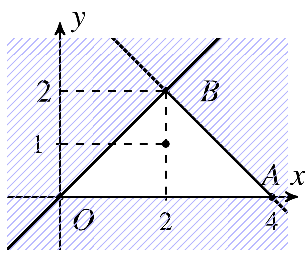
Bài 21. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} y\ge 0\\ x-y\ge 0\\ x+y-4\le 0\end{cases}.$

a) Biểu diễn tập nghiệm của hệ đã trong mặt phẳng tọa độ Oxy.

b) Tính diện tích miền nghiệm đó.

Lời giải.

a) Vẽ các đường thẳng $x-y=0$ và $x+y-4=0$ trên cùng hệ trục tọa độ. Chọn điểm $(2,1)$ để xác định miền nghiệm. Khi đó ta được miền nghiệm như hình vẽ bên.
b) Từ hình vẽ bên ta có $OA=4$ và độ dài đường cao của tam giác OAB hạ từ B bằng 2. Vậy $S_{\Delta OAB}=4$.

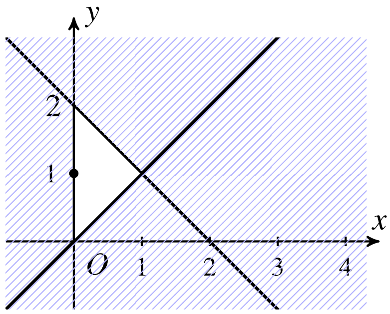


Bài 22. Tìm m đề hệ bất phương trình

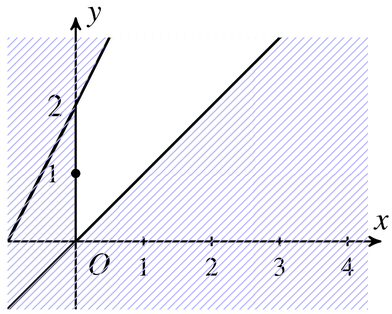
$$\begin{cases} x\ge 0\\ x-y\le 0\\ y-mx-2\le 0\end{cases}.$$

có tập nghiệm được biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là một hình tam giác.

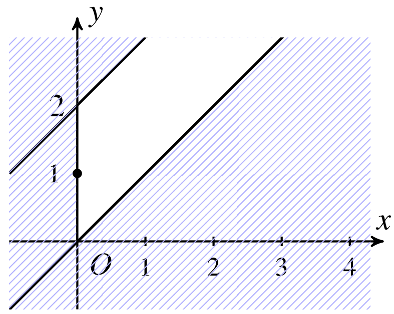
Lời giải. Nhận xét: Họ đường thẳng $(d_m): y-mx-2=0$ luôn đi qua điểm $A(0;2)$, hay nói cách khác các đường thẳng (d_m) xoay quanh A. Mặt khác, ta có $1-m.0-2\le 0$ đúng với mọi m, nên miền nghiệm của bất phương trình $y-mx-2\le 0$ luôn chứa điểm $(0;1)$. Do đó ta có 3 khả năng sau:



$m < 0$



$m > 0$



$m = 0$

Vậy $m < 0$.

Bài 23. Một xưởng sản xuất gỗ cưa các khúc gỗ thành các tấm ván. Có hai loại ván: ván thành phẩm và ván sử dụng trong xây dựng. Giả sử, đối với:

Ván thành phẩm cần 1 giờ để cưa và 3 giờ để bào 10m ván.

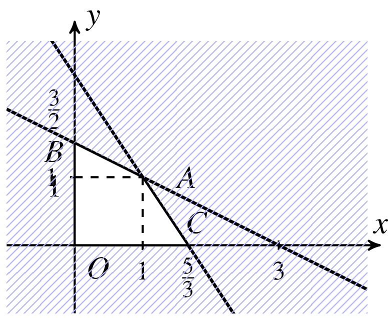
Ván xây dựng cần 2 giờ để cưa và 2 giờ để bào 10m ván.

Máy cưa làm việc tối đa 3 giờ trong ngày, và máy bào làm việc tối đa 5 giờ trong ngày. Nếu lợi nhuận của 10m ván thành phẩm là 100 (ngàn đồng) và lợi nhuận của 10m ván xây dựng là 80 (ngàn đồng). Trong ngày, xưởng sản xuất phải cưa bao nhiêu ván mỗi loại để lợi nhuận lớn nhất?

Lời giải.

Gọi x, y lần lượt là chiều dài ván thành phẩm và ván xây dựng hoàn thành trong một ngày. Đơn vị 10m. Do đó bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của $T = 10x + 8y$ (ngàn đồng), biết x, y thỏa mãn hệ bất phương trình sau

$$\begin{cases} x + 2y \leq 3 \\ 3x + 2y \leq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}.$$



Miền nghiệm của hệ là tứ giác $OBAC$, trong đó $A(1;1), B\left(0;\dfrac{3}{2}\right), C\left(\dfrac{5}{3};0\right)$.

Do đó, giá trị lớn nhất của T là 18 khi $x = y = 1$.

Bài 24. Chuyên gia dinh dưỡng định thành lập một thực đơn gồm 2 loại thực phẩm chính A và B. Cứ một trăm gram:

Thực phẩm A chứa 2 đơn vị chất béo, 3 đơn vị carbohydrate và 4 đơn vị protein.

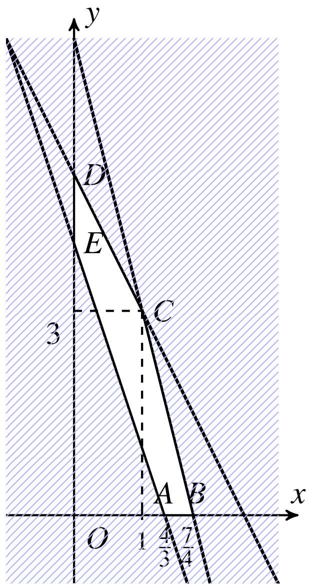
Thực phẩm B chứa 1 đơn vị chất béo, 1 đơn vị carbohydrate và 1 đơn vị protein.

Nếu một trăm gram thực phẩm A giá 10 ngàn đồng và một trăm gram thực phẩm B giá 15 ngàn đồng. Nhà dinh dưỡng muốn thức ăn phải cung cấp nhiều nhất 5 đơn vị chất béo, 7 đơn vị protein và ít nhất 4 đơn vị carbohydrate. Cần bao nhiêu trăm gram thực phẩm mỗi loại để có giá thành nhỏ nhất nhưng vẫn cung cấp đủ dinh dưỡng?

Lời giải.

Gọi x, y lần lượt là khối lượng thực phẩm A và B. Đơn vị trăm gam. Do đó bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của $T = 10x + 15y$ (ngàn đồng), biết x, y thỏa mãn hệ bất phương trình sau

$$\begin{cases} 2x + y \leq 5 \\ 3x + y \geq 4 \\ 4x + y \leq 7 \\ \quad x \geq 0 \\ \quad y \geq 0 \end{cases}.$$



Miền nghiệm của hệ là đa giác $ABCDE$, trong đó $A\left(\frac{4}{3}; 0\right), B\left(\frac{7}{4}; 0\right), C(1; 3), D(0; 5), E(0; 4)$. Do đó, giá trị nhỏ nhất của T là $\frac{4000}{3}$ gam khi $x = \frac{4}{3}$ và $y = 0$.

§5. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

I. Tóm tắt lí thuyết

1. Tam thức bậc hai

Định nghĩa 1. Tam thức bậc hai là biểu thức có dạng $f(x) = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là những hệ số, $a \neq 0$. Nghiệm của tam thức bậc hai là giá trị của x làm cho tam thức có giá trị bằng 0.

2. Định lí về dấu của tam thức bậc hai

Định lí 1. *Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0, \Delta = b^2 - 4ac$. Khi đó:*

- $\Delta < 0 \Rightarrow af(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- $\Delta = 0 \Rightarrow af(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$ *và* $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = 0$.
- $\Delta > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} af(x) > 0, \forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty) \\ af(x) < 0, \forall x \in (x_1; x_2) \end{array}\right.$.

Với $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$, $x_1 < x_2$.

3. Định lí về dấu của tam thức bậc hai

Định nghĩa 2. Bất phương trình bậc hai một ẩn số là bất phương trình có dạng $ax^2 + bx + c > 0$ (hoặc $ax^2 + bx + c > 0; ax^2 + bx + c \geq 0; ax^2 + bx + c \leq 0$) với a, b, c là những số thực đã cho, $a \neq 0$, x là ẩn số.

4. Bất phương trình bậc hai một ẩn

Định nghĩa 3. Bất phương trình bậc hai ẩn x là bất phương trình dạng $ax^2 + bx + c < 0$ (hoặc $ax^2 + bx + c \leq 0, ax^2 + bx + c > 0, ax^2 + bx + c \geq 0$), trong đó a, b, c là những số thực đã cho, $a \neq 0$.

II. Các dạng toán

Dạng 1. Xét dấu tam thức bậc hai

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$. Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Nếu $\Delta < 0$ thì $a.f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Nếu $\Delta = 0$ thì $a.f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{2a}$.
- Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$ và
  - $a.f(x) > 0, \forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.
  - $a.f(x) < 0, \forall x \in (x_1; x_2)$

Ví dụ 1. Xét dấu tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 2x + 5$

Lời giải. Ta có $\Delta' = -4 < 0$ và $a = 1 > 0$ nên $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 2. Xét dấu của tam thức bậc hai $f(x)=x^2-5x-6$.

Lời giải. Ta có: $f(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=6\end{array}\right.$.
Do $a=1>0$ nên

- $f(x)>0,\forall x\in(-\infty;-1)\cup(6;+\infty)$.
- $f(x)<0,\forall x\in(-1;6)$.

Ví dụ 3. Xét dấu của tam thức bậc hai $f(x)=-x^2+3x+4$.

Lời giải. Ta có $f(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=4\end{array}\right.$.
Do $a=-1<0$ nên

- $f(x)>0,\forall x\in(-1;4)$.
- $f(x)<0,\forall x\in(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$.

Ví dụ 4. Xét dấu của biểu thức $f(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{x-1}$

Lời giải. Ta có $g(x)=x^2+4x+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-3\\x=-1\end{array}\right.$.
$h(x)=x-1=0\Leftrightarrow x=1$.
Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$h(x)$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Từ bảng xét dấu ta thấy

- $f(x)>0\Leftrightarrow x\in(-3;-1)\cup(1;+\infty)$.
- $f(x)<0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-3)\cup(-1;1)$.

Ví dụ 5. Cho tam thức bậc hai $f(x)=x^2-(2m-1)x+m^2-m$. Tìm các giá trị của tham số m để $f(x)<0$ với $\forall x\in\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

Lời giải. Ta có $f(x)=(x-m)(x-m+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=m-1\\x=m\end{array}\right.$.
$\Rightarrow f(x)<0\Leftrightarrow x\in(m-1;m)$.
Để $f(x)<0,\forall x\in\left(\dfrac{1}{2};1\right)$ thì $\left(\dfrac{1}{2};1\right)\subset(m-1;m)\Leftrightarrow \begin{cases}m-1\le\dfrac{1}{2}\\m\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow 1\le m\le\dfrac{3}{2}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Xét dấu tam thức bậc hai $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$.
Lời giải. Ta có

- $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.
- $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Bài 2. Xét dấu tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 - 4x - 6$.
Lời giải. Ta có $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Bài 3. Xét dấu của biểu thức $f(x) = x^3 - 3x + 2$.
Lời giải. Ta có $f(x) = (x-1)^2(x+2)$

- $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2; +\infty) \backslash \{1\}$.
- $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2)$.

Bài 4. Xét dấu của biểu thức $f(x) = 1 + \dfrac{x-6}{x^2 - 5x + 6}$

Lời giải. Ta có $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 5x + 6}$.

$g(x) = x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$

$h(x) = x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		2		3		4		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta thấy

- $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (2; 3) \cup (4; +\infty)$.
- $f(x) < 0 \Leftrightarrow (0; 2) \cup (3; 4)$.

Dạng 2. Tìm điều kiện của tham số để tam thức bậc hai luôn mang một dấu

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$. Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$.

- $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.
- $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$
- $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.
- $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

Ví dụ 1. Cho $f(x)=(m^2+2)x^2-2(m+1)x+1$. Tìm các giá trị của tham số m để $f(x)$ luôn dương với mọi x.

Lời giải. Ta có $a=m^2+2>0, \forall m \in \mathbb{R}$ và $\Delta'=(m+1)^2-(m^2+2)=2m-1$.
Để $f(x)>0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì $\Delta<0 \Leftrightarrow m<\dfrac{1}{2}$

Ví dụ 2. Cho $f(x)=(m+2)x^2+2(m+2)x+m+3$. Tìm các giá trị của tham số m để $f(x)\geq 0$ với mọi giá trị của x.

Lời giải.

- Với $m=-2 \Rightarrow f(x)=1>0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Với $m\neq -2$, để $f(x)\geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì điều kiện là

$$\begin{cases} m+2>0 \\ \Delta'=(m+2)^2-(m+2)(m+3)\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2>0 \\ -m-2\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m>-2$$

Vậy với $m\geq -2$ thì $f(x)\geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 3. Cho $f(x)=mx^2-x-1$. Tìm các giá trị của tham số m để $f(x)<0$ với mọi giá trị của x.

Lời giải.

- Với $m=0 \Rightarrow f(x)=-x-1<0 \Leftrightarrow x>-1$
- Với $m\neq 0$, để $f(x)<0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì điều kiện là

$$\begin{cases} m<0 \\ \Delta=1+4m<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ m<-\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m<-\dfrac{1}{4}$$

Vậy với $m<-\dfrac{1}{4}$ thì $f(x)<0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 4. Cho $f(x)=(m-4)x^2+(2m-8)x+m-5$. Tìm các giá trị của tham số m để $f(x)\leq 0$ với mọi giá trị của x.

Lời giải.

- Với $m=4 \Rightarrow f(x)=-1<0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Với $m\neq 4$, để $f(x)\leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì điều kiện là

$$\begin{cases} m-4<0 \\ \Delta'=(m-4)^2-(m-4)(m-5)\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<4 \\ m-4<0 \end{cases} \Leftrightarrow m<4$$

.

Vậy với $m\leq 4$ thì $f(x)\leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Ví dụ 5. Cho $f(x)=\sqrt{x^2-x+m}-1$. Tìm các giá trị của tham số m để $f(x)>0$ với mọi giá trị của x.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R} &\Leftrightarrow x^2-x+m>1,\forall x\in\mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow x^2-x+m-1>0,\forall x\in\mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow \Delta=1-4(m-1)<0\\ &\Leftrightarrow m<\frac{5}{4}\end{aligned}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho $f(x)=(2m^2-3m-2)x^2+2(m-2)x-1$. Tìm các giá trị của tham số m để $f(x)\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Lời giải.

TH1. Xét $2m^2-3m-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-\dfrac{1}{2}\\ m=2\end{array}\right.$

- Nếu $m=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow f(x)=-5x-1\le 0\Leftrightarrow x\ge -\dfrac{1}{5}$.
- Nếu $m=2\Rightarrow f(x)=-1\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

TH2. Xét $2m^2-3m-2\ne 0\Leftrightarrow \begin{cases} m\ne -\dfrac{1}{2}\\ m\ne 2\end{cases}$, khi đó, điều kiện để $f(x)\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$ là

$$\begin{cases} 2m^2-3m-2<0\\ \Delta'=(m-2)^2+(2m^2-3m-2)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{3}\le m\le 2\\ -\dfrac{1}{2}<m<2\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{1}{3}\le m<2.$$

Bài 2. Cho $f(x)=(m+4)x^2-2mx+2m-3$. Tìm các giá trị của tham số m để $f(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Lời giải.

- Với $m=-4\Rightarrow f(x)=8x-14<0\Leftrightarrow x<\dfrac{7}{4}$.
- Với $m\ne -4$, để $f(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$ thì điều kiện là

$$\begin{cases} m+4<0\\ \Delta'=m^2-(m+4)(2m-6)<0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m<-4\\ m\in(-\infty;-6)\cup(4;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-\infty;-6)$$

Vậy với $m<-6$ thì $f(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Bài 3. Cho $f(x)=\dfrac{-x^2+4(m+1)x+1-4m^2}{-4x^2+5x-2}$. Tìm các giá trị của tham số m để $f(x)>0$ với mọi giá trị của x.

Lời giải. Ta có $-4x^2+5x-2<0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Để $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ thì $g(x)=-x^2+4(m+1)x+1-4m^2<0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta'=4(m+1)^2+(1-4m^2)<0\Leftrightarrow 8m+5<0\Leftrightarrow m<-\dfrac{8}{5}$

Dạng 3. Giải bất phương trình bậc hai.

Giải bất phương trình bậc hai $ax^2+bx+c<0$ thực chất là tìm các khoảng mà trong đó $f(x)=ax^2+bx+c$ cùng dấu với hệ số a (trường hợp $a<0$) hay trái dấu với hệ số a (trường hợp $a>0$).

Ví dụ 6. Giải bất phương trình $3x^2+2x+5>0$.

Lời giải. Đặt $f(x)=3x^2+2x+5$, ta có $a=3>0$ và phương trình $f(x)=0$ vô nghiệm nên $f(x)$ luôn dương.
Do đó tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;+\infty)$.

Ví dụ 7. Giải bất phương trình $-2x^2+3x+5>0$.

Lời giải. Đặt $f(x)=-2x^2+3x+5$, ta có $a=-2<0$ và $f(x)=0 \iff \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$.

Lập bảng xét dấu của $f(x)$ ta có

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-1;\dfrac{5}{2}\right)$.

Ví dụ 8. Giải bất phương trình $(3x^2-10x+3)(4x-5)\geq 0$.

Lời giải. Đặt $f(x)=(3x^2-10x+3)(4x-5)$.

Ta có $f(x)=0 \iff \left[\begin{array}{l} 3x^2-10x+3=0 \\ 4x-5=0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{3} \\ x=3 \\ x=\dfrac{5}{4} \end{array}\right.$.

Lập bảng xét dấu của $f(x)$ ta có

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{5}{4}$		3		$+\infty$
$3x^2-10x+3$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$4x-5$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{4}\right]\cup[3;\infty)$.

Ví dụ 9. Giải bất phương trình $\dfrac{(3x^2-x)(3-x^2)}{4x^2+x-3}\leq 0$.

Lời giải. Đặt $f(x)=\dfrac{(3x^2-x)(3-x^2)}{4x^2+x-3}$. Ta có

+ $3x^2-x=0 \iff \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$.

+ $3-x^2=0 \iff x=\pm\sqrt{3}$.

+ $4x^2+x-3=0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{3}{4} \end{array}\right.$.

Lập bảng xét dấu của $f(x)$ ta được

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		$\frac{1}{3}$		$\frac{3}{4}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$3x^2-x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$3-x^2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$4x^2+x-3$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\infty;-\sqrt{3}\right]\cup(-1;0]\cup\left[\dfrac{1}{3};\dfrac{3}{4}\right)\cup\left[\sqrt{3};+\infty\right)$.

Ví dụ 10. Giải bất phương trình $\dfrac{1}{x^2-4}<\dfrac{3}{3x^2+x-4}$.

Lời giải. Ta có $\dfrac{1}{x^2-4}<\dfrac{3}{3x^2+x-4} \Longleftrightarrow \dfrac{x+8}{(x^2-4)(3x^2+x-4)}<0$.

Lập bảng xét dấu cho $f(x)=\dfrac{x+8}{(x^2-4)(3x^2+x-4)}$ ta có

x	$-\infty$		-8		-2		$-\frac{4}{3}$		1		2		$+\infty$
$x+8$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
x^2-4		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$3x^2+x-4$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	||	$+$	||	$-$	||	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;-8)\cup\left(-2;-\dfrac{4}{3}\right)\cup(1;2)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 4. Giải bất phương trình $-2x^2+3x+5\geq 0$.

Lời giải. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+3x+5$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;-1)\cup\left(\dfrac{5}{2};+\infty\right)$.

Bài 5. Giải bất phương trình $x^2+12x+36 \leq 0$.

Lời giải. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-6		$+\infty$
$x^2+12x+36$		$+$	0	$+$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\{-6\}$.

Bài 6. Giải bất phương trình $\left(3x^2-4x\right)\left(2x^2-x-1\right)>0$.

Lời giải. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$3x^2-4x$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$2x^2-x-1$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
VT		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup(0;1)\cup\left(\frac{4}{3};+\infty\right)$.

Bài 7. Giải bất phương trình $\left(4x^2-1\right)\left(-8x^2+x-3\right)(2x+9)<0$.

Lời giải. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{9}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4x^2-1$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$-8x^2+x-3$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	
$2x+9$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
VT		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\frac{9}{2};-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Bài 8. Giải bất phương trình $\dfrac{4x^2+3x-1}{x^2+5x+7} \geq 0$.

Lời giải. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$4x^2+3x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	
x^2+5x+7		$+$	|	$+$	|	$+$	
VT		$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;-1]\cup\left[\frac{1}{4};+\infty\right)$.

Bài 9. Giải bất phương trình $\dfrac{5x^2+3x-8}{x^2-7x+6} \le 0$.

Lời giải. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{8}{5}$		1		6		$+\infty$
$5x^2+3x-8$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
x^2-7x+6		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
VT		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[-\dfrac{8}{5};1\right) \cup (1;6)$.

Bài 10. Giải bất phương trình $\dfrac{x^4-17x^2+60}{x\left(x^2-8x+5\right)} > 0$.

Lời giải. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\sqrt{12}$		$-\sqrt{5}$		0		$4-\sqrt{11}$		$\sqrt{5}$		$\sqrt{12}$		$4+\sqrt{11}$		$+\infty$
x^4-17x^2+60		$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
x		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
x^2-8x+5		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
VT		$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\sqrt{12};-\sqrt{5}\right) \cup \left(0;4-\sqrt{11}\right) \cup \left(\sqrt{5};\sqrt{12}\right) \cup \left(4+\sqrt{11};+\infty\right)$.

Bài 11. Giải bất phương trình $\dfrac{1}{x^2+5x+6} > \dfrac{1}{x^2-17x+72}$.

Lời giải. Ta có $\dfrac{1}{x^2+5x+6} > \dfrac{1}{x^2-17x+72} \iff \dfrac{-22x+66}{\left(x^2+5x+6\right)\left(x^2-17x+72\right)} > 0$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		-2		3		8		9		$+\infty$
$-22x+66$		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	
x^2+5x+6		$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$x^2-17x+72$		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
VT		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty;-3) \cup (-2;3) \cup (8;9)$.

Bài 12. Giải bất phương trình $\dfrac{5x^2-7x-3}{3x^2-2x-5} > 1$.

Lời giải. Ta có $\dfrac{5x^2-7x-3}{3x^2-2x-5} > 1 \iff \dfrac{2x^2-5x+2}{3x^2-2x-5} > 0$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{3}$		2		$+\infty$
$2x^2-5x+2$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$3x^2-2x-5$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
VT		$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;-1)\cup\left(\frac{1}{2};\frac{5}{3}\right)\cup(2;+\infty)$.

Bài 13. Giải bất phương trình $\frac{x-2}{1-x}+\frac{x-3}{x+1}\geq\frac{x^2+4x+15}{x^2-1}$.

Lời giải. Ta có $\frac{x-2}{1-x}+\frac{x-3}{x+1}\geq\frac{x^2+4x+15}{x^2-1}\iff\frac{-x^2-7x-10}{x^2-1}\geq 0$.
Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-5		-2		-1		1		$+\infty$
$-x^2-7x-10$		$-$	0	$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	
x^2-1		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
VT		$-$	0	$+$	0	$-$	||	$+$	||	$-$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=[-5;-2)\cup(-1;1)$.

Bài 14. Giải bất phương trình $\left(x^2+3x\right)(2x+3)-16\cdot\frac{2x+3}{x^2+3x}$.

Lời giải. Ta có $\left(x^2+3x\right)(2x+3)-16\cdot\frac{2x+3}{x^2+3x}\iff\frac{\left(x^2+3x\right)^2(2x+3)-16(2x+3)}{x^2+3x}\geq 0$

$\iff\frac{(2x+3)\left(\left(x^2+3x\right)^2-16\right)}{x^2+3x}\geq 0\iff\frac{(2x+3)\left(x^2+3x-4\right)\left(x^2+3x+4\right)}{x^2+3x}\geq 0$.
Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-4		-3		$-\frac{3}{2}$		0		1		$+\infty$
$2x+3$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
x^2+3x-4		$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
x^2+3x+4		$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
x^2+3x		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
VT		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=[-4;-3)\cup\left[-\frac{3}{2};0\right)\cup[1;+\infty)$.

Dạng 4. Bài toán có chứa tham số

Để giải dạng toán này ta phải xác định dấu của hệ số của x^2 và dấu của biệt thức Δ từ đó áp dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai.

Ví dụ 11. Tìm giá trị của tham số m để các biểu thức sau đây luôn không dương với mọi $x \in \mathbb{R}$

a) $f(x) = -2x^2 + 2(m-2)x + m - 2$

b) $f(x) = (m-1)x^2 - 2(m-1)x - 4$.

Lời giải.

a) Ta phải tìm m sao cho $f(x) = -2x^2 + 2(m-2)x + m - 2 \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Do $a = -2 < 0$ nên $f(x) \leq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\Delta' = (m-2)^2 - (-2).(m-2) \leq 0$.
Ta có $\Delta' = (m-2)^2 + 2(m-2) = m(m-2) \Rightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2$.

b) Ta phải tìm m sao cho $f(x) = (m-1)x^2 - 2(m-1)x - 4 \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
+) Trường hợp 1: $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$, khi đó $f(x) = -4 < 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$.
+) Trường hợp 2: $m - 1 \neq 0$, khi đó $f(x) \leq 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 < 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 + 4(m-1) \leq 0 \end{cases}$.
Từ đó suy ra $\begin{cases} m - 1 < 0 \\ \Delta' = (m-1)(m+3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 < 0 \\ m + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m < -1$.
Kết hợp hai trường hợp ta suy ra giá trị m cần tìm là $-3 \leq m \leq 1$.

Ví dụ 12. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \in [1;3]$.

$$x^2 - 2(m+2)x + m^2 + 4m \leq 0 \quad (1)$$

Lời giải. Xét phương trình $x^2 - 2(m+2)x + m^2 + 4m = 0$ (2), ta có $\Delta' = (m+2)^2 - m^2 - 4m = 4$.
Từ đó suy ra (2) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1 = m < x_2 = m + 4$.
Từ đó suy ra (1) có tập nghiệm $[m; m+4]$.
Vậy (1) nghiệm đúng với mọi $x \in [1;3]$ khi và chỉ khi $m \leq 1 < 3 \leq m + 4 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1$.

Ví dụ 13. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - (2m+3)x + 6m}}{x^2 + 2x + 3}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Lời giải. Ta có $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$.
Từ đó suy ra hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $x^2 - (2m+3)x + 6m \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$.
Do $\Delta = (2m+3)^2 - 4.6m = (2m-3)^2 \geq 0 \; \forall m$ nên hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{2}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 15. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $x^2 - (m-2)x - 8m + 1 \geq 0$ có nghiệm.
Lời giải. Do $a = 1 > 0$ nên bất phương trình trên luôn có nghiệm với mọi m.

Bài 16. Tìm giá trị của m để biểu thức $f(x) = x^2 - (m+2)x + 2m$ có giá trị không âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Lời giải. Do $a = 1 > 0$ nên $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\Delta = (m-2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow m = 2$.

[Vũ Văn Trường]
Bài 17. Tìm giá trị của m để hàm số $f(x)=\sqrt{mx^2+2(m+1)x+m-1}$ có tập xác $D\neq\varnothing$.
Lời giải. Với $m=0$ thì $f(x)=\sqrt{2x-1}$, khi đó hàm số có tập xác định $D=\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\neq\varnothing$.
Với $m\neq 0$, hàm số có tập xác định $D\neq\varnothing\Leftrightarrow\Delta'=(m+1)^2-m^2+m\geq 0\Rightarrow m\geq-\frac{1}{3}$. Trong trường hợp này ta có $\begin{cases}m\neq 0\\ m\geq-\frac{1}{3}\end{cases}$.
Từ đó suy ra giá trị m cần tìm là $m\geq-\frac{1}{3}$.
Bài 18. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta luôn có:

$$-1\leq\frac{x^2+5x+m}{2x^2-3x+2}<7$$

Lời giải. Ta có $2x^2-3x+2>0,\forall x\in\mathbb{R}$.
Suy ra $-1\leq\frac{x^2+5x+m}{2x^2-3x+2}<7\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2+2x+m+2\geq 0\\ 13x^2-26x+14-m>0\end{cases}$.
Ta có $3x^2+2x+m+2\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m\geq-\frac{5}{3}$.
$13x^2-26x+14-m>0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m<1$.
Do đó $-\frac{5}{3}\leq m<1$.

Bài 19. Chứng minh rằng hệ bất phương trình $\begin{cases}x^2+5x+4\leq 0\\ x^2-(m+3)x+2(m+1)\leq 0\end{cases}$ luôn có nghiệm.
Lời giải. Ta có $x^2+5x+4\leq 0\Leftrightarrow 1\leq x\leq 4$, suy ra tập nghiệm của bất phương trình $x^2+5x+4\leq 0$ là $S=[1;4]$.
Phương trình $x^2-(m+3)x+2(m+1)=0$ có hai nghiệm $x=2,x=m+1$. Từ đó suy ra bất phương trình $x^2-(m+3)x+2(m+1)\leq 0$ có tập nghiệm $S'=\{2\},S'=[2;m+1],S'=[m+1;2]$ tương ứng khi $m+1=2;m+1>2;m+1<2$.
Trong cả 3 trường hợp ta đều có $S\cap S'\neq\varnothing$, do đó hệ phương trình đã cho luôn có nghiệm.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 20. Xét dấu của biểu thức $f(x)=(|2x-3|-1)\left(|x^2-2x+4|-2x^2+9x-16\right)$.
Lời giải. Do $|2x-3|+1>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên dấu của $|2x-3|-1$ là dấu của

$$(|2x-3|-1)(|2x-3|+1)=(2x-3)^2-1=4x^2-12x+8=4(x^2-3x+2).$$

Vì $x^2-2x+4=(x-1)^2+3>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $|x^2-2x+4|=x^2-2x+4$.
Suy ra $|x^2-2x+4|-2x^2+9x-16=x^2-2x+4-2x^2+9x-16=-x^2+7x-12$.
Dấu của $f(x)$ là dấu của biểu thức $g(x)=(x^2-3x+2)(-x^2+7x-12)$.
Bảng xét dấu của $g(x)$:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
x^2-3x+2		+	0	−	0	+		+		+	
$-x^2+7x-12$		−		−		−	0	+	0	−	
$g(x)$		−	0	+	0	−	0	+	0	−	

Vậy: $f(x) > 0, \forall x \in (1;2) \cup (3;4)$; $f(x) < 0, \forall x \in (-\infty;1) \cup (2;3) \cup (4;+\infty)$.

Bài 21. Giải các bất phương trình sau:

a) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-2} \geq \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x}$;

b) $(x+2)^2(x-1)(x+5) + 8 \geq 0$.

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} \geq \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} &\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{x} - \frac{1}{x-2}\\ &\Leftrightarrow \frac{-2}{x^2-1} \geq \frac{-2}{x^2-2x}\\ &\Leftrightarrow \frac{-2}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-2x} \geq 0\\ &\Leftrightarrow \frac{-2(x^2-2x)+2(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2-2x)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4x-2}{(x^2-1)(x^2-2x)} \geq 0.\end{aligned}$$

Bảng xét dấu của vế trái:

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$4x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-1		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-2x		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
VT		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $T = (-1;0) \cup \left[\frac{1}{2};1\right) \cup (2;+\infty)$.

b) $(x+2)^2(x-1)(x+5)+8 \geq 0 \Leftrightarrow (x+2)^2(x^2+4x-5)+8 \geq 0 \Leftrightarrow (x+2)^2\left[(x+2)^2-9\right]+8 \geq 0$.

Đặt $t = (x+2)^2 \geq 0$, bất phương trình đã cho có dạng $t(t-9)+8 \geq 0 \Leftrightarrow t^2-9t+8 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leq 1 \\ t \geq 8 \end{array}\right.$.

Thay $t = (x+2)^2$ ta có:

$\left[\begin{array}{l} (x+2)^2 \leq 1 \\ (x+2)^2 \geq 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \leq x+2 \leq 1 \\ -2\sqrt{2} \leq x+2 \leq 2\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 \leq x \leq -1 \\ -2-2\sqrt{2} \leq x \leq -2+2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $T = \left[-2-2\sqrt{2};-2+2\sqrt{2}\right]$.

Bài 22. Xác định tham số m để hệ $\begin{cases} x^2-2mx-m^2+m-1 > 0 \\ \dfrac{2x-1}{x+1} > \dfrac{x-3}{x} \end{cases}$ có nghiệm.

Lời giải. Xét hệ $\begin{cases} x^2-2mx-m^2+m-1>0 \quad (1) \\ \dfrac{2x-1}{x+1} > \dfrac{x-3}{x} \quad (2) \end{cases}$.

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow \frac{(2x-1)x-(x+1)(x-3)}{x(x+1)}>0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2+x+3}{x(x+1)}>0 \Leftrightarrow x(x+1)>0 \text{ vì } x^2+x+3>0, \forall x\in\mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>0. \end{array}\right.\end{aligned}$$

Suy ra tập nghiệm của (2) là $T_2=(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$.
Giải (1): Ta có $\Delta'=2m^2-m+1>0, \forall m\in\mathbb{R}$.
Suy ra tam thức bậc hai $f(x)=x^2-2mx-m^2+m-1$ luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2 \quad (x_1<x_2)$ và (1) luôn có tập nghiệm $T_1=(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$.
Suy ra tập nghiệm của hệ $T=T_1\cap T_2\neq\varnothing$.
Vậy hệ đã cho luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

Bài 23. Tìm giá trị của tham số m để $f(x)=(m-2)x^2+2(2m-3)x+5m-6\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$.
Lời giải.

- Với $m=2$ thì $f(x)=2x+4 \Rightarrow f(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -2$. Suy ra $m=2$ không phải giá trị cần tìm.
- Với $m\neq 2$ thì $f(x)$ là tam thức bậc hai. Do đó, ta có

$$\begin{aligned} f(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R} &\Leftrightarrow \begin{cases} m-2>0 \\ \Delta'=(2m-3)^2-(m-2)(5m-6)\leq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m>2 \\ -m^2+4m-3\leq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m>2 \\ \left[\begin{array}{l} m\geq 3 \\ m\leq 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m\geq 3. \end{aligned}$$

Kết luận: $m\geq 3$.

Bài 24. Chứng minh bất đẳng thức $x^2+2y^2-2xy+2x-4y+3>0$.
Lời giải. Đặt $f(x)=x^2+2y^2-2xy+12x-4y+3=x^2-2(y-1)x+(2y^2-4y+3)$.
Suy ra $f(x)$ là tam thức bậc hai đối với x.
Ta có $\Delta_x=(y-1)^2-(2y^2-4y+3)=-y^2+2y-2<0, \forall y\in\mathbb{R}$.
Vậy $f(x)>0, \forall x,y\in\mathbb{R}$ (đpcm).

Bài 25. Cho $a^3>36$ và $abc=1$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^3}{3}+b^2+c^2>ab+bc+ca$.

Lời giải. Do $a^3>36$ nên $a>0$ và $abc=1 \Rightarrow bc=\dfrac{1}{a}$.

Bất đẳng thức đã cho tương đương với $(b+c)^2-a(b+c)-\dfrac{3}{a}+\dfrac{a^2}{3}>0$.

Xét tam thức bậc hai $f(x)=x^2-ax-\dfrac{3}{a}+\dfrac{a^2}{3}$.

$\Delta=a^2-4\left(-\dfrac{3}{a}+\dfrac{a^2}{3}\right)=a^2+\dfrac{12}{a}-\dfrac{4a^2}{3}=\dfrac{3a^3-4a^3+36}{3a}=\dfrac{36-a^3}{3a}>0.$

Suy ra $f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow (b+c)^2-a(b+c)-\dfrac{3}{a}+\dfrac{a^2}{3}>0$ (đpcm).

§6. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG IV

I. Đề số 1a

Bài 1. (2 điểm) Giải các bất phương trình sau:

a) $8x-5>\dfrac{15x-8}{2}$.

b) $\dfrac{1-3x}{1+2x}\leq -2$.

Lời giải.

a) $8x-5>\dfrac{15x-8}{2}\Leftrightarrow 16x-10>15x-8\Leftrightarrow x>2$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $\mathrm{T}=(2;+\infty)$

b) $\dfrac{1-3x}{1+2x}\leq -2\Leftrightarrow \dfrac{1-3x}{1+2x}+2\leq 0\Leftrightarrow \dfrac{x+3}{1+2x}\leq 0\Leftrightarrow -3\leq x<-\dfrac{1}{2}$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình là : $\mathrm{T}=\left[-3;-\dfrac{1}{2}\right)$

Bài 2. (2 điểm) Giải bất phương trình $x^2-x+|3x-2|>0$.
Lời giải.
Bất phương trình tương đương:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x-2\geq 0\\ x^2+2x-2>0\end{cases}\\ \begin{cases}3x-2<0\\ x^2-4x+2>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq \dfrac{2}{3}\\ x<-1-\sqrt{3}\text{ hoặc }x>-1+\sqrt{3}\end{cases}\\ \begin{cases}x<\dfrac{2}{3}\\ x<2-\sqrt{2}\text{ hoặc }x>2+\sqrt{2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>-1+\sqrt{3}\\ x<2-\sqrt{2}\end{array}\right..$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $\mathrm{T}=\left(-\infty;2-\sqrt{2}\right)\cup\left(-1+\sqrt{3};+\infty\right)$

Bài 3. (4 điểm) Cho biểu thức $f(x)=(m+1)x^2-2(2m+1)x+1$ (m là tham số)

a) Tìm các giá trị m để phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

b) Tìm các giá trị m để bất phương trình $f(x)>0$ có nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}$.

Lời giải.

a) Xét phương trình: $(m+1)x^2-2(2m+1)x+1=0$ (*).
Phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m+1\neq 0\\ \Delta'>0\\ P>0\\ S>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4m^2+3m>0\\ \dfrac{1}{m+1}>0\\ \dfrac{2(2m+1)}{m+1}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\dfrac{-3}{4}\text{ hoặc }m>0\\ m>-1\\ m<-1\text{ hoặc }m>\dfrac{-1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow m>0.$$

b) Xét bất phương trình: $(m+1)x^2-2(2m+1)x+1>0$ (**).
TH1: Nếu $m=-1$ thì (**)$\Leftrightarrow 2x+1>0\Leftrightarrow x>\dfrac{-1}{2}$ không có nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}$
TH2: Nếu $m\neq -1$ (**) có nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta'<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m+1>0\\ 4m^2+3m<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-1\\ \dfrac{-3}{4}<m<0\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{-3}{4}<m<0.$$

Bài 4. (2 điểm) Chứng minh rằng $2a^2+b^2+c^2 \geq 2a(b+c)$ với mọi $a,b,c \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $(a-b)^2 \geq 0$ với mọi $a,b \in \mathbb{R}$ nên $a^2+b^2 \geq 2ab$ (1).
Tương tự ta có: $a^2+c^2 \geq 2ac$ (2) với mọi $a,b \in \mathbb{R}$.
Cộng từng vế (1) và (2) ta được $2a^2+b^2+c^2 \geq 2a(b+c)$ với mọi $a,b,c \in \mathbb{R}$.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi với mọi $a=b=c$.

II. Đề số 1b

Bài 1. (2 điểm) Giải các bất phương trình sau

a) $\dfrac{4x-6}{7} < x+3$.

b) $\dfrac{2-x}{1-2x} \geq 3$.

Lời giải.

a) $\dfrac{4x-6}{7} < x+3 \Leftrightarrow 4x-6 < 7x+21 \Leftrightarrow 3x > -27 \Leftrightarrow x > -9$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $\mathrm{T} = (-9;+\infty)$.

b) $\dfrac{2-x}{1-2x} \geq 3 \Leftrightarrow \dfrac{2-x}{1-2x} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{5x-1}{1-2x} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{5} \leq x < \dfrac{1}{2}$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $\mathrm{T} = \left(\dfrac{1}{5};\dfrac{1}{2}\right)$.

Bài 2. (2 điểm) Giải bất phương trình $\left|x^2+3x-4\right| - x + 8 \geq 0$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x^2+3x-4 \geq 0 \\ x^2+3x-4-x+8 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+3x-4 < 0 \\ -x^2-3x+4-x+8 \geq 0 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \leq -4 \text{ hoặc } x \geq 1 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \\ \begin{cases} -4 < x < 1 \\ -6 \leq x \leq 2 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -4 \text{ hoặc } x \geq 1 \\ -4 < x < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $\mathrm{T} = \mathbb{R}$.

Bài 3. (4 điểm) Cho biểu thức $f(x) = (m-1)x^2 - 2(2m+1)x - 1$ (m là tham số).

a) Tìm các giá trị m để phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

b) Tìm các giá trị m để bất phương trình $f(x) < 0$ có nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

a) Xét phương trình: $(m-1)x^2 - 2(2m+1)x - 1 = 0$ (*)
Phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2+5m > 0 \\ \dfrac{-1}{m-1} > 0 \\ \dfrac{2(2m+1)}{m-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{-5}{4} \text{ hoặc } m > 0 \\ m < 1 \\ m < \dfrac{-1}{2} \text{ hoặc } m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < \dfrac{-5}{4}.$$

b) Xét bất phương trình: $(m-1)x^2 - 2(2m+1)x - 1 < 0$ (**)
TH1: Nếu $m=1$ thì (**)$\Leftrightarrow -6x-1 < 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{-1}{6}$ không có nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

TH2: Nếu $m \neq 1$ (**) có nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 < 0 \\ 4m^2 + 5m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ \dfrac{-5}{4} < m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{-5}{4} < m < 0.$

Bài 4. (2 điểm) Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $ab + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq a + b + 1$.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số không âm:

$$ab + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{ab.\frac{a}{b}} = 2a.$$
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}.\frac{b}{a}} = 2.$$
$$\frac{b}{a} + ab \geq 2\sqrt{\frac{b}{a}.ab} = 2b.$$
$$\Rightarrow 2(ab + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}) \geq 2(a+b+1) \Leftrightarrow ab + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq a+b+1.$$

Đẳng thức sảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

III. Đề số 2a

Bài 1. Cho $x > 3$. Chứng minh rằng: $9x + \dfrac{4}{x-3} \geq 39$.

Lời giải. Ta có $9x + \dfrac{4}{x-3} \geq 39 \Leftrightarrow 9(x-3) + \dfrac{4}{x-3} \geq 12$ .... 0,5 điểm

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $9(x-3)$ và $\dfrac{4}{x-3}$ ta được

$9(x-3) + \dfrac{4}{x-3} \geq 2\sqrt{9(x-3).\dfrac{4}{x-3}} = 12$ .... 1,0 điểm

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow 9(x-3) = \dfrac{4}{x-3} \Leftrightarrow x = \dfrac{11}{3}$ .... 0,5 điểm

Bài 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 4x-5 > x-2 \\ 3x+6m \leq 10 \end{cases}$ có nghiệm.

Lời giải. $\begin{cases} 4x-5 > x-2 \\ 3x+6m \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \leq 5-2m \end{cases}$ .... 1,0 điểm

Do đó hệ có nghiệm $\Leftrightarrow 1 < 5-2m$ .... 0,5 điểm

$\Leftrightarrow m < 2$ .... 0,5 điểm

Bài 3. Giải bất phương trình $|2x+4| \leq x+8$.

Lời giải.

Trường hợp 1: Với $x \geq -2$ thì $|2x+4| \leq x+8 \Leftrightarrow 2x+4 \leq x+8 \Leftrightarrow x \leq 4$ .... 0,5 điểm

Trường hợp này bất phương trình có nghiệm $-2 \leq x \leq 4$ .... 0,5 điểm

Trường hợp 2: Với $x < -2$ thì $|2x+4| \leq x+8 \Leftrightarrow -2x-4 \leq x+8 \Leftrightarrow x \geq -4$

Trường hợp này bất phương trình có nghiệm $-4 \leq x < -2$ .... 0,5 điểm

Vậy bất phương trình có nghiệm $-4 \leq x \leq 4$ .... 0,5 điểm

Bài 4.

a) Tìm m để biểu thức $f(x) = x^2 - (m+2)x + 8m + 1$ luôn dương với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Chứng minh rằng $3x^2 - 8xy + 9y^2 - 4x - 2y + 5 \geq 0$ với mọi x, mọi y.

Lời giải.

a) Do $a = 1 > 0$ nên $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow (m+2)^2 - 4(8m+1) < 0$ .... 1,0 điểm
$\Leftrightarrow m^2 - 28m < 0$ .... 0,5 điểm
$\Leftrightarrow 0 < m < 28$ .... 0,5 điểm

b) Đặt $f(x) = 3x^2 - 8xy + 9y^2 - 4x - 2y + 5$. Ta có
$f(x) = 3x^2 - (8y+4)x + 9y^2 - 2y + 5$ có
$\Delta' = (4y+2)^2 - 3(9y^2 - 2y + 5) = -11y^2 + 22y - 11 = -11(y-1)^2 \leq 0, \forall y$ .... 1,0 điểm
Do $a = 3 > 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$ với mọi x, y. .... 1,0 điểm

IV. Đề số 2b

Bài 1. Cho $x > 1$. Chứng minh rằng: $16x + \dfrac{4}{x-1} \geq 32$.

Lời giải. Ta có $16x + \dfrac{4}{x-1} \geq 32 \Leftrightarrow 16(x-1) + \dfrac{4}{x-1} \geq 16$ .... 0,5 điểm
Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $16(x-1)$ và $\dfrac{4}{x-1}$ ta được
$16(x-1) + \dfrac{4}{x-1} \geq 2\sqrt{16(x-1).\dfrac{4}{x-1}} = 16$ .... 1,0 điểm
Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow 16(x-1) = \dfrac{4}{x-1} \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$ .... 0,5 điểm

Bài 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 4(x+1) + 5 \leq 3(x+4) \\ x + m \geq 1 \end{cases}$ có nghiệm.

Lời giải. $\begin{cases} 4(x+1) + 5 \leq 3(x+4) \\ x + m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq 1 - m \end{cases}$ .... 1,0 điểm
Do đó hệ có nghiệm $\Leftrightarrow 1 - m \leq 3$ .... 0,5 điểm
$\Leftrightarrow m \geq -2$ .... 0,5 điểm

Bài 3. Giải bất phương trình $|x-3| > 3x + 15$.
Lời giải.

Trường hợp 1: Với $x \geq 3$ thì $|x-3| > 3x + 15 \Leftrightarrow x - 3 > 3x + 15 \Leftrightarrow x < -9$ .... 0,5 điểm
Trường hợp này bất phương trình vô nghiệm .... 0,5 điểm

Trường hợp 2: Với $x < 3$ thì $|x-3| > 3x + 15 \Leftrightarrow -x + 3 > 3x + 15 \Leftrightarrow x < -3$
Trường hợp này bất phương trình có nghiệm $x < -3$ .... 0,5 điểm

Vậy bất phương trình có nghiệm $x < -3$ .... 0,5 điểm

Bài 4.

a) Tìm m để biểu thức $f(x) = -2x^2 + 2(m-2)x + m - 2$ luôn âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Chứng minh rằng $2x^2 - 8xy + 13y^2 - 4x - 2y + 7 \geq 0$ với mọi x, mọi y.

Lời giải.

a) Do $a=1<0$ nên $f(x)<0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta<0 \Leftrightarrow (m-2)^2+2(m-2)<0$ .... 1,0 điểm
$\Leftrightarrow m^2-2m<0$ .... 0,5 điểm
$\Leftrightarrow 0<m<2$ .... 0,5 điểm

b) Đặt $f(x)=2x^2-8xy+13y^2-4x-2y+7$. Ta có
$f(x)=2x^2-(8y+4)x+13y^2-2y+7$ có
$\Delta'=(4y+2)^2-2(13y^2-2y+7)=-10y^2+20y-10=-10(y-1)^2\le 0, \forall y$ .... 1,0 điểm
Do $a=2>0 \Rightarrow f(x)\ge 0$ với mọi x,y. .... 1,0 điểm

V. Đề số 3a

Câu 1. (**4 điểm**) Giải các bất phương trình sau:

a) $\sqrt{x+10}+1>2x$

b) $\dfrac{x^2+2x-3}{1-2x}\le 2$

Lời giải.

a) Điều kiện $x\ge -10$.
Bất phương trình tương đương $\sqrt{x+10}>2x-1$.

- Xét $\begin{cases}2x-1<0\\ x+10\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<\dfrac{1}{2}\\ x\ge -10\end{cases} \Leftrightarrow -10\le x<\dfrac{1}{2}$.
- Xét $\begin{cases}2x-1\ge 0\\ x+10\ge (2x-1)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge \dfrac{1}{2}\\ 4x^2-5x-9\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge \dfrac{1}{2}\\ -1\le x\le \dfrac{9}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\le x\le \dfrac{9}{4}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $x\in\left[-10;\dfrac{9}{4}\right]$.

b) Điều kiện $x\ne \dfrac{1}{2}$.
Bất phương trình tương đương $\dfrac{x^2+6x-5}{1-2x}\le 0$. Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-3-\sqrt{14}$		$\frac{1}{2}$		$-3+\sqrt{14}$		$+\infty$
x^2+6x-5		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$1-2x$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
VT		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left[-3-\sqrt{14};\dfrac{1}{2}\right)\cup\left[-3+\sqrt{14};+\infty\right)$.

Câu 2. (**2 điểm**) Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình $\dfrac{x^2+5x+m}{2x^2-3x+2}\le 7$ đúng với $\forall x\in\mathbb{R}$.

Lời giải. Điều kiện $2x^2-3x+2\ne 0$ (đúng với $\forall x$).
Bất phương trình tương đương $\dfrac{-13x^2+26x+m-14}{2x^2-3x+2}\le 0 \Leftrightarrow -13x^2+26x+m-14\le 0$ (*).
(vì $2x^2-3x+2>0, \forall x$).
Để (*) đúng với mọi x thì $\begin{cases}a<0\\ \Delta\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-13<0 \text{ (luôn đúng)}\\ 13(13+m-14)\le 0\end{cases} \Leftrightarrow m\le 1$.

Câu 3. (**2 điểm**) Tìm các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{x-2} > \dfrac{4}{x+1} \\ x-m-3 \geq 0 \end{cases}$ có nghiệm.

Lời giải. Điều kiện $x \neq -1, x \neq 2$.
Xét $\dfrac{1}{x-2} > \dfrac{4}{x+1} \Leftrightarrow \dfrac{3x-9}{(x-2)(x+1)} < 0$. Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$3x-9$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x-2)(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
VT		$-$	||	$+$	||	$-$	0	$+$	

Suy ra tập nghiệm $S_1 = (-\infty; -1) \cup (2; 3)$.
Xét $x - m - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq m+3 \Rightarrow$ tập nghiệm $S_2 = [m+3; +\infty)$.
Để hệ phương trình có nghiệm thì $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing \Leftrightarrow m+3 < 3 \Leftrightarrow m < 0$.

VI. Đề số 3b

Câu 4. (**2 điểm**) Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt[3]{5a+3b} + \sqrt[3]{5b+3c} + \sqrt[3]{5c+3a}$$

Lời giải. Xét $\sqrt[3]{(5a+3b).\dfrac{8}{3}.\dfrac{8}{3}} \leq \dfrac{5a+3b+\dfrac{16}{3}}{3} \Rightarrow \sqrt[3]{5a+3b} \leq \dfrac{5a+3b+\dfrac{16}{3}}{4\sqrt[3]{3}}$.

Tương tự $\sqrt[3]{5b+3c} \leq \dfrac{5b+3c+\dfrac{16}{3}}{4\sqrt[3]{3}}$ và $\sqrt[3]{5c+3a} \leq \dfrac{5c+3a+\dfrac{16}{3}}{4\sqrt[3]{3}}$. Do đó

$$P \leq \frac{8(a+b+c)+16}{4\sqrt[3]{3}} = 2\sqrt[3]{9}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \dfrac{1}{3}$.

Kết luận $P_{\max} = 2\sqrt[3]{9}$ khi $a = b = c = \dfrac{1}{3}$.

VII. Đề số 4a

Câu 1. Giải các bất phương trình

a) $\dfrac{3x}{4} - 1 < 2x + \dfrac{1-x}{2}$.

b) $\dfrac{2x-1}{x+1} + 2 < \dfrac{1}{x+1}$

Lời giải.

a) $\dfrac{3x}{4} - 1 < 2x + \dfrac{1-x}{2} \iff 3x - 4 < 8x + 2(1-x) \iff -6 < 3x \iff -2 < x$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-2; +\infty)$ . . . . (1 điểm)

b) $\dfrac{2x-1}{x+1}+2<\dfrac{1}{x+1} \iff \dfrac{4x+1}{x+1}<\dfrac{1}{x+1} \iff \dfrac{4x}{x+1}<0 \iff -1<x<0.$
Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-1;0)$ . . . . (1 điểm)

Câu 2. Giải các bất phương trình

a) (1 điểm) $2x^2-3x+1<0$

b) (2 điểm) $|2x-4|\geq x+1$

Lời giải.

a) $2x^2-3x+1<0 \iff \dfrac{1}{2}<x<1.$
Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(\dfrac{1}{2};1\right)$ . . . . (1 điểm)

b) Trường hợp 1: $x\leq -1$
Dễ thấy nghiệm của bất phương trình $x\leq -1$ . . . . (0,5 điểm)
Trường hợp 2: $x>-1$
$|2x-4|\geq x+1 \iff (2x-4)^2\geq (x+1)^2 \iff x^2-6x+5\geq 0 \iff \left[\begin{array}{l}x\geq 5\\ x\leq 1\end{array}\right. \implies \left[\begin{array}{l}x\geq 5\\ -1<x\leq 1\end{array}\right.$. (1 điểm)
Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;1]\cup[5;+\infty)$ . . . . (0,5 điểm)

Câu 3.

a) (1 điểm) Giải bất phương trình $\sqrt{x^2-x+1}<x+2$.

b) (1 điểm) Tìm tất cả giá trị của tham số m sao cho bất phương trình $x^2-2mx+4>0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Lời giải.

a) Dễ thấy $x+2>0 \iff x>-2$.
$\sqrt{x^2-x+1}<x+2 \iff x^2-x+1<x^2+4x+4 \iff -3<5x \iff -\dfrac{3}{5}<x.$
Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[-\dfrac{3}{5};+\infty\right)$ . . . . (1 điểm)

b) $x^2-2mx+4>0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\Delta'<0$. . . . . (0,5 điểm)
$\Delta'<0 \iff m^2-4<0 \iff -2<m<2$. . . . . (0,5 điểm)

Câu 4. (1 điểm) Tìm tất cả giá trị của tham số m sao cho phương trình $2x^2-2mx+m=0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

Lời giải. Phương trình $2x^2-4mx+m=0$ có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases}\Delta'>0\\ -\dfrac{b}{a}>0\\ \dfrac{c}{a}>0\end{cases} \iff$
$\begin{cases}m^2-2m>0\\ m>0\\ \dfrac{m}{2}>0\end{cases} \iff m>2$ . . . . (1 điểm)

Câu 5. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + \frac{3}{x}$ với $x > 0$.

Lời giải.

- Ta có $y = x^3 + \frac{3}{x} = x^3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$ .... (0,5 điểm)
- Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho bốn số thực dương $x^3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq 4\sqrt[4]{x^3.\frac{1}{x^3}} = 4$ .... (1 điểm)
- Vậy $y_{\min} = 4$, khi $x^3 = \frac{1}{x} \iff x = 1$ .... (0,5 điểm)

VIII. Đề số 4b

Câu 1. Giải các bất phương trình

a) $\frac{x}{3} - 1 < \frac{x}{2} - 3$.

b) $2 - \frac{x}{x-2} < \frac{1}{x-2}$

Lời giải.

a) $\frac{x}{3} - 1 < \frac{x}{2} - 3 \iff \frac{x-3}{3} < \frac{x-6}{2} \iff 12 < x$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (12; +\infty)$ .... (1 điểm)

b) $2 - \frac{x}{x-2} < \frac{1}{x-2} \iff \frac{x-4}{x-2} < \frac{1}{x-2} \iff \frac{x-5}{x-2} \iff 2 < x < 5$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (2; 5)$ .... (1 điểm)

Câu 2. Giải các bất phương trình

a) (1 điểm) $-x^2 + 6x - 8 > 0$

b) (1 điểm) $|x+2| < 2x+1$

Lời giải.

a) $-x^2 + 6x - 8 > 0 \iff 2 < x < 4$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (2; 4)$ .... (1 điểm)

b) Điều kiện: $x > -\frac{1}{2}$.
$|x+2| < 2x+1 \iff (x+2)^2 < (2x+1)^2 \iff 0 < x^2 - 1 \iff \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -1 \end{array}\right. \Longrightarrow x > 1$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (1; +\infty)$ .... (1 điểm)

Câu 3.

a) (2 điểm) Giải bất phương trình $\sqrt{x^2 + x - 2} > x - 1$.

b) (1 điểm) Tìm tất cả giá trị của tham số m sao cho bất phương trình $-x^2 + (m+2)x - 1 < 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Lời giải.

a) Điều kiện $x > 1$ hoặc $x < -2$.
Trường hợp 1: $x < -2$
$x - 2 < 0$, $\sqrt{x^2 + x - 2} > 0$ cho nên $x < -2$ là nghiệm của bất phương trình .... (0,5 điểm)
Trường hợp 2: $x > 1$
$\sqrt{x^2 + x - 2} > x - 2 \iff x^2 + x - 2 > x^2 - 4x + 4 \iff x > \dfrac{6}{5}$. .... (0,5 điểm)
Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -2) \cup \left(\dfrac{6}{5}; +\infty\right)$

b) $-x^2 + (m+2)x - 1 < 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\Delta < 0$. .... (0,5 điểm)
$\Delta < 0 \iff m^2 + 4m < 0 \iff -4 < m < 0$. .... (0,5 điểm)

Câu 4. (1 điểm) Tìm tất cả giá trị của tham số m sao cho phương trình $x^2 + 2(m+1)x + m = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt.

Lời giải. Phương trình $x^2 + 2(m+1)x + m = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ -\dfrac{b}{a} < 0 \\ \dfrac{c}{a} > 0 \end{cases} \iff$

$\begin{cases} m^2 - m + 1 > 0 \\ -2(m+1) < 0 \\ m > 0 \end{cases} \iff m > 0$ .... (1 điểm)

Câu 5. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2}{b+2} + \frac{b^2}{c+2} + \frac{c^2}{a+2}$$

Lời giải.
- Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số thực dương, ta có $\dfrac{a^2}{b+2} + \dfrac{b+2}{4} \geq 2\sqrt{\dfrac{a^2}{b+2} \cdot \dfrac{b+2}{4}} = a$; tương tự $\dfrac{b^2}{c+2} + \dfrac{c+2}{4} \geq b$; $\dfrac{c^2}{a+2} + \dfrac{a+2}{4} \geq c$ .... (1 điểm)
- Cộng các vế tương ứng của các BĐT ta có $P + \dfrac{a+b+c+6}{4} \geq a+b+c \iff P \geq \dfrac{3(a+b+c)-6}{4} = 3$ (0,5 điểm)
- Vậy $P_{\min} = 3$, khi $a = b = c = 2$ .... (0,5 điểm)