MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC TRONG CÁC ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI, TUYỂN SINH ĐH-THPT QUỐC GIA VÀ LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

Trong các kì thi học sinh giỏi môn Toán THCS, THPT và các kì thi tuyển sinh lớp 10 chuyên, nội dung về bất đẳng thức và giá trị lớn nhất, nhỏ nhất xuất hiện một cách đều đặn trong các đề thì với các bài toán ngày càng khó hơn. Trong chủ đề này, mình đã tuyển chọn và giới thiệu một số bài toán về bất đẳng thức và giá trị lớn nhất, nhỏ nhất được trích trong các đề thi học sinh giỏi môn toán cấp tỉnh và các đề thi chuyên toán các năm gần đây.

Bài 1. a) Cho các số dương a, b, c tùy ý. Chứng minh rằng: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$

b) Cho các số dương a, b, c thoả mãn $a+b+c\le 3$. Chứng ming rằng:

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2009}{ab+bc+ca}\ge 670$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Hải Phòng năm 2009 - 2010

Lời giải

a) Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 3 số dương $a+b+c\ge \sqrt[3]{abc}$; $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}$

Suy ra $$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

b) Ta có: $ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2 \Rightarrow ab+bc+ca\le \frac{(a+b+c)^2}{3}\le 3 \Rightarrow \frac{2007}{ab+bc+ca}\ge 669$

Áp dụng bất đẳng thức trong câu a, ta có

$$\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}\right)\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right)\ge 9$$

Suy ra $$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}\ge \frac{9}{(a+b+c)^2}\ge 1$$

Do đó ta được $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2009}{ab+bc+ca}\ge 670$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 2. Với số tự nhiên $n\ge 3$. Chúng minh rằng $S_n<\frac{1}{2}$.

Với $$S_n=\frac{1}{3\left(1+\sqrt{2}\right)}+\frac{1}{5\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}+...+\frac{1}{(2n+1)\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bình Định năm 2009-2010

Lời giải

Với $n\ge 3$, ta có

$$\frac{1}{(2n+1)\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2n+1}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{4n^2+4n+1}}<\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{4n^2+4n}}=\frac{\sqrt{\mathrm{n}+1}-\sqrt{\mathrm{n}}}{2\sqrt{n+1}.\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

Do đó ta được $S_n<\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)<\frac{1}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 3. Chứng minh rằng $\left|\frac{m}{n}-\sqrt{2}\right| \geq \frac{1}{n^2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$, với mọi số nguyên m, n.

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bình năm 2009-2010

Lời giải

Vì m, n là các số nguyên nên $\frac{m}{n}$ là số hữu tỉ và $\sqrt{2}$ là số vô tỉ nên $\frac{m}{n}-\sqrt{2} \neq 0$.

Ta xét hai trường hợp sau

+ Trường hợp 1: Với $\frac{m}{n} > \sqrt{2}$, khi đó ta được $m^2 > 2n^2 \Rightarrow m^2 \geq 2n^2+1$ hay $m \geq \sqrt{2n^2+1}$

Từ đó suy ra $\left|\frac{m}{n}-\sqrt{2}\right| \geq \frac{\sqrt{2n^2+1}}{n}-\sqrt{2} = \sqrt{2+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{2} = \frac{2+\frac{1}{n^2}-2}{\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{2}} = \frac{1}{n^2\left(\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{2}\right)} \geq \frac{1}{n^2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$

+ Trường hợp 2: Với $\frac{m}{n} < \sqrt{2}$, khi đó ta được $m^2 < 2n^2 \Rightarrow m^2 \leq 2n^2-1$ hay $m \leq \sqrt{2n^2-1}$

Từ đó suy ra

$$\left|\frac{m}{n}-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}-\frac{m}{n} \geq \sqrt{2}-\frac{\sqrt{2n^2-1}}{n} = \sqrt{2}-\sqrt{2-\frac{1}{n^2}} = \frac{2-2+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{2}+\sqrt{2-\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{n^2\left(\sqrt{2}+\sqrt{2-\frac{1}{n^2}}\right)} \geq \frac{1}{n^2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 4. Cho ba số thực a, b, c đôi một phân biệt. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{(b-c)^2}+\frac{b^2}{(c-a)^2}+\frac{c^2}{(a-b)^2} \geq 2$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Vĩnh Phúcnăm 2009-2010

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)^2 \geq 2+2\left(\frac{ab}{(b-c)(c-a)}+\frac{bc}{(c-a)(a-b)}+\frac{ca}{(a-b)(b-c)}\right)$$

Mà ta lại có

$$\frac{ab}{(b-c)(c-a)}+\frac{bc}{(c-a)(a-b)}+\frac{ca}{(a-b)(b-c)} = \frac{ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = -1$$

Do đó bất đẳng thức trên trở thành $\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)^2 \geq 0$.

Bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức đúng. Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 5. Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = a^2+b^2+c^2+\frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Nghệ An năm 2009-2010

Lời giải

Dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=1$ và giá trị nhỏ nhất của P là 4. Ta quy bài toán về chứng minh bất đẳng thức: $a^2+b^2+c^2+\frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a} \geq 4$

Thật vậy, kết hợp với giả thiết ta có

$$3\left(a^2+b^2+c^2\right)=\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)=a^3+b^3+c^3+a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2$$

Áp dụng bất đăngr thức Cauchy ta có: $a^3+ab^2\ge 2a^2b; b^3+bc^2\ge 2b^2c;\ c^3+ca^2\ge 2c^2a$

Suy ra: $3\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 3\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)>0$

Do đó ta được $a^2+b^2+c^2+\dfrac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}\ge a^2+b^2+c^2+\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $a^2+b^2+c^2+\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\ge 4$

Hay $a^2+b^2+c^2+\dfrac{9-\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}\ge 4$

Đặt $t=a^2+b^2+c^2$. Từ giả thiết $a+b+c=3\Rightarrow a^2+b^2+c^2\ge 3$, do đó ta được $t\ge 3$

Bất đẳng thức trên trở thành $t+\dfrac{9-t}{2t}\ge 4\Leftrightarrow 2t^2+9-t\ge 8t\Leftrightarrow \left(t-3\right)\left(2t-3\right)\ge 0$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng do $t\ge 3$. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 6. Cho biểu thức $P=a^2+b^2+c^2+d^2+ac+bd$, trong đó $ad-bc=1$.

Chứng minh rằng: $P\ge\sqrt{3}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Thanh Hóa năm 2009-2010

Lời giải

Cách 1: Ta có

$$\left(ac+bd\right)^2+\left(ad-bc\right)^2=a^2c^2+2abcd+b^2d^2+a^2d^2-2abcd+b^2c^2$$
$$=a^2\left(c^2+d^2\right)+b^2\left(d^2+c^2\right)=\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)$$

Vì $ad-bc=1$ nên $1+\left(ac+bd\right)^2=\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $P=a^2+b^2+c^2+d^2+ac+bd\ge 2\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)}+ac+bd$

Suy ta $P\ge 2\sqrt{1+\left(ac+bd\right)^2}+ac+bd$. Rõ ràng $P>0$ vì $2\sqrt{1+\left(ac+bd\right)^2}>\left|ac+bd\right|^2$

Đặt $x=ac+bd$, khi đó ta được

$$P\ge 2\sqrt{1+x^2}+x\Leftrightarrow P^2\ge 4\left(1+x^2\right)+4x\sqrt{1+x^2}+x^2=\left(1+x^2\right)+4x\sqrt{1+x^2}+4x^2+3$$

Hay $P^2\ge\left(\sqrt{1+x^2}+2x\right)^2+3\ge 3$. Do đó ta được $P\ge\sqrt{3}$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}ad-bc=1\\2a=\sqrt{3}d-c\\2b=-\sqrt{3}c-d\end{cases}$

Cách 2:

Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành $a^2+b^2+c^2+d^2+ac+bd\ge\sqrt{3}\left(ad-bc\right)$

Hay: $a^2+b^2+c^2+d^2+ac+bd\ge a\left(\sqrt{3}d-c\right)+b\left(-\sqrt{3}c-d\right)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\begin{cases} a\left(\sqrt{3}d-c\right)\le a^2+\dfrac{\left(\sqrt{3}d-c\right)^2}{4}=a^2+\dfrac{3d^2-2\sqrt{3}cd+c^2}{4} \\ b\left(-\sqrt{3}c-d\right)\le b^2+\dfrac{\left(-\sqrt{3}c-d\right)^2}{4}=b^2+\dfrac{3d^2+2\sqrt{3}cd+c^2}{4} \end{cases}$

Cộng theo về hai bất đẳng thức trên ta được $a^2+b^2+c^2+d^2+ac+bd\ge a\left(\sqrt{3}d-c\right)+b\left(-\sqrt{3}c-d\right)$

Bài toán được chứng minh xong.

Bài 7. Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có ba góc nhọn. Chứng minh rằng với mọi số thực x, y, z ta luôn có:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}>\frac{2x^2+2y^2+2z^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Thanh Hóa năm 2009-2010

Lời giải

Cách 1: Vì $a^2+b^2+c^2>0$ nên ta có

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=x^2\left(2+\frac{b^2+c^2-a^2}{a^2}\right)+y^2\left(2+\frac{a^2+c^2-b^2}{b^2}\right)+z^2\left(2+\frac{a^2+b^2-c^2}{c^2}\right)$$

$$=2x^2+2y^2+2z^2+x^2\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{a^2}\right)+y^2\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{b^2}\right)+z^2\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{c^2}\right)$$

Giả sử $a\le b\le c$, khi đó $c^2-a^2\ge 0;\ c^2-b^2\ge 0$. Với c là cạnh lớn nhất và các góc đều nhọn nên $c^2<a^2+b^2$. Do đó ta có $b^2+c^2-a^2>0;\ a^2+c^2-b^2>0;\ a^2+b^2-c^2>0$

$$\Rightarrow 2x^2+2y^2+2z^2+x^2\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{a^2}\right)+y^2\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{b^2}\right)+z^2\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{c^2}\right)>2x^2+2y^2+2z^2$$

Hay $\qquad \left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)>2x^2+2y^2+2z^2$

Hay $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}>\dfrac{2x^2+2y^2+2z^2}{a^2+b^2+c^2}$. Bài toán được chứng minh xong

Cách 2: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{2x^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2y^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{2z^2}{a^2+b^2+c^2}>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2\left(b^2+c^2-a^2\right)}{a^2\left(a^2+b^2+c^2\right)}+\frac{y^2\left(a^2+c^2-b^2\right)}{b^2\left(a^2+b^2+c^2\right)}+\frac{z^2\left(a^2+b^2-c^2\right)}{c^2\left(a^2+b^2+c^2\right)}>0$$

Do a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác nhọn nên $a^2+b^2>c^2;\ b^2+c^2>a^2;\ c^2+a^2>b^2$

Nên ta được : $b^2+c^2-a^2>0;\ a^2+c^2-b^2>0;\ a^2+b^2-c^2>0$

Do vậy bất đẳng thức trên luôn đúng. Bài toán được chứng minh xong.

Bài 8. a) Cho k là số nguyên dương bất kì. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}}<2\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

b) Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}}+\dfrac{1}{4\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{2010\sqrt{2009}}<\dfrac{88}{45}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Thái Bình năm 2009-2010

Lời giải

a) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < \frac{2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}}{\sqrt{k}.\sqrt{k+1}} \Leftrightarrow 2k+1-2\sqrt{k(k+1)} > 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)^2 > 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng với mọi k nguyên dương. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

b) Áp dụng kết quả câu a ta có

$$VT = \frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{2010\sqrt{2009}} < 2\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+2\left(\frac{1}{\sqrt{2009}}-\frac{1}{\sqrt{2010}}\right)$$

$$= 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2010}}\right) < 2\left(1-\frac{1}{45}\right) = \frac{88}{45} = VP$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Bài 9. Với a, b, c là những số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}+\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}}+\frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}} \ge \frac{a+b+c}{5}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐHKHTN Hà Nội năm 2009-2010

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$3a^2+8b^2+14ab = 3a^2+8b^2+12ab+2ab \le 4a^2+9b^2+12ab = (2a+3b)^2$$

Suy ra $$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}} \ge \frac{a^2}{(2a+3b)^2} = \frac{a^2}{2a+3b}$$

Áp dụng tương tự ta thu được

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}+\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}}+\frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}} \ge \frac{a^2}{2a+3b}+\frac{b^2}{2b+3c}+\frac{c^2}{2c+3a}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{2a+3b}+\frac{b^2}{2b+3c}+\frac{c^2}{2c+3a} \ge \frac{(a+b+c)^2}{5(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{5}$$

Do đó ta được: $$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}+\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}}+\frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}} \ge \frac{a+b+c}{5}$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Bài 10. Giả sử x, y, z là những số thực thoả mãn điều kiện $0 \le x,\ y,\ z \le 2$ và $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức:

$$M = x^4+y^4+z^4+12(1-x)(1-y)(1-z)$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐHKHTN Hà Nội năm 2009-2010

Lời giải

Đặt $a=x-1;\ b=y-1;\ c=z-1$, ta được $-1 \le a;\ b;\ c \le 1$ và $a+b+c=0$. Biểu thức M được viết lại thành $M = a^4+b^4+c^4+4\left(a^3+b^3+c^3\right)+6\left(a^2+b^2+c^2\right)+4(a+b+c)+3-12abc$

Để ý là khi $a+b+c=0$ thì $a^3+b^3+c^3-3abc=0$ nên biểu thức trên thử thành

$$M = a^4+b^4+c^4+6\left(a^2+b^2+c^2\right)+3$$

Theo một đánh giá quen thuộc thì

$$a^4+b^4+c^4 \ge abc(a+b+c)=0; a^2+b^2+c^2 \ge \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = 0$$

Do đó suy ra $M \ge 3$ hay giá trị nhỏ nhất của M là 3.

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=0$ hay $x=y=z=1$.

Mặt khác do $-1 \le a;\, b;\, c \le 1$ nên ta có $|a|;\, |b|;\, |c| \le 1 \Rightarrow a^4 \le a^2 \le |a|;\, b^4 \le b^2 \le |b|;\, c^4 \le c^2 \le |c|$

Suy ra $M = a^4 + b^4 + c^4 + 6\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + 3 \le 7\left(|a| + |b| + |c|\right) + 3$

Mà ta lại có $a + b + c = 0$ nên trong ba số a, b, c có một hoặc hai số âm, tức là luôn tồn tại hai số cùng dấu. Không mất tính tổng quát ta giả sử hai số đó là b và c. Khi đó ta được $|b| + |c| = |b + c| = |a|$

Đến đây ta có $M \le 14|a| + 3 \le 17$ hay giá trị lớn nhất của M là 17. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 1;\, b = -1;\, c = 0$ và các hoán vị hay $x = 2;\ y = 0;\ z = 1$ và các hoán vị

Bài 11. a) Cho 3 số thực a, b, c bất kì. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca + \frac{(a-b)^2}{26} + \frac{(b-c)^2}{6} + \frac{(c-a)^2}{2009}$$

b) Cho $a > 0;\, b < 0$. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{a} \ge \dfrac{2}{b} + \dfrac{8}{2a - b}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán TP Hồ Chí Minh năm 2009-2010

Lời giải

a) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{(a-b)^2}{2} + \frac{(b-c)^2}{2} + \frac{(c-a)^2}{2} \ge \frac{(a-b)^2}{26} + \frac{(b-c)^2}{6} + \frac{(c-a)^2}{2009}$$

Hay
$$\frac{12(a-b)^2}{13} + \frac{(b-c)^2}{3} + \frac{2007(c-a)^2}{2} \ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

b) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $\dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{-b} \ge \dfrac{8}{2a - b}$

Đặt $c = -b$, do $b < 0$ nên ta được $c > 0$, khi đó bất đẳng thức trên được viết lại thành $\dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{c} \ge \dfrac{8}{2a + c}$. Theo một đánh giá quen thuộc ta được: $\dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{c} = \dfrac{2}{2a} + \dfrac{2}{c} \ge \dfrac{2.4}{2a + c} = \dfrac{8}{2a + c}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2a = -b$.

Bài 12. Cho a, b là các số dương thỏa mãn $\dfrac{a}{1+a} + \dfrac{2b}{1+b} = 1$. Chứng minh $ab^2 \le \dfrac{1}{8}$.

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Quảng Bình năm 2015-2016

Lời giải

Từ giả thiết $\dfrac{a}{1+a} + \dfrac{2b}{1+b} = 1$. Đặt $x = \dfrac{a}{1+a};\ y = \dfrac{b}{1+b}$ Suy ra $a = \dfrac{x}{1-x};\, b = \dfrac{y}{1-y}$.

Khi đó ta được $x + 2y = 1$ và bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành: $\dfrac{xy^2}{(1-x)(1-y)^2} \le \dfrac{1}{8}$

Từ giả thiết ta suy ra $1 - x = 2y;\, 1 - y = x + y$ nên lại viết bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\frac{xy^2}{2y(x+y)^2} \le \frac{1}{8} \Leftrightarrow 4xy \le (x+y)^2$$

Đánh giá cuối cùng là một bất đẳng thức đúng. Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Bài 13. Cho x, y, z là các số thực dương sao cho $xyz = x + y + z + 2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}} \le \frac{3}{2}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Phú Thọ năm 2009-2010

Lời giải

Giả thiết của bài toán được viết lại thành $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=1$.

Đặt $a=\frac{1}{x+1};\ b=\frac{1}{y+1};\ c=\frac{1}{z+1}$. Khi đó ta được $a+b+c=1$. Từ đó suy ra

$$x=\frac{1-a}{a}=\frac{b+c}{a};\ y=\frac{1-b}{b}=\frac{c+a}{b};\ z=\frac{1-c}{c}=\frac{a+b}{a}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}}+\sqrt{\frac{bc}{(c+a)(a+b)}}+\sqrt{\frac{ca}{(a+b)(b+c)}}\le\frac{3}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+c}+\frac{a}{c+a}\right);\sqrt{\frac{bc}{(c+a)(a+b)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{c}{c+a}+\frac{b}{a+b}\right);\sqrt{\frac{ca}{(a+b)(b+c)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}\right)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}}+\sqrt{\frac{bc}{(c+a)(a+b)}}+\sqrt{\frac{ca}{(a+b)(b+c)}}\le\frac{3}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2$

Bài 14. Cho các số thực không âm a, b, c sao cho $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+2}+\frac{1}{b^2+2}+\frac{1}{c^2+2}\le 1$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Phú Thọ năm 2009-2010

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $\frac{a^2}{a^2+2}+\frac{b^2}{b^2+2}+\frac{c^2}{c^2+2}\ge 1$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{a^2+2}+\frac{b^2}{b^2+2}+\frac{c^2}{c^2+2}\ge\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+6}=\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}=1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 15. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x+2y+3z=18$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2y+3z+5}{1+x}+\frac{3z+x+5}{1+2y}+\frac{x+2y+5}{1+3z}\ge\frac{51}{7}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên toán Đại học Vinh, 2009 – 2010

Lời giải

Đặt $a=x;\ b=2y;\ c=3x$, khi đó giả thiết trở thành $a+b+c=18$ và bất đẳng thức được viết lại thành: $\frac{b+c+5}{1+a}+\frac{c+a+5}{1+b}+\frac{a+b+5}{1+c}\ge\frac{51}{7}$

Bất đẳng thức trên tương đương với: $\frac{b+c+5}{1+a}+1+\frac{c+a+5}{1+b}+1+\frac{a+b+5}{1+c}+1\ge\frac{51}{7}+3$

Hay $$(a+b+c+6)\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\right)\ge\frac{72}{7}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được: $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\ge\frac{3}{7}$

Thật vậy theo bất đẳng thức Cauchy ta có: $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\ge\frac{9}{3+a+b+c}=\frac{9}{21}=\frac{3}{7}$

Vậy bài toán được chứng minh.
Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=6$ hay $x=6;\ y=3;\ z=2$.

Bài 16. Giả sử x, y, z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x+y+z=1$.

Chứng minh rằng: $$\frac{\sqrt{xy+z}+\sqrt{2x^2+2y^2}}{1+\sqrt{xy}}\ge 1$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐH KHTN Hà Nội năm 2010-2011

Lời giải

Ta sẽ quy bài toán về việc chứng minh bất đẳng thức cùng bậc là
$$\frac{\sqrt{xy+z(x+y+z)}+\sqrt{2x^2+2y^2}}{x+y+z+\sqrt{xy}}\ge 1\Leftrightarrow\sqrt{(x+z)(y+z)}+\sqrt{2x^2+2y^2}\ge x+y+z+\sqrt{xy}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\sqrt{2x^2+2y^2}\ge x+y$

Do đó ta chỉ cần chứng minh $\sqrt{(z+x)(z+y)}\ge z+\sqrt{xy}$

Bất đẳng thức trên tương đương với: $z^2+xy+z(x+y)\ge z^2+xy+2z\sqrt{xy}\Leftrightarrow z\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\ge 0$

Bài toán được chứng minh hoàn toàn. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=\frac{1}{2};\ z=0$.

Bài 17. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a+b+c+ab+bc+ca=6$. Chứng minh rằng:
$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge a^2+b^2+c^2\ge 3$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐHNN Hà Nội năm 2010-2011

Lời giải

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge a^2+b^2+c^2$

Thật vậy, theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{ab+bc+ac}$

Theo một đánh giá quen thuộc ta có $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$

Do đó ta được $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)(ab+bc+ca)$

Nên ta có: $\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{ab+bc+ac}\ge a^2+b^2+c^2$. Do đó ta suy ra $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge a^2+b^2+c^2$

+ Chứng minh $a^2+b^2+c^2\ge 3$.
Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có
$$a^2+b^2\ge 2ab;\ b^2+c^2\ge 2bc;\ c^2+a^2\ge 2ca;\ a^2+1\ge 2a; b^2+1\ge 2b; c^2+1\ge 2c$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được: $3\left(a^2+b^2+c^2\right)+3\ge 2(ab+bc+ca+a+b+c)=12$

Hay $a^2+b^2+c^2\ge 3$. Kết hợp hai kết quả trên ta được $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge a^2+b^2+c^2\ge 3$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 18. Cho các số dương a, b, c thoả mãn $a+b+c=abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S=\frac{a}{\sqrt{bc\left(1+a^2\right)}}+\frac{b}{\sqrt{ca\left(1+b^2\right)}}+\frac{c}{\sqrt{ab\left(1+c^2\right)}}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Phú Thọ năm 2010-2011

Lời giải

Cách 1: Kết hợp với giả thiết ta có

$$\sqrt{bc\left(1+a^2\right)}=\sqrt{bc+a^2bc}=\sqrt{bc+a\left(a+b+c\right)}=\sqrt{\left(a+b\right)\left(a+c\right)}$$

Hoàn toàn tương tự ta được: $\sqrt{ca\left(1+b^2\right)}=\sqrt{\left(a+b\right)\left(b+c\right)}$; $\sqrt{ba\left(1+c^2\right)}=\sqrt{\left(a+c\right)\left(b+c\right)}$;

$$\Rightarrow S=\frac{a}{\sqrt{\left(a+b\right)\left(a+c\right)}}+\frac{b}{\sqrt{\left(a+b\right)\left(b+c\right)}}\frac{c}{\sqrt{\left(a+c\right)\left(b+c\right)}}=\sqrt{\frac{a}{a+b}.\frac{a}{a+c}}+\sqrt{\frac{b}{b+c}.\frac{b}{b+c}}+\sqrt{\frac{c}{c+b}.\frac{c}{a+c}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được: $\sqrt{\frac{a}{a+b}.\frac{a}{a+c}}\le\frac{1}{2}\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}$

Hoàn toàn tương tự ta được: $S\le\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{a+c}+\frac{c}{b+c}\right)=\frac{3}{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của S là $\frac{3}{2}$. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\sqrt{3}$.

Cách 2: Ta viết lại giả thiết thành $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=1$.

Đặt $x=\frac{1}{a};\ y=\frac{1}{b};\ z=\frac{1}{c}$, khi đó giả thiết trở thành $xy+yz+zx=1$

Ta viết lại biểu thức S thành: $S=\sqrt{\frac{yz}{x^2+1}}+\sqrt{\frac{zx}{y^2+1}}+\sqrt{\frac{xy}{z^2+1}}$

Để ý đến giả thiết $xy+yz+zx=1$ ta được $S=\sqrt{\frac{yz}{\left(x+y\right)\left(x+z\right)}}+\sqrt{\frac{zx}{\left(y+z\right)\left(x+z\right)}}+\sqrt{\frac{xy}{\left(z+x\right)\left(y+z\right)}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta chứng minh được $\sqrt{\frac{yz}{\left(x+y\right)\left(x+z\right)}}+\sqrt{\frac{zx}{\left(y+z\right)\left(x+z\right)}}+\sqrt{\frac{xy}{\left(z+x\right)\left(y+z\right)}}\le\frac{3}{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của S là $\frac{3}{2}$.

Bài 19. Cho các số dương a, b c .Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S=\frac{c\left(ab+1\right)^2}{b^2\left(bc+1\right)}+\frac{a\left(bc+1\right)^2}{c^2\left(ca+1\right)}+\frac{b\left(ca+1\right)^2}{a^2\left(ab+1\right)}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Phú Thọ năm 2010-2011

Lời giải

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $x+y+z\ge3\sqrt[3]{xyz}$ ta được

$$S\ge3\sqrt[3]{\frac{c\left(ab+1\right)^2.a\left(bc+1\right)^2.b\left(ca+1\right)^2}{b^2\left(bc+1\right).c^2\left(ac+1\right).a^2\left(ab+1\right)}}=3\sqrt[3]{\frac{\left(ab+1\right)\left(bc+1\right)\left(ac+1\right)}{abc}}\ge3\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{ab}.2\sqrt{bc}.2\sqrt{ca}}{abc}}=6$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là 6, đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Cách 2: Đặt $x=\frac{ab+1}{b};\ y=\frac{bc+1}{c};\ z=\frac{ca+1}{a}$. Khi đó biểu thức được viết lại thành $S=\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta có: $S=\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\ge\frac{\left(x+y+z\right)^2}{x+y+z}=x+y+z$

Do đó ta được: $S \ge \frac{ab+1}{b} + \frac{bc+1}{c} + \frac{ca+1}{a} = \left(a+\frac{1}{a}\right) + \left(b+\frac{1}{b}\right) + \left(c+\frac{1}{c}\right) \ge 6$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là 6, đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 20. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x+y+z=18\sqrt{2}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{x(y+z)}} + \frac{1}{\sqrt{y(z+x)}} + \frac{1}{\sqrt{z(x+y)}} \ge \frac{1}{4}$$

Đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên toán Đại học Vinh, 2010 – 2011

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $\frac{1}{\sqrt{2x(y+z)}} + \frac{1}{\sqrt{2y(z+x)}} + \frac{1}{\sqrt{2z(x+y)}} \ge \frac{1}{4\sqrt{2}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $2\sqrt{2x(y+z)} \le 2x+y+z$, do đó ta được $\frac{1}{\sqrt{2x(y+z)}} \ge \frac{2}{2x+y+z}$

Hoàn toàn tương tự ta được bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{2x(y+z)}} + \frac{1}{\sqrt{2y(z+x)}} + \frac{1}{\sqrt{2z(x+y)}} \ge 2\left(\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z}\right)$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được: $\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \ge \frac{1}{8\sqrt{2}}$

Thật vậy theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \ge \frac{9}{4(x+y+z)} = \frac{9}{4.18\sqrt{2}} = \frac{1}{8\sqrt{2}}$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z=6\sqrt{2}$.

Bài 21: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$1+\frac{3}{a+b+c} \ge \frac{6}{ab+bc+ca}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh vĩnh Phúc năm 2010-2011

Lời giải

Cách 1: Bất đẳng thức đã cho tương đương: $(a+b+c)(ab+bc+ca)+3(ab+bc+ca) \ge 6(a+b+c)$

Để ý rằng $\quad (ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c) = 3(a+b+c)$

Nên bài toán quy về chứng minh $\sqrt{3(a+b+c)^3} + 3\sqrt{3(a+b+c)} \ge 6(a+b+c)$

Bất đẳng thức trên tương đương với $\sqrt{3(a+b+c)}\left(\sqrt{a+b+c}-\sqrt{3}\right)^2 \ge 0$

Bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức đúng. Vậy bài toán được chứng minh.
Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Cách 2: Đặt $a=\frac{1}{x}; b=\frac{1}{y}; c=\frac{1}{z} \Rightarrow xyz=1$. Khi đó ta có: $1+\frac{3}{a+b+c} \ge \frac{6}{ab+bc+ca}$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{3abc}{a+b+c} \ge \frac{6abc}{ab+bc+ca} \Leftrightarrow 1+\frac{3}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}} \ge \frac{6}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \Leftrightarrow 1+\frac{3}{xy+yz+zx} \ge \frac{6}{x+y+z}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có: $3(xy+yz+zx) \le (x+y+z)^2 \Rightarrow 1+\frac{3}{xy+yz+zx} \ge 1+\frac{9}{(x+y+z)^2}$

Mặt khác: $1+\frac{9}{(x+y+z)^2}-\frac{6}{x+y+z}=\left(1-\frac{3}{x+y+z}\right)^2\geq 0,\forall x,y,z>0$ $1+\frac{9}{(x+y+x)^2}\geq\frac{6}{x+y+z}$

Từ đó ta được bất đẳng thức $1+\frac{3}{xy+yz+zx}\geq\frac{6}{x+y+z}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 22. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c\leq 2$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}\geq\frac{\sqrt{97}}{2}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán TP Hải Phòng năm 2010-2011

Lời giải

Cách 1: Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức sau: $\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2}\geq\sqrt{(a+b)^2+(x+y)^2}$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với: $\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2\geq(a+x)^2+(b+y)^2$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}\geq 2ax+2by\Leftrightarrow(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$$

Bất đẳng thức cuối cùng là bất đẳng thức Bunhiacopxki

Áp dụng bất đẳng thức trên ta có

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}\geq\sqrt{(a+b)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}\geq\sqrt{(a+b+c)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}$$

Ta cần chứng minh $(a+b+c)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\geq\frac{97}{4}$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy và chú ý giả thiết $a+b+c\leq 2$, ta được

$$(a+b+c)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\geq(a+b+c)^2+\frac{81}{(a+b+c)^2}=\left[(a+b+c)^2+\frac{16}{(a+b+c)^2}\right]+\frac{65}{(a+b+c)^2}\geq\frac{97}{4}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{2}{3}$

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được: $\sqrt{\left(a^2+\frac{1}{b^2}\right)\left(1+\frac{81}{16}\right)}\geq\sqrt{\left(a+\frac{9}{4b}\right)^2}=a+\frac{9}{4b}$

Hay $\frac{\sqrt{97}}{4}\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}\geq a+\frac{9}{4b}$

Chứng minh tương tự ta được: $\frac{\sqrt{97}}{4}\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}\geq b+\frac{9}{4c}$; $\frac{\sqrt{97}}{4}\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}\geq c+\frac{9}{4a}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{\sqrt{97}}{4}\left(\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}\right)\geq a+b+c+\frac{9}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Mà ta lại có $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}$

Do đó ta được: $\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}\geq\frac{4}{\sqrt{97}}\left[a+b+c+\frac{81}{4(a+b+c)}\right]$

Ta cần chứng minh $\frac{4}{\sqrt{97}}\left[a+b+c+\frac{81}{4(a+b+c)}\right]\geq\frac{\sqrt{97}}{2}$. Hay : $a+b+c+\frac{81}{4(a+b+c)}\geq\frac{97}{8}$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$a+b+c+\frac{81}{4(a+b+c)}=a+b+c+\frac{4}{a+b+c}+\frac{65}{4(a+b+c)}\geq 2\sqrt{(a+b+c)\frac{4}{a+b+c}}+\frac{65}{4.2}=4+\frac{65}{8}=\frac{97}{8}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{2}{3}$

Bài 23: Cho các số $a,\ b,\ c\in[1;2]$. Chứng minhrằng:

$$\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{b^2+c^2}{bc}+\frac{c^2+a^2}{ca}\leq 7$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Hà Tĩnh năm 2010-2011

Lời giải

Cách 1: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2\leq 7abc\Leftrightarrow c\left(ab-ca-b^2+bc\right)+a\left(ab-ca-b^2+bc\right)+5abc-2bc^2-2a^2b\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\left(ab-ca-b^2+bc\right)(c+a)+b\left(4ca-2c^2-2a^2+ca\right)\geq 0\Leftrightarrow(a-b)(b-c)(c+a)+b(2a-c)(2c-a)\geq 0$$

Vì vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $2\geq a\geq b\geq c\geq 1$ khi đó ta được $2a\geq 2\geq c;\ 2c\geq 2\geq a$. Do đó ta được: $(a-b)(b-c)(c+a)\geq 0;\ b(2a-c)(2c-a)\geq 0$

Nên bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=2;\ c=1$ và các hoán vị.

Cách 2: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\leq 7$

Vì vai trò các biến như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $2\geq a\geq b\geq c\geq 1$. Khi đó ta có

$$\frac{a}{c}+1-\frac{a}{b}-\frac{b}{c}=\left(\frac{a}{b}-1\right)\left(\frac{b}{c}-1\right)\geq 0;\frac{c}{a}+1-\frac{b}{a}-\frac{c}{b}=\left(\frac{b}{a}-1\right)\left(\frac{c}{b}-1\right)\geq 0$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+2-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)\geq 0\Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+2\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được: $2\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)\leq 5\Leftrightarrow(2a-c)(a-2c)\leq 0$

Từ $2\geq a\geq b\geq c\geq 1$ suy ra $2a\geq 2\geq c;\ 2c\geq 2\geq a$ nên bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 24. Cho a, b, c là các số thực dương không âm thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=a\sqrt{b}+b\sqrt{c}+c\sqrt{a}-\sqrt{abc}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Nghệ An năm 2010-2011

Lời giải

Đặt $x=\sqrt{a};\ y=\sqrt{b};\ z=\sqrt{c}$. Từ giả thiết ta được $x^2+y^2+z^2=3$.

Khi này biểu thức P trở thành $P=x^2y+y^2z+z^2x-xyz$

Dễ thấy $P\geq 0$ theo bất đẳng thức Cauchy

Không mất tính tổng quát ta giả sử y là số nằm giữa x, z. Khi đó ta có

$$z(y-z)(y-x)\leq 0\Leftrightarrow y^2z+z^2x-xyz\leq z^2y$$

Do đó ta có $P=x^2y+y^2z+z^2x-xyz\leq x^2y+z^2y=y\left(x^2+z^2\right)$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta có: $2y^2\left(x^2+z^2\right)\left(x^2+z^2\right)\le\left(\dfrac{2x^2+2y^2+2z^2}{3}\right)^3=8$

Suy ra $y\left(x^2+z^2\right)\le 2$ nên ta được $P\le 2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l} x=y=z \\ \begin{cases} z=0 \\ x^2=2y^2 \end{cases} \end{array}\right. \text{ và các hoán vị } \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=c=1 \\ a=2;\ b=1;\ c=0 \end{array}\right. \text{ và các hoán vị}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là 2.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$ hoặc $a=2;\ b=1;\ c=0$ và các hoán vị.

Bài 25. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{a^2+1}-a}{bc}+\frac{\sqrt{b^2+1}-b}{ac}+\frac{\sqrt{c^2+1}-c}{ab}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Hưng Yên năm 2010-2011

Lời giải

Để ý là $a^2+1=a^2+ab+bc+ca=\left(a+b\right)\left(c+a\right)$, do đó ta được: $\sqrt{a^2+1}=\sqrt{\left(a+b\right)\left(c+a\right)}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{\sqrt{a^2+1}-a}{bc}=\frac{\sqrt{\left(a+b\right)\left(c+a\right)}-a}{bc}\le\frac{\dfrac{2a+b+c}{2}-a}{bc}=\frac{b+c}{2bc}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Hoàn toàn tương tự ta được $\dfrac{\sqrt{b^2+1}-b}{ac}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\right);\ \dfrac{\sqrt{c^2+1}-c}{ab}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được $\dfrac{\sqrt{a^2+1}-a}{bc}+\dfrac{\sqrt{b^2+1}-b}{ac}+\dfrac{\sqrt{c^2+1}-c}{ab}\le\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 26. a) Cho 2 số dương a và b. Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{a+b}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$

b) Cho 3 số dương x, y, z thỏa mãn $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2010$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Phú Yên năm 2010-2011

Lời giải

a) Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên như sau: $\dfrac{1}{a+b}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\Leftrightarrow 4ab\le\left(a+b\right)^2\Leftrightarrow 0\le\left(a-b\right)^2$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$

b) Áp dụng bất đẳng thức trên ta được: $\dfrac{1}{2x+y+z}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x+z}\right)\le\dfrac{1}{16}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$

Hoàn toàn tương tự ta được: $\dfrac{1}{x+2y+z}\le\dfrac{1}{16}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{1}{z}\right);\ \dfrac{1}{x+y+2z}\le\dfrac{1}{16}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{z}\right)$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$P=\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{2010}{4}=\frac{1005}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{1005}{2}$. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z=670$

Bài 27. Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c\le 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\ge\frac{3}{2}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bình Phước năm 2011-2012

Lời giải

Cách 1: Theo bất đẳng thức Cauchy ta có: $A=\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\ge\frac{9}{3+ab+bc+ca}$

Mặt khác dễ thấy $ab+bc+ca\le\frac{(a+b+c)^2}{3}$

Mà $a+b+c\le 3$ nên $ab+bc+ca\le 3$. Do đó ta được $A\ge\frac{9}{3+ab+bc+ca}\ge\frac{9}{3+3}=\frac{3}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}1+ab=1+bc=1+ca\\ a=b=c\\ a+b+c=3\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=1$

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1+ab}{4}\ge 2\sqrt{\frac{1}{1+ab}.\frac{1+ab}{4}}=1\Rightarrow\frac{1}{1+ab}\ge 1-\frac{1+ab}{4}=\frac{3-ab}{4}$$

Hoàn toàn tương tự ta có $\frac{1}{1+ab}\ge\frac{3-ab}{4}$; $\frac{1}{1+ca}\ge\frac{3-ca}{4}$

Do đó ta được $\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\ge\frac{9-(ab+bc+ca)}{4}$.

Mặt khác ta chứng minh được $ab+bc+ca\le 3$

Do đó ta suy ra $\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\ge\frac{9-(ab+bc+ca)}{4}\ge\frac{3}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 3: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $\frac{1}{1+ab}=1-\frac{ab}{1+ab}\ge 1-\frac{ab}{2\sqrt{ab}}=1-\frac{\sqrt{ab}}{2}$

Tương tự ta có $\frac{1}{1+bc}\ge 1-\frac{\sqrt{bc}}{2}$; $\frac{1}{1+ca}\ge 1-\frac{\sqrt{ca}}{2}$

Cộng theo vế theo vế các bất đẳng thức trên và áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được:

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\ge 3-\frac{1}{2}\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)\ge 3-\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}\right)=3-\frac{a+b+c}{2}\ge 3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Bài 28. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+...+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}>4$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐHSP Hà Nội năm 2011-2012

Lời giải

Dễ thấy $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} > \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}; ... \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}} > \frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$

Do đó ta được: $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}} > \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + ... + \frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$

Suy ra: $2\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}\right) > \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$

Hay $2\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}\right) > \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + ... + \sqrt{81} - \sqrt{80}$

Nên ta được $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}} > 4$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 29. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)} \ge abc + \sqrt[3]{\left(a^3+abc\right)\left(b^3+abc\right)\left(c^3+abc\right)}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Nghệ An năm 2011-2012

Lời giải

Cách 1: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt{\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right)} \ge 1 + \sqrt[3]{\left(\frac{a^2}{bc}+1\right)\left(\frac{b^2}{ca}+1\right)\left(\frac{c^2}{ab}+1\right)}$$

Đặt $x = \frac{a}{b};\ y = \frac{b}{c};\ z = \frac{c}{a} \Rightarrow x;\ y;\ z > 0;\ xyz = 1$

Khi đó bất đẳng thức trên trở thành

$$\sqrt{\left(xy+yz+zx\right)\left(x+y+z\right)} \ge 1 + \sqrt[3]{\left(\frac{x}{z}+1\right)\left(\frac{y}{x}+1\right)\left(\frac{z}{y}+1\right)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)+xyz} \ge 1 + \sqrt[3]{\frac{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}{xyz}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)+1} \ge 1 + \sqrt[3]{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}$$

Đặt $t = \sqrt[3]{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}$ suy ra $t \ge 2$. Khi đó ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\sqrt{t^3+1} \ge 1 + t \Leftrightarrow t^3 + 1 \ge 1 + 2t + t^2 \Leftrightarrow t\left(t-2\right)\left(t+1\right) \ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng do $t \ge 2$.

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Cách 2: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt{\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right)} \ge 1 + \sqrt[3]{\left(\frac{a^2}{bc}+1\right)\left(\frac{b^2}{ca}+1\right)\left(\frac{c^2}{ab}+1\right)}$$

Hay $\sqrt{3+\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}+\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}} \ge 1 + \sqrt[3]{\left(\frac{a^2}{bc}+1\right)\left(\frac{b^2}{ca}+1\right)\left(\frac{c^2}{ab}+1\right)}$

Đặt $x = \frac{a^2}{bc};\ y = \frac{b^2}{ca};\ z = \frac{c^2}{ab}$, khi đó ta có $xyz = 1$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành: $\sqrt{3+x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \ge 1 + \sqrt[3]{\left(1+x\right)\left(1+y\right)\left(1+z\right)}$

Hay $\sqrt{3+x+y+z+xy+yz+zx} \ge 1+\sqrt[3]{2+x+y+z+xy+yz+zx}$

Đặt $t=\sqrt[3]{2+x+y+z+xy+yz+zx}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $x+y+z+xy+yz+zx \ge 6$. Do đó ta có: $t \ge \sqrt[3]{2+6}=2$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành: $\sqrt{t^3+1} \ge 1+t \Leftrightarrow t^2+1 \ge t^2+2t+1 \Leftrightarrow t\left(t+1\right)\left(t-2\right) \ge 0$

Đánh giá cuối cùng đúng với mọi $t \ge 2$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 30. Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $a+b+c=2$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{ab}{\sqrt{ab+2c}}+\frac{bc}{\sqrt{bc+2a}}+\frac{ca}{\sqrt{ca+2b}}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Thanh Hóa năm 2011-2012

Lời giải

Để ý đến giả thiết $a+b+c=2$ ta có $ab+2c=ab+c\left(a+b+c\right)=\left(b+c\right)\left(c+a\right)$

Do đó theo bất đẳng thức Cauchy ta được: $\dfrac{ab}{\sqrt{ab+2c}}=\dfrac{ab}{\sqrt{\left(b+c\right)\left(c+a\right)}} \le \dfrac{2ab}{b+c}+\dfrac{2ab}{c+a}$

Hoàn toàn tương tự ta được $\dfrac{bc}{\sqrt{bc+2a}} \le \dfrac{2bc}{a+b}+\dfrac{2bc}{c+a}$; $\dfrac{ca}{\sqrt{ca+2b}} \le \dfrac{2ca}{a+b}+\dfrac{2ca}{b+c}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{ab}{\sqrt{ab+2c}}+\frac{bc}{\sqrt{bc+2a}}+\frac{ca}{\sqrt{ca+2b}} \le \frac{2ab}{b+c}+\frac{2ab}{c+a}+\frac{2bc}{a+b}+\frac{2bc}{c+a}+\frac{2ca}{a+b}+\frac{2ca}{b+c}=2\left(a+b+c\right)=4$$

Hay $P \le 4$. Vậy giá trị lớn nhất của P là 4.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{2}{3}$

Bài 31. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=\dfrac{9}{4}$. Chứng minh rằng:

$$a^3+b^3+c^3 > a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Vĩnh Phúc năm 2011-2012

Lời giải

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $\dfrac{a^3+b^3}{2} \ge \dfrac{ab\left(a+b\right)}{2} > \dfrac{ab\left(a+b\right)}{\frac{9}{4}}=\dfrac{ab\left(a+b\right)}{abc}=\dfrac{a+b}{c}$

Từ đó ta có $c^3+\dfrac{a^3+b^3}{2} > c^3+\dfrac{a+b}{c} \ge 2c\sqrt{a+b}$

Tương tự ta có: $b^3+\dfrac{a^3+c^3}{2} > b^3+\dfrac{a+c}{b} \ge 2b\sqrt{a+c}$; $a^3+\dfrac{b^3+c^3}{2} > a^3+\dfrac{b+c}{a} \ge 2a\sqrt{b+c}$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được: $a^3+b^3+c^3 > a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b}$

Bài toán được chứng minh xong.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\left(a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b}\right)^2 \le 2\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$<\frac{9}{4}2\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)=abc\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Theo một bất đẳng thức quen thuộc ta có $\quad abc\left(a+b+c\right)\le\frac{1}{3}\left(ab+bc+ca\right)^2$

Từ đó ta được

$$abc\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)\le\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(ab+bc+ca\right)^2$$

$$\le\frac{\left(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca+ab+bc+ca\right)^3}{3^4}=\frac{\left(a+b+c\right)^6}{3^4}$$

Do đó ta có $\quad \left(a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b}\right)^2<\frac{\left(a+b+c\right)^6}{3^4}$

Hay $\quad a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b}<\frac{\left(a+b+c\right)^3}{3^2}$

Dễ dàng chứng minh được $\quad \left(a^3+b^3+c^3\right)\ge\frac{\left(a+b+c\right)^3}{9}$

Từ đó ta được bất đẳng thức sau: $a^3+b^3+c^3>a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 32. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{c^2\left(a^2+b^2\right)^2+a^2\left(b^2+c^2\right)^2+b^2\left(c^2+a^2\right)^2}\ge\frac{54\left(abc\right)^3}{\left(a+b+c\right)^2\sqrt{\left(ab\right)^4+\left(bc\right)^4+\left(ca\right)^4}}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Vĩnh Phúc năm 2011-2012

Lời giải

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sqrt{c^2\left(a^2+b^2\right)^2+a^2\left(b^2+c^2\right)^2+b^2\left(c^2+a^2\right)^2}\ge\sqrt{c^2\left(2ab\right)^2+a^2\left(2bc\right)^2+b^2\left(2ca\right)^2}=\sqrt{12a^2b^2c^2}=2\sqrt{3}abc$$

$$\left(a+b+c\right)^2\sqrt{\left(ab\right)^4+\left(bc\right)^4+\left(ca\right)^4}\ge\left(3\sqrt[3]{abc}\right)^2\sqrt{3\sqrt[3]{a^8b^8c^8}}=9\sqrt{3.\sqrt[3]{a^4b^4c^3}.\sqrt[3]{a^8b^8c^8}}=9\sqrt{3}a^2b^2c^2$$

Nhân theo vế hai bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{c^2\left(a^2+b^2\right)^2+a^2\left(b^2+c^2\right)^2+b^2\left(c^2+a^2\right)^2}\left(a+b+c\right)^2\sqrt{\left(ab\right)^4+\left(bc\right)^4+\left(ca\right)^4}=2\sqrt{3}abc.9\sqrt{3}a^2b^2c^2=54\left(abc\right)^3$$

Hay $\sqrt{c^2\left(a^2+b^2\right)^2+a^2\left(b^2+c^2\right)^2+b^2\left(c^2+a^2\right)^2}\ge\frac{54\left(abc\right)^3}{\left(a+b+c\right)^2\sqrt{\left(ab\right)^4+\left(bc\right)^4+\left(ca\right)^4}}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 33. Cho các số dương a,b,c thay đổi và thoả mãn $3a+4b+5c=12$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $\quad S=\frac{ab}{ab+a+b}+\frac{2ac}{ac+a+c}+\frac{3bc}{bc+b+c}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu năm 2011-2012

Lời giải

Ta viết lại biểu thức S thành: $S=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+1}+\frac{2}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+1}+\frac{3}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+1}$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x+y+z}\le\frac{1}{9}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ ta có

$$S=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+1}+\frac{2}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+1}+\frac{3}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+1}\le\frac{a+b+1}{9}+\frac{2\left(c+a+1\right)}{9}+\frac{3\left(b+c+1\right)}{9}=\frac{6+3a+4b+5c}{9}=\frac{18}{9}=2$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức S là 2. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 34. Cho a, b là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt{\frac{a^3}{a^3+8b^3}}+\sqrt{\frac{4b^3}{b^3+\left(a+b\right)^3}}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐH KHTN Hà Nội năm 2011-2012

Lời giải

Biểu thức P được viết lại là $P=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{8b^3}{a^3}}}+\sqrt{\frac{\frac{4b^3}{a^3}}{\frac{b^3}{a^3}+\left(1+\frac{b}{a}\right)^3}}$

Đặt $t=\frac{b}{a}>0$. Khi đó bất đẳng thức được viết lại là: $P=\sqrt{\frac{1}{1+8t^3}}+\sqrt{\frac{4t^3}{t^3+\left(1+t\right)^3}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $1+8t^3=\left(1+2t\right)\left(1-2t+4t^2\right)\le\frac{\left(2+4t^2\right)^2}{2}=\left(1+2t^2\right)^2$

Suy ra $$\sqrt{\frac{1}{1+8t^3}}\ge\sqrt{\frac{1}{\left(1+2t^2\right)^2}}=\frac{1}{1+2t^2}$$

Ta sẽ chứng minh $$\sqrt{\frac{4t^3}{t^3+\left(1+t\right)^3}}\ge\frac{2t^2}{1+2t^2}$$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{4t^3}{t^3+\left(1+t\right)^3}\ge\left(\frac{2t^2}{1+2t^2}\right)^2\Leftrightarrow\left(1+2t^2\right)^2\ge t^4+t\left(1+t\right)^3\Leftrightarrow\left(t-1\right)^2\left(2t^2+t+1\right)\ge0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng với mọi t.

Do đó ta được: $P=\sqrt{\frac{1}{1+8t^3}}+\sqrt{\frac{4t^3}{t^3+\left(1+t\right)^3}}\ge\frac{1}{1+2t^2}+\frac{2t^2}{1+2t^2}=1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 1. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$

Bài 35. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{3a+3b+2c}{\sqrt{6\left(a^2+5\right)}+\sqrt{6\left(b^2+5\right)}+\sqrt{c^2+5}}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐH KHTN Hà Nội năm 2011-2012

Lời giải

Từ giả thiết $ab+bc+ca=5$ ta có: $a^2+5=a^2+ab+bc+ca=\left(a+b\right)\left(c+a\right)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sqrt{6\left(a^2+5\right)}=\sqrt{6\left(a+b\right)\left(c+a\right)}\le\frac{3\left(a+b\right)+2\left(c+a\right)}{2}=\frac{5a+3b+2c}{4}$$

Chứng minh tương tự ta được: $\sqrt{6\left(b^2+5\right)}\le\frac{3a+5b+2c}{2}$; $\sqrt{c^2+5}\le\frac{a+b+2c}{2}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được: $\sqrt{6\left(a^2+5\right)}+\sqrt{6\left(b^2+5\right)}+\sqrt{c^2+5}\le\dfrac{9a+9b+6c}{2}$

Suy ra $\quad P=\dfrac{3a+3b+2c}{\sqrt{6\left(a^2+5\right)}+\sqrt{6\left(b^2+5\right)}+\sqrt{c^2+5}}\ge\dfrac{2\left(3a+3b+2c\right)}{9a+9b+6c}=\dfrac{2}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\dfrac{2}{3}$. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=1;\ c=2$.

Bài 36. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$P=\sqrt{a^2+abc}+\sqrt{b^2+abc}+\sqrt{c^2+abc}+9\sqrt{abc}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bắc Ninh năm 2011-2012

Lời giải

Ta có $\qquad a^2+abc=a^2\left(a+b+c\right)+abc=a\left(a+b\right)\left(a+c\right)$

Do đó ta được $\sqrt{a^2+abc}=\sqrt{a\left(a+b\right)\left(a+c\right)}\le\dfrac{\sqrt{a}\left(a+b+a+c\right)}{2}=\dfrac{\sqrt{a}\left(a+1\right)}{2}$

Chứng minh tương tự ta được: $\sqrt{b^2+abc}\le\dfrac{\sqrt{b}\left(b+1\right)}{2};\ \ \sqrt{c^2+abc}\le\dfrac{\sqrt{c}\left(c+1\right)}{2}$

Do đó ta được: $\sqrt{a^2+abc}+\sqrt{b^2+abc}+\sqrt{c^2+abc}\le\dfrac{\sqrt{a}\left(a+1\right)}{2}+\dfrac{\sqrt{b}\left(b+1\right)}{2}+\dfrac{\sqrt{c}\left(c+1\right)}{2}$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có

$$\frac{\sqrt{a}\left(a+1\right)}{2}+\sqrt{abc}\le\sqrt{a}\left(\frac{a+1}{2}+\frac{b+c}{2}\right)=\sqrt{a}\left(\frac{a+b+c+1}{2}\right)=\sqrt{a}$$

Chứng minh tương tự ta được: $\dfrac{\sqrt{b}\left(b+1\right)}{2}+\sqrt{abc}\le\sqrt{b};\ \dfrac{\sqrt{c}\left(c+1\right)}{2}+\sqrt{abc}\le\sqrt{c}$

Như vậy ta có: $P=\sqrt{a^2+abc}+\sqrt{b^2+abc}+\sqrt{c^2+abc}+9\sqrt{abc}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+6\sqrt{abc}$

Mà ta có: $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\le\sqrt{3\left(a+b+c\right)}=\sqrt{3};\ 6\sqrt{abc}\le6\sqrt{\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Nên ta suy ra $P\le\sqrt{3}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{5}{\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Bài 37. Cho a, b, c là số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{2ab}{3a+8b+6c}+\frac{3bc}{3b+6c+a}+\frac{3ca}{9c+4a+4b}\le\frac{a+2b+3c}{9}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Phú Thọ năm 2011-2012

Lời giải

Cách 1: Đặt $x=a;\ y=2b;\ z=3c$, khi đó bất đẳng thức trên được viết lại thành

$$\frac{xy}{3x+4y+2z}+\frac{yz}{3y+4z+2x}+\frac{zx}{3z+4x+2y}\le\frac{x+y+z}{9}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{xy}{3x+4y+2z}=\frac{xy}{x+2y+x+y+z+x+y+z}\le\frac{xy}{9}\left(\frac{1}{x+2y}+\frac{2}{x+y+z}\right)$$

$$\le\frac{xy}{9}\left(\frac{1}{9x}+\frac{2}{9y}+\frac{2}{x+y+z}\right)=\frac{2x+y}{81}+\frac{2xy}{9(x+y+z)}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{yz}{3y+4z+2x}\le\frac{2y+z}{81}+\frac{2yz}{9(x+y+z)};\ \frac{zx}{3z+4x+2y}\le\frac{2z+x}{81}+\frac{2zx}{9(x+y+z)}$$

Cộng theo các vế cảu ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{xy}{3x+4y+2z}+\frac{yz}{3y+4z+2x}+\frac{zx}{3z+4x+2y}\le\frac{x+y+z}{27}+\frac{2(xy+yz+zx)}{9(x+y+z)}$$

Mà theo một đánh giá quen thuộc ta lại có $xy+yz+zx\le\frac{(x+y+z)^2}{3}$

Do đó ta có $\frac{x+y+z}{27}+\frac{2(xy+yz+zx)}{9(x+y+z)}\le\frac{x+y+z}{27}+\frac{2(x+y+z)}{27}=\frac{x+y+z}{9}$

Suy ra $$\frac{xy}{3x+4y+2z}+\frac{yz}{3y+4z+2x}+\frac{zx}{3z+4x+2y}\le\frac{x+y+z}{9}$$

Hay bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=2b=3c$.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta có

$$\frac{xy}{3x+4y+2z}=\frac{xy}{81}.\frac{(6+2+1)^2}{2(x+y+z)+2y+x}\le\frac{xy}{81}\left(\frac{18}{x+y+z}+\frac{2}{y}+\frac{1}{x}\right)=\frac{2xy}{9(x+y+z)}+\frac{2x+y}{81}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{yz}{3y+4z+2x}\le\frac{2y+z}{81}+\frac{2yz}{9(x+y+z)};\ \frac{zx}{3z+4x+2y}\le\frac{2z+x}{81}+\frac{2zx}{9(x+y+z)}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{xy}{3x+4y+2z}+\frac{yz}{3y+4z+2x}+\frac{zx}{3z+4x+2y}\le\frac{x+y+z}{27}+\frac{2(xy+yz+zx)}{9(x+y+z)}$$

Đến đây chứng minh hoàn toàn tương tự như trên.

Bài 38. Giả sử a, b, c là các số dương thoả mãn $abc=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$M=\frac{a}{b^2+c^2+a}+\frac{b}{c^2+a^2+b}+\frac{c}{a^2+b^2+c}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Hải Dương năm 2011-2012

Lời giải

Ta chứng minh $M\le 1$. Đặt $\sqrt[3]{a}=x;\ \sqrt[3]{b}=y;\ \sqrt[3]{c}=z$, khi đó $x;\ y;\ z>0$ và $xyz=1$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành: $\frac{x^3}{y^6+z^6+x^3}+\frac{y^3}{z^6+x^6+y^3}+\frac{z^3}{x^6+y^6+z^3}\le 1$

Dễ thấy: $(y-z)(y^5-z^5)\ge 0\Rightarrow y^6+z^6\ge y^5z+yz^5$. Suy ra: $y^6+z^6+x^4yz\ge yz(x^4+y^4+z^4)$

Từ đó ta được: $\frac{1}{y^6+z^6+x^3}\le\frac{1}{yz(x^4+y^4+z^4)}$ hay: $\frac{x^4yz}{y^6+z^6+x^3}\le\frac{x^4}{x^4+y^4+z^4}$

Do đó ta được $$\frac{x^3}{y^6+z^6+x^3}\le\frac{x^4}{x^4+y^4+z^4}$$

Tương tự ta có $\dfrac{y^3}{z^6+x^6+y^3}\le\dfrac{y^4}{x^4+y^4+z^4}$; $\dfrac{z^3}{x^6+y^6+z^3}\le\dfrac{z^4}{x^4+y^4+z^4}$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được: $\dfrac{x^3}{y^6+z^6+x^3}+\dfrac{y^3}{z^6+x^6+y^3}+\dfrac{z^3}{x^6+y^6+z^3}\le 1$

Vậy giá trị lớn nhất của M là 1. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 39. Cho a, b, c là các số dương thoả mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c^3}{a(b+c)}\ge\frac{3}{2}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Thái Bình năm 2011-2012

Lời giải

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các số dương ta được

$$\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b}{2}+\frac{c+a}{4}\ge\frac{3}{2}a;\ \frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c}{2}+\frac{a+b}{4}\ge\frac{3}{2}b;\ \frac{c^3}{a(b+c)}+\frac{a}{2}+\frac{b+c}{4}\ge\frac{3}{2}c$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c^3}{a(b+c)}+a+b+c\ge\frac{3(a+b+c)}{2}$$

Hay $$\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c^3}{a(b+c)}\ge\frac{a+b+c}{2}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}=3$

Nên ta được $$\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c^3}{a(b+c)}\ge\frac{3}{2}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra khi $a=b=c=1$.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức bunhiacioxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c^3}{a(b+c)}\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2b+b^2c+c^2a+3abc}$$

Ta cần chứng minh được $2\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge 3\left(a^2b+b^2c+c^2a+3abc\right)$

Vì $abc=1$ nên ta được $a+b+c\ge 3$.

Dễ thấy $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge\dfrac{(a+b+c)^2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{3}\ge(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$2(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 3\left(a^2b+b^2c+c^2a+3abc\right)$$

Hay

$$2\left(a^3+b^3+c^2+a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2\right)\ge 3\left(a^2b+b^2c+c^2a+3abc\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(a^3+b^3+c^2\right)+2\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)\ge a^2b+b^2c+c^2a+9$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$a^3+ab^2\ge 2a^2b;\ b^3+bc^2\ge 2b^2c;\ c^3+ca^2\ge 2c^2a$$

$$3\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge 9abc=9;\ 3\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)\ge 9abc=9$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên và thu gọn ta được

$$2\left(a^3+b^3+c^2\right)+2\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)\ge a^2b+b^2c+c^2a+9$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 40. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$A=14\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐHQG TP Hồ Chí Minh năm 2012-2013

Lời giải

Dễ dàng tính được $ab+bc+ca=\frac{1-\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2}$. Lại có

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)=a^3+b^2a+b^3+bc^2+c^3+ca^2+a^2b+b^2c+c^2a$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $a^3+b^2a\ge 2a^2b;\ b^3+bc^2\ge 2b^2c;\ c^3+ca^2\ge 2c^2a$

Do đó suy ra: $a^2+b^2+c^2=a^3+b^2a+b^3+bc^2+c^3+ca^2+a^2b+b^2c+c^2a\ge 3\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$

Từ đó ta được $$\frac{1}{a^2b+b^2c+c^2a}\ge\frac{3}{a^2+b^2+c^2}$$

Hay $$\frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}\ge\frac{3(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}=\frac{3-3\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

Đặt $t=a^2+b^2+c^2\Rightarrow t\ge\frac{1}{3}$. Khi này biểu thức được viết lại thành

$$A=14t+\frac{3-3t}{2t}=\frac{28t}{2}+\frac{3}{2t}-\frac{3t}{2t}=\frac{27t}{2}+\frac{3}{2t}+\frac{t}{2}-\frac{3}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{27t}{2}+\frac{3}{2t}\ge 2\sqrt{\frac{27t}{2}.\frac{3}{2t}}=9$

Mặt khác $\frac{t}{2}-\frac{3}{2}\ge\frac{1}{6}-\frac{3}{2}=-\frac{4}{3}$. Suy ra $A\ge 9-\frac{4}{3}=\frac{23}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{23}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Bài 41. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a\le b\le 3\le c;\ c\ge b+1;\ a+b\ge c$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q=\frac{2ab+a+b+c(ab-1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐH KHTN Hà Nội năm 2012-2013

Lời giải

Cách 1: Ta có

$$Q=\frac{2ab+a+b+c(ab-1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}=\frac{(a+1)(b+1)+(ab-1)(c+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}=\frac{1}{c+1}+\frac{ab-1}{(a+1)(b+1)}=\frac{1}{a+b+1}+\frac{ab-1}{ab+a+b+1}$$

Từ giả thiết: $a+b\ge c\ge b+1\Rightarrow b\ge a\ge 1\Rightarrow(a-1)(b-1)\ge 0\Rightarrow ab\ge a+b-1\ge c-1\ge 2$

Suy ra: $Q\ge\frac{1}{ab+2}+\frac{ab-1}{2(ab+1)}$. Đặt $x=ab\Rightarrow x\ge 2$, khi đó ta được $Q\ge\frac{1}{x+2}+\frac{x-1}{2(x+1)}$

Suy ra: $Q-\frac{5}{12}\ge\frac{1}{x+2}+\frac{x-1}{2(x+1)}-\frac{5}{12}=\frac{(x-2)(x+5)}{12(x+1)(x+2)}\ge 0$. Do đó ta có $Q\ge\frac{5}{12}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là $\frac{5}{12}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=1;b=2;c=3$

Cách 2: Nhận thấy $a+b\ge c\ge b+1\Rightarrow a\ge 1$ do đó ta được $c\ge 3\ge b\ge a\ge 1$

Khi đó $(a-1)(b-1)\ge 0\Leftrightarrow ab\ge a+b-1\ge c-1$

Ta sẽ chứng minh $Q \ge \frac{5}{12}$. Thật vậy $Q = \frac{2ab + a + b + c(ab-1)}{(a+1)(b+1)(c+1)} \ge \frac{5}{12}$

Tương đương với $\quad 7abc + 7(a+b) + 19ab - 5c(a+b) - 17c - 5 \ge 0$

Đặt $A = 7abc + 7(a+b) + 19ab - 5c(a+b) - 17c - 5$ khi đó ta có

$A = 7abc + 7(a+b) + 19ab - 5c(a+b) - 17c - 5 = 5abc + 2abc + 7(a+b) + 19ab - 5c(a+b) - 17c - 5$

$\ge 5c(a+b-1) + 6(c-1) + 7c + 19(c-1) - 5c(a+b) - 17c - 5 = 10c - 30 \ge 0 \Rightarrow c \ge 3$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là $\frac{5}{12}$. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a = 1; b = 2; c = 3$

Cách 3: Ta có $a + b \ge c \Rightarrow a + b - c \ge 0$

Từ $a + b \ge c \ge b + 1 \Rightarrow a \ge 1$ mà $b \ge a$. Do đó ta đượ

$(a-1)(b-1) \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} ab \ge a + b - 1 \\ a + b \le ab + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab \ge c - 1 \\ a + b \le ab + 1 \end{cases}$

Khi đó ta được

$$Q = \frac{2ab + a + b + c(ab-1)}{(a+1)(b+1)(c+1)} = \frac{2ab + a + b - c + abc}{(a+1)(b+1)(c+1)} \ge \frac{2ab + abc}{(a+1)(b+1)(c+1)}$$

$$= \frac{ab(2+c)}{(ab + a + b + 1)(c+1)} \ge \frac{ab(2+c)}{(ab + ab + 1 + 1)(c+1)} = \frac{ab(2+c)}{2(ab+1)(c+1)}$$

$$= \frac{1}{2\left(1 + \frac{1}{ab}\right)} \cdot \frac{c+2}{c+1} \ge \frac{1}{2\left(1 + \frac{1}{c-1}\right)} \cdot \frac{c+2}{c+1} = \frac{(c-1)(c+2)}{2c(c+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{c^2 + c} \ge \frac{5}{12}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là $\frac{5}{12}$. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a = 1; b = 2; c = 3$

Bài 42. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\mathrm{ab} + \mathrm{bc} + \mathrm{ca} = 3\mathrm{abc}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $\quad P = \frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bình Phước năm 2012-2013

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$P = \frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} \le \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2a} = \frac{ab + bc + ca}{2abc} = \frac{3}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{3}{2}$. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài 43. Cho n số thực $x_1, x_2, ..., x_n$ với $n \ge 3$. Kí hiệu $Max\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ là số lớn nhất trong các số $x_1, x_2, ..., x_n$.Chứng minh rằng:

$$Max\{x_1, x_2, ..., x_n\} \ge \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} + \frac{|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + ... + |x_n - x_1|}{2n}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐHSP Hà Nội năm 2012-2013

Lời giải

Để ý là trong hai số thực x, y bất kì ta luôn có

$$Min\{x, y\} \le x, y \le \mathrm{Max}\{x, y\} \text{ và } \mathrm{Max}\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$

Sử dụng đẳng thức $Max\{x,y\}=\dfrac{x+y+|x-y|}{2}$, ta có:

$$\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}+\frac{|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+...+|x_n-x_1|}{2n}=\frac{x_1+x_2+|x_1-x_2|}{2n}+\frac{x_2+x_2+|x_2-x_3|}{2n}+...+\frac{x_n+x_1+|x_n-x_1|}{2n}$$

$$\le\frac{Max\{x_1,\ x_2\}+Max\{x_2,x\}+Max\{x_n,x_1\}}{n}\le Max\{x_1;\ x_2;...;\ x_n\}$$

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x_1=x_2=...=x_n$

Bài 44. Cho x, y, z là các số không âm thỏa mãn $x+y+z=\dfrac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất:

$$S=x^3+y^3+z^3+x^2y^2z^2$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Phú Thọ năm 2012-2013

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\left(\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}+\sqrt{z^2}\right)\left(\left(x\sqrt{x}\right)^2+\left(y\sqrt{y}\right)^2+\left(z\sqrt{z}\right)^2\right)\ge\left(x^2+y^2+z^2\right)^2$$

Hay $\dfrac{3}{2}\left(x^3+y^3+z^3\right)\ge\left(x^2+y^2+z^2\right)^2\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3\ge\dfrac{2}{3}\left(x^2+y^2+z^2\right)^2$ (*)

Mặt khác, dễ dàng chứng minh được

$$xyz\ge(x+y-z)(x+z-y)(y+z-x)=\left(\frac{3}{2}-2z\right)\left(\frac{3}{2}-2x\right)\left(\frac{3}{2}-2y\right)=\frac{27}{8}-\frac{9}{2}(x+y+z)+6(xy+yz+xz)-8xyz$$

$$\Leftrightarrow 9xyz\ge\frac{27}{8}-3\left(x^2+y^2+z^2\right)\Leftrightarrow x^2y^2z^2\ge\left(\frac{3}{8}-\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^2$$

Đặt $t=x^2+y^2+z^2\ge\dfrac{(x+y+z)^2}{3}=\dfrac{3}{4}$. Khi đó ta được

$S\ge\dfrac{2}{3}t^2+\left(\dfrac{3}{8}-\dfrac{t}{3}\right)^2=\dfrac{2t^2}{3}+\dfrac{t^2}{9}-\dfrac{t}{4}+\dfrac{9}{64}=\dfrac{7t^2}{9}-\dfrac{t}{4}+\dfrac{9}{64}=\dfrac{1}{6}\left(t-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{11}{8}t^2+\dfrac{3}{64}\ge\dfrac{25}{64}$ Vậy giá trị nhỏ nhất của S là $\dfrac{25}{64}$. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{1}{2}$

Bài 45. Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1+3a}{1+b^2}+\frac{1+3b}{1+c^2}+\frac{1+3c}{1+a^2}\ge 6$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Phú Thọ năm 2012-2013

Lời giải

Cách 1: Ta viết lại vế trái thành

$$\frac{1+3a}{1+b^2}+\frac{1+3b}{1+c^2}+\frac{1+3c}{1+a^2}=\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}+\frac{1}{1+a^2}+\frac{3a}{1+b^2}+\frac{3b}{1+c^2}+\frac{3c}{1+a^2}$$

Ta đi chứng minh: $\dfrac{1}{1+b^2}+\dfrac{1}{1+c^2}+\dfrac{1}{1+a^2}\ge\dfrac{3}{2};\ \dfrac{a}{1+b^2}+\dfrac{b}{1+c^2}+\dfrac{c}{1+a^2}\ge\dfrac{3}{2}$

+ Trước hết ta chứng minh $\dfrac{1}{1+b^2}+\dfrac{1}{1+c^2}+\dfrac{1}{1+a^2}\ge\dfrac{3}{2}$. Ta có các hướng sau

Hướng 1: Không mất tính tổng quát, giải sử $a\ge b\ge c$. Do $ab+bc+ca=3\Rightarrow bc\ge 1$

Ta chứng minh bất đẳng thức sau: Với $x,\ y>0;\ xy\ge 1$ ta có: $\dfrac{1}{y^2+1}+\dfrac{1}{z^2+1}\ge\dfrac{2}{yz+1}$

Thật vậy, ta có: $\left(y^2+z^2+2\right)\left(yz+1\right)\ge\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right)\Leftrightarrow\left(y-z\right)^2\left(yz-1\right)\ge 0$

Do vai trò của các biến như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a\le b\le c$

Khi đó ta được $3bc\ge ab+bc+ca\Rightarrow bc\ge 1$

Không mất tính tổng quát, giải sử $a\ge b\ge c$. Do $ab+bc+ca=3\Rightarrow bc\ge 1$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta được: $P=\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}+\dfrac{1}{c^2+1}\ge\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{2}{bc+1}$

Do đó ta sẽ chứng minh: $\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{2}{bc+1}\ge\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\dfrac{2a^2+bc+3}{a^2bc+a^2+bc+1}\ge\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow a\left(a+b+c-3abc\right)\ge 0$

Từ giả thiết suy ra $a+b+c\ge 3$ và $abc\le 1$. Do đó $a+b+c-3abc\ge 0$

Do đó ta được $\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}+\dfrac{1}{c^2+1}\ge\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{2}{bc+1}\ge\dfrac{3}{2}$

Hướng 2: Biến đổi biểu thức vế trái như sau

$$P=\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}=3-\left(\frac{a^2}{a^2+1}+\frac{b^2}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{4a^2}{3a^2+3}=\frac{4a^2}{3a^2+ab+bc+ca}\le\frac{a^2}{a^2+ab+ac}+\frac{a^2}{2a^2+bc}=\frac{a}{a+b+c}+\frac{a^2}{2a^2+bc}$$

Áp dụng tương tự với hai biểu thức còn lại ta được

$$\frac{4a^2}{3a^2+3}+\frac{4b^2}{3b^2+3}+\frac{4c^2}{3c^2+3}\le 1+\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ca}+\frac{c^2}{2c^2+ab}$$

Ta sẽ chứng minh $\dfrac{a^2}{2a^2+bc}+\dfrac{b^2}{2b^2+ca}+\dfrac{c^2}{2c^2+ab}\le 1$

Thật vậy, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương: $\dfrac{3}{2}-\left(\dfrac{a^2}{2a^2+bc}+\dfrac{b^2}{2b^2+ca}+\dfrac{c^2}{2c^2+ab}\right)\ge\dfrac{1}{2}$

Hay $\dfrac{bc}{2a^2+bc}+\dfrac{ca}{2b^2+ca}+\dfrac{ab}{2c^2+ab}\ge\dfrac{1}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{bc}{2a^2+bc}+\frac{ca}{2b^2+ca}+\frac{ab}{2c^2+ab}=\frac{\left(bc\right)^2}{2a^2bc+b^2c^2}+\frac{\left(ca\right)^2}{2ab^2c+c^2a^2}+\frac{\left(ab\right)^2}{2abc^2+a^2b^2}$$

$\ge\dfrac{\left(ab+bc+ca\right)^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc\left(a+b+c\right)}=1$. Như vậy bất đẳng thức trên được chứng minh.

+ Chứng minh $\dfrac{a}{1+b^2}+\dfrac{b}{1+c^2}+\dfrac{c}{1+a^2}\ge\dfrac{3}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được: $\dfrac{a}{b^2+1}=a-\dfrac{ab^2}{b^2+1}\ge a-\dfrac{ab^2}{2b}=a-\dfrac{ab}{2}$

Tương tự ta có $\dfrac{b}{c^2+1}\ge b-\dfrac{bc}{2};\ \dfrac{c}{a^2+1}\ge c-\dfrac{ca}{2}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\ge a+b+c-\frac{ab+bc+ca}{2}=a+b+c-\frac{3}{2}$$

Mặt khác ta có $\left(a+b+c\right)^2\ge 3\left(ab+bc+ca\right)\Rightarrow a+b+c\ge 3$. Suy ra: $\dfrac{a}{1+b^2}+\dfrac{b}{1+c^2}+\dfrac{c}{1+a^2}\ge\dfrac{3}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Cách 2: Ta viết lại vế trái thành

$$\frac{1+3a}{1+b^2}+\frac{1+3b}{1+c^2}+\frac{1+3c}{1+a^2}=\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}+\frac{1}{1+a^2}+\frac{3a}{1+b^2}+\frac{3b}{1+c^2}+\frac{3c}{1+a^2}$$

Khi đó áp dụng ta đẳng thức Cauchy ta được: $\frac{1}{b^2+1}=1-\frac{b^2}{b^2+1}\ge 1-\frac{b^2}{2b}=1-\frac{b}{2}$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{1}{c^2+1}\ge 1-\frac{c}{2};\ \frac{1}{a^2+1}\ge 1-\frac{a}{2}$

Khi đó ta có bất đẳng thức: $\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}+\frac{1}{a^2+1}\ge 3-\frac{a+b+c}{2}$

Mặt khác ta lại có $\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\ge a+b+c-\frac{ab+bc+ca}{2}=a+b+c-\frac{3}{2}$

Do đó ta được: $\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}+\frac{1}{1+a^2}+\frac{3a}{1+b^2}+\frac{3b}{1+c^2}+\frac{3c}{1+a^2}\ge 3+\frac{5(a+b+c)}{2}-\frac{9}{2}\ge 6$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 46. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{1}{abc}+\frac{1}{1-2(ab+bc+ca)}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Vĩnh Phúc năm 2012-2013

Lời giải

Do $a+b+c=1\Rightarrow 1-2(ab+bc+ca)=a^2+b^2+c^2$

Suy ra $P=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{a+b+c}{abc}=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$

Đến đây ta chứng minh $P\ge 30$ bằng các cách sau

Cách 1: Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}\ge\frac{9}{(a+b+c)^2}=9.$$

Bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được $\frac{7}{ab+bc+ca}\ge 21$

Tuy nhiên, dễ thấy $\frac{(a++b+c)^2}{3}\ge ab+bc+ca\Leftrightarrow ab+bc+ca\le\frac{1}{3}$

Do đó ta được: $\frac{7}{ab+bc+ca}\ge 21$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 2: Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta có

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{3ab}+\frac{1}{3bc}+\frac{1}{3ca}\ge\frac{16}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}\ge\frac{16}{(a+b+c)^2+\frac{1}{3}(a+b+c)^2}=12$$

Bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được: $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\ge 18$

Để ý tiếp bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có: $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\ge\frac{6}{ab+bc+ca}\ge\frac{6}{\frac{1}{3}(a+b+c)^2}=18$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 3: Theo một đánh giá quen thuộc ta có $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge\frac{9}{ab+bc+ca}$

Do đó ta có bất đẳng thức: $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9}{ab+bc+ca}$

Áp dụng tiếp đánh giá trên ta được

$$\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}\right)\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right)\ge 9$$

Hay : $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2}{ab+bc+ca}\ge 9$. Mặt khác ta lại có: $\frac{7}{ab+bc+ca}\ge 21$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge 30$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 30. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 47. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc\le 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}\ge a+b+c$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Vĩnh Phúc năm 2012-2013

Lời giải

Đặt $x=\frac{1}{a};\ y=\frac{1}{b};\ z=\frac{1}{c}\Rightarrow xyz\ge 1$. Khi đó bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{x^3}{z}+\frac{y^3}{x}+\frac{z^3}{y}\ge\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

Áp dụng bất đẳng thức Binhiacopcxki ta được: $\frac{x^3}{z}+\frac{y^3}{x}+\frac{z^3}{y}\ge\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{xx+yz+zx}\ge x^2+y^2+z^2$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $x^2+y^2+z^2\ge\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$

Thật vậy theo một đánh giá quen thuộc và giả thiết $xyz\ge 1$ ta có

$$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx\ge\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 48. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$(1+a)(1+b)(1+c)\ge 8(1-a)(1-b)(1-c)$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bắc Ninh năm 2012-2013

Lời giải

Vì a, b, c là các số dương và $a+b+c=1$ nên ta có $a,b,c<1$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được: $1+a=1-b+1-c\ge 2\sqrt{(1-b)(1-c)}$

Tương tự ta có $1+b\ge 2\sqrt{(1-c)(1-a)};\ 1+c\ge 2\sqrt{(1-a)(1-b)}$

Nhân theo vế ba bất đẳng thức trên ta được: $(1+a)(1+b)(1+c)\ge 8(1-a)(1-b)(1-c)$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Bài 49. Cho 3 số a, b, c thỏa mãn $0\le a\le b\le c\le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A=(a+b+c+1)\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Hải Dương năm 2012-2013

Lời giải

Đặt $x=1+c,\ y=1+b,\ z=1+a$. Từ $0\le a\le b\le c\le 1$ ta được $1\le x\le y\le z\le 2$

Ta viết lại biểu thức A là $A=(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}$

$$\left(1-\frac{x}{y}\right)\left(1-\frac{y}{z}\right)\ge 0\Leftrightarrow 1-\frac{x}{y}-\frac{y}{z}+\frac{x.y}{y.z}\ge 0\Leftrightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{z}\le \frac{x}{z}+1$$

$$\left(1-\frac{z}{y}\right)\left(1-\frac{y}{x}\right)\ge 0\Leftrightarrow 1-\frac{z}{y}-\frac{y}{x}+\frac{z.y}{y.x}\ge 0\Leftrightarrow \frac{z}{y}+\frac{y}{x}\le \frac{z}{x}+1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}\le \frac{x}{z}+\frac{z}{x}+2\Rightarrow \frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}\le 2\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+2$$

Đặt $t=\frac{x}{z}\Rightarrow \frac{1}{2}\le t\le 1$. Do đó ta được: $\frac{x}{z}+\frac{z}{x}=t+\frac{1}{t}=\frac{t^2+1}{t}=\frac{2t^2-5t+2}{2t}+\frac{5}{2}=\frac{(2t-1)(t-2)}{2t}+\frac{5}{2}$

Do $\frac{1}{2}\le t\le 1$ nên ta có $\frac{(2t-1)(t-2)}{2t}$ suy ra $\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\le \frac{5}{2}$. Từ đó ta được $A\le 3+2.\frac{5}{2}+2=10$

Vậy giá trị lớn nhất của A là 10. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi.

Bài 50. Cho a, b, c ,d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}+\mathrm{d}=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{a^4+b^4+c^4+d^4}{a^3+b^3+c^3+d^3}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Nam Định năm 2012-2013

Lời giải

Cách 1: Dự đoán dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=d=\frac{3}{4}$. Ta đi chứng minh $P\ge \frac{3}{4}$.

Điều này tương đương với chứng minh $\frac{a^4+b^4+c^4+d^4}{a^3+b^3+c^3+d^3}\ge \frac{3}{4}$

Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta có

$4\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)\ge 3\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)\Leftrightarrow 4\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)\ge (a+b+c+d)\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)$

$\Leftrightarrow 3\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)\ge a^3(b+c+d)+b^3(a+c+d)+c^3(a+b+d)+d^3(a+b+c)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được:

$$a^4+a^4+a^4+b^4=4a^3b;\ a^4+a^4+a^4+c^4=4a^3c;\ a^4+a^4+a^4+d^4=4a^3d$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $9a^4+\left(b^4+c^4+d^4\right)\ge 4a^3(b+c+d)$

Hoàn toàn tương tự ta được

$9b^4+\left(a^4+c^4+d^4\right)\ge 4b^3(a+c+d);9c^4+\left(a^4+b^4+d^4\right)\ge 4c^3(a+b+d);9d^4+\left(a^4+b^4+c^4\right)\ge 4d^3(a+b+c)$

Do đó ta được:

$12\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)\ge 4a^3(b+c+d)+4b^3(a+c+d)+4c^3(a+b+d)+4d^3(a+b+c)$

Hay: $3\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)\ge a^3(b+c+d)+b^3(a+c+d)+c^3(a+b+d)+d^3(a+b+c)$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{4}$, đạt được khi $a=b=c=d=\frac{3}{4}$

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$4\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)\ge \left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2;\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\ge \left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)^2$

Nhân theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$4\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)^2\ge \left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)^2\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)$$

Hay $16\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)^2 \geq 4\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)^2\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có: $4\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right) \geq (a+b+c+d)^2=9$

Do vậy $\quad 4\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)^2\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right) \geq 9\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)^2$

Suy ra ta được $\quad 16\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)^2 \geq 9\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)^2$

Hay $\quad 4\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right) \geq 3\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)$

Do đó ta được $\quad P=\dfrac{a^4+b^4+c^4+d^4}{a^3+b^3+c^3+d^3} \geq \dfrac{3}{4}$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{3}{4}$, đạt được khi $a=b=c=d=\dfrac{3}{4}$

Bài 51. Cho tam giác ABC có chu vi bằng 2. Ký hiệu a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S=\frac{a}{b+c-a}+\frac{4b}{c+a-b}+\frac{9c}{a+b-c}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Hải Dương năm 2013-2014

Lời giải

Với a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác có chu vi bằng 2 nên $a+b+c=2$.

Đặt $b+c-a=x;\ c+a-b=y;\ a+b-c=z$, do a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác nên

$x;y;z>0$. Khi đó ta được $x+y+z=2$ và $a=\dfrac{y+z}{2};\ b=\dfrac{x+z}{2};\ c=\dfrac{x+y}{2}$.

Khi đó

$$S=\frac{y+z}{2x}+\frac{4(x+z)}{2y}+\frac{9(x+y)}{2z}=\frac{1}{2}\left[\frac{y+z}{x}+\frac{4(x+z)}{y}+\frac{9(x+y)}{z}\right]=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{9x}{z}\right)+\left(\frac{4z}{y}+\frac{9y}{z}\right)\right]$$

Ta có

$$\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}=\left(\sqrt{\frac{y}{x}}-2\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2+2\geq 2;\ \frac{z}{x}+\frac{9x}{z}=\left(\sqrt{\frac{z}{x}}-3\sqrt{\frac{x}{z}}\right)^2+6\geq 6;\ \frac{4z}{y}+\frac{9y}{z}=\left(2\sqrt{\frac{z}{y}}-3\sqrt{\frac{y}{z}}\right)^2+12\geq 12$$

Do đó $S \geq \dfrac{1}{2}(4+6+12)=11$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} y=2x \\ z=3x \\ 2z=3y \\ x+y+z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{2}{3} \\ z=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=\frac{5}{6};\ b=\frac{2}{3};\ c=\frac{1}{2}$$

Khi đó $a^2=b^2+c^2$. Vậy giá trị nhỏ nhất của S là 11 khi ΔABC vuông .

Bài 52. Cho x, y, z là ba số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S=\frac{\sqrt{x^2-xy+y^2}}{x+y+2z}+\frac{\sqrt{y^2-yz+z^2}}{y+z+2x}+\frac{\sqrt{z^2-zx+x^2}}{z+x+2y}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Hải Dương năm 2013-2014

Lời giải

Ta có $x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3xy \geq (x+y)^2-\dfrac{3(x+y)^2}{4}=\dfrac{(x+y)^2}{4}$

Suy ra $$\frac{\sqrt{x^2-xy+y^2}}{x+y+2z} \ge \frac{x+y}{2(x+z+y+z)}$$

Áp dụng tương tự ta được: $S \ge \frac{1}{2}\left(\frac{x+y}{y+z+z+x}+\frac{y+z}{z+x+x+y}+\frac{z+x}{x+y+y+z}\right)$

Đặt $a=x+y;\ b=y+z;\ c=z+x$, khi đó ta được: $S \ge \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right) \ge \frac{1}{2}.\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$

Vì theo bất đẳng thức Neibizt thì $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$.

Vậy ta được giá trị nhỏ nhất của S là $\frac{3}{4}$ đạt được tại $x=y=z$.

Bài 53. Giả sử a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $\mathrm{abc}+\mathrm{bcd}+\mathrm{cda}+\mathrm{dab}=1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(a^3+b^3+c^3\right)+9c^3$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐH KHTN Hà Nội năm 2013-2014

Lời giải

Do vai trò của a, b, c như nhau nên ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=kd$, với k là số dương.

Khi đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương ta được

$$\frac{1}{k^2}\left(a^3+b^3+c^2\right) \ge \frac{3abc}{k^2};\frac{a^3}{k^3}+\frac{b^3}{k^3}+d^3 \ge \frac{3abd}{k^2};\frac{b^3}{k^3}+\frac{b^3}{k^3}+d^3 \ge \frac{3bcd}{k^2};\frac{c^3}{k^3}+\frac{a^3}{k^3}+d^3 \ge \frac{3cad}{k^2}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\left(\frac{1}{k^2}+\frac{2}{k^3}\right)\left(a^3+b^3+c^2\right)+3d^3 \ge \frac{3(abc+abd+bcd+cad)}{k^2}=\frac{3}{k^2}$$

Hay $$\left(\frac{3}{k^2}+\frac{6}{k^3}\right)\left(a^3+b^3+c^2\right)+9d^3 \ge \frac{9}{k^2}$$

Ta cần tìm k để $\frac{3}{k^2}+\frac{6}{k^3}=4 \Leftrightarrow 4k^3-3k-6=0$ và ta chọn k là số dương.

Đặt $k=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ thay vào phương trình trên và biến đổi ta thu được $x^6-12x^3+1=0$

Giải phương trình này ta được $x=\sqrt[3]{6\pm\sqrt{35}}$, để ý là $\left(6+\sqrt{35}\right)\left(6-\sqrt{35}\right)=1$ nên ta tính được

$$k=\frac{\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}+\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}}{2}$$

Do đó ta tính được giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{36}{\left(\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}+\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}\right)^2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}+\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}}{2}.d$

Bài 54. Giả sử dãy số thực có thứ tự $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_{192}$ thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=0 \\ |x_1|+|x_2|+|x_3|+\ldots+|x_{192}|=2013 \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $$x_{192}-x_1 \ge \frac{2013}{96}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐH KHTN Hà Nội năm 2013-2014

Lời giải

Trước hết ta chứng minh bài toán phụ sau: Với $a_1 \le a_2 \le a_3 \le ... \le a_n$ thỏa mãn

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = 0 \\ |a_1| + |a_2| + |a_3| + ... + |a_n| = 1 \end{cases}$$

Khi đó ta được $a_n - a_1 \ge \frac{2}{n}$.

Thật vậy, từ điều kiện của bài toán ta nhận thấy tồn tại số tự nhiên k để

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le ... \le a_k \le 0 \le a_{k+1} \le ... \le a_n$$

Khi đó từ $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = 0 \\ |a_1| + |a_2| + |a_3| + ... + |a_n| = 1 \end{cases}$ suy ra

$$\begin{cases} (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k) + (a_{k+1} + ... + a_n) = 0 \\ -(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k) + (a_{k+1} + ... + a_n) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{k+1} + ... + a_n = \frac{1}{2} \\ a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Cũng từ $a_1 \le a_2 \le a_3 \le ... \le a_k \le 0 \le a_{k+1} \le ... \le a_n$ ta được

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le ... \le a_k \Rightarrow a_1 \le -\frac{1}{2k}; a_{k+1} \le ... \le a_n \Rightarrow a_n \ge \frac{1}{2(n-k)}$$

Do đó $a_n - a_1 \ge \frac{1}{2(n-k)} + \frac{1}{2k} = \frac{n}{2(n-k)n} \ge \frac{2n}{(n-k+n)^2} = \frac{2}{n}$

Như vậy bài toán được chứng minh xong.

Từ giả thiết của bài toán trên ta viết lại như sau: $\begin{cases} \frac{x_1}{2013} + \frac{x_2}{2013} + \frac{x_3}{2013} + ... + \frac{x_n}{2013} = 0 \\ \left|\frac{x_1}{2013}\right| + \left|\frac{x_2}{2013}\right| + \left|\frac{x_3}{2013}\right| + ... + \left|\frac{x_{192}}{2013}\right| = 1 \end{cases}$

Áp dụng kết quả của bài toán phụ ta được: $\frac{x_{192}}{2013} - \frac{x_1}{2013} \ge \frac{2}{192} \Rightarrow x_{192} - x_1 \ge \frac{2013}{96}$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 55. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh:

$$\sqrt{\frac{ab + 2c^2}{1 + ab - c^2}} + \sqrt{\frac{bc + 2a^2}{1 + bc - a^2}} + \sqrt{\frac{ac + 2b^2}{1 + ac - b^2}} \ge 2 + ab + ba + ca$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Vĩnh Phúc năm 2013-2014

Lời giải

Do $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ nên ta có

$$\sqrt{\frac{ab + 2c^2}{1 + ab - c^2}} = \sqrt{\frac{ab + 2c^2}{a^2 + b^2 + c^2 + ab - c^2}} = \sqrt{\frac{ab + 2c^2}{a^2 + b^2 + ab}} = \frac{ab + 2c^2}{\sqrt{(ab + 2c^2)(a^2 + b^2 + ab)}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sqrt{(ab + 2c^2)(a^2 + b^2 + ab)} \le \frac{2c^2 + a^2 + b^2 + 2ab}{2} \le \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{2} = a^2 + b^2 + c^2$$

Suy ra $\sqrt{\frac{ab + 2c^2}{1 + ab - c^2}} = \frac{ab + 2c^2}{\sqrt{(ab + 2c^2)(a^2 + b^2 + ab)}} \ge \frac{ab + 2c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = ab + 2c^2$

Tương tự ta được $\sqrt{\dfrac{bc+2a^2}{1+bc-a^2}} \ge bc+2a^2$; $\sqrt{\dfrac{ca+2b^2}{1+ca-b^2}} \ge ca+2b^2$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên kết hợp $a^2+b^2+c^2=1$ ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 56. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)} \ge \frac{3}{4}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Vĩnh Phúc năm 2013-2014

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$4a(c+1)+4b(a+1)+4c(b+1) \ge 3(a+1)(b+1)(c+1)$$

$$\Leftrightarrow 4(ab+bc+ca)+4(a+b+c) \ge 3abc+3(ab+bc+ca)+3(a+b+c)+3 \Leftrightarrow ab+bc+ca+a+b+c \ge 6$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các số dương ta được

$$ab+bc+ca \ge 3.\sqrt[3]{(abc)^2}=3; a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}=3$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được $ab+bc+ca+a+b+c \ge 6$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 57. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c+ab+bc+ca=6abc$. Chứng minh rằng:

$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2} \ge 3$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán TP Hà Nội năm 2013-2014

Lời giải

Giả thiết của bài toán được viết lại thành: $\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=6$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \ge \frac{2}{ab}; \frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \ge \frac{2}{bc}; \frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2} \ge \frac{2}{ca}; \frac{1}{a^2}+1 \ge \frac{2}{a}; \frac{1}{b^2}+1 \ge \frac{2}{b}; \frac{1}{c^2}+1 \ge \frac{2}{c}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $3\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)+3 \ge 2\left(\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)=2.6=12$

Hay $$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \ge 3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 58. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{ab+a+2}+\frac{1}{bc+b+2}+\frac{1}{ca+c+2}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán TP Hà Nội năm 2013-2014

Lời giải

Đặt $a=\dfrac{x}{y}; b=\dfrac{y}{z}; c=\dfrac{z}{x}$. Gọi P là vế trái, khi đó ta được

$$P=\frac{1}{ab+a+2}+\frac{1}{bc+b+2}+\frac{1}{ca+c+2}=\frac{yz}{xy+xz+2yz}+\frac{zx}{xy+yz+2zx}+\frac{xy}{xz+yz+2xy}$$

Biến đổi tương đương ta được

$$3-P=1-\frac{yz}{xy+xz+2yz}+1-\frac{zx}{xy+yz+2zx}+1-\frac{xy}{xz+yz+2xy}$$

$$3-P=(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{xy+xz+2yz}+\frac{1}{xy+yz+2zx}+\frac{1}{xz+yz+2xy}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\ge\frac{1}{A+B+C}$

Ta có $3-P=(xy+yz+zx)\frac{9}{4xy+4yz+3zx}=\frac{9}{4}\Leftrightarrow P\le 3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 59. a) Chứng minh rằng: $a^3+b^3\ge ab(a+b)$, với a, b là hai số dương.

b) Cho a, b là hai số dương thỏa mãn $a+b\ge 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$F=\left(a^3+b^3\right)^2+\left(a^2+b^2\right)+\frac{3}{2}ab$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Phú Thọ năm 2013-2014

Lời giải

a) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)-ab(a+b)\ge 0\Leftrightarrow(a+b)\left(a^2-2ab+b^2\right)\ge 0\Leftrightarrow(a+b)(a-b)^2\ge 0$$

Ta thấy với a, b là hai số dương nên bất đẳng thức đã cho luôn đúng.

b) **Cách 1:** Áp dụng bất đẳng thức đã chứng minh trên ta có $\left(a^3+b^3\right)^2\ge\left[ab(a+b)\right]^2$ nên theo giả thiết ta được $\left(a^3+b^3\right)^2\ge\left[ab(a+b)\right]^2\ge(ab)^2$. Mặt khác ta có $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab\ge 1-1ab$

Do đó $F\ge(ab)^2+1-2ab+\frac{3}{2}ab=(ab)^2-\frac{ab}{2}+1=(ab)^2-2.ab.\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{15}{16}=\left(ab-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}\ge\frac{15}{16}$

Dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=\frac{1}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của F là bằng $\frac{15}{16}$, đạt được khi $a=b=\frac{1}{2}$.

Cách 2: Ta có $F=\left(a^3+b^3\right)^2+(a+b)^2-\frac{1}{2}ab$

Mà ta luôn có bất đẳng thức $a^3+b^3\ge\frac{(a+b)^3}{4}$, với mọi a, b > 0.

Áp dụng bất đẳng thức trên ta có $\left(a^3+b^3\right)^2\ge\left[\frac{(a+b)^3}{4}\right]^2\ge\frac{1}{16}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $F\ge\frac{1}{16}+(a+b)^2-\frac{(a+b)^2}{8}=\frac{1}{16}+\frac{7(a+b)^2}{8}\ge\frac{1}{16}+\frac{7}{8}=\frac{15}{16}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của F là bằng $\frac{15}{16}$, đạt được khi $a=b=\frac{1}{2}$.

Bài 60. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $12\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\le 3+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Chứng minh rằng: $\frac{1}{4a+b+c}+\frac{1}{a+4b+c}+\frac{1}{a+b+4c}\le\frac{1}{6}$

Lời giải

Theo một đánh giá quen thuộc ta có: $4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 \le 12\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \le 3+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Suy ra: $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-1\right)\left[4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+3\right] \le 0$. Do đó ta được: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \le 1$ và $a+b+c \ge 9$

Đặt $$P=\frac{1}{4a+b+c}+\frac{1}{a+4b+c}+\frac{1}{a+b+4c}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\frac{4}{x+y} \le \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ ta được

$$P=\frac{1}{4a+b+c}+\frac{1}{a+4b+c}+\frac{1}{a+b+4c} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3a}+\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{3a}+\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{3a}+\frac{1}{a+b+c}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{3c}+\frac{3}{a+b+c}\right) \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Bài 61. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}>2$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Thanh Hóa năm 2013-2014

Lời giải

Biến đổi tương đương bất đẳng thức như sau

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}>2 \Leftrightarrow a\left(b^2+c^2-a^2\right)+b\left(c^2+a^2-b^2\right)+c\left(a^2+b^2-c^2\right)>2abc$$

$$\Leftrightarrow a\left(b^2+c^2\right)+2abc-a^3+b\left(c^2+a^2\right)-2abc-b^3+c\left(a^2+b^2-c^2\right)-2abc-c^3>0$$

$$\Leftrightarrow a\left[\left(b+c\right)^2-a^2\right]+b\left[\left(a-c\right)-b^2\right]+c\left[\left(a-b\right)^2-c^2\right]>0$$

$$\Leftrightarrow a\left(b+c-a\right)\left(b+c+a\right)+b\left(a-c-b\right)\left(a+b-c\right)+c\left(a-b-c\right)\left(a-b+c\right)>0$$

$$\Leftrightarrow \left(b+c-a\right)\left[a^2-\left(b-c\right)^2\right]>0 \Leftrightarrow \left(a+b-c\right)\left(b+c-a\right)\left(c+a-b\right)>0$$

Vì a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác nên: $a+b-c>0;\ b+c-a>0;\ c+a-b>0$

Do vậy bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 62. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3xyz$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{x^4+yz}+\frac{y^2}{y^4+xz}+\frac{z^2}{z^4+xy} \le \frac{3}{2}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Nam Định năm 2014-2015

Lời giải

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$2x^2\sqrt{yz} \le x^4+yz \Leftrightarrow \frac{1}{2x^2\sqrt{yz}} \ge \frac{1}{x^4+yz} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^4+yz} \le \frac{1}{2\sqrt{yz}};\ \frac{2}{\sqrt{yz}} \le \frac{1}{y}+\frac{1}{z} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{yz}} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

Từ hai bất đẳng thức trên ta được $\frac{x^2}{x^4+yz} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

Hoàn toàn tương tự ta có $\frac{y^2}{y^4+xz} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right);\ \frac{z^2}{z^4+xy} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $\frac{x^2}{x^4+yz}+\frac{y^2}{y^4+xz}+\frac{z^2}{z^4+xy}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{xy+yz+zx}{xyz}$

Mặt khác ta lại có: $xy+yz+zx\le x^2+y^2+z^2$. Do đó ta được: $\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}=\frac{3xyz}{xyz}=3$

Suy ra: $\frac{x^2}{x^4+yz}+\frac{y^2}{y^4+xz}+\frac{z^2}{z^4+xy}\le\frac{3}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$

Cách 2: Từ giả thiết của bài toán ta được: $3xyz=x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$

Suy ra $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le 3$. Đặt $a=\frac{1}{x};\ b=\frac{1}{y};\ c=\frac{1}{z}$, khi đó ta được $a+b+c\le 3$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành $\frac{a^2bc}{a^4+bc}+\frac{b^2ca}{b^4+ca}+\frac{c^2ab}{c^4+ab}\le\frac{3}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $a^4+bc\ge 2a^2\sqrt{bc}$

Do đó ta được
$$\frac{a^2bc}{a^4+bc}\le\frac{a^2bc}{2a^2\sqrt{bc}}=\frac{\sqrt{bc}}{2}$$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{a^2bc}{a^4+bc}+\frac{b^2ca}{b^4+ca}+\frac{c^2ab}{c^4+ab}\le\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}{2}$

Dễ thấy $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\le a+b+c\le 3$ nên ta được $\frac{a^2bc}{a^4+bc}+\frac{b^2ca}{b^4+ca}+\frac{c^2ab}{c^4+ab}\le\frac{3}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$

Bài 63. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:
$$2abc\left(a+b+c\right)\le\frac{5}{9}+a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐHKHTN Hà Nội năm 2013-2014

Lời giải

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức dạng $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$ ta được
$$a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2\ge abc\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$$

Bài toán quy về chứng minh $2abc\left(a+b+c\right)\le\frac{5}{9}+abc\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$

Hay
$$2\left(a+b+c\right)\le\frac{5}{9abc}+\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $a^2b+\frac{1}{9b}\ge\frac{2a}{3};\ b^2c+\frac{1}{9c}\ge\frac{2b}{3};\ c^2a+\frac{1}{9a}\ge\frac{2c}{3}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được: $a^2b+b^2c+c^2a+\frac{1}{9a}+\frac{1}{9b}+\frac{1}{9c}\ge\frac{2a}{3}+\frac{2b}{3}+\frac{2c}{3}$

Hay
$$a^2b+b^2c+c^2a+\frac{ab+bc+ca}{9abc}\ge\frac{2}{3}\left(a+b+c\right)$$

Như vậy ta cần chỉ ra được $2\left(a+b+c\right)\le\frac{4}{9abc}+\frac{2}{3}\left(a+b+c\right)$

Hay
$$\frac{4abc\left(a+b+c\right)}{3}\le\frac{4}{9}\Leftrightarrow 3abc\left(a+b+c\right)\le 1$$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng vì $1=\left(ab+bc+ca\right)^2\ge 3abc\left(a+b+c\right)$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Cách 2: Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$2abc\left(a+b+c\right)+\frac{4}{9}\le 1+a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2$$

Để ý là $\qquad 1=\left(ab+bc+ca\right)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc\left(a+b+c\right)$

Như vậy ta quy bài toán về chứng minh $\frac{4}{9}\le a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2$

Để ý đến giả thiết ta biến đổi tương đương bất đẳng thức trên thành

$$\frac{4}{9}\le a^2b^2\left(a^2+1\right)+b^2c^2\left(b^2+1\right)+c^2a^2\left(c^2+1\right)\Leftrightarrow\frac{4}{9}\le a^2b^2\left(a+b\right)\left(a+c\right)+b^2c^2\left(b+c\right)\left(a+b\right)+c^2a^2\left(c+b\right)\left(c+a\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\le 9\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\left(\frac{a^2b^2}{b+c}+\frac{b^2c^2}{c+a}+\frac{c^2a^2}{a+b}\right)$$

Dễ dàng chứng minh được: $9\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\ge 8\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)=8\left(a+b+c\right)$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta lại có: $\frac{a^2b^2}{b+c}+\frac{b^2c^2}{c+a}+\frac{c^2a^2}{a+b}\ge\frac{\left(ab+bc+ca\right)^2}{2\left(a+b+c\right)}=\frac{1}{2\left(a+b+c\right)}$

Nhân theo vế hai bất đẳng thức trên ta được: $9\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\left(\frac{a^2b^2}{b+c}+\frac{b^2c^2}{c+a}+\frac{c^2a^2}{a+b}\right)\ge 4$

Hay bất đẳng thức trên được chứng minh.

Bài 64. Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+c^2+3\sqrt[3]{\left(abc\right)^2}\ge 2\left(ab+bc+ca\right)$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Nghệ An năm 2014-2015

Lời giải

Đặt $x=\sqrt[3]{a^2}$; $y=\sqrt[3]{b^2}$; $z=\sqrt[3]{c^2}$.

Suy ra $a^2=x^3$; $b^2=y^3$; $c^2=z^3$, nên $a=\sqrt{x^3}$, $b=\sqrt{y^3}$, $c=\sqrt{z^3}$ với $x;\ y;\ z\ge 0$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành: $x^3+y^3+z^3+3xyz\ge 2\left(\sqrt{x^3y^3}+\sqrt{y^3z^3}+\sqrt{z^3x^3}\right)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $xy\left(x+y\right)\ge 2xy\sqrt{xy}=2\sqrt{x^3y^3}$

Tương tự ta có $\qquad yz\left(y+z\right)\ge 2\sqrt{y^3z^3}$; $zx\left(z+x\right)\ge 2\sqrt{z^3x^3}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$xy\left(x+y\right)+yz\left(y+z\right)+zx\left(z+x\right)\ge 2\left(\sqrt{x^3y^3}+\sqrt{y^3z^3}+\sqrt{z^3x^3}\right)$$

Như vậy phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$x^3+y^3+z^3+3xyz\ge xy\left(x+y\right)+yz\left(y+z\right)+zx\left(z+x\right)$$

Vì vai trò của các biến bình đẳng nên có thể giả sử $x\ge y\ge z\ge 0$

Khi đó $\qquad x\left(x-y\right)^2+z\left(y-z\right)^2+\left(z+x-y\right)\left(x-y\right)\left(y-z\right)\ge 0$

Suy ra $\qquad x^3+y^3+z^3+3xyz\ge xy\left(x+y\right)+yz\left(y+z\right)+zx\left(z+x\right)$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 65. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn điều kiện $2c+b=abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S=\dfrac{3}{b+c-a}+\dfrac{4}{c+a-b}+\dfrac{5}{a+b-c}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bắc Ninh năm 2014-2015

Lời giải

Từ giả thiết ta có $a+b-c>0;\ b+c-a>0;\ c+a-b>0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\ge\dfrac{4}{x+y}$ ta được

$$S=\left(\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\right)+2\left(\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{a+b-c}\right)+3\left(\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}\right)\ge\frac{2}{c}+\frac{4}{b}+\frac{6}{a}$$

Mà $2c+b=abc\Leftrightarrow\dfrac{2}{b}+\dfrac{1}{c}=a$ nên kết hợp với bất đẳng thức Cauchy ta được: $S\ge 2a+\dfrac{6}{a}\ge 4\sqrt{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là $4\sqrt{3}$ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\sqrt{3}$.

Bài 66. Cho phương trình $ax^2+bx+c=0\ (a\ne 0)$ có hai nghiệm thuộc đoạn $[0;2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\dfrac{8a^2-6ab+b^2}{4a^2-2ab+ac}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Vĩnh Phúc năm 2014-2015

Lời giải

Gọi $x_1;x_2\ (x_1\le x_2)$ là hai nghiệm của phương trình đã cho. Theo định lí Vi-ét ta có $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a};\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

Khi đó $P=\dfrac{8a^2-6ab+b^2}{4a^2-2ab+ac}=\dfrac{8-6\dfrac{b}{a}+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}{4-2\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}}=\dfrac{8+6(x_1+x_2)+(x_1+x_2)^2}{4+2(x_1+x_2)+x_1x_2}$

Do $0\le x_1\le x_2\le 2\Rightarrow x_1^2\le x_1x_2;\ x_2^2\le 4\Rightarrow x_1^2+x_2^2\le x_1x_2+4\Rightarrow (x_1+x_2)^2\le 3x_1x_2+4$

Do đó ta được $P\le\dfrac{8+6(x_1+x_2)+3x_1x_2+4}{4+2(x_1+x_2)+x_1x_2}=3$

Đẳng thức xảy ra khi $x_1=x_2=2$ hoặc $x_1=0;\ x_2=2$ hay $\left[\begin{array}{l}c=-b=4a\\ b=-2a;\ c=0\end{array}\right.$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 3.

Bài 67. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c\le 2014$. Chứng minh rằng:

$$\frac{5a^3-b^3}{ab+3a^2}+\frac{5b^3-c^3}{bc+3b^2}+\frac{5c^3-a^3}{ca+3c^2}\le 2014$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Lào Cai năm 2014-2015

Lời giải

Dễ dàng chứng minh được $a^3+b^3\ge ab(a+b)$, ta biến đổi tương đương bất đẳng thức bên như sau

$$a^3+b^3\ge ab(a+b)\Leftrightarrow 5a^3-b^3\le 6a^3-ab(a+b)\Leftrightarrow 5a^3-b^3\le a\left(6a^2-ab-b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 5a^3-b^3\le a(2a-b)(3a+b)\Leftrightarrow\frac{5a^3-b^3}{ab+3a^2}\le 2a-b$$

Hoàn toàn tương tự ta được $\dfrac{5b^3-c^3}{bc+3b^2}\le 2b-c;\ \dfrac{5c^3-a^3}{ca+3c^2}\le 2c-a$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được: $\dfrac{5a^3-b^3}{ab+3a^2}+\dfrac{5b^3-c^3}{bc+3b^2}+\dfrac{5c^3-a^3}{ca+3c^2}\le a+b+c\le 2014$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi $a=b=c=\dfrac{2014}{3}$

Bài 68. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $x(x+1)+y(y+1)+z(z+1)\le 18$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $B=\dfrac{1}{x+y+1}+\dfrac{1}{y+z+1}+\dfrac{1}{z+x+1}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Thái Bình năm 2014-2015

.

Lời giải

Ta biến đổi giả thiết: $x(x+1)+y(y+1)+z(z+1)\le 18 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\le 18-(x+y+z)$

Áp dụng một đánh giá quen thuộc ta được $(x+y+z)^2\le 54-3(x+y+z)$

Hay $0<x+y+z\le 6$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge\dfrac{9}{a+b+c}$ ta được

$$B=\frac{1}{x+y+1}+\frac{1}{y+z+1}+\frac{1}{z+x+1}\ge\frac{9}{2(x+y+z)+3}\ge\frac{9}{2.6+3}=\frac{3}{5}$$

Hay $B\ge\dfrac{3}{5}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là $\dfrac{3}{5}$. Đẳng thức xẩy ra khi $x=y=z=2$

Bài 69. Cho a, b, c là ba số thực dương và có tổng bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}\le\frac{3}{2}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Thái Bình năm 2014-2015

Lời giải

Kết hợp với giả thiết ta có biến đổi sau: $\dfrac{a-bc}{a+bc}=1-\dfrac{2bc}{a+bc}=1-\dfrac{2bc}{a(a+b+c)+bc}=1-\dfrac{2bc}{(a+b)(a+c)}$

Hoàn toàn tương tự ta được $\dfrac{b-ca}{b+ca}=1-\dfrac{2ca}{(b+c)(b+a)}$; $\dfrac{c-ab}{c+ab}=1-\dfrac{2ab}{(c+a)(b+c)}$.

Khi đó ta được: $\dfrac{a-bc}{a+bc}+\dfrac{b-ca}{b+ca}+\dfrac{c-ab}{c+ab}=3-2\left(\dfrac{bc}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{ca}{(b+c)(b+a)}+\dfrac{ab}{(c+a)(c+b)}\right)$

Ta quy bài toán về chứng minh $\dfrac{bc}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{ca}{(b+c)(b+a)}+\dfrac{ab}{(c+a)(c+b)}\ge\dfrac{3}{4}$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$4bc(b+c)+4ca(c+a)+4ab(a+b)\ge 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+a^2b+ab^2\ge 6abc\Leftrightarrow\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\ge 6$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-2\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}-2\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}-2\right)\ge 0\Leftrightarrow\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(c-a)^2}{ca}\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Bài 70. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $6a+3b+2c=abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
$B=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{2}{\sqrt{b^2+4}}+\frac{3}{\sqrt{c^2+9}}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Phú Thọ năm 2014-2015

Lời giải

Giả thiết của bài toán được viết lại thành $\frac{6}{bc}+\frac{3}{ca}+\frac{2}{ab}=1$. Đặt $a=\frac{1}{x};\ b=\frac{2}{y};\ c=\frac{3}{z}$, khi đó ta được

$xy+yz+zx=1$. Biểu thức B được viết lại thành $B=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}$

Để ý đến giả thiết $xy+yz+zx=1$ ta có $x^2+1=x^2+xy+yz+zx=(x+y)(z+x)$

Khi đó ta được
$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{(x+y)(z+x)}}$$

Hoàn toàn tương tự ta được $B=\frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{\sqrt{(x+y)(y+z)}}+\frac{z}{\sqrt{(z+x)(y+z)}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được
$$\frac{x}{\sqrt{(x+y)(z+x)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{x}{z+x}\right);\frac{y}{\sqrt{(x+y)(y+z)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x+y}+\frac{y}{y+z}\right);\frac{z}{\sqrt{(x+z)(y+z)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z+x}+\frac{z}{y+z}\right)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên, suy ra
$$B=\frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{\sqrt{(x+y)(y+z)}}+\frac{z}{\sqrt{(z+x)(y+z)}}\le\frac{3}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của B là $\frac{3}{2}$. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=\sqrt{3};\ b=2\sqrt{3};\ c=3\sqrt{3}$

Bài 71. Cho các số thực a, b, c dương. Chứng minh rằng:
$$\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{b}{\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}>2$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Quảng Trị năm 2014-2015

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2\left(b^2+c^2\right)}}\ge\frac{2a^2}{a^2+b^2+c^2}$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{b}{\sqrt{c^2+a^2}}\ge\frac{2b^2}{a^2+b^2+c^2};\ \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\ge\frac{2c^2}{a^2+b^2+c^2}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{b}{\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\ge2$

Vì đẳng thức không xẩy ra nên ta có bất đẳng thức $\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{b}{\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}>2$

Bài toán được chứng minh xong.

Bài 72. Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A=\frac{(b+c-a)^3}{2a}+\frac{(c+a-b)^3}{2b}+\frac{(a+b-c)}{2c}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Đăk Lăk, 2014 – 2015

Lời giải

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{(b+c-a)^3}{2a}+\frac{2a}{4}+\frac{1}{2}\ge\frac{3(b+c-a)}{2};\frac{(c+a-b)^3}{2b}+\frac{2b}{4}+\frac{1}{2}\ge\frac{3(c+a-b)}{2};\frac{(a+b-c)^3}{2c}+\frac{2c}{4}+\frac{1}{2}\ge\frac{3(a+b-c)}{2}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{(b+c-a)^3}{2a}+\frac{(c+a-b)^3}{2b}+\frac{(a+b-c)}{2c}+\frac{a+b+c}{2}+\frac{3}{2}\ge\frac{3(a+b+c)}{2}$$

Hay $\quad\dfrac{(b+c-a)^3}{2a}+\dfrac{(c+a-b)^3}{2b}+\dfrac{(a+b-c)}{2c}\ge a+b+c-\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{3}{2}$. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Cách 2: Đặt $x=b+c-a;\ y=c+a-b;\ z=a+b-c$, khi đó ta viết lại giả thiết thành $x+y+z=3$.

Bài toán quy về tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=\dfrac{x^3}{2(y+z)}+\dfrac{y^3}{2(z+x)}+\dfrac{z^3}{2(x+y)}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$A=\frac{x^3}{y+z}+\frac{y^3}{z+x}+\frac{z^3}{x+y}\ge\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{2(xy+yz+zx)}\ge\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\ge\frac{3}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{3}{2}$. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 73. Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $x>-1;\ y>-2;\ z>-3$ và $x+y+z=-5$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x+1}+\frac{4}{y+2}+\frac{9}{z+3}\ge 36$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Yên Bái năm 2014-2015

Lời giải

Do $x>-1;\ y>-2;\ z>-3$ nên $x+1>0;\ y+2>0;\ z+3>0$.

Khi đó áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{4}{y+2}+\dfrac{9}{z+3}\ge\dfrac{(1+2+3)^2}{x+y+z+6}=36$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases}x+y+z=-5\\ \dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2}{y+2}=\dfrac{3}{z+3}\end{cases}$

Bài 74. Cho ba số thực x, y, z không âm thỏa mãn $x+y+z+xyz=4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=xy+yz+zx$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Đại Học Vinh năm 2014-2015

Lời giải

Cách 1: Giả sử x là số nhỏ nhất trong ba số x, y, z. khi đó ta xét các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: $yz\le 1$. Kho đó ta được $xy\le 1;\ zx\le 1$ nên $P\le 3$

+ Trường hợp 2: $yz>1$. Khi đó ta được $xyz\ge x$.

Do đó

$$4=x+y+z+xyz\ge x+y+z+x\ge 2\sqrt{(x+y)(x+z)}=2\sqrt{x^2+xy+yz+zx}=2\sqrt{x^2+P}\ge 2\sqrt{P}$$

Suy ra $P \le 4$. Kết hợp các kết quả ta được giá trị nhỏ nhất của P là 4.
Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x = 0;\ y = z = 2$ và các hoán vị.

Cách 2: Giả sử x là số lớn nhất trong các số x, y, z.

Khi đó ta được $x + y + z \le 3x;\ xyz \le x^3$. Suy ra $x^3 + 3x \ge 4$ hay $(x-1)(x^2+x+4) \ge 0 \Rightarrow x \ge 1$.

Ta có $P = xy + yz + zx = x(x+y+z) + yz - x^2 = x(4 - xyz) + yz - x^2 = -(x-2)^2 + 4 + yz(1-x^2) \le 4$

Suy ra $P \le 4$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 4.
Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x = 0;\ y = z = 2$ và các hoán vị.

Bài 75. Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{\sqrt{b+3}} + \frac{b^2}{\sqrt{c+3}} + \frac{c^2}{\sqrt{a+3}} \ge \frac{3}{2}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bắc Giang năm 2014-2015

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{a^2}{\sqrt{b+3}} + \frac{b^2}{\sqrt{c+3}} + \frac{c^2}{\sqrt{a+3}} = \frac{4a^2}{4\sqrt{b+3}} + \frac{4b^2}{4\sqrt{c+3}} + \frac{4c^2}{4\sqrt{a+3}} \ge \frac{4a^2}{b+7} + \frac{4b^2}{c+7} + \frac{4c^2}{a+7}$$

Áp dụng tiếp bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta có $\frac{4a^2}{b+7} + \frac{4b^2}{c+7} + \frac{4c^2}{a+7} \ge \frac{4(a+b+c)^2}{a+b+c+21} = \frac{4.9}{3+21} = \frac{3}{2}$

Suy ra ta được $\quad \frac{a^2}{\sqrt{b+3}} + \frac{b^2}{\sqrt{c+3}} + \frac{c^2}{\sqrt{a+3}} \ge \frac{3}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài 76.

1) Cho a, b, c là ba số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc} \le \frac{3}{4}(a+b+c)$$

2) Cho a, b, c là ba số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{bc}{a^2+2bc} + \frac{ca}{b^2+2ca} + \frac{ab}{c^2+2ab} \le 1$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Tin - Toán Tỉnh Tiền Giang năm 2014-2015

Lời giải

1) Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $\sqrt{ab} = 2.\sqrt{\frac{a}{4}.b} \le \frac{a}{4} + b;\ \sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{\frac{a}{4}.b.4c} \le \frac{\frac{a}{4} + b + 4c}{3}$

Từ đó ta có $a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc} \le a + \frac{a}{4} + b + \frac{\frac{a}{4} + b + 4c}{3} = \frac{4(a+b+c)}{3}$.

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 4b = 16c$

2) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $\frac{a^2}{a^2+2bc} + \frac{b^2}{b^2+2ca} + \frac{c^2}{c^2+2ab} \ge 1$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{a^2+2bc} + \frac{b^2}{b^2+2ca} + \frac{c^2}{c^2+2ab} \ge \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca} = 1$$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Bài 77. Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1-x^2}{x+yz}+\frac{1-y^2}{y+zx}+\frac{1-z^2}{z+xy}\geq 6$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Thành Phố Hà Nội năm 2014-2015

Lời giải

Áp dụng giả thiết ta được: $\frac{1-x^2}{x+yz}=\frac{(1-x)(1+x)}{(x+y)(z+x)}=\frac{(x+y)(y+z)+(z+x)(y+z)}{(x+y)(z+x)}$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{1-y^2}{y+zx}=\frac{(x+z)(x+y)+(x+z)(y+z)}{(x+y)(y+z)};\frac{1-z^2}{z+xy}=\frac{(x+y)(y+z)+(x+y)(x+z)}{(y+z)(z+x)}$$

Đặt $a=(x+y)(y+z); b=(y+z)(z+x); c=(x+y)(z+x)$, khi đó ta viết lại được bất đẳng thức thành: $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\geq 6$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2; \frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2; \frac{c}{a}+\frac{c}{a}\geq 2$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\geq 6$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 78. Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $xy+yz+zx=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\leq\frac{3}{2}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐHSP TP Hồ Chí Minh, 2014-2015

Lời giải

Áp dụng giả thiết ta được $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+xy+yz+zx}}=\frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được: $\frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}=\sqrt{\frac{x^2}{(x+y)(x+z)}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{x}{z+x}\right)$

Do đó ta được $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{x}{z+x}\right)$

Hoàn toàn tương tự ta được: $\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x+y}+\frac{y}{y+z}\right); \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z+x}+\frac{z}{y+z}\right)$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{x}{z+x}+\frac{y}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}+\frac{z}{y+z}\right)=\frac{3}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 79. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2}=2014$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Thanh Hóa, 2014 – 2015

Lời giải

Dễ dàng chứng minh được $\sqrt{2\left(y^2+z^2\right)} \ge x+y$ do đó ta được $\dfrac{x^2}{y+z} \ge \dfrac{x^2}{\sqrt{2\left(y^2+z^2\right)}}$.

Hoàn toàn tương tự ta được: $P \ge \dfrac{x^2}{\sqrt{2\left(y^2+z^2\right)}} + \dfrac{y^2}{\sqrt{2\left(z^2+x^2\right)}} + \dfrac{z^2}{\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}}$

Đặt $a=\sqrt{y^2+z^2}; b=\sqrt{z^2+x^2}; c=\sqrt{x^2+y^2}$, suy ra $a+b+c=2014$

Từ đó ta được $x^2=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$; $y^2=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2}$; $z^2=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}$

Khi đó ta được $P \ge \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{a}+\dfrac{c^2+a^2-b^2}{b}+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{c}\right)$

Xét biểu thức $Q=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{a}+\dfrac{c^2+a^2-b^2}{b}+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{c}=\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{c^2}{a}+\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{c^2}{b}+\dfrac{a^2}{c}+\dfrac{b^2}{c}-\left(a+b+c\right)$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$Q=\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)+\left(\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}\right)-\left(a+b+c\right) \ge \frac{\left(a+b+c\right)^2}{a+b+c}+\frac{\left(a+b+c\right)^2}{a+b+c}-\left(a+b+c\right)=a+b+c=2014$$

Do đó ta được $P \ge \dfrac{2014}{2\sqrt{2}}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{2014}{2\sqrt{2}}$.

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{2014}{3\sqrt{2}}$.

Bài 80. Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ac+abc \le 4$. Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2+a+b+c \ge 2\left(ab+bc+ac\right)$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐHKHTN Hà Nội năm 2015-2016

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy 4 số ta có :

$4 \ge abc+ab+bc+ac \ge 4\sqrt[4]{a^3b^3c^3} \Rightarrow 1 \ge abc \Rightarrow a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc} \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$

Khi đó ta quy bài toán về chứng minh $a^2+b^2+c^2+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \ge 2\left(ab+bc+ac\right)$

Đặt $\sqrt[3]{a^2}=x, \sqrt[3]{b^2}=y, \sqrt[3]{c^2}=z \ \left(x,y,z>0\right)$, bất đẳng thức được viết lại thành

$$x^3+y^3+z^3+3xyz \ge 2\sqrt{x^3y^3}+2\sqrt{z^3x^3}+2\sqrt{z^3y^3}$$

Dễ dàng chứng minh được $x^3+y^3+z^3+3xyz \ge xy\left(x+y\right)+yz\left(y+z\right)+xz\left(x+z\right)$

$$xy\left(x+y\right)+yz\left(y+z\right)+xz\left(x+z\right) \ge 2\sqrt{x^3y^3}+2\sqrt{z^3x^3}+2\sqrt{z^3y^3}$$

Khi đó ta được : $x^3+y^3+z^3+3xyz \ge 2\sqrt{x^3y^3}+2\sqrt{z^3x^3}+2\sqrt{z^3y^3}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 81. Giả sử x, y, z là các số thực lớn hơn 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x}{\sqrt{y+z-4}}+\frac{y}{\sqrt{z+x-4}}+\frac{z}{\sqrt{x+y-4}}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐHKHTN Hà Nội năm 2015-2016

Lời giải

Ta có $P=\dfrac{4x}{4\sqrt{y+z-4}}+\dfrac{4y}{4\sqrt{z+x-4}}+\dfrac{4z}{4\sqrt{x+y-4}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được: $4\sqrt{y+z-4}=2\sqrt{4\left(y+z-4\right)} \le y+z-4+4=y+z$

Áp dụng tương tự thì ta được $P=\frac{4x}{4\sqrt{y+z-4}}+\frac{4y}{4\sqrt{z+x-4}}+\frac{4z}{4\sqrt{x+y-4}}\ge 4\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\right)$

Dễ dàng chứng minh được $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\ge\frac{3}{2}$

Do đó ta được $P\ge 6$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 6. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=4$.

Bài 82. Tìm các số thực không âm a và b thỏa mãn:

$$\left(a^2+b+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+a+\frac{3}{4}\right)=\left(2a+\frac{1}{2}\right)\left(2b+\frac{1}{2}\right)$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐHSP Hà Nội năm 2015-2016

Lời giải

Ta dễ dàng chứng minh được

$$\left(a-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0\Leftrightarrow a^2+\frac{1}{4}\ge a\Leftrightarrow a^2+b+\frac{3}{4}\ge a+b+\frac{1}{2};\left(b-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0\Leftrightarrow b^2+\frac{1}{4}\ge b\Leftrightarrow b^2+a+\frac{3}{4}\ge a+b+\frac{1}{2}$$

Áp dụng đánh giá trên và bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\left(a^2+b+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+a+\frac{3}{4}\right)\ge\left(a+b+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(2a+2b+1\right)^2=\frac{\left[\left(2a+\frac{1}{2}\right)+\left(2b+\frac{1}{2}\right)\right]^2}{4}\ge\left(2a+\frac{1}{2}\right)\left(2b+\frac{1}{2}\right)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\frac{1}{2}$.

Bài 83. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{y^2z^2}{x\left(y^2+z^2\right)}+\frac{z^2x^2}{y\left(z^2+x^2\right)}+\frac{x^2y^2}{z\left(x^2+y^2\right)}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Phú Thọ năm 2015-2016

Lời giải

Ta có $$P=\frac{1}{x\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{y^2}\right)}+\frac{1}{y\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{x^2}\right)}+\frac{1}{z\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)}$$

Đặt $a=\frac{1}{x}; b=\frac{1}{y}; z=\frac{1}{z}$ thì $a;b;c>0$ và $a^2+b^2+c^2=1$. Khi đó ta được

$$P=\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}=\frac{a^2}{a\left(1-a^2\right)}+\frac{b^2}{b\left(1-b^2\right)}+\frac{c^2}{c\left(1-c^2\right)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương ta có

$$a^2\left(1-a^2\right)^2=\frac{1}{2}.2a^2\left(1-a^2\right)\left(1-a^2\right)\le\frac{1}{2}\left(\frac{2a^2+1-a^2+1-a^2}{3}\right)^3=\frac{4}{27}\Rightarrow a\left(1-a^2\right)\le\frac{2}{3\sqrt{3}}\Leftrightarrow\frac{a^2}{a\left(1-a^2\right)}\ge\frac{3\sqrt{3}.a^2}{2}$$

Hoàn toàn tương tự ta được : $\frac{b^2}{b\left(1-b^2\right)}\ge\frac{3\sqrt{3}.b^2}{2};\frac{c^2}{c\left(1-c^2\right)}\ge\frac{3\sqrt{3}.c^2}{2}$

Cộng theo vế các kết quả trên ta được $P\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\sqrt{3}$

Bài 84. Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$T=\frac{a}{b^4+c^4+a}+\frac{b}{a^4+c^4+b}+\frac{c}{a^4+b^4+c}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Nam Định năm 2015-2016

Lời giải

Ta có $2\left(b^4+c^4\right)\ge\left(b^2+c^2\right)^2\ge 2bc\left(b^2+c^2\right)\Rightarrow b^4+c^4\ge bc\left(b^2+c^2\right)$

Do đó ta được: $\frac{a}{b^4+c^4+a}\le\frac{a}{bc\left(b^2+c^2\right)+a}=\frac{a^2}{abc\left(b^2+c^2\right)+a^2}=\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$

Hoàn toàn tương tự ta được: $\frac{b}{a^4+c^4+b}\le\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}$; $\frac{c}{a^4+b^4+c}\le\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$

Cộng theo vế các kết quả trên ta được $T\le 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của T là 1. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 85. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{4a^2+(b-c)^2}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{4b^2+(c-a)^2}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{4c^2+(a-b)^2}{2c^2+a^2+b^2}\ge 3$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Nam Định năm 2015-2016

Lời giải

Ta có: $2-\frac{4a^2+(b-c)^2}{2a^2+b^2+c^2}=\frac{2\left(2a^2+b^2+c^2\right)-\left(4a^2+b^2+c^2-2bc\right)}{2a^2+b^2+c^2}=\frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}$

Áp dụng tương tự ta viết lại được bất đẳng thức: $\frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{(c+a)^2}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{(a+b)^2}{2c^2+a^2+b^2}\le 3$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}\le\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{c^2+a^2};\frac{(c+a)^2}{2b^2+c^2+a^2}\le\frac{c^2}{b^2+c^2}+\frac{a^2}{b^2+a^2};\frac{(a+b)^2}{2c^2+a^2+b^2}\le\frac{a^2}{c^2+a^2}+\frac{b^2}{c^2+b^2}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được: $\frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{(c+a)^2}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{(a+b)^2}{2c^2+a^2+b^2}\le 3$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Bài 86. Cho a, b là các số dương thỏa mãn điều kiện $(a+b)^3+4ab\le 12$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+2015ab\le 2016$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Hải Dương năm 2015-2016

Lời giải

Ta có $12\ge(a+b)^3+4ab\ge\left(2\sqrt{ab}\right)^3+4ab$. Đặt $t=\sqrt{ab}$, $t>0$ thì

$$12\ge 8t^3+4t^2\Leftrightarrow 2t^3+t^2-3\le 0\Leftrightarrow (t-1)\left(2t^2+3t+3\right)\le 0$$

Do $2t^2+3t+3>0,\forall t$ nên $t-1\le 0\Leftrightarrow t\le 1$. Vậy $0<ab\le 1$

Dễ dàng chứng minh được $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\le\frac{2}{1+\sqrt{ab}}$, $\forall a,b>0,ab\le 1$

Thật vậy, bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{1}{1+a}-\frac{1}{1+\sqrt{ab}}+\frac{1}{1+b}-\frac{1}{1+\sqrt{ab}}\le 0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{ab}-a}{(1+a)\left(1+\sqrt{ab}\right)}+\frac{\sqrt{ab}-b}{(1+b)\left(1+\sqrt{ab}\right)}\le 0$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{1+\sqrt{ab}}\right)\left(\frac{\sqrt{a}}{1+a}-\frac{\sqrt{b}}{1+b}\right)\le 0\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2\left(\sqrt{ab}-1\right)}{\left(1+\sqrt{ab}\right)(1+a)(1+b)}\le 0$$

Do $0<ab\le 1$ nên bất đẳng thức này đúng.

Tiếp theo ta sẽ chứng minh $\frac{2}{1+\sqrt{ab}}+2015ab\le 2016,\ \forall a,b>0,ab\le 1$

Đặt $t=\sqrt{ab},0<t\le 1$ ta được $\frac{2}{1+t}+2015t^2\le 2016$

$$2015t^3+2015t^2-2016t-2014\le 0\Leftrightarrow(t-1)\left(2015t^2+4030t+2014\right)\le 0$$

Do $0<t\le 1$ nên bất đẳng thức trên đúng. Vậy $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+2015ab\le 2016$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1$.

Bài 87. Cho a,b,c là các số thực bất kỳ . Chứng minh rằng:

$$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)\ge\frac{3(a+b+c)^2}{4}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Nghệ An năm 2015-2016

Lời giải

Cách 1: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\left(2a^2+2\right)\left(2b^2+2\right)\left(2c^2+2\right)\ge 3\left(\sqrt{2}a+\sqrt{2}b+\sqrt{2}c\right)^2$

Đặt $x=a\sqrt{2};\ y=b\sqrt{2};\ z=c\sqrt{2}$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\left(x^2+2\right)\left(y^2+2\right)\left(z^2+2\right)\ge 3(x+y+z)^2$

Ta có $\left(x^2+2\right)\left(y^2+2\right)=x^2y^2+1+2x^2+2y^2+3$

Suy ra $\left(x^2+2\right)\left(y^2+2\right)\ge 2xy+x^2+y^2+\frac{(x+y)^2}{2}+3=\frac{3}{2}\left[(x+y)^2+2\right]$

$$\left(x^2+2\right)\left(y^2+2\right)\left(z^2+2\right)\ge\frac{3}{2}\left[(x+y)^2z^2+4+2(x+y)^2+2z^2\right]\ge\frac{3}{2}\left[4(x+y)z+2(x+y)^2+2z^2\right]=3(x+y+z)^2$$

Do đó ta được $\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)\ge\frac{3(a+b+c)^2}{4}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Cách 2: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$4a^2b^2c^2+4\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+a^2+b^2+c^2+4\ge 6(ab+bc+ca)$$

Theo nguyên lý Dirichlet ta giả sử

$$\left(2a^2-1\right)\left(2b^2-1\right)\ge 0\Leftrightarrow c^2\left(2a^2-1\right)\left(2b^2-1\right)\ge 0\Leftrightarrow 4a^2b^2c^2+c^2\ge 2a^2c^2+2b^2c^2$$

Khi đó ta quy bài toán về chứng minh

$$4\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+a^2+b^2+2a^2c^2+2b^2c^2+4\ge 6(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow(a-b)^2+(2ab-1)^2+\frac{3(2bc-1)^2+3(2ca-1)^2}{2}\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 88. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Chứng minh rằng:

$$a)\ a+b+c\ge 3abc$$

$$b)\ \sqrt{\frac{a^3}{1+3bc}}+\sqrt{\frac{b^3}{1+3ca}}+\sqrt{\frac{c^3}{1+3ab}}\ge\frac{3}{2}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu, 2015 – 2016

Lời giải

a) Giả thiết của bài toán được viết lại thành: $abc\left(a+b+c\right)=ab+bc+ca$

Mà ta lại có: $ab+bc+ca\le\frac{\left(a+b+c\right)^2}{3}$. Do đó ta được: $abc\left(a+b+c\right)\le\frac{\left(a+b+c\right)^2}{3}\Leftrightarrow 3abc\le a+b+c$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

b) Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành: $\sqrt{\frac{a^4}{a+3abc}}+\sqrt{\frac{b^4}{b+3abc}}+\sqrt{\frac{c^4}{c+3abc}}\ge\frac{3}{2}$

Áp dụng kết quả câu a ta được

$$\sqrt{\frac{a^4}{a+3abc}}+\sqrt{\frac{b^4}{b+3abc}}+\sqrt{\frac{c^4}{c+3abc}}\ge\frac{a^2}{\sqrt{2a+b+c}}+\frac{b^2}{\sqrt{a+2b+c}}+\frac{c^2}{\sqrt{a+b+2c}}$$

Ta cần chỉ ra được: $\frac{a^2}{\sqrt{2a+b+c}}+\frac{b^2}{\sqrt{a+2b+c}}+\frac{c^2}{\sqrt{a+b+2c}}\ge\frac{3}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{\sqrt{2a+b+c}}+\frac{b^2}{\sqrt{a+2b+c}}+\frac{c^2}{\sqrt{a+b+2c}}\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{\sqrt{2a+b+c}+\sqrt{a+2b+c}+\sqrt{a+b+2c}}$$

Mà theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\sqrt{2a+b+c}+\sqrt{a+2b+c}+\sqrt{a+b+2c}\le\sqrt{12\left(a+b+c\right)}$$

Suy ra $\frac{\left(a+b+c\right)^2}{\sqrt{2a+b+c}+\sqrt{a+2b+c}+\sqrt{a+b+2c}}\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{2\sqrt{3\left(a+b+c\right)}}=\frac{\left(a+b+c\right)\sqrt{a+b+c}}{2\sqrt{3}}$

Cũng từ giả thiết $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ ta suy ra: $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}\Rightarrow a+b+c\ge 3$

Do đó $\frac{\left(a+b+c\right)\sqrt{a+b+c}}{2\sqrt{3}}\le\frac{3}{2}$.

Từ các kết quả trên ta được $\frac{a^2}{\sqrt{2a+b+c}}+\frac{b^2}{\sqrt{a+2b+c}}+\frac{c^2}{\sqrt{a+b+2c}}\ge\frac{3}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 89. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\ge\frac{3}{2}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Thái Bình năm 2015-2016

Lời giải

Theo một đánh giá quen thuộc ta được $\left(a+b+c\right)^2\ge 3\left(ab+bc+ca\right)=9\Rightarrow a+b+c\ge 3$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $\frac{1}{1+a^2}=1-\frac{a^2}{1+a^2}\ge 1-\frac{a^2}{2a}=1-\frac{a}{2}$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{1}{b^2+1} \ge 1-\frac{b}{2}; \frac{1}{c^2+1} \ge 1-\frac{c}{2}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được: $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1} \ge 3-\frac{a+b+c}{2} \ge \frac{3}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 90. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}+\frac{9}{2(ab+bc+ca)} \ge \frac{9}{2}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Thái Bình năm 2015-2016

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta có: $\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c} \ge \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c} = a+b+c$

Mà theo một đánh giá quen thuộc thì $a+b+c \ge \sqrt{3(ab+bc+ca)}$

Do đó ta được: $\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}+\frac{9}{2(ab+bc+ca)} \ge \sqrt{3(ab+bc+ca)}+\frac{9}{2(ab+bc+ca)}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\sqrt{3(ab+bc+ca)}+\frac{9}{2(ab+bc+ca)} = \frac{\sqrt{3(ab+bc+ca)}}{2}+\frac{\sqrt{3(ab+bc+ca)}}{2}+\frac{9}{2(ab+bc+ca)} \ge 3\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{9}{2}$$

Suy ra $\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}+\frac{9}{2(ab+bc+ca)} \ge \frac{9}{2}$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 91. Cho a, b, c số thực dương thoả mãn $(a+b)(b+c)(c+a)=1$. Chứng minh rằng:

$$ab+ac+bc \le \frac{3}{4}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán TP Hà Nội năm 2015-2016

Lời giải

Dễ dàng chứng minh được $(a+b)(b+c)(c+a) \ge \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với: $9(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8(a+b+c)(ab+bc+ca)$

Ta có đẳng thức $(a+b+c)(ab+bc+ca) = (a+b)(b+c)(c+a)+abc$

Nên ta được: $9(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8(a+b)(b+c)(c+a)+8abc \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \ge 8abc$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng. Do đó bất đẳng thức trên đúng.

Áp dụng bất đẳng thức trên và kết hợp với giả thiết ta được: $1 \ge \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$

Lại có $a+b+c \ge \sqrt{3(ab+bc+ca)}$

Nên ta được: $1 \ge \frac{8}{9}\sqrt{3(ab+bc+ca)}(ab+bc+ca) \Leftrightarrow \left(\frac{9}{8}\right)^2 \ge 3(ab+bc+ca)^3$

Hay $ab+bc+ca \le \frac{3}{4}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Bài 92. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$a^5+b^5+c^5+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 6$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bạc Liêu năm 2015-2016

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được: $a^5+\frac{1}{a}\ge 2a^2; b^5+\frac{1}{b}\ge 2b^2;\ c^5+\frac{1}{c}\ge 2c^2$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được: $a^5+b^5+c^5+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 2\left(a^2+b^2+c^2\right)$

Dễ thấy $a^2+b^2+c^2\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{3}=3$. Do đó ta được $a^5+b^5+c^5+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 6$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 93. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=3\sqrt{2}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{x\left(3y+5z\right)}}+\frac{1}{\sqrt{y\left(3z+5x\right)}}+\frac{1}{\sqrt{z\left(3x+5y\right)}}\ge\frac{3}{4}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bình Thuận năm 2015-2016

Lời giải

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{1}{\sqrt{x\left(3y+5z\right)}}+\frac{1}{\sqrt{y\left(3z+5x\right)}}+\frac{1}{\sqrt{z\left(3x+5y\right)}}\ge\frac{9}{\sqrt{x\left(3y+5z\right)}+\sqrt{y\left(3z+5x\right)}+\sqrt{z\left(3x+5y\right)}}$$

Mà theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\sqrt{x\left(3y+5z\right)}+\sqrt{y\left(3z+5x\right)}+\sqrt{z\left(3x+5y\right)}\le\sqrt{3\left[x\left(3y+5z\right)+y\left(3z+5x\right)+z\left(3x+5y\right)\right]}=\sqrt{24\left(xy+yz+zx\right)}$$

Mà theo một đánh giá quen thuộc thì $3\left(xy+yz+zx\right)\le\left(x+y+z\right)^2=18$

Do đó ta được: $\sqrt{x\left(3y+5z\right)}+\sqrt{y\left(3z+5x\right)}+\sqrt{z\left(3x+5y\right)}\le\sqrt{8.18}=12$

Suy ra $$\frac{1}{\sqrt{x\left(3y+5z\right)}}+\frac{1}{\sqrt{y\left(3z+5x\right)}}+\frac{1}{\sqrt{z\left(3x+5y\right)}}\ge\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\sqrt{2}$.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được: $2\sqrt{8x\left(3y+5z\right)}\le 8x+3y+5z$

Suy ra $$\frac{1}{\sqrt{x\left(3y+5z\right)}}=\frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{8x\left(3y+5z\right)}}\ge\frac{4\sqrt{2}}{8x+3y+5z}$$

Hoàn toàn tương tự ta được: $\frac{1}{\sqrt{y\left(3z+5x\right)}}\ge\frac{4\sqrt{2}}{8y+3z+5x};\ \frac{1}{\sqrt{z\left(3x+5y\right)}}\ge\frac{4\sqrt{2}}{8z+3x+5y}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{\sqrt{x\left(3y+5z\right)}}+\frac{1}{\sqrt{y\left(3z+5x\right)}}+\frac{1}{\sqrt{z\left(3x+5y\right)}}\ge\frac{4\sqrt{2}}{8x+3y+5z}+\frac{4\sqrt{2}}{8y+3z+5x}+\frac{4\sqrt{2}}{8z+3x+5y}$$

Mà theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{4\sqrt{2}}{8x+3y+5z}+\frac{4\sqrt{2}}{8y+3z+5x}+\frac{4\sqrt{2}}{8z+3x+5y}\ge\frac{9.4\sqrt{2}}{16\left(x+y+z\right)}=\frac{36\sqrt{2}}{16.3\sqrt{2}}=\frac{3}{4}$$

Suy ra $$\frac{1}{\sqrt{x\left(3y+5z\right)}}+\frac{1}{\sqrt{y\left(3z+5x\right)}}+\frac{1}{\sqrt{z\left(3x+5y\right)}}\ge\frac{3}{4}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\sqrt{2}$.

Bài 94. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$P=\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\frac{ab+bc+ca}{2}+\frac{1}{a^2+b^2+c^2}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐH Vinh năm 2015-2016

Lời giải

Từ giả thiết $a+b+c=2$ ta được $ab+bc+ca=\frac{4-\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2}$

Do đó biểu thức P được viết lại thành: $P=\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\frac{4-\left(a^2+b^2+c^2\right)}{4}+\frac{1}{a^2+b^2+c^2}$

Đặt $t=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\Rightarrow\frac{2}{\sqrt{3}}\le t\le 2$. Khi đó ta được

$$P=t+\frac{1}{t^2}-\frac{t^2}{4}+1=\frac{t}{8}+\frac{t}{8}+\frac{1}{2t^2}+\frac{3t}{4}-\frac{t^2}{4}+1\ge\frac{3}{4}+\frac{(t-1)(2-1)}{4}+\frac{3}{2}\ge\frac{9}{4}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{9}{4}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=0;\ c=2$ và các hoán vị.

Bài 95. a) Cho a, b là các số thực dương. Chứng minh rằng: $\sqrt{(1+a)(1+b)}\ge 1+\sqrt{ab}$

b) Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a+b=ab$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$P=\frac{1}{a^2+2a}+\frac{1}{b^2+2b}+\sqrt{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bình Phước năm 2015-2016

Lời giải

a) Bình phương hai vế ta được: $(1+a)(1+b)=1+2\sqrt{ab}+ab\Leftrightarrow a+b\ge 2\sqrt{ab}\Leftrightarrow\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\ge 0$

b) Áp dụng bất đẳng thức câu a và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ ta được

$$P\ge\frac{4}{a^2+2a+b^2+2b}+1+ab=\frac{4}{(a+b)^2-2ab+2(a+b)}+1+ab=\frac{4}{a^2b^2}+ab+1$$

$$=\left(\frac{4}{a^2b^2}+\frac{ab}{16}+\frac{ab}{16}\right)+\frac{7ab}{8}+1\ge 3.\sqrt[3]{4.\frac{1}{16}.\frac{1}{16}}+\frac{7ab}{8}+1=\frac{7}{4}+\frac{7ab}{8}$$

Mặt khác từ giả thiết ta có $ab=a+b\ge 2\sqrt{ab}\Rightarrow ab\ge 4$. Do đó ta được $P\ge\frac{7}{4}+\frac{7.4}{8}=\frac{21}{4}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{21}{4}$. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=2$

Bài 96. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}+\frac{ab+bc+ca}{2}\ge 3$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Ninh Bình năm 2015-2016

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được: $3\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}\Rightarrow a+b+c\ge 3$

Biến đổi và áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được: $\frac{a}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}\ge a-\frac{ab^2}{2b}=a=\frac{ab}{2}$

Hoàn toàn tương tự ta được: $\frac{b}{1+c^2}\ge b-\frac{bc}{2};\ \frac{c}{1+a^2}\ge c-\frac{ca}{2}$

Khi đó ta được: $\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}+\frac{ab+bc+ca}{2}\ge a+b+c-\frac{ab+bc+ca}{2}+\frac{ab+bc+ca}{2}\ge 3$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 97. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a+b+c\ge 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^4}{(a+2)(b+2)}+\frac{b^4}{(b+2)(c+2)}+\frac{c^4}{(c+2)(a+2)}\ge\frac{1}{3}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bắc Giang năm 2015-2016

Lời giải

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{a^4}{(a+2)(b+2)}+\frac{a+2}{27}+\frac{b+2}{27}+\frac{1}{9}\ge\frac{4a}{9};\frac{b^4}{(b+2)(c+2)}+\frac{b+2}{27}+\frac{c+2}{27}+\frac{1}{9}\ge\frac{4b}{9};$$

$$\frac{c^4}{(c+2)(a+2)}+\frac{c+2}{27}+\frac{a+2}{27}+\frac{1}{9}\ge\frac{4c}{9}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^4}{(a+2)(b+2)}+\frac{b^4}{(b+2)(c+2)}+\frac{c^4}{(c+2)(a+2)}+\frac{2(a+b+c)}{27}+\frac{1}{3}\ge\frac{4(a+b+c)}{3}$$

Hay $$\frac{a^4}{(a+2)(b+2)}+\frac{b^4}{(b+2)(c+2)}+\frac{c^4}{(c+2)(a+2)}\ge\frac{10(a+b+c)}{27}-\frac{21}{27}=\frac{1}{3}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{a^4}{(a+2)(b+2)}+\frac{b^4}{(b+2)(c+2)}+\frac{c^4}{(c+2)(a+2)}\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{ab+bc+ca+4(a+b+c)+12}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$3\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge ab+bc+ca+4(a+b+c)+12\Leftrightarrow 3\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge ab+bc+ca+24$$

Theo một đánh giá quen thuộc ta có: $3\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge(a+b+c)^2\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 9\left(a^2+b^2+c^2\right)$

Lại thấy $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca;\ 8\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge\frac{8(a+b+c)^2}{3}\ge 8.3=24$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được: $3\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge 9\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge ab+bc+ca+24$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 98. Cho ba số thực $x;y;z>1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^4}{(y-1)^2}+\frac{y^4}{(z-1)^2}+\frac{z^4}{(x-1)}\ge 48$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Tiền Giang năm 2015-2016

Lời giải

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopsxki ta có: $\frac{x^4}{(y-1)^2}+\frac{y^4}{(z-1)^2}+\frac{z^4}{(x-1)}\ge\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{z-1}+\frac{z^2}{x-1}\right)^2$

Ta quy bài toán về chứng minh $\left(\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{z-1}+\frac{z^2}{x-1}\right)^2 \ge 144$ Hay $\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{z-1}+\frac{z^2}{x-1} \ge 12$

Thật vậy, theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta có: $\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{z-1}+\frac{z^2}{x-1} \ge \frac{(x+y+x)^2}{x+y+z-3}$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $\frac{(x+y+x)^2}{x+y+z-3} \ge 12$ hay

$$(x+y+z)^2 \ge 12(x+y+z)-36 \Leftrightarrow (x+y+z)^2-12(x+y+z)+36 \ge 0 \Leftrightarrow (x+y+z-6)^2 \ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z=2$.

Cách 2: Ta đi chứng minh bất đẳng thức: Với $a>1$ thì $a^4 \ge 16(a-1)^2$

Thật vậy: $a^4 \ge 16(a-1)^2 \Leftrightarrow a^4-16a^2+32a-16 \ge 0 \Leftrightarrow (a-2)^2(a^2+4a-4) \ge 0$

Vì $a>1$ nên $a^2+4a-4>0$, do đó bất đẳng thức trên đúng.

Áp dụng bất đẳng thức trên ta được $y^4 \ge 16(y-1)^2$ do đó $\frac{x^4}{(y-1)^2} \ge \frac{16x^4}{y^4}$.

Hoàn ta tương tự ta được: $\frac{x^4}{(y-1)^2}+\frac{y^4}{(z-1)^2}+\frac{z^4}{(x-1)} \ge 16\left(\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{z^4}+\frac{z^4}{x^4}\right) \ge 48$

Vì theo bất đẳng thức Cauchy thì $\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{z^4}+\frac{z^4}{x^4} \ge 3$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 99. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy+yz+zx=2xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x}{z(z+x)}+\frac{y}{x(x+y)}+\frac{z}{x(x+z)}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Cần Thơ năm 2015-2016

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$. Đặt $a=\frac{1}{x};\ b=\frac{1}{y};\ c=\frac{1}{z}$, khi đó giả thiết trở thành $a+b+c=2$.

Ta viết lại biểu thức P là $P=\frac{a^2}{a+2b}+\frac{b^2}{b^2+2c}+\frac{c^2}{c+2a}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$P=\frac{a^2}{a+2b}+\frac{b^2}{b^2+2c}+\frac{c^2}{c+2a} \ge \frac{(a+b+c)^2}{3(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{3}=\frac{2}{3}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{2}{3}$. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{3}{2}$

Bài 100. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2+a^2b}+\frac{1}{2+b^2c}+\frac{1}{2+c^2a} \ge 1$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Vĩnh Phúc năm 2015-2016

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $\frac{a^2b}{2+a^2b}+\frac{b^2c}{2+b^2c}+\frac{c^2a}{2+c^2a}\le 1$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $2+a^2b=1+1+a^2b\ge 3\sqrt[3]{a^2b}$

Do đó ta được $$\frac{a^2b}{2+a^2b}\le\frac{a^2b}{3\sqrt[3]{a^2b}}=\frac{a\sqrt[3]{ab^2}}{3}$$

Hoàn toàn tương tự ta được: $\frac{a^2b}{2+a^2b}+\frac{b^2c}{2+b^2c}+\frac{c^2a}{2+c^2a}\le\frac{a\sqrt[3]{ab^2}+b\sqrt[3]{bc^2}+c\sqrt[3]{ca}}{3}$

Cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta được $\sqrt[3]{ab^2}\le\frac{a+b+b}{3}=\frac{a+2b}{3}$

Suy ra $$a\sqrt[3]{ab^2}\le\frac{a\left(a+2b\right)}{3}=\frac{a^2+2ab}{3}$$

Hoàn toàn tương tự ta được $a\sqrt[3]{ab^2}+b\sqrt[3]{bc^2}+c\sqrt[3]{ca}\le\frac{\left(a+b+c\right)^2}{3}=3$

Từ đó ta được $$\frac{a^2b}{2+a^2b}+\frac{b^2c}{2+b^2c}+\frac{c^2a}{2+c^2a}\le 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 101. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 11$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{5a+5b+2c}{\sqrt{12\left(a^2+11\right)}+\sqrt{12\left(b^2+11\right)}+\sqrt{c^2+11}}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Quảng Bình năm 2015-2016

Lời giải

Dễ thấy $a^2 + 11 = a^2 + ab + ca + ca = (a+b)(a+c)$, do đó ta được

$$\sqrt{12\left(a^2+11\right)} = 2\sqrt{3(a+b)(a+c)} \le 3(a+b)+(a+c) = 4a+3b+c$$

Hoàn toàn tương tự ta được: $\begin{cases} \sqrt{12\left(b^2+11\right)} = 2\sqrt{3(a+b)(b+c)} \le 3(a+b)+(b+c) = 3a+4b+c \\ \sqrt{c^2+11} = \sqrt{(c+a)(b+c)} \le \dfrac{c+a+b+c}{2} = \dfrac{a+b+2c}{2} \end{cases}$

Khi đó ta được $\sqrt{12\left(a^2+11\right)}+\sqrt{12\left(b^2+11\right)}+\sqrt{c^2+11} \le \dfrac{15a}{2}+\dfrac{15b}{2}+3c$

Suy ra $$P \ge \frac{5a+5b+2c}{\dfrac{15a}{2}+\dfrac{15b}{2}+3c} = \frac{10a+10b+4c}{15a+15b+6c} = \frac{2}{3}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{2}{3}$. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 2a+3b=3a+2b=c \\ ab+bc+ca=11 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=1;\ c=5$

Bài 102. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{1+8a^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+8b^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+8c^3}} \ge 1$$

Trích đề thi HSG tỉnh Nam Định năm 2011-2012

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $1+8a^3 = (1+2a)\left(1-2a+4a^2\right) \le \left(\dfrac{1+2a+1-2a+4a^2}{2}\right)^2 = \left(1+2a^2\right)^2$

Do đó ta được $\dfrac{1}{\sqrt{1+8a^3}} \ge \dfrac{1}{1+2a^2}$. Hoàn toàn tương tự ta được: $\dfrac{1}{\sqrt{1+8b^3}} \ge \dfrac{1}{1+2b^2}$; $\dfrac{1}{\sqrt{1+8c^3}} \ge \dfrac{1}{1+2c^2}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $\dfrac{1}{\sqrt{1+8a^3}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+8b^3}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+8c^3}} \ge \dfrac{1}{1+2a^2}+\dfrac{1}{1+2a^2}+\dfrac{1}{1+2a^2}$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có: $\dfrac{1}{1+2a^2}+\dfrac{1}{1+2a^2}+\dfrac{1}{1+2a^2} \ge \dfrac{9}{3+2\left(a^2+b^2+c^2\right)} = 1$

Suy ra $$\frac{1}{\sqrt{1+8a^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+8b^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+8c^3}} \ge 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra hi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 103. Cho x, y thỏa mãn $\begin{cases} x, y \in R \\ 0 \le x, y \le \dfrac{1}{2} \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\dfrac{\sqrt{x}}{1+y}+\dfrac{\sqrt{y}}{1+x} \le \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

Trích đề thi HSG tỉnh Thái Bình năm 2011-2012

Lời giải

Từ giả thiết suy ra: $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{x}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{y}\right)\ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y}\le \dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\sqrt{xy} \\ x\sqrt{x}\le x.\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ y\sqrt{y}\le y.\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\le \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \end{cases}$

Lại có: $\begin{cases} \sqrt{xy}\le xy+\dfrac{1}{4} \\ \sqrt{xy}\le \dfrac{x+y}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{xy}\le \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\left(xy+\dfrac{1}{4}\right) \\ \dfrac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{xy}\le \dfrac{\sqrt{2}}{6}(x+y) \end{cases}$

Từ các bất đẳng thức trên ta được

$$x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+\sqrt{x}+\sqrt{y}\le \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(xy+\frac{1}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{6}(x+y)\le \frac{2\sqrt{2}(1+x+y+xy)}{3}$$

Suy ra $\quad \dfrac{\sqrt{x}}{1+y}+\dfrac{\sqrt{y}}{1+x}=\dfrac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+\sqrt{x}+\sqrt{y}}{1+x+y+xy}\le \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=\dfrac{1}{2}$

Bài 104. Cho a,b,c,d là các số thực thỏa mãn điều kiện

$$abc+bcd+cda+dab=a+b+c+d+\sqrt{2012}$$

Chứng minh rằng: $\quad (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)\ge 2012$

Trích đề thi HSG tỉnh Vĩnh Phúc năm 2011-2012

Lời giải

Từ giả thiết ta có $2012=(abc+bcd+cda+dab-a-b-c-d)^2=\left[(ab-1)(c+d)+(cd-1)(a+b)\right]^2$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\left[(ab-1)(c+d)+(cd-1)(a+b)\right]^2\le\left[(ab-1)^2+(a+b)^2\right]\left[(cd-1)^2+(c+d)^2\right]$$
$$=(a^2b^2+a^2+b^2+1)(c^2d^2+c^2+d^2+1)=(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)$$

Suy ra: $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)\ge 2012$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 105. Cho các số thực dương a, b, c thoả mãn $abc+a+b=3ab$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{ab}{a+b+1}}+\sqrt{\frac{b}{bc+c+1}}+\sqrt{\frac{a}{ca+c+1}}\ge\sqrt{3}$$

Trích đề thi HSG tỉnh Phú Thọ năm 2011-2012

Lời giải

Từ giả thiết ta suy ra $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+c=3.$ Ta viết lại vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\sqrt{\frac{ab}{a+b+1}}+\sqrt{\frac{b}{bc+c+1}}+\sqrt{\frac{a}{ca+c+1}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}}}+\frac{1}{\sqrt{c+\frac{c}{b}+\frac{1}{b}}}+\frac{1}{\sqrt{c+\frac{c}{a}+\frac{1}{a}}}$$

Đặt $x=\dfrac{1}{a};\ y=\dfrac{1}{b};\ z=c$ .Khi đó giả thiết trở thành $x+y+z=3$ và bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{1}{\sqrt{x+y+xy}}+\frac{1}{\sqrt{y+z+yz}}+\frac{1}{\sqrt{z+x+zx}}\ge\sqrt{3}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{1}{\sqrt{x+y+xy}}+\frac{1}{\sqrt{y+z+yz}}+\frac{1}{\sqrt{z+x+zx}}\ge\frac{9}{\sqrt{x+y+xy}+\sqrt{y+z+yz}+\sqrt{z+x+zx}}$$

Đặt $A=\sqrt{x+y+xy}+\sqrt{y+z+yz}+\sqrt{z+x+zx}$

Theo Bunhiacopxki ta lại có ta có: $A^2\le 3\left(6+xy+yz+zx\right)=3\left[6+xy+z\left(3-z\right)\right]$

Áp dụng Bất đẳng thức Cauchy ta được $xy\le\frac{1}{4}\left(x+y\right)^2=\frac{\left(3-z\right)^2}{4}$

Khi đó ta phải chứng minh : $A^2\le 3\left[6+\frac{\left(3-z\right)^2}{4}+z\left(3-z\right)\right]=\frac{-3\left(z-1\right)^2}{4}+27\le 27$

Hay $A\le 3\sqrt{3}$. Do đó ta được: $\frac{9}{\sqrt{x+y+xy}+\sqrt{y+z+yz}+\sqrt{z+x+zx}}\ge\frac{9}{3\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

Suy ra $$\frac{1}{\sqrt{x+y+xy}}+\frac{1}{\sqrt{y+z+yz}}+\frac{1}{\sqrt{z+x+zx}}\ge\sqrt{3}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi bà chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 106. Cho ba số dương a, b, c tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^4}{b^3\left(c+2a\right)}+\frac{b^4}{c^3\left(a+2b\right)}+\frac{c^4}{a^3\left(b+2c\right)}\ge 1$$

Trích đề thi HSG Thành phố Hải Phòng năm 2011-2012

Lời giải

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{a^4}{b^3\left(c+2a\right)}+\frac{2a+c}{9a}+\frac{1}{3}\ge\frac{a}{b};\frac{b^4}{c^3\left(a+2b\right)}+\frac{2b+a}{9b}+\frac{1}{3}\ge\frac{b}{c};\frac{c^4}{a^3\left(b+2c\right)}+\frac{2c+b}{9c}+\frac{1}{3}\ge\frac{c}{a}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^4}{b^3\left(c+2a\right)}+\frac{b^4}{c^3\left(a+2b\right)}+\frac{c^4}{a^3\left(b+2c\right)}+\frac{c}{9a}+\frac{a}{9b}+\frac{b}{9c}+\frac{5}{3}\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$

Hay $$\frac{a^4}{b^3\left(c+2a\right)}+\frac{b^4}{c^3\left(a+2b\right)}+\frac{c^4}{a^3\left(b+2c\right)}\ge\frac{8}{9}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)-\frac{5}{3}$$

Để ý ta lại có $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge 3$. Do đó ta được: $\frac{a^4}{b^3\left(c+2a\right)}+\frac{b^4}{c^3\left(a+2b\right)}+\frac{c^4}{a^3\left(b+2c\right)}\ge\frac{8}{3}-\frac{5}{3}=1$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\left[\frac{a^4}{b^3\left(c+2a\right)}+\frac{b^4}{c^3\left(a+2b\right)}+\frac{c^4}{a^3\left(b+2c\right)}\right]\left[b\left(c+2a\right)+c\left(a+2b\right)+a\left(b+2c\right)\right]\ge\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)^2$$

Hay: $\left[\frac{a^4}{b^3\left(c+2a\right)}+\frac{b^4}{c^3\left(a+2b\right)}+\frac{c^4}{a^3\left(b+2c\right)}\right]\left[3\left(ab+bc+ca\right)\right]\ge\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)^2$

Mặt khác theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được: $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c\ge\sqrt{3\left(ab+bc+ca\right)}$

Do đó ta suy ra: $\left[\frac{a^4}{b^3\left(c+2a\right)}+\frac{b^4}{c^3\left(a+2b\right)}+\frac{c^4}{a^3\left(b+2c\right)}\right]\left[3\left(ab+bc+ca\right)\right]\ge\left[\sqrt{3\left(ab+bc+ca\right)}\right]^2$

Hay $$\frac{a^4}{b^3(c+2a)}+\frac{b^4}{c^3(a+2b)}+\frac{c^4}{a^3(b+2c)}\ge 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Bài 107. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy+yz+zx=671$. Chứng minh rằng :

$$\frac{x}{x^2-yz+2013}+\frac{y}{y^2-zx+2013}+\frac{z}{z^2-xy+2013}\ge\frac{1}{x+y+z}$$

Trích đề thi HSG Thành Phố Hà Nội năm 2011-2012

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{x}{x^2-yz+2013}+\frac{y}{y^2-zx+2013}+\frac{z}{z^2-xy+2013}\ge\frac{(x+y+z)^2}{x^3+y^3+x^3-3xyz+2013(x+y+z)}$$

Biến đổi mẫu số bên vế phải ta được

$$x^3+y^3+x^3-3xyz+2013(x+y+z)=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3(xy+yz+zx)(x+y+z)$$

$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)=(x+y+z)^3$$

Suy ra ta có: $\frac{x}{x^2-yz+2013}+\frac{y}{y^2-zx+2013}+\frac{z}{z^2-xy+2013}\ge\frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^3}=\frac{1}{x+y+z}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{\sqrt{2013}}{3}$.

Bài 108. a) Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $xy+yz+zx+x+y+z=6$. Chứng minh rằng:
$x^2+y^2+z^2\ge 3$

b) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$$P=\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}$$

Trích đề thi HSG Tỉnh Nghệ An năm 2011-2012

Lời giải

a) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$x^2+y^2\ge 2xy;\ y^2+z^2\ge 2yz;\ z^2+x^2\ge 2zx; x^2+1\ge 2x;\ y^2+1\ge 2y;\ z^2+1\ge 2z$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được: $3(x^2+y^2+z^2)+3\ge 2(xy+yz+zx+x+y+z)=12$

Hay $$x^2+y^2+z^2\ge 3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

b) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được: $\frac{a^3}{a^2+b^2}=\frac{a^3+ab^2-ab^2}{a^2+b^2}=a-\frac{ab^2}{a^2+b^2}\ge a-\frac{ab^2}{2ab}=a-\frac{b}{2}$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{b^3}{b^2+c^2}\ge b-\frac{c}{2};\frac{c^3}{c^2+a^2}\ge c-\frac{a}{2}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được: $P=\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}\ge\frac{a+b+c}{2}=\frac{3}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 109. Chứng minh bất đẳng thức: $\dfrac{1}{2\sqrt{1}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}}+\dfrac{1}{4\sqrt{3}}+...+\dfrac{1}{2012\sqrt{2011}}<2$

Trích đề thi HSG Tỉnh Quảng Bình năm 2011-2012

Lời giải

Xét biểu thức $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$ với $n\in N^*$. Dễ thấy $2(n+1)-2\sqrt{n(n+1)}>1$. Thật vậy, ta có

$$\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^2>0\Leftrightarrow n+1-2\sqrt{n(n+1)}+n>0\Leftrightarrow 2(n+1)-2\sqrt{n(n+1)}>1$$

Khi đó ta có $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<\dfrac{2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n}.\sqrt{n+1}}=2\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

Khi đó ta được

$$\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+...+\frac{1}{2012\sqrt{2011}}<2\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{2011}}-\frac{1}{\sqrt{2012}}\right)=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2012}}\right)<2$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 110. Cho x, y, z là cácsố thực dương thoả mãn điều kiện $x+y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$F=\frac{x^4}{\left(x^2+y^2\right)(x+y)}+\frac{y^4}{\left(y^2+z^2\right)(y+z)}+\frac{z^4}{\left(z^2+x^2\right)(z+x)}$$

Trích đề thi HSG tỉnh Hà Tĩnh năm 2012-2013

Lời giải

Ta có $\dfrac{x^4}{\left(x^2+y^2\right)(x+y)}-\dfrac{y^4}{\left(x^2+y^2\right)(x+y)}=x-y$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{y^4}{\left(y^2+z^2\right)(y+z)}-\frac{z^4}{\left(y^2+z^2\right)(y+z)}=y-z;\frac{z^4}{\left(z^2+x^2\right)(z+x)}-\frac{x^4}{\left(z^2+x^2\right)(z+x)}=z-x$$

Áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{a^2+b^2}{2}\ge(a+b)^2$ ta được

$$F=\frac{x^4}{\left(x^2+y^2\right)(x+y)}+\frac{y^4}{\left(y^2+z^2\right)(y+z)}+\frac{z^4}{\left(z^2+x^2\right)(z+x)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x^4+y^4}{\left(x^2+y^2\right)(x+y)}+\frac{y^4+z^4}{\left(y^2+z^2\right)(y+z)}+\frac{z^4+x^4}{\left(z^2+x^2\right)(z+x)}\right)$$

$$\ge\frac{1}{4}\left(\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{\left(x^2+y^2\right)(x+y)}+\frac{\left(y^2+z^2\right)^2}{\left(y^2+z^2\right)(y+z)}+\frac{\left(z^2+x^2\right)^2}{\left(z^2+x^2\right)(z+x)}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{\left(x^2+y^2\right)}{x+y}+\frac{\left(y^2+z^2\right)}{y+z}+\frac{\left(z^2+x^2\right)}{z+x}\right)$$ Do

$$\ge\frac{1}{8}\left(\frac{(x+y)^2}{x+y}+\frac{(y+z)^2}{y+z}+\frac{(z+x)^2}{z+)}\right)=\frac{1}{4}(x+y+z)=\frac{1}{4}$$

đó F đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{1}{4}$. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{1}{3}$

Bài 111. Cho $A_n=\dfrac{1}{(2n+1)\sqrt{2n-1}}$ với $n\in N^*$. Chứng minh rằng:

$$A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n < 1$$

Trích đề thi HSG tỉnh Hải Dương năm 2012-2013

Lời giải

Ta có

$$A_n = \frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n-1}} = \frac{\sqrt{2n-1}}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{\sqrt{2n-1}}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2n-1}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)$$

Vì $\frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} > 0$ và $\frac{1}{\sqrt{2n-1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \frac{2}{\sqrt{2n-1}}$

Nên $A_n < \frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad (\forall n \in N^*)$

Do đó ta được: $A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n < 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

Hay $A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n < 1 - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < 1$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 112. Cho các số thực dương a, b, c thoả mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{(ab+a+1)^2} + \frac{b}{(bc+b+1)^2} + \frac{c}{(ca+c+1)^2} \ge \frac{1}{a+b+c}$$

Trích đề thi HSG tỉnh Ninh Bình năm 2012-2013

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\left(\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} + \sqrt{c^2}\right)\left[\left(\frac{\sqrt{a}}{ab+a+1}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{b}}{bc+b+1}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{c}}{ca+c+1}\right)^2\right] \ge \left(\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{b+1+bc} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{bc}{1+bc+b}\right)^2 = 1$$

Do đó ta được $\frac{a}{(ab+a+1)^2} + \frac{b}{(bc+b+1)^2} + \frac{c}{(ca+c+1)^2} \ge \frac{1}{a+b+c}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 113. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{b+3c+2a} + \frac{ca}{c+3a+2b} \le \frac{a+b+c}{6}$$

Trích đề thi HSG tỉnh Phú Thọ năm 2012-2013

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\frac{9}{x+y+z} \le \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ ta được

$$\frac{1}{a+3b+2c} = \frac{1}{a+c+b+c+2b} \le \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{2b}\right)$$

Do đó ta được: $\frac{ab}{a+3b+2c} \le \frac{ab}{9}\left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{2b}\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c} + \frac{a}{2}\right)$

Hoàn toàn tương tự ta được: $\dfrac{bc}{2a+b+3c}\le\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{bc}{a+b}+\dfrac{bc}{b+c}+\dfrac{b}{2}\right)$; $\dfrac{ac}{3a+2b+c}\le\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{ac}{a+b}+\dfrac{ac}{b+c}+\dfrac{c}{2}\right)$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{ab}{a+3b+2c}+\frac{bc}{b+3c+2a}+\frac{ca}{c+3a+2b}\le\frac{1}{9}\left(\frac{ac+bc}{a+b}+\frac{ab+ac}{b+c}+\frac{bc+ab}{a+c}+\frac{a+b+c}{2}\right)=\frac{a+b+c}{6}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 114. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^3+b^3+c^3-3abc=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=a^2+b^2+c^2$

Trích đề thi HSG tỉnh Nghệ An năm 2012-2013

Lời giải

Từ giả thiết ta được $(a+b+a)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)=1$ hay

$$a^2+b^2+c^2=\frac{1}{a+b+c}+ab+bc+ca\Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right)=\frac{2}{a+b+c}+2(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow 3\left(a^2+b^2+c^2\right)=\frac{2}{a+b+c}+(a+b+c)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được: $\dfrac{2}{a+b+c}+(a+b+c)^2=\dfrac{1}{a+b+c}+\dfrac{1}{a+b+c}+(a+b+c)^2\ge 3$

Do đó ta được $3\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 3\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a^3+b^3+c^3-3abc=1\\(a+b+c)^3=1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b=0;\ c=1\\a=c=0;\ b=1\\a=1;\ b=c=0\end{array}\right.$

Bài 115. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc=\dfrac{1}{6}$. Chứng minh rằng:

$$3+\frac{a}{2b}+\frac{2b}{3c}+\frac{3c}{a}\ge a+2b+3c+\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{3c}$$

Trích đề thi HSG tỉnh Vĩnh Phúc năm 2012-2013

Lời giải

Đặt $a=x;\ 2b=y;\ 3c=z$, khi đó ta được $xyz=1$ và bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành:

$$3+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\ge x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

Đặt $x=\dfrac{n}{m};\ y=\dfrac{p}{n};\ z=\dfrac{m}{p}$. Khi đó bất đẳng thức trở thành

$$m^3+n^3+p^3+3mnp\ge m^2n+mn^2+n^2p+np^2+m^2p+mp^2$$

Biến đổi tương đương ta được $mnp\ge(m+n-p)(n+p-m)(p+m-n)$

Bất đẳng thức trên luôn đúng. Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 116. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=6$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b+c+5}{a+1}+\frac{c+a+4}{b+2}+\frac{a+b+3}{c+3}\ge 6$$

Trích đề thi HSG tỉnh Quảng Bình năm 2012-2013

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $\dfrac{b+c+5}{a+1}+1+\dfrac{c+a+4}{b+2}+1+\dfrac{a+b+3}{c+3}+1\ge 9$

Hay $$\left(a+b+c+6\right)\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+3}\right)\ge 9$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có: $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+3}\ge \frac{9}{a+b+c+6}$

Do đó ta được: $\left(a+b+c+6\right)\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+3}\right)\ge \left(a+b+c+6\right)\frac{9}{a+b+c+6}=9$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=3;\ b=2;\ c=1$

Bài 117. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{b}=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{27a^2}{c\left(c^2+9a^2\right)}+\frac{b^2}{a\left(4a^2+b^2\right)}+\frac{8c^2}{b\left(9b^2+4c^2\right)}\ge \frac{3}{2}$$

Trích đề thi HSG Thành Phố Hà Nội năm 2012-2013

Lời giải

Cách 1: Đặt $a=\frac{1}{x};\ b=\frac{2}{y};\ c=\frac{3}{z}$, khi đó giả thiết được viết lại là $x+y+z=3$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\frac{x^3}{x^2+y^2}+\frac{y^3}{y^2+z^2}+\frac{z^3}{z^2+x^2}\ge \frac{3}{2}$

Sử dụng kỹ thuật Cauchy ngược dấu ta chứng minh được: $\frac{x^3}{x^2+y^2}+\frac{y^3}{y^2+z^2}+\frac{z^3}{z^2+x^2}\ge \frac{x+y+z}{2}=\frac{3}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=3;\ b=2;\ c=1.$

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{27a^2}{c\left(c^2+9a^2\right)}=\frac{27a^2+3c^2-3c^2}{c\left(c^2+9a^2\right)}=\frac{3}{c}-\frac{3c}{c^2+9a^2}\ge \frac{3}{c}-\frac{3c}{2\sqrt{c^2.9a^2}}=\frac{3}{c}-\frac{1}{2a}$$

$$\frac{b^2}{a\left(4a^2+b^2\right)}=\frac{b^2+4a^2-4a^2}{a\left(4a^2+b^2\right)}=\frac{1}{a}-\frac{4a}{4a^2+b^2}\ge \frac{1}{a}-\frac{1}{b}$$

$$\frac{8c^2}{b\left(9b^2+4c^2\right)}=\frac{8c^2+18b^2-18b^2}{b\left(9b^2+4c^2\right)}=\frac{2}{b}-\frac{18b}{9b^2+4c^2}\ge \frac{2}{b}-\frac{3}{2c}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được: $\frac{27a^2}{c\left(c^2+9a^2\right)}+\frac{b^2}{a\left(4a^2+b^2\right)}+\frac{8c^2}{b\left(9b^2+4c^2\right)}\ge \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\right)=\frac{3}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=3;\ b=2;\ c=1.$

Bài 118. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2x^2+y^2+z^2}{4-yz}+\frac{2y^2+z^2+x^2}{4-zx}+\frac{2z^2+x^2+y^2}{4-xy}\ge 4xyz$$

Trích đề thi HSG Tỉnh Phú Thọ năm 2013-2014

Lời giải

Cách 1: Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $2x^2+y^2+z^2\ge 2x\left(y+z\right)$

Tương tự ta có $2y^2+z^2+x^2\ge 2y\left(z+x\right);\ 2z^2+x^2+y^2\ge 2z\left(x+y\right)$

Do đó ta sẽ chứng minh $\frac{x\left(y+z\right)}{4-yz}+\frac{y\left(z+x\right)}{4-zx}+\frac{z\left(x+y\right)}{4-xy}\ge 2xyz$

Bất đẳng thức này tương đương với: $\frac{y+z}{(4-yz)2yz}+\frac{z+x}{(4-zx)2zx}+\frac{x+y}{(4-xy)xy}\ge 1$

Ta có $\frac{y+z}{(4-yz)2yz}\ge \frac{2\sqrt{yz}}{\left(2-\sqrt{yz}\right)\left(2+\sqrt{yz}\right)2yz}=\frac{1}{\left(2-\sqrt{yz}\right)\sqrt{yz}\left(2+\sqrt{yz}\right)}$

Dễ thấy $0<\left(2-\sqrt{yz}\right)\sqrt{yz}=-\left(\sqrt{xy}-1\right)^2+1\le 1$ nên $\frac{1}{\left(2-\sqrt{yz}\right)\sqrt{yz}\left(2+\sqrt{yz}\right)}\ge \frac{1}{2+\sqrt{yz}}$

Do đó ta được $$\frac{y+z}{(4-yz)2yz}\ge \frac{1}{2+\sqrt{yz}}$$

Hoàn toàn tương tự có $\frac{z+x}{(4-zx)2zx}\ge \frac{1}{2+\sqrt{zx}};\ \frac{x+y}{(4-xy)2xy}\ge \frac{1}{2+\sqrt{xy}}$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{y+z}{(4-yz)2yz}+\frac{z+x}{(4-zx)2zx}+\frac{x+y}{(4-xy)xy}\ge \frac{1}{2+\sqrt{xy}}+\frac{1}{2+\sqrt{yz}}+\frac{1}{2+\sqrt{zx}}$$

Theo một đánh giá quen thuộc thì

$$\frac{1}{2+\sqrt{xy}}+\frac{1}{2+\sqrt{yz}}+\frac{1}{2+\sqrt{zx}}\ge \frac{9}{6+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}}\ge \frac{9}{6+x+y+z}=1$$

Do đó ta suy ra $\frac{y+z}{(4-yz)2yz}+\frac{z+x}{(4-zx)2zx}+\frac{x+y}{(4-xy)xy}\ge 1$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy rakhi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Cách 2: Gọi vế trái của bất đẳng thức là P. Khi đó biến đổi P như sau

$$P=\left(\frac{x^2}{4-yz}+\frac{y^2}{4-xz}+\frac{z^2}{4-yx}\right)+\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(\frac{1}{4-yz}+\frac{1}{4-xz}+\frac{1}{4-yx}\right)$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta có

$$\frac{x^2}{4-yz}+\frac{y^2}{4-xz}+\frac{z^2}{4-yx}\ge \frac{(x+y+z)^2}{12-(xy+yz+zx)};\frac{1}{4-yz}+\frac{1}{4-xz}+\frac{1}{4-yx}\ge \frac{9}{12-(xy+yz+zx)}$$

Do đó ta được

$$P\ge \frac{(x+y+z)^2}{12-(xy+yz+xz)}+\frac{9\left(x^2+y^2+z^2\right)}{12-(xy+yz+xz)}\ge \frac{3(xy+yz+xz)}{12-(xy+yz+xz)}+\frac{9(xy+yz+xz)}{12-(xy+yz+xz)}$$

$$\ge \frac{12(xy+yz+xz)}{12-(xy+yz+xz)}\ge \frac{36\sqrt[3]{x^2y^2z^2}}{12-3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}}$$

Đặt $\sqrt[3]{xyz}=t\le \frac{x+y+z}{3}=1$. Khi đó ta có $\frac{36t^2}{12-3t^2}-4t^3\Leftrightarrow 12t^2(t-1)\left(t^2+t-3\right)\ge 0$

Đánh giá cuối cùng luôn đúng. Bất đẳng thức được chứng minh xong.

Cách 3: Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$P=\frac{x^2+y^2+x^2+z^2}{xyz(4-yz)}+\frac{x^2+y^2+y^2+z^2}{xyz(4-xz)}+\frac{z^2+y^2+x^2+z^2}{xyz(4-yx)}\ge 4$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$M \geq \frac{2xy+2xz}{xyz(4-yz)}+\frac{2xy+2yz}{xyz(4-xz)}+\frac{2xz+2yz}{xyz(4-yx)}=2\left(\frac{y+z}{yz(4-yz)}+\frac{x+z}{xz(4-xz)}+\frac{x+z}{yx(4-yx)}\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{z(4-yz)}+\frac{1}{x(4-yz)}+\frac{1}{y(4-yx)}\right)+2\left(\frac{1}{y(4-yz)}+\frac{1}{zx(4-yz)}+\frac{1}{x(4-yx)}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{cases}\dfrac{1}{z(4-yz)}+\dfrac{1}{x(4-yz)}+\dfrac{1}{y(4-yx)} \geq \dfrac{3}{\sqrt[3]{xyz(4-yz)(4-xz)(4-xy)}}\\[2ex] \dfrac{1}{y(4-yz)}+\dfrac{1}{zx(4-yz)}+\dfrac{1}{x(4-yx)} \geq \dfrac{6}{\sqrt[3]{xyz(4-yz)(4-xz)(4-xy)}}\end{cases}$$

Do đó ta được $P \geq \dfrac{12\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3xyz(4-yz)(4-xz)(4-xy)}}$

Mặt khác ta lại có: $3xyz(4-xz)(4-yz)(4-xy) \leq \left(\dfrac{3xyz+12-xz-xy-yz}{4}\right)^4$

Mà $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} \geq \dfrac{9}{x+y+z}=3 \Leftrightarrow \dfrac{xy+yz+xz}{xyz} \geq 3 \Leftrightarrow 3xyz-xy-xz-yz \leq 0$

Suy ra : $3xyz(4-xz)(4-yz)(4-xy) \leq 81 \Leftrightarrow \sqrt[3]{3xyz(4-xz)(4-yz)(4-xy)} \leq 3\sqrt[3]{3}$

Do đó ta được $P \geq \dfrac{12\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{3}}=4$. Như vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 4: Đặt vế trái của bất đẳng thức là P.

Với $x, y, z > 0$ ta có $yz \leq \dfrac{(y+z)^2}{4} < \dfrac{(x+y+z)^2}{4}=\dfrac{9}{4} \Rightarrow 4-yz>0$

Tương tự ta cũng có $4-zx>0; 4-xy>0$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có: $4\left(x^2+x^2+y^2+z^2\right) \geq (x+x+y+z)^2=(2x+y+z)^2$

Từ đó suy ra $\dfrac{2x^2+y^2+z^2}{4-yz} \geq \dfrac{(2x+y+z)^2}{4(4-yz)}$

Hoàn toàn tương tự ta có: $\dfrac{2y^2+z^2+x^2}{4-zx} \geq \dfrac{(2y+z+x)^2}{4(4-zx)}; \dfrac{2z^2+x^2+y^2}{4-xy} \geq \dfrac{(2z+x+y)^2}{4(4-xy)}$

Do đó ta được $P \geq \dfrac{(2x+y+z)^2}{4(4-yz)}+\dfrac{(2y+z+x)^2}{4(4-zx)}+\dfrac{(2z+x+y)^2}{4(4-xy)}=Q$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy

$$\frac{(2x+y+z)^2}{4(4-yz)}+\frac{4}{9}(4-yz) \geq 2\sqrt{\frac{(2x+y+z)^2}{4(4-yz)}.\frac{4}{9}(4-yz)}=\frac{2}{3}(2x+y+z)$$

$$\frac{(2y+z+x)^2}{4(4-zx)}+\frac{4}{9}(4-zx) \geq 2\sqrt{\frac{(2y+z+x)^2}{4(4-zx)}.\frac{4}{9}(4-zx)}=\frac{2}{3}(2y+z+x)$$

$$\frac{(2z+x+y)^2}{4(4-xy)}+\frac{4}{9}(4-xy) \geq 2\sqrt{\frac{(2z+x+y)^2}{4(4-xy)}.\frac{4}{9}(4-xy)}=\frac{2}{3}(2z+x+y)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$Q+\frac{4}{9}\left(12-xy-yz-zx\right)\ge \frac{8}{3}\left(x+y+z\right)=8\Rightarrow Q\ge \frac{8}{3}+\frac{4}{9}\left(xy+yz+zx\right)$$

Bất đẳng thức trên sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được: $\frac{8}{3}+\frac{4}{9}\left(xy+yz+zx\right)\ge 4xyz$

Thậy vậy, ta viết lại bất đẳng thức trên thành: $\frac{8}{81}.\left(x+y+z\right)^3+\frac{4}{27}\left(x+y+z\right)\left(xy+yz+zx\right)\ge 4xyz$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz};\ xy+yz+zx\ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$

Suy ra $\frac{8}{81}.\left(x+y+z\right)^3+\frac{4}{27}\left(x+y+z\right)\left(xy+yz+zx\right)\ge 4xyz$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Cách 5: Vế trái của bất đẳng thức được viết lại thành

$$P=\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(\frac{1}{4-xy}+\frac{1}{4-yz}+\frac{1}{4-zx}\right)+\left(\frac{x^2}{4-yz}+\frac{y^2}{4-zx}+\frac{z^2}{4-xy}\right)$$

Áp dụng bất đẳng Cauchy ta có

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(\frac{1}{4-xy}+\frac{1}{4-yz}+\frac{1}{4-zx}\right)\ge \frac{9\left(x^2+y^2+z^2\right)}{12-\left(xy+yz+zx\right)}=\frac{18\left(x^2+y^2+z^2\right)}{15+x^2+y^2+z^2}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có

$$\frac{x^2}{4-yz}+\frac{x\left(4-yz\right)}{9}+\frac{1}{3}\ge 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{4-yz}.\frac{x\left(4-yz\right)}{9}.\frac{1}{3}}=x\Rightarrow \frac{x^2}{4-yz}\ge x-\frac{x\left(4-yz\right)}{9}-\frac{1}{3}=\frac{5x}{9}+\frac{xyz}{9}-\frac{1}{3}$$

Tương tự ta có $\frac{y^2}{4-zx}\ge \frac{5y}{9}+\frac{xyz}{9}-\frac{1}{3};\ \frac{z^2}{4-xy}\ge \frac{5z}{9}+\frac{xyz}{9}-\frac{1}{3}$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được: $\frac{x^2}{4-yz}+\frac{y^2}{4-zx}+\frac{z^2}{4-xy}\ge \frac{5}{9}\left(x+y+z\right)+\frac{xyz}{3}-1=\frac{2}{3}+\frac{xyz}{3}$

Do đó ta được $A\ge \frac{18\left(x^2+y^2+z^2\right)}{15+x^2+y^2+z^2}+\frac{2}{3}+\frac{xyz}{3}$

Từ giả thiết ta được $x^2+y^2+z^2\ge 3$. Do đó ta có $\frac{18\left(x^2+y^2+z^2\right)}{15+x^2+y^2+z^2}\ge 3$

Cũng từ giả thiết ta được $xyz\ge 1$.

Từ đó suy ra $P\ge 3+\frac{2}{3}+\frac{xyz}{3}=\frac{11}{3}+\frac{xyz}{3}\ge \frac{11xyz}{3}+\frac{xyz}{3}=4xyz$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong

Bài 119. Cho x, y là các số thực dương thoả mãn $x+y=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$B=\frac{1}{x^3+y^3}+\frac{1}{xy}$$

Trích đề thi HSG Tỉnh Thanh Hóa năm 2013-2014

Lời giải

Ta có $B=\frac{1}{\left(x+y\right)^3-3xy\left(x+y\right)}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{1-3xy}+\frac{1}{xy}=\frac{1-2xy}{xy\left(1-3xy\right)}$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $xy\le \frac{\left(x+y\right)^2}{4}=\frac{1}{4}$.

Gọi B_0 là một giá trị của B, khi đó luôn tồn tại x, y để $B_0=\frac{1-2xy}{xy\left(1-3xy\right)}\Leftrightarrow 3B_0\left(xy\right)^2-\left(2+B_0\right)xy+1=0$

Để tồn tại x, y thì phương trình trên phải có nghiệm xy, tức là $\Delta = B_0^2 - 8B_0 + 4 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B_0 \ge 4+2\sqrt{3} \\ B_0 \le 4-2\sqrt{3} \end{array}\right.$

Để ý rằng với giả thiết bài toán thì B > 0. Do đó ta có $B_0 \ge 4+2\sqrt{3}$.

Với $B_0 = 4+2\sqrt{3} \Rightarrow xy = \dfrac{2+B_0}{6B_0} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{6\left(2+\sqrt{3}\right)} \Rightarrow x(1-x) = \dfrac{3+\sqrt{3}}{6\left(2+\sqrt{3}\right)}$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + \frac{3+\sqrt{3}}{6\left(2+\sqrt{3}\right)} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2},\ x = \frac{1-\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là $4+2\sqrt{3}$, đạt được khi

$$x = \frac{1+\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2};\ y = \frac{1-\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2} \text{ hoặc } x = \frac{1-\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2};\ y = \frac{1+\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}.$$

Bài 120. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $2ab + 6bc + 2ca = 7abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $C = \dfrac{4ab}{a+2b} + \dfrac{9ca}{a+4c} + \dfrac{4bc}{b+c}$

Trích đề thi HSG tỉnh Hải Dương năm 2013-2014

Lời giải

Từ $2ab + 6bc + 2ca = 7abc$ ta được $\dfrac{2}{c} + \dfrac{6}{a} + \dfrac{2}{b} = 7$

Đặt $x = \dfrac{1}{a};\ y = \dfrac{1}{b};\ z = \dfrac{1}{c} \Rightarrow \begin{cases} x, y, z > 0 \\ 2z + 6x + 2y = 7 \end{cases}$

Khi đó ta được $C = \dfrac{4ab}{a+2b} + \dfrac{9ca}{a+4c} + \dfrac{4bc}{b+c} = \dfrac{4}{2x+y} + \dfrac{9}{4x+z} + \dfrac{4}{y+z}$

Hay

$$C = \frac{4}{2x+y} + 2x + y + \frac{9}{4x+z} + 4x + z + \frac{4}{y+z} + y + z - \left(2x + y + 4x + z + y + z\right)$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{x+2y}} - \sqrt{x+2y}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{4x+z}} - \sqrt{4x+z}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{y+z}} - \sqrt{y+z}\right)^2 + 17 \ge 17$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của C là 17. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x = \dfrac{1}{2};\ y = z = 1$

Bài 121. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{4a}{b+c-a} + \frac{9b}{c+a-b} + \frac{16c}{a+b-c} \ge 26$$

Trích đề thi HSG tỉnh Quảng Trị năm 2013-2014

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $\dfrac{8a}{b+c-a} + 4 + \dfrac{18b}{c+a-b} + 9 + \dfrac{32c}{a+b-c} + 16 \ge 81$

Hay $\left(a+b+c\right)\left(\dfrac{4}{b+c-a} + \dfrac{9}{c+a-b} + \dfrac{16}{a+b-c}\right) \ge 81$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{4}{b+c-a} + \frac{9}{c+a-b} + \frac{16}{a+b-c} \ge \frac{\left(2+3+4\right)^2}{a+b+c} = \frac{81}{a+b+c}$$

Do đó ta được: $\left(a+b+c\right)\left(\frac{4}{b+c-a}+\frac{9}{c+a-b}+\frac{16}{a+b-c}\right)\ge\frac{81\left(a+b+c\right)}{a+b+c}=81$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 122. Cho a, b, c thỏa mãn $0\le a;b;c\le 4$ và $a+b+c=6$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$$

Trích đề thi HSG Thành phố Hà Nội năm 2013-2014

Lời giải

Vì $0\le a;b;c\le 4$ do đó ta được $\left(a-4\right)\left(b-4\right)\left(c-4\right)\le 0$, biến đổi tương đương ta thu được

$$\left(a-4\right)\left(b-4\right)\left(c-4\right)\le 0\Leftrightarrow abc-4\left(ab+bc+ca\right)+16\left(a+b+c\right)-64\le 0$$

$$\Leftrightarrow 4\left(ab+bc+ca\right)\ge abc+16\left(a+b+c\right)-64$$

Do $abc\ge 0$ nên ta được: $4\left(ab+bc+ca\right)\ge abc+16\left(a+b+c\right)-64\ge 16.6-64=32\Leftrightarrow ab+bc+ca\ge 8$

Ta có $P=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=\left(a+b+c\right)^2-\left(ab+bc+ca\right)\le 6^2-8=28$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 28. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=0;\ b=2;\ c=4$ và các hoán vị.

Bài 123. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x^2+4yz}+\frac{1}{y^2+4zx}+\frac{1}{z^2+4xy}<\frac{1}{xyz}$$

Trích đề thi HSG tỉnh Thừa Thiên Huế năm 2013-2014

Lời giải

Dễ thấy $\frac{1}{x^2+4yz}<\frac{1}{4yz};\frac{1}{y^2+4zx}<\frac{1}{4zx};\frac{1}{z^2+4xy}<\frac{1}{4xy}$

Do đó ta được $\frac{1}{x^2+4yz}+\frac{1}{y^2+4zx}+\frac{1}{z^2+4xy}<\frac{1}{4yz}+\frac{1}{4zx}+\frac{1}{4xy}$

Kết hợp với giả thiết ta được $\frac{1}{4yz}+\frac{1}{4zx}+\frac{1}{4xy}=\frac{x+y+z}{4xyz}=\frac{1}{xyz}$

Suy ra $\frac{1}{x^2+4yz}+\frac{1}{y^2+4zx}+\frac{1}{z^2+4xy}<\frac{1}{xyz}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 124. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}+\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{a}+\frac{\sqrt{c^2+a^2}}{b}\ge 2\left(\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{b}{\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

Trích đề thi HSG tỉnh Bắc Giang năm 2013-2014

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $2\left(x^2+y^2\right)\ge\left(x+y\right)^2$ ta được

$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}+\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{a}+\frac{\sqrt{c^2+a^2}}{b}=\frac{\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}}{\sqrt{2}c}+\frac{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}}{\sqrt{2}a}+\frac{\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)}}{\sqrt{2}b}\ge\frac{a+b}{\sqrt{2}c}+\frac{b+c}{\sqrt{2}a}+\frac{c+a}{\sqrt{2}b}$ Mặt khác cũng áp dụng bất đẳng thức trên ta được: $\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{b}{\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\le\frac{\sqrt{2}a}{b+c}+\frac{\sqrt{2}b}{c+a}+\frac{\sqrt{2}c}{a+b}$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được: $\frac{a+b}{\sqrt{2}c}+\frac{b+c}{\sqrt{2}a}+\frac{c+a}{\sqrt{2}b}\ge\frac{2\sqrt{2}a}{b+c}+\frac{2\sqrt{2}b}{c+a}+\frac{2\sqrt{2}c}{a+b}$

Hay $$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\ge\frac{4a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{4c}{a+b}$$

Thật vậy, Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$, ta được

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}=a\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge\frac{4a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{4c}{a+b}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 125. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b^2c}+\frac{b^2}{c^2a}+\frac{c^2}{a^2b}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Trích đề thi HSG tỉnh Vĩnh Phúc năm 2013-2014

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được: $\frac{a^2}{b^2c}+\frac{b^2}{c^2a}+\frac{1}{a}\ge\frac{3}{c}$; $\frac{b^2}{c^2a}+\frac{c^2}{a^2b}+\frac{3}{b}\ge\frac{1}{a}$; $\frac{a^2}{b^2c}+\frac{c^2}{a^2b}+\frac{1}{c}\ge\frac{3}{b}$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được: $2\left(\frac{a^2}{b^2c}+\frac{b^2}{c^2a}+\frac{c^2}{a^2b}\right)+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{3}{a}+\frac{3}{b}+\frac{3}{c}$

Hay $$\frac{a^2}{b^2c}+\frac{b^2}{c^2a}+\frac{c^2}{a^2b}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 126. Cho ba số dương a,b,c thoả mãn $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}=1.$ Chứng minh rằng: $$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Trích đề thi HSG tỉnh Hải Dương năm 2014-2015

Lời giải

Dễ thấy $2\left(a^2+b^2\right)\le\left(a+b\right)^2$. Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{a^2}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}}+\frac{b^2}{\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)}}+\frac{c^2}{\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)}}$$

Đặt $x=\sqrt{b^2+c^2}$, $y=\sqrt{c^2+a^2}$, $z=\sqrt{a^2+b^2}$

Khi đó ta được suy ra: $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{y^2+z^2-x^2}{2\sqrt{2}x}+\frac{z^2+x^2-y^2}{2\sqrt{2}y}+\frac{x^2+y^2-z^2}{2\sqrt{2}z}$

Áp dụng tiếp bất đẳng thức trên thì ta được

$$\frac{y^2+z^2-x^2}{2\sqrt{2}x}+\frac{z^2+x^2-y^2}{2\sqrt{2}y}+\frac{x^2+y^2-z^2}{2\sqrt{2}z}\ge\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{\left(y+z\right)^2}{2x}-x+\frac{\left(z+x\right)^2}{2y}-y+\frac{\left(x+y\right)^2}{2z}-z\right]$$

$$\ge\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\frac{\left(y+z\right)^2}{2x}+2x-3x\right)+\left(\frac{\left(z+x\right)^2}{2y}+2y-3y\right)+\left(\frac{\left(x+y\right)^2}{2z}+2z-3z\right)\right]$$

$$\ge\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[2y+z-3x+2\left(z+x\right)-3y+2\left(x+y\right)-3z\right]=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x+y+z\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Do đó ta được $$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$

Bài 127. Với a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^5}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^5}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^5}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{a^3+b^3+c^3}{3}$$

Trích đề thi HSG tỉnh Thái Bình năm 2013-2014

Lời giải

Cách 1: Ta có:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}\ge\frac{2a-b}{3}\Leftrightarrow 3a^3\ge(2a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)\Leftrightarrow a^3+b^3\ge ab(a+b)\Leftrightarrow a^2-ab+b^2\ge ab\Leftrightarrow (a-b)^2\ge 0$$

Đánh giá cuối cùng luôn đúng. Do đó $\dfrac{a^3}{a^2+ab+b^2}\ge\dfrac{2a-b}{3}\Leftrightarrow\dfrac{a^5}{a^2+ab+b^2}\ge\dfrac{2a^3-a^2b}{3}$.

Chứng minh tương tự ta được

$\dfrac{a^5}{a^2+ab+b^2}+\dfrac{b^5}{b^2+bc+c^2}+\dfrac{c^5}{c^2+ca+a^2}\ge\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}+\dfrac{a^3+b^3+c^3-a^2b-b^2c-c^2a}{3}$ Mặt khác vì vai trò a, b, c như nhau nên giả sử $a\ge b\ge c>0$

$$a^3+b^3+c^3-a^2b-b^2c-c^2a=a^2(a-b)+b^2(b-c)+c^2(c-a)=(a-b)^2(a+b)+(a-c)(b-c)(b+c)\ge 0$$

Từ đó suy ra $\dfrac{a^5}{a^2+ab+b^2}+\dfrac{b^5}{b^2+bc+c^2}+\dfrac{c^5}{c^2+ca+a^2}\ge\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta có

$$\frac{a^5}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^5}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^5}{c^2+ca+a^2}=\frac{a^6}{a^3+a^2b+ab^2}+\frac{b^6}{b^3+b^2c+bc^2}+\frac{c^6}{c^3+c^2a+ca^2}$$

$$\ge\frac{\left(a^3+b^3+c^3\right)^2}{a^3+b^3+c^3+a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2}$$

Mặt khác ta có $(a-b)^2\ge 0\Leftrightarrow a^2-ab+b^2\ge ab\Leftrightarrow a^3+b^3\ge ab(a+b)$

Chứng minh tương tự $b^3+c^3\ge bc(b+c);\ c^3+a^3\ge ca(c+a)$

Suy ra $3\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge a^3+b^3+c^3+ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$

$$\frac{\left(a^3+b^3+c^3\right)^2}{a^3+b^3+c^3+a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2}\ge\frac{a^3+b^3+c^3}{3}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 128. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a}{9a^3+3b^2+c}+\frac{b}{9b^3+3c^2+a}+\frac{c}{9c^3+3a^2+b}$$

Trích đề thi HSG tỉnh Vĩnh Phúc năm 2014-2015

Lời giải

Cách 1: Ta có $P=\dfrac{3a}{27a^3+9b^2+3c}+\dfrac{3b}{27b^3+9c^2+3a}+\dfrac{3c}{27c^3+9a^2+3b}$

Đặt $x=3a;\ y=3b;\ z=3c\Rightarrow\begin{cases}x+y+z=3\\x;\ y;\ z>0\end{cases}$

Khi đó ta viết lại được $P=\frac{x}{x^3+y^2+z}+\frac{y}{y^3+z^2+x}+\frac{z}{z^3+x^2+y}$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki và chú ý đến giả thiết ta có

$$\left(x^3+y^2+z\right)\left(\frac{1}{x}+1+z\right)\ge\left(x+y+z\right)^2\Rightarrow\frac{1}{x^3+y^2+z}\le\frac{\frac{1}{x}+1+z}{\left(x+y+z\right)^2}\Rightarrow\frac{x}{x^3+y^2+z}\le\frac{1+x+zx}{\left(x+y+z\right)^2}=\frac{1+x+zx}{9}$$

Hoàn toàn tương tự thu được $\frac{y}{y^3+z^2+x}\le\frac{1+y+xy}{9};\ \frac{y}{z^3+x^2+y}\le\frac{1+z+yz}{9}$

Từ đó suy ra $P\le\frac{3+x+y+z+\left(xy+yz+zx\right)}{9}=\frac{6+\left(xy+yz+zx\right)}{9}$

Dẽ dàng chứng minh được $xy+yz+zx\le\frac{1}{3}\left(x+y+z\right)^2=3$

Do đó $P\le\frac{6+\left(xy+yz+zx\right)}{9}\le\frac{6+3}{9}=1$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 1 đạt được tại $a=b=c=\frac{1}{3}$

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$9a^3+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ge 3a;9b^2+\frac{1}{3}\ge 2b\Rightarrow 9a^3+9b^2+c\ge 3a+2b+c-1=2a+b$$

Hoàn toàn tương tự ta được: $9b^3+9c^2+a\ge 2b+c;\ 9c^3+9a^2+b\ge 2c+a$

Do đó ta suy ra $P\le\frac{a}{2a+b}+\frac{b}{2b+c}+\frac{c}{2c+a}=\frac{1}{2+\frac{b}{a}}+\frac{1}{2+\frac{c}{b}}+\frac{1}{2+\frac{a}{c}}$

Đặt $x=\frac{b}{a};\ y=\frac{c}{b};\ z=\frac{a}{c}\Rightarrow xyz=1$. Khi đó ta được $P\le\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2+y}+\frac{1}{2+z}$

Ta chứng minh $\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2+y}+\frac{1}{2+z}\le 1$.

Thật vậy, bất đẳng thức tương đương với

$$\left(2+z\right)\left(2+y\right)+\left(2+y\right)\left(2+z\right)+\left(2+z\right)\left(2+x\right)\le\left(2+x\right)\left(2+y\right)\left(2+z\right)$$
$$\Leftrightarrow xy+yz+zx+4\left(x+y+z\right)+12\le xyz+2\left(xy+yz+zx\right)+4\left(x+y+z\right)+8\Leftrightarrow x+y+x\ge 3$$

Bất đảng thức cuối cùng luôn đúng do $x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}=3$

Do đó bất đẳng thức trên được chứng minh. Vậy giá trị lớn nhất của P là 1 đạt được tại $a=b=c=\frac{1}{3}$

Bài 129. Cho các số thực dương x, y, z thảo mãn $x^2+y^2+z^2=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{\sqrt[3]{yz}}+\frac{y}{\sqrt[3]{xz}}+\frac{z}{\sqrt[3]{xy}}\ge xy+yz+xz$$

Trích đề thi HSG tỉnh Phú Thọ năm 2014-2015

Lời giải

Ta có $A=\frac{x}{\sqrt[3]{yz}}+\frac{y}{\sqrt[3]{xz}}+\frac{z}{\sqrt[3]{xy}}=\frac{x\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{xyz}}+\frac{y\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{xyz}}+\frac{z\sqrt[3]{z}}{\sqrt[3]{xyz}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $3=x^2+y^2+z^2\ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\Leftrightarrow xyz\le 1.\Rightarrow A\ge x\sqrt[3]{x}+y\sqrt[3]{y}+z\sqrt[3]{z}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki: $\left(x\sqrt[3]{x}+y\sqrt[3]{y}+z\sqrt[3]{z}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{z^2}\right)\ge\left(x+y+z\right)^2\ge3\left(xy+yz+xz\right)$

Lại thấy theo bất đẳng thức Cauchy thì: $\sqrt[3]{x^2.1.1}\le\frac{x^2+1+1}{3};\sqrt[3]{y^2.1.1}\le\frac{y^2+1+1}{3};\sqrt[3]{z^2.1.1}\le\frac{z^2+1+1}{3}$

Nên $$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{z^2}\le\frac{x^2+y^2+z^2+6}{3}=3$$

Do đó ta được $A\ge x\sqrt[3]{x}+y\sqrt[3]{y}+z\sqrt[3]{z}\ge xy+yz+xz$ Hay $\frac{x}{\sqrt[3]{yz}}+\frac{y}{\sqrt[3]{xz}}+\frac{z}{\sqrt[3]{xy}}\ge xy+yz+xz$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x^2=y^2=z^2=1\\ \sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{z}\\ x^2+y^2+z^2=3\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=1$

Bài 130. Cho ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A=\sqrt{2x^2+3xy+2y^2}+\sqrt{2y^2+3yz+2z^2}+\sqrt{2z^2+3zx+2x^2}$$

Trích đề thi HSG tỉnh Ninh Bình năm 2014-2015

Lời giải

Ta viết lại biểu thức A thành: $A=\sqrt{2\left(x+y\right)^2-xy}+\sqrt{2\left(y+z\right)^2-yz}+\sqrt{2\left(z+x\right)^2-zx}$

Theo một đánh giá quen thuộc ta có: $2\left(x+y\right)^2-xy\ge2\left(x+y\right)^2-\frac{\left(x+y\right)^2}{4}=\frac{7\left(x+y\right)^2}{4}$

Do đó ta được $$\sqrt{2\left(x+y\right)^2-xy}\ge\frac{\sqrt{7}\left(x+y\right)}{2}$$

Hoàn toàn tương tự ta thu được

$$A=\sqrt{2x^2+3xy+2y^2}+\sqrt{2y^2+3yz+2z^2}+\sqrt{2z^2+3zx+2x^2}\ge\sqrt{7}\left(x+y+z\right)=3\sqrt{7}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $3\sqrt{7}$. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$

Bài 131. Cho các số dương a,b,c có tổng bằng 3. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+6a+9}{a^2-2a+3}+\frac{b^2+6b+9}{b^2-2b+3}+\frac{c^2+6c+9}{c^2-2c+3}\le24$$

Trích đề thi HSG tỉnh Gia Lai năm 2014-2015

Lời giải

Ta có: $\frac{a^2+6a+9}{a^2-2a+3}=\frac{\left(a-1\right)^2+8a+8}{\left(a-1\right)^2+2}=1+\frac{8a+6}{\left(a-1\right)^2+2}\le1+\frac{8a+6}{2}=4a+4$

Hoàn toàn tương tự ta được: $\frac{b^2+6b+9}{b^2-2b+3}\le4b+4;\frac{c^2+6c+9}{c^2-2c+3}\le4c+4$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên và kết hợp với giả thiết ta được

$$\frac{a^2+6a+9}{a^2-2a+3}+\frac{b^2+6b+9}{b^2-2b+3}+\frac{c^2+6c+9}{c^2-2c+3}\le4\left(a+b+c\right)+3.4=24$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 132. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{a+2b+3}+\frac{1}{b+2c+3}+\frac{1}{c+2a+3}$$

Trích đề thi HSG tỉnh Nghệ An năm 2014-2015

Lời giải

Đặt $a=x^2;\ b=y^2;\ z=c^2$ khi đó ta được $xyz=1$ và bểu thức P được viết lại thành

$$P=\frac{1}{x^2+2y^2+3}+\frac{1}{y^2+2z^2+3}+\frac{1}{z^2+2x^2+3}$$

Ta có $x^2+y^2\ge 2xy;\ y^2+1\ge 2y\Rightarrow x^2+2y^2+3\ge 2\left(xy+y+1\right)$. Do đó ta được $\frac{1}{x^2+2y^2+3}\le\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{xy+y+1}$

Chứng minh tương tự ta có: $\frac{1}{y^2+2z^2+3}\le\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{yz+z+1};\ \frac{1}{z^2+2x^2+3}\le\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{zx+z+1}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được: $P\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy+y+1}+\frac{1}{yz+z+1}+\frac{1}{zx+x+1}\right)$

Ta cần chứng minh $\frac{1}{ab+b+1}+\frac{1}{bc+c+1}+\frac{1}{ca+a+1}=1$

Đến đây ta có hai hướng đánh giá $\frac{1}{xy+y+1}+\frac{1}{yz+z+1}+\frac{1}{zx+x+1}$

Hướng 1: Do $xyz=1$, nên tồn tại các số dương m, n, p để $x=\frac{m}{n};\ y=\frac{n}{p};\ z=\frac{p}{m}$

Khi đó ta có: $\frac{1}{xy+y+1}+\frac{1}{yz+z+1}+\frac{1}{zx+x+1}=\frac{p}{m+n+p}+\frac{m}{m+n+p}+\frac{n}{m+n+p}=1$

Hướng 2: Do $xyz=1$, nên ta được: $\frac{1}{xy+y+1}+\frac{1}{yz+z+1}+\frac{1}{zx+x+1}=\frac{zx}{z+1+zx}+\frac{x}{1+zx+z}+\frac{1}{zx+z+1}=1$

Từ đó ta được $P\le\frac{1}{2}$. Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 133. Cho các số dương x, y, z thay đổi thỏa mãn $xy+yz+zx=xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $M=\frac{1}{4x+3y+z}+\frac{1}{x+4y+3z}+\frac{1}{3x+y+4z}$

Trích đề thi HSG Tỉnh Hải Dương năm 2014-2015

Lời giải

Từ giả thiết ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{64}{4x+3y+z}\le\frac{16}{4x}+\frac{16}{3y+z}\le\frac{4}{x}+\frac{4}{2y}+\frac{4}{y+z}\le\frac{4}{x}+\frac{3}{y}+\frac{1}{z}$$

Tương tự ta được $\frac{64}{x+4y+3z}\le\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{3}{z};\ \frac{64}{3x+y+4z}\le\frac{3}{x}+\frac{1}{y}+\frac{4}{z}$

Do đó ta được $M=\frac{1}{4x+3y+z}+\frac{1}{x+4y+3z}+\frac{1}{3x+y+4z}\le\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{8}$

Vậy M đạt giá trị lớn nhất là $\frac{1}{8}$. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z=3$.

Bài 134. Cho các số dương x, y, z thay đổi thỏa mãn $x+y+z=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{x+\sqrt{3x+yz}}+\frac{y}{y+\sqrt{3y+zx}}+\frac{z}{z+\sqrt{3z+xy}}\le 1$$

Trích đề thi HSG Tỉnh Hà Nam năm 2014-2015

Lời giải

Áp dụng giả thiết ta chú ý đến phép biến đổi: $3x + yz = x(x+y+z) + yz = (x+y)(x+z)$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được: $(x+y)(x+z) \ge \left(\sqrt{xy}+\sqrt{xz}\right)^2$

Do đó ta được: $\dfrac{x}{x+\sqrt{3x+yz}} \le \dfrac{x}{x+\sqrt{xy}+\sqrt{xz}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$

Áp dụng tương tự ta được: $\dfrac{y}{y+\sqrt{3y+zx}} \le \dfrac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$; $\dfrac{z}{z+\sqrt{3z+xy}} \le \dfrac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được: $\dfrac{x}{x+\sqrt{3x+yz}} + \dfrac{y}{y+\sqrt{3y+zx}} + \dfrac{z}{z+\sqrt{3z+xy}} \le 1$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 135. Cho các số dương a, b, c thay đổi thỏa mãn $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-ca+a^2}}$$

Trích đề thi HSG Thành Phố Hà Nội năm 2014-2015

Lời giải

Cách 1: Ta có $a^2-ab+b^2=(a+b)^2-3ab \ge (a+b)^2-\dfrac{3(a+b)^2}{4}=\dfrac{(a+b)^2}{4}$

Do đó ta được $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-ab+b^2}} \le \dfrac{2}{a+b} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$

Hoàn toàn tương tự ta có: $\dfrac{1}{\sqrt{b^2-bc+c^2}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$; $\dfrac{1}{\sqrt{c^2-ca+a^2}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-ca+a^2}} \le \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 3. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $a^2-ab+b^2 \ge 2ab-ab=ab$

Do đó ta được $$\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+b^2}} \le \frac{1}{\sqrt{ab}}$$

Hoàn toàn tương tự ta có: $\dfrac{1}{\sqrt{b^2-bc+c^2}} \le \dfrac{1}{\sqrt{bc}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{c^2-ca+a^2}} \le \dfrac{1}{\sqrt{ca}}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-ca+a^2}} \le \frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}$$

Dễ thấy: $\dfrac{1}{\sqrt{ab}}+\dfrac{1}{\sqrt{bc}}+\dfrac{1}{\sqrt{ca}} \le \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=3$. Do đó ta được $P \le 3$. Vậy giá trị lớn nhất của P là 3.

Bài 136. Cho a, b, c là các các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$a^3+b^3+c^3+ab+bc+ca \ge 6$$

Trích đề thi HSG Tỉnh Đăk Lăk năm 2014-2015

Lời giải

Cách 1: Để ý đến giả thiết $a+b+c=3$ ta có

$a^3+b^3+c^3+ab+bc+ca=a^3+b^3+c^3+\dfrac{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)}{2}=a^3+b^3+c^3+\dfrac{9-(a^2+b^2+c^2)}{2}$ Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được: $a^3+a^3+1\ge 3a^2$; $b^3+b^3+1\ge 3b^2$; $c^3+c^3+1\ge 3c^2$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được: $2(a^3+b^3+c^3)+3\ge 3(a^2+b^2+c^2)$

Do đó ta được $a^3+b^3+c^3+\dfrac{9-(a^2+b^2+c^2)}{2}\ge a^2+b^2+c^2+3$

Lại thấy: $a^2+b^2+c^2\ge\dfrac{(a+b+c)^2}{3}=3$. Do đó ta được: $a^3+b^3+c^3+\dfrac{9-(a^2+b^2+c^2)}{2}\ge 6$

Hay $$a^3+b^3+c^3+ab+bc+ca\ge 6$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được: $3(a^3+b^3+c^3)=(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)\ge(a^2+b^2+c^2)^2$

Dễ thấy $a^2+b^2+c^2\ge 3$, do đó ta được: $3(a^3+b^3+c^3)\ge 3(a^2+b^2+c^2)\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3\ge a^2+b^2+c^2$

Khi đó ta suy ra

$$a^3+b^3+c^3+ab+bc+ca\ge a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=(a+b+c)^2-(ab+bc+ca)$$

$$\ge(a+b+c)^2-\frac{(a+b+c)^2}{3}=9-3=6$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 137. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a\le 1; b\le 2; a+b+c=6$. Chứng minh rằng: $(a+1)(b+1)(c+1)\ge 4abc$

Trích đề thi HSG Tỉnh Bắc Giang năm 2014-2015

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\ge 4\Leftrightarrow 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{abc}\ge 4$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{a+b+c+1}{abc}\ge 3\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{7}{abc}\ge 3$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được: $a+\dfrac{b}{2}\ge 2\sqrt{\dfrac{ab}{2}}$; $\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}\ge 2\sqrt{\dfrac{bc}{6}}$

Do đó ta được $6=a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}+\dfrac{2c}{3}\ge 2\sqrt{\dfrac{ab}{2}}+2\sqrt{\dfrac{bc}{6}}+\dfrac{2c}{3}\ge 6\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{ab^2c^3}{108}}}$

Do đó ta được $ab^2c^3\le 108$, mà theo giả thiết $a\le 1; b\le 2$ suy ra $a^2b\le 2$

Suy ra ta có $\quad 216\ge 108a^2b\ge ab^2c^3a^2b=(abc)^3\Rightarrow abc\le 6$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy và các giả thiết ta lại có

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{6}{abc}}\ge 3;\ \frac{2}{a}+\frac{1}{b}\ge 2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2};\ \frac{3.7}{abc}\ge\frac{3.7}{6}=\frac{7}{2}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được: $3\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{7}{abc}\right)\ge 3+\dfrac{5}{2}+\dfrac{7}{2}$ Hay $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{7}{abc}\ge 3$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=1; b=2; c=3$.

Bài 138. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T=\frac{19a+3}{1+b^2}+\frac{19b+3}{1+c^2}+\frac{19c+3}{1+a^2}$

Trích đề thi HSG Tỉnh Hưng Yên năm 2014-2015

Lời giải

Cách 1: Biến đổi và áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{19a+3}{1+b^2}=19a+3-\frac{b^2(19a+3)}{1+b^2}\ge 19a+3-\frac{b(19a+3)}{2}=\frac{38a+6-19ab-3b}{2}$$

Hoàn toàn tương tự được: $\frac{19b+3}{1+c^2}\ge\frac{38b+6-19bc-3c}{2}$; $\frac{19c+3}{1+a^2}\ge\frac{38c+6-19ca-3a}{2}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$T=\frac{19a+3}{1+b^2}+\frac{19b+3}{1+c^2}+\frac{19c+3}{1+a^2}\ge\frac{35(a+b+c)+18-19(ab+bc+ac)}{2}\ge\frac{35.\sqrt{3(ab+bc+ca)}+18-19.3}{2}=33$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 33. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Cách 2: Dễ thấy $\frac{19a+3}{1+b^2}=\frac{16a}{1+b^2}+\frac{3(a+1)}{1+b^2}$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{16a}{1+b^2}=16a-\frac{16ab^2}{1+b^2}\ge 16a-\frac{16ab^2}{2b}=16a-8ab$$

$$\frac{3(a+1)}{1+b^2}=3(a+1)-\frac{3(a+1)b^2}{1+b^2}\ge 3(a+1)-\frac{3(a+1)b^2}{2b}=3(a+1)-\frac{3(a+1)b}{2}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$T=\frac{19a+3}{1+b^2}+\frac{19b+3}{1+c^2}+\frac{19c+3}{1+a^2}\ge\frac{35(a+b+c)+18-19(ab+bc+ac)}{2}\ge\frac{35.\sqrt{3(ab+bc+ca)}+18-19.3}{2}=33$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 33.

Bài 139. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=2\sqrt{2}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^8+y^8}{x^4+y^4+x^2y^2}+\frac{y^8+z^8}{y^4+z^4+y^2z^2}+\frac{z^8+x^8}{z^4+x^4+z^2y^2}\ge 8$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Hải Dương năm học 2013-2014

Lời giải

Đặt $a=x^2; b=y^2; c=z^2$ suy ra $abc=8$. Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2+ab}+\frac{b^4+c^4}{b^2+c^2+bc}+\frac{c^4+a^4}{c^2+a^2+ca}\ge 8$$

Dễ dàng chứng minh minh được: $a^4+b^4\ge\frac{(a^2+b^2)^2}{2}$; $a^2+b^2+ab\le\frac{3(a^2+b^2)}{2}$

Suy ra $\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2+ab}\ge\frac{a^2+b^2}{3}$. Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2+ab}+\frac{b^4+c^4}{b^2+c^2+bc}+\frac{c^4+a^4}{c^2+a^2+ca}\ge\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{3}$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được: $a^2+b^2+c^2\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=12$

Do đó ta được $$\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2+ab}+\frac{b^4+c^4}{b^2+c^2+bc}+\frac{c^4+a^4}{c^2+a^2+ca}\ge 8$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\sqrt{2}$

Bài 140. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$a.\sqrt{\frac{b+c}{a^2+bc}}+b.\sqrt{\frac{c+a}{b^2+ca}}+c.\sqrt{\frac{a+b}{c^2+ab}}\le\frac{3}{abc}$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Bắc Giang năm học 2013-2014

Lời giải

Cách 1: Ta có $a.\sqrt{\frac{b+c}{a^2+bc}}=\sqrt{a}.\sqrt{\frac{ab+ac}{a^2+bc}}$. Khi đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy và chú ý đến giả thiết $ab+bc+ca=3$ ta có: $a^2+bc+ab^2c^2\ge 3abc \Rightarrow a^2+bc\ge abc(3-bc)=abc(ab+ac)$

Do đó ta được: $\frac{ab+ac}{a^2+bc}\le\frac{1}{abc}\Rightarrow\sqrt{a}.\sqrt{\frac{ab+ac}{a^2+bc}}\le\frac{1}{\sqrt{bc}}\Rightarrow a.\sqrt{\frac{b+c}{a^2+bc}}\le\frac{1}{\sqrt{bc}}$

Áp dụng hoàn toàn tương tự ta được: $b.\sqrt{\frac{c+a}{b^2+ca}}\le\frac{1}{\sqrt{ca}}$; $c.\sqrt{\frac{a+b}{c^2+ab}}\le\frac{1}{\sqrt{ab}}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được: $a.\sqrt{\frac{b+c}{a^2+bc}}+b.\sqrt{\frac{c+a}{b^2+ca}}+c.\sqrt{\frac{a+b}{c^2+ab}}\le\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{abc}}$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được: $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{abc}}\le\frac{3}{abc}\Leftrightarrow\sqrt{abc}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\le 3$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng vì: $3=ab+bc+ca\ge\sqrt{abc}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\left(a.\sqrt{\frac{b+c}{a^2+bc}}+b.\sqrt{\frac{c+a}{b^2+ca}}+c.\sqrt{\frac{a+b}{c^2+ab}}\right)^2\le(a+b+c)\left(\frac{ab+ac}{a^2+bc}+\frac{bc+ab}{b^2+ca}+\frac{ca+ac}{c^2+a}\right)$$

Ta cần chứng minh được

$$(a+b+c)\left(\frac{ab+ac}{a^2+bc}+\frac{bc+ab}{b^2+ca}+\frac{ca+ac}{c^2+a}\right)\le\left(\frac{3}{abc}\right)^2\Leftrightarrow(abc)^2(a+b+c)\left(\frac{ab+ac}{a^2+bc}+\frac{bc+ab}{b^2+ca}+\frac{ca+ac}{c^2+a}\right)\le 9$$

Dễ thấy $abc(a+b+c)\le\frac{1}{3}(ab+bc+ca)^2=3$ và cũng từ giả thiết ta suy ra $abc\le 1$.

Do đó ta được $(abc)^2(a+b+c)\le 3$.

Như vậy phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $\frac{ab+ac}{a^2+bc}+\frac{bc+ab}{b^2+ca}+\frac{ca+ac}{c^2+a}\le 3$

Thật vậy, biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{ab+ac}{a^2+bc}-1+\frac{bc+ab}{b^2+ca}-1+\frac{ca+ac}{c^2+a}-1\le 0\Leftrightarrow\frac{(a-b)(a-c)}{a^2+bc}+\frac{(b-c)(b-a)}{b^2+ca}+\frac{(c-a)(c-b)}{c^2+a}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(a-b)\left[(a-c)(b^2+ca)-(b-c)(a^2+bc)\right]}{(a^2+bc)(b^2+ca)}+\frac{(c-a)(c-b)}{c^2+a}\ge 0$$

Do vai trò của các biến như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử

Bài 141. Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn:

$$\frac{1}{1+a^3}+\frac{1}{1+b^3}+\frac{1}{1+c^3}+\frac{1}{1+d^3}=2$$

Chứng minh rằng: $\frac{1-a}{1-a+a^2}+\frac{1-b}{1-b+b^2}+\frac{1-c}{1-c+c^2}+\frac{1-d}{1-d+d^2}\ge 0$

Lời giải

Biến đổi tương đương bất đẳng thức cần chứng minh $\frac{1-a^2}{1+a^3}+\frac{1-b^2}{1+b^3}+\frac{1-c^2}{1+c^3}+\frac{1-d^2}{1+d^3}\ge 0$

Hay $\frac{1}{1+a^3}+\frac{1}{1+b^3}+\frac{1}{1+c^3}+\frac{1}{1+d^3}\ge \frac{a^2}{1+a^3}+\frac{b^2}{1+b^3}+\frac{c^2}{1+c^3}+\frac{d^2}{1+d^3}$

Từ giả thiết và áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $\frac{1}{1+a^3}+\frac{1}{1+b^3}+\frac{1}{1+c^3}=2-\frac{1}{1+d^3}=\frac{1+2d^3}{1+d^3}\ge\frac{3d^2}{1+d^3}$

Hay
$$\frac{1}{1+a^3}+\frac{1}{1+b^3}+\frac{1}{1+c^3}\ge\frac{3d^2}{1+d^3}$$

Hoàn toàn tương tự ta được
$$\frac{1}{1+b^3}+\frac{1}{1+c^3}+\frac{1}{1+d^3}\ge\frac{3a^2}{1+a^3};\frac{1}{1+a^3}+\frac{1}{1+c^3}+\frac{1}{1+d^3}\ge\frac{3b^2}{1+b^3};\frac{1}{1+a^3}+\frac{1}{1+b^3}+\frac{1}{1+d^3}\ge\frac{3c^2}{1+c^3}$$

Cộng theo vế bốn bất đẳng thức trên ta được
$$\frac{1}{1+a^3}+\frac{1}{1+b^3}+\frac{1}{1+c^3}+\frac{1}{1+d^3}\ge \frac{a^2}{1+a^3}+\frac{b^2}{1+b^3}+\frac{c^2}{1+c^3}+\frac{d^2}{1+d^3}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$.

Bài 142. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c\le\frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$$S=\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{c^2}}$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Trà Vinh năm học 2013-2014

Lời giải

Cách 1: Chú ý đến dấu đẳng thức xảy ra ta được: $\sqrt{17\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)}=\sqrt{\left(1+4^2\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)}\ge\sqrt{\left(a+\frac{4}{a}\right)^2}=a+\frac{4}{a}$

Áp dụng tương tự ta được $\sqrt{17\left(b^2+\frac{1}{b^2}\right)}\ge b+\frac{4}{b};\sqrt{17\left(c^2+\frac{1}{c^2}\right)}\ge c+\frac{4}{c}$

Khi đó ta được: $\sqrt{17\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)}+\sqrt{17\left(b^2+\frac{1}{b^2}\right)}+\sqrt{17\left(c^2+\frac{1}{c^2}\right)}\ge a+b+c+\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}$

Theo một đánh giá quen thuộc ta có $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{36}{a+b+c}$

Nên ta được $a+b+c+\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}\ge a+b+c+\frac{36}{a+b+c}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy và kết hợp với giả thiết ta được
$$a+b+c+\frac{36}{a+b+c}=a+b+c+\frac{9}{4(a+b+c)}+\frac{135}{4(a+b+c)}\ge 2.\sqrt{(a+b+c).\frac{9}{4(a+b+c)}}+\frac{135}{4.\frac{3}{2}}=3+\frac{135}{6}=\frac{51}{2}$$

Từ đó ta suy ra $\sqrt{17\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)}+\sqrt{17\left(b^2+\frac{1}{b^2}\right)}+\sqrt{17\left(c^2+\frac{1}{c^2}\right)}\ge\frac{51}{2}$ Hay $\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{c^2}}\ge\frac{3\sqrt{17}}{2}$

Như vậy giá trị nhỏ nhất của S là $\frac{3\sqrt{17}}{2}$. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Cách 2: Dễ dàng chứng minh được: Với a, b, x, y là các số thực dương ta luôn có:

$$\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2}\ge\sqrt{(a+b)^2+(x+y)^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta được

$$S=\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{c^2}}\ge\sqrt{(a+b)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2}+\sqrt{c^2+\frac{1}{c^2}}\ge\sqrt{(a+b+c)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\ge\left(\frac{9}{a+b+c}\right)^2=\frac{81}{(a+b+c)^2}$

Do đó ta được $\quad (a+b+c)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\ge(a+b+c)^2+\frac{81}{(a+b+c)^2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy và giả thiết ta có

$$(a+b+c)^2+\frac{81}{16(a+b+c)^2}\ge 2.\frac{9}{4}=\frac{9}{2};\ \frac{1215}{16(a+b+c)^2}\ge\frac{1215}{16.\frac{9}{4}}=\frac{135}{4}$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được $(a+b+c)^2+\frac{81}{(a+b+c)^2}\ge\frac{9}{2}+\frac{135}{4}=\frac{153}{4}$

Từ các kết quả đó ta được $S\ge\sqrt{\frac{153}{4}}=\frac{3\sqrt{17}}{2}$.

Như vậy giá trị nhỏ nhất của S là $\frac{3\sqrt{17}}{2}$. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Bài 143. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{bc}{a^2(b+c)}+\frac{ca}{b^2(c+a)}+\frac{ab}{c^2(a+b)}$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Lâm Đồng năm học 2013-2014

Lời giải

Kết hợp với giả thiết ta viết lại biểu thức P thành $P=\frac{b^2c^2}{ab+ac}+\frac{c^2a^2}{ab+bc}+\frac{a^2b^2}{ca+bc}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$P=\frac{b^2c^2}{ab+ac}+\frac{c^2a^2}{ab+bc}+\frac{a^2b^2}{ca+bc}\ge\frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)}=\frac{ab+bc+ca}{2}$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta được $ab+bc+ca\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3$

Suy ra ta được $P\ge\frac{3}{2}$ hay giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{2}$. Đẳng thức xẩy ra khi $a=b=c=1$.

Bài 144. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $0\le a;b;c\le 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(2-c)\le 2$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh An Giang năm học 2014-2015

Lời giải

Từ giả thiết ta được $0\le 1-a;\ 1-b\le 1;\ a+b+1\ge 1$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được: $1=\frac{(1-a)+(1-b)+(a+b+1)}{3}\ge\sqrt[3]{(1-a)(1-b)(a+b+1)}$

Suy ta $\qquad 1\ge(1-a)(1-b)(a+b+1)$

Vì $2-c>0$ nên khi đó ta được : $2-c\ge(1-a)(1-b)(a+b+1)(2-c)$

Suy ra $(1-a)(1-b)(2-c)\le\dfrac{2-c}{a+b+1}$ Hay $\dfrac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(2-c)\le\dfrac{2}{a+b+1}$ (1)

Ta đi chứng minh $\dfrac{a}{b+c+1}\le\dfrac{2a}{a+b+1}$. Thật vậy, biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được

$a(a+b+1)\le 2a(b+c+1)\Leftrightarrow a(b+2c+1-a)\le 0$. Tương tự ta được $\dfrac{b}{a+c+1}\le\dfrac{2b}{a+b+1}$

Từ các kết quả trên ta được

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(2-c)\le\frac{2}{a+b+1}+\frac{2a}{a+b+1}+\frac{2b}{a+b+1}=2$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=0; c=1$.

Bài 145. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$a^3+b^3+c^3+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 3(ab+bc+ca)$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Lâm Đồng năm học 2014-2015

Lời giải

Dễ thấy $2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\ge\dfrac{18}{a+b+c}=6$. Do đó ta được $a^3+b^3+c^3+6\ge 3(ab+bc+ca)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $a^3+1+1\ge 3a;\ b^3+1+1\ge 3b;\ c^3+1+1\ge 3c$

Ta quy bài toán về chứng minh $3(a+b+c)\ge 3(ab+bc+ca)$

Hay $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$, đây là một đánh giá đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 146. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(b+c)}{a^2+(b+c)^2}+\frac{b(c+a)}{b^2+(c+a)^2}+\frac{c(a+b)}{c^2+(a+b)^2}\le\frac{6}{5}$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Thái Bình năm học 2014-2015

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$a^2+(b+c)^2=\left[a^2+\frac{(b+c)^2}{4}\right]+\frac{3}{4}(b+c)^2\ge a(b+c)+\frac{3}{4}(b+c)^2=\frac{(b+c)(4a+3b+3c)}{4}$$

Suy ra ta được $\dfrac{a(b+c)}{a^2+(b+c)^2}\le\dfrac{4a(b+c)}{(4a+3b+3c)(b+c)}=\dfrac{4a}{4a+3b+3c}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{4a}{4a+3b+3c}=\frac{a}{25}.\frac{(9+1)^2}{4a+3b+3c}\le\frac{a}{25}\left(\frac{9^2}{3(a+b+c)}+\frac{1}{a}\right).$$

Suy ra ta được $\dfrac{a(b+c)}{a^2+(b+c)}\le\dfrac{27a}{25(a+b+c)}+\dfrac{1}{25}$

Áp dụng hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{b(c+a)}{b^2+(c+a)^2}\le\frac{27b}{25(a+b+c)}+\frac{1}{25};\ \frac{c(c+a)}{c^2+(c+a)^2}\le\frac{27c}{25(a+b+c)}+\frac{1}{25}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a(b+c)}{(b+c)^2+a^2}+\frac{b(a+c)}{(c+a)^2+b^2}+\frac{c(a+b)}{(a+b)^2+c^2}\le\frac{27(a+b+c)}{25(a+b+c)}+\frac{3}{25}=\frac{6}{5}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Bài 147. Cho a, b, c là các số thực không âm sao cho $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+9bc+4(b-c)^2}+\frac{b}{1+9ca+4(c-a)^2}+\frac{c}{1+9ab+4(a-b)^2}\ge\frac{1}{2}$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Thành Phố hải Phòngnăm học 2014-2015

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a}{1+9bc+4(b-c)^2}+\frac{b}{1+9ca+4(c-a)^2}+\frac{c}{1+9ab+4(a-b)^2}$$

$$\ge\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)+27abc+4a(b-c)^2+4b(c-a)^2+4c(a-b)^2}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được: $2(a+b+c)^2\ge1+27abc+4a(b-c)^2+4b(c-a)^2+4c(a-b)^2$

Hay $1\ge4ab(a+b)+4bc(b+c)+4ca(c+a)+3abc$

Để ý đến giả thiết ta viết lại được bất đẳng thức trên thành: $(a+b+c)^3\ge4ab(a+b)+4bc(b+c)+4ca(c+a)+3abc$

Hay $\quad a^3+b^3+c^3+3abc\ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$

Biến đổi tương đương ta được $abc\ge(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

Bất đẳng thức trên là một bất đẳng thức đúng và dễ dàng chứng minh được.

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$ hoặc $a=b=\frac{1}{2};\,c=0$ và các hoán vị.

Bài 148. Cho x, y, z là các số thực không dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{xy^3z^3}{(x^2+yz)^2(y^3+z^3)}+\frac{yz^3x^3}{(y^2+zx)^2(z^3+x^3)}+\frac{zx^3y^3}{(z^2+xy)^2(x^3+y^3)}\le\frac{3}{8}$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Trường ĐHKHTN Hà Nội năm học 2014-2015

Lời giải

Dễ dàng chứng minh được $2(y^3+z^3)\ge(y+z)(y^2+z^2)\ge2\sqrt{yz}(y^2+z^2)$

Và lại có $x^2+yz\ge2x\sqrt{yz}$. Nhân theo vế hai kết quả trên ta được: $(x^2+yz)(y^3+z^3)\ge2xyz(y^2+z^2)$

Suy ra ta được

$$\frac{xy^3z^3}{(x^2+yz)^2(y^3+z^3)}\le\frac{xy^3z^3}{2(x^2+yz)xyz(y^2+z^2)}=\frac{y^2z^2}{2(x^2y^2+x^2z^2+y^3z+yz^3)}\le\frac{y^2z^2}{2(x^2y^2+x^2z^2+2y^2z^2)}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{xy^3z^3}{(x^2+yz)^2(y^3+z^3)}+\frac{yz^3x^3}{(y^2+zx)^2(z^3+x^3)}+\frac{zx^3y^3}{(z^2+xy)^2(x^3+y^3)}$$

$$\le\frac{y^2z^2}{2(x^2y^2+x^2z^2+2y^2z^2)}+\frac{x^2z^2}{2(x^2y^2+2x^2z^2+y^2z^2)}+\frac{x^2y^2}{2(2x^2y^2+x^2z^2+2y^2z^2)}$$

Ta cần chỉ ra được: $\frac{y^2z^2}{x^2y^2+x^2z^2+2y^2z^2}+\frac{x^2z^2}{x^2y^2+2x^2z^2+y^2z^2}+\frac{x^2y^2}{2x^2y^2+x^2z^2+2y^2z^2}\le\frac{3}{4}$

Đặt $a=x^2y^2;\, b=y^2z^2;\, c=z^2x^2$. Khi đó bất đẳng thức được viết lại thành $\frac{a}{2a+b+c}+\frac{b}{a+2b+c}+\frac{c}{a+b+2c}\le\frac{3}{4}$

Bất đẳng thức trên tương đương với $\frac{b+c}{2a+b+c}+\frac{a+c}{a+2b+c}+\frac{a+b}{a+b+2c}\ge\frac{3}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{b+c}{2a+b+c}+\frac{a+c}{a+2b+c}+\frac{a+b}{a+b+2c}\ge\frac{\left(2a+2b+2c\right)^2}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)+6\left(ab+bc+ca\right)}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$2\left(2a+2b+2c\right)^2\ge3\left[2\left(a^2+b^2+c^2\right)+6\left(ab+bc+ca\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow4\left(a+b+c\right)^2\ge3\left(a+b+c\right)^2+3\left(ab+ba+ca\right)\Leftrightarrow\left(a+b+c\right)^2\ge3\left(ab+bc+ca\right)$$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$

Bài 149. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{\frac{x^2y}{4x+5y}}+\sqrt{\frac{y^2z}{4y+5z}}+\sqrt{\frac{z^2x}{4z+5x}}$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Trường ĐHKHTN Hà Nội năm học 2014-2015

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được $P^2\le\left(xy+yz+zx\right)\left(\frac{x}{4x+5y}+\frac{y}{4y+5z}+\frac{z}{4z+5x}\right)$

Đặt $Q=\frac{x}{4x+5y}+\frac{y}{4y+5z}+\frac{z}{4z+5x}=\frac{1}{4}\left[3-\left(\frac{5y}{4x+5y}+\frac{5z}{4y+5z}+\frac{5x}{4z+5x}\right)\right]$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{5y}{4x+5y}+\frac{5z}{4y+5z}+\frac{5x}{4z+5x}\ge\frac{5\left(x+y+z\right)^2}{4\left(xy+yz+zx\right)+5\left(x^2+y^2+z^2\right)}$$

$$=\frac{5}{5\left(x+y+z\right)^2-6\left(xy+yz+zx\right)}=\frac{5}{5-6\left(xy+yz+zx\right)}$$

Do đó ta được $Q\le\frac{1}{4}\left[3-\frac{5}{5-6\left(xy+yz+zx\right)}\right]$. Khi đó ta suy ra $P^2\le\frac{1}{4}\left(xy+yz+zx\right)\left[3-\frac{5}{5-6\left(xy+yz+zx\right)}\right]$

Đặt $a=xy+yz+zx\Rightarrow0<a\le\frac{1}{3}$. Khi đó ta được $P^2\le\frac{1}{4}a\left(3-\frac{5}{5-6a}\right)=\frac{a\left(5-9a\right)}{2\left(5-6a\right)}$

Ta sẽ chứng minh $\frac{a\left(5-9a\right)}{2\left(5-6a\right)}\le\frac{1}{9}$.

Thật vậy, bất đẳng thức này tương đương với $\left(1-3a\right)\left(10-27a\right)\ge0$, đây là một đánh giá đúng do $0<a\le\frac{1}{3}$.

Do đó bất đẳng thức trên được chứng minh.

Suy ra $P\le\frac{1}{3}$ hay giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Bài 150. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{1+9b^2ca}+\frac{b^3}{1+9c^2ab}+\frac{c^3}{1+9a^2bc}\ge\frac{\left(a+b+c\right)^3}{18}$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Thừa Thiên Huế năm học 2014-2015

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^3}{1+9b^2ca}+\frac{b^3}{1+9c^2ab}+\frac{c^3}{1+9a^2bc}\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a+b+c+9abc\left(ab+bc+ca\right)}$$

Dễ thấy $a^2+b^2+c^2\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{3}$ và để ý đến giả thiết $ab+bc+ca=1$ ta được

$$\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a+b+c+9abc\left(ab+bc+ca\right)}\ge\frac{\left(a+b+c\right)^4}{9\left(a+b+c+9abc\right)}$$

Do đó ta có $\frac{a^3}{1+9b^2ca}+\frac{b^3}{1+9c^2ab}+\frac{c^3}{1+9a^2bc}\ge\frac{\left(a+b+c\right)^4}{9\left(a+b+c+9abc\right)}$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $\frac{\left(a+b+c\right)^4}{9\left(a+b+c+9abc\right)}\ge\frac{\left(a+b+c\right)^3}{18}$

Hay $a+b+c\ge 9abc$. Để ý đến giả thiết $ab+bc+ca=1$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$a+b+c=\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ac\right)\ge 3\sqrt[3]{abc}.3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=9abc$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 151. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{5a^2+4bc}+\sqrt{5b^2+4ca}+\sqrt{5c^2+4ab}$$
$$\ge\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}+2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Quảng Nam năm học 2014-2015

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt{5a^2+4bc}-2\sqrt{bc}+\sqrt{5b^2+4ca}-2\sqrt{ca}+\sqrt{5c^2+4ab}-2\sqrt{ab}\ge\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

Hay $\frac{5a^2}{\sqrt{5a^2+4bc}+2\sqrt{bc}}+\frac{5b^2}{\sqrt{5b^2+4ca}+2\sqrt{ca}}+\frac{5c^2}{\sqrt{5c^2+4ab}+2\sqrt{ab}}\ge\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}$

Hay $\frac{1}{\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}}\left(\frac{5a^2}{\sqrt{5a^2+4bc}+2\sqrt{bc}}+\frac{5b^2}{\sqrt{5b^2+4ca}+2\sqrt{ca}}+\frac{5c^2}{\sqrt{5c^2+4ab}+2\sqrt{ab}}\right)\ge 1$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$2\sqrt{5a^2+4bc}\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}\le 8a^2+3b^2+3c^2+4bc$

$4\sqrt{bc}\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}=\frac{4.3\sqrt{bc}.\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}}{3}\le\frac{2\left(3a^2+3b^2+3c^2+9bc\right)}{3}=2\left(a^2+b^2+c^2+3bc\right)$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được

$$2\left(\sqrt{5a^2+4bc}+2\sqrt{bc}\right)\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}\le 10a^2+5b^2+5c^2+10bc$$

Suy ra $\frac{10a^2}{2\left(\sqrt{5a^2+4bc}+2\sqrt{bc}\right)\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}}\ge\frac{10a^2}{10a^2+5b^2+5c^2+10bc}$

Lại có $10bc\le 5b^2+5c^2$ nên ta được: $\frac{10a^2}{10a^2+5b^2+5c^2+10bc}\ge\frac{10a^2}{10a^2+10b^2+10c^2}=\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$

Do đó ta được $\dfrac{10a^2}{2\left(\sqrt{5a^2+4bc}+2\sqrt{bc}\right)\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}} \ge \dfrac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{1}{\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}}\left(\frac{5a^2}{\sqrt{5a^2+4bc}+2\sqrt{bc}}+\frac{5b^2}{\sqrt{5b^2+4ca}+2\sqrt{ca}}+\frac{5c^2}{\sqrt{5c^2+4ab}+2\sqrt{ab}}\right)$$

$$\ge \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2}{b^2+a^2+c^2}+\frac{c^2}{c^2+b^2+a^2}=1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 152. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{2a+3b}{a+2b+c}+\frac{4b}{a+b+2c}-\frac{8c}{a+b+3c}$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Quảng Nam năm học 2014-2015

Lời giải

Đặt $x=a+2b+c;\ y=a+b+2c;\ z=a+b+3c$. Khi đó ta được $a=5y-x-3z;\ b=x+z-2y;\ c=z-x$

Biểu thức P được viết lại thành $P=\dfrac{4x}{y}+\dfrac{2y}{x}+\dfrac{8y}{z}+\dfrac{4z}{y}-17$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $P=\dfrac{4x}{y}+\dfrac{2y}{x}+\dfrac{8y}{z}+\dfrac{4z}{y}-17\ge 2\sqrt{\dfrac{4x}{y}.\dfrac{2y}{x}}+2\sqrt{\dfrac{8y}{z}.\dfrac{4z}{y}}-17=12\sqrt{2}-17$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $12\sqrt{2}-17$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\dfrac{4x}{y}=\dfrac{2y}{x}\\ \dfrac{8y}{z}=\dfrac{4z}{y}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2=y^2\\ 2y^2=z^2\end{cases}\Leftrightarrow z=\sqrt{2}y=2x$

Bài 153. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $2\sqrt{xy}+\sqrt{xz}=1$. Xh]ngs minh rằng:

$$\frac{3yz}{x}+\frac{4zx}{y}+\frac{5xy}{z}\ge 4$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Tuyên Quang năm học 2014-2015

Lời giải

Biến đổi vế trái của bất đẳng thức như sau: $\dfrac{3yz}{x}+\dfrac{4zx}{y}+\dfrac{5xy}{z}=\dfrac{yz}{x}+\dfrac{zx}{y}+\dfrac{2yz}{x}+\dfrac{2xy}{z}+\dfrac{3zx}{y}+\dfrac{3xy}{z}$

Khi đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được: $\dfrac{yz}{x}+\dfrac{zx}{y}\ge 2z;\ \dfrac{2yz}{x}+\dfrac{2xy}{z}\ge 4y;\ \dfrac{3zx}{y}+\dfrac{3xy}{z}\ge 6x$

Do đó ta được $\dfrac{3yz}{x}+\dfrac{4zx}{y}+\dfrac{5xy}{z}\ge 6x+4y+2z$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$6x+4y+2z=4\left(x+y\right)+2\left(x+z\right)\ge 8\sqrt{xy}+4\sqrt{xz}=4\left(2\sqrt{xy}+\sqrt{xz}\right)=4$$

Do đó ta suy ra $\dfrac{3yz}{x}+\dfrac{4zx}{y}+\dfrac{5xy}{z}\ge 4$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{1}{3}$

Bài 154. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện:

$$3\left(x^4+y^4+z^4\right)-7\left(x^2+y^2+z^2\right)+12=0.$$

Tìm giá trị nỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{x^2}{y+2z}+\frac{y^2}{z+2x}+\frac{z^2}{x+2y}$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Yên Bái năm học 2014-2015

Lời giải

Trước hết ta đơn giản hóa giả thiết của bài toán.

Áp dụng một đánh giá quen thuộc ta có $x^4+y^4+z^4\ge 3\left(x^2+y^2+z^2\right)^2$

Khi đó ta được $3\left(x^2+y^2+z^2\right)^2-7\left(x^2+y^2+z^2\right)+12\le 0$ Hay $x^2+y^2+z^2\ge 3$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$P=\frac{x^2}{y+2z}+\frac{y^2}{z+2x}+\frac{z^2}{x+2y}\ge\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{x^2y+y^2z+z^2x+2\left(xy^2+zx^2+yz^2\right)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$x^2y+y^2z+z^2x\le\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)}$$

$$\le\sqrt{\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}{3}}=\left(x^2+y^2+z^2\right)\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$$

Hoàn toàn tương tự ta được: $2\left(xy^2+yz^2+zx^2\right)\ge 2\left(x^2+y^2+z^2\right)\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$

Do đó ta được $P\ge\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{3\left(x^2+y^2+z^2\right)\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}}=\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}=1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 155. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}+\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}\ge\frac{3}{5}$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Đăk Lăk năm học 2014-2015

Lời giải

Để ý là $\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}=\frac{(a+b)^2+c^2-2c(a+b)}{(a+b)^2+c^2}=1-\frac{2c(a+b)}{(a+b)^2+c^2}$

Áp dụng tương tự ta quy bài toán về chứng minh: $\frac{a(b+c)}{a^2+(b+c)^2}+\frac{b(c+a)}{b^2+(c+a)^2}+\frac{c(a+b)}{c^2+(a+b)^2}\le\frac{6}{5}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$a^2+(b+c)^2=\left[a^2+\frac{(b+c)^2}{4}\right]+\frac{3}{4}(b+c)^2\ge a(b+c)+\frac{3}{4}(b+c)^2=\frac{(b+c)(4a+3b+3c)}{4}$$

Suy ra ta được $\frac{a(b+c)}{a^2+(b+c)^2}\le\frac{4a(b+c)}{(4a+3b+3c)(b+c)}=\frac{4a}{4a+3b+3c}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{4a}{4a+3b+3c}=\frac{a}{25}.\frac{(9+1)^2}{4a+3b+3c}\le\frac{a}{25}\left(\frac{9^2}{3(a+b+c)}+\frac{1}{a}\right).$$

Suy ra ta được $\quad \dfrac{a(b+c)}{a^2+(b+c)}\le\dfrac{27a}{25(a+b+c)}+\dfrac{1}{25}$

Áp dụng hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{b(c+a)}{b^2+(c+a)^2}\le\frac{27b}{25(a+b+c)}+\frac{1}{25};\ \frac{c(c+a)}{c^2+(c+a)^2}\le\frac{27c}{25(a+b+c)}+\frac{1}{25}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a(b+c)}{(b+c)^2+a^2}+\frac{b(a+c)}{(c+a)^2+b^2}+\frac{c(a+b)}{(a+b)^2+c^2}\le\frac{27(a+b+c)}{25(a+b+c)}+\frac{3}{25}=\frac{6}{5}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Bài 156. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy+yz+zx=2xyz$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{x}{2y^2z^2+xyz}}+\sqrt{\frac{y}{2z^2x^2+xyz}}+\sqrt{\frac{z}{2x^2y^2+xyz}}\le 1$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Gia Lai năm học 2014-2015

Lời giải

Giả thiết của bài toán được viết lại thành $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2$. Đặt $x=\dfrac{1}{a};\ y=\dfrac{1}{b};\ z=\dfrac{1}{c}$ thì ta được $a+b+c=2$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành: $\dfrac{bc}{\sqrt{2a+bc}}+\dfrac{ca}{\sqrt{2b+ca}}+\dfrac{ab}{\sqrt{2c+ab}}\le 1$

Chú ý đến giả thiết $a+b+c=2$, ta có $\dfrac{bc}{\sqrt{2a+bc}}=\dfrac{bc}{\sqrt{a(a+b+c)+bc}}=\dfrac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\le\dfrac{bc}{2}\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{c+a}\right)$

Hoàn toàn tương tự ta được: $\dfrac{ca}{\sqrt{2b+ca}}\le\dfrac{ca}{2}\left(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{a+b}\right);\dfrac{ab}{\sqrt{2c+ab}}\le\dfrac{ab}{2}\left(\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{b+c}\right)$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{bc}{\sqrt{2a+bc}}+\frac{ca}{\sqrt{2b+ca}}+\frac{ab}{\sqrt{2c+ab}}\le\frac{bc}{2}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+a}\right)+\frac{ca}{2}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}\right)+\frac{ab}{2}\left(\frac{1}{c+a}+\frac{1}{b+c}\right)=\frac{a+b+c}{2}=1$$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{3}{2}$

Bài 157. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x+2}{x^3(y+z)}+\frac{y+2}{y^3(z+x)}+\frac{z+2}{z^3(x+y)}$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Cần Thơ năm học 2015-2016

Lời giải

Đặt $a=\dfrac{1}{x};\ b=\dfrac{1}{y};\ z=\dfrac{1}{c}$, suy ra $abc=1$. Biểu thức P được viết lại thành

$$P=\frac{a^2bc(1+2a)}{b+c}+\frac{b^2ca(1+2b)}{c+a}+\frac{c^2ab(1+2c)}{a+b}$$

Hay $$P=\frac{a\left(1+2a\right)}{b+c}+\frac{b\left(1+2b\right)}{c+a}+\frac{c\left(1+2c\right)}{a+b}$$

Ta viết biểu thức P thành $P=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{2a^2}{b+c}+\frac{2b^2}{c+a}+\frac{2c^2}{a+b}$

Dễ dàng chứng minh được $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$

Mặt khác theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{2\left(a+b+c\right)}=\frac{a+b+c}{2}\ge\frac{3\sqrt[3]{abc}}{2}=\frac{3}{2}$$

DO đó ta được $P\ge\frac{3}{2}+2.\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{9}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1\Leftrightarrow x=y=z=1$

Bài 158. Cho a, b, c là các số thực dương bất kỳ. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3\ge\frac{ab+bc+ca}{3}\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Kiên Giang năm học 2015-2016

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^6\ge\left(\frac{ab+bc+ca}{3}\right)^2.\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$

Hay $$\frac{\left(a+b+c\right)^6}{27}\ge\left(ab+bc+ca\right)^2\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\left(ab+bc+ca\right)^2\left(a^2+b^2+c^2\right)=\left(ab+bc+ca\right)\left(ab+bc+ca\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\le\left[\frac{\left(ab+bc+ca\right)+\left(ab+bc+ca\right)+\left(a^2+b^2+c^2\right)}{3}\right]^3=\frac{\left(a+b+c\right)^6}{27}$$ Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 159. Cho a, b, c là các số thực không âm trong đó không có hai số nào cùng bằng 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2-ab+b^2}+\frac{1}{b^2-bc+c^2}+\frac{1}{c^2-ca+a^2}\ge\frac{3}{ab+bc+ca}$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Thanh Hóa năm học 2015-2016

Lời giải

Vì vai trò của các biến như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử c là số nhỏ nhất trong ba số a, b, c. Khi đó ta được

$$b^2-bc+c^2=b^2-c\left(b-c\right)\le b^2;a^2-ac+c^2=a^2-c\left(a-c\right)\le a^2;ab+bc+ca=ab+c\left(a+b\right)\ge ab$$

Từ đó ta có: $\frac{1}{a^2-ab+b^2}+\frac{1}{b^2-bc+c^2}+\frac{1}{c^2-ca+a^2}\ge\frac{3}{a^2-ab+b^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$

Và có $$\frac{3}{ab+bc+ca}\le\frac{1}{ab}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2-ab+b^2}\ge\frac{3}{ab}$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{1}{a^2}-\frac{1}{ab}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{ab}+\frac{1}{a^2-ab+b^2}-\frac{1}{ab}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{ab-a^2}{a^3b}+\frac{ab-b^2}{ab^3}+\frac{2ab-a^2-b^2}{\left(a^2-ab+b^2\right)ab}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{\left(a-b\right)^4}{a^2b^2\left(a^2-ab+b^2\right)}\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 160. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{4}{a+b}+\frac{4}{b+c}+\frac{4}{c+a}\le \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+9$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Thành Phố Hà Nội năm học 2015-2016

Lời giải

Cách 1: Để ý đến giả thiết lại viết lại được bất đẳng thức trên thành

$$\frac{4\left(a+b+c\right)}{a+b}+\frac{4\left(a+b+c\right)}{b+c}+\frac{4\left(a+b+c\right)}{c+a}\le \frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}+9$$

$$\Leftrightarrow \frac{4c}{a+b}+\frac{4a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+12\le \frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}+12 \Leftrightarrow \frac{4c}{a+b}+\frac{4a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}\le \frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge \frac{4}{x+y}$, ta được

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}=a\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge \frac{4a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{4c}{a+b}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Cách 2: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\frac{4}{1-c}+\frac{4}{1-a}+\frac{4}{1-b}\le \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+9$

Ta sẽ chứng minh $\frac{4}{1-c}-\frac{1}{c}\le 18c-3$. Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$5c-1\le c\left(1-c\right)\left(18c-3\right)\Leftrightarrow 5c-1\le 21c^2-3c-18c^3\Leftrightarrow \left(3c-1\right)^2\left(2c-1\right)\le 0$$

Do a, b, c là ba cạnh của một tam giác và $a+b+c=1$ nên $2c-1=2c-\left(a+b+c\right)=c-\left(a+b\right)<0$

Do đó bất đẳng thức trên đúng. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 161. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a+b+1}{a^3+b^3+1}+\frac{b+c+1}{b^3+c^3+1}+\frac{c+a+1}{c^3+a^3+1}$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Trường Đại học Vinh năm học 2015-2016

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho giả thiết ta được $a+b+c=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge 3$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức cho giả thiết ta được

$$a+b+c=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge \frac{\left(a+b+c\right)^2}{ab+bc+ca}\Rightarrow ab+bc+ca\ge a+b+c$$

Áp dụng bất đẳng thức Bnhiacopxki ta có: $\left(a^3+b^3+1\right)\left(a+b+1\right)\ge \left(a^2+b^2+1\right)^2\ge \frac{\left(a+b+1\right)^2\left(a^2+b^2+1\right)}{3}$

Do đó ta được $\frac{a+b+1}{a^3+b^3+1}\le \frac{3}{a^2+b^2+1}$

Hoàn toàn tương tự ta thu được $P\le \frac{3}{a^2+b^2+1}+\frac{3}{b^2+c^2+1}+\frac{3}{c^2+a^2+1}$

Ta sẽ chứng minh $\frac{1}{a^2+b^2+1}+\frac{1}{b^2+c^2+1}+\frac{1}{c^2+a^2+1}\le 1$

Thật vậy, bất đẳng thức trên được viết lại thành: $\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+1}+\frac{b^2+c^2}{b^2+c^2+1}+\frac{c^2+a^2}{c^2+a^2+1}\ge 2$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+1}+\frac{b^2+c^2}{b^2+c^2+1}+\frac{c^2+a^2}{c^2+a^2+1}\ge \frac{\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\right)^2}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)+3}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\right)^2\ge 4\left(a^2+b^2+c^2\right)+6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}+\sqrt{\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)}+\sqrt{\left(c^2+a^2\right)\left(c^2+a^2\right)}\ge a^2+b^2+c^2+3$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được $\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}\ge b^2+ac$

Áp dụng tương tự ta được

$$\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}+\sqrt{\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)}+\sqrt{\left(c^2+a^2\right)\left(c^2+a^2\right)}\ge a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$$

Mà từ giả thiết ta được $ab+bc+ca\ge 3$. Do vậy ta được

$$\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}+\sqrt{\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)}+\sqrt{\left(c^2+a^2\right)\left(c^2+a^2\right)}\ge a^2+b^2+c^2+3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.
Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là 3. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 162. Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$\left(a+bc\right)^2+\left(b+ca\right)^2+\left(c+ab\right)^2\ge\sqrt{2}\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Đăk Lăk năm học 2015-2016

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được: $\left(a+bc\right)^2+\left(b+ca\right)^2\ge\frac{\left(a+bc+b+ca\right)^2}{2}=\frac{\left(a+b\right)^2\left(c+1\right)^2}{2}$

Khi đó ta được $\left(a+bc\right)^2+\left(b+ca\right)^2+\left(c+ab\right)^2\ge\frac{\left(a+b\right)^2\left(c+1\right)^2}{2}+\left(c+ab\right)^2$

Cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{\left(a+b\right)^2\left(c+1\right)^2}{2}+\left(c+ab\right)^2\ge 2\frac{\left(a+b\right)\left(c+1\right)\left(c+ab\right)}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\left(a+b\right)\left(c+1\right)\left(c+ab\right)$$

Bài toán quy về chứng minh

$$\sqrt{2}\left(a+b\right)\left(c+1\right)\left(c+ab\right)\ge\sqrt{2}\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(c+1\right)\left(c+ab\right)\ge\left(b+c\right)\left(c+a\right)\Leftrightarrow c+abc=bc+ca\Leftrightarrow c\left(a-1\right)\left(b-1\right)\ge 0$$

Theo nguyên lí Dirrichlet thì trong ba số a, b, c luôn tìm được hai số cùng phía với 1. Vì vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử hai số đó là a và b. Khi đó bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 163. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^3-2x^2+x}{\sqrt{x}\left(y+z\right)}+\frac{y^3-2y^2+y}{\sqrt{y}\left(z+x\right)}+\frac{z^3-2z^2+z}{\sqrt{z}\left(x+y\right)}\le\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Kiên Giang năm học 2015-2016

Lời giải

Áp dụng giả thiết $x+y+z=1$ ta được $\dfrac{x^3-2x^2+x}{\sqrt{x}(y+z)}=\dfrac{x(1-x)^2}{\sqrt{x}(1-x)}=\sqrt{x}(1-x)=\sqrt{x}-x\sqrt{x}$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{x^3-2x^2+x}{\sqrt{x}(y+z)}+\frac{y^3-2y^2+y}{\sqrt{y}(z+x)}+\frac{z^3-2z^2+z}{\sqrt{z}(x+y)}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\left(x\sqrt{x}+x\sqrt{y}+x\sqrt{z}\right)$$

Ta cần chứng minh $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\left(x\sqrt{x}+x\sqrt{y}+x\sqrt{z}\right)\le\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Từ $x+y+z=1\Rightarrow\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le\sqrt{3}$. Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\sqrt{3}\left(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+z\sqrt{z}\right)\ge\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\left(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+z\sqrt{z}\right)\ge(x+y+z)^2$$

Do đó ta được $x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+z\sqrt{z}\ge\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Từ đó ta có : $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\left(x\sqrt{x}+x\sqrt{y}+x\sqrt{z}\right)\le\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{1}{3}$.

Bài 164. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\le a+b+c$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Thừa Thiên Huế năm học 2015-2016

Lời giải

Sử dụng kỹ thuật thêm bớt ta có bất đẳng thức tương đương với

$$2(a+b+c)\ge2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\Leftrightarrow\left(a^4+b^4+c^4\right)+2(a+b+c)\ge\left(a^4+b^4+c^4\right)+2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(a^4+b^4+c^4\right)+2(a+b+c)\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge9$$

Vậy ta cần chứng minh $a^4+b^4+c^4+2(a+b+c)\ge9$

Hay là $\left(a^4+a+a\right)+\left(b^4+b+b\right)+\left(c^4+c+c\right)\ge9$

Điều này hiển nhiên đúng vì theo bất đẳng thức Cauchy bộ ba số ta có

$$a^4+a+a\ge3\sqrt[3]{a^4.a.a}=3a^2;b^4+b+b\ge3\sqrt[3]{b^4.b.b}=3b^2;c^4+c+c\ge3\sqrt[3]{c^4.c.c}=3c^2$$

Bài toán được giải quyết. Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 165. Cho a, b, c là các số thực dương thả mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$a^4+b^4+c^4+a+b+c+\frac{2a}{b^2+c^2}+\frac{2b}{a^2+c^2}+\frac{2c}{a^2+b^2}\ge9$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Thái Nguyên năm học 2015-2016

Lời giải

Dễ dàng chứng minh được $a^4+b^4\ge ab\left(a^2+b^2\right)=\dfrac{a^2+b^2}{c}$

Áp dụng hoàn toàn tương tự ta được: $2\left(a^4+b^4+c^4\right)\ge\dfrac{a^2+b^2}{c}+\dfrac{b^2+c^2}{a}+\dfrac{c^2+a^2}{b}$

Bài toán quy về chứng minh: $\dfrac{a^2+b^2}{c}+\dfrac{b^2+c^2}{a}+\dfrac{c^2+a^2}{b}+2(a+b+c)+\dfrac{4a}{b^2+c^2}+\dfrac{4b}{a^2+c^2}+\dfrac{4c}{a^2+b^2}\ge18$

Áp dụng bất đẳng thức Caychy ta được

$$\frac{a^2+b^2}{c}+\frac{4c}{a^2+b^2}\ge4;\ \frac{b^2+c^2}{a}+\frac{4a}{b^2+c^2}\ge4;\ \frac{c^2+a^2}{b}+\frac{4b}{c^2+a^2}\ge4$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^2+b^2}{c}+\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}+\frac{4a}{b^2+c^2}+\frac{4b}{a^2+c^2}+\frac{4c}{a^2+b^2}\ge 12$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $a+b+c\ge 3$, đánh giá cuối cùng đúng theo bất đẳng thức Cauchy. Vậy bài toán được chứng minh xong

Bài 166. Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn M in $\{a+b;\ b+c;\ c+a\}>0$ và

$$a^2+b^2+c^2=2(ab+bc+ca).$$

Chứng minh rằng: $$\sqrt{\frac{ab}{a^2+b^2}}+\sqrt{\frac{bc}{b^2+c^2}}+\sqrt{\frac{ca}{c^2+a^2}}\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta phân tích các giả thiết của bài toán, từ M in $\{a+b;\ b+c;\ c+a\}>0$ ta suy ra được trong các tổng trên không có tổng nào bằng không và từ giả thiết thứ hai ta thu được trong các biến a, b, c chỉ có có thể có một biến bằng 0. Do đó ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b;\ c=0$ và các hoán vị của nó. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy không thể đánh giá trực tiếp tử hoặc mẫu của các biểu thức. Do đó ta hướng đến biến đổi các biểu thức trước. Chú ý phép biến đổi $\sqrt{\frac{ab}{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{ab(a^2+b^2)}}{a^2+b^2}$. Để đảm bảo dấu đẳng thức xảy ra ta nhân với $\sqrt{2}$. Khi đó bất đẳng thức được viết lại thành: $\frac{\sqrt{2ab(a^2+b^2)}}{a^2+b^2}+\frac{\sqrt{2bc(b^2+c^2)}}{b^2+c^2}+\frac{\sqrt{2ca(c^2+a^2)}}{c^2+a^2}\ge 1$

Đến đây áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được: $\frac{\sqrt{2ab(a^2+b^2)}}{a^2+b^2}\ge\frac{\sqrt{2ab.2ab}}{a^2+b^2}=\frac{2ab}{a^2+b^2}$

Áp dụng tương tự ta được: $\frac{\sqrt{2bc(b^2+c^2)}}{b^2+c^2}\ge\frac{2bc}{b^2+c^2};\ \frac{\sqrt{2ca(c^2+a^2)}}{c^2+a^2}\ge\frac{2ca}{c^2+a^2}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{\sqrt{2ab(a^2+b^2)}}{a^2+b^2}+\frac{\sqrt{2bc(b^2+c^2)}}{b^2+c^2}+\frac{\sqrt{2ca(c^2+a^2)}}{c^2+a^2}\ge\frac{2ab}{a^2+b^2}+\frac{2bc}{b^2+c^2}+\frac{2ca}{c^2+a^2}$$

Khi đó phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được: $\frac{2ab}{a^2+b^2}+\frac{2bc}{b^2+c^2}+\frac{2ca}{c^2+a^2}\ge 1$

Để ý là $$\frac{2ab}{a^2+b^2}+\frac{2bc}{b^2+c^2}+\frac{2ca}{c^2+a^2}+3=\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}+\frac{(b+c)^2}{b^2+c^2}+\frac{(c+a)^2}{c^2+a^2}$$

Lúc này áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}+\frac{(b+c)^2}{b^2+c^2}+\frac{(c+a)^2}{c^2+a^2}\ge\frac{(2a+2b+2c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}=\frac{2(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)}{2(a^2+b^2+c^2)}=\frac{8(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)}=4$$

Do đó ta có $$\frac{2ab}{a^2+b^2}+\frac{2bc}{b^2+c^2}+\frac{2ca}{c^2+a^2}\ge 1$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b;\ c=0$ và các hoán vị.

Bài 167. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{ab}{a+b+2c}}+\sqrt{\frac{bc}{b+c+2a}}+\sqrt{\frac{ca}{c+a+2b}}\le\frac{1}{2}$$

Phân tích và lời giải

Quan sát bất đẳng thức trên ta thấy được một số ý tưởng tiếp cận như sử dụng các bất đẳng thức Cauchy, Bunhiacopxki để khử các căn bậc hai, đổi biến để đơn giản hóa giả thiết,…

Cách 1: Trước hết với ý tưởng khử các căn bậc hai, ta chú ý đến đánh giá bằng bất đẳng thức Bunhiacopxki như sau: $4(a+b+2c)=(1+1+2)(a+b+2c)\ge\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+2\sqrt{c}\right)^2$

Khi đó kết hợp với bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\sqrt{\frac{ab}{a+b+2c}}=\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{4(a+b+2c)}}\le\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+2\sqrt{c}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}+\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}\right)$$

Áp dụng tương tự ta có: $\sqrt{\frac{bc}{b+c+2a}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}\right);\sqrt{\frac{ca}{c+a+2b}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{ca}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{ca}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}\right)$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $\sqrt{\frac{ab}{a+b+2c}}+\sqrt{\frac{bc}{b+c+2a}}+\sqrt{\frac{ca}{c+a+2b}}\le\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)=\frac{1}{2}$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{9}$.

Cách 2: Đặt $x=\sqrt{a};\ y=\sqrt{b};\ z=\sqrt{c}$. Từ giả thiết ta suy ra $x+y+z=1$.

Khi đó bất đẳng thức được viết lại thành: $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+2z^2}}+\frac{yz}{\sqrt{y^2+z^2+2x^2}}+\frac{zx}{\sqrt{z^2+x^2+2y^2}}\le\frac{1}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được: $4\left(x^2+y^2+2z^2\right)=(1+1+2)\left(x^2+y^2+2z^2\right)\ge(x+y+2z)^2$

Do đó ta có: $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+2z^2}}=\frac{2xy}{\sqrt{4\left(x^2+y^2+2z^2\right)}}\le\frac{2xy}{x+y+2z}\le\frac{1}{2}\left(\frac{xy}{x+z}+\frac{xy}{y+z}\right)$

Áp dụng tương tự ta được: $\frac{yz}{\sqrt{y^2+z^2+2x^2}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{yz}{x+y}+\frac{yz}{x+z}\right);\ \frac{zx}{\sqrt{z^2+x^2+2y^2}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{zx}{x+y}+\frac{zx}{y+z}\right)$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+2z^2}}+\frac{yz}{\sqrt{y^2+z^2+2x^2}}+\frac{zx}{\sqrt{z^2+x^2+2y^2}}\le\frac{x+y+z}{2}=\frac{1}{2}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong.

Bài 168. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}+\frac{a+b}{c^2}\ge 2$$

Phân tích và lời giải

Từ giả thiết của bài toán thì suy nghĩ rất tự nhiên là đổi biến $x=\frac{1}{a};\ y=\frac{1}{b};\ z=\frac{1}{c}$, khi đó giả thiết trở thành $x+y+z=1$ và bất đẳng thức được viết lại là $\frac{x^2(y+z)}{yz}+\frac{y^2(z+x)}{zx}+\frac{z^2(x+y)}{xy}\ge 2$

Quan sát bất đẳng thức trên ta có các cách xử lý như sau

Cách 1: Chú ý đến dụng bất đẳng thức Cauchy ta được các đánh giá: $xy\le\frac{(x+y)^2}{4};\ yz\le\frac{(y+z)^2}{4};\ zx\le\frac{(z+x)^2}{4}$

Khi đó ta được bất đẳng thức sau: $\frac{x^2(y+z)}{yz}+\frac{y^2(z+x)}{zx}+\frac{z^2(x+y)}{xy}\ge\frac{4x^2}{(y+z)}+\frac{4y^2}{(z+x)}+\frac{4z^2}{(x+y)}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng cộng mẫu ta có

$$\frac{4x^2}{y+z}+\frac{4y^2}{z+x}+\frac{4z^2}{x+y}\ge\frac{4\left(x+y+z\right)^2}{2\left(x+y+z\right)}=2\left(x+y+z\right)=2$$

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=3$.

Cách 2: Biến đổi bất đẳng thức thành: $x^2\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y^2\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+z^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\ge\frac{1}{2}$

Theo một đánh giá quen thuộc ta có: $\begin{cases} x^2\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{x^2}{y+z}\left(y+z\right)\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge\frac{4x^2}{y+z} \\ y^2\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)=\frac{y^2}{z+x}\left(z+x\right)\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)\ge\frac{4y^2}{z+x} \\ z^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{z^2}{x+y}\left(x+y\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\ge\frac{4z^2}{x+y} \end{cases}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$x^2\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y^2\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+z^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\ge\frac{4x^2}{y+z}+\frac{4y^2}{z+x}+\frac{4z^2}{x+y}$$

Đến đây đánh giả tương tự như cách 1 hoặc có thể áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki như sau đây

$$\frac{4x^2}{y+z}+\frac{4y^2}{z+x}+\frac{4z^2}{x+y}=2\left[\left(x+y\right)+\left(y+z\right)+\left(z+x\right)\right]\left[\frac{4x^2}{y+z}+\frac{4y^2}{z+x}+\frac{4z^2}{x+y}\right]$$

$$\ge2\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}\sqrt{y+z}+\frac{y}{\sqrt{z+x}}\sqrt{z+x}+\frac{z}{\sqrt{x+y}}\sqrt{x+y}\right)^2=2\left(x+y+z\right)^2=2$$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 169. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\left(1+\frac{2a}{b}\right)^2+\left(1+\frac{2b}{c}\right)^2+\left(1+\frac{2c}{a}\right)^2\ge\frac{9\left(a+b+c\right)^2}{ab+bc+ca}$$

Phân tích và lời giải

Để ý đến các đại lượng vế trái của bất đẳng thức ta nhận thấy các ý tưởng tiếp cận bài toán như khai triển rồi đánh giá bằng bất đẳng thức Cauchy hoặc sử dụng đánh giá quen thuộc

$$3\left(x^2+y^2+z^2\right)\ge\left(x+y+z\right)^2.$$

Ta đi phân tích các ý tưởng đó theo các cách sau

Cách 1: Triển khai vế trái ta được: $\left(1+\frac{2a}{b}\right)^2+\left(1+\frac{2b}{c}\right)^2+\left(1+\frac{2c}{a}\right)^2=3+4\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+4\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)+\left(1+\frac{b^2}{c^2}\right)+\left(1+\frac{c^2}{a^2}\right)\ge2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\Rightarrow3\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)\ge\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2\ge3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$$

Từ đó ta được: $3+4\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+4\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)\ge9\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$

Để ý là theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{bc}+\frac{c^2}{ca}\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{ab+bc+ca}$

Suy ra $$\left(1+\frac{2a}{b}\right)^2+\left(1+\frac{2b}{c}\right)^2+\left(1+\frac{2c}{a}\right)^2\ge\frac{9(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức $3\left(x^2+y^2+z^2\right)\ge(x+y+z)^2$ ta được

$$\left(1+\frac{2a}{b}\right)^2+\left(1+\frac{2b}{c}\right)^2+\left(1+\frac{2c}{a}\right)^2\ge\frac{1}{3}\left[3+2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\right]^2$$

Ta cần chứng minh được $\frac{1}{3}\left[3+2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\right]^2\ge\frac{9(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$

Như vậy phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được: $\left[3+2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\right]^2\ge27\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$

Thật vậy, đặt $t=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\Rightarrow t\ge3$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$(3+2t)^2\ge27t\Leftrightarrow(t-3)(4t-3)\ge0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng do $t\ge3$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi

Bài 170. Cho a, b, c, d là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ac+a^2}\ge\frac{a+b+c}{3}$$

Phân tích và lời giải

Quan sát bất đẳng thức thì suy nghĩ đầu tiên đó là sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức. Do đó ta thử tiếp cận bài toán với bất đẳng thức xem như thế nào?

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ac+a^2}$$
$$\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^3+b^3+c^3+a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ca^2}=\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

Ta cần chứng minh $\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\ge\frac{a+b+c}{3}$ Hay $3\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge(a+b+c)^2$

Bất đẳng thức cuối cùng là một đánh giá quen thuộc.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ngoài ra để ý đến mối liên hệ giữa tử và mẫu ta chú ý đến hằng đẳng thức bậc ba quen thuộc $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$. Do đó ta có phép biến đổi $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}-\frac{b^3}{a^2+ab+b^2}=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}=a-b$

Hoàn toàn tương tự ta có

$$\frac{2a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{2b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{2c^3}{c^2+ac+a^2}=\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ac+a^2}$$

Để ý là $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)\ge\frac{(a+b)\left(a^2+ab+b^2\right)}{3}$

Khi này ta được $\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}\ge\frac{a+b}{3}$, đến đây bài toán xem như được chứng minh và ta trình bày lại lời giải như sau

Cách 2: Ta có: $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}-\frac{b^3}{a^2+ab+b^2}=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}=a-b$

Áp dụng tương tự ta được: $\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}-\frac{c^3}{b^2+bc+c^2}=b-c;\ \frac{c^3}{c^2+ac+a^2}-\frac{a^3}{c^2+ac+a^2}=c-a$

Công theo vế các đẳng thức trên ta được

$$\left(\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ac+a^2}\right)-\left(\frac{b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{a^3}{c^2+ac+a^2}\right)=0$$

Hay $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ac+a^2}=\frac{b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{a^3}{c^2+ac+a^2}$

Do đó ta được: $\frac{2a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{2b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{2c^3}{c^2+ac+a^2}=\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ac+a^2}$

Để ý ta thấy: $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)\ge\frac{(a+b)(a^2+ab+b^2)}{3}$. Do đó ta được $\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}\ge\frac{a+b}{3}$

Áp dụng tương tự ta được: $\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ac+a^2}\ge\frac{2(a+b+c)}{3}$

Suy ra $\frac{2a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{2b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{2c^3}{c^2+ac+a^2}\ge\frac{2(a+b+c)}{3}$

Hay $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ac+a^2}\ge\frac{a+b+c}{3}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Cách 3: Ngoài hai lời giải trên ta có thể tham khảo thêm lời giải bằng phương pháp biến đổi tương đương như sau

Vì a, b là các số thực dương nên ta có

$$(a-b)^2(a+b)\ge 0\Leftrightarrow 3a^3\ge(2a-b)(a^2+ab+b^2)\Leftrightarrow\frac{3a^3}{a^2+ab+b^2}\ge 2a-b$$

Áp dụng tương tự ta được: $\frac{3b^3}{b^2+bc+c^2}\ge 2b-c;\ \frac{3c^3}{c^2+ac+a^2}\ge 2c-a$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được: $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ac+a^2}\ge\frac{a+b+c}{3}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 171. Cho tam giác có ba cạnh a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}=2$. Chứng minh rằng:

$(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le\frac{3}{4}$

Phân tích và lời giải

Khi tiếp cận bài toán này có lẽ ấn tượng đầu tiên là giả thiết của bài toán là một đẳng thức phức tạp. Tuy nhiên khi nhìn bất đẳng thức cần chứng minh ta thấy tích các đại lượng $a+b-c;\ b+c-a;\ c+a-b$ thì thấy tự tin hơn tí vì ít nhiều liên tưởng đến một số đánh giá quen thuộc. Để có các bước đi hợp lí ta đi đánh giá lại giả thiết trước.

Từ giả thiết $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}=2$, ta được $\frac{a^2}{a^2+1}+\frac{b^2}{b^2+1}+\frac{c^2}{c^2+1}=1$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhia copxki ta được: $1=\frac{a^2}{a^2+1}+\frac{b^2}{b^2+1}+\frac{c^2}{c^2+1}\ge\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3}$

Suy ra $a^2+b^2+c^2+3\ge(a+b+c)^2$ hay $ab+bc+ca\le\frac{3}{2}$.

Quan sát tích các đại lượng dưới dấu căn ta liên tưởng đến một bất đẳng thức khá là hay gặp $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le abc$. Như vậy ta thu được bất đẳng thức

$$(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le(a+b+c)abc$$

Đến đây ta chú ý đến đánh giá $abc(a+b+c)\le\frac{(ab+bc+ca)^2}{3}$

Khi đó ta được: $(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le\frac{(ab+bc+ca)^2}{3}\le\frac{3}{4}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 172. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$3\left(a^2+b^2+c^2\right)+4abc\ge13$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=1$. Quan sát bất đẳng thức ta thấy xuất hiện đại lượng $\left(a^2+b^2+c^2\right)$ liên hệ với giả thiết của bài toán bằng một hằng đẳng thức quen thuộc $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$. Như vậy khi đó ta trong bất đẳng thức sẽ có đại lượng $ab+bc+ca$ và abc. Hai đại lượng này làm ta liên tưởng đến phép sắp thứ tự để giảm biến, hoặc sử dụng bất đẳng thức phụ quen thuộc, hoặc sử dụng nguyên lí Dirichlet. Từ sự phân tích đó ta có các lời giải sau

Cách 1: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $3(a+b+c)^2-6(ab+bc+ca)+4abc\ge13$

Hay $$3(ab+bc+ca)-2abc\le7$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a\le b\le c$, do đó ta được $a\le1$.

Khi đó ta có

$$3(ab+bc+ca)-2abc=3a(b+c)+bc(3-2a)\le3a(b+c)+\frac{(b+c)^2(3-2a)}{4}$$

$$=3a(3-a)+\frac{(3-a)^2(3-2a)}{4}=\frac{27+3a^2-2a^3}{4}$$

Ta cần chứng minh $\frac{27+3a^2-2a^3}{4}\le7$. Hay $2a^3-3a^2+1\ge0\Leftrightarrow(a-1)^2(2a+1)\ge0$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Cách 2: Ta có

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=(3-2c)(3-2b)(3-2a)$$

$$=27-18(a+b+c)+12(ab+bc+ca)-8abc=12(ab+bc+ca)-27-8abc$$

Mặt khác ta dễ dàng chứng minh được $abc\ge(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

Do đó ta được $abc\ge12(ab+bc+ca)-27-7abc$ Hay $abc\ge\frac{4(ab+bc+ca)}{3}-3$

Do đó ta có $3\left(a^2+b^2+c^2\right)+4abc \ge 3\left(a^2+b^2+c^2\right)+\dfrac{16\left(ab+bc+ca\right)}{3}-12$

Ta cần chứng minh $3\left(a^2+b^2+c^2\right)+\dfrac{16\left(ab+bc+ca\right)}{3}-12 \ge 13$

Hay $$9\left(a^2+b^2+c^2\right)+16\left(ab+bc+ca\right) \ge 75$$

Thật vậy, áp dụng một đánh giá quen thuộc ta có

$$9\left(a^2+b^2+c^2\right)+16\left(ab+bc+ca\right)=a^2+b^2+c^2+8\left[a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)\right]$$

$$\ge \frac{\left(a+b+c\right)^2}{3}+8\left(a+b+c\right)^2=3+72=75$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Cách 3: Trong ba số dương bất kì a, b, c luôn tồn tại hai số cùng phía so với 1.

Không mất tính tổng quát ta giả sử hai số đó là a và b. khi đó ta có: $c\left(1-a\right)\left(1-b\right) \ge 0 \Leftrightarrow abc \ge c\left(a+b\right)-c$

Ta có

$$3\left(a^2+b^2+c^2\right)+4abc \ge 3\left[\frac{\left(a+b\right)^2}{2}+c^2\right]+4c\left(a+b\right)-4c=3\left[\frac{\left(3-c\right)^2}{2}+c^2\right]+4c\left(3-c\right)-4c=\frac{\left(c-1\right)^2+26}{2} \ge 13$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 173. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=2abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a\left(2a-1\right)^2}+\frac{1}{b\left(2b-1\right)^2}+\frac{1}{c\left(2c-1\right)^2} \ge \frac{1}{2}$$

Phân tích và lời giải

Bất đẳng thức trên đã được chứng minh bằng kỹ thuật đổi biến trong bất đẳng thức Cauchy. Ở đây ta thực hiện đổi biến và áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki xem có thể chứng minh được không.

Từ giả thiết $ab+bc+ca=2abc$ suy ra $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=2$.

Đặt $x=\dfrac{1}{a};\ y=\dfrac{1}{b};\ z=\dfrac{1}{c}$, khi đó ta có $x+y+z=2$.

Bất đẳng thức được viết lại là $\dfrac{x^3}{\left(2-x\right)^2}+\dfrac{y^3}{\left(2-y\right)^2}+\dfrac{z^3}{\left(2-z\right)^2} \ge \dfrac{1}{2}$ Hay $\dfrac{x^3}{\left(y+z\right)^2}+\dfrac{y^3}{\left(z+x\right)^2}+\dfrac{z^3}{\left(x+y\right)^2} \ge \dfrac{1}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{x^3}{\left(y+z\right)^2}+\frac{y^3}{\left(z+x\right)^2}+\frac{z^3}{\left(x+y\right)^2} \ge \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{x\left(y+z\right)^2+y\left(z+x\right)^2+z\left(x+y\right)^2}=\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y+6xyz}$$

Ta cần chứng minh: $\dfrac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y+6xyz} \ge \dfrac{1}{2}$

Hay $$2\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 \ge x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y+6xyz$$

Thật vậy, theo một đánh giá quen thuộc ta có

$$2\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=2\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right) \ge \frac{2\left(x+y+z\right)^2\left(x^2+y^2+z^2\right)}{3}$$

Mà ta lại có: $\left(x+y+z\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)=x^3+y^3+z^3+x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y$

Suy ra ta có: $\dfrac{2\left(x+y+z\right)^2\left(x^2+y^2+z^2\right)}{3} \ge \dfrac{4\left(x^3+y^3+z^3+x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y\right)}{3}$

Ta cần chỉ ra được

$$4\left(x^3+y^3+z^3+x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y\right) \ge 3\left(x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y+6xyz\right)$$

Hay $\qquad 4\left(x^3+y^3+z^3\right)+x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y \ge 18xyz$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$4\left(x^3+y^3+z^3\right) \ge 12xyz;\ x^2y+y^2x+x^2z \ge 3xyz;\ z^2x+y^2z+z^2y \ge 3xyz$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được: $4\left(x^3+y^3+z^3\right)+x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y \ge 18xyz$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{3}{2}$.

Bài 174. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a^2+abc}+\sqrt{b^2+abc}+\sqrt{c^2+abc}+9\sqrt{abc} \le \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

Phân tích: Chú ý đến phép biến đổi $a^2+abc=a^2\left(a+b+c\right)+abc=a\left(a+b\right)\left(a+c\right)$, do đó ta có đánh giá

$$\sqrt{a^2+abc}=\sqrt{a\left(a+b\right)\left(a+c\right)} \le \frac{\sqrt{a}\left(a+b+a+c\right)}{2}=\frac{\sqrt{a}\left(a+1\right)}{2}.$$

Lời giải

Ta có $\qquad a^2+abc=a^2\left(a+b+c\right)+abc=a\left(a+b\right)\left(a+c\right)$

Do đó ta được: $\sqrt{a^2+abc}=\sqrt{a\left(a+b\right)\left(a+c\right)} \le \dfrac{\sqrt{a}\left(a+b+a+c\right)}{2}=\dfrac{\sqrt{a}\left(a+1\right)}{2}$

Chứng minh tương tự ta được: $\sqrt{b^2+abc} \le \dfrac{\sqrt{b}\left(b+1\right)}{2};\ \ \sqrt{c^2+abc} \le \dfrac{\sqrt{c}\left(c+1\right)}{2}$

Do đó ta được: $\sqrt{a^2+abc}+\sqrt{b^2+abc}+\sqrt{c^2+abc} \le \dfrac{\sqrt{a}\left(a+1\right)}{2}+\dfrac{\sqrt{b}\left(b+1\right)}{2}+\dfrac{\sqrt{c}\left(c+1\right)}{2}$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có: $\dfrac{\sqrt{a}\left(a+1\right)}{2}+\sqrt{abc} \le \sqrt{a}\left(\dfrac{a+1}{2}+\dfrac{b+c}{2}\right)=\sqrt{a}\left(\dfrac{a+b+c+1}{2}\right)=\sqrt{a}$

Chứng minh tương tự ta được: $\dfrac{\sqrt{b}\left(b+1\right)}{2}+\sqrt{abc} \le \sqrt{b};\ \dfrac{\sqrt{c}\left(c+1\right)}{2}+\sqrt{abc} \le \sqrt{c}$

Như vậy ta có: $\sqrt{a^2+abc}+\sqrt{b^2+abc}+\sqrt{c^2+abc}+9\sqrt{abc} \le \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+6\sqrt{abc}$

Mà ta có: $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \le \sqrt{3\left(a+b+c\right)}=\sqrt{3};\ 6\sqrt{abc} \le 6\sqrt{\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Nên ta suy ra: $\sqrt{a^2+abc}+\sqrt{b^2+abc}+\sqrt{c^2+abc}+9\sqrt{abc} \le \sqrt{3}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{5}{\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Bài 175. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+b^3+c^3}+\frac{b}{b+c^3+a^3}+\frac{c}{c+a^3+b^3} \le 1$$

Phân tích: Để đồng bậc mẫu ta chú ý đến đánh giá theo bất đẳng thức Bunhiacopxki

$$\left(a+b^3+c^3\right)\left(a^3+b+c\right)\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được $\left(a+b^3+c^3\right)\left(a^3+b+c\right)\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$

Suy ra $$\frac{a}{a+b^3+c^3}=\frac{a\left(a^3+b+c\right)}{\left(a+b^3+c^3\right)\left(a^3+b+c\right)}\le\frac{a^4+ab+ac}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}$$

Chứng minh tương tự ta được: $\frac{b}{b+c^3+a^3}\le\frac{b^4+ab+bc}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}$; $\frac{c}{c+a^3+b^3}\le\frac{c^4+ca+bc}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}$

Do đó ta được bất đẳng thức sau: $\frac{a}{a+b^3+c^3}+\frac{b}{b+c^3+a^3}+\frac{c}{c+a^3+b^3}\le\frac{a^4+b^4+c^4+2\left(ab+bc+ca\right)}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}$

Ta cần chứng minh $$\frac{a^4+b^4+c^4+2\left(ab+bc+ca\right)}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}\le 1$$

Hay $$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge ab+bc+ca$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki và bất đẳng thức Cauchy ta được

$$3\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\ge\left(ab+bc+ca\right)^2;\ a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge 3\sqrt[3]{\left(abc\right)^4}=3$$

Nhân theo vế hai bất đẳng thức trên ta được: $\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)^2\ge\left(ab+bc+ca\right)^2$

Hay $$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge ab+bc+ca$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 176. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\le\frac{3}{2}$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta chú ý đến đổi chiều bất đẳng thức. Ngoài ra ta có thể sắp thứ tự các biến để chứng minh bài toán.

Lời giải

Cách 1: Không mất tính tổng quát, giải sử $a\ge b\ge c$. Do $ab+bc+ca=3\Rightarrow bc\ge 1$

Ta chứng minh bất đẳng thức sau: Với $x,\ y>0;\ xy\ge 1$ ta có: $\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}\ge\frac{2}{yz+1}$

Thật vậy, ta có $\left(y^2+z^2+2\right)\left(yz+1\right)\ge\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right)\Leftrightarrow\left(y-z\right)^2\left(yz-1\right)\ge 0$

Không mất tính tổng quát, giải sử $a\ge b\ge c$. Do $ab+bc+ca=3\Rightarrow bc\ge 1$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta được: $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\ge\frac{1}{a^2+1}+\frac{2}{bc+1}$

Do đó ta sẽ chứng minh: $\frac{1}{a^2+1}+\frac{2}{bc+1}\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow a^2+3-bc-3a^2bc\ge 0\Leftrightarrow a\left(a+b+c-3abc\right)\ge 0$

Từ giả thiết $ab+bc+ca=3$, suy ra $a+b+c\ge 3$ và $abc\le 1$.

Do đó $a+b+c-3abc\ge 0$. Do đó ta được: $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\ge\frac{1}{a^2+1}+\frac{2}{bc+1}\ge\frac{3}{2}$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Cách 2: Gọi biểu thức vế trái là P, ta biến đổi biểu thức P như sau

$$P=\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}=3-\left(\frac{a^2}{a^2+1}+\frac{b^2}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{4a^2}{3a^2+3}=\frac{4a^2}{3a^2+ab+bc+ca}\le\frac{a^2}{a^2+ab+ac}+\frac{a^2}{2a^2+bc}=\frac{a}{a+b+c}+\frac{a^2}{2a^2+bc}$$

Áp dụng tương tự với hai biểu thức còn lại ta được

$$\frac{4a^2}{3a^2+3}+\frac{4b^2}{3b^2+3}+\frac{4c^2}{3c^2+3}\le 1+\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ca}+\frac{c^2}{2c^2+ab}$$

Ta sẽ chứng minh $\quad \frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ca}+\frac{c^2}{2c^2+ab}\le 1$

Thật vậy, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\frac{3}{2}-\left(\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ca}+\frac{c^2}{2c^2+ab}\right)\ge\frac{1}{2}$

Hay $\quad \frac{bc}{2a^2+bc}+\frac{ca}{2b^2+ca}+\frac{ab}{2c^2+ab}\ge\frac{1}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{bc}{2a^2+bc}+\frac{ca}{2b^2+ca}+\frac{ab}{2c^2+ab}=\frac{(bc)^2}{2a^2bc+b^2c^2}+\frac{(ca)^2}{2ab^2c+c^2a^2}+\frac{(ab)^2}{2abc^2+a^2b^2}$$

$$\ge\frac{(ab+bc+ca)^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)}=1$$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 177. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc\ge 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^4+b^3+c^2}+\frac{1}{b^4+c^3+a^2}+\frac{1}{c^4+a^3+b^2}\le 1$$

Phân tích: Để ý là theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có đánh giá $\left(a^4+b^3+c^2\right)\left(1+b+c^2\right)\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được $\left(a^4+b^3+c^2\right)\left(1+b+c^2\right)\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$

Do đó ta có $\quad \frac{1}{a^4+b^3+c^2}=\frac{1+b+c^2}{\left(a^4+b^3+c^2\right)\left(1+b+c^2\right)}\le\frac{1+b+c^2}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}$

Áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức: $\frac{1}{a^4+b^3+c^2}+\frac{1}{b^4+c^3+a^2}+\frac{1}{c^4+a^3+b^2}\le\frac{3+a+b+c+a^2+b^2+c^2}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}$

Ta cần chứng minh $\frac{3+a+b+c+a^2+b^2+c^2}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}\le 1$ Hay $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge 3+a+b+c+a^2+b^2+c^2$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$

Từ giả thiết $abc\ge 1$ suy ra $a+b+c\ge 3$.

Do đó ta được $a^2+b^2+c^2\ge\frac{(a+b+c)^2}{3}\ge a+b+c;\ a^2+b^2+c^2\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\ge 3$

Suy ra $\quad 3\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge a^2+b^2+c^2+a+b+c+3$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$

Bài 178. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{a+bc}+\frac{b^3}{b+ca}+\frac{c^3}{c+ab}\ge\frac{3}{2}$$

Phân tích: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta để ý đến các đánh giá

$$\frac{a^3}{a+bc}+\frac{a+bc}{4}+\frac{1}{2}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{a+bc}.\frac{a+bc}{4}.\frac{1}{2}}=\frac{3a}{2} \text{ và } ab+bc+ca\le\frac{(a+b+c)^2}{3}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được: $\frac{a^3}{a+bc}+\frac{a+bc}{4}+\frac{1}{2}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{a+bc}.\frac{a+bc}{4}.\frac{1}{2}}=\frac{3a}{2}$

Suy ra $$\frac{a^3}{a+bc}\ge\frac{5a}{4}-\frac{bc}{4}-\frac{1}{2}$$

Chứng minh tương tự ta được: $\frac{b^3}{b+ca}\ge\frac{5b}{4}-\frac{ca}{4}-\frac{1}{2};\ \frac{c^3}{c+ab}\ge\frac{5c}{4}-\frac{ab}{4}-\frac{1}{2}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^3}{a+bc}+\frac{b^3}{b+ca}+\frac{c^3}{c+ab}\ge\frac{5(a+b+c)}{4}-\frac{ab+bc+ca}{4}-\frac{3}{2}=\frac{9}{4}-\frac{ab+bc+ca}{4}$$

Mặt khác ta lại có: $ab+bc+ca\le\frac{(a+b+c)^2}{3}=9$. Do đó ta có: $\frac{a^3}{a+bc}+\frac{b^3}{b+ca}+\frac{c^3}{c+ab}\ge\frac{9}{4}-\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 179. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $ab+a+b=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{3a}{b+1}+\frac{3b}{a+1}+\frac{ab}{a+b}\le a^2+b^2+\frac{3}{2}$$

Phân tích: Chú ý đến đánh giá $(a+b)^2\ge 4ab$, khi đó ta viết lại được giả thiết của bài toán là

$(a+b)^2+4(a+b)-12\ge 0$ và đặt $t=a+b$

Lời giải

Từ giả thiết $ab+a+b=3$ suy ra $3-(a+b)=ab$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $3-(a+b)=ab\le\frac{(a+b)^2}{4}\Leftrightarrow(a+b)^2+4(a+b)-12\ge 0\Rightarrow 2\le a+b\le 3$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{3\left[(a+b)^2-2ab\right]+3(a+b)}{ab+a+b+1}+\frac{3-(a+b)}{a+b}\le(a+b)^2-2ab+\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{3\left[(a+b)^2-6+2(a+b)\right]+3(a+b)}{4}+\frac{3-(a+b)}{a+b}\le(a+b)^2-6+2(a+b)+\frac{3}{2}$$

Đặt $t=a+b\Rightarrow 2\le t\le 3$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{3\left(t^2-6+2t\right)+3t}{4}+\frac{3-t}{t}\le t^2-6+2t+\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3t^3+9t^2-18t+12-4t\le 4t^3+6t^2-18t\Leftrightarrow(t-2)\left(t^2+t+6\right)\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng với $t\ge 2$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=1$.

Bài 180. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1+a}{b+c}+\frac{1+b}{c+a}+\frac{1+c}{a+b}\le 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$$

Phân tích: Để ý đến giả thiết $a+b+c=1$ ta có các phép biến đổi sau

$$\frac{1+a}{b+c}=\frac{2a+b+c}{b+c}=\frac{2a}{b+c}+1 \text{ và } \frac{a}{b}-\frac{a}{b+c}=\frac{ac}{b(b+c)}$$

Lời giải

Biến đổi tương đương bất đẳng thức ta được

$$\frac{1+a}{b+c}+\frac{1+b}{c+a}+\frac{1+c}{a+b}\le 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\Leftrightarrow \frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b}+3\le 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b}-\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c}-\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a}-\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow \frac{ac}{b(b+c)}+\frac{bc}{a(a+b)}+\frac{ab}{c(c+a)}\ge\frac{3}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{ac}{b(b+c)}+\frac{bc}{a(a+b)}+\frac{ab}{c(c+a)}\ge\frac{(ab+bc+ca)^2}{2abc(a+b+c)}$$

Ta cần chứng minh $\dfrac{(ab+bc+ca)^2}{2abc(a+b+c)}\ge\dfrac{3}{2}$. Hay $(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)$

Đánh giá cuối cùng đúng theo bất đẳng thức Cauchy

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Bài 181. Cho a, b, c là các số thực không âm tùy ý. Chứng minh rằng:

$$(ab+bc+ca)\left[\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right]\ge 4$$

Phân tích: Bất đẳng thức có các đại lượng $(a-b)^2;(b-c)^2;(c-a)^2$ dưới mẫu, do đó đẳng thức không thể xảy ra tại $a=b=c$. Ta dự đoán đẳng thức xảy ra tại một biến bằng 0. Do đó ta nghĩ đến sắp thứ tự các biến để giảm biến cho bài toán.

Lời giải

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a\ge b\ge c$, khi đó ta có: $ab+bc+ca\ge ab;\ \dfrac{1}{(b-c)^2}\ge\dfrac{1}{b^2};\ \dfrac{1}{(c-a)^2}\ge\dfrac{1}{a^2}$

Do đó ta được bất đẳng thức sau: $(ab+bc+ca)\left[\dfrac{1}{(a-b)^2}+\dfrac{1}{(b-c)^2}+\dfrac{1}{(c-a)^2}\right]\ge ab\left[\dfrac{1}{(a-b)^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{a^2}\right]$

Ta cần chứng minh $ab\left[\dfrac{1}{(a-b)^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{a^2}\right]\ge 4$

Thật vậy, ta có: $ab\left[\dfrac{1}{(a-b)^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{a^2}\right]=\dfrac{ab}{(a-b)^2}+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=\dfrac{ab}{(a-b)^2}+\dfrac{(a-b)^2}{ab}+2$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $\dfrac{ab}{(a-b)^2}+\dfrac{(a-b)^2}{ab}\ge 2\sqrt{\dfrac{ab}{(a-b)^2}.\dfrac{(a-b)^2}{ab}}=2$

Suy ra $ab\left[\dfrac{1}{(a-b)^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{a^2}\right]\ge 4$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}c=0\\(a-b)^2=ab\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=0\\a=\dfrac{(3+\sqrt{5})b}{2}\end{cases}$

Bài 182. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:
$$\frac{\sqrt{ab}}{c+3\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{bc}}{a+3\sqrt{bc}}+\frac{\sqrt{ca}}{b+3\sqrt{ca}}\le\frac{3}{4}$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta chú ý đến phép đổi biến $x=\sqrt{a};\ y=\sqrt{b};\ z=\sqrt{c}$ và để có các đánh giá hợp lí ta có thể đổi chiều bất đẳng thức.

Lời giải

Đặt $x=\sqrt{a};\ y=\sqrt{b};\ z=\sqrt{c}$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành
$$\frac{xy}{z^2+3xy}+\frac{yz}{a^2+3yz}+\frac{zx}{y^2+3zx}\le\frac{3}{4}$$
Ta biến đổi biểu thức vế trái như sau
$$P=\frac{xy}{z^2+3xy}+\frac{yz}{a^2+3yz}+\frac{zx}{y^2+3zx}=\frac{1}{3}\left(\frac{3xy}{z^2+3xy}+\frac{3yz}{a^2+3yz}+\frac{3zx}{y^2+3zx}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{z^2}{z^2+3xy}+1-\frac{x^2}{x^2+3yz}+1-\frac{y^2}{y^2+3zx}\right)=1-\frac{1}{3}\left(\frac{z^2}{z^2+3xy}+\frac{x^2}{x^2+3yz}+\frac{y^2}{y^2+3zx}\right)$$
Đặt
$$Q=\frac{z^2}{z^2+3xy}+\frac{x^2}{x^2+3yz}+\frac{y^2}{y^2+3zx}$$
Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức và một đánh gia quen thuộc ta được
$$Q=\frac{z^2}{z^2+3xy}+\frac{x^2}{x^2+3yz}+\frac{y^2}{y^2+3zx}\ge\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+3(xy+yz+zx)}\ge\frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2+\frac{(x+y+z)^2}{3}}=\frac{3}{4}$$
Do đó ta được $P\le1-\frac{1}{3}.\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$. Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 183. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c>0$. Chứng minh rằng:
$$\frac{a^3+b^3+16c^3}{(a+b+c)^3}\ge\frac{16}{81}$$

Phân tích: Để ý là $\frac{a^3+b^3+16c^3}{(a+b+c)^3}=\frac{a^3}{(a+b+c)^3}+\frac{b^3}{(a+b+c)^3}+\frac{16c^3}{(a+b+c)^3}$. Khi đó ta nghĩ đến phép đổi biến $x=\frac{a}{a+b+c};\ y=\frac{b}{a+b+c};\ z=\frac{c}{a+b+c}$.

Lời giải

Đặt $x=\frac{a}{a+b+c};\ y=\frac{b}{a+b+c};\ z=\frac{c}{a+b+c}$. Khi đó ta được $x+y+z=1$.

Bất đẳng thức được viết lại thành: $\frac{a^3}{(a+b+c)^3}+\frac{b^3}{(a+b+c)^3}+\frac{16c^3}{(a+b+c)^3}=x^3+y^3+16z^3\ge\frac{16}{81}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được: $(x^2+y^2+4z^2)\left(1+1+\frac{1}{4}\right)\ge(x+y+z)^2=1$

Suy ra
$$x^2+y^2+4z^2\ge\frac{4}{9}$$

Mặt khác, cũng theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được: $(x+y+z)(x^3+y^3+16z^3)\ge(x^2+y^2+4z^2)^2\ge\left(\frac{4}{9}\right)^2$

Hay $$x^3+y^3+16z^3\ge\frac{16}{81}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{4z}{1}\\ x^2=y^2=16z^2\end{cases}\Leftrightarrow x=y=4z\Leftrightarrow a=b=4c$

Bài 184. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c\le\frac{3}{2}$. Chứng minh rằng:

$$(a+b)\sqrt{1+\frac{1}{a^2b^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{c^2}}\ge\frac{3\sqrt{17}}{2}$$

Phân tích: Để ý đến phép biến đổi

$$(a+b)\sqrt{1+\frac{1}{a^2b^2}}=\sqrt{(a+b)^2\left(1+\frac{1}{a^2b^2}\right)}=\sqrt{(a+b)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2}$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh làm ta liên tưởng đến đánh giá

$$\sqrt{x^2+m^2}+\sqrt{y^2+n^2}\ge\sqrt{(x+y)^2+(m+n)^2}$$

Lời giải

Dễ dàng chứng minh được: Với các số thực dương x, y, m, n ta luôn có

$$\sqrt{x^2+m^2}+\sqrt{y^2+n^2}\ge\sqrt{(x+y)^2+(m+n)^2}$$

Thật vậy, bình phương hai vế và rút gọn ta được $\sqrt{(x^2+m^2)(y^2+n^2)}\ge xy+mn$

Hay $$(x^2+m^2)(y^2+n^2)\ge(xy+mn)^2$$

Bất đẳng thức cuối cùng là bất đẳng thức Bunhiacopxki quen thuộc.

Gọi vế trái của bất đẳng thức trên là P, áp dụng bất đẳng thức trên ta được

$$P=(a+b)\sqrt{1+\frac{1}{a^2b^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{c^2}}=\sqrt{(a+b)^2\left(1+\frac{1}{a^2b^2}\right)}+\sqrt{c^2+\frac{1}{c^2}}$$

$$=\sqrt{(a+b)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2}+\sqrt{c^2+\frac{1}{c^2}}\ge\sqrt{(a+b+c)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}$$

Mà ta lại có $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}$ Nên ta được $P\ge\sqrt{(a+b+c)^2+\frac{81}{(a+b+c)^2}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$P\ge\sqrt{(a+b+c)^2+\frac{81}{(a+b+c)^2}}=\sqrt{(a+b+c)^2+\frac{81}{16(a+b+c)^2}+\frac{1215}{16(a+b+c)^2}}\ge\sqrt{2\sqrt{\frac{81}{16}}+\frac{1215}{16\left(\frac{3}{2}\right)^2}}=\frac{3\sqrt{17}}{2}$$

Hay $P\ge\frac{3\sqrt{17}}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Bài 185. Cho các số thức $a,b,c\in[0;1]$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b+c}\ge\frac{1}{3}+(1-a)(1-b)(1-c)$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát ta giả sử $1\ge a\ge b\ge c>0$, khi đó ta có $\frac{a}{a+b+c}\ge\frac{1}{3}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được: $3=1-b+1-c+1+b+c\ge3\sqrt[3]{(1-b)(1-c)(1+b+c)}$

Suy ra $\qquad 1 \ge (1-b)(1-c)(1+b+c)$

Do đó ta được $\qquad 1-a \ge (1-a)(1-b)(1-c)(1+b+c)$ Hay $\dfrac{1-a}{1+b+c} \ge (1-a)(1-b)(1-c)$

Mặt khác ta lại có $\dfrac{1-a}{a+b+c} \ge \dfrac{1-a}{1+b+c}$. Nên ta được $\dfrac{1-a}{a+b+c} \ge (1-a)(1-b)(1-c)$

Suy ra: $\dfrac{1}{a+b+c} \ge (1-a)(1-b)(1-c) + \dfrac{a}{a+b+c} \ge \dfrac{1}{3} + (1-a)(1-b)(1-c)$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 186. Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $a^2+2b^2=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^2} + \frac{4b}{a^2+b^2} \ge 3\sqrt{3}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\dfrac{a^4}{a^2b^4} = \dfrac{a^4}{a^2b^2b^2} \ge \dfrac{a^4}{\left(\dfrac{a^2+2b^2}{3}\right)^3} = 27a^4$

Suy ra $\dfrac{a^2}{b^4} \ge 27a^4$ hay $\dfrac{a}{b^2} \ge 3\sqrt{3}a^2$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{16b^4}{2b^2\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+b^2\right)} \ge \frac{a^4}{\left(\dfrac{2b^2+a^2+b^2+a^2+b^2}{3}\right)^3} = \frac{a^4}{\left(\dfrac{2a^2+4b^2}{3}\right)^3} = 108b^4$$

Suy ra $\dfrac{16b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2} \ge 108b^4$ hay $\dfrac{4b}{a^2+b^2} \ge 6\sqrt{3}b^2$

Do đó ta được $\qquad \dfrac{a}{b^2} + \dfrac{4b}{a^2+b^2} \ge 3\sqrt{3}\left(a^2+2b^2\right) = 3\sqrt{3}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Bài 187. Cho a, b là các số thực dương. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+8b^3}} + \sqrt{\frac{4b^3}{b^3+(a+b)^3}} \ge 1$$

Phân tích: Biểu thức vế trái được viết lại thành $\sqrt{\dfrac{1}{1+\dfrac{8b^3}{a^3}}} + \sqrt{\dfrac{\dfrac{4b^3}{a^3}}{\dfrac{b^3}{a^3}+\left(1+\dfrac{b}{a}\right)^3}}$. Đến đây ta nghĩ đến phép đổi biến $t=\dfrac{b}{a}$.

Lời giải

Biểu thức vế trái được viết lại là $\sqrt{\dfrac{1}{1+\dfrac{8b^3}{a^3}}} + \sqrt{\dfrac{\dfrac{4b^3}{a^3}}{\dfrac{b^3}{a^3}+\left(1+\dfrac{b}{a}\right)^3}}$

Đặt $t = \dfrac{b}{a} > 0$. Khi đó bất đẳng thức được viết lại là: $\sqrt{\dfrac{1}{1+8t^3}} + \sqrt{\dfrac{4t^3}{t^3+(1+t)^3}} \ge 1$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $1+8t^3 = (1+2t)(1-2t+4t^2) \le \dfrac{(2+4t^2)^2}{2} = (1+2t^2)^2$

Suy ra $\sqrt{\dfrac{1}{1+8t^3}} \ge \sqrt{\dfrac{1}{(1+2t^2)^2}} = \dfrac{1}{1+2t^2}$. Ta sẽ chứng minh $\sqrt{\dfrac{4t^3}{t^3+(1+t)^3}} \ge \dfrac{2t^2}{1+2t^2}$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{4t^3}{t^3+(1+t)^3} \ge \left(\frac{2t^2}{1+2t^2}\right)^2 \Leftrightarrow (1+2t^2)^2 \ge t^4 + t(1+t)^3 \Leftrightarrow (t-1)^2(2t^2+t+1) \ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng với mọi t.

Do đó ta được $$\sqrt{\frac{1}{1+8t^3}} + \sqrt{\frac{4t^3}{t^3+(1+t)^3}} \ge \frac{1}{1+2t^2} + \frac{2t^2}{1+2t^2} = 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Bài 188. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c = \dfrac{3}{4}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a+3b}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b+3c}} + \frac{1}{\sqrt[3]{c+3a}} \ge 3$$

Phân tích: Dự đoán được dấu đẳng thức xẩy ra tại $a = b = c = \dfrac{1}{4}$. Khi đó ta có đánh giá theo bất đẳng thức Cauchy là $\sqrt[3]{a+3b} = \sqrt[3]{(a+3b).1.1} \le \dfrac{a+3b+2}{3}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được: $\sqrt[3]{a+3b} = \sqrt[3]{(a+3b).1.1} \le \dfrac{a+3b+2}{3}$

Do đó ta được $$\frac{1}{\sqrt[3]{a+3b}} \ge \frac{3}{a+3b+2}$$

Áp dụng tương tự ta được $\dfrac{1}{\sqrt[3]{b+3c}} \ge \dfrac{3}{b+3c+2}$; $\dfrac{1}{\sqrt[3]{c+3a}} \ge \dfrac{3}{c+3a+2}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a+3b}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{b+3c}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{c+3a}} \ge \dfrac{3}{a+3b+2} + \dfrac{3}{b+3c+2} + \dfrac{3}{c+3a+2}$

Mặt khác theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được $\dfrac{3}{a+3b+2} + \dfrac{3}{b+3c+2} + \dfrac{3}{c+3a+2} \ge \dfrac{3.9}{4(a+b+c)+6} = 3$

Do đó ta được $$\frac{1}{\sqrt[3]{a+3b}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b+3c}} + \frac{1}{\sqrt[3]{c+3a}} \ge 3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \dfrac{1}{4}$.

Bài 189. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c = 1$. Chứng minh rằng:

$$2\left(\frac{ab}{c+ab} + \frac{bc}{a+bc} + \frac{ca}{a+ca}\right) \ge \sqrt{\frac{ab}{c+ab}} + \sqrt{\frac{bc}{a+bc}} + \sqrt{\frac{ca}{a+ca}}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được: $\frac{ab}{c+ab}+\frac{bc}{a+bc}+\frac{ca}{a+ca}\ge\frac{\left(ab+bc+ca\right)^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+3abc}$

Mà ta có $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\le\frac{\left(ab+bc+ca\right)^2}{3}$ Và $abc\left(a+b+c\right)\le\frac{\left(ab+bc+ca\right)^2}{3}$

Nên ta được

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+3abc=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+3abc\left(a+b+c\right)$$

$$\le\frac{\left(ab+bc+ca\right)^2}{3}+\left(ab+bc+ca\right)^2=\frac{4\left(ab+bc+ca\right)^2}{3}$$

Do đó ta có $$\frac{ab}{c+ab}+\frac{bc}{a+bc}+\frac{ca}{a+ca}\ge\frac{3}{4}$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$3\left(\frac{ab}{c+ab}+\frac{bc}{a+bc}+\frac{ca}{a+ca}\right)\ge\left(\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{a+ca}}\right)^2$$

Kết hợp hai bất đẳng thức trên ta được: $2\left(\frac{ab}{c+ab}+\frac{bc}{a+bc}+\frac{ca}{a+ca}\right)\ge\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{a+ca}}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 190. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\le\frac{4}{9}$$

Phân tích: Từ giả thiết ta suy ra $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=1$. Đặt $x=\frac{1}{a};\ y=\frac{1}{b};\ z=\frac{1}{c}$, khi đó ta được $xy+yz+zx=1$.

Khi đó để ý đến phép biến đổi: $x^2+1=x^2+xy+yz+zx=\left(x+y\right)\left(x+z\right)$

Lời giải

Từ giả thiết ta suy ra $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=1$. Đặt $x=\frac{1}{a};\ y=\frac{1}{b};\ z=\frac{1}{c}$.

Khi đó ta được $xy+yz+zx=1$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\le\frac{4}{9}$

Để ý ta thấy $x^2+1=x^2+xy+yz+zx=\left(x+y\right)\left(x+z\right)$

Áp dụng tương tự bất đẳng thức trở thành: $\frac{2x}{\sqrt{\left(x+y\right)\left(x+z\right)}}+\frac{y}{\sqrt{\left(x+y\right)\left(y+z\right)}}+\frac{z}{\sqrt{\left(y+z\right)\left(z+x\right)}}\le\frac{4}{9}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{2x}{\sqrt{\left(x+y\right)\left(x+z\right)}}+\frac{y}{\sqrt{\left(x+y\right)\left(y+z\right)}}+\frac{z}{\sqrt{\left(y+z\right)\left(z+x\right)}}$$

$$\le x\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}\right)+y\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{4\left(y+z\right)}\right)+z\left(\frac{1}{4\left(y+z\right)}+\frac{1}{x+z}\right)=\frac{x+y}{x+y}+\frac{y+z}{4\left(y+z\right)}+\frac{z+x}{z+x}=1+\frac{1}{4}+1=\frac{9}{4}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\left(a;\ b;\ c\right)=\left(\frac{\sqrt{15}}{7};\ \sqrt{15};\ \sqrt{15}\right)$

Bài 191. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\ge\frac{5}{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng cộng mẫu ta được

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)}+1$$

Khi đó ta được bất đẳng thức: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)}+1+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}$

Ta cần chứng minh $\frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)}+1+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\ge\frac{5}{2}$

Đặt $t=\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\Rightarrow 0<t\le 1$. Khi đó bất đẳng thức trên trở thành $\frac{1}{2t^2}+t+1\ge\frac{5}{2}\Leftrightarrow(t-1)^2(2t+1)\ge 0$

Bấ đẳng thức cuối cùng luôn đúng với $0<t\le 1$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 192. Cho a, b, c là các số thực dương không âm. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+\frac{(a+b+c)^3}{abc}\ge 28$$

Lời giải

Ta có: $\frac{(a+b+c)^3}{abc}=(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+\frac{2(ab+bc+ca)(a+b+c)}{abc}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki và cauchy ta được

$$(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\ge\frac{9(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca};\frac{2(ab+bc+ca)(a+b+c)}{abc}\ge\frac{2.3.\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.3.\sqrt[3]{abc}}{abc}=18$$

Do đó ta được $\frac{(a+b+c)^3}{abc}\ge\frac{9(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}+18$

Suy ra ta có bất đẳng thức: $\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+\frac{(a+b+c)^3}{abc}\ge\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}+18$

Ta cần chứng minh $\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}\ge 10$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ac}\ge 2;\ \frac{8(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}\ge\frac{8(ab+bc+ca)}{ab+bc+ca}=8$$

Cộng theo vế của hai bất đẳng thức trên ta được: $\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}\ge 10$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 193. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c\le\frac{3}{2}$. Chứng minh rằng:

$$a+b+c+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge\frac{27}{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được: $\frac{1}{a^2}+4\ge\frac{4}{a};\ \frac{1}{b^2}+4\ge\frac{4}{b};\ \frac{1}{c^2}+4\ge\frac{4}{c}$

Do đó ta được $$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}-12$$

Khi đó ta có $a+b+c+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge a+b+c+\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}-12$

Và theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta lại có $\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}\ge\frac{36}{a+b+c}$

Từ đó ta suy ra: $a+b+c+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge a+b+c+\frac{36}{a+b+c}-12$

Ta cần chứng minh $a+b+c+\frac{36}{a+b+c}-12\ge\frac{27}{2}$ Hay $a+b+c+\frac{36}{a+b+c}\ge\frac{51}{2}$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $a+b+c+\frac{9}{4(a+b+c)}\ge2\sqrt{\frac{9}{4}}=3;\ \frac{135}{4(a+b+c)}\ge\frac{135}{4.\frac{3}{2}}=\frac{45}{2}$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được $a+b+c+\frac{36}{a+b+c}\ge\frac{51}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 194. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:
$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^3\ge9\left(a^3+b^3+c^3\right)$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành $\left(a^2+b^2+c^2\right)^3\ge9abc\left(a^3+b^3+c^3\right)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được: $9abc\left(a^3+b^3+c^3\right)=27.ab.ac.\frac{a^3+b^3+c^3}{3a}\le\left(ab+ab+\frac{a^3+b^3+c^3}{3a}\right)^3$

Mà ta có
$$ab+ab+\frac{a^3+b^3+c^3}{3a}=ab+bc+ca+\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{3a}=ab+bc+ca+\frac{(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)}{3a}$$

Suy ra: $9abc\left(a^3+b^3+c^3\right)\le\left[ab+bc+ca+\frac{(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)}{3a}\right]^3$

Như vậy ta cần chứng minh được: $ab+bc+ca+\frac{(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)}{3a}\le a^2+b^2+c^2$

Hay $$\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)\left(1-\frac{a+b+c}{3}\right)\ge0$$

Đánh giá trên luôn đúng do ta có thể giả sử a là số lớn nhất trong ba số a, b, c.
Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 195. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:
$$\frac{\sqrt{ab}}{4-\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{bc}}{4-\sqrt{bc}}+\frac{\sqrt{ca}}{4-\sqrt{ca}}\le1$$

Lời giải

Đặt $x=\sqrt{a};\ y=\sqrt{b};\ z=\sqrt{c}$. Khi đó ta viết lại giả thiết là $x^4+y^4+z^4=3$.

Bất đẳng thức được viết lại là $\dfrac{xy}{4-xy}+\dfrac{yz}{4-yz}+\dfrac{zx}{4-zx}\le 1$

Khi đó gọi vế trái là P thì ta có: $P+3=1+\dfrac{xy}{4-xy}+1+\dfrac{yz}{4-yz}+1+\dfrac{zx}{4-zx}=\dfrac{4}{4-xy}+\dfrac{4}{4-yz}+\dfrac{4}{4-zx}$

Ta có: $\dfrac{2}{4-xy}=1-\dfrac{2-xy}{4-xy}=1-\dfrac{(2-xy)(2+xy)}{(4-xy)(2+xy)}=1-\dfrac{4-x^2y^2}{9-(xy-1)^2}\le 1-\dfrac{4-x^2y^2}{9}=\dfrac{5}{9}+\dfrac{x^2y^2}{9}$

Tương tự ta được $\dfrac{2}{4-yz}\le\dfrac{5}{9}+\dfrac{y^2z^2}{9};\ \dfrac{2}{4-zx}\le\dfrac{5}{9}+\dfrac{x^2z^2}{9}$

Do đó ta được: $P+3\le 2\left(\dfrac{15}{9}+\dfrac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{9}\right)\le 2\left(\dfrac{15}{9}+\dfrac{x^4+y^4+z^4}{9}\right)=4$

Suy ra $P\le 1$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 196. cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(a+2)(b+2)}{(b+1)(b+5)}+\frac{(b+2)(c+2)}{(c+1)(c+5)}+\frac{(c+2)(a+2)}{(a+1)(a+5)}\ge\frac{9}{4}$$

Phân tích: Chú ý đến đánh giá $\dfrac{(b+2)}{(b+1)(b+5)}\ge\dfrac{3}{4(b+2)}$

Lời giải

Ta có bất đẳng thức luôn đúng sau $\dfrac{(b+2)}{(b+1)(b+5)}\ge\dfrac{3}{4(b+2)}\Leftrightarrow 4b^2+16b+16\ge 3b^2+18b+15\Leftrightarrow (b-1)^2\ge 0$

Từ đó ta suy ra $\dfrac{(a+2)(b+2)}{(b+1)(b+5)}\ge\dfrac{3(a+2)}{4(b+2)}$

Tương tự: $\dfrac{(b+2)(c+2)}{(c+1)(c+5)}\ge\dfrac{3(b+2)}{4(c+2)};\dfrac{(c+2)(a+2)}{(a+1)(a+5)}\ge\dfrac{3(c+2)}{4(a+2)}$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên, và sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số, ta được:

$$\frac{(a+2)(b+2)}{(b+1)(b+5)}+\frac{(b+2)(c+2)}{(c+1)(c+5)}+\frac{(c+2)(a+2)}{(a+1)(a+5)}\ge\frac{3}{4}\left(\frac{a+2}{b+2}+\frac{b+2}{c+2}+\frac{c+2}{a+2}\right)\ge\frac{9}{4}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 197. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{b+c+4a}+\frac{c+a}{a+c+16b}\ge\frac{16}{15}$$

Lời giải

Đặt $\begin{cases}x=a+b+c\\ y=b+c+4a\\ z=c+a+16b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3a=y-x\\ 15b=z-x\\ 15c=21x-5y-z\end{cases}$

Khi đó biểu thức vế trái P được viết lại là $P=\dfrac{-6x+5y+z}{15x}+\dfrac{20x-5y}{15y}+\dfrac{16x-z}{15z}=\dfrac{y}{3x}+\dfrac{3x}{4y}+\dfrac{z}{15x}+\dfrac{16x}{15z}-\dfrac{4}{5}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $\dfrac{y}{3x}+\dfrac{4x}{3y}\ge\dfrac{4}{3};\dfrac{z}{15x}+\dfrac{16x}{15z}\ge\dfrac{8}{15}$

Do đó ta được $P \geq \frac{4}{3} + \frac{8}{15} - \frac{4}{5} = \frac{16}{15}$. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} \frac{y}{3x} = \frac{4x}{3y} \\ \frac{z}{15x} = \frac{16x}{15z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5c}{7} \\ b = \frac{3c}{7} \end{cases}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a = \frac{5c}{7}; b = \frac{3c}{7}$.

Bài 198. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} = 2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{a+3b}} + \frac{1}{\sqrt{b+3c}} + \frac{1}{\sqrt{c+3a}} \leq 1$$

Phân tích: Quan sát giả thiết ta chú ý đến phép đổi biến $x = \sqrt{a}; y = \sqrt{b}; z = \sqrt{c}$. Đến đây ta có thể đánh giá các căn bậc hai theo bất đẳng thức Cauchy hoặc Bunhiacopxki như sau

$$x^2 + 3y^2 = x^2 + y^2 + y^2 + y^2 \geq 4\sqrt[4]{x^2y^6}; 4\left(x^2 + 3y^2\right) = (1+1+1+1)\left(x^2 + y^2 + y^2 + y^2\right) \geq (x+3y)^2$$

Lời giải

Cách 1: Đặt $x = \sqrt{a}; y = \sqrt{b}; z = \sqrt{c}$. Khi đó ta được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành: $\frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+3z^2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2+3y^2}} \leq 1$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được: $x^2 + 3y^2 = x^2 + y^2 + y^2 + y^2 \geq 4\sqrt[4]{x^2y^6}$

Áp dụng một bất đẳng thức Cauchy khác ta được

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{\sqrt[4]{x^2y^6}}} = \frac{1}{2\sqrt{\sqrt[4]{x^2y^2}.\sqrt[4]{y^4}}} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^2y^2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{y^4}}\right) \leq \frac{1}{8}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{y}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{x} + \frac{3}{y}\right)$$

Tương tự ta có $\frac{1}{\sqrt{y^2+3z^2}} \leq \frac{1}{8}\left(\frac{1}{y} + \frac{3}{z}\right); \frac{1}{\sqrt{z^2+3y^2}} \leq \frac{1}{8}\left(\frac{1}{z} + \frac{3}{x}\right)$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta có: $\frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+3z^2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2+3y^2}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 1$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{9}{4}$

Cách 2: Đặt $x = \sqrt{a}; y = \sqrt{b}; z = \sqrt{c}$. Khi đó ta được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành: $\frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+3z^2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2+3y^2}} \leq 1$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được: $4\left(x^2 + 3y^2\right) = (1+1+1+1)\left(x^2 + y^2 + y^2 + y^2\right) \geq (x+3y)^2$

Do đó ta được: $\frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}} = \frac{2}{\sqrt{2\left(x^2+3y^2\right)}} \leq \frac{2}{\sqrt{(x+3y)^2}} = \frac{2}{x+3y} \leq \frac{1}{8}\left(\frac{1}{x} + \frac{3}{y}\right)$

Tương tự ta có $\frac{1}{\sqrt{y^2+3z^2}} \leq \frac{1}{8}\left(\frac{1}{y} + \frac{3}{z}\right); \frac{1}{\sqrt{z^2+3y^2}} \leq \frac{1}{8}\left(\frac{1}{z} + \frac{3}{x}\right)$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta có: $\frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+3z^2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2+3y^2}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 1$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{9}{4}$

Bài 199. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{ca^2+2c^2}+\frac{b^2}{ab^2+2a^2}+\frac{c^2}{bc^2+2b^2}\ge 1$$

Lời giải

Từ giả thiết $ab+bc+ca=abc$ ta được $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$.

Đặt $x=\frac{1}{a};\ y=\frac{1}{b};\ z=\frac{1}{c}$. Khi đó ta được $x+y+z=3$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\frac{x^2}{x+2y^2}+\frac{y^2}{y+2z^2}+\frac{z^2}{z+2x^2}\ge 1$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{x^2}{x+2y^2}=\frac{x^2+2xy^2-2xy^2}{x+2y^2}=x-\frac{2xy^2}{x+y^2+y^2}\ge x-\frac{2xy^2}{2\sqrt[3]{xy^4}}=x-\frac{2\sqrt[3]{x^2y^2}}{3}$$

Áp dụng tương tự ta được $\frac{y^2}{y+2z^2}\ge y-\frac{2\sqrt[3]{y^2z^2}}{3};\ \frac{z^2}{z+2x^2}\ge z-\frac{2\sqrt[3]{z^2x^2}}{3}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{x^2}{x+2y^2}+\frac{y^2}{y+2z^2}+\frac{z^2}{z+2x^2}\ge (x+y+z)-\frac{2}{3}\left(\sqrt[3]{x^2y^2}+\sqrt[3]{y^2z^2}+\sqrt[3]{z^2x^2}\right)$$

Mạt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có

$$\sqrt[3]{x^2y^2}\le\frac{xy+xy+1}{3}=\frac{2xy+1}{3};\sqrt[3]{y^2z^2}\le\frac{yz+yz+1}{3}=\frac{2yz+1}{3};\sqrt[3]{z^2x^2}\le\frac{zx+zx+1}{3}=\frac{2zx+1}{3}$$

Suy ra $\sqrt[3]{x^2y^2}+\sqrt[3]{y^2z^2}+\sqrt[3]{z^2x^2}\le\frac{2(xy+yz+zx)}{3}+1\le\frac{2(x+y+z)^2}{9}+1=3$

Do đó ta được $\frac{x^2}{x+2y^2}+\frac{y^2}{y+2z^2}+\frac{z^2}{z+2x^2}\ge 3-\frac{2.3}{3}=1$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 200. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b+c}+\frac{6}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}\ge\frac{3}{a^3+b^3+c^3}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\left(a^3+b^3+c^3\right)(a+b+c)\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)^2;3\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge(a+b+c)^2$$

Nhân theo vế hai bất đẳng thức trên ta được $3\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)$

Suy ra $$\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\qquad(1)$$

Cũng từ hai bất đẳng thức trên ta được $3\left(a^3+b^3+c^3\right)^2\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)^3$

Suy ra: $$\frac{\left(a^3+b^3+c^3\right)^2}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^4}\ge\frac{1}{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}\Leftrightarrow\frac{6\left(a^3+b^3+c^3\right)}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}\ge\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\qquad(2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ge 3 \qquad (3)$

Cộng theo vế các bất đẳng thức (1), (2), (3) ta được $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}+\dfrac{6\left(a^3+b^3+c^3\right)}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}\ge 3$

Hay $$\frac{1}{a+b+c}+\frac{6}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}\ge\frac{3}{a^3+b^3+c^3}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 201. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{4a+4b+c}+\frac{b}{4b+4c+a}+\frac{c}{4c+4a+b}\le\frac{1}{3}$$

Phân tích: Để ý đến phép biến đổi: $\frac{4a\left(a+b+c\right)}{4a+4b+c}=\frac{a\left(4a+4b+c\right)+3ca}{4a+4b+c}=a+\frac{3ca}{4a+4b+c}$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $\frac{4a\left(a+b+c\right)}{4a+4b+c}+\frac{4b\left(a+b+c\right)}{4b+4c+a}+\frac{4c\left(a+b+c\right)}{4c+4a+b}\le\frac{4\left(a+b+c\right)}{3}$

Ta có $\frac{4a\left(a+b+c\right)}{4a+4b+c}=\frac{a\left(4a+4b+c\right)+3ca}{4a+4b+c}=a+\frac{3ca}{4a+4b+c}$

Tương tự ta có: $\frac{4b\left(a+b+c\right)}{4b+4c+a}=b+\frac{3bc}{4b+4c+a}$; $\frac{4c\left(a+b+c\right)}{4c+4a+b}=c+\frac{3ba}{4b+4c+a}$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành: $\frac{9ca}{4a+4b+a}+\frac{9ab}{4b+4c+a}+\frac{9bc}{4b+4c+a}\le a+b+c$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{9}{4a+4b+c}=\frac{\left(2+1\right)^2}{2\left(2a+b\right)+\left(2b+c\right)}\le\frac{4}{2\left(2a+b\right)}+\frac{1}{2b+c}=\frac{2}{2a+b}+\frac{1}{2b+c}$$

Do đó ta được $\frac{9ca}{4a+4b+c}\le\frac{2ca}{2a+b}+\frac{ca}{2b+c}$

Hoàn toàn tương tự: $\frac{9ab}{4b+4c+a}\le\frac{2ab}{2b+c}+\frac{ab}{2c+a}$; $\frac{9bc}{4b+4c+a}\le\frac{2bc}{2c+a}+\frac{bc}{2a+b}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{9ca}{4a+4b+a}+\frac{9ab}{4b+4c+a}+\frac{9bc}{4b+4c+a}\le\frac{2ca}{2a+b}+\frac{ca}{2b+c}+\frac{2ab}{2b+c}+\frac{ab}{2c+a}+\frac{2bc}{2c+a}+\frac{bc}{2a+b}=a+b+c$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 202. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{abc}\ge 30$$

Phân tích: Chú ý là theo bất đẳng thức Cauchy ta có: $\frac{1}{abc}=\frac{a+b+c}{abc}=\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge\frac{9}{ab+bc+ca}$

Ta quy bài toán về chứng minh $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9}{ab+bc+ca}\ge 30$

Lời giải

Cách 1: Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\left(ab+bc+ca\right)^2\ge 3abc\left(a+b+c\right)=3abc\left(a+b+c\right)^3\ge 3abc.27abc=81\left(abc\right)^2$$

Suy ra $ab+bc+ca\ge 9abc$

Áp dụng bất đăng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{abc}=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{9abc}+\frac{1}{9abc}+\frac{7}{9abc}\ge\frac{9}{a^2+b^2+c^2+2.9abc}+\frac{7}{\frac{\left(a+b+c\right)^3}{3}}$$

$$\ge\frac{9}{a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)}+21=30$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Cách 2: Với giả thiết $a+b+c=1$, biểu thức P được viết lại thành

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{abc}=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{a+b+c}{abc}=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$$

Theo một đánh giá quen thuộc ta có $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge\frac{9}{ab+bc+ca}$

Do đó ta có $$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{abc}\ge\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9}{ab+bc+ca}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki và bất đẳng thức $ab+bc+ca\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{3}$

Ta được $$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9}{ab+bc+ca}=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{7}{ab+bc+ca}$$

$$\ge\frac{9}{a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)}+\frac{7}{ab+bc+ca}\ge\frac{9}{\left(a+b+c\right)^2}+\frac{7.3}{\left(a+b+c\right)^2}=30$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Bài 203. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{b+c}{a^2+bc}+\frac{c+a}{b^2+ca}+\frac{a+b}{c^2+ab}$$

Phân tích: Chú ý đến đánh giá theo bất đẳng thức Bunhiacopxki

$$\frac{a+b}{c^2+ab}=\frac{\left(a+b\right)^2}{\left(a+b\right)\left(c^2+ab\right)}=\frac{\left(a+b\right)^2}{b\left(a^2+c^2\right)+a\left(b^2+c^2\right)}\le\frac{a^2}{b\left(a^2+c^2\right)}+\frac{b^2}{a\left(b^2+c^2\right)}$$

Hoặc phép biến đổi tương đương.

Lời giải

Cách 1: Áp dụng ất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a+b}{c^2+ab}=\frac{\left(a+b\right)^2}{\left(a+b\right)\left(c^2+ab\right)}=\frac{\left(a+b\right)^2}{b\left(a^2+c^2\right)+a\left(b^2+c^2\right)}\le\frac{a^2}{b\left(a^2+c^2\right)}+\frac{b^2}{a\left(b^2+c^2\right)}$$

Áp dụng tương tự ta được: $\frac{b+c}{a^2+bc}\le\frac{b^2}{c\left(a^2+b^2\right)}+\frac{c^2}{b\left(a^2+c^2\right)};\frac{c+a}{b^2+ca}\le\frac{c^2}{a\left(b^2+c^2\right)}+\frac{a^2}{c\left(c^2+a^2\right)}$

Mà ta lại có: $\frac{b^2}{c\left(a^2+b^2\right)}+\frac{c^2}{b\left(a^2+c^2\right)}+\frac{c^2}{a\left(b^2+c^2\right)}+\frac{a^2}{c\left(b^2+a^2\right)}+\frac{a^2}{b\left(a^2+c^2\right)}+\frac{b^2}{a\left(b^2+c^2\right)}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Do đó ta được $$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{b+c}{a^2+bc}+\frac{c+a}{b^2+ca}+\frac{a+b}{c^2+ab}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Cách 2: Biến đổi tương đương bất đẳng thức như sau

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{b+c}{a^2+bc}+\frac{c+a}{b^2+ca}+\frac{a+b}{c^2+ab}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{a}-\frac{a+b}{c^2+ab}\right)+\left(\frac{1}{c}-\frac{b+c}{a^2+bc}\right)+\left(\frac{1}{b}-\frac{c+a}{b^2+ca}\right)\ge0$$

$$\Leftrightarrow\left(c^2-a^2\right)\left[\frac{1}{a\left(c^2+ab\right)}-\frac{1}{c\left(a^2+bc\right)}\right]+\frac{\left(b-c\right)\left(b-a\right)}{b^3+abc}\ge0\Leftrightarrow\frac{\left(c-a\right)^2\left(c+a\right)\left(bc+ab-ab\right)}{ca\left(a^2+bc\right)\left(c^2+ab\right)}+\frac{\left(b-c\right)\left(b-a\right)}{b^3+abc}\ge0$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử b là số lớn nhất trong ba số a, b, c khi đó ta được

$$bc+ab-ca\ge0;\ \frac{\left(b-c\right)\left(b-a\right)}{b^3+abc}\ge0$$

Do vậy bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 204. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:
$$\frac{a^2-bc}{2a^2+ab+ac}+\frac{b^2-ca}{2b^2+bc+ba}+\frac{c^2-ab}{2c^2+ca+cb}\le 0$$

Phân tích: Để ý đến phép biến đổi: $\frac{bc-a^2}{2a^2+ab+ac}+1=\frac{a^2+ab+bc+ca}{2a^2+ab+ac}=\frac{(a+b)(c+a)}{2a^2+ab+ac}$

Lời giải

Cách 1: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với
$$\frac{bc-a^2}{2a^2+ab+ac}+\frac{ca-b^2}{2b^2+bc+ba}+\frac{ab-c^2}{2c^2+ca+cb}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{bc-a^2}{2a^2+ab+ac}+1+\frac{ca-b^2}{2b^2+bc+ba}+1+\frac{ab-c^2}{2c^2+ca+cb}+1\ge 3$$
$$\Leftrightarrow \frac{(a+b)(a+c)}{a(2a+b+c)}+\frac{(a+b)(b+c)}{b(a+2b+c)}+\frac{(b+c)(c+a)}{c(a+b+2c)}\ge 3$$
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được
$$\frac{(a+b)(a+c)}{a(2a+b+c)}+\frac{(a+b)(b+c)}{b(a+2b+c)}+\frac{(b+c)(c+a)}{c(a+b+2c)}\ge 3\sqrt[3]{\frac{(a+b)^2(b+c^2)(c+a)^2}{abc(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)}}$$
Ta cần chứng minh $\quad \frac{(a+b)^2(b+c^2)(c+a)^2}{abc(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)}\ge 1$

Hay $\quad (a+b)^2(b+c^2)(c+a)^2\ge abc(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)$

Hay $\quad (ab+bc+ca)^2(a+b+c)\ge 2abc(a+b+c)^2+3abc(ab+bc+ca)$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được
$$\frac{(ab+bc+ca)^2(a+b+c)}{3}\ge \frac{9abc(ab+bc+ca)}{3}=3abc(ab+bc+ca)$$
$$\frac{2(ab+bc+ca)^2(a+b+c)}{3}\ge 2abc(a+b+c)(a+b+c)=3abc(a+b+c)^2$$
Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được
$$(ab+bc+ca)^2(a+b+c)\ge 2abc(a+b+c)^2+3abc(ab+bc+ca)$$
Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Cách 2: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với
$$\frac{bc}{2a^2+ab+ac}+\frac{ca}{2b^2+bc+ba}+\frac{ab}{2c^2+ca+cb}\ge \frac{a}{2a+b+c}+\frac{b}{2b+c+a}+\frac{c}{2c+a+b}$$
Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được
$$\frac{bc}{2a^2+ab+ac}+\frac{ca}{2b^2+bc+ba}+\frac{ab}{2c^2+ca+cb}$$
$$\ge \frac{(ab+bc+ca)^2}{bc(2a^2+ab+ac)+ca(2b^2+bc+ba)+ab(2c^2+ca+cb)}=\frac{(ab+bc+ca)^2}{4abc(a+b+c)}\ge\frac{3}{4}$$
Ta cần chứng minh $\quad \frac{a}{2a+b+c}+\frac{b}{2b+c+a}+\frac{c}{2c+a+b}\le\frac{3}{4}$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được
$$\frac{1}{2a+b+c}=\frac{1}{a+b+a+c}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right)\Rightarrow \frac{a}{2a+b+c}\le\frac{1}{4}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}\right)$$
Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{a}{2a+b+c}+\frac{b}{2b+c+a}+\frac{c}{2c+a+b}\le\frac{1}{4}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b+c}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{c}{a+c}+\frac{c}{b+c}\right)=\frac{3}{4}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 205. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b(2c+a)}+\frac{b^3}{c(2a+b)}+\frac{c^3}{a(2b+c)}\ge 1$$

Lời giải

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được: $\frac{a^3}{b(2c+a)}+\frac{b}{3}+\frac{2c+a}{9}\ge a\Rightarrow\frac{a^3}{b(2c+a)}\ge\frac{8a-3b-2c}{9}$

Chứng minh tương tự ta được: $\frac{b^3}{c(2a+b)}\ge\frac{8b-3c-2a}{9}$; $\frac{c^3}{a(2b+c)}\ge\frac{8c-3a-2c}{9}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được: $\frac{a^3}{b(2c+a)}+\frac{b^3}{c(2a+b)}+\frac{c^3}{a(2b+c)}\ge\frac{a+b+c}{3}=1$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{a^3}{b(2c+a)}+\frac{b^3}{c(2a+b)}+\frac{c^3}{a(2b+c)}=\frac{\left(\sqrt{a^3}\right)^2}{b(2c+a)}+\frac{\left(\sqrt{b^3}\right)^2}{c(2a+b)}+\frac{\left(\sqrt{c^3}\right)^2}{a(2b+c)}\ge\frac{\left(\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3}\right)^2}{3(ab+bc+ca)}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\left(\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\ge(a+b+c)^2=3\sqrt{3(a+b+c)}\ge 3\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$$

Nên $$\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3}\ge 3$$

Mà theo một đánh giá quen thuộc ta có: $3(ab+bc+ca)\le(a+b+c)^2=9\Rightarrow ab+bc+ca\le 3$

Do đó ta được $\frac{\left(\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3}\right)^2}{3(ab+bc+ca)}\ge 1$ hay bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 3: Biểu thức vế trái được viết lại thành $\frac{a^4}{ab(2c+a)}+\frac{b^4}{bc(2a+b)}+\frac{c^4}{ca(2b+c)}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^4}{ab(2c+a)}+\frac{b^4}{bc(2a+b)}+\frac{c^4}{ca(2b+c)}\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2b+b^2a+a^2c+c^2a+b^2c+c^2b+6abc}$$

Mà ta có: $a^2b+b^2a+a^2c+c^2a+b^2c+c^2b+6abc=(a+b+c)(ab+bc+ca)+3abc=3(ab+bc+ca)+3abc$

Áp dụng một bất đẳng thức quen thuộc ta được:

$$\begin{cases}\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{3}\ge\frac{(ab+bc+ca)^2}{3}\ge abc(a+b+c)=3abc\\ \frac{2\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{3}\ge\frac{(a+b+c)^2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{9}=3(ab+bc+ca)\end{cases}$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge 3(ab+bc+ca)+3abc$

Do đó ta được $$\frac{a^3}{b(2c+a)}+\frac{b^3}{c(2a+b)}+\frac{c^3}{a(2b+c)}\ge 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 206. Chứng minh rằng với mọi a, b, c không âm ta có:

$$\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \le \sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}}$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta thu được:

$$abc=\sqrt[3]{abc}.\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \le \frac{a+b+c}{3}.\frac{ab+bc+ca}{3}=\frac{(ab+bc+ca)(a+b+c)}{9}.$$

Dễ thấy $\quad (ab+bc+ca)(a+b+c)=(a+b)(b+c)(c+a)+abc$.

Do đó ta có $\quad 8(ab+bc+ca)(a+b+c)\le 9(a+b)(b+c)(c+a)$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \le (a+b)+(b+c)+(c+a)=2(a+b+c)$

từ đó suy ra: $(a+b)(b+c)(c+a)\ge \frac{8}{9}(ab+bc+ca)(a+b+c)\ge \frac{8}{9}(ab+bc+ca).\frac{3}{2}\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$

Hay tương đương $\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \le \sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}}$. Bài toán được chứng minh xong.

Bài 207. Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $(a+b)^3+4ab\ge 2$. Cứng minh rằng:

$$3\left(a^4+b^4+a^2b^2\right)-2\left(a^2+b^2\right)+1\ge \frac{9}{16}$$

Lời giải

Dễ thấy với mọi a, b ta luôn có $(a+b)^2\ge 4ab$. Kết hợp với bất đẳng thức giả thiết $(a+b)^3+4ab\ge 2$,

ta được $(a+b)^3+(a+b)^2\ge 2 \Leftrightarrow a+b\ge 1$. Do đó ta được $a^2+b^2\ge \frac{(a+b)^2}{2}\ge \frac{1}{2}$

Khi đó ta được bất đẳng thức

$$3\left(a^4+b^4+a^2b^2\right)-2\left(a^2+b^2\right)+1=3\left[\left(a^2+b^2\right)^2-a^2b^2\right]-2\left(a^2+b^2\right)+1$$

$$\ge 3\left[\left(a^2+b^2\right)^2-\frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{4}\right]-2\left(a^2+b^2\right)+1=\frac{9}{4}\left(a^2+b^2\right)^2-2\left(a^2+b^2\right)+1$$

Mà ta lại có

$$\frac{9}{4}\left(a^2+b^2\right)^2-2\left(a^2+b^2\right)+1=\frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{4}+\frac{4\left(a^2+b^2\right)^2-4\left(a^2+b^2\right)+1}{2}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{4}+\frac{\left[2\left(a^2+b^2\right)-1\right]^2}{2}+\frac{1}{2}\ge \frac{1}{16}+\frac{1}{2}=\frac{9}{16}$$

Do đó ta được $3\left(a^4+b^4+a^2b^2\right)-2\left(a^2+b^2\right)+1\ge \frac{9}{16}$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\frac{1}{2}$.

Bài 208. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab+bc+ca+1}{(a+b+c+1)^2}+\frac{3}{8}\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}}\ge 1$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. Bất đẳng thức có chứa căn bậc ba nên suy nghĩ rất tự nhiên là đánh giá làm mất căn bậc ba. Tuy nhiên ta không đánh giá theo hướng đó được vì đại lượng trong căn có dạng tích nên không thể dùng bất đẳng thức Cauchy để đánh giá, ngoài ra ta cũng không thể sử dụng phép đặt ẩn phụ vì như vậy đại lượng ngoài căn sẽ có bậc cao.

Để ý đến đại lượng $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ trong căn bậc ba, nếu ta đánh giá được đại lượng $\frac{ab+bc+ca+1}{(a+b+c+1)^2}$ về $\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ thì khi đó ta có thể sử dụng bất đẳng thức Cauchy để chứng minh bất đẳng thức. Với ý tưởng như vậy và chú ý đến dấu đẳng thức xảy ra ta tập trung chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{ab+bc+ca+1}{(a+b+c+1)^2}\ge\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

+ Hướng 1: Ta biến đổi tương đương bất đẳng thức trên thì được

$$\begin{aligned}&\left(a^2+b^2+c^2+1-ab-bc-ca\right)(a+b+c+abc)+2abc(ab+bc+ca)\\&\qquad+(ab+bc+ca)(a+b+c)\ge4abc(a+b+c)+3abc\end{aligned}$$

Dễ thấy $\left(a^2+b^2+c^2+1-ab-bc-ca\right)(a+b+c+abc)\ge0$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$2abc(ab+bc+ca)+\frac{2(ab+bc+ca)(a+b+c)}{3}\ge2\sqrt{\frac{4abc(ab+bc+ca)^2(a+b+c)}{3}}$$

$$\ge4\sqrt{\frac{abc.3abc(a+b+c)(a+b+c)}{3}}=4abc(a+b+c)$$

Cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta được: $\frac{(ab+bc+ca)(a+b+c)}{3}\ge3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.\sqrt[3]{abc}=3abc$

Cộng theo vế của ba bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned}&\left(a^2+b^2+c^2+1-ab-bc-ca\right)(a+b+c+abc)+2abc(ab+bc+ca)\\&\qquad+(ab+bc+ca)(a+b+c)\ge4abc(a+b+c)+3abc\end{aligned}$$

Như vậy bất đẳng thức $\frac{ab+bc+ca+1}{(a+b+c+1)^2}\ge\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ được chứng minh.

+ Hướng 2: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được: $\begin{cases}(ab+bc+ca+1)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+1\right)\ge(a+b+c+1)^2\\(ab+bc+ca+1)\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+1\right)\ge(b+c+a+1)^2\end{cases}$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức này ta được: $(ab+bc+ca+1)\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}\ge2(a+b+c+1)^2$

Từ đó suy ra $\frac{ab+bc+ca+1}{(a+b+c+1)^2}\ge\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

Như vậy với bất đẳng thức $\frac{ab+bc+ca+1}{(a+b+c+1)^2}\ge\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ ta quy bài toán về chứng minh

$$\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}+\frac{3}{8}\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}}\ge1$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}+\frac{1}{8}\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}}\ge 2\sqrt{\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.\frac{1}{8}\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}}}$$

$$=\sqrt{\sqrt[3]{\frac{a^2b^2c^2}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}}}=\sqrt[3]{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

Cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta được: $\sqrt[3]{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}}+\frac{1}{4}.\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}}\ge 2\sqrt{\frac{1}{4}}=1$

Do đó ta suy ra được: $\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}+\frac{3}{8}\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}}\ge 1$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 209. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b+c}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+a+b}}\le\sqrt{3}$$

Phân tích và lời giải

Cách 1: Dự đoán được dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. Để ý đến đại lượng a^2+b+c có thể đánh giá bằng bất đẳng thức Bunhiacopxki như sau: $(a^2+b+c)(1+b+c)\ge(a+b+c)^2$

Khi đó ta được $\frac{a}{\sqrt{a^2+b+c}}\le\frac{a\sqrt{1+b+c}}{a+b+c}$.

Áp dụng tương tự ta được: $\frac{a}{\sqrt{a^2+b+c}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+a+b}}\le\frac{a\sqrt{1+b+c}+b\sqrt{1+c+a}+c\sqrt{1+a+b}}{a+b+c}$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được: $\frac{a\sqrt{1+b+c}+b\sqrt{1+c+a}+c\sqrt{1+a+b}}{a+b+c}\le\sqrt{3}$

Hay $a\sqrt{1+b+c}+b\sqrt{1+c+a}+c\sqrt{1+a+b}\le\sqrt{3}(a+b+c)$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$a\sqrt{1+b+c}+b\sqrt{1+c+a}+c\sqrt{1+a+b}\le\sqrt{(a+b+c)(a+ab+ac+b+bc+ab+c+ca+bc)}$$

$$=\sqrt{(a+b+c)\left[a+b+c+2(ab+cb+ca)\right]}$$

Theo một đánh giá quen thuộc ta có: $(a+b+c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2)=9\Rightarrow a+b+c\le 3$

Do đó ta được $2(ab+cb+ca)\le\frac{2(a+b+c)^2}{3}\le 2(a+b+c)$

Suy ra $\sqrt{(a+b+c)\left[a+b+c+2(ab+cb+ca)\right]}\le\sqrt{3(a+b+c)^2}=\sqrt{3}(a+b+c)$

Từ đó ta có $a\sqrt{1+b+c}+b\sqrt{1+c+a}+c\sqrt{1+a+b}\le\sqrt{3}(a+b+c)$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 2: Trước hết để làm mất các dấu căn bậc hai ta chú ý đến đánh giá

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b+c}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+a+b}}\le\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{a}{a^2+b+c}+\frac{b}{b^2+c+a}+\frac{c}{c^2+a+b}\right)}$$

Ta quy bài toán về chứng minh: $(a+b+c)\left(\frac{a}{a^2+b+c}+\frac{b}{b^2+c+a}+\frac{c}{c^2+a+b}\right)\le 3$

Theo đánh giá như cách 1 ta có $a+b+c\le 3$ nên ta được

$$\left(a+b+c\right)\left(\frac{a}{a^2+b+c}+\frac{b}{b^2+c+a}+\frac{c}{c^2+a+b}\right)\le 3\left(\frac{a}{a^2+b+c}+\frac{b}{b^2+c+a}+\frac{c}{c^2+a+b}\right)$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được: $\frac{a}{a^2+b+c}+\frac{b}{b^2+c+a}+\frac{c}{c^2+a+b}\le 1$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{a}{a^2+b+c}+\frac{b}{b^2+c+a}+\frac{c}{c^2+a+b}\le \frac{a\left(1+b+c\right)+b\left(1+c+a\right)+c\left(1+a+b\right)}{\left(a+b+c\right)^2}$$

Theo một đánh giá quen thuộc ta có: $a+b+c\le \sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}=3=a^2+b^2+c^2$

Khi đó ta được

$$\frac{a\left(1+b+c\right)+b\left(1+c+a\right)+c\left(1+a+b\right)}{\left(a+b+c\right)^2}=\frac{a+b+c+2\left(ab+bc+ca\right)}{\left(a+b+c\right)^2}\le \frac{a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)}{\left(a+b+c\right)^2}=1$$

Từ đó ta được $\frac{a}{a^2+b+c}+\frac{b}{b^2+c+a}+\frac{c}{c^2+a+b}\le 1$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 210. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1-ab}{\left(a+b\right)^2}+\frac{1-bc}{\left(b+c\right)^2}+\frac{1-ca}{\left(c+a\right)^2}\ge \frac{3}{2}$$

Phân tích và lời giải

Cách 1: Chú ý đến giả thiết $a^2+b^2+c^2=1$, khi đó ta có

$$\frac{1-ab}{\left(a+b\right)^2}=\frac{2\left(a^2+b^2+c^2\right)-2ab}{2\left(a+b\right)^2}=\frac{a^2+b^2+c^2+\left(a-b\right)^2}{2\left(a+b\right)^2}+\frac{c^2}{\left(a+b\right)^2}\ge \frac{1}{2\left(a+b\right)^2}+\frac{c^2}{2\left(a+b\right)^2}$$

Khi đó ta được

$$\frac{1-ab}{\left(a+b\right)^2}+\frac{1-bc}{\left(b+c\right)^2}+\frac{1-ca}{\left(c+a\right)^2}\ge \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\left(a+b\right)^2}+\frac{1}{\left(b+c\right)^2}+\frac{1}{\left(c+a\right)^2}+\frac{c^2}{\left(a+b\right)^2}+\frac{a^2}{\left(b+c\right)^2}+\frac{b^2}{\left(c+a\right)^2}\right]$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được: $\frac{1}{\left(a+b\right)^2}+\frac{1}{\left(b+c\right)^2}+\frac{1}{\left(c+a\right)^2}+\frac{c^2}{\left(a+b\right)^2}+\frac{a^2}{\left(b+c\right)^2}+\frac{b^2}{\left(c+a\right)^2}\ge 3$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{1}{\left(a+b\right)^2}+\frac{1}{\left(b+c\right)^2}+\frac{1}{\left(c+a\right)^2}\ge \frac{9}{\left(a+b\right)^2+\left(b+c\right)^2+\left(c+a\right)^2}\ge \frac{9}{4\left(a^2+b^2+c^2\right)}=\frac{9}{4}$$

$$\frac{c^2}{\left(a+b\right)^2}+\frac{a^2}{\left(b+c\right)^2}+\frac{b^2}{\left(c+a\right)^2}\ge \frac{1}{3}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^2\ge \frac{1}{3}.\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được: $\frac{1}{\left(a+b\right)^2}+\frac{1}{\left(b+c\right)^2}+\frac{1}{\left(c+a\right)^2}+\frac{c^2}{\left(a+b\right)^2}+\frac{a^2}{\left(b+c\right)^2}+\frac{b^2}{\left(c+a\right)^2}\ge 3$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Cách 2: Để ý ta thấy $ab\le \frac{\left(a+b\right)^2}{4}$ suy ra $\frac{1-ab}{\left(a+b\right)^2}\ge \frac{1-\frac{\left(a+b\right)^2}{4}}{\left(a+b\right)^2}=\frac{1}{\left(a+b\right)^2}-\frac{1}{4}$

Áp dụng tương tự ta được: $\dfrac{1-ab}{(a+b)^2}+\dfrac{1-bc}{(b+c)^2}+\dfrac{1-ca}{(c+a)^2}\ge\dfrac{1}{(a+b)^2}+\dfrac{1}{(b+c)^2}+\dfrac{1}{(c+a)^2}-\dfrac{3}{4}$

Mà ta lại có: $\dfrac{1}{(a+b)^2}+\dfrac{1}{(b+c)^2}+\dfrac{1}{(c+a)^2}\ge\dfrac{9}{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2}\ge\dfrac{9}{4(a^2+b^2+c^2)}=\dfrac{9}{4}$

Do đó ta được $\dfrac{1-ab}{(a+b)^2}+\dfrac{1-bc}{(b+c)^2}+\dfrac{1-ca}{(c+a)^2}\ge\dfrac{9}{4}-\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{2}$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 3: Để ý đến đánh giá $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$, khi đó ta được**:** $2\ge a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$

Do đó ta được: $\dfrac{1-ab}{(a+b)^2}=\dfrac{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca-2ab}{2(a+b)^2}=\dfrac{(a-b)^2+(b+c)(c+a)}{2(a+b)^2}\ge\dfrac{(b+c)(c+a)}{2(a+b)^2}$

Áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức

$\dfrac{1-ab}{(a+b)^2}+\dfrac{1-bc}{(b+c)^2}+\dfrac{1-ca}{(c+a)^2}\ge\dfrac{(b+c)(c+a)}{2(a+b)^2}+\dfrac{(a+b)(c+a)}{2(b+c)^2}+\dfrac{(b+c)(a+b)}{2(c+a)^2}$ Mà theo bất đẳng thức

Cauchy ta có: $\dfrac{(b+c)(c+a)}{2(a+b)^2}+\dfrac{(a+b)(c+a)}{2(b+c)^2}+\dfrac{(b+c)(a+b)}{2(c+a)^2}\ge\dfrac{3}{2}$

Do đó ta được $\dfrac{1-ab}{(a+b)^2}+\dfrac{1-bc}{(b+c)^2}+\dfrac{1-ca}{(c+a)^2}\ge\dfrac{3}{2}$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 211. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2(1+bc)}+\frac{1}{b^2(1+ca)}+\frac{1}{c^2(1+ab)}\le\frac{1}{4}$$

Phân tích và lời giải

Cách 1: Dự đoán được dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=\sqrt{3}$. Biến đổi giả thiết ta được $\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}=1$.

Đến đây rất tự nhiên ta nghĩ đến phép đổi biến $x=\dfrac{1}{a};\ y=\dfrac{1}{b};\ z=\dfrac{1}{c}$, khi đó giả thiết trở thành $xy+yz+zx=1$

và bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành: $\dfrac{x^2yz}{1+yz}+\dfrac{y^2zx}{1+zx}+\dfrac{z^2xy}{1+xy}\le\dfrac{1}{4}$

Hay $\dfrac{x^2yz}{xy+yz+xz+yz}+\dfrac{y^2zx}{xy+yz+xz+zx}+\dfrac{z^2xy}{xy+yz+xz+xy}\le\dfrac{1}{4}$

Đặt $m=xy;\ n=yz;\ p=zx\Rightarrow m+n+p=1$ và bất đẳng thức trên trở thành

$$\frac{mp}{m+n+n+p}+\frac{mn}{m+p+n+p}+\frac{np}{m+n+m+p}\le\frac{1}{4}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$\dfrac{mp}{m+n+n+p}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{mp}{m+n}+\dfrac{mp}{n+p}\right);\dfrac{mn}{m+p+n+p}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{mn}{m+p}+\dfrac{mn}{n+p}\right);\dfrac{np}{m+n+m+p}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{np}{m+n}+\dfrac{np}{m+p}\right)$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được: $\dfrac{mp}{m+n+n+p}+\dfrac{mn}{m+p+n+p}+\dfrac{np}{m+n+m+p}\le\dfrac{m+n+p}{4}=1$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\sqrt{3}$.

Cách 2: Để ý đến giả thiết $a+b+c=abc$ ta được: $\dfrac{1}{a^2(1+bc)}=\dfrac{1}{a(a+abc)}=\dfrac{1}{a(a+b+a+c)}$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta được: $\dfrac{1}{a+b+a+c}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+c}\right)\le\dfrac{1}{16}\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$

Suy ra $$\frac{1}{a^2(1+bc)}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{a(a+c)}\right)$$

Hoàn toàn tương tự ta được: $\frac{1}{b^2(1+ca)}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b(b+c)}+\frac{1}{b(a+b)}\right)$; $\frac{1}{c^2(1+ab)}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{c(c+b)}+\frac{1}{c(c+a)}\right)$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{a^2(1+bc)}+\frac{1}{b^2(1+ca)}+\frac{1}{c^2(1+ab)}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{a(a+c)}+\frac{1}{b(b+c)}+\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(c+b)}+\frac{1}{c(c+a)}\right)$$

Lại có $\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{b(a+b)}=\frac{1}{ab}$, do đó ta được

$$\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{a(a+c)}+\frac{1}{b(b+c)}+\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(c+b)}+\frac{1}{c(c+a)}=\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$$

Suy ra ta được: $\frac{1}{a^2(1+bc)}+\frac{1}{b^2(1+ca)}+\frac{1}{c^2(1+ab)}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=\frac{a+b+c}{4abc}=\frac{1}{4}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 212. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b(1+a^2)}+\frac{b}{c(1+b^2)}+\frac{c}{a(1+c^2)}\ge\frac{9}{4}$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Bất đẳng thức cần chứng minh có dấu hiệu sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức, do đó ta thử tiếp cận với bất đẳng thức đó xem sao?

$$\frac{a}{b(1+a^2)}+\frac{b}{c(1+b^2)}+\frac{c}{a(1+c^2)}\ge\frac{(a+b+c)^2}{ab(1+a^2)+bc(1+b^2)+ca(1+c^2)}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được: $9(a+b+c)^2\ge4\left[ab(1+a^2)+bc(1+b^2)+ca(1+c^2)\right]$

Bất đẳng thức trên không đồng bậc và ta cần phải đánh giá đại lượng có bậc 4 về phải về đại lượng trội hơn, tuy nhiên đánh giá không khả thi, nên ta tạm dừng đánh giá này ở đây.

Chú ý đến giả thiết $ab+bc+ca=1$ khi đó ta viết được $1+a^2=(a+b)(c+a)$, hoàn toàn tương tự ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thànhg: $\frac{a}{b(a+b)(a+c)}+\frac{b}{c(a+b)(b+c)}+\frac{c}{a(c+a)(b+c)}\ge\frac{9}{4}$

Hay bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{a^2c(b+c)+b^2a(c+a)+c^2b(a+b)}{abc(a+b)(a+c)(b+c)}\ge\frac{9}{4}\Leftrightarrow\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+abc(a+b+c)}{abc(a+b)(a+c)(b+c)}\ge\frac{9}{4}$$

Dễ thấy $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+abc(a+b+c)=(ab+bc+ca)^2-abc(a+b+c)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$abc(a+b)(b+c)(c+a)\le\frac{8(ab+bc+ca)^3}{27}=\frac{8}{27}$$

$$abc(a+b+c)\le\frac{(ab+bc+ca)^2}{3}=\frac{1}{3}$$

Khi đó ta được: $\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+abc\left(a+b+c\right)}{abc\left(a+b\right)\left(a+c\right)\left(b+c\right)} \ge \dfrac{27\left(1-\dfrac{1}{3}\right)}{8}=\dfrac{9}{4}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 213. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c}{a+b+c^2}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2+a}{b+c+a^2}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2+b}{c+a+b^2}} \ge 3$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán được dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=1$. Quan sát bất đẳng thức cần chứng minh thì suy nghĩ đầu tiên là làm mất các căn bậc hai. Để ý đến chiều bất đẳng thức ta có các đánh giá như sau

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c}{a+b+c^2}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2+a}{b+c+a^2}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2+b}{c+a+b^2}} \ge 3.\sqrt[3]{\sqrt{\frac{a^2+b^2+c}{a+b+c^2}.\frac{b^2+c^2+a}{b+c+a^2}.\frac{c^2+a^2+b}{c+a+b^2}}}$$

Hoặc là $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c}{a+b+c^2}}=\dfrac{a^2+b^2+c}{\sqrt{\left(a+b+c^2\right)\left(a^2+b^2+c\right)}} \ge \dfrac{2\left(a^2+b^2+c\right)}{a+b+c^2+a^2+b^2+c}$

Ta đi tìm hiểu xem trong các đánh giá trên thì đánh giá nào giải quyết được bài toán

+ Với đánh thứ nhất ta quy bài toán về chứng minh: $\dfrac{a^2+b^2+c}{a+b+c^2}.\dfrac{b^2+c^2+a}{b+c+a^2}.\dfrac{c^2+a^2+b}{c+a+b^2} \ge 1$

Hay $\left(a^2+b^2+c\right)\left(b^2+c^2+a\right)\left(c^2+a^2+b\right) \ge \left(a+b+c^2\right)\left(b+c+a^2\right)\left(c+a+b^2\right)$

Tuy nhiên đánh giá quá phức tạp, như vậy cách thứ nhất không khả thi.

+ Với đánh giá thứ hai ta được bất đẳng thức

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c}{a+b+c^2}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2+a}{b+c+a^2}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2+b}{c+a+b^2}} \ge \frac{4\left(a^2+b^2+c^2\right)+2\left(a+b+c\right)}{a^2+b^2+c^2+a+b+c}$$

Ta quy bài toán về chứng minh: $\dfrac{4\left(a^2+b^2+c^2\right)+2\left(a+b+c\right)}{a^2+b^2+c^2+a+b+c} \ge 3$

Hay ta phải chứng minh được: $4\left(a^2+b^2+c^2\right)+6 \ge 3\left(a^2+b^2+c^2+3\right) \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \ge 3$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng vì $a^2+b^2+c^2 \ge \dfrac{\left(a+b+c\right)^2}{3}=3$.

Như vậy bài toán được chứng minh.

Bài 214. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3abc$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\left[\frac{a^4}{\left(ab+1\right)\left(ac+1\right)}+\frac{b^4}{\left(bc+1\right)\left(ab+1\right)}+\frac{c^4}{\left(ca+1\right)\left(bc+1\right)}\right] \ge \frac{27}{4}$$

Phân tích và lời giải

Dự đoán được dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=1$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy được sự phức tạp của bài toán. Bất đẳng thức trên có một số ý tưởng tiếp cận như đổi biến, sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức

Cách 1: Trước hết ta tiếp cận bài toán với ý tưởng đổi biến

Nhận thấy giả thiết của bài toán có thể viết lại được $\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}=3$, đến đây hoàn toàn tự nhiên ta nghĩ đến phép đổi biến $x=\dfrac{1}{a};\ y=\dfrac{1}{b};\ z=\dfrac{1}{c}$ khi đó giả thiết được viết lại thành $xy+yz+zx=1$ và bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\left(x+y+z\right)^2\left[\frac{yz}{x^2\left(1+xy\right)\left(1+xz\right)}+\frac{zx}{y^2\left(1+yz\right)\left(1+xy\right)}+\frac{xy}{z^2\left(1+zx\right)\left(1+yz\right)}\right]\ge\frac{27}{4}$

Ta thấy sau khi đổi biết thì thu được một bất đẳng thức còn phức tạp hơn cả bất đẳng thức ban đầu nên ta tạm dừng ý tưởng này lại.

Cũng từ giả thiết ta thử đổi biến $x=\frac{1}{bc};\ y=\frac{1}{ca};\ z=\frac{1}{ab}$ xem sao? Việc ta cần làm đó là đánh giá sao cho xuất hiên các đại lượng $ab;\ bc;\ ca$.

Dễ thấy $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}=\frac{3}{abc}$, khi đó gọi P là vế trái của bất đẳng thức thì ta thu được đánh giá

$$P\ge\frac{9}{a^2b^2c^2}\left[\frac{a^4}{\left(ab+1\right)\left(ac+1\right)}+\frac{b^4}{\left(bc+1\right)\left(ab+1\right)}+\frac{c^4}{\left(ca+1\right)\left(bc+1\right)}\right]$$

$$=9\left[\frac{a^2}{b^2c^2\left(ab+1\right)\left(ac+1\right)}+\frac{b^2}{c^2a^2\left(bc+1\right)\left(ab+1\right)}+\frac{c^2}{a^2b^2\left(ca+1\right)\left(bc+1\right)}\right]$$

$$=9\left[\frac{a^2bc}{b^3c^3\left(ab+1\right)\left(ac+1\right)}+\frac{b^2ca}{c^3a^3\left(bc+1\right)\left(ab+1\right)}+\frac{c^2ab}{a^3b^3\left(ca+1\right)\left(bc+1\right)}\right]$$

Đến đây ta có thể thay $ab=\frac{1}{z};\ bc=\frac{1}{x};\ ca=\frac{1}{y}$ vào bất đẳng thức trên thì bất đẳng thức trở thành

$$P\ge9\left[\frac{x^3}{\left(1+y\right)\left(1+z\right)}+\frac{y^3}{\left(1+z\right)\left(1+x\right)}+\frac{z^3}{\left(1+x\right)\left(1+y\right)}\right]$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được: $\frac{x^3}{\left(1+y\right)\left(1+z\right)}+\frac{y^3}{\left(1+z\right)\left(1+x\right)}+\frac{z^3}{\left(1+x\right)\left(1+y\right)}\ge\frac{3}{4}$

Bất đẳng thức trên đã được chứng minh trong kỹ thuật thêm bớt trong bất đẳng thức Cauchy.

Cách 2: Nhận thấy bất đẳng thức có dấu hiệu sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức, khi đó áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^4}{\left(ab+1\right)\left(ac+1\right)}+\frac{b^4}{\left(bc+1\right)\left(ab+1\right)}+\frac{c^4}{\left(ca+1\right)\left(bc+1\right)}\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{\left(ab+1\right)\left(ac+1\right)+\left(bc+1\right)\left(ab+1\right)+\left(ca+1\right)\left(bc+1\right)}$$

Hay ta được: $\frac{a^4}{\left(ab+1\right)\left(ac+1\right)}+\frac{b^4}{\left(bc+1\right)\left(ab+1\right)}+\frac{c^4}{\left(ca+1\right)\left(bc+1\right)}\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{abc\left(a+b+c\right)+2\left(ab+bc+ca\right)+3}$

Dễ thấy $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}$ và $a^2+b^2+c^2\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{3}$

Do đó ta được

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\left[\frac{a^4}{\left(ab+1\right)\left(ac+1\right)}+\frac{b^4}{\left(bc+1\right)\left(ab+1\right)}+\frac{c^4}{\left(ca+1\right)\left(bc+1\right)}\right]$$

$$\ge\left(\frac{9}{a+b+c}\right)^2\left[\frac{\frac{1}{3}\left(a+b+c\right)^2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{abc\left(a+b+c\right)+2\left(ab+bc+ca\right)+3}\right]=\frac{27\left(a^2+b^2+c^2\right)}{abc\left(a+b+c\right)+2\left(ab+bc+ca\right)+3}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được: $\frac{27\left(a^2+b^2+c^2\right)}{abc\left(a+b+c\right)+2\left(ab+bc+ca\right)+3}\ge\frac{27}{4}$

Hay ta cần chứng minh $4\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge abc\left(a+b+c\right)+2\left(ab+bc+ca\right)+3$

Để ý đến giả thiết $a+b+c=3abc$ ta quy bài toán về chứng minh

$$12\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge\left(a+b+c\right)^2+6\left(ab+bc+ca\right)+9$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $3abc=a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\Rightarrow abc\ge 1$.

Dễ thấy: $3\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge\left(a+b+c\right)^2; 6\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 6\left(ab+bc+ca\right); 3\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 9\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\ge 9$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được: $12\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge\left(a+b+c\right)^2+6\left(ab+bc+ca\right)+9$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 215. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{3a^2+4b^2+5}}+\frac{1}{\sqrt{3b^2+4c^2+5}}+\frac{1}{\sqrt{3c^2+4a^2+5}}\le\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{3}{abc}}$$

Phân tích và lời giải

Dễ dàng dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=1$. Trước hết ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành: $\sqrt{\frac{abc}{3a^2+4b^2+5}}+\sqrt{\frac{abc}{3b^2+4c^2+5}}+\sqrt{\frac{abc}{3c^2+4a^2+5}}\le\frac{\sqrt{3}}{2}$

Quan sát bất đẳng thức trên thì suy nghĩ rất tự nhiên là đánh giá làm mất các dấu căn bậc hai, chú ý đến chiều bất đẳng thức ta có đánh giá theo bất đẳng thức Bunhiacopxki là

$$\sqrt{\frac{abc}{3a^2+4b^2+5}}+\sqrt{\frac{abc}{3b^2+4c^2+5}}+\sqrt{\frac{abc}{3c^2+4a^2+5}}\le\sqrt{3\left(\frac{abc}{3a^2+4b^2+5}+\frac{abc}{3b^2+4c^2+5}+\frac{abc}{3c^2+4a^2+5}\right)}$$

Đến đây ta quy bài toán về chứng minh: $\frac{abc}{3a^2+4b^2+5}+\frac{abc}{3b^2+4c^2+5}+\frac{abc}{3c^2+4a^2+5}\le\frac{1}{4}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $3a^2+4b^2+5\ge 2ab+4a+6b$

Do đó ta được $\frac{abc}{3a^2+4b^2+5}\le\frac{abc}{2ab+4a+6b}$

Cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{1}{2ab+4a+6b}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2ab+4a}+\frac{1}{6b}\right)\le\frac{1}{72}\left(\frac{1}{ab}+\frac{2}{a}\right)+\frac{1}{24b}=\frac{1}{72ab}+\frac{1}{36a}+\frac{1}{24b}$$

Do đó ta được $\quad\frac{abc}{3a^2+4b^2+5}\le\frac{c}{72}+\frac{bc}{36}+\frac{ac}{24}$

Hoàn toàn tương tự ta được: $\frac{abc}{3b^2+4c^2+5}\le\frac{a}{72}+\frac{ca}{36}+\frac{ba}{24}; \frac{abc}{3c^2+4a^2+5}\le\frac{b}{72}+\frac{ab}{36}+\frac{bc}{24}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{abc}{3a^2+4b^2+5}+\frac{abc}{3b^2+4c^2+5}+\frac{abc}{3c^2+4a^2+5}\le\frac{a+b+c}{72}+\frac{5\left(ab+bc+ca\right)}{72}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được: $\frac{a+b+c}{72}+\frac{5\left(ab+bc+ca\right)}{72}\le\frac{1}{4}\Leftrightarrow ab+bc+ca\le 3$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng vì $ab+bc+ca\le\frac{\left(a+b+c\right)^2}{3}=3$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Bài 216. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$a^3+b^3+c^3+3abc\ge ab\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}+bc\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+ca\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)}$$

Dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. Quan sát bất đẳng thức trên ta có một số hướng tiếp cận như sau

Cách 1: Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử c là số nhỏ nhất trong ba số a, b, c. Khi đó ta cố gắng đánh giá bất đẳng thức xoay quanh biến c. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$bc\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}=c\sqrt{2b^2\left(b^2+c^2\right)}\le\frac{c\left(3b^2+c^2\right)}{2};ca\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)}=c\sqrt{2a^2\left(c^2+a^2\right)}\le\frac{c\left(3a^2+c^2\right)}{2}$$

Ta quy bài toán về chứng minh: $a^3+b^3+c^3+3abc\ge ab\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}+\frac{3c\left(a^2+b^2\right)}{2}+c^3$

Hay: $a^3+b^3+3abc\ge ab\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}+\frac{3c\left(a^2+b^2\right)}{2}\Leftrightarrow 2a^3+2b^3-2ab\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}\ge 3c\left(a-b\right)^2$

Ta cần biến đổi vế trái của bất đẳng thức trên sao cho xuất hiện đại lượng $\left(a-b\right)^2$.

Ta có

$$\begin{aligned}2a^3+2b^3-2ab\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}&=2\left(a+b\right)\left(a^2+b^2-ab\right)-2ab\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}\\&=\left(a+b\right)\left(a-b\right)^2+\left(a+b\right)\left(a^2+b^2\right)-2ab\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}\\&=\left(a+b\right)\left(a-b\right)^2+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\left[\left(a+b\right)\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}-4ab\right]\end{aligned}$$

Theo giả sử trên ta có $a+b\ge 2c$ do đó ta được: $\left(a+b\right)\left(a-b\right)^2\ge 2c\left(a-b\right)^2$

Mặt khác: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\ge 2;\ \left(a+b\right)\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}-4ab\ge\left(a+b\right)\left(a+b\right)-4ab=\left(a-b\right)^2$

Suy ra ta được $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\left[\left(a+b\right)\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}-4ab\right]\ge 3c\left(a-b\right)^2$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Cách 2: Cũng với ý tưởng sắp thứ tự các biến, ta giả sử $a\ge b\ge c$. Khi đó ta chú ý đến các đánh giá sau

$$2ab\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}\le a\left(a^2+b^2\right)+2ab^2;2bc\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}\le c\left(b^2+c^2\right)+2cb^2;2ca\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)}\le\frac{ca\left(c^2+a^2\right)}{b}+2abc$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$2ab\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}+2bc\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+2ca\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)}\le a^3+c^3+3b^2\left(a+c\right)+\frac{ca\left(c^2+a^2\right)}{b}+2abc$$

Ta quy bài toán về chứng minh: $a^3+b^3+c^3+3abc\ge a^3+c^3+3b^2\left(a+c\right)+\frac{ca\left(c^2+a^2\right)}{b}+2abc$

Hay $$a^3+2b^3+c^3+4abc\ge 3b^2\left(a+c\right)+\frac{ca\left(c^2+a^2\right)}{b}$$

Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được: $\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(\frac{a^2+c^2}{b}-2b+a+c\right)\ge 0$

Đánh giá trên là một đánh giá đúng vì: $\left(a-b\right)\left(b-c\right)\ge 0;\ \frac{a^2+c^2}{b}-2b+c+a\ge\frac{a^2}{b}+a-2b\ge 0$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 217. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)\left(ab+bc+ca\right)^2\ge 8a^2b^2c^2\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

Phân tích và lời giải

Cách 1: Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành: $\frac{a^2+b^2}{2ab}\cdot\frac{b^2+c^2}{2bc}\cdot\frac{c^2+a^2}{2ca}\ge\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\right)^2$

Không thể đánh giá bất đẳng thức trên bằng bất đẳng thức Cauchy hay Bunhiacopxki vì sẽ thu được những đánh giá ngược chiều nhau. Do đó ta hướng đến phép biến đổi tương đương. Khi đó bất đẳng thức trên tương đương với

$$\left[1+\frac{(a-b)^2}{2ab}\right]\left[1+\frac{(b-c)^2}{2bc}\right]\left[1+\frac{(c-a)^2}{2ca}\right]\ge\left[1+\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2(ab+bc+ca)}\right]^2$$

Đến đây để có cách đánh giá dễ dàng hơn ta có thể sắp thứ tự các biến, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a\ge b\ge c$, khi đó ta được: $\left[1+\frac{(a-b)^2}{2ab}\right]\left[1+\frac{(b-c)^2}{2bc}\right]\ge 1+\frac{(a-b)^2}{2ab}+\frac{(b-c)^2}{2bc}\ge 1+\frac{(a-c)^2}{2(ab+bc)}$

Như vậy ta cũng cần đánh giá vế phải về đại lượng $(a-c)^2$

Ta có $\quad (a-b)^2+(b-c)^2=(a-c)^2-2(a-b)(b-c)\le(a-c)^2$

Bài toán quy về chứng minh: $\left[1+\frac{(a-c)^2}{2(ab+bc)}\right]\left[1+\frac{(c-a)^2}{2ca}\right]\ge\left[1+\frac{(c-a)^2}{ab+bc+ca}\right]^2$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được: $\left[1+\frac{(a-c)^2}{2(ab+bc)}\right]\left[1+\frac{(c-a)^2}{2ca}\right]\ge\left[1+\frac{(c-a)^2}{2\sqrt{ca(ab+bc)}}\right]^2$

Mà theo bất đẳng thức Cauchy ta được $2\sqrt{ca(ab+bc)}\le ab+bc+ca$ nên ta có

$$1+\frac{(c-a)^2}{2\sqrt{ca(ab+bc)}}\ge 1+\frac{(c-a)^2}{ab+bc+ca}$$

Do đó ta được $\quad \left[1+\frac{(a-c)^2}{2(ab+bc)}\right]\left[1+\frac{(c-a)^2}{2ca}\right]\ge\left[1+\frac{(c-a)^2}{ab+bc+ca}\right]^2$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Cách 2: Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\ge 8\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

Đến đây ta đặt $x=\frac{1}{a};\ y=\frac{1}{b};\ z=\frac{1}{c}$, khi đó bất đẳng thức trên trở thành

$$\left(x^2+y^2\right)\left(y^2+z^2\right)\left(z^2+x^2\right)(x+y+z)^2\ge 8\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2z^2\right)$$

Ta thấy vế trái của bất đẳng thức có chứa đại lượng $(x+y+z)^2$ nên ta đánh giá nó về $x^2,\ y^2,\ z^2$ để có thể đổi biến tiếp. Dễ thấy $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$ và theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$2xy+2yz+2zx\ge\frac{4x^2y^2}{x^2+y^2}+\frac{4y^2z^2}{y^2+z^2}+\frac{4z^2x^2}{z^2+x^2}$$

Do đó ta được

$$\left(x^2+y^2\right)\left(y^2+z^2\right)\left(z^2+x^2\right)\left(x+y+z\right)^2$$
$$\ge\left(x^2+y^2\right)\left(y^2+z^2\right)\left(z^2+x^2\right)\left(x^2+y^2+z^2+\frac{4x^2y^2}{x^2+y^2}+\frac{4y^2z^2}{y^2+z^2}+\frac{4z^2x^2}{z^2+x^2}\right)$$

Ta quy bài toán về chứng minh.

$$\left(x^2+y^2\right)\left(y^2+z^2\right)\left(z^2+x^2\right)\left(x^2+y^2+z^2+\frac{4x^2y^2}{x^2+y^2}+\frac{4y^2z^2}{y^2+z^2}+\frac{4z^2x^2}{z^2+x^2}\right)\ge 8\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)$$

Đặt $m=x^2;\ n=y^2;\ p=z^2$, khi đó ta cần chứng minh

$$\left(m+n\right)\left(n+p\right)\left(p+m\right)\left(m+n+p+\frac{4mn}{m+n}+\frac{4np}{n+p}+\frac{4pm}{p+m}\right)\ge 8\left(mn+np+pm\right)$$

Khai triển và thu gọn ta được $mn\left(m-n\right)^2+np\left(n-p\right)^2+pm\left(p-m\right)^2\ge 0$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 218. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{c\left(c+a\right)}+\frac{bc}{a\left(a+b\right)}+\frac{ca}{b\left(b+c\right)}\ge\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}$$

Phân tích và lời giải

Cách 1: Để ý là $\frac{c}{a+c}+\frac{a}{c+a}=1$, khi đó bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{ab}{c\left(c+a\right)}+\frac{c}{c+a}+\frac{bc}{a\left(a+b\right)}+\frac{a}{a+b}+\frac{ca}{b\left(b+c\right)}+\frac{b}{b+c}\ge 3 \text{ Hay } \frac{c^2+ab}{c\left(c+a\right)}+\frac{a^2+bc}{a\left(a+b\right)}+\frac{b^2+ca}{b\left(b+c\right)}\ge 3$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được: $\frac{c^2+ab}{c\left(c+a\right)}+\frac{a^2+bc}{a\left(a+b\right)}+\frac{b^2+ca}{b\left(b+c\right)}\ge 3.\sqrt[3]{\frac{c^2+ab}{c\left(c+a\right)}.\frac{a^2+bc}{a\left(a+b\right)}.\frac{b^2+ca}{b\left(b+c\right)}}$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được: $\frac{c^2+ab}{c\left(c+a\right)}.\frac{a^2+bc}{a\left(a+b\right)}.\frac{b^2+ca}{b\left(b+c\right)}\ge 1$

Hay ta cần chứng minh: $\left(a^2+bc\right)\left(b^2+ca\right)\left(c^2+ab\right)\ge abc\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)$

Ta có $\left(a^2+bc\right)\left(b^2+ca\right)-ab\left(a+c\right)\left(b+c\right)=c\left(a+b\right)\left(a-b\right)^2$ do đó ta được

$$\left(a^2+bc\right)\left(b^2+ca\right)\ge ab\left(a+c\right)\left(b+c\right)$$

Hoàn toàn tương tự ta được: $\left(b^2+ca\right)\left(c^2+ab\right)\ge bc\left(a+b\right)\left(a+c\right);\ \left(c^2+ab\right)\left(a^2+bc\right)\ge ca\left(a+b\right)\left(b+c\right)$

Nhân theo vế các bất đẳng thức trên ta được: $\left(a^2+bc\right)\left(b^2+ca\right)\left(c^2+ab\right)\ge abc\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Cách 2: Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành: $\frac{\frac{b}{c}}{1+\frac{c}{a}}+\frac{\frac{c}{a}}{1+\frac{a}{b}}+\frac{\frac{a}{b}}{1+\frac{b}{c}}\ge\frac{1}{1+\frac{c}{a}}+\frac{1}{1+\frac{a}{b}}+\frac{1}{1+\frac{b}{c}}$

Đặt $x=\frac{a}{b};\ y=\frac{b}{c};\ z=\frac{c}{a}$, khi đó ta được $xyz=1$. Bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{y}{1+z}+\frac{z}{1+x}+\frac{x}{1+y}=\frac{1}{1+z}+\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}$$

Bất đẳng thức trên tương đương với $\frac{x-1}{1+y}+\frac{y-1}{1+z}+\frac{z-1}{1+x}\ge 0$ hay

$$\left(x^2-1\right)\left(z+1\right)+\left(y^2-1\right)\left(x+1\right)+\left(z^2-1\right)\left(y+1\right)\ge 0$$

Khai triển và thu gọn ta được $xy^2+yz^2+zx^2+x^2+y^2+z^2\ge x+y+z+3$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy và một đánh giá quen thuộc thì ta được

$$xy^2+yz^2+zx^2\ge 3;\ x^2+y^2+z^2\ge \frac{\left(x+y+z\right)\left(x+y+z\right)}{3}\ge x+y+z$$

Cộng theo về hai bất đẳng thức trên ta được: $xy^2+yz^2+zx^2+x^2+y^2+z^2\ge x+y+z+3$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 3: Dễ thấy $\dfrac{ab}{c(c+a)}-\dfrac{a}{c+a}=\dfrac{a\left(b-c\right)}{c\left(c+a\right)}$, khi đó bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{a\left(b-c\right)}{c\left(c+a\right)}+\frac{b\left(c-a\right)}{a\left(a+b\right)}+\frac{c\left(a-b\right)}{b\left(b+c\right)}\ge 0$$

Đến đây ta đặt $x=\dfrac{a+b}{2b};\ y=\dfrac{b+c}{2c};\ z=\dfrac{c+a}{2a}$.

Dễ thấy $xyz\ge 1$, khi đó ta được $\dfrac{a\left(b-c\right)}{c\left(c+a\right)}=\dfrac{\dfrac{b+c}{2c}-1}{\dfrac{c+a}{2a}}=\dfrac{y-1}{z}$. Hoàn toàn tương tự ta viết lại được bất đẳng thức cần chứng minh thành: $\dfrac{x-1}{y}+\dfrac{y-1}{z}+\dfrac{z-1}{x}\ge 0$ hay $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}\ge\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{x}{y}+\frac{x}{y}+\frac{z}{x}\ge 3.\sqrt[3]{\frac{xz}{y^2}}=\frac{3}{y};\ \frac{y}{z}+\frac{y}{z}+\frac{x}{y}\ge 3.\sqrt[3]{\frac{xy}{z^2}}=\frac{3}{z};\ \frac{z}{x}+\frac{z}{x}+\frac{y}{z}.\sqrt[3]{\frac{yz}{x^2}}=\frac{3}{x}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên và thu gọn ta được: $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}\ge\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 219. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{\sqrt{ab+bc}}+\frac{bc}{\sqrt{bc+ca}}+\frac{ca}{\sqrt{ca+ab}}\le\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Phân tích và lời giải

Cách 1: Để ý là theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta luôn có: $\dfrac{ab}{\sqrt{ab+bc}}=\dfrac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a+c}}\le\dfrac{a\sqrt{2b}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}$

Hoàn toàn tương tự ta được bất đẳng thức: $\dfrac{ab}{\sqrt{ab+bc}}+\dfrac{bc}{\sqrt{bc+ca}}+\dfrac{ca}{\sqrt{ca+ab}}\le\dfrac{a\sqrt{2b}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}+\dfrac{b\sqrt{2c}}{\sqrt{a+b}}+\dfrac{c\sqrt{2a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$

Ta quy bài toán về chứng minh: $\dfrac{2a\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}+\dfrac{2b\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{2c\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}\le 1=a+b+c$

Đặt $x=\sqrt{a};\ y=\sqrt{b};\ z=\sqrt{c}$, khi đó bất đẳng thức trở thành: $\dfrac{2x^2y}{x+z}+\dfrac{2y^2z}{x+y}+\dfrac{2z^2x}{y+z}\le x^2+y^2+z^2$

Để ý đến phép biến đổi $\dfrac{2x^2y}{z+x}=2xy-\dfrac{2xyz}{z+x}$ nên bất đẳng thức trên trở thành

$$2xy+2yz+2zx-\left(\frac{2xyz}{x+z}+\frac{2xyz}{x+y}+\frac{2xyz}{y+z}\right)\le x^2+y^2+z^2$$

Hay $\quad x^2+y^2+z^2+2xyz\left(\frac{1}{x+z}+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}\right)\ge 2xy+2yz+2zx$

Hay $\quad 2\left(x^2+y^2+z^2\right)+2xyz\left(\frac{1}{x+z}+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}\right)\ge\left(x+y+z\right)^2$

Lai thấy $2x^2+\frac{2xyz}{y+z}=\frac{2x\left(xy+yz+xz\right)}{y+z}$, hoàn toàn tương tự ta thu được bất đẳng thức

$$2\left(xy+yz+zx\right)\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)\ge\left(x+y+z\right)^2$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$2\left(xy+yz+zx\right)\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)=\left[x\left(y+z\right)+y\left(z+x\right)+z\left(x+y\right)\right]\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)\ge\left(x+y+z\right)^2$$

Như vậy bất đẳng thức trên được chứng minh xong. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Bunhacopxki ta được

$$\left(\frac{ab}{\sqrt{ab+bc}}+\frac{bc}{\sqrt{bc+ca}}+\frac{ca}{\sqrt{ca+ab}}\right)^2\le\left(ab+bc+ca\right)\left(\frac{ab}{ab+bc}+\frac{bc}{bc+ca}+\frac{ca}{ca+ab}\right)$$

$$=ab+bc+ca+\frac{ab^2}{a+b}+\frac{bc^2}{b+c}+\frac{ca^2}{c+a}$$

Ta quy bài toán về chứng minh $2\left(ab+bc+ca\right)+2\left(\frac{ab^2}{a+b}+\frac{bc^2}{b+c}+\frac{ca^2}{c+a}\right)\le 1=\left(a+b+c\right)^2$

Hay $\quad 2\left(\frac{ab^2}{a+b}+\frac{bc^2}{b+c}+\frac{ca^2}{c+a}\right)\le a^2+b^2+c^2$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $\frac{2ab^2}{a+b}\le\frac{b\left(a+b\right)^2}{2\left(a+b\right)}=\frac{b\left(a+b\right)}{2}$

Hoàn toàn tương tự ta được $2\left(\frac{ab^2}{a+b}+\frac{bc^2}{b+c}+\frac{ca^2}{c+a}\right)\le\frac{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{2}$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $\frac{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{2}\le a^2+b^2+c^2$

Hay $ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2$, đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng.
Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 3: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\left(\frac{ab}{\sqrt{ab+bc}}+\frac{bc}{\sqrt{bc+ca}}+\frac{ca}{\sqrt{ca+ab}}\right)^2$$

$$=\left(\sqrt{a+b}.\sqrt{\frac{ab^2}{\left(a+b\right)\left(a+c\right)}}+\sqrt{b+c}.\sqrt{\frac{bc^2}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)}}+\sqrt{c+a}.\sqrt{\frac{ca^2}{\left(b+c\right)\left(c+a\right)}}\right)^2$$

$$\le 2\left(a+b+c\right)\left(\frac{ab^2}{\left(a+b\right)\left(a+c\right)}+\frac{bc^2}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)}+\frac{ca^2}{\left(b+c\right)\left(c+a\right)}\right)$$

Bài toán quy về chứng minh $\dfrac{ab^2}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{bc^2}{(a+b)(b+c)}+\dfrac{ca^2}{(b+c)(c+a)}\le\dfrac{1}{4}$

Hay $$\frac{ab^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{bc^2}{(a+b)(b+c)}+\frac{ca^2}{(b+c)(c+a)}\le\frac{a+b+c}{4}$$

Bất đẳng thức trên tương đương với $4a^2b(b+c)+4b^2c(c+a)+4c^2a(a+b)\le(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c)$

Khai triển và thu gọn ta được $ab(a-b)^2+bc(b-c)^2+ca(c-a)^2\ge 0$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 220. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{(a+1)^2(b+c)}+\frac{1}{(b+1)^2(c+a)}+\frac{1}{(c+1)^2(a+b)}\le\frac{3}{8}$$

Phân tích và lời giải

Cách 1: Từ giả thiết $abc=1$, khi đó tồn tại các số dương sao cho $a=\dfrac{y}{x};\ b=\dfrac{z}{y};\ c=\dfrac{x}{z}$.

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\dfrac{x^2yz}{(x+y)^2(xy+z^2)}+\dfrac{y^2zx}{(y+z)^2(yz+x^2)}+\dfrac{z^2xy}{(z+x)^2(zx+y^2)}\le\dfrac{3}{8}$

Áp dụng bất đẳng tức Cauchy ta có: $\begin{cases} xy+z^2\ge 2z\sqrt{xy} \\ (x+y)^2=x^2+y^2+2xy\ge 2\sqrt{2xy(x^2+y^2)} \end{cases}$

Do đó ta được $\dfrac{x^2yz}{(x+y)^2(xy+z^2)}\le\dfrac{x}{4\sqrt{2(x^2+y^2)}}$

Hoàn toàn tương tự ta quy bài toán về chứng minh $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}+\dfrac{z}{\sqrt{z^2+x^2}}\le\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

Hay $$\sqrt{\frac{2x^2}{x^2+y^2}}+\sqrt{\frac{2y^2}{y^2+z^2}}+\sqrt{\frac{2z^2}{z^2+x^2}}\le 3$$

Bất đẳng thức trên đã được chứng minh bằng bất đẳng thức Bunhiacopxki bằng cách đối xứng hóa bất đẳng thức hoán vị.

Cách 2: Đặt $a=x^2;\ b=y^2;\ c=z^2$ với $x;\ y;\ z>0$, suy ra $xyz=1$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\dfrac{1}{(x^2+1)^2(y^2+z^2)}+\dfrac{1}{(y^2+1)^2(z^2+x^2)}+\dfrac{1}{(z^2+1)^2(x^2+y^2)}\le\dfrac{3}{8}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiaopxki ta có
$$\sqrt{(x^2+1)(y^2+z^2)}\ge xy+z=\frac{1}{z}+z=\frac{z^2+1}{z};\sqrt{(1+x^2)(y^2+z^2)}\ge y+zx=y+\frac{1}{y}=\frac{y^2+1}{y}$$

Do đó ta được $(x^2+1)(y^2+z^2)\ge\dfrac{(y^2+1)(z^2+1)}{yz}$. Suy ra $\dfrac{1}{(x^2+1)^2(y^2+z^2)}\le\dfrac{yz}{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}$

Hoàn toàn tương tự ta được
$$\frac{1}{(x^2+1)^2(y^2+z^2)}+\frac{1}{(y^2+1)^2(z^2+x^2)}+\frac{1}{(z^2+1)^2(x^2+y^2)}\le\frac{xy+yz+zx}{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}$$

Ta quy bài toán về chứng minh: $\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right)\geq\frac{8}{3}\left(xy+yz+zx\right)$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)\geq\left(x+y\right)^2;\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right)\geq\left(y+z\right)^2;\left(z^2+1\right)\left(x^2+1\right)\geq\left(z+x\right)^2$$

Nhân theo vế các bất đẳng thức trên ta được: $\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right)\geq\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)$

Để ý đến bất đẳng thức $\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)\geq\frac{8}{9}\left(x+y+z\right)\left(xy+yz+zx\right)$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được: $\frac{8}{9}\left(x+y+z\right)\left(xy+yz+zx\right)\geq\frac{8}{3}\left(xy+yz+zx\right)$

Hay $x+y+z\geq3$, đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng do $xyz=1$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 221. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^2}{b^2+\left(c+a\right)^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{c^2+\left(a+b\right)^2}}+\sqrt{\frac{c^2}{a^2+\left(b+c\right)^2}}\leq\frac{3}{\sqrt{5}}$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$A=\sqrt{\frac{a^2}{5\left[b^2+\left(c+a\right)^2\right]}}+\sqrt{\frac{b^2}{5\left[c^2+\left(a+b\right)^2\right]}}+\sqrt{\frac{c^2}{5\left[a^2+\left(b+c\right)^2\right]}}\leq\frac{3}{5}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được: $5\left[b^2+\left(c+a\right)^2\right]=\left(1+4\right)\left[b^2+\left(c+a\right)^2\right]\geq\left[b+2\left(c+a\right)\right]^2$

Do đó ta được $\sqrt{\frac{a^2}{5\left[b^2+\left(c+a\right)^2\right]}}\leq\sqrt{\frac{a^2}{\left[b+2\left(c+a\right)\right]^2}}=\frac{a}{b+2\left(c+a\right)}$

Chứng minh tương tự ta được: $\sqrt{\frac{b^2}{5\left[c^2+\left(a+b\right)^2\right]}}\leq\frac{b}{c+2\left(a+b\right)};\sqrt{\frac{c^2}{5\left[a^2+\left(b+c\right)^2\right]}}\leq\frac{c}{a+2\left(b+c\right)}$

Từ đó ta được $A\leq\frac{a}{b+2\left(c+a\right)}+\frac{b}{c+2\left(a+b\right)}+\frac{c}{a+2\left(b+c\right)}$,

Ta cần chứng minh $\frac{a}{b+2\left(c+a\right)}+\frac{b}{c+2\left(a+b\right)}+\frac{c}{a+2\left(b+c\right)}\leq\frac{3}{5}$ hay

$$\frac{b+2c}{b+2\left(c+a\right)}+\frac{c+2a}{c+2\left(a+b\right)}+\frac{a+2b}{a+2\left(b+c\right)}\geq\frac{9}{5}.$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{b+2c}{b+2\left(c+a\right)}+\frac{c+2a}{c+2\left(a+b\right)}+\frac{a+2b}{a+2\left(b+c\right)}$$

$$=\frac{\left(b+2c\right)^2}{\left(b+2c\right)\left[b+2\left(c+a\right)\right]}+\frac{\left(c+2a\right)^2}{\left(c+2a\right)\left[c+2\left(a+b\right)\right]}+\frac{\left(a+2b\right)^2}{\left(a+2b\right)\left[a+2\left(b+c\right)\right]}$$

$$\geq\frac{9\left(a+b+c\right)^2}{\left(b+2c\right)\left[b+2\left(c+a\right)\right]+\left(c+2a\right)\left[c+2\left(a+b\right)\right]+\left(a+2b\right)\left[a+2\left(b+c\right)\right]}$$

$$=\frac{9\left(a+b+c\right)^2}{5\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right)}=\frac{9}{5}$$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c$.

Bài 222. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{4\left(a^3+b^3+c^3\right)}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^2}\ge 4(a+b+c)$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được $\left(a^3+b^3+c^3\right)(a+b+c)\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$

Do đó ta được $\frac{4\left(a^3+b^3+c^3\right)}{a^2+b^2+c^2}=\frac{4\left(a^3+b^3+c^3\right)(a+b+c)}{\left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c)}\ge\frac{4\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{\left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c)}=\frac{4\left(a^2+b^2+c^2\right)}{a+b+c}$

Mặt khác ta lại có $(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc$, cho nên

$$8(a+b+c)(ab+bc+ca)=8(a+b)(b+c)(c+a)+8abc\le 9(a+b)(b+c)(c+a)$$

Do đó $\frac{9(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^2}\ge\frac{8(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}=\frac{8(ab+bc+ca)}{a+b+c}$

Từ các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{4\left(a^3+b^3+c^3\right)}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^2}\ge\frac{4\left(a^2+b^2+c^2\right)}{a+b+c}+\frac{8(ab+bc+ca)}{a+b+c}=4(a+b+c)$$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=c$.

Bài 223. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b}{a\sqrt{b^2+1}}+\frac{c}{b\sqrt{c^2+1}}+\frac{a}{c\sqrt{a^2+1}}\ge\frac{3}{2}$$

Lời giải

Từ giả thiết $a+b+c=abc$ suy ra $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=1$.

Đặt $x=\frac{1}{a};\ y=\frac{1}{b};\ z=\frac{1}{c}$, Khi đó giả thiết của bài toán trở thành $xy+yz+zx=1$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\frac{x}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{y}{\sqrt{z^2+1}}+\frac{z}{\sqrt{x^2+1}}\ge\frac{3}{2}$.

Dễ thấy $\sqrt{x^2+1}=\sqrt{x^2+xy+yz+zx}=\sqrt{(x+y)(x+z)}$

Tương tự ta được $\sqrt{y^2+1}=\sqrt{(y+z)(y+x)};\ \sqrt{z^2+1}=\sqrt{(z+x)(z+y)}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{x}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{y}{\sqrt{z^2+1}}+\frac{z}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{(y+x)(y+z)}}+\frac{y}{\sqrt{(z+x)(z+y)}}+\frac{z}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}$$

$$\ge\frac{2x}{x+2y+z}+\frac{2y}{x+y+2z}+\frac{2z}{2x+y+z}$$

Ta cần chứng minh $\frac{2x}{x+2y+z}+\frac{2y}{x+y+2z}+\frac{2z}{2x+y+z}\ge\frac{3}{2}$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{2x}{x+2y+z}+\frac{2y}{x+y+2z}+\frac{2z}{2x+y+z}=\frac{2x^2}{x\left(x+2y+z\right)}+\frac{2y^2}{y\left(x+y+2z\right)}+\frac{2z^2}{z\left(2x+y+z\right)}$$

$$\geq\frac{2\left(x+y+z\right)^2}{\left(x+y+z\right)^2+xy+yz+zx}\geq\frac{2\left(x+y+z\right)^2}{\left(x+y+z\right)^2+\frac{\left(x+y+z\right)^2}{3}}=\frac{3}{2}$$

Như vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=\sqrt{3}$.

Bài 224. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+3bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+3ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+3ab}}\geq\frac{3}{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+3bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+3ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+3ab}}=\frac{a^2}{a\sqrt{a^2+3bc}}+\frac{b^2}{b\sqrt{b^2+3ca}}+\frac{c^2}{c\sqrt{c^2+3ab}}$$

$$\geq\frac{\left(a+b+c\right)^2}{a\sqrt{a^2+3bc}+b\sqrt{b^2+3ca}+c\sqrt{c^2+3ab}}$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$a\sqrt{a^2+3bc}+b\sqrt{b^2+3ca}+c\sqrt{c^2+3ab}$$

$$=\sqrt{a}\sqrt{a^3+3abc}+\sqrt{b}\sqrt{b^3+3abc}+\sqrt{c}\sqrt{c^3+3abc}\leq\sqrt{\left(a+b+c\right)\left(a^3+b^3+c^3+9abc\right)}$$

Do vậy ta được: $\frac{a}{\sqrt{a^2+3bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+3ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+3ab}}\geq\frac{\left(a+b+c\right)^2}{\sqrt{\left(a+b+c\right)\left(a^3+b^3+c^3+9abc\right)}}$

Ta cần chứng minh $\frac{\left(a+b+c\right)^2}{\sqrt{\left(a+b+c\right)\left(a^3+b^3+c^3+9abc\right)}}\geq\frac{3}{2}$ Hay $\frac{\left(a+b+c\right)^3}{a^3+b^3+c^3+9abc}\geq\frac{9}{4}$

Thực hiện biến đổi tương đương bất đẳng thức ta được

$$12\left[ab\left(a+b\right)+bc\left(b+c\right)+ca\left(c+a\right)\right]\geq5\left(a^3+b^3+c^3\right)+57abc$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có $a^3+b^3+c^3\geq3abc$

Do đó $\quad 6\left(a^3+b^3+c^3+9abc\right)\geq5\left(a^3+b^3+c^3\right)+57abc$

Như vậy ta cần chứng minh: $2\left[ab\left(a+b\right)+bc\left(b+c\right)+ca\left(c+a\right)\right]\geq a^3+b^3+c^3+9abc$

Hay $\quad \left(3a-b-c\right)\left(b-c\right)^2+\left(b+c-a\right)\left(a-b\right)\left(a-c\right)\geq0$

Do a, b, c có tính đối xứng, nên không mất tính tổng quát ta chọn a lớn nhất, khi đó bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c$.

Bài 225. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{abc}{a+b-c}}+\sqrt{\frac{abc}{b+c-a}}+\sqrt{\frac{abc}{c+a-b}}\geq a+b+c$$

Lời giải

Đặt $\begin{cases}x=b+c-a\\y=c+a-b\\z=a+b-c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a=y+z\\2b=z+x\\2c=x+y\end{cases}$

Khi đó bất đẳng thức cần minh tương đương với $\sqrt{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}\right)\ge x+y+z$

Bình phương hai vế và quy đồng ta được: $(x+y)(y+z)(z+x)\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)^2\ge 8xyz(x+y+z)^2$

Hay $$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8xyz}\ge\left(\frac{x+y+z}{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}}\right)^2$$

Để ý rằng với $m\ge n>0;\ k>0$, ta có tính chất $\frac{m}{n}\ge\frac{m+k}{n+k}$

Do đó ta có: $\frac{x+y}{2\sqrt{xy}}\ge\frac{x+y+z}{2\sqrt{xy}+z};\ \frac{y+z}{2\sqrt{yz}+x}\ge\frac{x+y+z}{2\sqrt{yz}+x};\ \frac{z+x}{2\sqrt{zx}+y}\ge\frac{x+y+z}{2\sqrt{zx}+y}$

Nhân theo vế các bất đẳng thức trên ta được: $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8xyz}\ge\frac{(x+y+z)^3}{\left(2\sqrt{xy}+z\right)\left(2\sqrt{yz}+x\right)\left(2\sqrt{zx}+y\right)}$

Ta cần chứng minh: $\frac{(x+y+z)^3}{\left(2\sqrt{xy}+z\right)\left(2\sqrt{yz}+x\right)\left(2\sqrt{zx}+y\right)}\ge\left(\frac{x+y+z}{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}}\right)^2$

Hay $\left(2\sqrt{xy}+z\right)\left(2\sqrt{yz}+x\right)\left(2\sqrt{zx}+y\right)\le(x+y+z)\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)^2$

Khai triển và thu gọn ta được $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2\left(\sqrt{z}-\sqrt{x}\right)^2\ge 0$

Bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c$.

Bài 226. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b+c}{3}\ge\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{12(a+b+c)}+\sqrt[3]{abc}$$

Lời giải

Cách 1: Nhân hai vế với $12(a+b+c)$, khi đó bất đẳng thức trở thành

$$a^2+b^2+c^2+5(ab+c+ca)\ge 6\sqrt[3]{abc}(a+b+c)$$

Hay $$(a+b+c)^2+3(ab+c+ca)\ge 6\sqrt[3]{abc}(a+b+c)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$(a+b+c)^2+3(ab+c+ca)\ge 2(a+b+c)\sqrt{3(ab+c+ca)}\ge 6\sqrt[3]{abc}(a+b+c)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c$.

Cách 2: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{2(a+b+c)^2}{6(a+b+c)}-\frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{6(a+b+c)}\ge\sqrt[3]{abc}$$

Hay $$(a+b+c)^2+3(ab+bc+ca)\ge 6\sqrt[3]{abc}(a+b+c)$$

Đặt $x=\frac{3a}{a+b+c};\ y=\frac{3b}{a+b+c};\ z=\frac{3c}{a+b+c}\Rightarrow x+y+z=3$

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức với $\frac{9}{(a+b+c)^2}$ và đổi biến ta được bất đẳng thức sau

$(x+y+z)^2+3(xy+yz+zx)\ge 6\sqrt[3]{xyz}(x+y+z)$ Hay $3+xy+yz+zx\ge 6\sqrt[3]{xyz}$

Mặt khác ta lại có $xy+yz+zx \ge \sqrt{3xyz(x+y+z)} = 3\sqrt{xyz}$

Ta cần chứng minh $1+\sqrt{xyz} \ge 2\sqrt[3]{xyz}$

Đặt $t=\sqrt[6]{xyz} \Rightarrow t \le 1$, khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $1+t^3 \ge 2t^2 \Leftrightarrow (1-t)(1+t-t^2) \ge 0$

Bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c$.

Bài 227. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+2b}{2a+4b+3c^2}+\frac{b+2c}{2b+4c+3a^2}+\frac{c+2a}{2c+4a+3b^2} \le 1$$

Lời giải

Biến đổi tương đương bất đẳng thức ta được: $\frac{2(a+2b)}{2a+4b+3c^2}+\frac{2(b+2c)}{2b+4c+3a^2}+\frac{2(c+2a)}{2c+4a+3b^2} \le 2$

Hay $$1-\frac{2(a+2b)}{2a+4b+3c^2}-1+\frac{2(b+2c)}{2b+4c+3a^2}+1-\frac{2(c+2a)}{2c+4a+3b^2} \ge 1$$

Hay $$\frac{c^2}{2a+4b+3c^2}+\frac{a^2}{2b+4c+3a^2}+\frac{b^2}{2c+4a+3b^2} \ge \frac{1}{3}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{c^2}{2a+4b+3c^2}+\frac{a^2}{2b+4c+3a^2}+\frac{b^2}{2c+4a+3b^2} = \frac{c^3}{c(2a+4b+3c^2)}+\frac{a^3}{a(2b+4c+3a^2)}+\frac{b^3}{b(2c+4a+3b^2)}$$

$$\ge \frac{\left(\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3}\right)^2}{3(a^3+b^3+c^3)+6(ab+bc+ca)}$$

Ta cần chứng minh $\frac{\left(\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3}\right)^2}{3(a^3+b^3+c^3)+6(ab+bc+ca)} \ge \frac{1}{3}$ Hay $\sqrt{a^3b^3}+\sqrt{b^3c^3}+\sqrt{c^3a^3} \ge ab+bc+ca$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\sqrt{a^3b^3}+\sqrt{b^3c^3}+\sqrt{c^3a^3} = \left(\sqrt{a^3b^3}+\sqrt{ab}\right)+\left(\sqrt{b^3c^3}+\sqrt{bc}\right)+\left(\sqrt{c^3a^3}+\sqrt{ca}\right)-\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)$$

$$\ge 2(ab+bc+ca)-\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right) \ge ab+bc+ca+3-\sqrt{3(ab+bc+ca)} = ab+bc+ca$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=1$.

Bài 228. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$10(a^3+b^3+c^3)-9(a^5+b^5+c^5) \ge 1$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $(10a^3-5a^5-a)+(10b^3-5b^5-b)+(10c^3-5c^5-c) \ge 0$

Để ý rằng $10a^3-9a^5-a = a(1-a^2)(9a^2-1)$

Do đó bất đẳng thức trở thành: $a(1-a^2)(9a^2-1)+b(1-b^2)(9b^2-1)+c(1-c^2)(9c^2-1) \ge 0$

Để ý tiếp ta lại thấy: $(1+a)(9a^2-1)-\frac{8}{3}(3a-1) = \frac{1}{3}(3a+5)(3a-1)^2 \ge 0$

Hay $$(1+a)(9a^2-1) \ge \frac{8}{3}(3a-1)$$

Do đó ta có $a(1-a^2)(9a^2-1) = a(1-a)(1+a)(9a^2-1) \ge a(1-a).\frac{8}{3}(3a-1)$

Áp dụng tương tự ta được

$$a\left(1-a^2\right)\left(9a^2-1\right)+b\left(1-b^2\right)\left(9b^2-1\right)+c\left(1-c^2\right)\left(9c^2-1\right)$$

$$\ge a\left(1-a\right).\frac{8}{3}\left(3a-1\right)+b\left(1-b\right).\frac{8}{3}\left(3b-1\right)+c\left(1-c\right).\frac{8}{3}\left(3c-1\right)$$

Ta cần chứng minh $a\left(1-a\right)\left(3a-1\right)+b\left(1-b\right)\left(3b-1\right)+c\left(1-c\right)\left(3c-1\right)\ge 0$

Hay $$4\left(a^2+b^2+c^2\right)-3\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge 1$$

Do $a+b+c=1$ nên bất đẳng thức trên trở thành: $4\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a+b+c\right)-3\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge\left(a+b+c\right)^3$

Triển khai và thu gọn ta được: $ab\left(a+b\right)+bc\left(b+c\right)+ca\left(c+a\right)\ge 6abc$

Hay $$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\ge 6$$

Bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 229. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a,b,c ta có:

$$\sqrt{\frac{a^2}{a^2+7ab+b^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{b^2+7bc+c^2}}+\sqrt{\frac{c^2}{c^2+7ca+a^2}}\ge 1$$

Lời giải

Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề: Với $a,b,c>0$ và $abc=1$ ta có $P=\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{b^2+b+1}+\frac{1}{c^2+c+1}\ge 1$.

Thật vậy, đặt $\left(a;b;c\right)=\left(\frac{yz}{x^2};\frac{zx}{y^2};\frac{xy}{z^2}\right)\Rightarrow P=\frac{x^4}{x^4+y^2z^2+x^2yz}+\frac{y^4}{y^4+z^2x^2+y^2zx}+\frac{z^4}{z^4+x^2y^2+z^2yx}$.

Ta có: $P\ge\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{x^4+y^4+z^4+\left(x^2y^2+z^2x^2+y^2z^2\right)+xyz\left(x+y+z\right)}\ge\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{x^4+y^4+z^4+2\left(x^2y^2+z^2x^2+y^2z^2\right)}=1$.

Cách 1: Quay lại bài toán:Ta đặt $\left(x;y;z\right)=\left(\frac{b}{a};\frac{c}{b};\frac{a}{c}\right)\Rightarrow xyz=1$.

Khi đó vế trái bất đẳng thức đã cho trở thành $VT=\frac{1}{\sqrt{x^2+7x+1}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+7y+1}}+\frac{1}{\sqrt{z^2+7z+1}}$.

Mặt khác $t^2+7t+1-\left(t+\sqrt{t}+1\right)^2=-2\sqrt{t}\left(\sqrt{t}-1\right)^2\le 0\Rightarrow\sqrt{t^2+7t+1}\le t+\sqrt{t}+1,\ \forall t>0$.

Áp dụng với t lần lượt là x, y, z ta được:

$VT\ge\frac{1}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{y+\sqrt{y}+1}+\frac{1}{z+\sqrt{z}+1}\ge 1$ (Theo bổ đề).

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$ hay $a=b=c$.

Cách 2: Đặt $\left(a;b;c\right)=\left(\frac{yz}{x^2};\frac{zx}{y^2};\frac{xy}{z^2}\right)$. Với $\forall x,y,z>0$ ta có $\sum_{cyc}\frac{1}{x^4+x^2yz+y^2z^2}\ge 1\ (*)$.

Thật vậy, theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\sum_{cyc}\frac{1}{x^4+x^2yz+y^2z^2}\ge\frac{\left(\sum_{cyc}x^2\right)^2}{\sum_{cyc}\left(x^4+x^2yz+y^2z^2\right)}=\frac{\sum_{cyc}\left(x^2\right)^2}{\sum_{cyc}\left(x^4\right)+xyz\sum_{cyc}(x)+\sum_{cyc}\left(y^2z^2\right)}\ge\frac{\sum_{cyc}\left(x^2\right)^2}{\sum_{cyc}\left(x^4\right)+2\sum_{cyc}\left(y^2z^2\right)}=1$$

Suy ra (*) đúng, khi đó bất đẳng thức ban đầu cũng đúng.

Cách 3: Cho đi và nhận lại

Ta đặt: $(a;b;c)=\left(\frac{x}{y};\frac{y}{z};\frac{z}{x}\right)\Rightarrow\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+a+1}=\sum_{cyc}\frac{x^2}{x^2+xy+y^2}\ge 1\,(*)$

Ta đặt tiếp $\left(\frac{x^2}{x^2+xy+y^2};\frac{y^2}{y^2+yz+z^2};\frac{z^2}{z^2+zx+x^2}\right)=(A;B;C)$. Khi đó, ta lại có:

$$\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)\left(\frac{a^2}{A}+\frac{b^2}{B}+\frac{c^2}{C}-1\right)=\sum\left(\frac{a}{A}\right)^2+\sum\frac{b^2+c^2}{BC}-\sum\frac{1}{A}$$

$$=\sum\left(\left(\frac{a}{A}\right)^2-\frac{bc}{BC}\right)+\sum\frac{b^2+bc+c^2}{BC}-\sum\frac{1}{A}=\sum\left(\left(\frac{a}{A}\right)^2-\frac{bc}{BC}\right)=\frac{1}{2}\sum\left(\frac{b}{B}-\frac{c}{C}\right)^2\ge 0$$

Mà $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}>0$ luôn đúng nên suy ra $\frac{a^2}{A}+\frac{b^2}{B}+\frac{c^2}{C}-1\ge 0\Leftrightarrow\frac{a^2}{A}+\frac{b^2}{B}+\frac{c^2}{C}\ge 1$

Vậy khi bất đẳng thức (*) đúng thì bất đẳng thức ban đầu đúng

Cách 4: Chia để trị . Ta đặt $(a;b;c)=\left(\frac{x}{y};\frac{y}{z};\frac{z}{x}\right)\Rightarrow\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+a+1}=\sum_{cyc}\frac{x^2}{x^2+xy+y^2}\ge 1$ (*)

Nhân hai vế cho $\left(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx\right)$ ta có:

$$(*)=\sum_{cyc}\left(\frac{x^2\left(x^2+xy+y^2+z^2+yz+zx\right)}{x^2+xy+y^2}\right)=\sum_{cyc}\left(x^2+\frac{x^2z(x+y+z)}{x^2+xy+y^2}\right)\ge\left(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx\right)$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(\frac{x^2z(x+y+z)}{x^2+xy+y^2}\right)\ge xy+yz+zx\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(\frac{x^2z}{x^2+xy+y^2}\right)\ge\frac{xy+yz+zx}{x+y+z}$$

Thật vậy ta nhận thấy: $\sum_{cyc}\left(\frac{x^2z}{x^2+xy+y^2}\right)\ge\frac{(xy+yz+zx)^2}{\sum_{cyc}z\left(x^2+xy+y^2\right)}=\frac{xy+yz+zx}{x+y+z}$

Vậy khi bất đẳng thức (*) đúng thì bất đẳng thức ban đầu đúng

Bài 230. Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $4\left(a^3+b^3\right)+c^3=2(a+b+c)(ac+bc-2)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{2a^2}{3a^2+b^2+2a(c+2)}+\frac{b+c}{a+b+c+2}-\frac{(a+b)^2+c^2}{16}$

Lời giải

Do $a,b,c>0$ và $4\left(a^3+b^3\right)+c^3=2(a+b+c)(ac+bc-2)\Rightarrow ac+bc-2>0$

+) Ta có: $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)\ge(a+b)^3-3\left(\frac{a+b}{2}\right)^2(a+b)=\frac{1}{4}(a+b)^3$

$$\Rightarrow 4\left(a^3+b^3\right)\ge(a+b)^3\Rightarrow 4\left(a^3+b^3\right)+c^3\ge(a+b)^3+c^3=(a+b+c)\left[(a+b)^2+c^2-(a+b)c\right]$$

$$\Leftrightarrow 2(a+b+c)(ac+bc-2)\ge(a+b+c)\left[(a+b)^2+c^2-(a+b)c\right]$$

$$\Leftrightarrow 2(a+b)c-4\ge(a+b)^2+c^2-(a+b)c\Leftrightarrow 3(a+b)c\ge(a+b)^2+c^2+4$$

+) Lại có: $3(a+b)c \le 3\left(\dfrac{(a+b)+c}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}(a+b+c)^2$ và $(a+b)^2+c^2+4 \ge \dfrac{1}{2}(a+b+c)^2+4$

$\Rightarrow \dfrac{3}{4}(a+b+c)^2 \ge \dfrac{1}{2}(a+b+c)^2+4 \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \ge 16 \Rightarrow a+b+c \ge 4$

+) Mặt khác: $3a^2+b^2+2a(c+2) = 2a^2+(a^2+b^2)+2a(c+2)$

$\ge 2a^2+2ab+2a(c+2) = 2a(a+b+c+2)$

$\Rightarrow P \le \dfrac{2a^2}{2a(a+b+c+2)} + \dfrac{b+c}{a+b+c+2} - \dfrac{\frac{1}{2}(a+b+c)^2}{16} = \dfrac{a+b+c}{a+b+c+2} - \dfrac{(a+b+c)^2}{32}$

+) Đặt $t = a+b+c$, đk: $t \ge 4 \Rightarrow P \le f(t) = \dfrac{t}{t+2} - \dfrac{t^2}{32}$

Có $f'(t) = \dfrac{2}{(t+2)^2} - \dfrac{t}{16} = \dfrac{32-t^3-4t^2-4t}{16(t+2)^2} < 0, \forall t > 4$

$\Rightarrow f(t)$ nghịch biến và liên tục trên đoạn $[4;+\infty) \Rightarrow f(t) \le f(4) = \dfrac{1}{6} \Rightarrow P \le \dfrac{1}{6}$.

Vậy MaxP=$\dfrac{1}{6}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1, c=2$.

Bài 231. Cho a,b,c là các số thực không âm thay đổi thỏa mãn điều kiện $\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+2b}+\sqrt{1+2c}=5$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2a^3+b^3+c^3$

Lời giải

Ta chứng minh $\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y} \ge 1+\sqrt{1+x+y}$ $\forall x, y \ge 0$.

Thật vậy $\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y} \ge 1+\sqrt{1+x+y} \Leftrightarrow (1+x)+(1+y)+2\sqrt{(1+x)(1+y)} \ge 2+x+y+2\sqrt{1+x+y}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(1+x)(1+y)} \ge \sqrt{1+x+y} \Leftrightarrow (1+x)(1+y) \ge 1+x+y \Leftrightarrow xy \ge 0$ (đúng $\forall x, y \ge 0$).

Áp dụng: Ta có $5 = \sqrt{1+a^2}+\left(\sqrt{1+2b}+\sqrt{1+2c}\right) \ge \sqrt{1+a^2}+1+\sqrt{1+2b+2c} \ge 1+1+\sqrt{1+a^2+2b+2c}$

$\Rightarrow \sqrt{1+a^2+2b+2c} \le 3 \Leftrightarrow b+c \le 4-\dfrac{a^2}{2}$.

- Lại có $5 \ge \sqrt{1+a^2}+1+1$ (do $b,c \ge 0$) $\Rightarrow \sqrt{1+a^2} \le 3 \Rightarrow 0 \le a \le 2\sqrt{2}$.

Khi đó $P = 2a^3+b^3+c^3 \le 2a^3+(b+c)^3 \le 2a^3+\left(4-\dfrac{a^2}{2}\right)^3$.

- Xét hàm số $g(a) = 2a^3+\left(4-\dfrac{a^2}{2}\right)^3$, $a \in \left[0;2\sqrt{2}\right]$.

Có $g'(a) = 6a^2-3a\left(4-\dfrac{a^2}{2}\right)^2 = 3a\left[2a-\left(4-\dfrac{a^2}{2}\right)^2\right] = -\dfrac{3}{4}a(a-2)\left(a^3+2a^2-12a-32\right)$.

$g'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 2 \in \left[0;2\sqrt{2}\right]$.

- Bảng biến thiên

a	0		2		$2\sqrt{2}$
$g'(a)$	0	$-$	0	$+$	
$g(a)$	64	$\searrow$	24	$\nearrow$	$32\sqrt{2}$

Suy ra $\max P = g(0) = 64$ khi $a = b = 0,\ c = 4$ hoặc $a = c = 0,\ b = 4$.

Bài 232. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{2}{abc}$$

Lời giải

Cách 1:

◆ Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \ge b \ge c > 0 \Rightarrow a \in \left[1;\sqrt{3}\right]$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$P=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{2}{abc}\ge\frac{1}{a^2}+\frac{2}{bc}-\frac{2}{abc}=\frac{1}{a^2}-\frac{2}{bc}\left(1-\frac{1}{a}\right)\ge\frac{1}{a^2}-\frac{4}{b^2+c^2}\left(1-\frac{1}{a}\right).$$

$$\Rightarrow P\ge\frac{1}{a^2}+\frac{4}{3-a^2}\left(1-\frac{1}{a}\right)=\frac{3a^2-4a+3}{-a^4+3a^2}.$$

◆ Xét hàm số $f(a)=\dfrac{3a^2-4a+3}{-a^4+3a^2}$, với $a\in\left[1;\sqrt{3}\right]$.

Ta ó: $f'(a)=\dfrac{6\left(a^4-2a^3+2a^2+2a-3\right)}{a^3\left(a^2-3\right)^2}=\dfrac{6(a-1)(a+1)\left(a^2-2a+3\right)}{a^3\left(a^2-3\right)^2}\ge 0,\ \forall a\in\left[1;\sqrt{3}\right]$.

Bảng biến thiên:

a	1		$\sqrt{3}$
$f'(a)$		$+$	
a	1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $\min P = 1$ khi $a = b = c = 1$.

Cách 2: Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có: $3=a^2+b^2+c^2\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\Rightarrow abc\le 1$.

Áp dụng bđt $(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx);\forall x,y,z\in\mathbb{R}$. Ta có:

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^2\ge 3\left(\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{c^2a^2}\right)=\frac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}{a^2b^2c^2}=\frac{9}{a^2b^2c^2}\Rightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge\frac{3}{abc}$$

$\Rightarrow P=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{2}{abc}\ge\dfrac{1}{abc}\ge 1$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Vậy $\min P = 1$ khi $a = b = c = 1$.

Bài 233. Cho 3 số thực x,y,z thỏa mãn $-1-2\sqrt{2}<x<-1+2\sqrt{2}$, $y>0,z>0$ và $x+y+z=-1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{(x+y)^2}+\dfrac{1}{(x+z)^2}+\dfrac{1}{8-(y+z)^2}$

Lời giải

Ta có: $P=\dfrac{1}{\left(-1-z\right)^2}+\dfrac{1}{\left(-1-y\right)^2}+\dfrac{1}{8-\left(1+x\right)^2}=\dfrac{1}{\left(1+z\right)^2}+\dfrac{1}{\left(1+y\right)^2}+\dfrac{1}{8-\left(1+x\right)^2}$.

Ta chứng minh $\dfrac{1}{\left(1+y\right)^2}+\dfrac{1}{\left(1+z\right)^2}\ge\dfrac{1}{1+yz}$.

Thật vậy: $\dfrac{1}{\left(1+y\right)^2}+\dfrac{1}{\left(1+z\right)^2}\ge\dfrac{1}{1+yz}\Leftrightarrow\left(1+yz\right)\left[\left(1+z\right)^2+\left(1+y\right)^2\right]\ge\left[\left(1+y\right)\left(1+z\right)\right]^2$

$\Leftrightarrow\left(1+yz\right)\left(2+2z+2y+z^2+y^2\right)\ge\left(1+y+z+yz\right)^2$

$\Leftrightarrow 2\left(z+y\right)\left(1+yz\right)+2\left(1+yz\right)+\left(1+yz\right)\left(y-z\right)^2+2yz\left(1+yz\right)\ge\left(1+yz\right)^2+2\left(1+yz\right)\left(y+z\right)+\left(y+z\right)^2$

$\Leftrightarrow\left(1+yz\right)\left(y-z\right)^2+2+4yz+2y^2z^2-\left(1+yz\right)^2-\left(y-z\right)^2-4yz\ge 0$

$\Leftrightarrow yz\left(y-z\right)^2+\left(1-yz\right)^2\ge 0$ (luôn đúng). Dấu "=" xảy ra khi $y=z=1$.

Lại có $\dfrac{y+z}{2}\ge\sqrt{yz}\Rightarrow yz\le\left(\dfrac{y+z}{2}\right)^2=\dfrac{\left(-1-x\right)^2}{4}=\dfrac{\left(1+x\right)^2}{4}$.

Do đó $\dfrac{1}{\left(1+y\right)^2}+\dfrac{1}{\left(1+z\right)^2}\ge\dfrac{1}{1+yz}\ge\dfrac{1}{1+\dfrac{\left(1+x\right)^2}{4}}=\dfrac{4}{4+\left(1+x\right)^2}$

Suy ra $P\ge\dfrac{4}{4+\left(1+x\right)^2}+\dfrac{1}{8-\left(x+1\right)^2}$.

Vì $x\in\left(-1-2\sqrt{2};-1+2\sqrt{2}\right)$ nên $\left(x+1\right)^2\in\left[0;8\right)$. Đặt $t=\left(x+1\right)^2\Rightarrow t\in\left[0;8\right)$. Xét $f\left(t\right)=\dfrac{4}{4+t}+\dfrac{1}{8-t}$,

với $t\in\left[0;8\right)$. Ta có: $f'\left(t\right)=\dfrac{-3t^2+72t-240}{\left(4+t\right)^2\left(8-t\right)^2}$. Cho $f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=4\\ t=20\ (l)\end{array}\right.$.

Lập BBT cho hàm số $f\left(t\right)$ trên $\left[0;8\right)$ ta tìm được $\min\limits_{\left[0;8\right)}f\left(t\right)=\dfrac{3}{4}$ khi $t=4\Rightarrow x=-3$.

Vậy $\min P=\dfrac{3}{4}$ khi $x=-3,\ y=z=1$.

Bài 234. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c+2=abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\le\frac{3}{2}$$

Lời giải

Cách 1: Ta có: Từ giả thiết $a+b+c+2=abc\Rightarrow\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}+\dfrac{2}{abc}=1\ \left(1\right)$.

Đặt $\dfrac{1}{\sqrt{ab}}=x$, $\dfrac{1}{\sqrt{bc}}=y$, $\dfrac{1}{\sqrt{ca}}=z$. Khi đó

$$\left(1\right)\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2xyz-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-yz+\sqrt{\left(1-y^2\right)\left(1-z^2\right)}\\ x=-yz-\sqrt{\left(1-y^2\right)\left(1-z^2\right)}\end{array}\right.$$

Do $x=-yz-\sqrt{\left(1-y^2\right)\left(1-z^2\right)}<0$ nên loại.

Vậy $x=-yz+\sqrt{\left(1-y^2\right)\left(1-z^2\right)}\Leftrightarrow x+yz=\sqrt{\left(1-y^2\right)\left(1-z^2\right)}\le\dfrac{2-y^2-z^2}{2}$

Suy ra $x+\dfrac{\left(y+z\right)^2}{2}\le 1$, lại có $\left(y+z\right)^2+1\ge 2\left(y+z\right)$ nên ta có

$x+\dfrac{2\left(y+z\right)-1}{2}\le 1\Leftrightarrow x+y+z\le\dfrac{3}{2}$ tức suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2$.

Cách 2: Ta có: $a+b+c+2=abc\Rightarrow\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}+\dfrac{2}{abc}=1$.

Tồn tại $x,y,z\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ thỏa $\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{ab}},\cos y=\dfrac{1}{\sqrt{bc}};\cos z=\dfrac{1}{\sqrt{ca}}$ và

$$\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z+2\cos x\cos y\cos z=1$$
$$\Leftrightarrow\cos^2 z+2\cos x\cos y\cos z+\cos^2 x\cos^2 y=1-\cos^2 x-\cos^2 y+\cos^2 x\cos^2 y$$
$$\Leftrightarrow\left(\cos z+\cos x\cos y\right)^2=\left(1-\cos^2 x\right)\left(1-\cos^2 y\right)=\sin^2 x\sin^2 y$$
$$\Leftrightarrow\cos z+\cos x\cos y=\sin x\sin y\Leftrightarrow\cos z=-\cos\left(x+y\right)$$
$$\Leftrightarrow\cos z=\cos\left[\pi-\left(x+y\right)\right]\Leftrightarrow x+y+z=\pi.$$

Ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}=\cos x+\cos y+\cos z=\cos x+\cos y-\cos\left(x+y\right)$$
$$=\left(\cos x+\cos y\right)+\sin x\sin y-\cos x\cos y\le\frac{1}{2}\left[1+\left(\cos x+\cos y\right)^2\right]+\frac{1}{2}\left(\sin^2 x+\sin^2 y\right)-\cos x\cos y$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)+\frac{1}{2}\left(\cos^2 y+\sin^2 y\right)=\frac{3}{2}$$

Suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức sảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{\pi}{3}\Leftrightarrow a=b=c=2$

Bài 235. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+ab-a+5}+\frac{1}{b^2+bc-c+5}+\frac{1}{c^2+ca-a+5}\le\frac{1}{2}$$

Lời giải

Ta có: $a^2+ab-a+5=\left(a-1\right)^2+\left(ab+a+1\right)+3$

Do: $\begin{cases}\left(a-1\right)^2\ge 0;\forall a\\ \left(ab+a+1\right)+3\ge 2\sqrt{3\left(ab+a+1\right)}\end{cases}$ (theo BĐT Cô Si)

$$\Rightarrow a^2+ab-a+5\ge 2\sqrt{3\left(ab+a+1\right)}\Rightarrow\frac{1}{a^2+ab-a+5}\le\frac{1}{2\sqrt{3}.\sqrt{a+ab+1}}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{a+ab+1}\right).$$

$\Rightarrow\dfrac{1}{a^2+ab-a+5}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{a+ab+1}\right)$ (1). Tương tự: $\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{b^2+bc-c+5}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{b+bc+1}\right) & (2)\\ \dfrac{1}{c^2+ca-a+5}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{c+ca+1}\right) & (3)\end{cases}$

Cộng vế với vế của $(1),(2),(3)$ ta có

$$\frac{1}{a^2+ab-a+5}+\frac{1}{b^2+bc-c+5}+\frac{1}{c^2+ca-a+5}\le\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{a+ab+1}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{b+bc+1}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{c+ca+1}\right)\right]$$

$$VT\le\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+ab+1}+\frac{1}{b+bc+1}+\frac{1}{c+ca+1}\right)\Rightarrow VT\le\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+ab+1}+\frac{a}{ab+abc+a}+\frac{ab}{abc+a^2bc+ab}\right)$$

$\Rightarrow VT\le\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+ab+1}+\frac{a}{ab+1+a}+\frac{ab}{1+a+ab}\right)\Rightarrow VT\le\frac{1}{2}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 236. Cho a,b,c,d là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$2\sqrt{\frac{3a}{a+b+c}}+3\sqrt[3]{\frac{bc}{(a+b)(a+b+c+d)}}+4\sqrt[4]{\frac{2b^3d}{81(a+b)^3(a+b+c+d)}}\le\frac{25}{6}$$

Lời giải

Với a,b,c,d là các số thực dương, ta có:

+) $2\sqrt{\frac{3a}{a+b+c}}=2\sqrt{\frac{2a}{a+b}.\frac{3(a+b)}{2(a+b+c)}}\le\frac{2a}{a+b}+\frac{3(a+b)}{2(a+b+c)}$

+) $3\sqrt[3]{\frac{bc}{(a+b)(a+b+c+d)}}=3\sqrt[3]{\frac{b}{a+b}.\frac{3c}{2(a+b+c)}.\frac{2(a+b+c)}{3(a+b+c+d)}}$

$\le\frac{b}{a+b}+\frac{3c}{2(a+b+c)}+\frac{2(a+b+c)}{3(a+b+c+d)}$

+) $4\sqrt[4]{\frac{2b^3d}{81(a+b)^3(a+b+c+d)}}=4\sqrt[4]{\left(\frac{b}{3(a+b)}\right)^3.\frac{2d}{3(a+b+c+d)}}\le 3.\frac{b}{3(a+b)}+\frac{2d}{3(a+b+c+d)}$

Do đó: $P\le\frac{2a}{a+b}+\frac{3(a+b)}{2(a+b+c)}+\frac{b}{a+b}+\frac{3c}{2(a+b+c)}+\frac{2(a+b+c)}{3(a+b+c+d)}+\frac{b}{(a+b)}+\frac{2d}{3(a+b+c+d)}=\frac{25}{6}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\frac{2a}{a+b}=\frac{3(a+b)}{2(a+b+c)}\\ \frac{b}{a+b}=\frac{3c}{2(a+b+c)}=\frac{2(a+b+c)}{3(a+b+c+d)}\\ \frac{b}{3(a+b)}=\frac{2d}{3(a+b+c+d)}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{2a}{a+b}=\frac{3(a+b)}{2(a+b+c)} & (1)\\ \frac{b}{a+b}=\frac{3c}{2(a+b+c)} & (2)\\ \frac{b}{a+b}=\frac{2(a+b+c)}{3(a+b+c+d)} & (3)\\ \frac{b}{3(a+b)}=\frac{2d}{3(a+b+c+d)} & (4)\end{cases}$$

$(4)+(3)$ suy ra $\frac{4b}{3(a+b)}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow a=b$.

Thay $a=b$ lần lượt vào (1) được: $\frac{2a}{2a}=\frac{6a}{2(2a+c)}\Leftrightarrow a=c$.

Thay $b=a$ và $c=a$ vào (4), được: $\frac{a}{6a}=\frac{2d}{3(3a+d)}\Leftrightarrow a=d$.

Vậy $P \le \dfrac{25}{6}$ với mọi a, b, c, d là những số thực dương khi và chỉ khi $a = b = c = d$.

Bài 237. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c \ge 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3-a^2}{(a+b)^2}+\frac{b^3-b^2}{(b+c)^2}+\frac{c^3-c^2}{(c+a)^2} \ge 0$$

Lời giải

Ta có:

+) $\dfrac{a^3-a^2}{(a+b)^2}+\dfrac{b^3-b^2}{(b+c)^2}+\dfrac{c^3-c^2}{(c+a)^2} \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{a^3-a^2}{(a+b)^2}+1+\dfrac{b^3-b^2}{(b+c)^2}+1+\dfrac{c^3-c^2}{(c+a)^2}+1 \ge 3$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^3+2ab+b^2}{(a+b)^2}+\dfrac{b^3+2bc+c^2}{(b+c)^2}+\dfrac{c^3+2ac+a^2}{(c+a)^2} \ge 3$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có:

+) $\left[\left(\sqrt{a^3}\right)^2+\left(\sqrt{2ab}\right)^2+b^2\right].\left[\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{2ab}\right)^2+b^2\right] \ge \left(\sqrt{a^4}+2ab+b^2\right)$

$\Leftrightarrow \left(a^3+2ab+b^2\right)\left(a+2ab+b^2\right) \ge \left(a^2+2ab+b^2\right)^2 = (a+b)^4 \Rightarrow \dfrac{a^3+2ab+b^2}{(a+b)^2} \ge \dfrac{(a+b)^2}{a+2ab+b^2}$

Tương tự: $\dfrac{b^3+2bc+c^2}{(b+c)^2} \ge \dfrac{(b+c)^2}{b+2bc+c^2}; \dfrac{c^3+2ac+a^2}{(c+a)^2} \ge \dfrac{(a+c)^2}{c+2ac+a^2}$

Chuyển về bài toán chứng minh: $\dfrac{(a+b)^2}{a+2ab+b^2}+\dfrac{(b+c)^2}{b+2bc+c^2}+\dfrac{(a+c)^2}{c+2ac+a^2} \ge 3$

Theo Bất đẳng thức Schwarz, ta có: $\dfrac{(a+b)^2}{a+2ab+b^2}+\dfrac{(b+c)^2}{b+2bc+c^2}+\dfrac{(a+c)^2}{c+2ac+a^2}$

$$\ge \frac{(a+b+b+c+a+c)^2}{(a+b+c)+\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\right)} = \frac{4(a+b+c)^2}{(a+b+c)+(a+b+c)^2} = \frac{4}{\dfrac{1}{(a+b+c)}+1} \ge \frac{4}{\dfrac{1}{3}+1} = 3$$

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{2ab}} = \dfrac{b}{b} \\ \dfrac{\sqrt{b^3}}{\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{2bc}}{\sqrt{2bc}} = \dfrac{c}{c} \\ \dfrac{\sqrt{c^3}}{\sqrt{c}} = \dfrac{\sqrt{2ca}}{\sqrt{2ca}} = \dfrac{a}{a} \\ a+b+c \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1$.

Vậy với a,b,c là các số thực dương thỏa $a+b+c \ge 3$, ta luôn có

$\dfrac{a^3-a^2}{(a+b)^2}+\dfrac{b^3-b^2}{(b+c)^2}+\dfrac{c^3-c^2}{(c+a)^2} \ge 0$, dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài 238. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng:

$$P = \frac{x^4}{x^3+y^2+z^2}+\frac{y^4}{y^3+z^2+x^2}+\frac{z^4}{z^3+x^2+y^2} \ge \frac{1}{7}$$

Lời giải

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có: $\dfrac{x^4}{x^3+y^2+z^2}+\dfrac{9\left(x^3+y^2+z^2\right)}{49}\ge\dfrac{6}{7}x^2\,(1)$

Tương tự: $\dfrac{y^4}{y^3+z^2+x^2}+\dfrac{9\left(y^3+z^2+x^2\right)}{49}\ge\dfrac{6}{7}y^2\,(2)\,;\dfrac{z^4}{z^3+x^2+y^2}+\dfrac{9\left(z^3+x^2+y^2\right)}{49}\ge\dfrac{6}{7}z^2\,(3)$

Từ $(1),(2),(3)$ suy ra: $P\ge\dfrac{6}{7}\left(x^2+y^2+z^2\right)-\dfrac{9}{49}\left[\left(x^3+y^3+z^3\right)+2\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]$

$\Leftrightarrow P\ge\dfrac{3}{49}\left[8\left(x^2+y^2+z^2\right)-3\left(x^3+y^3+z^3\right)\right]$

$\Leftrightarrow P\ge\dfrac{3}{49}\left[8\left(x^2+y^2+z^2\right)-3\left[\left(x+y+z\right)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)+3xyz\right]\right]$

$\Leftrightarrow P\ge\dfrac{3}{49}\left[5\left(x^2+y^2+z^2\right)+3\left(xy+yz+zx\right)-9xyz\right]\Leftrightarrow P\ge\dfrac{3}{49}\left[\dfrac{3}{2}\left(x+y+z\right)^2+\dfrac{7}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)-9xyz\right]$

$\Leftrightarrow P\ge\dfrac{3}{49}\left[\dfrac{3}{2}\left(x+y+z\right)^2+\dfrac{7}{6}\left(x+y+z\right)^2-9\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3\right]\Leftrightarrow P\ge\dfrac{3}{49}\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{7}{6}-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{7}$

Dấu bằng xảy ra khi: $x=y=z=\dfrac{1}{3}$ (Điều phải chứng minh).

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Schwarz, ta có:

$$P=\frac{x^4}{x^3+y^2+z^2}+\frac{y^4}{y^3+z^2+x^2}+\frac{z^4}{z^3+x^2+y^2}\ge\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{x^3+y^3+z^3+2\left(x^2+y^2+z^2\right)}\quad(1).$$

Ta có: $x^3+y^3+z^3=\left(x+y+z\right)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)+3xyz$

$=x^2+y^2+z^2-\dfrac{1}{2}\left[\left(x+y+z\right)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]+3xyz$

$\le\dfrac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)-\dfrac{1}{2}+3\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3=\dfrac{3\left(x^2+y^2+z^2\right)-1}{2}+\dfrac{1}{9}\quad(2)$

Từ (1), (2) suy ra $P\ge\dfrac{18t^2}{63t-7}$, với $t=x^2+y^2+z^2\ge\dfrac{\left(x+y+z\right)^2}{3}=\dfrac{1}{3}$.

Mà $\dfrac{18t^2}{63t-7}-\dfrac{1}{7}=\dfrac{18t^2-9t+1}{7\left(9t-1\right)}=\dfrac{\left(3t-1\right)\left(6t-1\right)}{7\left(9t-1\right)}\ge0,\forall t\ge\dfrac{1}{3}$ nên ta suy ra điều phải chứng minh

Bài 238. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3+b^3}{b^2+c^2}+\frac{b^3+c^3}{c^2+a^2}+\frac{c^3+a^3}{a^2+b^2}\ge a+b+c$$

Lời giải

Ta có:

$\frac{a^3+b^3}{b^2+c^2}+\frac{b^3+c^3}{c^2+a^2}+\frac{c^3+a^3}{a^2+b^2}\ge a+b+c \Leftrightarrow \left(\frac{a^3}{b^2+c^2}+\frac{b^3}{c^2+a^2}+\frac{c^3}{a^2+b^2}\right)+\left(\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}+\frac{a^3}{a^2+b^2}\right)\ge a+b+c$

Ta có: $\frac{b^3}{b^2+c^2}=\frac{b\left(b^2+c^2\right)}{b^2+c^2}-\frac{bc^2}{b^2+c^2}\ge b-\frac{bc^2}{2bc}=b-\frac{c}{2}$ (vì $b^2+c^2\ge 2bc$).

Tương tự: $\frac{c^3}{c^2+a^2}\ge c-\frac{a}{2};\ \frac{a^3}{a^2+b^2}\ge a-\frac{b}{2}$.

Suy ra: $\left(\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}+\frac{a^3}{a^2+b^2}\right)\ge\frac{1}{2}\left(a+b+c\right)$. (*)

Ta cũng có: $\left(\frac{a^3}{b^2+c^2}+\frac{b^3}{c^2+a^2}+\frac{c^3}{a^2+b^2}\right)=\left(\frac{\left(a^2\right)^2}{a\left(b^2+c^2\right)}+\frac{\left(b^2\right)^2}{b\left(c^2+a^2\right)}+\frac{\left(c^2\right)^2}{c\left(a^2+b^2\right)}\right)$

Dùng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho hai bộ ba số $\frac{a^2}{\sqrt{a\left(b^2+c^2\right)}},\frac{b^2}{\sqrt{b\left(c^2+a^2\right)}},\frac{c^2}{\sqrt{c\left(a^2+b^2\right)}}$ và $\sqrt{a\left(b^2+c^2\right)},\sqrt{b\left(c^2+a^2\right)},\sqrt{c\left(a^2+b^2\right)}$ thì được;

$$\left(\frac{\left(a^2\right)^2}{a\left(b^2+c^2\right)}+\frac{\left(b^2\right)^2}{b\left(c^2+a^2\right)}+\frac{\left(c^2\right)^2}{c\left(a^2+b^2\right)}\right)\left(a\left(b^2+c^2\right)+b\left(c^2+a^2\right)+c\left(a^2+b^2\right)\right)\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

Tức là: $\left(\frac{\left(a^2\right)^2}{a\left(b^2+c^2\right)}+\frac{\left(b^2\right)^2}{b\left(c^2+a^2\right)}+\frac{\left(c^2\right)^2}{c\left(a^2+b^2\right)}\right)\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{\left(a\left(b^2+c^2\right)+b\left(c^2+a^2\right)+c\left(a^2+b^2\right)\right)}$, (1)

Lại có: (bất đẳng thức Bunhiacopxki)

$$a\left(b^2+c^2\right)+b\left(c^2+a^2\right)+c\left(a^2+b^2\right)=\left((ab)c+(bc)c+(ca).a\right)+\left((ac)c+(ba)a+(cb)b\right)$$
$$\le\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)}+\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)}$$
$$=2\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)}$$

Mà $\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\le\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$ (dùng bất đẳng thức: $\left(x+y+z\right)^2\ge 3\left(xy+yz+zx\right)$)

Nên $a\left(b^2+c^2\right)+b\left(c^2+a^2\right)+c\left(a^2+b^2\right)\le\frac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}$

Kết hợp (1), suy ra $\left(\frac{\left(a^2\right)^2}{a\left(b^2+c^2\right)}+\frac{\left(b^2\right)^2}{b\left(c^2+a^2\right)}+\frac{\left(c^2\right)^2}{c\left(a^2+b^2\right)}\right)\ge\frac{1}{2}\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}\ge\frac{1}{2}\left(a+b+c\right)$, (**)

Cộng (*) và (**) vế theo vế, ta được: $\left(\frac{a^3}{b^2+c^2}+\frac{b^3}{c^2+a^2}+\frac{c^3}{a^2+b^2}\right)+\left(\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}+\frac{a^3}{a^2+b^2}\right)\ge a+b+c$

Suy ra: $\frac{a^3+b^3}{b^2+c^2}+\frac{b^3+c^3}{c^2+a^2}+\frac{c^3+a^3}{a^2+b^2}\ge a+b+c$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 239. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$a\sqrt{1+b^3}+b\sqrt{1+c^3}+c\sqrt{1+a^3}\le 5$$

Lời giải

Cách 1: Do BĐT cần chứng minh bất biến khi hoán vị vòng quanh a,b,c nên không mất tính tổng quát ta giả sử b nằm giữa hai số a và c

$\Rightarrow (b-a)(b-c)\le 0 \Leftrightarrow b^2+ac\le b(a+c) \Rightarrow ab^2+bc^2+ca^2=a(b^2+ac)+bc^2\le ab(a+c)+bc^2$

$=b(a^2+ac+c^2)\le b(a+c)^2=\dfrac{1}{2}.2b.(a+c)^2\le \dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{2a+2b+2c}{3}\right)^3=4$ (Theo AM-GM)

$\Rightarrow ab^2+bc^2+ca^2\le 4$. Theo AM-GM ta có $\sqrt{1+b^3}=\sqrt{(1+b)(1-b+b^2)}\le \dfrac{2+b^2}{2}$

$\Rightarrow a\sqrt{1+b^3}\le a+\dfrac{1}{2}ab^2$. Tương tự ta có $b\sqrt{1+c^3}\le b+\dfrac{1}{2}bc^2$ và $c\sqrt{1+a^3}\le c+\dfrac{1}{2}ca^2$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được

$a\sqrt{1+b^3}+b\sqrt{1+c^3}+c\sqrt{1+a^3}\le a+b+c+\dfrac{1}{2}(ab^2+bc^2+ca^2)\le 3+\dfrac{1}{2}.4=5$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(a;b;c)$ là một trong các hoán vị của $0;1;2$.

Cách 2:

Ta có : $a\sqrt{1+b^3}+b\sqrt{1+c^3}+c\sqrt{1+a^3}=a\sqrt{(1+b)(1-b+b^2)}+b\sqrt{(1+c)(1-c+c^2)}+c\sqrt{(1+a)(1-a+a^2)}$

$\le a.\dfrac{2+b^2}{2}+b.\dfrac{2+c^2}{2}+c.\dfrac{2+a^2}{2}=a+b+c+\dfrac{1}{2}(ab^2+bc^2+ca^2)=3+\dfrac{1}{2}(ab^2+bc^2+ca^2)$ (1)

Ta sẽ chứng minh $ab^2+bc^2+ca^2\le 4$

Không mất tính tổng quát, giả sử $0\le a\le b\le c \Rightarrow a(b-a)(b-c)\le 0 \Rightarrow ab^2+a^2c\le a^2b+abc$

$\Rightarrow ab^2+bc^2+ca^2\le a^2b+abc+bc^2=b(a^2+ac+c^2)$

$=b(a+c)^2-abc\le b(3-b)^2$ (do $abc\ge 0, \forall a;b;c\ge 0$)

$=\dfrac{1}{2}.2b.(3-b)(3-b)\le \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{27}.(2b+3-b+3-b)^3$ (Cauchy) $=\dfrac{1}{54}.6^3=4 \Rightarrow ab^2+bc^2+ca^2\le 4$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow a\sqrt{1+b^3}+b\sqrt{1+c^3}+c\sqrt{1+a^3}\le 3+\dfrac{1}{2}.4=5$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=0;b=1;c=2$ và các hoán vị của vòng quanh.

Bài 240. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c+3\sqrt{abc}\ge 15$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{8}{a^2}+\frac{9b^2}{2}+\frac{c^2a^2}{4}}+\sqrt{\frac{8}{b^2}+\frac{9c^2}{2}+\frac{a^2b^2}{4}}+\sqrt{\frac{8}{c^2}+\frac{9a^2}{2}+\frac{b^2c^2}{4}}\ge 6\sqrt{6}$$

Lời giải

Ta có $\left(\dfrac{8}{a^2}+\dfrac{9b^2}{2}+\dfrac{c^2a^2}{4}\right)\left(\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(3\sqrt{2}\right)^2+2^2\right)\ge\left(\dfrac{4}{a}+9b+ca\right)^2$

$\Rightarrow \sqrt{\dfrac{8}{a^2}+\dfrac{9b^2}{2}+\dfrac{c^2a^2}{4}}\sqrt{2+18+4}\ge\sqrt{\left(\dfrac{4}{a}+9b+ca\right)^2}$

Tương tự $\sqrt{\dfrac{8}{b^2}+\dfrac{9c^2}{2}+\dfrac{a^2b^2}{4}}\sqrt{2+18+4}\ge\sqrt{\left(\dfrac{4}{b}+9c+ab\right)^2}$; $\sqrt{\dfrac{8}{c^2}+\dfrac{9a^2}{2}+\dfrac{b^2c^2}{4}}\sqrt{2+18+4}\ge\sqrt{\left(\dfrac{4}{c}+9a+bc\right)^2}$

Do đó

$$\left(\sqrt{\frac{8}{a^2}+\frac{9b^2}{2}+\frac{c^2a^2}{4}}+\sqrt{\frac{8}{b^2}+\frac{9c^2}{2}+\frac{a^2b^2}{4}}+\sqrt{\frac{8}{c^2}+\frac{9a^2}{2}+\frac{b^2c^2}{4}}\right).2\sqrt{6}\ge\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}+9(a+b+c)+ab+ac+bc$$

Ta cần chứng minh:

$$\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}+9(a+b+c)+ab+ac+bc\ge 72$$

Thật vậy, ta có: $\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}+9(a+b+c)+ab+ac+bc=\frac{4}{a}+a+\frac{4}{b}+b+\frac{4}{c}+c+8(a+b+c)+ab+ac+bc$

$\ge(4+4+4)+4(a+b+c)+(4a+bc)+(4b+ac)+(4c+ab)\ge 12+4(a+b+c)+3.4\sqrt{abc}$

$=12+4(a+b+c+3\sqrt{abc})\ge 12+4.15=72$

Vậy từ đó suy ra: $\sqrt{\frac{8}{a^2}+\frac{9b^2}{2}+\frac{c^2a^2}{4}}+\sqrt{\frac{8}{b^2}+\frac{9c^2}{2}+\frac{a^2b^2}{4}}+\sqrt{\frac{8}{c^2}+\frac{9a^2}{2}+\frac{b^2c^2}{4}}\ge 6\sqrt{6}$

Bài 241. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(a-2b+c)}{ab+1}+\frac{b(b-2c+a)}{bc+1}+\frac{c(c-2a+b)}{ca+1}\ge 0$$

Lời giải

Cách 1: Ta có: $\frac{a(a-2b+c)}{ab+1}+\frac{b(b-2c+a)}{bc+1}+\frac{c(c-2a+b)}{ca+1}\ge 0$

$\Leftrightarrow \frac{a^2-2ab+ac}{ab+1}+\frac{b^2-2bc+ba}{bc+1}+\frac{c^2-2ca+cb}{ca+1}\ge 0$

$\Leftrightarrow \frac{(a^2+1)+(ca+1)-(2ab+2)}{ab+1}+\frac{(b^2+1)+(ab+1)-(2bc+2)}{bc+1}+\frac{(c^2+1)+(bc+1)-(2ca+2)}{ca+1}\ge 0$

$\Leftrightarrow \frac{a^2+1}{ab+1}+\frac{ca+1}{ab+1}-2+\frac{b^2+1}{bc+1}+\frac{ab+1}{bc+1}-2+\frac{c^2+1}{ca+1}+\frac{bc+1}{ca+1}-2\ge 0\ (*)$.

$\Leftrightarrow \left(\frac{a^2+1}{ab+1}+\frac{b^2+1}{bc+1}+\frac{c^2+1}{ca+1}\right)+\left(\frac{ca+1}{ab+1}+\frac{ab+1}{bc+1}+\frac{bc+1}{ca+1}\right)\ge 6$

Ta đi chứng minh bất đẳng thức $(*)$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có: $\begin{cases}(a^2+1)(b^2+1)\ge(ab+1)^2\\(b^2+1)(c^2+1)\ge(bc+1)^2\\(c^2+1)(a^2+1)\ge(ca+1)^2\end{cases}$.

Suy ra: $(a^2+1)^2(b^2+1)^2(c^2+1)^2\ge(ab+1)^2(bc+1)^2(ca+1)^2$

$\Rightarrow(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)\ge(ab+1)(bc+1)(ca+1)\Rightarrow\frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}{(ab+1)(bc+1)(ca+1)}\ge 1$.

Từ đó áp dụng BĐT AM-GM ta có: $\frac{a^2+1}{ab+1}+\frac{b^2+1}{bc+1}+\frac{c^2+1}{ca+1}\ge 3\sqrt[3]{\frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}{(ab+1)(bc+1)(ca+1)}}\ge 3\ (1)$.

Mặt khác, áp dụng BĐT AM-GM ta có: $\frac{ca+1}{ab+1}+\frac{ab+1}{bc+1}+\frac{bc+1}{ca+1}\ge 3\sqrt[3]{\frac{ca+1}{ab+1}.\frac{ab+1}{bc+1}.\frac{bc+1}{ca+1}}=3\ (2)$.

Cộng vế (1) và (2) ta có:

$\left(\frac{a^2+1}{ab+1}+\frac{b^2+1}{bc+1}+\frac{c^2+1}{ca+1}\right)+\left(\frac{ca+1}{ab+1}+\frac{ab+1}{bc+1}+\frac{bc+1}{ca+1}\right)\ge 6$ hay $(*)$ được chứng minh.

Vậy $\dfrac{a(a-2b+c)}{ab+1}+\dfrac{b(b-2c+a)}{bc+1}+\dfrac{c(c-2a+b)}{ca+1}\ge 0$.

Cách 2: Ta có: $\dfrac{a(a-2b+c)}{ab+1}+\dfrac{b(b-2c+a)}{bc+1}+\dfrac{c(c-2a+b)}{ca+1}\ge 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^2-2ab+ac}{ab+1}+\dfrac{b^2-2bc+ba}{bc+1}+\dfrac{c^2-2ca+cb}{ca+1}\ge 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^2+1+(ca+1)-(2ab+2)}{ab+1}+\dfrac{b^2+1+(ab+1)-(2bc+2)}{bc+1}+\dfrac{c^2+1+(bc+1)-(2ca+2)}{ca+1}\ge 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^2}{ab+1}+\dfrac{1}{ab+1}+\dfrac{ca+1}{ab+1}-2+\dfrac{b^2}{bc+1}+\dfrac{1}{bc+1}+\dfrac{ab+1}{bc+1}-2+\dfrac{c^2}{ca+1}+\dfrac{1}{ca+1}+\dfrac{bc+1}{ca+1}-2\ge 0$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{a^2}{ab+1}+\dfrac{b^2}{bc+1}+\dfrac{c^2}{ca+1}\right)+\left(\dfrac{1}{ab+1}+\dfrac{1}{bc+1}+\dfrac{1}{ca+1}\right)+\left(\dfrac{ca+1}{ab+1}+\dfrac{ab+1}{bc+1}+\dfrac{bc+1}{ca+1}\right)\ge 6\ (*)$.

Ta đi chứng minh bất đẳng thức $(*)$.

Áp dụng BĐT Cauchy - Schwarz dạng cộng mẫu ta có: $\dfrac{a^2}{ab+1}+\dfrac{b^2}{bc+1}+\dfrac{c^2}{ca+1}\ge\dfrac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca+3}$

và $\dfrac{1}{ab+1}+\dfrac{1}{bc+1}+\dfrac{1}{ca+1}\ge\dfrac{(1+1+1)^2}{ab+bc+ca+3}$.

Cộng vế ta được: $\left(\dfrac{a^2}{ab+1}+\dfrac{b^2}{bc+1}+\dfrac{c^2}{ca+1}\right)+\left(\dfrac{1}{ab+1}+\dfrac{1}{bc+1}+\dfrac{1}{ca+1}\right)\ge\dfrac{(a+b+c)^2+9}{ab+bc+ca+3}$.

Với $\forall a;b;c>0$ ta có: $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0\Rightarrow a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$.

Suy ra: $(a+b+c)^2+9=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca+9\ge 3ab+3bc+3ca+9=3(ab+bc+ca+3)$

$\Rightarrow \dfrac{(a+b+c)^2+9}{ab+bc+ca+3}\ge\dfrac{3(ab+bc+ca+3)}{ab+bc+ca+3}=3$.

Từ đó ta có: $\left(\dfrac{a^2}{ab+1}+\dfrac{b^2}{bc+1}+\dfrac{c^2}{ca+1}\right)+\left(\dfrac{1}{ab+1}+\dfrac{1}{bc+1}+\dfrac{1}{ca+1}\right)\ge 3\ (1)$.

Mặt khác, áp dụng BĐT AM-GM ta có: $\dfrac{ca+1}{ab+1}+\dfrac{ab+1}{bc+1}+\dfrac{bc+1}{ca+1}\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{ca+1}{ab+1}.\dfrac{ab+1}{bc+1}.\dfrac{bc+1}{ca+1}}=3\ (2)$.

Cộng vế (1) và (2) ta có: $\left(\dfrac{a^2}{ab+1}+\dfrac{b^2}{bc+1}+\dfrac{c^2}{ca+1}\right)+\left(\dfrac{1}{ab+1}+\dfrac{1}{bc+1}+\dfrac{1}{ca+1}\right)+\left(\dfrac{ca+1}{ab+1}+\dfrac{ab+1}{bc+1}+\dfrac{bc+1}{ca+1}\right)\ge 6$

hay $(*)$ được chứng minh. Vậy $\dfrac{a(a-2b+c)}{ab+1}+\dfrac{b(b-2c+a)}{bc+1}+\dfrac{c(c-2a+b)}{ca+1}\ge 0$.

Bài 242. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\left(a^2+bc\right)\left(b^2+ac\right)\left(c^2+ab\right)\ge\left(a^2+ab\right)\left(b^2+bc\right)\left(c^2+ca\right)$$

Lời giải

Cách 1: Ta có: $\left(a^2+bc\right)(b+c)=b\left(a^2+c^2\right)+c\left(a^2+b^2\right)\overset{AM-GM}{\ge}2\sqrt{bc\left(a^2+c^2\right)\left(a^2+b^2\right)}$.

Mặt khác $\left(a^2+c^2\right)\ge\dfrac{(a+c)^2}{2}$ và $\left(a^2+b^2\right)\ge\dfrac{(a+b)^2}{2}$ nên suy ra

$2\sqrt{bc\left(a^2+c^2\right)\left(a^2+b^2\right)} \ge 2\sqrt{bc\dfrac{\left(a+c\right)^2}{2}\dfrac{\left(a+b\right)^2}{2}} = \sqrt{bc}.\left(a+c\right).\left(a+b\right)$.

Từ đó ta có: $\left(a^2+bc\right)\left(b+c\right) \ge \sqrt{bc}.\left(a+c\right).\left(a+b\right) \quad (1)$.

Chứng minh tương tự ta có: $\begin{cases} \left(b^2+ca\right)\left(c+a\right) \ge \sqrt{ca}.\left(b+c\right).\left(b+a\right) & (2) \\ \left(c^2+ab\right)\left(a+b\right) \ge \sqrt{ab}.\left(c+a\right).\left(c+b\right) & (3) \end{cases}$

Nhân vế $(1),(2),(3)$ ta có:

$\left(a^2+bc\right)\left(b^2+ac\right)\left(c^2+ab\right)\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right) \ge abc\left(a+b\right)^2\left(b+c\right)^2\left(c+a\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(a^2+bc\right)\left(b^2+ac\right)\left(c^2+ab\right) \ge abc\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right) = \left(a^2+ab\right)\left(b^2+bc\right)\left(c^2+ca\right)$.

Vậy $\left(a^2+bc\right)\left(b^2+ac\right)\left(c^2+ab\right) \ge \left(a^2+ab\right)\left(b^2+bc\right)\left(c^2+ca\right)$.

Cách 2: Ta có: $\left(a^2+bc\right)\left(b^2+ac\right)\left(c^2+ab\right) \ge \left(a^2+ab\right)\left(b^2+bc\right)\left(c^2+ca\right)$

$\Leftrightarrow \left(a^2+bc\right)\left(b^2+ac\right)\left(c^2+ab\right) \ge abc\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)$.

Giả sử $a \ge b \ge c > 0$.

Xét $\left(a^2+bc\right)\left(b^2+ac\right) - \left(a^2+ca\right)\left(b^2+bc\right) = a^2b^2 + a^3c + b^3c + abc^2 - a^2b^2 - a^2bc - ab^2c - abc^2$

$= a^3c + b^3c - a^2bc - ab^2c = c\left(a-b\right)^2\left(a+b\right) \ge 0; \forall a;b;c > 0$.

Suy ra: $\left(a^2+bc\right)\left(b^2+ac\right) \ge \left(a^2+ca\right)\left(b^2+bc\right) \Rightarrow \left(a^2+bc\right)\left(b^2+ac\right)\left(c^2+ab\right) \ge \left(a^2+ca\right)\left(b^2+bc\right)\left(c^2+ab\right)$

Mặt khác do $a \ge b \ge c > 0 \Rightarrow \left(c-a\right)\left(c-b\right) \ge 0 \Rightarrow c^2+ab \ge c\left(a+b\right)$.

Do đó: $\left(a^2+ca\right)\left(b^2+bc\right)\left(c^2+ab\right) \ge \left(a^2+ca\right)\left(b^2+bc\right)c\left(a+b\right) = abc\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)$.

Vậy $\left(a^2+bc\right)\left(b^2+ac\right)\left(c^2+ab\right) \ge \left(a^2+ab\right)\left(b^2+bc\right)\left(c^2+ca\right)$.

Bài 243. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$S = \frac{\sqrt{3a}+2\sqrt{bc}}{1+\sqrt{bc}+3\sqrt{a+bc}} + \frac{\sqrt{3b}+2\sqrt{ac}}{1+\sqrt{ac}+3\sqrt{b+ac}} + \frac{\sqrt{3c}+2\sqrt{ab}}{1+\sqrt{ab}+3\sqrt{c+ab}}$$

Lời giải

Ta có: $\sqrt{a+bc} = \sqrt{a(a+b+c)+bc}$ do $a+b+c=1$.

$= \sqrt{(a+b)(a+c)} \ge a+\sqrt{bc}$ (theo BĐT bunhiacopxki)

Do đó: $1+\sqrt{bc}+3\sqrt{a+bc} \ge 1+\sqrt{bc}+3(a+\sqrt{bc}) = 1+3a+4\sqrt{bc} \quad (1)$

Mặt khác: $a+\dfrac{1}{3} \ge 2\sqrt{\dfrac{a}{3}} = \dfrac{2}{3}\sqrt{3a}$ (theo BĐT Cô si)

$\Leftrightarrow \sqrt{3a} \le \dfrac{3}{2}\left(a+\dfrac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \sqrt{3a}+2\sqrt{bc} \le \dfrac{3}{2}\left(a+\dfrac{1}{3}\right)+2\sqrt{bc} = \dfrac{1}{2}\left(3a+1+4\sqrt{bc}\right) \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{\sqrt{3a}+2\sqrt{bc}}{1+\sqrt{bc}+3\sqrt{a+bc}} \le \dfrac{\frac{1}{2}\left(3a+1+4\sqrt{bc}\right)}{1+\sqrt{bc}+3\sqrt{a+bc}} \le \dfrac{\frac{1}{2}\left(3a+1+4\sqrt{bc}\right)}{3a+1+4\sqrt{bc}} = \dfrac{1}{2}$

Chứng minh tương tự: $\dfrac{\sqrt{3b}+2\sqrt{ac}}{1+\sqrt{ac}+3\sqrt{b+ac}} \le \dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{3c}+2\sqrt{ab}}{1+\sqrt{ab}+3\sqrt{c+ab}} \le \dfrac{1}{2}$

Khi đó $S \le \frac{3}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $S = \frac{3}{2}$.

Bài 244. Cho $0 \le x,\ y,\ z \le 2$ và $x + y + z = 3$. Biết $K = \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} + \sqrt{z+1}$ và $\min K \approx a,bcdef$ với $\left(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f \in \{0;1;2;...;9\}\right)$. Khi đó, tổng $S = a + b + c + d + e + f$ bằng

Lời giải

Cách 1: Không mất tính tổng quát giả sử $0 \le x \le y \le z \le 2$.

Ta có:

$$\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}\right)^2 = x+y+2+2\sqrt{xy+x+y+1} \ge (3-z)+2+2\sqrt{(3-z)+1} \ge 5-z+2\sqrt{4-z} = \left(\sqrt{4-z}+1\right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1} \ge \sqrt{4-z}+1 \Rightarrow K \ge \sqrt{4-z}+\sqrt{z+1}+1,\ 1 \le z \le 2.$$

Lại có, $\sqrt{4-z}+\sqrt{z+1} \ge \sqrt{2}+\sqrt{3}$, $1 \le z \le 2$ (*)

Thật vậy, (*) $\Leftrightarrow 4-z+z+1+2\sqrt{(4-z)(z+1)} \ge 5+2\sqrt{6}$

$\Leftrightarrow (4-z)(z+1) \ge 6 \Leftrightarrow z^2-3z+2 \le 0 \Leftrightarrow (z-1)(z-2) \le 0$ (luôn đúng với mọi $1 \le z \le 2$)

Suy ra $K \ge \sqrt{3}+\sqrt{2}+1$. Vậy $\min K = \sqrt{3}+\sqrt{2}+1 \approx 4{,}14626$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $z = 2$, $y = 1$, $x = 0 \Rightarrow a+b+c+d+e+f = 4+1+4+6+2+6 = 23$.

Cách 2: Không mất tính tổng quát giả sử $0 \le z \le y \le x \le 2$.

Ta có: $K = \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1} \ge \sqrt{x+\frac{z}{2}+1}+\sqrt{y+\frac{z}{2}+1}+1$ (1)

Thật vậy, (1) $\Leftrightarrow \left(\sqrt{z+1}-1\right)-\left(\sqrt{x+\frac{z}{2}+1}-\sqrt{x+1}\right)-\left(\sqrt{y+\frac{z}{2}+1}-\sqrt{y+1}\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow \frac{z}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{z+1}+1}-\frac{1}{\sqrt{x+\frac{z}{2}+1}+\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{z+1}+1}-\frac{1}{\sqrt{y+\frac{z}{2}+1}+\sqrt{y+1}}\right) \ge 0$ (luôn đúng với mọi $0 \le z \le y \le x \le 2$).

*) TH1: $x+\frac{z}{2} \le 2 \Rightarrow K \ge \sqrt{x+\frac{z}{2}+1}+\sqrt{y+\frac{z}{2}+1}+1 \ge 1 \Rightarrow (K-1)^2 = 5+2\sqrt{(a+1)(b+1)}$ với $a = x+\frac{z}{2}$, $b = y+\frac{z}{2}$. Do $0 \le x,\ y,\ z \le 2$ và $x+y+z = 3$ nên $\begin{cases} a+b=3 \\ 2 \ge a \ge \frac{3}{2} \ge b \ge 1 \end{cases}$.

$\Rightarrow (K-1)^2 = 5+2\sqrt{\frac{25}{4}-\left(a-\frac{3}{2}\right)^2} \ge 5+2\sqrt{\frac{25}{4}-\left(2-\frac{3}{2}\right)^2} = 5+2\sqrt{6}$. Suy ra $K \ge \sqrt{3}+\sqrt{2}+1$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = 2$, $y = 1$, $z = 0$.

*) TH2: $x+\frac{z}{2} \ge 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \le y \le 1 \Rightarrow 1 \ge 2y-1 \ge 0$.

$\Rightarrow K = \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1} \ge \sqrt{2+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{3-y-2+1} = \sqrt{3}+\sqrt{y+1}+\sqrt{2-y}$.

$\Rightarrow K\ge\sqrt{3}\Rightarrow\left(K-\sqrt{3}\right)^2=3+\sqrt{-4y^2+4y+8}=3+\sqrt{9-\left(2y-1\right)^2}\ge 3+2\sqrt{2}$. Suy ra $K\ge\sqrt{3}+\sqrt{2}+1$.

Dấu "=" xảy ra khi $x=2$, $y=1$, $z=0\Rightarrow a+b+c+d+e+f=4+1+4+6+2+6=23$.

Cách 3: Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{x+1}\\ b=\sqrt{y+1}\\ c=\sqrt{z+1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=a^2-1\\ y=b^2-1\\ z=c^2-1\end{cases}$ và $\begin{cases}1\le a,\,b,\,c\le\sqrt{3}\\ a^2+b^2+c^2=6\end{cases}$. Suy ra $K=a+b+c$.

Ta có: $\left(a-1\right)\left(b-1\right)\left(c-1\right)\ge 0\Leftrightarrow abc-\left(ab+bc+ca\right)+\left(a+b+c\right)-1\ge 0$. (1)

$\left(\sqrt{3}-a\right)\left(\sqrt{3}-b\right)\left(\sqrt{3}-c\right)\ge 0\Leftrightarrow 3\sqrt{3}-3\left(a+b+c\right)+\sqrt{3}\left(ab+bc+ca\right)-abc\ge 0$. (2)

Cộng vế với vế của (1) và (2) ta được: $3\sqrt{3}-1-2\left(a+b+c\right)+\left(\sqrt{3}-1\right)\left(ab+bc+ca\right)\ge 0$. (3)

Lại có: $\left(a+b+c\right)^2=a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)\Leftrightarrow K^2=6+2\left(ab+bc+ca\right)$

$\Leftrightarrow ab+bc+ca=\dfrac{K^2-6}{2}$ thay vào (3) ta được $3\sqrt{3}-1-2K+\left(\sqrt{3}-1\right).\dfrac{K^2-6}{2}\ge 0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{3}-1\right)K^2-4K+4\ge 0$. (4)

Xét (4) có $\Delta'=4-4\left(\sqrt{3}-1\right)=8-4\sqrt{3}=2\left(\sqrt{3}-1\right)^2$. Suy ra $\left[\begin{array}{l}K\ge\dfrac{2+\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1+\sqrt{2}\\ K\le\dfrac{2-\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1-\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Vậy $\min K=\sqrt{3}+\sqrt{2}+1\approx 4{,}14626\Rightarrow a+b+c+d+e+f=4+1+4+6+2+6=23$.

Bài 245. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=27$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge\frac{12}{a^2+63}+\frac{12}{b^2+63}+\frac{12}{c^2+63}$$

Lời giải

Cách 1: Ta có: $\dfrac{1}{a+b}\ge\dfrac{1}{\sqrt{2a^2+2b^2}}=\dfrac{6}{2\sqrt{18\left(a^2+b^2\right)}}\ge\dfrac{6}{a^2+b^2+18}$

Tương tự: $\dfrac{1}{b+c}\ge\dfrac{6}{b^2+c^2+18}$; $\dfrac{1}{a+c}\ge\dfrac{6}{a^2+c^2+18}$

Do đó: $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\ge\dfrac{6}{a^2+b^2+18}+\dfrac{6}{b^2+c^2+18}+\dfrac{6}{a^2+c^2+18}$

Ta áp dụng bất đẳng thức: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\ge\dfrac{4}{x+y}$

$$\frac{1}{a^2+b^2+18}+\frac{1}{b^2+c^2+18}\ge\frac{4}{a^2+b^2+c^2+b^2+36}=\frac{4}{b^2+63}$$

$$\frac{3}{a^2+b^2+18}+\frac{3}{b^2+c^2+18}\ge\frac{12}{b^2+63};\ \frac{3}{a^2+b^2+18}+\frac{3}{a^2+c^2+18}\ge\frac{12}{a^2+63};\ \frac{3}{a^2+c^2+18}+\frac{3}{b^2+c^2+18}\ge\frac{12}{c^2+63}$$

Vậy suy ra: $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\ge\dfrac{6}{a^2+b^2+18}+\dfrac{6}{b^2+c^2+18}+\dfrac{6}{a^2+c^2+18}\ge\dfrac{12}{a^2+63}+\dfrac{12}{b^2+63}+\dfrac{12}{c^2+63}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=3$.

Cách 2: Đặt: $\left(x;y;z\right)=\left(\dfrac{a}{3};\dfrac{b}{3};\dfrac{c}{3}\right)\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2=3\\ x+y+z\le 3\end{cases}$

Bất đẳng thức trở thành $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\ge\frac{4}{x^2+7}+\frac{4}{y^2+7}+\frac{4}{z^2+7}$

Ta có: $\frac{4}{x^2+7}=\frac{4}{x^2+1+6}\le\frac{2}{x+3}\le\frac{2}{x+x+y+z}=\frac{2}{(x+y)+(x+z)}$

$\Rightarrow\frac{4}{x^2+7}\le\frac{2}{x+x+y+z}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}\right)\Rightarrow\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\ge\frac{4}{x^2+7}+\frac{4}{y^2+7}+\frac{4}{z^2+7}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=3$.

Cách 3: Ta có: $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\ge\frac{4}{2a+b+c}=\frac{12}{2.a.3+b.3+c.3}\ge\frac{12}{a^2+9+\frac{b^2+9}{2}+\frac{c^2+9}{2}}$

Suy ra: $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\ge\frac{24}{a^2+63}$ $\quad(1)$

Tương tự: $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\ge\frac{24}{b^2+63}$ $\quad(2)$; $\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\ge\frac{24}{c^2+63}$ $\quad(3)$

Từ (1), (2), (3) ta có: $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge\frac{12}{a^2+63}+\frac{12}{b^2+63}+\frac{12}{c^2+63}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=3$.

Bài 246. Cho a,b,c là các số thực dương bất kì thỏa mãn $c=8ab$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{4a+2b+3}+\frac{c}{4bc+3c+2}+\frac{c}{2ac+3c+4}\le\frac{1}{2}$$

Lời giải

Từ $c=8ab\Leftrightarrow 2a.2b.\frac{2}{c}=1$. Đặt $2a=x^2;2b=y^2;\frac{2}{c}=z^2\Rightarrow xyz=1$.

Ta có: $P=\frac{1}{4a+2b+3}+\frac{1}{4b+3+\frac{2}{c}}+\frac{1}{2a+3+\frac{4}{c}}\Rightarrow P=\frac{1}{2x^2+y^2+3}+\frac{1}{2y^2+z^2+3}+\frac{1}{2z^2+x^2+3}$

Ta có: $2x^2+y^2+3=(x^2+y^2)+(x^2+1)+2\ge 2xy+2x+2$

Tương tự: $2y^2+z^2+3\ge 2yz+2y+2; 2z^2+x^2+3\ge 2zx+2z+2$

Suy ra

$$P\le\frac{1}{2xy+2x+2}+\frac{1}{2yz+2y+2}+\frac{1}{2zx+2z+2}=\frac{1}{2xy+2x+2}+\frac{1}{\frac{2}{x}+2y+2}+\frac{1}{2z(x+1+\frac{1}{z})}$$

$$=\frac{1}{2xy+2x+2}+\frac{x}{2+2xy+2x}+\frac{xy}{2(x+1+xy)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy+x+1}+\frac{x}{xy+x+1}+\frac{xy}{xy+x+1}\right)=\frac{1}{2}$$

Bài 247. Cho a,b,c là các số thực dương bất kì thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{2a^3+1}+\frac{b}{2b^3+1}+\frac{c}{2c^3+1}\le 1$$

Lời giải

Đặt $P=\frac{a}{2a^3+1}+\frac{b}{2b^3+1}+\frac{c}{2c^3+1}$ Ta cần chứng minh: $P\le 1\Leftrightarrow 2P\le 2$

Ta có: $(a-1)^2\ge 0\Leftrightarrow 2a\le a^2+1\Leftrightarrow 2a^5+2a^3+2a\le 2a^5+2a^3+a^2+1$

$$\Leftrightarrow 2a(a^4+a^2+1)\le (a^2+1)(2a^3+1)\Leftrightarrow \frac{2a}{2a^3+1}\le \frac{a^2+1}{a^4+a^2+1}=1-\frac{a^4}{a^4+a^2+1}$$

Tương tự: $\frac{2b}{2b^3+1}\le 1-\frac{b^4}{b^4+b^2+1};\frac{2c}{2c^3+1}\le 1-\frac{c^4}{c^4+c^2+1}$

Do đó: $2P\le 3-\left(\frac{a^4}{a^4+a^2+1}+\frac{b^4}{b^4+b^2+1}+\frac{c^4}{c^4+c^2+1}\right)$

Ta chỉ cần chứng minh: $3-\left(\frac{a^4}{a^4+a^2+1}+\frac{b^4}{b^4+b^2+1}+\frac{c^4}{c^4+c^2+1}\right)\le 2$. Thật vậy, ta có:

$$\Leftrightarrow \frac{a^4}{a^4+a^2+1}+\frac{b^4}{b^4+b^2+1}+\frac{c^4}{c^4+c^2+1}\ge 1\Leftrightarrow \frac{1}{\left(\frac{1}{a^2}\right)^2+\frac{1}{a^2}+1}+\frac{1}{\left(\frac{1}{b^2}\right)^2+\frac{1}{b^2}+1}+\frac{1}{\left(\frac{1}{c^2}\right)^2+\frac{1}{c^2}+1}\ge 1 \quad (1)$$

Do $abc=1$ nên tồn tại $x,y,z>0$ thỏa mãn $a^2=\frac{z^2}{xy};b^2=\frac{x^2}{yz};c^2=\frac{y^2}{zx}$

$$(1)\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{x^2y^2}{z^4}+\frac{xy}{z^2}+1}+\frac{1}{\frac{y^2z^2}{x^4}+\frac{yz}{x^2}+1}+\frac{1}{\frac{z^2x^2}{y^4}+\frac{zx}{y^2}+1}\ge 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{z^4}{x^2y^2+xyz^2+z^4}+\frac{x^4}{y^2z^2+yzx^2+x^4}+\frac{y^4}{z^2x^2+zxy^2+y^4}\ge 1$$

Áp dụng hệ quả của BĐT Cauchy – Schwarz dạng phân thức. Ta có:

$$\frac{z^4}{x^2y^2+xyz^2+z^4}+\frac{x^4}{y^2z^2+yzx^2+x^4}+\frac{y^4}{z^2x^2+zxy^2+y^4}\ge \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^4+y^4+z^4+(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+xyz^2+yzx^2+zxy^2}$$

$$\ge \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^4+y^4+z^4+(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)}=\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)}=1$$

($xyz^2+yzx^2+zxy^2\le x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$ Do bất đẳng thức phụ $ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2$)

(1) Được chứng minh $\Leftrightarrow$ BĐT được chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài 248. Cho a,b,c là các số thực không âm bất kì thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a)>0$ và $a\ge \max\{b,c\}$

Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\frac{11}{2}\left(\sqrt{\frac{b}{a+c}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\right)+2\sqrt{\frac{a+7(b+c)}{a}}>\frac{15}{2}$

Lời giải

\+ Đặt $\frac{b}{a}=x,\frac{c}{a}=y$ khi đó $x\le 1,y\le 1$ và bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\sqrt{\frac{1}{x+y}}+\frac{11}{2}\left(\sqrt{\frac{x}{1+y}}+\sqrt{\frac{y}{1+x}}\right)+2\sqrt{1+7(x+y)}>\frac{15}{2}. \qquad (*)$$

\+ Bằng biện pháp biến đổi tương đương ta dễ dàng chứng tỏ được: $\sqrt{\frac{x}{1+y}}\ge \frac{x}{\sqrt{x+y}}$ và $\sqrt{\frac{y}{1+x}}\ge \frac{y}{\sqrt{x+y}}$

Thật vậy ta có: $\sqrt{\frac{x}{1+y}}\ge \frac{x}{\sqrt{x+y}}\Leftrightarrow \frac{x}{1+y}\ge \frac{x^2}{x+y}\Leftrightarrow x\left(x+y-x(1+y)\right)\ge 0\Leftrightarrow xy(1-x)\ge 0$

(đúng vì $0\le x,y\le 1$)

Hoàn toàn tương tự ta cũng chứng tỏ được $\sqrt{\dfrac{y}{1+x}} \ge \dfrac{y}{\sqrt{x+y}}$.

+ Khi đó vế trái của BĐT (*) được đánh giá như sau: $VT_{(*)} \ge \sqrt{\dfrac{1}{x+y}} + \dfrac{11}{2}\sqrt{x+y} + 2\sqrt{1+7(x+y)}$.

+ Xét hàm số $f(t) = \dfrac{1}{t} + \dfrac{11}{2}t + 2\sqrt{1+7t^2}$; $(0 < t \le 2)$. $f'(t) = -\dfrac{1}{t^2} + \dfrac{11}{2} + \dfrac{14t}{\sqrt{1+7t^2}} = 0$ (1)

Giải phương trình (1) bằng phép biến đổi thành phương trình hệ quả như sau:

$(1) \Rightarrow \dfrac{14^2 t^2}{1+7t^2} = \left(\dfrac{11}{2} - \dfrac{1}{t^2}\right)^2 \Rightarrow t^2 = \dfrac{1}{9} \Rightarrow t = \dfrac{1}{3}$ (vì $0 < t \le 2$)

Thử lại ta thấy $t = \dfrac{1}{3}$ là nghiệm duy nhất của (1) trên $(0;2]$

Mà ta lại thấy $f'(2) > 0$ và $f'(t)$ liên tục trên $(0;2]$. Do đó $f'(t) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} < t \le 2$ và

$f'(t) < 0 \Leftrightarrow 0 < t < \dfrac{1}{3}$. Từ đó suy ra $f(t) \ge f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{15}{2}$. Khi đó $VT_{(*)} = f(t) \ge \dfrac{15}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 0$ mâu thuẫn giả thiết nên $VT_{(*)} = f(t) > \dfrac{15}{2}$

Bài 249. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $b^2 \ge ac$ và $c^2 \ge ab$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của

$$P = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{3c}{a+c}$$

Lời giải

Đặt $x = \dfrac{b}{a}; y = \dfrac{c}{a}$ ta có giả thiết $x > 0; y > 0; x^2 \ge y; y^2 \ge x$. Từ đó ta có $\sqrt{x} \le y \le x^2$ nên $x \ge 1$.

Với $x = 1$ thì $y = 1$ và $P = \dfrac{5}{2}$. Ta có $P = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{x}{x+y} + \dfrac{3y}{1+y}$. Trước hết coi P là hàm ẩn y với tham số $x \ge 1$, ta xét tính biến thiên của hàm P trên $\left[\sqrt{x}; x^2\right]$ với mọi $x > 1$.

Ta có $P' = \dfrac{-x}{(x+y)^2} + \dfrac{3}{(y+1)^2} = \dfrac{(3-x)y^2 + 4x.y + 3x^2 - x}{(x+y)^2(y+1)^2} = \dfrac{g(y)}{(x+y)^2(y+1)^2}$.

Với $x = 3$ thì $P' = \dfrac{12y+24}{(x+y)^2(y+1)^2} > 0 \quad \forall y \in \left[\sqrt{x}; x^2\right]$ nên P đồng biến trên $\left[\sqrt{x}; x^2\right]$.

Với $x \ne 3$ thì $g(y)$ có $\Delta' = 3x(x-1)^2 > 0 \quad \forall x > 1$ nên $g(y)$ luôn có hai nghiệm phân biệt $y_1; y_2$

Nếu $x > 3$ thì $\begin{cases} 3 - x < 0 \\ g\left(\sqrt{x}\right) = (3-x)x + 4x\sqrt{x} + 3x^2 - x > 0 \qquad \forall x > 3 \\ g\left(x^2\right) = (3-x)x^2 + 4x.x^2 + 3x^2 - x > 0 \end{cases}$

nên $g(y) > 0 \quad \forall y \in \left[\sqrt{x}; x^2\right]$ hay $P' > 0 \quad \forall y \in \left[\sqrt{x}; x^2\right]$ nên P đồng biến trên $\left[\sqrt{x}; x^2\right]$.

Nếu $1 < x < 3$ thì $\begin{cases} y_1 + y_2 = \dfrac{-4x}{3-x} < 0 \\ y_1.y_2 = \dfrac{3x^2 - x}{3-x} > 0 \end{cases} \quad \forall x \in (1;3)$ nên $y_1 < y_2 < 0 < \sqrt{x} < x^2$

nên $g(y)>0\ \forall y\in\left[\sqrt{x};x^2\right]$ hay $P'>0\ \forall y\in\left[\sqrt{x};x^2\right]$ nên P đồng biến trên $\left[\sqrt{x};x^2\right]$.

Vậy với mọi $x>1$ ta luôn có P đồng biến trên $\left[\sqrt{x};x^2\right]$, do đó

$\min P=P\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x+\sqrt{x}}+\frac{3\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=\frac{1}{x+1}+\frac{4x}{x+\sqrt{x}}$. Đặt $\sqrt{x}=t$ ta được

$\min P=u(t)=\frac{1}{t^2+1}+\frac{4t}{t+1}$. Khảo sát $u(t)=\frac{1}{t^2+1}+\frac{4t}{t+1}$ trên $[1;+\infty)$ ta có

$u'(t)=\frac{4}{(t+1)^2}-\frac{2t}{(t^2+1)^2}=\frac{4t^4-2t^3+4t^2-2t+4}{(t+1)^2(t^2+1)^2}>0\ \forall x\in(1;+\infty)$ do đó $u(t)$ đồng biến trên $[1;+\infty]$, mà

$u(1)=\frac{5}{2}$ nên $u(t)>\frac{5}{2}\quad\forall t\in(1;+\infty)$ tức $P>\frac{5}{2}\ \forall x\in(1;+\infty)$. Vậy $\min P=\frac{5}{2}$ khi $x=y=1\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 250. Cho x,y,z là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{2x^2+xy}{\left(y+\sqrt{zx}+z\right)^2}+\frac{2y^2+yz}{\left(z+\sqrt{xy}+x\right)^2}+\frac{2z^2+zx}{\left(x+\sqrt{yz}+y\right)^2}\ge 1$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiakovsky ta có: $\left(y+\sqrt{zx}+z\right)^2=\left(\sqrt{y}.\sqrt{y}+\sqrt{z}.\sqrt{x}+\sqrt{z}.\sqrt{z}\right)^2\le(y+2z)(x+y+z)$

Do đó: $\frac{2x^2+xy}{\left(y+\sqrt{zx}+z\right)^2}\ge\frac{1}{x+y+z}.\frac{2x^2+xy}{y+2z}=\frac{1}{x+y+z}.\left(\frac{2x^2+2xy+2xz}{y+2z}-x\right)=\frac{2x}{y+2z}-\frac{x}{x+y+z}$. (1)

Tương tự ta có: $\frac{2y^2+yz}{\left(z+\sqrt{xy}+x\right)^2}\ge\frac{2y}{z+2x}-\frac{y}{x+y+z}$. (2); $\frac{2z^2+zx}{\left(x+\sqrt{yz}+y\right)^2}\ge\frac{2z}{x+2y}-\frac{z}{x+y+z}$. (3)

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức (1), (2), (3) ta được

$$\frac{2x^2+xy}{\left(y+\sqrt{zx}+z\right)^2}+\frac{2y^2+yz}{\left(z+\sqrt{xy}+x\right)^2}+\frac{2z^2+zx}{\left(x+\sqrt{yz}+y\right)^2}\ge 2\left(\frac{x}{y+2z}+\frac{y}{z+2x}+\frac{z}{x+2y}\right)-1.$$

Áp dụng các bất đẳng thức $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\ge\frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$ với a, b, c dương và $(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx)$,

ta có: $\frac{x}{y+2z}+\frac{y}{z+2x}+\frac{z}{x+2y}=\frac{x^2}{xy+2xz}+\frac{y^2}{yz+2xy}+\frac{z^2}{xz+2yz}\ge\frac{(x+y+z)^2}{3(xy+yz+zx)}\ge 1$.

Vậy $\frac{2x^2+xy}{\left(y+\sqrt{zx}+z\right)^2}+\frac{2y^2+yz}{\left(z+\sqrt{xy}+x\right)^2}+\frac{2z^2+zx}{\left(x+\sqrt{yz}+y\right)^2}\ge 2.1-1=1$ (điều phải chứng minh).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Bài 251. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a\sqrt{b+c}}{b+c+1}+\frac{b\sqrt{c+a}}{c+a+1}+\frac{c\sqrt{a+b}}{a+b+1}\ge\sqrt{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Holder ta có: $\left(\frac{a\sqrt{b+c}}{b+c+1}+\frac{b\sqrt{c+a}}{c+a+1}+\frac{c\sqrt{a+b}}{a+b+1}\right)^2\left(\sum_{cyc}\frac{a(b+c+1)^2}{b+c}\right)\ge(a+b+c)^3$

Do đó ta cần phải chứng minh

$$(a+b+c)^3 \ge 2\sum_{cyc}\frac{a(b+c+1)^2}{b+c} \Leftrightarrow \sum_{cyc}a^3+3\sum_{cyc}\frac{a}{b}+3\sum_{cyc}\frac{b}{a}+6 \ge 4\sum_{cyc}ab+4\sum_{cyc}a+2\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $\sum_{cyc}\frac{a}{b} \ge \sum_{cyc}ab, \sum_{cyc}\frac{b}{a} \ge \sum_{cyc}ab, 2\sum_{cyc}\frac{a}{b+c} \le \frac{1}{2}\sum_{cyc}\frac{a}{b}+\frac{1}{2}\sum_{cyc}\frac{b}{a}$

Từ đó ta có

$$VT-VP \ge \sum_{cyc}a^3+\frac{5}{2}\sum_{cyc}\frac{a}{b}+\frac{5}{2}\sum_{cyc}\frac{b}{a}-4\sum_{cyc}ab-4\sum_{cyc}a+6 \ge \sum_{cyc}a^3+\sum_{cyc}ab-4\sum_{cyc}a+6=\sum_{cyc}\left(a^3-4a+\frac{1}{a}+2\right)$$

Xét hàm số $f(x)=x^3-4x+\frac{1}{x}+2+2\ln x$ với $x>0$ ta có $f'(x)=(x-1)\left(3x+3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)$

Nếu $x<1$ thì $\frac{1}{x^2} \ge \frac{1}{x}$, nếu $x \ge 1 \Rightarrow 1>\frac{1}{x}$ do đó $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

Từ đó dễ dàng kiểm tra rằng $f(x) \ge f(1)=0, \forall x>0$ Hay $x^3-4x+\frac{1}{x}+2 \ge -2\ln x, \forall x>0$

Như vậy ta có: $\sum_{cyc}\left(a^3-4a+\frac{1}{a}+2\right) \ge -2\sum_{cyc}\ln a=0$

Bài toán được giải quyết. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 252. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{3a^2+(a-1)^2}+\frac{1}{3b^2+(b-1)^2}+\frac{1}{3c^2+(c-1)^2} \ge 1$$

Lời giải

Xét hai trường hợp sau

+ Trường hợp 1. Nếu trong ba số a,b,c tồn tại ít nhất một số không lớn hơn $\frac{1}{2}$. Giả sử số đó là a. Ta có $a \le \frac{1}{2} \Rightarrow 3a^2+(a-1)^2 \le 1$. Khi đó bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

+ Trường hợp 2. Cả ba số a,b,c đều không nhỏ hơn $\frac{1}{2}$ khi đó ta xét hàm số sau

Giống như các phần trước ta có cũng sẽ thiết lập một bất đẳng thức phụ dạng: $\frac{1}{3x^2+(x-1)^2} \ge \frac{1}{3}+k\ln x$

Ở đây ta có qui về hàm số mũ và chú ý $\ln x+\ln y+\ln z=0$.

Tiếp tục quan sát thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. Từ đó ta có phải xác định k sao cho $f'(1)=0$ với $f(x)=\frac{1}{3x^2+(x-1)^2}+\frac{2}{3}\ln x-\frac{1}{3}$

Với $x>\frac{1}{2}$. Khi đó ta có: $f'(x)=\frac{2(16x^4-16x^3-x+1)}{3x(4x^2-2x+1)^2}=\frac{2(x-1)(16x^3-1)}{3x(4x^2-2x+1)^2}$

Từ đây suy ra $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1,$ do $x>\frac{1}{2}$

Dễ dàng kiểm tra được $f(x) \ge f(1)=0, \forall x>\frac{1}{2}$. Điều này tương đương với: $\frac{1}{3x^2+(x-1)^2} \ge \frac{1}{3}-\frac{2}{3}\ln x, \forall x>\frac{1}{2}$

Sử dụng bất đẳng thức phụ trên theo từng biến a,b,c rồi cộng vế theo vế ta có

$$\frac{1}{3a^2+(a-1)^2}+\frac{1}{3b^2+(b-1)^2}+\frac{1}{3c^2+(c-1)^2} \ge 1-\frac{2}{3}\sum_{cyc}\ln a=1$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$, hoặc $a\to\infty, b\to\infty, c\to 0^+$ và các hoán vị.

Bài 253. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=2$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a+b-2ab}+\sqrt{b+c-2bc}+\sqrt{c+a-2ca}\ge 2.$$

Lời giải

Để giải bài toán ta cần bổ đề sau

Bổ đề. Với các số thực không âm x, y và z ta có: $\sum x^4+\sum xyz^2 \ge \sum x^3(y+z)$.

*Chứng minh.*Đây chính là bất đẳng thức Schur.

Trở lại bài toán. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $\sum\sqrt{c(a+b)+(a-b)^2}\ge 2\sqrt{2}$

hay $\sum\sqrt{c(a+b)+(a-b)^2}.\sqrt{b(a+c)+(a-c)^2}\ge 2\sum ab$ (1)

Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có: $\sum\sqrt{c(a+b)+(a-b)^2}.\sqrt{b(a+c)+(a-c)^2}\ge$

$\sum\left(\sqrt{bc(a+b)(a+c)}+(a-b)(a-c)\right)\ge\sum\left(bc+a\sqrt{bc}+(a-b)(a-c)\right),$

bởi vậy nên (1) sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra: $\sum a^2+\sum a\sqrt{bc}\ge 2\sum bc.(2)$

Áp dụng bổ đề cho $x=\sqrt{a}, y=\sqrt{b}, z=\sqrt{c}$ ta có vế trái của (2) lớn hơn hoặc bằng

$\sum a\sqrt{a}(\sqrt{b}+\sqrt{c})=\sum(b\sqrt{bc}+c\sqrt{cb})\ge 2\sum bc.$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{2}{3}$

Bài 254. Cho a,b,c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge\sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{2}}+\sqrt[4]{\frac{b^4+c^4}{2}}+\sqrt[4]{\frac{c^4+a^4}{2}}$$

Lời giải

Ta chứng minh bất đẳng thức sau: $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\ge\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}+\sqrt{c^2-ca+a^2}$

Ta có: $VT=\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}=\left[(\dfrac{a^2}{b}-a+b)+\mathrm{b}\right]+\left[(\dfrac{b^2}{c}-b+c)+c\right]+\left[(\dfrac{c^2}{a}-c+a)+a\right]-(a+b+c)$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM

$\dfrac{a^2-ab+b^2}{b}+b\ge 2\sqrt{a^2-ab+b^2}$; $\dfrac{b^2-bc+c^2}{c}+c\ge 2\sqrt{b^2-bc+c^2}$; $\dfrac{c^2-ca+a^2}{a}+a\ge 2\sqrt{c^2-ca+a^2}$

Suy ra

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge 2\sqrt{a^2-ab+b^2}+2\sqrt{b^2-bc+c^2}+2\sqrt{c^2-ca+a^2}-(a+b+c)$$

$$\Rightarrow\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge 2\sqrt{a^2-ab+b^2}+2\sqrt{b^2-bc+c^2}+2\sqrt{c^2-ca+a^2}-(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a})$$

$$\Rightarrow\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}+\sqrt{c^2-ca+a^2}$$

Ta chứng minh: $a^2-ab+b^2\ge\sqrt{\dfrac{a^4+b^4}{2}}\Leftrightarrow(a^2-ab+b^2)^2\ge\dfrac{a^4+b^4}{2}\Leftrightarrow(a-b)^4\ge 0$ (luôn đúng)

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Bài 255. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca\le 3abc$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{2}\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\right)\ge\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{b+c}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{c+a}}+3$$

Lời giải

Ta có: $\sqrt{2}.\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\right)=\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab}{a+b}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2+2bc}{b+c}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2+2ac}{c+a}}\right)$

$$\geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{b+c}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{c+a}}+\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{a+b}}+\frac{\sqrt{2bc}}{\sqrt{b+c}}+\frac{\sqrt{2ca}}{\sqrt{c+a}}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{b+c}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{c+a}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}}$$

$$\geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{b+c}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{c+a}}+\frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\sqrt{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}+\sqrt{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}}$$

$$\geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{b+c}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{c+a}}+\frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{6.\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}}$$

Theo giả thiết $ab+bc+ca\leq 3abc$ nên $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq 3$, do đó: $\frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{6.\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}}\geq\frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{18}}=3$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài 256. Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn $x+y+z=0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x(x+2)}{2x^2+1}+\frac{y(y+2)}{2y^2+1}+\frac{z(z+2)}{2z^2+1}\geq 0$$

Lời giải

Rõ ràng trong trường hợp $xyz=0$ thì bđt đúng, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=0$. Thật vậy, giả sử $x=0$, khi đó $z=-y$ và BĐT cần chứng minh trở thành $\frac{2y^2}{2y^2+1}\geq 0$, luôn đúng (Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow y=0$, khi đó $x=y=z=0$).

Ta xét trường hợp $xyz\neq 0$. Khi đó nhân 2 vào BĐT và cộng thêm 3 vào 2 vế ta có BĐT tương đương:

$\sum\frac{(2x+1)^2}{2x^2+1}\geq 3$. Do trong 3 số có 2 số cùng dấu nên ta giả sử $yz>0$.

Khi đó $\frac{(2y+1)^2}{2y^2+1}+\frac{(2z+1)^2}{2z^2+1}\geq\frac{2(y+z+1)^2}{y^2+z^2+1}=\frac{2(x-1)^2}{x^2-2yz+1}\geq\frac{2(x-1)^2}{x^2+1}$.

Như vậy để chứng minh BĐT ban đầu ta chỉ cần chỉ ra

$\frac{(2x+1)^2}{2x^2+1}+\frac{2(x-1)^2}{x^2+1}\geq 3$. Nhưng điều này tương đương $\frac{2x^2(x-1)^2}{(2x^2+1)(x^2+1)}\geq 0$. Do đó ta có ĐPCM.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(x;y;z)=\left(1;-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ và các hoán vị của nó.

Bài 257. Cho a,b,c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$(a+b+c)^3(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\leq 27a^2b^2c^2$$

Lời giải

Xét trường hợp $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)<0$, bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Xét trường hợp $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\ge 0$, khi đó dễ dàng chứng minh được

$(a+b-c)\ge 0; (b+c-a)\ge 0; (c+a-b)\ge 0$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $27abc(a+b+c)^3(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le 9^3a^3b^3c^3$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$27abc(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le\left[a(b+c-a)+b(c+a-b)+c(a+b-c)\right]^3$$

Hay $27abc(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le\left[2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)\right]^3$

Khi đó ta được

$$27abc(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b+c)^3\le\left[2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)\right]^3(a+b+c)^3$$

Như vậy ta cần chứng minh $(a+b+c)\left[2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)\right]\le 9abc$

Hay $$a^2+b^2+c^2+\frac{9abc}{a+b+c}\ge 2(ab+bc+ca)$$

Khai triển và rút gọn ta được

$$a^3+b^3+c^3+3abc\ge a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\Leftrightarrow abc\ge(a+b-c)(b+c-a)(c+a-c)$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng với mọi a, b, c. Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 258. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(1+ab)^2}{(1-ab)^2}+\frac{(1+bc)^2}{(1-bc)^2}+\frac{(1+ca)^2}{(1-ca)^2}\ge 12$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được: $\frac{(1+ab)^2}{(1-ab)^2}+\frac{(1+bc)^2}{(1-bc)^2}+\frac{(1+ca)^2}{(1-ca)^2}\ge 3\sqrt[3]{\frac{(1+ab)^2}{(1-ab)^2}\frac{(1+bc)^2}{(1-bc)^2}\frac{(1+ca)^2}{(1-ca)^2}}$

Như vậy ta cần chứng minh $\frac{(1+ab)^2}{(1-ab)^2}\frac{(1+bc)^2}{(1-bc)^2}\frac{(1+ca)^2}{(1-ca)^2}\ge 64$ hay ta cần chứng minh bất đẳng thức $(1+ab)(1+bc)(1+ca)\ge 8(1-ab)(1-bc)(1-ca)$.

Đặt $x=ab; y=bc; z=ca$, khi đó $x,y,z>0$ và $x+y+z=1$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $(1+x)(1+y)(1+z)\ge 8(1-x)(1-y)(1-z)$, tương đương với bất đẳng thức sau $9xyz\ge 7(xy+yz+zx)-2$

Ta dễ dàng chứng minh được $x^2+y^2+z^2+\frac{9xyz}{x+y+z}\ge 2(xy+yz+zx)$.

Mà $x+y+z=1$ nên ta suy ra được $9xyz\ge 4(xy+yz+zx)-1$.

Vì $x+y+z=1$ nên $3(xy+yz+zx)\le 1$, do đó $4(xy+yz+zx)-1\ge 7(xy+yz+zx)-2$

Điều này dẫn tới $9xyz\ge 7(xy+yz+zx)-2$. Như vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh.

Bài 259. Cho a,b,c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 3(a+b+c)^2$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$a^2b^2c^2+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+4(a^2+b^2+c^2)+8\ge 3(a^2+b^2+c^2)+6(ab+bc+ca)$$

Hay $a^2b^2c^2+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+a^2+b^2+c^2+8\ge 6(ab+bc+ca)$

Áp dụng bất đẳng thức Caychy ta được

$$a^2b^2c^2+2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+a^2+b^2+c^2+8$$

$$=a^2b^2c^2+1+2\left[\left(a^2b^2+1\right)+\left(b^2c^2+1\right)+\left(c^2a^2+1\right)\right]+a^2+b^2+c^2+1\ge 2abc+4\left(ab+bc+ca\right)+a^2+b^2+c^2+1$$

Phép chứng minh hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$2abc+4\left(ab+bc+ca\right)+a^2+b^2+c^2+1\ge 6\left(ab+bc+ca\right)\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+1+2abc\ge 2\left(ab+bc+ca\right)$$

Dễ dàng chứng minh được $a^2+b^2+c^2+\dfrac{9abc}{a+b+c}\ge 2\left(ab+bc+ca\right)$

Ta cần chỉ ra được $1+2abc\ge\dfrac{9abc}{a+b+c}\Leftrightarrow\left(1+2abc\right)\left(a+b+c\right)\ge 9abc$

Đánh giá cuối cùng luôn đúng vì theo bất đẳng tức Cauchy thì

$$1+2abc=1+abc+abc\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2};\ a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}$$

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 260. Cho a,b,c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$2\left(a^2+b^2+c^2\right)+abc+8\ge 5\left(a+b+c\right)$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $a+b+c\le\dfrac{\left(a+b+c\right)^2+9}{6}$

Bài toán quy về chứng minh: $2\left(a^2+b^2+c^2\right)+abc+8\ge\dfrac{5}{6}\left[\left(a+b+c\right)^2+9\right]$

Hay $$\frac{7}{6}\left(a^2+b^2+c^2\right)+abc+\frac{1}{2}\ge\frac{5}{3}\left(ab+bc+ca\right)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có: $abc+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2abc+1}{2}\ge\dfrac{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{2}=\dfrac{9abc}{2.3\sqrt[3]{abc}}\ge\dfrac{9abc}{2\left(a+b+c\right)}$

Do đó phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được: $\dfrac{7}{6}\left(a^2+b^2+c^2\right)+\dfrac{9abc}{2\left(a+b+c\right)}\ge\dfrac{5}{3}\left(ab+bc+ca\right)$

Hay $$7\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{3.9abc}{a+b+c}\ge 10\left(ab+bc+ca\right)$$

Theo một đánh giá quen thuộc thì $4\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 4\left(ab+bc+ca\right)$ nên ta được

$$7\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{3.9abc}{a+b+c}\ge 3\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{3.9abc}{a+b+c}+4\left(ab+bc+ca\right)$$

Ta cần chỉ ra được

$$3\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{3.9abc}{a+b+c}+4\left(ab+bc+ca\right)\ge 10\left(ab+bc+ca\right)$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+\frac{9abc}{a+b+c}\ge 2\left(ab+bc+ca\right)$$

Đánh giá cuối cùng đã được chứng minh.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 261. Cho a,b,c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^2+\frac{14abc}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}\ge 4$$

Lời giải

Đặt $x=\frac{a}{b+c};\ y=\frac{b}{c+a};\ z=\frac{c}{a+b}$, khi đó ta được $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=2 \Leftrightarrow xy+yz+zx+2xyz=1$

Dễ dàng chứng minh được $x+y+z\ge\frac{3}{2}$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\left(x+y+z\right)^2+14xyz\ge 4$

Dễ ta chứng minh được

$$\left(x+y+z\right)^2+\frac{9xyz}{x+y+z}\ge 4\left(xy+yz+zx\right)\Rightarrow\left(x+y+z\right)^2+14xyz\ge 14xyz+4\left(xy+yz+zx\right)-\frac{9xyz}{x+y+z}$$

Từ $x+y+z\ge\frac{3}{2}$ suy ra $\frac{9xyz}{x+y+z}\le 6xyz$, do đó ta được

$$14xyz+4\left(xy+yz+zx\right)-\frac{9xyz}{x+y+z}\ge 4\left(xy+yz+zx\right)+8xyz=4$$

Do đó ta được $\left(x+y+z\right)^2+14xyz\ge 4$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 262. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+9bc+4\left(b-c\right)^2}+\frac{b}{1+9ca+4\left(c-a\right)^2}+\frac{c}{1+9ab+4\left(a-b\right)^2}\ge\frac{1}{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a}{1+9bc+4\left(b-c\right)^2}+\frac{b}{1+9ca+4\left(c-a\right)^2}+\frac{c}{1+9ab+4\left(a-b\right)^2}$$
$$\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{\left(a+b+c\right)+27abc+4a\left(b-c\right)^2+4b\left(c-a\right)^2+4c\left(a-b\right)^2}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $2\left(a+b+c\right)^2\ge 1+27abc+4a\left(b-c\right)^2+4b\left(c-a\right)^2+4c\left(a-b\right)^2$

Hay $1\ge 4ab\left(a+b\right)+4bc\left(b+c\right)+4ca\left(c+a\right)+3abc$

Để ý đến giả thiết ta viết lại được bất đẳng thức trên thành $\left(a+b+c\right)^3\ge 4ab\left(a+b\right)+4bc\left(b+c\right)+4ca\left(c+a\right)+3abc$

Hay $\quad a^3+b^3+c^3+3abc\ge ab\left(a+b\right)+bc\left(b+c\right)+ca\left(c+a\right)$

Biến đổi tương đương ta được $abc\ge\left(a+b-c\right)\left(b+c-a\right)\left(c+a-b\right)$

Bất đẳng thức trên là một bất đẳng thức đúng và dễ dàng chứng minh được.

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$ hoặc $a=b=\frac{1}{2};\ c=0$ và các hoán vị.

Bài 263. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xyz+x+z=y$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{2}{x^2+1}-\frac{2}{y^2+1}-\frac{4z}{\sqrt{z^2+1}}+\frac{3z}{\left(z^2+1\right)\sqrt{z^2+1}}$$

Lời giải

Cách 1: Đặt $x=\tan A, y=\tan B, z=\tan C, \left(0<A,B,C<\frac{\pi}{2}\right)$.

Theo giả thiết ta có: $x=\frac{y-z}{1+yz}\Leftrightarrow \tan A=\frac{\tan B-\tan C}{1+\tan B\tan C}=\tan\left(B-C\right)\Leftrightarrow A=B-C+k\pi$.

Do $-\dfrac{\pi}{2} < A - B + C < \pi \Rightarrow k = 0 \Rightarrow A = B - C \Leftrightarrow A - B = -C$.

Khi đó: $P = 2\left(\dfrac{1}{1+\tan^2 A} - \dfrac{1}{1+\tan^2 B}\right) - \dfrac{4\tan C}{\sqrt{1+\tan^2 C}} + \dfrac{3\tan C}{\left(1+\tan^2 C\right)\sqrt{1+\tan^2 C}}$

$$= 2\left(\cos^2 A - \cos^2 B\right) - 4\sin C + 3\sin C\cos^2 C = \cos 2A - \cos 2B - 4\sin C + 3\sin C\cos^2 C$$

$$= -2\sin(A+B)\sin(A-B) - 4\sin C + 3\sin C\cos^2 C = 2\sin C\sin(A+B) - 4\sin C + 3\sin C\cos^2 C$$

$$\le 2\sin C - 4\sin C + 3\sin C\cos^2 C = \sin C\left(3\cos^2 C - 2\right) = \sin C\left(1 - 3\sin^2 C\right)$$

Nếu $\sin C > \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow P < 0$ xét với $\sin C \le \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$P = \sqrt{\sin^2 C\left(1-3\sin^2 C\right)^2} = \frac{\sqrt{6\sin^2 C\left(1-3\sin^2 C\right)\left(1-3\sin^2 C\right)}}{\sqrt{6}} \le \frac{\sqrt{\left(\dfrac{6\sin^2 C + 1 - 3\sin^2 C + 1 - 3\sin^2 C}{3}\right)^3}}{\sqrt{6}} = \frac{2}{9}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sin C = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \tan C = \dfrac{\sqrt{2}}{4}, \tan A = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \tan B = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}, y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, z = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{2}{9}$ đạt tại $x = \sqrt{2}, y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, z = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Cách 2: Theo giả thiết ta có: $x = \dfrac{y-z}{1+yz} \Rightarrow P = \dfrac{2}{\left(\dfrac{y-z}{1+yz}\right)^2 + 1} - \dfrac{2}{y^2+1} - \dfrac{4z}{\sqrt{z^2+1}} + \dfrac{3z}{\left(z^2+1\right)\sqrt{z^2+1}}$.

$$P = \frac{2(1+yz)^2}{\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right)} - \frac{2}{y^2+1} - \frac{4z}{\sqrt{z^2+1}} + \frac{3z}{\left(z^2+1\right)\sqrt{z^2+1}} = \frac{2z\left(2y + \left(y^2-1\right)z\right)}{\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right)} - \frac{4z}{\sqrt{z^2+1}} + \frac{3z}{\left(z^2+1\right)\sqrt{z^2+1}}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz ta có $\dfrac{2z\left(2y + \left(y^2-1\right)z\right)}{\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right)} \le \dfrac{2z\sqrt{\left(4y^2 + \left(y^2-1\right)^2\right)\left(1+z^2\right)}}{\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right)} = \dfrac{2z}{\sqrt{1+z^2}}$

Suy ra $P \le \dfrac{2z}{\sqrt{1+z^2}} - \dfrac{4z}{\sqrt{z^2+1}} + \dfrac{3z}{\left(z^2+1\right)\sqrt{z^2+1}} = -3\left(\dfrac{z}{\sqrt{z^2+1}}\right)^3 + \dfrac{z}{\sqrt{z^2+1}}$.

Đặt $t = \dfrac{z}{\sqrt{z^2+1}}, \left(t \in (0;1)\right)$ khi đó $P \le f(t) = -3t^3 + t$. Ta có $f'(t) = -9t^2 + 1; f'(t) = 0 \xleftrightarrow{t \in (0;1)} t = \dfrac{1}{3}$.

Ta có f'(t) đổi dấu dương sang âm khi đi qua $t = \dfrac{1}{3}$ nên f(t) đạt cực đại tại $t = \dfrac{1}{3}$ trên khoảng $(0;1)$ hay $f(t) \le f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2}{9}$. Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{2}{9}$ đạt tại $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \mathrm{y} = \sqrt{2}, z = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Bài 264. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge 4\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right)$$

Lời giải

Cách 1: Theo giả thiết tồn tại ba góc nhọn của một tam giác thỏa mãn: $a = \cos A, b = \cos B, c = \cos C$.

Ta cần chứng minh:

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C \ge 4\left(\cos^2 A\cos^2 B+\cos^2 B\cos^2 C+\cos^2 C\cos^2 A\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{\cot^2 A}{1+\cot^2 A} \ge 4\sum_{cyc}\frac{\cot^2 A\cot^2 B}{\left(1+\cot^2 A\right)\left(1+\cot^2 B\right)}.$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{\cot^2 A}{\left(\cot A+\cot B\right)\left(\cot A+\cot C\right)} \ge 4\sum_{cyc}\frac{\cot^2 A\cot^2 B}{\left(\cot A+\cot B\right)^2\left(\cot C+\cot A\right)\left(\cot C+\cot B\right)}.$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\cot B+\cot C\right)\cot^2 A \ge 4\sum_{cyc}\frac{\cot^2 A\cot^2 B}{\cot A+\cot B} \text{ (luôn đúng).}$$

Do $4\sum_{cyc}\frac{\cot^2 A\cot^2 B}{\cot A+\cot B} \le \sum_{cyc}\cot A\cot B\left(\cot A+\cot B\right) = \sum_{cyc}\left(\cot B+\cot C\right)\cot^2 A$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Cách 2: Ta đưa về chứng minh

$$\left(a^2+b^2+c^2+2abc\right)\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge 4\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$$
$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+2abc\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge 2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right).$$

Ta có: $abc \le \frac{1}{8}, a+b+c \le \frac{3}{2} \Rightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right)-a-b-c = 2-4abc-a-b-c \ge 0$.

Do đó $2abc\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge abc\left(a+b+c\right)$.

Ta đưa về chứng minh bất đẳng thức: $a^4+b^4+c^4+abc\left(a+b+c\right) \ge 2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$.

$\Leftrightarrow a^2\left(a-b\right)\left(a-c\right)+b^2\left(b-c\right)\left(b-a\right)+c^2\left(c-a\right)\left(c-b\right) \ge 0$.

Không mất tính tổng quát giả sử $a \ge b \ge c$ khi đó $c^2\left(c-a\right)\left(c-b\right) \ge 0$ và

$$a^2\left(a-b\right)\left(a-c\right)+b^2\left(b-c\right)\left(b-a\right) = \left(a-b\right)\left[a^2\left(a-c\right)-b^2\left(b-c\right)\right] \ge \left(a-b\right)\left[a^2\left(b-c\right)-b^2\left(b-c\right)\right]$$
$$= \left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(a^2-b^2\right) \ge 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 265. Cho x, y, z là các số thực dương nhỏ hơn 1 thỏa mãn

$$\frac{4\left(3x+1\right)+6\left(y+z\right)}{\left[2\left(x+y\right)+x+z+1\right]\left[2\left(x+z\right)+x+y+1\right]} - x\left(y+z\right) = x^2+yz$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{2(x+3)^2+y^2+z^2-16}{2x^2+y^2+z^2}$

Lời giải

- Từ giả thiết ta có $\dfrac{2}{3x+2y+z+1}+\dfrac{2}{3x+2z+y+1} = \left(x+y\right)\left(x+z\right)$.
- Sử dụng bất đẳng thức $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \ge \dfrac{4}{x+y}; \forall x, y>0 \Rightarrow \left(x+y\right)\left(y+z\right) \ge 2\cdot\dfrac{4}{6x+3y+3z+2}$.
- Mặt khác $\left(x+y\right)\left(x+z\right) \le \left(\dfrac{x+y+x+z}{2}\right)^2 = \dfrac{\left(2x+y+z\right)^2}{4}$

$\Rightarrow \dfrac{\left(2x+y+z\right)^2}{4} \ge \dfrac{8}{6x+3y+3z+2}$. Đặt $t=2x+y+z$, ta được $\dfrac{t^2}{4} \ge \dfrac{8}{3t+2}$

$\Leftrightarrow 3t^3+2t^2-32\ge 0 \Leftrightarrow (t-2)(3t^2-4t+16)\ge 0 \Leftrightarrow t\ge 2 \Rightarrow 2x+y+z\ge 2 \Rightarrow y+z\ge 2-2x$

- Ta có $y^2+z^2\ge \dfrac{(y+z)^2}{2}\ge 2(1-x)^2$

$$\Rightarrow P=1+\frac{12x+2}{2x^2+y^2+z^2}\le 1+\frac{12x+2}{2x^2+2(1-x)^2}=1+\frac{6x+1}{x^2+(1-x)^2}=1+\frac{6x+1}{2x^2-2x+1}$$

- Xét hàm số $f(x)=\dfrac{6x+1}{2x^2-2x+1}$ với $x\in(0;1)$. Ta có $f'(x)=\dfrac{-12x^2-4x+8}{(2x^2-2x+1)^2}$ và $f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$.

- Bảng biến thiên của hàm số trên $(0;1)$:

x	0		$\frac{2}{3}$		1
$f'(x)$					
$f(x)$	1	$\nearrow$	9	$\searrow$	7

- Từ bảng biến thiên, ta có $f(x)\le 9,\ \forall x\in(0;1)\Rightarrow P\le 1+f(x)\le 10$.

Dấu bằng xảy ra khi $x=\dfrac{2}{3},\ y=\dfrac{1}{3},\ z=\dfrac{1}{3}$. Vậy $\max P=10$.

Bài 266. Cho a,b,c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng

$$\frac{a(a-2b+c)}{ab+1}+\frac{b(b-2c+a)}{bc+1}+\frac{c(c-2a+b)}{ca+1}\ge 0$$

Lời giải

Ta có: $\displaystyle\sum_{cyc}\frac{a(a-2b+c)}{ab+1}=\sum_{cyc}\frac{a^2+1+ac+1-2(ab+1)}{ab+1}=\sum_{cyc}\frac{a^2+1}{ab+1}+\sum_{cyc}\frac{ac+1}{ab+1}-6$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số ta có: $\displaystyle\sum_{cyc}\frac{ac+1}{ab+1}\ge 3\sqrt[3]{\prod_{cyc}\frac{ac+1}{ab+1}}=3$ (1)

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Swcharz ta có: $(a^2+1)(b^2+1)\ge(\mathrm{ab}+1)^2$

Thiết lập các bất đẳng thức tương tự ta suy ra: $\displaystyle\prod_{cyc}(\mathrm{a}^2+1)(b^2+1)\ge\prod_{cyc}(ab+1)^2$

$$\Rightarrow \Big(\prod_{cyc}(a^2+1)\Big)^2\ge\Big(\prod_{cyc}(ab+1)\Big)^2\Rightarrow\Big(\prod_{cyc}(a^2+1)\Big)\ge\Big(\prod_{cyc}(ab+1)\Big)\Rightarrow\prod_{cyc}\frac{a^2+1}{ab+1}\ge 1$$

Áp dụng bất đẳng thức AM –GM ta lại có: $\displaystyle\sum_{cyc}\frac{a^2+1}{ab+1}\ge 3\sqrt[3]{\prod_{cyc}\frac{a^2+1}{ab+1}}\ge 3$ (2)

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh. Dấu ‘=’ xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Bài 267. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=2018$. Chứng minh rằng

$$\frac{2018a-a^2}{bc}+\frac{2018b-b^2}{ca}+\frac{2018c-c^2}{ab}\ge\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{2018-a}{a}}+\sqrt{\frac{2018-b}{b}}+\sqrt{\frac{2018-c}{c}}\right)$$

Lời giải

BĐT $\Leftrightarrow \frac{a(b+c)}{bc}+\frac{b(c+a)}{ca}+\frac{c(a+b)}{ab}\ge\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}+\sqrt{\frac{a+b}{c}}\right)$

$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\ge\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}+\sqrt{\frac{a+b}{c}}\right)\Leftrightarrow\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\ge 2\left(\sqrt{\frac{b+c}{2a}}+\sqrt{\frac{c+a}{2b}}+\sqrt{\frac{a+b}{2c}}\right)$

Do $3+\frac{b+c}{2a}+\frac{c+a}{2b}+\frac{a+b}{2c}\ge 2\sqrt{\frac{b+c}{2a}}+2\sqrt{\frac{c+a}{2b}}+2\sqrt{\frac{a+b}{2c}}$

Nên ta cần chứng minh: $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\ge 3+\frac{b+c}{2a}+\frac{c+a}{2b}+\frac{a+b}{2c}\Leftrightarrow\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\ge 6$.

Ta có $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\ge 2+2+2\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xẩy ra khi $a=b=c=\frac{2018}{3}$.

Bài 268. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{4a+5}{a^3+ab^2+3abc}+\frac{4b+5}{b^3+bc^2+3abc}+\frac{4c+5}{c^3+ca^2+3abc}\ge\frac{162}{a^2+b^2+c^2+27}$$

Lời giải

Sử dụng BĐT Cauchy-Shwarz, ta có

$$VT=\frac{4}{a^2+b^2+3bc}+\frac{4}{b^2+c^2+3ac}+\frac{4}{c^2+a^2+3ab}+5\left(\frac{\frac{1}{a}}{a^2+b^2+3bc}+\frac{\frac{1}{b}}{b^2+c^2+3ac}+\frac{\frac{1}{c}}{c^2+a^2+3ab}\right)$$

$$\ge\frac{(2+2+2)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+3(ab+bc+ca)}+5\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+3(ab+bc+ca)}\ (2)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2\ge\left(\frac{9}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}\right)^2=\frac{81}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}\ge\frac{81}{3(a+b+c)}=9.\ (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $VT\ge\frac{36+5.9}{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+\frac{3}{2}(a+b+c)^2}=\frac{162}{a^2+b^2+c^2+27}$ (đpcm).

Dấu ‘‘=’’ xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài 269. Cho a,b,c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng

$$\frac{a^{11}}{bc}+\frac{b^{11}}{ca}+\frac{c^{11}}{ab}+\frac{3}{a^2b^2c^2}\ge\frac{a^6+b^6+c^6+9}{2}$$

Lời giải

Ta có: $\frac{a^{11}}{bc}+abc=\frac{a^{12}}{abc}+abc\ge 2\sqrt{\frac{a^{12}}{abc}.abc}=2a^6\Rightarrow\frac{a^{11}}{bc}\ge 2a^6-abc$

Chứng minh tương tự, ta có: $\dfrac{b^{11}}{ca} \geq 2b^6 - abc; \dfrac{c^{11}}{ab} \geq 2c^6 - abc$

Cộng vế theo vế, ta suy ra: $\dfrac{a^{11}}{bc} + \dfrac{b^{11}}{ca} + \dfrac{c^{11}}{ab} + \dfrac{3}{a^2b^2c^2} \geq 2a^6 + 2b^6 + 2c^6 + \dfrac{3}{a^2b^2c^2} - 3abc$

Lúc này ta cần chứng minh: $\dfrac{3\left(a^6 + b^6 + c^6\right)}{2} + \dfrac{3}{a^2b^2c^2} - 3abc \geq \dfrac{9}{2}$

Thật vậy, ta có: $a^6 + b^6 + c^6 + \dfrac{3}{a^2b^2c^2} \geq 3\left(abc\right)^2 + \dfrac{3}{\left(abc\right)^2} \geq 2\sqrt{3\left(abc\right)^2 . \dfrac{3}{\left(abc\right)^2}} = 6$ (1)

Tiếp theo, ta có: $a^6 + b^6 + c^6 + 1 + 1 + 1 \geq 6\sqrt[6]{a^6.b^6.c^6} = 6abc \Rightarrow \dfrac{a^6 + b^6 + c^6}{2} - 3abc \geq -\dfrac{3}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra: $\dfrac{3\left(a^6 + b^6 + c^6\right)}{2} + \dfrac{3}{a^2b^2c^2} - 3abc \geq \dfrac{9}{2}$

Từ đó suy ra: $\dfrac{a^{11}}{bc} + \dfrac{b^{11}}{ca} + \dfrac{c^{11}}{ab} + \dfrac{3}{a^2b^2c^2} \geq \dfrac{3\left(a^6 + b^6 + c^6\right)}{2} + \dfrac{3}{a^2b^2c^2} - 3abc + \dfrac{a^6 + b^6 + c^6}{2} \geq \dfrac{a^6 + b^6 + c^6 + 9}{2}$

Chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xẩy ra khi $a = b = c$.

Bài 270. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^4 + bc + 3} + \frac{b}{b^4 + ca + 3} + \frac{c}{c^4 + ab + 3} \leq \frac{3}{5}$$

Lời giải

Ta có: $a^4 + bc + 3 = a^4 + 1 + 1 + 1 + bc \geq 4\sqrt[4]{a^4} + bc = 4a + bc = \left(3a + bc\right) + a$

Khi đó: $\begin{cases} \dfrac{a}{a^4 + bc + 3} \leq \dfrac{a}{\left(3a + bc\right) + a} \leq \dfrac{a}{25}\left(\dfrac{16}{3a + bc} + \dfrac{1}{a}\right) = \dfrac{16}{25}.\dfrac{a}{\left(a + b\right)\left(a + c\right)} + \dfrac{1}{25} \\ 3a + bc = \left(a + b + c\right)a + bc = \left(a + b\right)\left(a + c\right) \end{cases}$

Chứng minh tương tự, ta có: $\dfrac{b}{b^4 + ca + 3} \leq \dfrac{16}{25}.\dfrac{b}{\left(b + c\right)\left(b + a\right)} + \dfrac{1}{25}; \dfrac{c}{c^4 + ab + 3} \leq \dfrac{16}{25}.\dfrac{c}{\left(c + a\right)\left(c + b\right)} + \dfrac{1}{25}$

Cộng vế theo vế, suy ra:

$$\frac{a}{a^4 + bc + 3} + \frac{b}{b^4 + ca + 3} + \frac{c}{c^4 + ab + 3} \leq \frac{16}{25}.\left(\frac{a}{\left(a + b\right)\left(a + c\right)} + \frac{b}{\left(b + c\right)\left(b + a\right)} + \frac{c}{\left(c + a\right)\left(c + b\right)}\right) + \frac{3}{25}$$

Thu gọn lại biến đổi, ta có: $\sum \dfrac{a}{a^4 + bc + 3} \leq \dfrac{16}{25}\sum \dfrac{a}{\left(a + b\right)\left(a + c\right)} + \dfrac{3}{25}$ (1)

Biết rằng: $\sum \dfrac{a}{\left(a + b\right)\left(a + c\right)} = \dfrac{a\left(b + c\right) + b\left(c + a\right) + c\left(a + b\right)}{\left(a + b\right)\left(b + c\right)\left(c + a\right)} = \dfrac{2\left(ab + bc + ca\right)}{\left(a + b\right)\left(b + c\right)\left(c + a\right)}$

Áp dụng bất đẳng thức: $\left(a + b\right)\left(b + c\right)\left(c + a\right) \geq \dfrac{8}{9}\left(a + b + c\right)\left(ab + bc + ca\right)$

Suy ra: $\sum \dfrac{a}{\left(a + b\right)\left(a + c\right)} = \dfrac{2\left(ab + bc + ca\right)}{\left(a + b\right)\left(b + c\right)\left(c + a\right)} \leq \dfrac{9}{4\left(a + b + c\right)} = \dfrac{9}{4.3} = \dfrac{3}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra: $\sum \dfrac{a}{a^4 + bc + 3} \leq \dfrac{16}{25}\sum \dfrac{a}{\left(a + b\right)\left(a + c\right)} + \dfrac{3}{25} \leq \dfrac{16}{25}.\dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{25} = \dfrac{15}{25} = \dfrac{3}{5}$

Chứng minh bất đẳng thức hoàn tất. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Bài 271. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{bc}}{a+3\sqrt{bc}}+\frac{\sqrt{ca}}{b+3\sqrt{ca}}+\frac{\sqrt{ab}}{c+3\sqrt{ab}}\le\frac{3}{4}$$

Lời giải

Cách 1: $\frac{\sqrt{bc}}{a+3\sqrt{bc}}+\frac{\sqrt{ca}}{b+3\sqrt{ca}}+\frac{\sqrt{ab}}{c+3\sqrt{ab}}\le\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{3}\left(1-\frac{a}{a+\sqrt{bc}}+1-\frac{b}{b+3\sqrt{ca}}+1-\frac{c}{c+3\sqrt{ab}}\right)\le\frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow P=\frac{a}{a+3\sqrt{bc}}+\frac{b}{b+3\sqrt{ca}}+\frac{c}{c+3\sqrt{ab}}\ge\frac{3}{4}$

Ta có: $\frac{a}{a+3\sqrt{bc}}\ge\frac{a}{a+3\frac{a+b}{2}}=\frac{2a}{2a+3b+3c}$. Tương tự: $\frac{b}{b+3\sqrt{ca}}\ge\frac{2b}{2b+3c+3a};\frac{c}{c+3\sqrt{ab}}\ge\frac{2c}{3a+3b}$

Đặt: $\begin{cases}2a+3b+3c=x\\2b+3c+3a=y\\2c+3a+3b=z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{8}(-5x+3y+3z)\\b=\frac{1}{8}(3x-5y+3z)\\c=\frac{1}{8}(3x+3y-5z)\end{cases}$ . .

Khi đó: $P\ge\frac{1}{4}\left(-5+\frac{3y}{x}+\frac{3z}{x}+\frac{3x}{y}-5+\frac{3z}{y}+\frac{3x}{z}+\frac{3y}{z}-5\right)\ge\frac{1}{4}(-15+6+6+6)=\frac{3}{4}$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$.

Cách 2: $\frac{\sqrt{bc}}{a+3\sqrt{bc}}+\frac{\sqrt{ca}}{b+3\sqrt{ca}}+\frac{\sqrt{ab}}{c+3\sqrt{ab}}\le\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{3}\left(1-\frac{a}{a+\sqrt{bc}}+1-\frac{b}{b+3\sqrt{ca}}+1-\frac{c}{c+3\sqrt{ab}}\right)\le\frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow\frac{a}{a+3\sqrt{bc}}+\frac{b}{b+3\sqrt{ca}}+\frac{c}{c+3\sqrt{ab}}\ge\frac{3}{4}$.

Ta có: $\frac{a}{a+3\sqrt{bc}}\ge\frac{a}{a+3\frac{a+b}{2}}=\frac{2a}{2a+3b+3c}$. Tương tự: $\frac{b}{b+3\sqrt{ca}}\ge\frac{2b}{2b+3c+3a};\frac{c}{c+3\sqrt{ab}}\ge\frac{2c}{3a+3b}$

Ta chứng minh:

$$\frac{2a}{2a+3b+3c}+\frac{2b}{2b+3c+3a}+\frac{2c}{2c+3a+3b}\ge\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{a}{2a+3b+3c}+\frac{b}{2b+3c+3a}+\frac{c}{2c+3a+3b}\ge\frac{3}{8}$$

Đặt $P=\frac{a}{2a+3b+3c}+\frac{b}{2b+3c+3a}+\frac{c}{2c+3a+3b}$.

Khi đó:

$$(a+b+c)=\left(\sum_{a,b,c}\sqrt{(2a+3b+3c)a}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2a+3b+3c}}\right)^2\le P\left(\sum_{a,b,c}(2a+3b+3c)a\right)$$

$$\Leftrightarrow P\ge\frac{(a+b+c)^2}{\sum_{a,b,c}a(2a+3b+3c)}=\frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+6(ab+bc+ca)}=\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)^2+2(ab+bc+ca)}$$

$\ge\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)^2+\frac{2}{3}(a+b+c)^2}=\frac{3}{8}$. Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$

Cách 3: $\frac{\sqrt{bc}}{a+3\sqrt{bc}}+\frac{\sqrt{ca}}{b+3\sqrt{ca}}+\frac{\sqrt{ab}}{c+3\sqrt{ab}}\le\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{3}\left(1-\frac{a}{a+\sqrt{bc}}+1-\frac{b}{b+3\sqrt{ca}}+1-\frac{c}{c+3\sqrt{ab}}\right)\le\frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{a}{a+3\sqrt{bc}}+\frac{b}{b+3\sqrt{ca}}+\frac{c}{c+3\sqrt{ab}} \ge \frac{3}{4}$. Ta có: $\frac{a}{a+3\sqrt{bc}} \ge \frac{a}{a+3\frac{a+b}{2}} = \frac{2a}{2a+3b+3c}$

Tương tự: $\frac{b}{b+3\sqrt{ca}} \ge \frac{2b}{2b+3c+3a}; \frac{c}{c+3\sqrt{ab}} \ge \frac{2c}{3a+3b}$

Ta chứng minh: $\sum_{a,b,c} \frac{2a}{2a+3b+3c} \ge \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sum_{a,b,c}\left(\frac{2a}{2a+3b+3c}+2\right) \ge \frac{3}{4}+3.2 \Leftrightarrow \sum_{a,b,c}\frac{6(a+b+c)}{2a+3a+3b} \ge \frac{27}{4}$

Áp dụng BĐT Côsi cho ba số được:

$$\sum_{a,b,c}(2a+3b+3c).\sum_{a,b,c}\frac{1}{2a+3b+3c} \ge 3\sqrt[3]{\prod_{a,b,c}(2a+3b+3c)}\sqrt[3]{\prod_{a,b,c}\frac{1}{2a+3b+3c}} = 9$$

$\Leftrightarrow \sum_{a,b,c}\frac{8(a+b+c)}{2a+3b+3c} \ge 9 \Leftrightarrow \sum_{a,b,c}\frac{6(a+b+c)}{2a+3b+3c} \ge 27 \Rightarrow$ điều phải chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$.

Cách 4: $3\left(\frac{\sqrt{bc}}{a+3\sqrt{bc}}+\frac{\sqrt{ca}}{b+3\sqrt{ca}}+\frac{\sqrt{ab}}{c+3\sqrt{ab}}\right) = 3-\left(\frac{a}{a+3\sqrt{bc}}+\frac{b}{b+3\sqrt{ca}}+\frac{c}{c+3\sqrt{ab}}\right)$

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz: $\frac{a}{a+3\sqrt{bc}}+\frac{b}{b+3\sqrt{ca}}+\frac{c}{c+3\sqrt{ab}} \ge \frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}{a+b+c+3\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)}$

$$= \frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2+\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)} \ge \frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2+\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{3}} = \frac{3}{4}$$

Do vậy $3-\left(\frac{a}{a+3\sqrt{bc}}+\frac{b}{b+3\sqrt{ca}}+\frac{c}{c+3\sqrt{ab}}\right) \le 3-\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{bc}}{a+3\sqrt{bc}}+\frac{\sqrt{ca}}{b+3\sqrt{ca}}+\frac{\sqrt{ab}}{c+3\sqrt{ab}} \le \frac{3}{4}$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$.

Bài 272. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $ab+bc+ca>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2a^2+bc}+\frac{1}{2b^2+ca}+\frac{1}{2c^2+ab}+\frac{1}{ab+bc+ca} \ge \frac{12}{(a+b+c)^2}$$

Lời giải

Đầu tiên, theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\begin{cases} 2\left(a^2+ab+b^2\right)(a+b+c) = (2b+a)\left(2a^2+bc\right)+(2a+b)\left(2b^2+ca\right) \ge 2\sqrt{(2b+a)\left(2a^2+bc\right)(2a+b)\left(2b^2+ca\right)} \\ \frac{c^2(2a+b)}{2a^2+bc}+\frac{c^2(2b+a)}{2b^2+ca} \ge 2\sqrt{\frac{c^4(2a+b)(2b+a)}{\left(2a^2+bc\right)\left(2b^2+ca\right)}} \ge \frac{2c^2(2a+b)(2b+a)}{\left(a^2+ab+b^2\right)(a+b+c)} \\ = \frac{4c^2}{a+b+c}+\frac{6abc}{a+b+c}\left(\frac{c}{a^2+ab+b^2}\right) \end{cases}$$

Từ đó ta suy ra:

$$\sum\frac{2c^2a+bc^2+2ab^2+b^2c}{2a^2+bc}=\sum\frac{c^2(2a+b)}{2a^2+bc}+\frac{c^2(2b+a)}{2b^2+ca}\ge\sum\left(\frac{4c^2}{a+b+c}+\frac{6abc}{a+b+c}\left(\frac{c}{a^2+ab+b^2}\right)\right)$$

$$=\frac{4(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}+\frac{6abc}{a+b+c}\sum\frac{c}{a^2+ab+b^2}\ge\frac{4(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}+\frac{6abc}{a+b+c}\left(\frac{(a+b+c)^2}{\sum c(a^2+ab+b^2)}\right)$$

$$=\frac{4(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}+\frac{6abc}{a+b+c}$$

Suy ra:

$$\sum\frac{2(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)}{2a^2+bc}=\sum(b+c)+\sum\frac{2(c^2a+ab^2)+bc^2+b^2c}{2a^2+bc}$$

$$\ge\sum(b+c)+\frac{4(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}+\frac{6abc}{ab+bc+ca}=\frac{8(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)}{a+b+c}-\frac{2\sum(a^2b+ab^2)}{ab+bc+ca}$$

$$\Rightarrow\sum\frac{1}{2a^2+bc}+\frac{1}{ab+bc+ca}\ge\frac{4(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)}{(a+b+c)\sum(a^2b+ab^2)}\ge\frac{12}{(a+b+c)^2}$$

Bất đẳng thức chứng minh hoàn tất. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Bài 273. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc\ge 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^4+b^3+c^2}+\frac{1}{b^4+c^3+a^2}+\frac{1}{c^4+a^3+b^2}\le 1$$

Lời giải

Đầu tiên, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\sum\frac{1}{a^4+b^3+c^2}=\sum\frac{1+b+c^2}{(a^4+b^3+c^2)(1+b+c^2)}\le\sum\frac{1+b+c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}=\frac{3+(a+b+c)+(a^2+b^2+c^2)}{(a^2+b^2+c^2)^2}$$

Tiếp theo, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có: $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\ge 3; a^2+b^2+c^2\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\ge 3$

$$\Rightarrow\frac{3+(a+b+c)+(a^2+b^2+c^2)}{(a^2+b^2+c^2)^2}\le\frac{\frac{1}{3}(a+b+c)^2+\frac{1}{3}(a+b+c)^2+(a^2+b^2+c^2)}{(a^2+b^2+c^2)^2}\le\frac{3}{a^2+b^2+c^2}\le 1$$

Bất đẳng thức chứng minh hoàn tất. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Bài 274. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(a+1)^2(b+c)}+\frac{1}{(b+1)^2(c+a)}+\frac{1}{(c+1)^2(a+b)}\le\frac{3}{8}$$

Lời giải

Đầu tiên, ta đặt $(a;b;c)=(x^2;y^2;z^2)$ với x,y,z là các số thực dương, khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành: $\frac{1}{(x^2+1)^2(y^2+z^2)}+\frac{1}{(y^2+1)^2(z^2+x^2)}+\frac{1}{(z^2+1)^2(x^2+y^2)}\le\frac{3}{8}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có: $\begin{cases}\sqrt{(x^2+1)(y^2+z^2)}\ge xy+z=\frac{1}{z}+z=\frac{z^2+1}{z}\\ \sqrt{(x^2+1)(y^2+z^2)}\ge x+yz=\frac{1}{x}+x=\frac{x^2+1}{x}\end{cases}$

Từ đó ta suy ra: $(x^2+1)^2(y^2+z^2)\ge\frac{z^2+1}{z}.\frac{x^2+1}{x}=\frac{(x^2+1)(z^2+1)}{xz}$

Khi đó ta có được: $\sum \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2\left(y^2+z^2\right)} \le \sum \frac{yz}{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right)}$

Tiếp theo ta dễ dàng chứng minh được: $\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right) \ge \frac{8}{3}(xy+yz+zx)$

Thật vậy, theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)} \ge x+y; \sqrt{\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right)} \ge y+z; \sqrt{\left(z^2+1\right)\left(x^2+1\right)} \ge z+x;$$

Nhân vế theo vế, suy ra: (kết hợp với $x+y+z \ge 3\sqrt{xyz} = 3\sqrt[4]{abc} = 1$

$$\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right) \ge (x+y)(y+z)(z+x) \ge \frac{8}{9}(x+y+z)(xy+yz+zx) \ge \frac{8}{3}(xy+yz+zx)$$

Từ đó suy ra: $\sum \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2\left(y^2+z^2\right)} \le \frac{3}{8}\sum \frac{yz}{(xy+yz+zx)} = \frac{3}{8}.\frac{xy+yz+zx}{xy+yz+zx} = \frac{3}{8}$

Bất đẳng thức chứng minh hoàn tất. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 275. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $16(a+b+c) \ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\left(a+b+\sqrt{2(a+c)}\right)^3}+\frac{1}{\left(b+c+\sqrt{2(b+a)}\right)^3}+\frac{1}{\left(c+a+\sqrt{2(c+b)}\right)^3} \le \frac{8}{9}$$

Lời giải

Đầu tiên, theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$a+b+\sqrt{2(a+c)} = a+b+2\sqrt{\frac{a+c}{2}} = (a+b)+\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a+c}{2}} \ge 3\sqrt[3]{\frac{(a+b)(a+c)}{2}}$$

Suy ra: $\frac{1}{\left(a+b+\sqrt{2(a+c)}\right)^3} \le \frac{2}{27(a+b)(a+c)}$. Tương tự cho hai phân số còn lại, ta suy ra:

$$\Rightarrow \sum \frac{1}{\left(a+b+\sqrt{2(a+c)}\right)^3} \le \sum \frac{2}{27(a+b)(a+c)} = \frac{4(a+b+c)}{27(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Tiếp theo ta có bất đẳng thức sau: $(a+b)(b+c)(c+a) \ge \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$ (*)

Chứng minh (*), ta có:

$$\begin{cases}(a+b)(b+c)(c+a) \ge \left(2\sqrt{ab}\right)\left(2\sqrt{bc}\right)\left(2\sqrt{ca}\right) = 8abc \\ (a+b)(b+c)(c+a)+abc = (a+b+c)(ab+bc+ca) \le \left(1+\frac{1}{8}\right)(a+b)(b+c)(c+a)\end{cases}$$

Suy ra:

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) \le \frac{9}{8}(a+b)(b+c)(c+a) \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \ge \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

Như vậy bất đẳng thức (*) đúng nên suy ra: $\sum \frac{1}{\left(a+b+\sqrt{2(a+c)}\right)^3} \le \frac{1}{6(ab+bc+ca)}$

Đến đây ta lại có: $\begin{cases}(ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c) \\ 16(a+b+c) \ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{3(a+b+c)}{ab+bc+ca}\end{cases} \Rightarrow ab+bc+ca \ge \frac{3}{16}$

Suy ra: $\sum \frac{1}{\left(a+b+\sqrt{2(a+c)}\right)^3} \le \frac{1}{6(ab+bc+ca)} \le \frac{1}{6.\frac{3}{16}} = \frac{8}{9}$

Bất đẳng thức chứng minh hoàn tất. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{4}$

Bài 276. Cho a,b,c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{bc+4ab+4ac}}{b+c}+\frac{\sqrt{ca+4bc+4ba}}{c+a}+\frac{\sqrt{ab+4ca+4cb}}{a+b} \ge \frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}+\sqrt{\frac{a+b}{c}}\right)$$

Lời giải

Đầu tiên, ta có: $\frac{\sqrt{bc+4ab+4ac}}{b+c} = \sqrt{\frac{16a}{b+c}+\frac{4bc}{(b+c)^2}}\sqrt{\frac{16a}{b+c}+\frac{(b+c)^2}{(b+c)^2}} \le \sqrt{\frac{16a+b+c}{b+c}}$

Tiếp theo ta cần chứng minh: $\frac{3}{2\sqrt{2}}\sum\sqrt{\frac{b+c}{a}} \ge \sum\sqrt{\frac{16a+b+c}{b+c}}$. Thật vậy, bình phương hai vế, ta có:

$$\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\sum\sqrt{\frac{b+c}{a}}\right)^2 = \sum\left(\frac{b+c}{a}+2\sqrt{\frac{(a+b)(a+c)}{bc}}\right) \ge \sum\frac{b+c}{a}+2\sum\frac{a+\sqrt{bc}}{\sqrt{bc}} = \sum\frac{b+c}{a}+2\sum\frac{a}{\sqrt{bc}}+6$$

$$\ge \sum\frac{b+c}{a}+4\sum\frac{a}{b+c}+6 = \sum a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+4\sum\frac{a}{b+c}+6 \ge 4\sum\frac{a}{b+c}+4\sum\frac{a}{b+c}+6 = 8\sum\frac{a}{b+c}+6$$

Bất đẳng thức cần chứng minh là đúng, khi đó áp dụng vào bài trên ta suy ra:

$$\left(\sum\sqrt{\frac{16a+b+c}{b+c}}\right)^2 = \sum\sqrt{\frac{16a+b+c}{b+c}}+2\sqrt{\frac{(16a+b+c)(16b+c+a)}{(a+c)(b+c)}}$$

$$\le \sum\frac{16a+b+c}{b+c}+\sum\left(\frac{16a+b+c}{a+c}+\frac{16b+c+a}{b+c}\right) = 18\sum\frac{a}{b+c}+54$$

Suy ra: $\frac{3}{2\sqrt{2}}\sum\sqrt{\frac{b+c}{a}} \ge \sum\sqrt{\frac{16a+b+c}{b+c}} \ge \sqrt{18\sum\frac{a}{b+c}+54}$

Lúc này ta cần chứng minh $\frac{9}{2}\left(8\sum\frac{a}{b+c}+6\right) \ge 18\sum\frac{a}{b+c}+54$ (*) là bài toán kết thúc

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với $\sum\frac{a}{b+c} \ge \frac{3}{2}$ (**)

Ta có: $\begin{cases}(a+b+c)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right) = \frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}+(a+b+c)\\(a+b+c)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right) \ge \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)}+(a+b+c)\end{cases} \Rightarrow \sum\frac{a}{b+c} \ge \frac{3}{2}$

Như vậy (**) đúng thì bất đẳng thức (*) đúng tức bất đẳng thức chứng minh hoàn tất. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Bài 277. Cho a,b,c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{a^4}{b^2(a^2-ab+b^2)}}+\sqrt[3]{\frac{b^4}{c^2(b^2-bc+c^2)}}+\sqrt[3]{\frac{c^4}{a^2(c^2-ca+a^2)}} \ge 3$$

Lời giải

Ta có:

$$\sqrt[3]{\frac{a^4}{b^2\left(a^2-ab+b^2\right)}}=\sqrt[3]{\frac{a^6}{a^2b^2\left(a^2-ab+b^2\right)}}=\frac{a^2}{\sqrt[3]{ab.ab.\left(a^2-ab+b^2\right)}}\ge\frac{3a^2}{a^2-ab+b^2+ab+ab}=\frac{3a^2}{a^2+ab+b^2}$$

Chứng minh tương tự, ta có: $\sqrt[3]{\frac{b^4}{c^2\left(b^2-bc+c^2\right)}}\ge\frac{3b^2}{b^2+bc+c^2};\sqrt[3]{\frac{c^4}{a^2\left(c^2-ca+a^2\right)}}\ge\frac{3c^2}{c^2+ca+a^2}$

Cộng vế theo vế, suy ra: $\sum\sqrt[3]{\frac{a^4}{b^2\left(a^2-ab+b^2\right)}}\ge\sum\frac{3a^2}{a^2+ab+b^2}\ge 3$

Tới đây ta chỉ cần chứng minh: $\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}\ge 1$ (*) là kết thúc bài toán

Thật vậy, nhân hai vế cho $\left(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\right)$ ta có:

$$(*)=\sum_{cyc}\left(\frac{a^2\left(a^2+ab+b^2+c^2+bc+ca\right)}{a^2+ab+b^2}\right)=\sum_{cyc}\left(a^2+\frac{a^2c\left(a+b+c\right)}{a^2+ab+b^2}\right)\ge\left(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\right)$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(a^2+\frac{a^2c\left(a+b+c\right)}{a^2+ab+b^2}\right)\ge ab+bc+ca\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(\frac{a^2c}{a^2+ab+b^2}\right)\ge\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}$$

Thật vậy ta nhận thấy: $\sum_{cyc}\left(\frac{a^2c}{a^2+ab+b^2}\right)\ge\frac{\left(ab+bc+ca\right)^2}{\sum_{cyc}c\left(a^2+ab+b^2\right)}=\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}$

Vậy khi bất đẳng thức (*) đúng tức bất đẳng thức chứng minh hoàn tất. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Bài 278. Cho a,b,c là các số thực dương và là ba độ dài cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{6a}{2a+b+c}+\frac{6b}{2b+c+a}+\frac{6c}{2c+a+b}\ge 6$$

Lời giải

Đầu tiên, ta có bất đẳng thức ban đầu tương đương với:

$$\sum\frac{a}{b+c}-\frac{3}{2}\ge\frac{9}{2}-\sum\frac{6a}{2a+b+c}\Leftrightarrow\sum\frac{\left(a-b\right)^2}{\left(b+c\right)\left(b+a\right)}\ge 3\sum\frac{\left(a-b\right)^2}{\left(2a+b+c\right)\left(2b+c+a\right)}$$

Đặt ẩn S.O.S như sau: (giả sử $a>b>c>0$): $\begin{cases}S_a=\dfrac{2b^2+2c^2+2bc-2a^2}{\left(a+c\right)\left(a+b\right)\left(2b+a+c\right)\left(2c+a+b\right)}\\ S_a=\dfrac{2a^2+2c^2+2ac-2b^2}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(2a+b+c\right)\left(2c+a+b\right)}\\ S_c=\dfrac{2a^2+2b^2+2ab-2c^2}{\left(b+c\right)\left(c+a\right)\left(2a+b+c\right)\left(2b+a+c\right)}\end{cases}$

Giả sử $a\ge b\ge c$ khi đó $S_b,S_c\ge 0$ do đó chúng ta cần chứng minh $S_a+S_b\ge 0$.

Thật vậy, ta có: $\frac{\left(2b^2+2c^2+2bc-2a^2\right)\left(b+c\right)\left(2a+b+c\right)+\left(2a^2+2c^2+2ac-2b^2\right)\left(a+c\right)\left(2b+a+c\right)}{\left(a+c\right)\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(2b+a+c\right)\left(2c+a+b\right)\left(2a+b+c\right)}\ge 0$

Bất đẳng thức vừa nêu hiển nhiên đúng vì:

$$\left(2b^2+2c^2+2bc-2a^2\right)\left(b+c\right)\left(2a+b+c\right)+\left(2a^2+2c^2+2ac-2b^2\right)\left(a+c\right)\left(2b+a+c\right)$$

$$=\left(2c^2+2a^2-2b^2\right)\left(a^2-b^2\right)\ge 0$$

Cùng với: $(a+c)(a+b)(b+c)(2b+a+c)(2c+a+b)(2a+b+c)=\prod(a+b)\prod(2a+b+c)\ge 0$

Do đó bất đẳng thức chứng minh hoàn tất. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Bài 279. Cho a,b,c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a\sqrt{3b+2a}}+\frac{1}{b\sqrt{3c+2b}}+\frac{1}{c\sqrt{3a+2c}}\ge\frac{3}{\sqrt{5abc}}$$

Lời giải

Ta có: $\dfrac{\sqrt{abc}}{\sqrt{5a}\sqrt{3b+2a}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}a\sqrt{\dfrac{3}{ac}+\dfrac{2}{bc}}}=\dfrac{1}{a\sqrt{\dfrac{5}{c}\left(\dfrac{3}{a}+\dfrac{2}{b}\right)}}$;

Từ đó, ta viết lại bất đẳng thức trên thành: $\dfrac{1}{a\sqrt{\dfrac{5}{c}\left(\dfrac{3}{a}+\dfrac{2}{b}\right)}}+\dfrac{1}{b\sqrt{\dfrac{5}{a}\left(\dfrac{3}{b}+\dfrac{2}{c}\right)}}+\dfrac{1}{c\sqrt{\dfrac{5}{b}\left(\dfrac{3}{c}+\dfrac{2}{a}\right)}}\ge\dfrac{3}{5}$

Đầu tiên ta đặt: $(x;y;z)=\left(\dfrac{1}{a};\dfrac{1}{b};\dfrac{1}{c}\right)$ khi đó bất đẳng thức trở thành:

$$\frac{x}{\sqrt{5z(3x+2y)}}+\frac{y}{\sqrt{5x(3y+2z)}}+\frac{z}{\sqrt{5y(3z+2x)}}\ge\frac{3}{5}$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có: $\sqrt{5z(3x+2y)}\le\dfrac{1}{2}(5z+3x+2y)\Rightarrow\dfrac{x}{\sqrt{5z(3x+2y)}}\ge\dfrac{2x}{5z+3x+2y}$

Từ đó suy ra: $\sum\dfrac{x}{\sqrt{5z(3x+2y)}}\ge\sum\dfrac{2x}{5z+3x+2y}$

Lúc này ta chỉ cần chứng minh $\sum\dfrac{2x}{5z+3x+2y}\ge\dfrac{3}{5}$ (*) là kết thúc bài toán. Thật vậy ta có:

$xy+yz+zx\le x^2+y^2+z^2$. Từ đó suy ra (áp dụng Cauchy-Schwarz dạng phân thức):

$$\sum\frac{2x}{5z+3x+2y}=\sum\frac{2x^2}{x(5z+3x+2y)}\ge\frac{2(x+y+z)^2}{x(5z+3x+2y)+y(5x+3y+2z)+z(5y+3z+2x)}$$

$$=\frac{2(x+y+z)^2}{3(x^2+y^2+z^2)+7(xy+yz+zx)}\ge\frac{2(x+y+z)^2}{3(x^2+y^2+z^2)+\frac{1}{3}(xy+yz+zx)+\frac{20}{3}(xy+yz+zx)}$$

$$\ge\frac{2(x+y+z)^2}{3(x^2+y^2+z^2)+\frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)+\frac{20}{3}(xy+yz+zx)}=\frac{3(x+y+z)^2}{5\left[x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\right]}=\frac{3(x+y+z)^2}{5(x+y+z)^2}=\frac{3}{5}$$

Vậy khi bất đẳng thức (*) đúng tức bất đẳng thức chứng minh hoàn tất. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Bài 280. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\le 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+3c^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-ca+3a^2+1}}\le\frac{3}{2}$$

Lời giải

Đầu tiên ta cần chứng minh: $\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}\ge\dfrac{1}{4}(a+5b+2)$ (*). Thật vậy, ta có:

Bất đẳng thức tương đương với: $a^2-ab+3b^2+1=\dfrac{1}{16}(a+5b+2)^2$

$\Leftrightarrow 16a^2-16ab+48b^2+16=a^2+25b^2+4+10ab+20b+4a$

$\Leftrightarrow 15a^2-26ab+23b^2-4a-20b+12\ge 0 \Leftrightarrow 13\left(a-b\right)^2+2\left(a-1\right)^2+10\left(b-1\right)^2\ge 0$

Bất đẳng thức vừa phân tích luôn đúng với mọi a,b là số thực dương nên bất đẳng thức (*) đúng

Từ đó ta suy ra: $\sum \dfrac{1}{\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}}\le \sum \dfrac{4}{a+5b+2}$

Tiếp theo ta lại có: $\dfrac{4}{a+5b+2}=\dfrac{4}{a+3b+2b+2}\le \dfrac{1}{a+3b}+\dfrac{1}{2b+2}\le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{2}\right)$

$\le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{4a}+\dfrac{1}{4b}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{16a}+\dfrac{5}{16b}+\dfrac{1}{8}\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}}\le \dfrac{4}{a+5b+2}\le \dfrac{1}{16a}+\dfrac{5}{16b}+\dfrac{1}{8}$

Chứng minh tương tự ta có: $\dfrac{1}{\sqrt{b^2-bc+3c^2+1}}\le \dfrac{1}{16b}+\dfrac{5}{16c}+\dfrac{1}{8};\dfrac{1}{\sqrt{c^2-ca+3a^2+1}}\le \dfrac{1}{16c}+\dfrac{5}{16a}+\dfrac{1}{8}$

Cộng vế theo vế, suy ra: $\sum \dfrac{1}{\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}}\le \dfrac{3}{8}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+\dfrac{3}{8}\le \dfrac{3}{8}.3+\dfrac{3}{8}=\dfrac{3}{2}$

Bất đẳng thức chứng minh hoàn tất.

Bài 281. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=abc$. Chứng minh rằng

$$3+\frac{b}{a^2}+\frac{c}{b^2}+\frac{a}{c^2}\ge \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2+\sqrt{3}$$

Lời giải

Đặt $\left(x;y;z\right)=\left(\dfrac{1}{a};\dfrac{1}{b};\dfrac{1}{c}\right)$ ta có: $xy+yz+zx=1$. Suy ra: $\left(x+y+z\right)^2\ge 3\left(xy+yz+zx\right)=3$

Trường hợp 1: Khi đó ta có được: $x+y+z-\sqrt{3}\ge 0$. Từ đó bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành:

$3+\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+\dfrac{z^2}{x}\ge \left(x+y+z\right)^2+\sqrt{3}\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+\dfrac{z^2}{x}\ge x^2+y^2+z^2+\sqrt{3}-1$ (*)

Không mất tính tổng quát, giả sử $x>2$ thì từ $\left[\begin{array}{l} xy<1\\ xz<1\end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y<\dfrac{1}{2}\\ z<\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$. Từ đó bất đẳng thức (*) tương đương với:

$\Leftrightarrow \underbrace{x^2\left(\dfrac{1}{y}-1\right)+\dfrac{y^2}{z}+\dfrac{z^2}{x}}_{A}\ge x^2+y^2+\sqrt{3}-1$. Trong đó: $\begin{cases} A>x^2\left(\dfrac{1}{1/2}-1\right)=x^2>4\\ A<\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\sqrt{3}-1<4\end{cases}$

Trường hợp 2: $0<x,y,z\le 2$, khi đó ta có:

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{y}+y-2x\right)+\left(\frac{y^2}{z}+z-2y\right)+\left(\frac{z^2}{x}+x-2z\right)+\left(x+y+z-\sqrt{3}\right)\ge x^2+y^2+z^2-\left(xy+yz+zx\right)$$

(*) $\Leftrightarrow \dfrac{\left(x-y\right)^2}{y}+\dfrac{\left(y-z\right)^2}{z}+\dfrac{\left(z-x\right)^2}{x}+\left(x+y+z-\sqrt{3}\right)\ge \dfrac{\left(x-y\right)^2}{2}+\dfrac{\left(y-z\right)^2}{2}+\dfrac{\left(z-x\right)^2}{2}$

$$\Leftrightarrow \left(x-y\right)^2\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{2}\right)+\left(y-z\right)^2\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\right)+\left(z-x\right)^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)+\left(x+y+z-\sqrt{3}\right)\ge 0$$

Bất đẳng thức vừa nêu hiển nhiên đúng với $0<x,y,z\le 2$ và $x+y+z-\sqrt{3}\ge 0$

Bất đẳng thức chứng minh hoàn tất. Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z\Rightarrow a=b=c=\sqrt{3}$

Bài 282. Cho a,b,c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+\frac{1}{b}+1}+\frac{1}{b+\frac{1}{c}+1}+\frac{1}{c+\frac{1}{a}+1}\ge\frac{3}{\sqrt[3]{abc}+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}+1}$$

Lời giải

Đầu tiên ta đặt: $(x;y;z;t)=\left(a+\frac{1}{b};b+\frac{1}{c};c+\frac{1}{a};\sqrt[3]{abc}+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right)$ khi đó ta có: $xyz-(x+y+z)=t^3-3t$

Suy ra ta chuyển sang chứng minh: $\frac{1}{a+\frac{1}{b}+1}+\frac{1}{b+\frac{1}{c}+1}+\frac{1}{c+\frac{1}{a}+1}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\ge\frac{3}{t+1}$

$$\Leftrightarrow\frac{(xy+yz+zx)+2(x+y+z)+3}{(x+1)(y+1)(z+1)}=1+\frac{xyz-(x+y+z)+2}{(x+1)(y+1)(z+1)}\ge\frac{3}{t+1}\Leftrightarrow\frac{t^3-3t+2}{(x+1)(y+1)(z+1)}\ge\frac{2-t}{t+1}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(2-t)(t+1)^2}{(x+1)(y+1)(z+1)}\ge\frac{2-t}{t+1}\Leftrightarrow(t-2)(x+1)(y+1)(z+1)\ge(t-2)(t+1)^3$$

Do $a+\frac{1}{b}+b+\frac{1}{c}+c+\frac{1}{a}=(a+b+c)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge3\left(\sqrt[3]{abc}+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right)\ge6\Leftrightarrow t\ge2$

Nên ta suy ra: $\left(a+\frac{1}{b}+1\right)\left(b+\frac{1}{c}+1\right)\left(c+\frac{1}{a}+1\right)\ge\left(\sqrt[3]{abc}+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}+1\right)^3$

Bất đẳng thức trên đúng với bất đẳng thức Holder nên ta hoàn tất chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$

Bài 283. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a-1}{\sqrt{b+3}}+\frac{b-1}{\sqrt{c+3}}+\frac{c-1}{\sqrt{a+3}}\ge0$$

Lời giải

Đầu tiên ta phân tích như sau:

$$\Leftrightarrow\sum\frac{a-1}{\sqrt{b+3}}\ge0\Leftrightarrow\sum\frac{3a-3}{\sqrt{b+3}}=\sum\frac{3a-(a+b+c)}{\sqrt{b+3}}=\sum\left(\frac{a-b}{\sqrt{b+3}}-\frac{c-a}{\sqrt{b+3}}\right)\ge0\Leftrightarrow\sum\left(\frac{a-b}{\sqrt{b+3}}-\frac{a-b}{\sqrt{c+3}}\right)\ge0$$

$$\Leftrightarrow\sum\frac{(a-b)\left(\sqrt{c+3}-\sqrt{b+3}\right)}{\sqrt{(b+3)(c+3)}}\ge0\Leftrightarrow\sum\frac{\sqrt{a+3}(a-b)(c-b)}{\sqrt{b+3}+\sqrt{c+3}}\ge0\quad(*)$$

Ta đặt: $(x;y;z)=\left(\frac{\sqrt{c+3}}{\sqrt{a+3}+\sqrt{b+3}};\frac{\sqrt{a+3}}{\sqrt{b+3}+\sqrt{c+3}};\frac{\sqrt{b+3}}{\sqrt{c+3}+\sqrt{a+3}}\right)$ khi đó bất đẳng thức (*) trở thành:

$$\sum x(a-b)(a-c)\ge0\Leftrightarrow\sum\left[(x+y-z)+(z+x-y)\right](a-b)(a-c)\ge0$$

$$\Leftrightarrow\sum\left[(x+y-z)(a-b)(a-c)+(x+y-z)(b-c)(b-a)\right]\ge0\Leftrightarrow\sum(x+y-z)(a-b)^2\ge0$$

Mà với mọi a,b,c là các số thực thuộc $[0;3]$ thỏa $a+b+c=3$ thì $x+y\ge2\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3+3}}=z$ nên ta suy ra

$x+y-z\ge0$ tức $\sum(x+y-z)(a-b)^2\ge0$ là hiển nhiên đúng

Khi ấy bất đẳng thức hoàn tất chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$

Bài 283. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=7$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge\sqrt[3]{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2+6abc}$$

Lời giải

Đầu tiên ta áp dụng bất đẳng thức sau: $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}=\frac{a^4}{a^2b}+\frac{b^4}{a^2c}+\frac{c^4}{c^2a}\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2b+b^2c+c^2a}$

Tiếp theo, thông qua bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$a^2b+b^2c+c^2a\le\sum\frac{a^3+ab^2+a^2b}{3}=\frac{(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)}{3}=\frac{7}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Từ đó ta suy ra: (áp dụng bất đẳng thức CBS)

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge\frac{3}{7}\left(a^2+b^2+c^2\right)=\sqrt[3]{\frac{3^3}{7^3}\left(a^2+b^2+c^2\right)^3}\ge\sqrt[3]{\frac{3^3}{7^3}.\frac{(a+b+c)^2}{3}.\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}$$

$$\ge\sqrt[3]{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2+\frac{2}{7}.\frac{7.3.\sqrt[3]{abc}.3.\left(\sqrt[3]{abc}\right)^2}{3}}=\sqrt[3]{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2+6abc}$$

Khi ấy bất đẳng thức hoàn tất chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\frac{7}{3}$

Bài 284. Cho a,b,c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)\ge\left(1+\sqrt[3]{\left(1+\frac{a^2}{bc}\right)\left(1+\frac{b^2}{ca}\right)\left(1+\frac{c^2}{ab}\right)}\right)^2$$

Lời giải

Đầu tiên ta đặt: $(x;y;z)=\left(\frac{a^2}{bc};\frac{b^2}{ca};\frac{c^2}{ab}\right)$ với $xyz=1$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$3+x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\left(1+\sqrt[3]{(1+x)(1+y)(1+z)}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 3+x+y+z+xy+yz+zx\ge\left(1+\sqrt[3]{2+x+y+z+xy+yz+zx}\right)^2$$

Đặt $a=3+x+y+z+xy+yz+zx$ khi đó bất đẳng thức trở thành: $1+a\ge\left(1+\sqrt[3]{a}\right)^2$

$$\Leftrightarrow a-2\sqrt[3]{a}-\left(\sqrt[3]{a}\right)^2\ge0\Leftrightarrow\sqrt[3]{a}\left(\sqrt[3]{a}+1\right)\left(\sqrt[3]{a}-2\right)\ge0\Rightarrow\sqrt[3]{a}\ge2$$

Suy ra: $2+x+y+z+xy+yz+zx\ge8\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2\ge0$ (luôn đúng)

Khi ấy bất đẳng thức hoàn tất chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$

Bài 285. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa $a+b+c=ab+bc+ca=k$. Chứng minh rằng

$$a\sqrt{4a^2+5b^2}+b\sqrt{4b^2+5c^2}+c\sqrt{4c^2+5a^2}\le2k^2-k-6$$

Lời giải

Đầu tiên, áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$a\sqrt{4a^2+5b^2}\le\frac{4a^2+5b^2}{2a+b}+2a+b=\left(\frac{4a^2+5b^2}{2a+b}-(2a+5b)\right)+4a+6b=4a+6b-\frac{12ab}{2a+b}$$

Chứng minh tương tự, từ đó ta suy ra:

$$\sum a\sqrt{4a^2+5b^2} \le \sum a\left(2a+3b-\frac{6ab}{2a+b}\right) = 2(a+b+c)^2-(ab+bc+ca)-6\sum\frac{(ab)^2}{b(2a+b)}$$

$$\le 2k^2-k-6.\frac{(ab+bc+ca)^2}{(a+b+c)^2} = 2k^2-k-6 \Rightarrow \sum a\sqrt{4a^2+5b^2} \le 2k^2-k-6$$

Khi ấy bất đẳng thức hoàn tất chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$

Bài 286. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a}{a+6b+2bc}}+\sqrt{\frac{b}{b+6c+2ca}}+\sqrt{\frac{c}{c+6a+2ab}} \ge 1$$

Lời giải

Đầu tiên, ta đặt $(a;b;c)=\left(\frac{x}{y};\frac{y}{z};\frac{z}{x}\right)$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\sum\sqrt{\frac{a}{a+6b+2bc}} = \sum\sqrt{\frac{x^2z}{x^2z+6y^2z+2y^2z}} = \sum\sqrt{\frac{x^2z^3}{x^3z^3+6x^2y^2z^2+2xy^2z^3}} \ge 1$$

Lúc này ta chỉ cần chứng minh $\sum\sqrt{\frac{x^2z^3}{x^3z^3+6x^2y^2z^2+2xy^2z^3}} \ge 1$ là bài toán kết thúc.

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với:

$$\frac{(xy+yz+zx)^{\frac{3}{2}}}{\left(\sum(xy)^3+18x^2y^2z^2+2\sum(xy^2z^3)\right)^{\frac{1}{2}}} \ge 1 \Leftrightarrow \frac{(xy+yz+zx)^3}{\sum(xy)^3+18x^2y^2z^2+2\sum(xy^2z^3)} \ge 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum(xy)^3+3\sum(xy^2z^3)+3\sum(x^2y^3z)+6x^2y^2z^2}{\sum(xy)^3+18x^2y^2z^2+2\sum(xy^2z^3)} \ge 1 \Leftrightarrow \sum(xy^2z^3)+3\sum(x^2y^3z) \ge 12x^2y^2z^2$$

Mà $\sum(xy^2z^3)+3\sum(x^2y^3z) \ge 12x^2y^2z^2$ luôn đúng nên $\sum\sqrt{\frac{x^2z^3}{x^3z^3+6x^2y^2z^2+2xy^2z^3}} \ge 1$ luôn đúng

Khi ấy bất đẳng thức hoàn tất chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$

Bài 287. Cho a,b,c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng

$$\frac{\frac{1}{a}+b}{\sqrt{\frac{1}{a}+a}}+\frac{\frac{1}{b}+c}{\sqrt{\frac{1}{b}+b}}+\frac{\frac{1}{c}+a}{\sqrt{\frac{1}{c}+c}} \ge 3\sqrt{2}$$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{\frac{1}{a}+b}{\sqrt{\frac{1}{a}+a}} = \frac{\sqrt{a}\left(\frac{1}{a}+b\right)}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{\sqrt{a}\left(\frac{1}{a}+b\right)}{\left(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{2a}\right)-\sqrt{2a}} \ge \frac{\sqrt{a}\left(\frac{1}{a}+b\right)}{\sqrt{(1+1)(a^2+1+2a)}-\sqrt{2a}} = \frac{\sqrt{a}\left(\frac{1}{a}+b\right)}{\sqrt{2}\left(a+1-\sqrt{a}\right)}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{a}\left(\frac{1}{a}+b\right)}{\sqrt{2}\left(a+1-\sqrt{a}\right)}+\frac{\sqrt{2}\left(a+1-\sqrt{a}\right)}{\sqrt{a}}\right)-\frac{\sqrt{2}\left(a+1-\sqrt{a}\right)}{\sqrt{a}} \ge 2\sqrt{\frac{1}{a}+b}-\sqrt{2}\left(\sqrt{a}-1+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

$$\ge \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}\right)-\sqrt{2}\left(\sqrt{a}-1+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)=\sqrt{2}\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)+\sqrt{2}$$

Từ đó ta suy ra: $\dfrac{\frac{1}{a}+b}{\sqrt{\frac{1}{a}+a}} \ge \sqrt{2}\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)+\sqrt{2}$. Chứng minh tương tự hai phân thức còn lại, suy ra:

$$\frac{\frac{1}{a}+b}{\sqrt{\frac{1}{a}+a}}+\frac{\frac{1}{b}+c}{\sqrt{\frac{1}{b}+b}}+\frac{\frac{1}{c}+a}{\sqrt{\frac{1}{c}+c}} \ge \sqrt{2}\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)+\sqrt{2}\left(\sqrt{c}-\sqrt{b}\right)+\sqrt{2}\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)+3\sqrt{2}=3\sqrt{2}$$

Bài 288. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \ge \sqrt{a^2+b^2-ab}+\sqrt{b^2+c^2-bc}+\sqrt{c^2+a^2-ca}$$

Lời giải

Quan sát bất đẳng thức ta nhân thấy dấu hiệu sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức, khi đó ta được $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \ge a+b+c$. Bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được

$$a+b+c \ge \sqrt{a^2+b^2-ab}+\sqrt{b^2+c^2-bc}+\sqrt{c^2+a^2-ca}$$

Tuy nhiên đánh giá trên không đúng, nên ta sẽ đi sang hướng khác.

Nhớ lại cách đánh giá tạo ra đại lượng $\sqrt{a^2+b^2-ab}$ ta có $\frac{a^2}{b}-a+b+b=\left(\frac{a^2+b^2-ab}{b}+b\right) \ge 2\sqrt{a^2+b^2-ab}$

Áp dụng tương tự ta được $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+a+b+c \ge 2\sqrt{a^2+b^2-ab}+2\sqrt{b^2+c^2-bc}+2\sqrt{c^2+a^2-ca}$

Như vậy ta cần chỉ ta được $2\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right) \ge \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+a+b+c$

Và đây là một đánh giá hoàn toàn đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 289. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{c^2}} \ge \sqrt{82}$$

Lời giải

Để loại bỏ các căn bậc hai trong trường hợp biểu thức dưới dấu căn được viết dạng tổng, ta thường dùng bất đẳng thức Bunhiacopxki, rất may trong trường hợp này ta có đánh giá cùng chiều. Chú ý đến dấu đẳng thức xẩy ra ta được: $\sqrt{82\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)}=\sqrt{\left(1+9^2\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)} \ge \sqrt{\left(a+\frac{9}{a}\right)^2}=a+\frac{9}{a}$

Áp dụng tương tự ta được $\sqrt{82\left(b^2+\frac{1}{b^2}\right)} \ge b+\frac{9}{b}; \sqrt{82\left(c^2+\frac{1}{c^2}\right)} \ge c+\frac{9}{c}$

Khi đó ta được $\sqrt{82\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)}+\sqrt{82\left(b^2+\frac{1}{b^2}\right)}+\sqrt{82\left(c^2+\frac{1}{c^2}\right)} \ge a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Hay $\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{c^2}} \ge \frac{1}{\sqrt{82}}\left(a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu có: $\frac{1}{\sqrt{82}}\left(a+b+c+\frac{9}{a}+\frac{9}{b}+\frac{9}{c}\right) \ge \sqrt{82}$ hay $a+b+c+\frac{9}{a}+\frac{9}{b}+\frac{9}{c} \ge 82$

Chú ý đến giả thiết $a+b+c=1$ kết hợp với một đánh giá quen thuộc ta có: $\frac{9}{a}+\frac{9}{b}+\frac{9}{c}\ge \frac{9.9}{a+b+c}=81$

Như vậy đánh giá cuối cùng đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 290. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a\left(a+b+c\right)=3bc$. Chứng minh rằng:

$$\left(a+b\right)^3+\left(a+c\right)^3+3\left(a+b\right)\left(a+c\right)\left(b+c\right)\le 5\left(b+c\right)^3$$

Lời giải

Trước hết ta viết lại giả thiết: $a\left(a+b+c\right)=3bc \Leftrightarrow a^2+ab+bc+ca=4bc \Leftrightarrow \left(a+b\right)\left(a+c\right)=4bc$

Lúc này ta đặt $x=a+b;\ y=a+c$ thì được $xy=4bc$. Để ý đến đánh giá

$$x^3+y^3=\left(x+y\right)\left(x^2-xy+y^2\right)\le\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}.\left[\left(x-y\right)^2+xy\right]$$

$$=\sqrt{2\left[\left(x-y\right)^2+2xy\right]}.\left[\left(x-y\right)^2+xy\right]=\sqrt{2\left[\left(b-c\right)^2+8bc\right]}.\left[\left(b-c\right)^2+4bc\right]$$

$$=\sqrt{2\left[\left(b+c\right)^2+4bc\right]}.\left(b+c\right)^2\le\sqrt{4\left(b+c\right)^2}.\left(b+c\right)^2=2\left(b+c\right)^3$$

Do đó ta được: $\left(a+b\right)^3+\left(a+c\right)^3\le 2\left(b+c\right)^3$. Ta cần chứng minh: $\left(a+b\right)\left(a+c\right)\left(b+c\right)\le\left(b+c\right)^3$.

Thật vậy $\left(a+b\right)\left(a+c\right)\left(b+c\right)=4bc\left(b+c\right)\le\left(b+c\right)^2\left(b+c\right)=\left(b+c\right)^3$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 291. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=9$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3+b^3}{ab+9}+\frac{b^3+c^3}{bc+9}+\frac{c^3+a^3}{ca+9}\ge 9$$

Lời giải

Cách 1: Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc $4\left(x^3+y^3\right)\ge\left(x+y\right)^3$ ta có $\frac{a^3+b^3}{ab+9}=\frac{4\left(a^3+b^3\right)}{4ab+36}\ge\frac{\left(a+b\right)^3}{4ab+36}$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy ta có $4ab\le\left(a+b\right)^2$ và $\left(a+b\right)^2+36\ge 12\left(a+b\right)$

Do đó ta được $\frac{a^3+b^3}{ab+9}=\frac{4\left(a^3+b^3\right)}{4ab+36}\ge\frac{\left(a+b\right)^3}{\left(a+b\right)^2+36}=a+b-\frac{36\left(a+b\right)}{\left(a+b\right)^2+36}\ge a+b-\frac{36\left(a+b\right)}{12\left(a+b\right)}=a+b-3$

Áp dụng tương tự ta có $\frac{b^3+c^3}{bc+9}\ge b+c-3;\ \frac{c^3+a^3}{ca+9}\ge c+a-3$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên, ta được: $\frac{a^3+b^3}{ab+9}+\frac{b^3+c^3}{bc+9}+\frac{c^3+a^3}{ca+9}\ge 2\left(a+b+c\right)-9=9$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=3$.

Cách 2: Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc $4\left(x^3+y^3\right)\ge\left(x+y\right)^3$ ta có

$$\frac{a^3+b^3}{ab+9}\ge\frac{\left(a+b\right)^3}{4ab+36}=\left[\frac{\left(a+b\right)^3}{4ab+36}+\frac{4ab+6}{24}+3\right]-\frac{ab}{6}-\frac{9}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được: $\frac{\left(a+b\right)^3}{4ab+36}+\frac{4ab+6}{24}+3\ge 3\sqrt[3]{3\cdot\frac{\left(a+b\right)^3}{4ab+36}\cdot\frac{4ab+6}{24}}=3\cdot\frac{a+b}{2}$

Do đó ta được $\frac{a^3+b^3}{bc+9}\ge\frac{3\left(a+b\right)}{2}-\frac{ab}{6}-\frac{9}{2}$

Tương tự ta có $\dfrac{b^3+c^3}{bc+9}\ge\dfrac{3(b+c)}{2}-\dfrac{bc}{6}-\dfrac{9}{2};\ \dfrac{c^3+a^3}{ca+9}\ge\dfrac{3(c+a)}{2}-\dfrac{ca}{6}-\dfrac{9}{2}$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên và kết hợp với đánh giá quen thuộc , ta được

$$\frac{a^3+b^3}{ab+9}+\frac{b^3+c^3}{bc+9}+\frac{c^3+a^3}{ca+9}\ge 3(a+b+c)-\frac{ab+bc+ca}{6}-\frac{27}{2}\ge 3(a+b+c)-\frac{(a+b+c)^2}{18}-\frac{27}{2}=9$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=3$.

Bài 292. Cho a,b là các số thực dương thỏa mãn $a+b+1=3ab$. Chứng minh rằng:

$$\frac{3a}{b(a+1)}+\frac{3b}{a(b+1)}-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\le 1$$

Lời giải

Biến đổi biểu thức vế trái ta được $P=\dfrac{3ab}{b^2(a+1)}+\dfrac{3ab}{a^2(b+1)}-\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{b+(a+1)}{b^2(a+1)}+\dfrac{a+(b+1)}{a^2(b+1)}-\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}$

Hay $$P=\frac{b}{b^2(a+1)}+\frac{a}{a^2(b+1)}=\frac{1}{b(a+1)}+\frac{1}{a(b+1)}$$

Đặt $x=\dfrac{1}{a};\ y=\dfrac{1}{b}$, từ giả thiết ta suy ra $x+y+xy=3$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $3=x+y+xy\ge xy+2\sqrt{xy}\Leftrightarrow xy+2\sqrt{xy}-3\le 0\Leftrightarrow\left(\sqrt{xy}-1\right)\left(\sqrt{xy}+3\right)\le 0$

Từ đó ta suy ra $xy\le 1$. Khi đó ta có

$$P=\frac{xy}{x+1}+\frac{xy}{y+1}=xy\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}\right)=xy.\frac{x+y+2}{(x+1)(y+1)}=xy.\frac{(3-xy)+2}{(xy+x+y)+1}$$

$$=\frac{xy(5-xy)}{4}=\frac{-(xy)^2+5xy}{4}=\frac{\left[-(xy)^2+2xy-1\right]+3xy+1}{4}=\frac{-(xy-1)^2+3xy+1}{4}\le\frac{3+1}{4}$$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1$ hay $a=b=1$

Bài 293. Cho a,b,c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b+2c}+\frac{b^3}{c+2a}+\frac{c^3}{a+2b}\ge\frac{(a+b+c)^2}{9}$$

Lời giải

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^3}{b+2c}+\frac{b^3}{c+2a}+\frac{c^3}{a+2b}=\frac{a^4}{ab+2ca}+\frac{b^4}{bc+2ab}+\frac{c^4}{ca+2bc}\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{3(ab+bc+ca)}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được: $\dfrac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{3(ab+bc+ca)}\ge\dfrac{(a+b+c)^2}{9}$

Thật vậy, ta cần chú ý hai bất đẳng thức quen thuộc: $a^2+b^2+c^2\ge\dfrac{1}{3}(a+b+c)^2\ge ab+bc+ca$

Từ đó ta có: $\dfrac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{3(ab+bc+ca)}=\dfrac{\left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c)^2}{9(ab+bc+ca)}\ge\dfrac{(a+b+c)^2}{9}$

Bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được: $\dfrac{a^3}{b+2c}+\dfrac{a^3}{b+2c}+\dfrac{(b+2c)^2}{27}\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{a^3}{b+2c}\cdot\dfrac{a^3}{b+2c}\cdot\dfrac{(b+2c)^2}{27}}=a^2$

Chứng minh tương tự: $\frac{b^3}{c+2a}+\frac{b^3}{c+2a}+\frac{(c+2a)^2}{27}\ge b^2;\frac{c^3}{a+2b}+\frac{c^3}{a+2b}+\frac{(a+2b)^2}{27}\ge c^2$

Cộng theo vế ta được $\frac{2a^3}{b+2c}+\frac{2b^3}{c+2a}+\frac{2c^3}{a+2b}+\frac{(b+2c)^2}{27}+\frac{(c+2a)^2}{27}+\frac{(a+2b)^2}{27}\ge a^2+b^2+c^2$

Hay $$\frac{a^3}{b+2c}+\frac{b^3}{c+2a}+\frac{c^3}{a+2b}\ge\frac{11(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)}{27}$$

Ta cần chứng minh được: $\frac{11(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)}{27}\ge\frac{(a+b+c)^2}{9}$

Hay $$11(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)\ge 3(a+b+c)^2$$

Triển khai và thu gọn ta được $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$. Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Bài 294. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\ge\frac{3}{4}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\ge\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a(1+b)(1+c)+b(1+c)(1+a)+c(1+a)(1+b)}$$

$$=\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2(ab+bc+ca)+a+b+c+3abc}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được: $\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2(ab+bc+ca)+a+b+c+3abc}\ge\frac{3}{4}$

Hay $$4(a^2+b^2+c^2)^2\ge 6(ab+bc+ca)+3(a+b+c)+9abc$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $(a^2+b^2+c^2)^2\ge(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)=3(a+b+c)$

Do đó ta có: $6(ab+bc+ca)+3(a+b+c)+9\le 6(ab+bc+ca)+(ab+bc+ca)^2+9$

Ta cần chứng minh được: $6(ab+bc+ca)+(ab+bc+ca)^2+9\le 4(ab+bc+ca)^2$

$$\Leftrightarrow(ab+bc+ca)^2-2(ab+bc+ca)-3\ge 0\Leftrightarrow(ab+bc+ca+1)(ab+bc+ca-3)\ge 0$$

Đánh giá cuối cùng luôn đúng vì $ab+bc+ca\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3$.

Bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 295. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+\sqrt{(a+b)^3+abc}}+\frac{1}{1+\sqrt{(b+c)^3+abc}}+\frac{1}{1+\sqrt{(c+a)^3+abc}}\le\frac{3}{4}$$

Lời giải

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy vào giả thiết ta được: $3=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge\frac{3}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}\Rightarrow abc\ge 1$

Do đó $$\frac{1}{1+\sqrt{(a+b)^3+abc}} \le \frac{1}{1+\sqrt{(a+b)^3+1}} = \frac{\sqrt{(a+b)^3+1}-1}{(a+b)^3}$$

Để ý là khi $a=b=1$ thì $(1+a+b)=\left[1-(a+b)+(a+b)^2\right]$, do đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sqrt{(a+b)^3+1} = \sqrt{(1+a+b)\left[1-(a+b)+(a+b)^2\right]} \le \frac{(1+a+b)+\left[1-(a+b)+(a+b)^2\right]}{2} = 1+\frac{(a+b)^2}{2}$$

Suy ra: $\sqrt{(a+b)^3+1}-1 \le \frac{(a+b)^2}{2}$ Hay $\frac{\sqrt{(a+b)^3+1}-1}{(a+b)^3} \le \frac{1}{2(a+b)} \Rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{(a+b)^3+abc}} \le \frac{1}{2(a+b)}$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{1}{1+\sqrt{(a+b)^3+abc}} + \frac{1}{1+\sqrt{(b+c)^3+abc}} + \frac{1}{1+\sqrt{(c+a)^3+abc}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

Ta cần chứng minh $$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \le \frac{3}{2}$$

Thật vậy, theo một đánh giá quen thuộc kết hợp với giả thiết ta được: $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \le \frac{3}{2}$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Cách 2: Để ý thấy có số 1 ở dưới mẫu nên để dễ đánh mẫu hơn ta có thể áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức để tách số một ra khỏi mẫu số. Chú ý đến dấu đẳng thức xẩy ra ta được

$$\frac{1}{1+\sqrt{(a+b)^3+abc}} = \frac{1}{16}\cdot\frac{(1+3)^2}{1+\sqrt{(a+b)^3+abc}} \le \frac{1}{16}\left(1+\frac{9}{\sqrt{(a+b)^3+abc}}\right)$$

Để ý lại thấy trong mẫu số có chứa đại lượng abc nên nếu ta đánh giá được $(a+b)^3$ về ab thì có thể đặt được nhân tử chung. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $(a+b)^2 \ge 4ab$, khi đó ta được

$$\frac{1}{\sqrt{(a+b)^3+abc}} \le \frac{1}{\sqrt{(a+b)4ab+abc}} = \frac{1}{\sqrt{ab(4a+4b+c)}}$$

Bây giờ để triệt tiêu căn bậc hai ta để ý đến bất đẳng thức Cauchy dạng $2\sqrt{xy} \le x+y$. Chú ý là cần bảo toàn dấu đẳng thức nên ta có: $\frac{1}{\sqrt{ab(4a+4b+c)}} = \frac{3}{\sqrt{9ab(4a+4b+c)}} \le \frac{2}{3}\left(\frac{1}{9ab}+\frac{1}{4a+4b+c}\right)$

Mặt khác theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta có $\frac{1}{4a+4b+c} = \frac{1}{81}\cdot\frac{(4+4+1)^2}{4a+4b+c} \le \frac{1}{81}\cdot\left(\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{1}{c}\right)$

Do đó ta được $$\frac{1}{1+\sqrt{(a+b)^3+abc}} \le \frac{1}{16}+\frac{3}{32ab}+\frac{1}{96}\left(\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{1}{1+\sqrt{(a+b)^3+abc}} + \frac{1}{1+\sqrt{(b+c)^3+abc}} + \frac{1}{1+\sqrt{(c+a)^3+abc}} \le \frac{3}{16}+\frac{3}{32}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+\frac{9}{96}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Ta cần chứng minh $$\frac{3}{16}+\frac{3}{32}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+\frac{9}{96}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \le \frac{3}{4}$$

Thật vậy, Áp dụng hai bất đẳng thức quen thuộc ta được

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\sqrt{3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}=3;\quad \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\le\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=3$$

Từ đó suy ra $\frac{3}{16}+\frac{3}{32}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+\frac{9}{96}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\le\frac{3}{16}+\frac{9}{32}+\frac{27}{96}=\frac{3}{4}$

Bất đẳng thức được chứng minh xong.

Bài 296. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+b^2+2}{a+b-ab}+\frac{b^2+c^2+2}{b+c-bc}+\frac{c^2+a^2+2}{c+a-ca}\ge 12$$

Lời giải

Cách 1: Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy các mẫu số không đồng bậc, chú ý đến giả thiết của bài toán ta viết lại được: $\frac{a^2+b^2+2}{(a+b)(a+b+c)-ab}=\frac{a^2+b^2+2}{a^2+b^2+ab+bc+ca}$

Để ý là $$\frac{a^2+b^2+2}{a^2+b^2+ab+bc+ca}-1=\frac{2-ab-bc-ca}{a^2+b^2+ab+bc+ca}$$

Khi đó áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{2-ab-bc-ca}{a^2+b^2+ab+bc+ca}+\frac{2-ab-bc-ca}{b^2+c^2+ab+bc+ca}+\frac{2-ab-bc-ca}{c^2+a^2+ab+bc+ca}\ge 9$$

Bất đẳng thức có các tử giống nhau nên áp dụng một đánh giá quen thuộc ta được

$$\frac{2-ab-bc-ca}{a^2+b^2+ab+bc+ca}+\frac{2-ab-bc-ca}{b^2+c^2+ab+bc+ca}+\frac{2-ab-bc-ca}{c^2+a^2+ab+bc+ca}\ge\frac{9(2-ab-bc-ca)}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)+3(ab+bc+ca)}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được: $\frac{2-ab-bc-ca}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)+3(ab+bc+ca)}=1$

Để để triệt tiêu các đại lượng âm trên tử số ta chú ý đến $(a+b+c)^2=1$, khi đó ta có

$$\frac{2-ab-bc-ca}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)+3(ab+bc+ca)}=\frac{2(a+b+c)^2-ab-bc-ca}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)+3(ab+bc+ca)}=1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Cách 2: Kết hợp với giả thiết ta có biến đổi như sau

$$a+b-ab=(a+b)(a+b+c)-ab=a^2+b^2+ab+bc+ca$$

Do đó ta có" $\frac{a^2+b^2+2}{a+b-ab}=\frac{a^2+b^2+2}{a^2+b^2+ab+bc+ca}=\frac{a^2+1}{a^2+b^2+ab+bc+ca}+\frac{b^2+1}{a^2+b^2+ab+bc+ca}$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{b^2+c^2+2}{b+c-bc}=\frac{b^2+1}{b^2+c^2+ab+bc+ca}+\frac{c^2+1}{b^2+c^2+ab+bc+ca}$$

$$\frac{c^2+ba+2}{c+a-ca}=\frac{c^2+1}{c^2+a^2+ab+bc+ca}+\frac{a^2+1}{c^2+a^2+ab+bc+ca}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{a^2+1}{a^2+b^2+ab+bc+ca}+\frac{a^2+1}{c^2+a^2+ab+bc+ca}\ge\frac{4\left(a^2+1\right)}{2a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}=\frac{4\left(a^2+1\right)}{a^2+(a+b+c)^2}=4$$

Áp dụng tương tự ta được : $\begin{cases} \dfrac{b^2+1}{b^2+c^2+ab+bc+ca}+\dfrac{b^2+1}{b^2+a^2+ab+bc+ca}\ge 4 \\ \dfrac{c^2+1}{b^2+c^2+ab+bc+ca}+\dfrac{c^2+1}{c^2+a^2+ab+bc+ca}\ge 4 \end{cases}$

Cộng theo vế các kết quả trên ta được: $\dfrac{a^2+b^2+2}{a+b-ab}+\dfrac{b^2+c^2+2}{b+c-bc}+\dfrac{c^2+ba+2}{c+a-ca}\ge 12$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Bài 297. Cho các số thực thỏa mãn $a,b,c\in(0;1)$ và $abc=(1-a)(1-b)(1-c)$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2+b^4}{b}+\dfrac{b^2+c^4}{c}+\dfrac{c^2+a^4}{a}\ge\dfrac{15}{8}$

Lời giải

Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy cần phải đổi biến để làm mất đi các dấu trừ bên vế phải, do đó rất tự nhiên ta nghĩ đến phép đổi biến $x=a-b;\ y=b-1;\ z=c-1$, tuy nhiên quan sát kỹ giả thiết thì ta có thể biến đổi: $abc=(1-a)(1-b)(1-c)\Leftrightarrow\dfrac{(1-a)(1-b)(1-c)}{abc}=1$

Đến đây ta đặt $x=\dfrac{1-a}{a};\ y=\dfrac{1-b}{b};\ z=\dfrac{1-c}{c}$. Khi đó ta có $xyz=1$ và $a=\dfrac{1}{1+x};\ b=\dfrac{1}{1+y};\ c=\dfrac{1}{1+z}$

Do $xyz=1$ nên trong các số x, y, z có hai số nằm cùng phía so với 1, giả sử hai số đó là x và y. Khi đó ta có

$(x-1)(y-1)\ge 0\Leftrightarrow x+y\le 1+xy=\dfrac{1+z}{z}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}\ge\frac{1}{(1+xy)\left(1+\dfrac{x}{y}\right)}+\frac{1}{(1+xy)\left(1+\dfrac{y}{x}\right)}=\frac{y}{(1+xy)(x+y)}+\frac{x}{(1+xy)(x+y)}=\frac{1}{1+xy}=\frac{z}{1+z}$$

Từ đó ta có: $a^2+b^2+c^2=\dfrac{1}{(1+x)^2}+\dfrac{1}{(1+y)^2}+\dfrac{1}{(1+z)^2}\ge\dfrac{z}{1+z}+\dfrac{1}{(1+z)^2}=\dfrac{z(1+z)+1}{(1+z)^2}=\dfrac{(2z-1)^2}{4(1+z)^2}+\dfrac{3}{4}\ge\dfrac{3}{4}$

Bất đẳng thức trên viết lại được thành: $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}+a^3+b^3+c^3\ge\dfrac{15}{8}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được: $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}=\dfrac{a^4}{a^2b}+\dfrac{b^4}{b^2c}+\dfrac{c^4}{c^2a}\ge\dfrac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2b+b^2c+c^2a}$

Mà cũng theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$a^2b+b^2c+c^2a\le\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)}\le\sqrt{\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}$$

Từ đó suy ra: $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\ge\dfrac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{\sqrt{\dfrac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}}=\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}\ge\dfrac{3}{2}$

Mặt khác ta lại có : $\begin{cases}\left(a^3+b^3+c^3\right)(a+b+c)\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\\ 3\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge(a+b+c)^2\end{cases}$

Do đó ta được: $3\left(a^3+b^3+c^3\right)^2\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)^3\ge\left(\dfrac{3}{4}\right)^3\Rightarrow a^3+b^3+c^3\ge\dfrac{3}{8}$

Từ các kết quả trên ta được $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+a^3+b^3+c^3\ge\frac{3}{2}+\frac{3}{8}=\frac{15}{8}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Bài 298. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $0<a,b,c<1$ và $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+b^2}{\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)}+\frac{b^2+c^2}{\left(1-b^2\right)\left(1-c^2\right)}+\frac{c^2+a^2}{\left(1-c^2\right)\left(1-a^2\right)}\ge\frac{9}{2}$$

Lời giải

Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy được sự phức tạp của bài toán, để có các đánh giá hợp lý trước hết ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Bất đẳng thức có tính đối xứng nên ta sẽ đi phân tích một biểu thức rồi áp dụng tương tự

Quan sát biểu thức $\frac{a^2+b^2}{\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)}$ ta thấy được dấu hiệu sử dụng bất đẳng thức quen thuộc $2\left(a^2+b^2\right)\ge\left(a+b\right)^2$, như vậy trên tử xuất hiện bình phương đúng nên rất tự nhiên ta nghĩ đến bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức. Tuy nhiên để ý là ta viết mẫu số thành $1-a^2-b^2+a^2b^2$ lại trội hơn nên muốn đánh giá về đại lượng lớn hơn sẽ rất khó khăn. Từ đó ta nghĩ đến việc tìm ra mối liên hệ giữa tử và mẫu. Để ý là ta chứng minh được $\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)\le\left(1-ab\right)^2$, nên ta cần đánh giá tử số về $\left(1-ab\right)^2$ hoặc $\left(1+ab\right)^2$. Nhận thấy $\frac{a^2+b^2}{\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)}+\frac{1}{2}=\frac{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)}{2\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)}$, nên chú ý đến bất đẳng thức Bunhiacopxki ta lại có $\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\ge\left(1+ab\right)^2$ suy ra $\frac{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)}{\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)}\ge\frac{\left(1+ab\right)^2}{\left(1-ab\right)^2}$.

Ban đầu, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\frac{a^2+b^2}{\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)}+\frac{b^2+c^2}{\left(1-b^2\right)\left(1-c^2\right)}+\frac{c^2+a^2}{\left(1-c^2\right)\left(1-a^2\right)}+\frac{3}{2}\ge 6$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)}{\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)}+\frac{\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)}{\left(1-b^2\right)\left(1-c^2\right)}+\frac{\left(1+c^2\right)\left(1+a^2\right)}{\left(1-c^2\right)\left(1-a^2\right)}\ge 12$$

Theo phân tích như trên ta có $\frac{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)}{\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)}\ge\frac{\left(1+ab\right)^2}{\left(1-ab\right)^2};\frac{\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)}{\left(1-b^2\right)\left(1-c^2\right)}\ge\frac{\left(1+bc\right)^2}{\left(1-bc\right)^2};\frac{\left(1+c^2\right)\left(1+a^2\right)}{\left(1-c^2\right)\left(1-a^2\right)}\ge\frac{\left(1+ca\right)^2}{\left(1-ca\right)^2}$.

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)}{\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)}+\frac{\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)}{\left(1-b^2\right)\left(1-c^2\right)}+\frac{\left(1+c^2\right)\left(1+a^2\right)}{\left(1-c^2\right)\left(1-a^2\right)}\ge\frac{\left(1+ab\right)^2}{\left(1-ab\right)^2}+\frac{\left(1+bc\right)^2}{\left(1-bc\right)^2}+\frac{\left(1+ca\right)^2}{\left(1-ca\right)^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được: $\frac{\left(1+ab\right)^2}{\left(1-ab\right)^2}+\frac{\left(1+bc\right)^2}{\left(1-bc\right)^2}+\frac{\left(1+ca\right)^2}{\left(1-ca\right)^2}\ge 3\sqrt[3]{\frac{\left(1+ab\right)^2}{\left(1-ab\right)^2}\frac{\left(1+bc\right)^2}{\left(1-bc\right)^2}\frac{\left(1+ca\right)^2}{\left(1-ca\right)^2}}$

Như vậy phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được: $\frac{\left(1+ab\right)^2}{\left(1-ab\right)^2}\frac{\left(1+bc\right)^2}{\left(1-bc\right)^2}\frac{\left(1+ca\right)^2}{\left(1-ca\right)^2}\ge 64$

Hay ta cần chứng minh $\left(1+ab\right)\left(1+bc\right)\left(1+ca\right)\ge 8\left(1-ab\right)\left(1-bc\right)\left(1-ca\right)$.

Đặt $x=ab;y=bc;z=ca$, khi đó $x,y,z>0$ và $x+y+z=1$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\left(1+x\right)\left(1+y\right)\left(1+z\right)\ge 8\left(1-x\right)\left(1-y\right)\left(1-z\right)$, tương đương với bất đẳng thức sau $9xyz\ge 7\left(xy+yz+zx\right)-2$

Ta dễ dàng chứng minh được $x^2+y^2+z^2+\dfrac{9xyz}{x+y+z}\ge 2\left(xy+yz+zx\right)$.

Mà $x+y+z=1$ nên ta suy ra được $9xyz\ge 4\left(xy+yz+zx\right)-1$. Vì $x+y+z=1$ nên $3\left(xy+yz+zx\right)\le 1$, do đó $4\left(xy+yz+zx\right)-1\ge 7\left(xy+yz+zx\right)-2$

Điều này dẫn tới $9xyz\ge 7\left(xy+yz+zx\right)-2$. Như vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh xong.

Bài 299. Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $a,b,c\in[1;\,2]$. Chứng minh rằng:

$$a^3+b^3+c^3\le 5abc$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh có tính đối xứng giữa các biến, do đó ta không mất tính tổng quát, ta giả sử $1\le c\le b\le a\le 2$. Khi đó dễ thấy $\left(b-a\right)\left(b-c\right)\le 0$ Hay $b^2\le b\left(a+c\right)-ac$.

Từ đây ta suy ra: $b^3\le b^2\left(a+c\right)-abc\le\left[b\left(a+c\right)-ac\right]\left(a+c\right)-abc=b\left(a+c\right)^2-ac\left(a+c\right)-abc$

Như vậy ta cần chứng minh $a^3+c^3+b\left(a+c\right)^2-ac\left(a+c\right)-abc\le 5abc\Leftrightarrow\left(a-c\right)^2\left(a+c\right)+b\left(a+c\right)^2\le 6abc$

Để ý rằng do $a,b,c\in[1;\,2]$ nên $a\le 2\le 2c\le b+c$, từ đó dẫn đến $0\le a-c\le b$

Như vậy ta có: $\left(a-c\right)^2\left(a+c\right)+b\left(a+c\right)^2\le b\left(a-c\right)\left(a+c\right)+b\left(a+c\right)^2=2ab\left(a+c\right)\le 2ab\left(2c+c\right)=6abc$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a=2;\,b=c=1$ và các hoán vị của nó.

Bài 300. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^4}{b+3c}+\frac{b^4}{c+3a}+\frac{c^4}{a+3b}\ge\frac{1}{4}\left(a+b+c\right)$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si: $\begin{cases}\dfrac{4a^4}{b+3c}+\dfrac{1}{4}\left(b+3c\right)\ge 2a^2\\ \dfrac{4b^4}{c+3a}+\dfrac{1}{4}\left(b+3c\right)\ge 2b^2\\ \dfrac{4c^4}{a+3b}+\dfrac{1}{4}\left(b+3c\right)\ge 2c^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{4a^4}{b+3c}\ge 2a^2-\dfrac{1}{4}\left(b+3c\right)\\ \dfrac{4b^4}{c+3a}\ge 2b^2-\dfrac{1}{4}\left(c+3a\right)\\ \dfrac{4c^4}{a+3b}\ge 2c^2-\dfrac{1}{4}\left(a+3b\right)\end{cases}$

Cộng theo vế ta có được $\dfrac{4a^4}{b+3c}+\dfrac{4b^4}{c+3a}+\dfrac{4c^4}{a+3b}\ge 2\left(a^2+b^2+c^2\right)-\left(a+b+c\right)$

Ta cần chứng minh $2\left(a^2+b^2+c^2\right)-\left(a+b+c\right)\ge a+b+c\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge a+b+c$

Ta có $3\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=\left(a+b+c\right)^2$

Khi đó ta cần chứng minh : $\dfrac{\left(a+b+c\right)^2}{3}\ge a+b+c$

$\Leftrightarrow\dfrac{\left(a+b+c\right)^2}{3}-\left(a+b+c\right)\ge 0\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}\left(a+b+c\right)\left(a+b+c-3\right)\ge 0$ do $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}=3$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.