Chương 4
VÉCTƠ

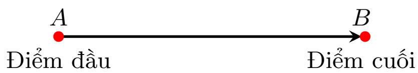
Bài 1 CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

A – TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Khái niệm véc-tơ

Định nghĩa 1.1. Véc-tơ là một đoạn thẳng có hướng.

Véc-tơ có điểm đầu là A, điểm cuối là B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là “véc-tơ AB”.
Để vẽ véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ ta vẽ đoạn thẳng AB và đánh dấu mũi tên ở đầu mút B (H.1).
Đối với véc-tơ AB, ta gọi



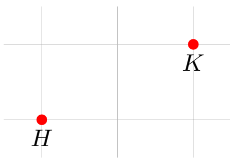
Hình 1

- Đường thẳng d đi qua hai điểm A và B là giá của véc-tơ AB (H.2).
- Độ dài đoạn thẳng AB là độ dài của véc-tơ AB, kí hiệu là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Hình 2

VÍ DỤ 1

Cho hai điểm phân biệt H, K như hình bên. Viết hai véc-tơ mà điểm đầu và điểm cuối là H hoặc K.

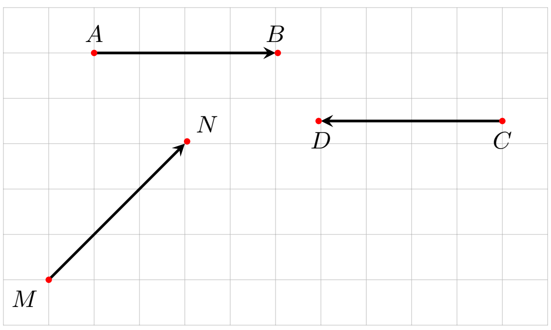


BÀI GIẢI

Hai véc-tơ thỏa mãn yêu cầu đề bài là $\overrightarrow{HK}$ và $\overrightarrow{KH}$. □

VÍ DỤ 2

Tính độ dài của các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{MN}$ ở Hình 3, biết rằng độ dài cạnh của ô vuông bằng 1 cm.



Hình 3

BÀI GIẢI

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB = 4 \text{ cm}, \left|\overrightarrow{CD}\right| = CD = 4 \text{ cm},$$
$$\left|\overrightarrow{MN}\right| = MN = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ cm}.$$
□

2. Hai véc-tơ cùng phương, cùng hướng, bằng nhau

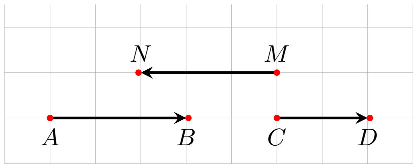
Định nghĩa 1.2. Hai véc-tơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

CHÚ Ý

Nếu hai véc-tơ cùng phương thì hoặc chúng cùng hướng hoặc chúng ngược hướng.

VÍ DỤ 3

Trong Hình 4, tìm véc-tơ cùng hướng với véc-tơ $\overrightarrow{AB}$; ngược hướng với véc-tơ $\overrightarrow{AB}$.



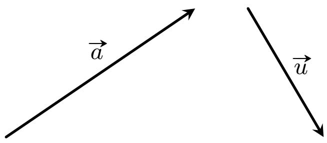
Hình 4

BÀI GIẢI

Véc-tơ $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng với véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, véc-tơ $\overrightarrow{MN}$ ngược hướng với véc-tơ $\overrightarrow{AB}$. □

Định nghĩa 1.3. Hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài, kí hiệu: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của véc-tơ, véc-tơ còn được kí hiệu là $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$, ...(Hình 5). Độ dài của véc-tơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$.



Hình 5

CHÚ Ý

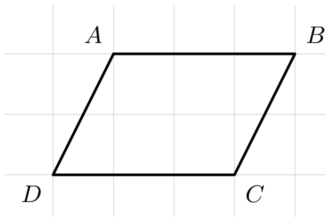
- Hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài, kí hiệu là $\vec{a} = \vec{b}$.
- Khi cho trước véc-tơ $\vec{a}$ và điểm O, thì ta luôn tìm được một điểm A duy nhất sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.

VÍ DỤ 4

Cho hình bình hành $ABCD$ (Hình 6).

a) Véc-tơ nào bằng véc-tơ $\overrightarrow{AB}$?

b) Véc-tơ nào bằng véc-tơ $\overrightarrow{AD}$?



Hình 6

BÀI GIẢI

a) Vì $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ cùng hướng và $AB = DC$ nên $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

b) Vì $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng và $AD = BC$ nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

□

3. Véc-tơ không

Định nghĩa 1.4. Véc-tơ không là véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, kí hiệu là $\vec{0}$.

Với các điểm bất kì A, B, C ta có $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC}$.

Véc-tơ $\overrightarrow{AA}$ nằm trên mọi đường thẳng đi qua A. Ta quy ước $\vec{0}$ (véc-tơ không) cùng phương và cùng hướng với mọi véc-tơ; hơn nữa $\left|\vec{0}\right| = 0$.

CHÚ Ý

Hai điểm A, B trùng nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định một véc-tơ, độ dài véc-tơ

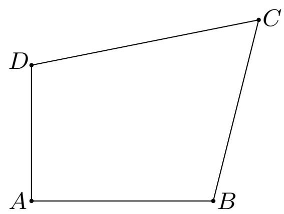
- Véc-tơ là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là, trong hai điểm mút của đoạn thẳng, đã chỉ rõ điểm đầu, điểm cuối.
- Độ dài của véc-tơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của véc-tơ đó.

1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Cho tứ giác $ABCD$. Hãy chỉ ra các véc-tơ khác véc-tơ không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của tứ giác.

Lời giải.

Từ hai điểm phân biệt của tứ giác ta xác định được hai véc-tơ khác véc-tơ không, chẳng hạn từ hai điểm A, B ta xác định được hai véc-tơ khác véc-tơ không là $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$.
Suy ra tứ giác $ABCD$ có 12 véc-tơ khác véc-tơ không là $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$.

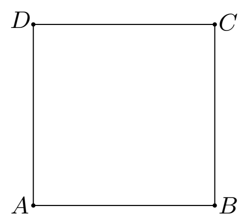


□

Ví dụ 2. Cho hình vuông $ABCD$ với cạnh có độ dài bằng 1. Tính độ dài các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$.

Lời giải.

Vì cạnh của hình vuông $ABCD$ có độ dài bằng 1 nên $|\overrightarrow{AB}| = 1$ và đường chéo của hình vuông có độ dài bằng $\sqrt{2}$.
Suy ra $|\overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{DB}| = BD = \sqrt{2}$.

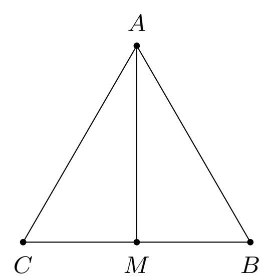


□

Ví dụ 3. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của BC tính độ dài véc-tơ $\overrightarrow{AM}$.

Lời giải.

Vì ABC là tam giác đều nên $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |\overrightarrow{AM}| = AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



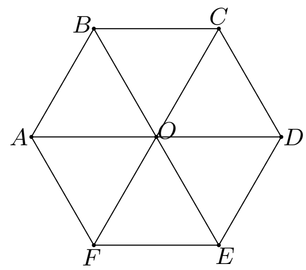
2. Bài tập rèn luyện

Bài 1. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có cạnh bằng a.

a) Có bao nhiêu véc-tơ khác véc-tơ không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của ngũ giác?

b) Tính độ dài các véc-tơ $\overrightarrow{AD}$

Lời giải.



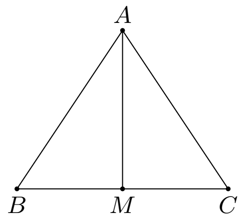
a) Từ hai điểm phân biệt của tứ giác ta xác định được hai véc-tơ khác véc-tơ không, chẳng hạn từ hai điểm A, B ta xác định được hai véc-tơ khác véc-tơ không là $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$.
Lục giác đều $ABCDEF$ có 15 cặp điểm phân biệt do đó có 30 véc-tơ khác véc-tơ không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của ngũ giác.

b) Ta có $|\overrightarrow{AD}| = AD = 2AB = 2a$.

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC tính độ dài véc-tơ $\overrightarrow{AM}$.

Lời giải.

Độ dài véc-tơ $\overrightarrow{AM}$ là $|\overrightarrow{AM}| = AM = \dfrac{BC}{2} = a$.



Dạng 2. Hai vectơ cùng phương, cùng hướng và bằng nhau

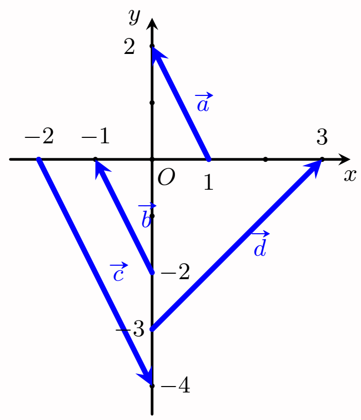
Sử dụng các định nghĩa

- Hai vectơ cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.
- Hai vectơ cùng phương thì cùng hướng hoặc ngược hướng.
- Hai vectơ bằng nhau nếu chúng cùng độ dài và cùng hướng.

1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 4.

Cho hình vẽ, hãy chỉ ra các vectơ cùng phương, các cặp vectơ ngược hướng và các cặp vectơ bằng nhau



Lời giải.

Dựa vào hình vẽ ta thấy

- Các vectơ cùng phương là $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$.
- Các cặp vectơ ngược hướng là $\vec{a}$ với $\vec{c}$ và $\vec{b}$ với $\vec{c}$.
- Các cặp vectơ bằng nhau là $\vec{a}$ với $\vec{b}$.

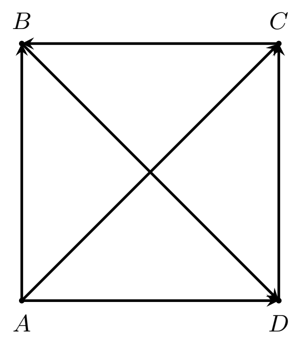
□

Ví dụ 5. Cho hình vuông $ABCD$. Hãy chỉ ra mối quan hệ về độ dài, phương, hướng giữa các cặp vectơ

a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$. b) $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{CB}$. c) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$.

Những cặp vectơ nào trong các cặp vectơ trên là bằng nhau?

Lời giải.



a) Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$ cùng độ dài và cùng hướng. Do đó, hai $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$ bằng nhau.

b) Hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{CB}$ cùng độ dài và ngược hướng. Do đó, hai $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{CB}$ không bằng nhau.

c) Hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$ cùng độ dài nhưng không cùng phương nên không cùng hướng. Do đó, hai $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$ không bằng nhau.

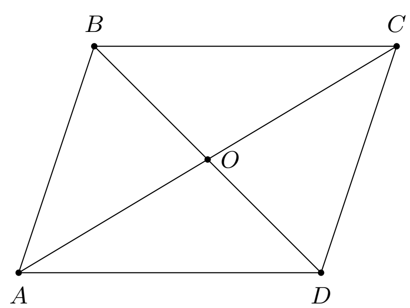
□

Ví dụ 6. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm là O . Hãy tìm các cặp vectơ khác $\vec{0}$, bằng nhau và

a) có điểm đầu và điểm cuối trong các điểm A , B , C và D .

b) có điểm đầu là O hoặc điểm cuối là O.

Lời giải.



a) Các cặp vectơ khác $\vec{0}$, bằng nhau và có điểm đầu và điểm cuối trong các điểm A , B , C và D: $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CB}$ và $\overrightarrow{DA}$.

b) Các cặp vectơ khác $\vec{0}$, bằng nhau và có điểm đầu là O hoặc điểm cuối là O: $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{AO}$ và $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{BO}$ và $\overrightarrow{OD}$.

Ví dụ 7. Hai ca nô A và B chạy trên cùng khúc sông (khúc sông thẳng) với cùng độ lớn vận tốc là 15 km/h. Tuy vậy, ca nô A chạy xuôi dòng, ca nô B chạy ngược dòng. Vận tốc dòng nước là 5 km/h.

a) Hãy thể hiện bằng hình vẽ, vectơ vận tốc $\vec{v}$ dòng nước và vectơ vận tốc thực tế $\overrightarrow{v_A}$, $\overrightarrow{v_B}$ của hai ca nô A và B.

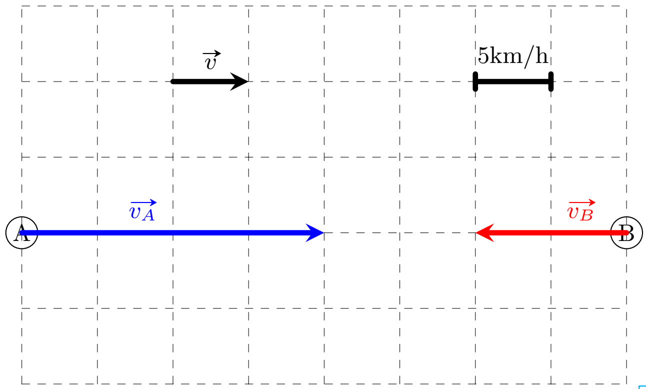
b) Trong các vectơ $\vec{v}$, $\overrightarrow{v_A}$, $\overrightarrow{v_B}$ những vectơ nào cùng phương, những cặp vectơ nào ngược hướng.

Lời giải.

a) Vì A chạy xuôi dòng nên $|\overrightarrow{v_A}| = 15 + 5 = 20$. Vì B chạy ngược dòng nên $|\overrightarrow{v_B}| = 15 - 5 = 10$.

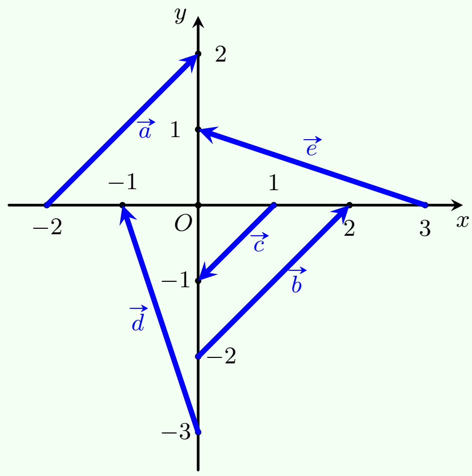
b) Dựa vào hình vẽ ta thấy

- Các vectơ cùng phương là $\vec{v}$, $\overrightarrow{v_A}$, $\overrightarrow{v_B}$.
- Các cặp vectơ ngược hướng là $\vec{v}$ và $\overrightarrow{v_B}$, $\overrightarrow{v_A}$ và $\overrightarrow{v_B}$.



2. Bài tập rèn luyện

Bài 1.
Cho hình vẽ, hãy chỉ ra các vectơ cùng phương, các cặp vectơ ngược hướng và các cặp vectơ bằng nhau



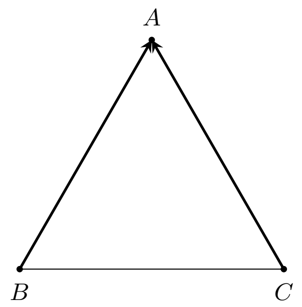
Lời giải.
Dựa vào hình vẽ ta thấy

- Các vectơ cùng phương là $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$.
- Các cặp vectơ ngược hướng là $\vec{a}$ với $\vec{c}$ và $\vec{b}$ với $\vec{c}$.
- Các cặp vectơ bằng nhau là $\vec{a}$ với $\vec{b}$.

Bài 2. Cho tam giác đều ABC, hãy chỉ ra mối quan hệ về độ dài, phương và hướng giữa cặp vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{CA}$. Hai vectơ có bằng nhau không?

Lời giải.

Dựa vào hình vẽ ta thấy hai vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{CA}$ cùng độ dài nhưng không cùng phương nên cũng không cùng hướng. Do đó, hai vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{CA}$ không bằng nhau.



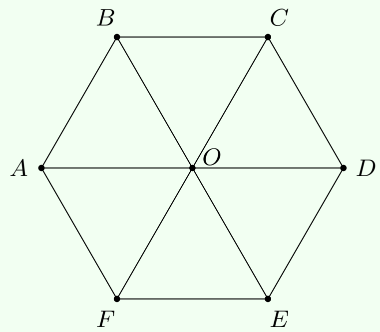
□

Bài 3.
Cho hình lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O.

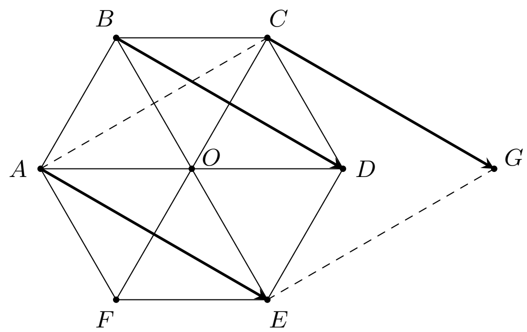
a) Hãy tìm các vectơ khác $\vec{0}$ và bằng với $\overrightarrow{AB}$.

b) Hãy vẽ vectơ bằng với $\overrightarrow{AE}$ và có điểm đầu là B.

c) Hãy vẽ vectơ bằng với $\overrightarrow{AE}$ và có điểm đầu là C.



Lời giải.



a) các vectơ khác $\vec{0}$ và bằng với vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{FO}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{ED}$.

b) Vì $ABDE$ là tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại mỗi đường nên là hình bình hành. Suy ra, vectơ bằng với $\overrightarrow{AE}$ có điểm đầu B là $\overrightarrow{BD}$.

c) Giả sử $\overrightarrow{CG}$ là vectơ cần dựng và vì $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$ nên $AEGC$ là hình bình hành.

Vậy điểm G cần dựng là đỉnh còn lại của hình bình hành $AEGC$.

□

Bài 4. Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Lời giải.

- Giả sử A, B, C thẳng hàng. Khi đó, chúng cùng nằm trên một đường thẳng. Suy ra, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ có giá trùng nhau. Vậy $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

- Giả sử $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương. Khi đó, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ có giá song song hoặc trùng nhau. Mặt khác, giá của $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng đi qua điểm A nên chúng trùng nhau. Vậy A, B, C thẳng hàng.

□

Bài 5. Trên mặt phẳng Oxy, hãy vẽ các vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{MN}$ với $A(1;2)$, $M(0;-1)$ và $N(3;5)$

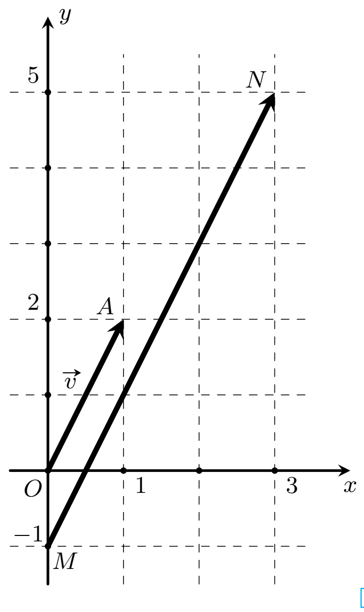
a) Chỉ ra một mối liên hệ giữa hai vectơ trên.

b) Một vật thể khởi hành từ M và chuyển động thẳng đều với vận tốc (tính theo giờ) được biểu diễn bởi vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$. Hỏi vật thể có đi qua N không? Nếu có thì sau bao lâu vật sẽ đến N?

Lời giải.

a) Dựa vào hình vẽ ta thấy hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng.

b) Vì hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng nên vật thể khởi hành từ M có thể đi đến N.
Mặt khác, vì $\left|\overrightarrow{MN}\right| = 3\left|\overrightarrow{OA}\right| = 3\left|\vec{v}\right|$ nên sau 3 giờ thì vật sẽ di chuyển đến N.



□

C – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Véc-tơ là một đoạn thẳng

(A) Có hướng.
(B) Có hướng dương và hướng âm.
(C) Có hai đầu mút.
(D) Thỏa mãn ba tính chất trên.

Lời giải.

Véc-tơ là một đoạn thẳng có hướng.
Chọn đáp án (A) □

Câu 2. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

(A) Véc-tơ là một đường thẳng có hướng.
(B) Véc-tơ là một đoạn thẳng.
(C) Véc-tơ là một đoạn thẳng có hướng.
(D) Véc-tơ là một đoạn thẳng không phân biệt điểm đầu và điểm cuối.

Lời giải.

Véc-tơ là một đoạn thẳng có hướng.
Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Véc-tơ có điểm đầu D và điểm cuối E được kí hiệu như thế nào là đúng?

(A) DE.
(B) ED.
(C) $\left|\overrightarrow{DE}\right|$.
(D) $\overrightarrow{DE}$.

Lời giải.

Véc-tơ có điểm đầu D và điểm cuối E được kí hiệu $\overrightarrow{DE}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Cho tam giác ABC có thể xác định được bao nhiêu véc-tơ (khác véc-tơ không) có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh A, B, C?

(A) 2.
(B) 3.
(C) 4.
(D) 6.

Lời giải.

Có thể xác định được 6 véc-tơ (khác véc-tơ không) có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh A, B, C là các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Cho hai điểm phân biệt A, B. Số véc-tơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm A, B là

A. 2. B. 6. C. 13. D. 12.

Lời giải.

Có 2 véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm A, B là $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Số véc-tơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ 7 điểm phân biệt cho trước (3 điểm bất kì không thẳng hàng) là

A. 42. B. 3. C. 9. D. 27.

Lời giải.

Cứ 1 điểm tạo với 6 điểm còn lại ta được 6 véc-tơ.

Vậy có tất cả $6 \cdot 7 = 42$ véc-tơ tạo thành.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Cho tứ giác $ABCD$. Có thể xác định được bao nhiêu véc-tơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối là các điểm A, B, C, D?

A. 4. B. 8. C. 10. D. 12.

Lời giải.

Có thể xác định được 12 véc-tơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối là các điểm A, B, C, D là các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$ và các véc-tơ đối của chúng.

Chọn đáp án D □

Câu 8. Cho véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. Được gọi là véc-tơ suy biến.

B. Được gọi là véc-tơ có phương tùy ý.

C. Được gọi là véc-tơ không, kí hiệu là $\vec{0}$.

D. Là véc-tơ có độ dài không xác định.

Lời giải.

Véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau có độ dài là 0.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Cho tam giác đều ABC. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

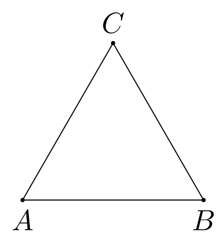
B. $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BC}$.

C. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$.

D. $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương $\overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

Có $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ là 2 véc-tơ không cùng phương nên $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BC}$.



Chọn đáp án A □

Câu 10. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

Ⓐ Mỗi véc-tơ đều có một độ dài, đó là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của véc-tơ đó.

Ⓑ Độ dài của véc-tơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$.

Ⓒ $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \overrightarrow{PQ}$.

Ⓓ $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB = BA$.

Lời giải.

$\left|\overrightarrow{PQ}\right|$ khác $\overrightarrow{PQ}$ do véc-tơ là một đoạn thẳng định hướng còn độ dài véc-tơ là độ dài đoạn thẳng nối điểm đầu và điểm cuối véc-tơ đó.

Chọn đáp án Ⓒ □

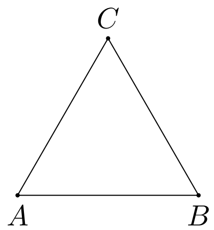
Câu 11. Cho tam giác đều ABC, cạnh a. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AC} = a$. Ⓑ $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \overrightarrow{BC}$.

Ⓒ $\left|\overrightarrow{AB}\right| = a$. Ⓓ $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

Có $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB = a$.



Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 12. Cho tam giác ABC đều cạnh a. Gọi M là trung điểm BC. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\left|\overrightarrow{AM}\right| = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $\overrightarrow{AM} = a$. Ⓒ $\overrightarrow{AM} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$.

Lời giải.

Ta có AM là đường trung tuyến tam giác đều suy ra $\left|\overrightarrow{AM}\right| = AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

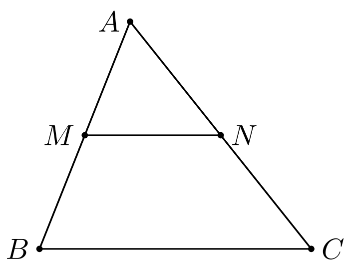
Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 13. Cho tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{NM}$. Ⓑ $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Ⓒ $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NC}$. Ⓓ $\left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{MB}\right|$.

Lời giải.

- $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NC}$ đúng vì $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{NC}$ cùng hướng và cùng độ dài.
- $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ đúng vì MN là đường trung bình của ΔABC nên $MN = \dfrac{1}{2}BC$ và $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng.
- $\left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{MB}\right|$ đúng vì M là trung điểm AB nên $MA = MB$.
- $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{NM}$ sai vì mệnh đề đúng tương ứng là $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$.



Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 14. Cho hai véc-tơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Không có véc-tơ nào cùng phương với cả hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

(B) Có vô số véc-tơ cùng phương với cả hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

(C) Có một véc-tơ cùng phương với cả hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

(D) Có hai véc-tơ cùng phương với cả hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Lời giải.

Có một véc-tơ cùng phương với cả hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đó là véc-tơ không.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Cho 3 điểm phân biệt A, B, C. Khi đó khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

(B) A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương.

(C) A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương.

(D) A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $AC = BC$.

Lời giải.

A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ đôi một cùng phương.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Có duy nhất một véc-tơ cùng phương với mọi véc-tơ.

(B) Có ít nhất hai véc-tơ cùng phương với mọi véc-tơ.

(C) Có vô số véc-tơ cùng phương với mọi véc-tơ.

(D) Không có véc-tơ nào cùng phương với mọi véc-tơ.

Lời giải.

Có duy nhất một véc-tơ cùng phương với mọi véc-tơ đó là véc-tơ không.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Hai véc-tơ cùng phương với một véc-tơ thứ ba thì cùng phương.

(B) Hai véc-tơ cùng phương với một véc-tơ thứ ba khác $\vec{0}$ thì cùng phương.

(C) Véc-tơ không là véc-tơ không có giá.

(D) Điều kiện đủ để hai véc-tơ bằng nhau là chúng có độ dài bằng nhau.

Lời giải.

Hai véc-tơ cùng phương với một véc-tơ thứ ba khác $\vec{0}$ thì cùng phương.

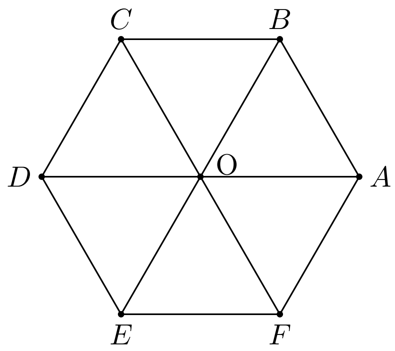
Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Số các véc-tơ khác $\vec{0}$ cùng phương với $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác bằng

(A) 6. (B) 7. (C) 8. (D) 4.

Lời giải.

Số các véc-tơ khác $\overrightarrow{0}$ cùng phương với $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{DE}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Khi đó

(A) Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{AC}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.

(B) Điều kiện đủ để A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{CA}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.

(C) Điều kiện cần để A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{CA}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.

(D) Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{AC}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\overrightarrow{a} = (-3;0)$, $\overrightarrow{b} = (4;x)$. Giá trị của x để $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ cùng phương là

(A) $x = -\dfrac{3}{4}$. (B) $x = -\dfrac{4}{3}$. (C) $x = 0$. (D) $x \in \varnothing$.

Lời giải.

$\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ cùng phương khi tồn tại số thực k khác 0 sao cho $\overrightarrow{b} = k\overrightarrow{a} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = k.(-3) \\ x = k.0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

(A) Hai véc-tơ cùng phương thì cùng hướng.

(B) Véc-tơ không cùng phương với mọi véc-tơ.

(C) Hai véc-tơ cùng hướng thì cùng phương.

(D) Véc-tơ là đoạn thẳng có hướng.

Lời giải.

Hai véc-tơ cùng phương có thể khác hướng. Do đó mệnh đề "Hai véc-tơ cùng phương thì cùng hướng " là sai.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Cho véc-tơ $\overrightarrow{MN} \neq \overrightarrow{0}$. Số véc-tơ cùng hướng với véc-tơ $\overrightarrow{MN}$ là

(A) vô số. (B) 1. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Có vô số véc-tơ cùng hướng với một véc-tơ khác véc-tơ-không cho trước.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Gọi C là trung điểm của đoạn AB. Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

(A) $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$.

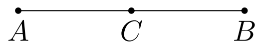
(B) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

(C) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CB}$ ngược hướng.

(D) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

Có $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.



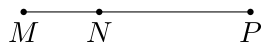
Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Cho ba điểm M, N, P thẳng hàng, trong đó điểm N nằm giữa hai điểm M và P. Khi đó các cặp véc-tơ nào cùng hướng?

(A) $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$. (B) $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$. (C) $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{NP}$. (D) $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$.

Lời giải.

Cặp véc-tơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$ là cùng hướng.



Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Cho hình bình hành $ABCD$. Chọn khẳng định đúng?

(A) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ là hai véc-tơ ngược hướng.
(B) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CB}$ là hai véc-tơ cùng hướng.
(C) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ là hai véc-tơ cùng phương.
(D) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ là hai véc-tơ cùng hướng.

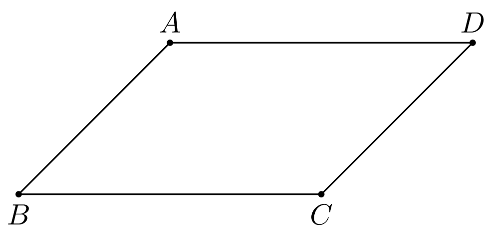
Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ là hai véc-tơ cùng phương.
Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Cho hình bình hành $ABCD$. Hai véc-tơ nào ngược hướng?

(A) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DB}$. (B) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. (C) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$. (D) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$.

Lời giải.



Hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ ngược hướng.
Chọn đáp án (C) □

Câu 27. Véc-tơ $-2\vec{a}$ và véc-tơ $\vec{a}$ với $\vec{a} \neq 0$ là hai véc-tơ

(A) ngược hướng. (B) bằng nhau. (C) cùng hướng. (D) đối nhau.

Lời giải.

Véc-tơ $-2\vec{a}$ và véc-tơ $\vec{a}$ với $\vec{a} \neq 0$ là hai véc-tơ ngược hướng.
Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\vec{a} = (1;2)$ và $\vec{b} = (3;6)$ cùng hướng.
(B) $\vec{a} = (1;2)$ và $\vec{b} = (2;1)$ đối nhau.
(C) $\vec{a} = (1;2)$ và $\vec{b} = (-3;-6)$ cùng hướng.
(D) $\vec{a} = (1;2)$ và $\vec{b} = (-3;0)$ cùng phương.

Lời giải.

Xét $\vec{a} = (1;2)$ và $\vec{b} = (3;6)$. Do $\vec{b} = 3\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = (1;2)$ và $\vec{b} = (3;6)$ cùng hướng.
Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Hai véc-tơ bằng nhau khi và chỉ khi

A. Cùng hướng và cùng độ dài.
B. Cùng phương.
C. Cùng hướng.
D. Có cùng độ dài.

Lời giải.

Hai véc-tơ bằng nhau khi và chỉ khi chúng cùng hướng và cùng độ dài.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bằng nhau, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$, nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.
B. Hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bằng nhau, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$, nếu chúng cùng phương và cùng độ dài.
C. Hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ bằng nhau khi và chỉ khi tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
D. Hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bằng nhau khi và chỉ khi chúng cùng độ dài.

Lời giải.

Hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bằng nhau, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$, nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.

Chọn đáp án A □

Câu 31. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. Hai véc-tơ không bằng nhau thì độ dài của chúng không bằng nhau.
B. Hai véc-tơ không bằng nhau thì độ dài của chúng không cùng phương.
C. Hai véc-tơ bằng nhau thì có giá trùng nhau hoặc song song nhau.
D. Hai véc-tơ có độ dài không bằng nhau thì không cùng hướng.

Lời giải.

Hai véc-tơ bằng nhau thì cùng phương nên chúng có giá trùng nhau hoặc song song nhau.

Chọn đáp án C □

Câu 32. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. Hai véc-tơ cùng phương thì bằng nhau.
B. Hai véc-tơ ngược hướng thì có độ dài không bằng nhau.
C. Hai véc-tơ cùng phương và cùng độ dài thì bằng nhau.
D. Hai véc-tơ cùng hướng và cùng độ dài thì bằng nhau.

Lời giải.

Hai véc-tơ cùng hướng và cùng độ dài thì bằng nhau.

Chọn đáp án D □

Câu 33. Cho véc-tơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Có vô số véc-tơ $\vec{u}$ mà $\vec{u} = \vec{a}$.
B. Có duy nhất một $\vec{u}$ mà $\vec{u} = \vec{a}$.
C. Có duy nhất một $\vec{u}$ mà $\vec{u} = -\vec{a}$.
D. Không có véc-tơ $\vec{u}$ nào mà $\vec{u} = \vec{a}$.

Lời giải.

Có vô số véc-tơ $\vec{u}$ mà $\vec{u} = \vec{a}$.

Chọn đáp án A □

Câu 34. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$.
B. $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{DA}\right|$.
C. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|$.
D. $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right|$.

Lời giải.

Theo tính chất của hình bình hành, ta có $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right|$ là đẳng thức sai.

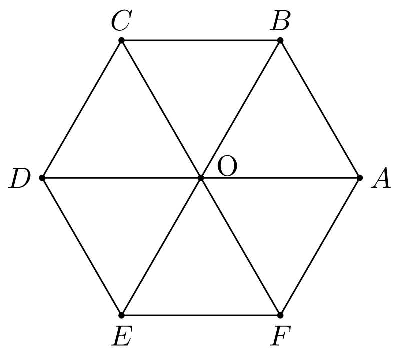
Chọn đáp án D □

Câu 35. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Ba véc-tơ bằng véc-tơ $\overrightarrow{BA}$ là

A. $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{OC}$. B. $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{DE}$. C. $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{CO}$. D. $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{OC}$.

Lời giải.

Các véc-tơ bằng véc-tơ $\overrightarrow{BA}$ là $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{CO}$.



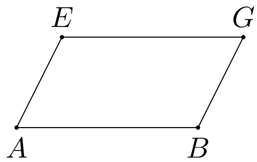
Chọn đáp án C □

Câu 36. Cho hình bình hành $ABGE$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{EG}$. B. $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BE}$. C. $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{BE}$. D. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{GE}$.

Lời giải.

Do $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{GE}$ cùng hướng và $BA = GE$ nên $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{GE}$.



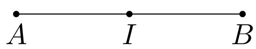
Chọn đáp án D □

Câu 37. Cho đoạn thẳng AB, I là trung điểm của AB. Khi đó

A. $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AI}$. B. $\overrightarrow{BI}$ cùng hướng $\overrightarrow{AB}$. C. $\left|\overrightarrow{BI}\right| = 2\left|\overrightarrow{IA}\right|$. D. $\left|\overrightarrow{BI}\right| = \left|\overrightarrow{IA}\right|$.

Lời giải.

Do I là trung điểm AB nên $IA = IB$, suy ra $\left|\overrightarrow{BI}\right| = \left|\overrightarrow{IA}\right|$.



Chọn đáp án D □

Câu 38. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$. B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$. C. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$. D. $\left|\overrightarrow{BD}\right| = a$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra tam giác ABD đều cạnh a nên $BD = a \Rightarrow \left|\overrightarrow{BD}\right| = a$.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Trong các đẳng thức dưới đây, đẳng thức nào đúng?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. B. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. C. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. D. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$.

Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên ta có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 40. Cho tam giác ABC với trung tuyến AM và trọng tâm G. Khi đó $\overrightarrow{GA}$ bằng

(A) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$. (B) $\frac{2}{3}\overrightarrow{GM}$. (C) $2\overrightarrow{GM}$. (D) $-\frac{2}{3}\overrightarrow{MA}$.

Lời giải.

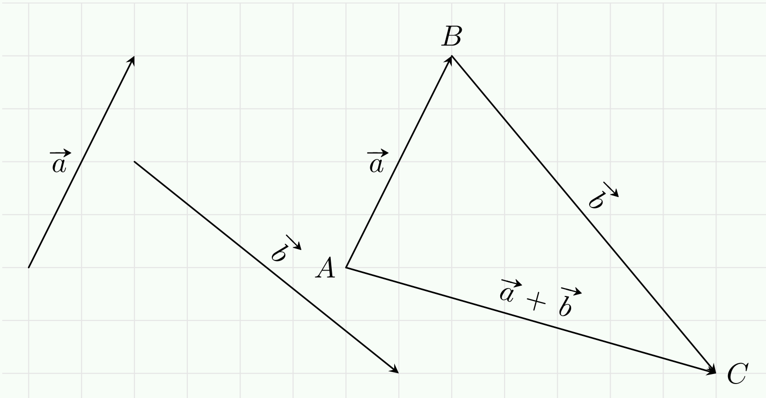
Theo tính chất đường trung tuyến $AG = \frac{2}{3}AM$ hay $GA = 2 \cdot GM$ và $\overrightarrow{GA}$ cùng hướng với $\overrightarrow{MG}$.
Khi đó ta có $\overrightarrow{GA} = 2 \cdot \overrightarrow{GM}$.
Chọn đáp án (C) □

Bài 2 TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

A – TÓM TẮT LÍ THUYẾT

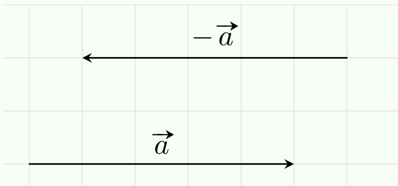
1. Định nghĩa tổng và hiệu hai véc-tơ

Định nghĩa 2.1 (Phép cộng). Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Với điểm A bất kỳ, dựng $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, dựng $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó, véc-tơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là véc-tơ tổng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
Ta ký hiệu: $\vec{a} + \vec{b}$, tức là: $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Phép toán tìm tổng của hai véc-tơ còn gọi là **phép cộng véc-tơ**.

Định nghĩa 2.2 (Véc-tơ đối). Cho véc-tơ $\vec{a}$, véc-tơ có cùng độ dài và ngược hướng với $\vec{a}$ được gọi là véc-tơ đối của $\vec{a}$, ký hiệu là $-\vec{a}$.

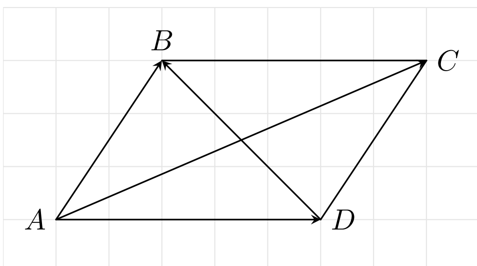


Định nghĩa 2.3 (Phép trừ). Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Phép phép trừ của $\vec{a}$ với $\vec{b}$ được định nghĩa là phép cộng của $\vec{a}$ với $-\vec{b}$.
Ký hiệu $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

2. Quy tắc hình bình hành

Cho hình bình hành $ABCD$, khi đó

- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$



3. Các tính chất của phép cộng, trừ hai véc-tơ

Tính chất 2.1. *(giao hoán và kết hợp)*

a) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$,

b) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$.

Tính chất 2.2. *(véc-tơ đối)*

a) $-\vec{0}=\vec{0}$

b) $\vec{a}-\vec{b}=-(\vec{b}-\vec{a})$,

c) $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$.

Tính chất 2.3. *(cộng với véc-tơ $\vec{0}$)* $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

Tính chất 2.4. *Cho 3 điểm A,B,C ta có:*

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ *(quy tắc 3 điểm)*,

b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ *(quy tắc trừ)*.

Tính chất 2.5.

a) *(quy tắc trung điểm) I là trung điểm $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$*,

b) *(quy tắc trọng tâm) G là trọng tâm $\triangle ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$*.

B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định véc-tơ

Dựa vào quy tắc cộng, trừ, quy tắc 3 điểm, hình bình hành, ta biến đổi và dựng hình để xác định các véc-tơ. Chú ý các quy tắc sau đây.

a) $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$.

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (quy tắc 3 điểm).

c) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ (quy tắc trừ).

d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ ($ABCD$ là hình bình hành).

1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC.

a) Xác định véc-tơ $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

b) Xác định véc-tơ $\vec{b}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

c) Xác định véc-tơ $\vec{c}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

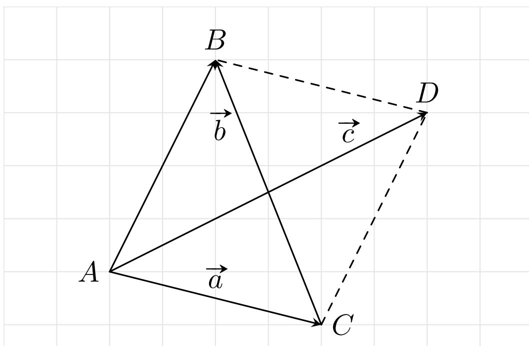
Lời giải.

Ta có

a) $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

b) $\vec{b}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.

c) $\vec{c}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$, với $ABDC$ là hình bình hành.



□

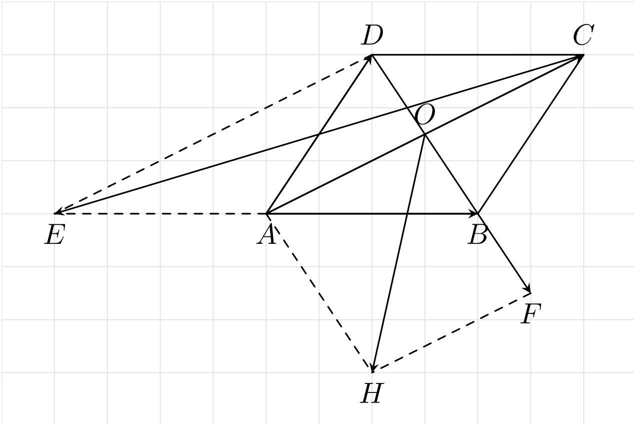
Ví dụ 2. Cho hình bình hành $ABCD$, có tâm O. Hãy xác định các véc-tơ sau đây:

a) $\vec{x} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

b) $\vec{y} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CD}$.

c) $\vec{z} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC}$.

d) $\vec{t} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{BD}$.



Lời giải.

a) Theo tính chất hình bình hành $\vec{x} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

b) $\vec{y} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD}$.

c) $\vec{z} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CE}$ (dựng hình bình hành $CDEA$).

d) $\vec{t} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OH}$. Trong đó, ta dựng $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{DB}$ và hình bình hành $OFHA$.

□

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC đều, G là trọng tâm và M là trung điểm cạnh BC. Hãy xác định các véc-tơ sau đây:

a) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$.

b) $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{CB}$.

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC}$.

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$.

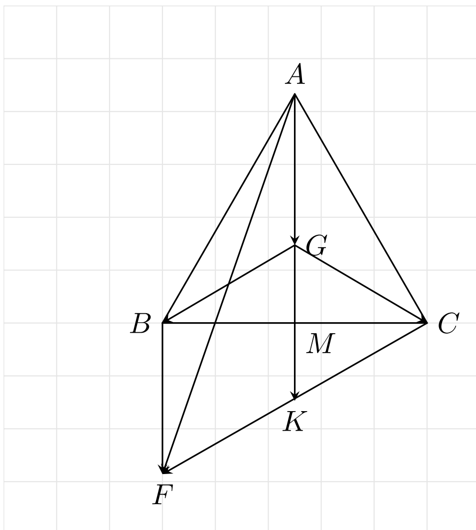
Lời giải.

a) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GK}$ (dựng hình bình hành $GBKC$).

b) $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CF}$ (dựng $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AG}$).

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}$.

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF}$.



□

Ví dụ 4. Cho đoạn thẳng AB có trung điểm là I. Gọi M là một điểm tùy ý không nằm trên đường thẳng AB. Lấy trên tia MI một điểm N sao cho $IN = MI$. Hãy xác định các véc-tơ:

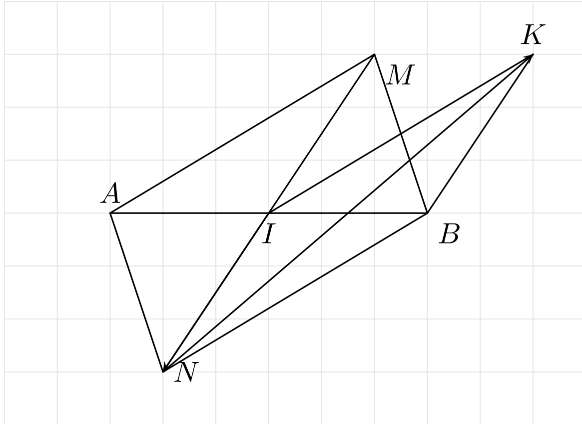
a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MI}$.

b) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{NI}$.

Lời giải.

a) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{IN}$.

b) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{NI}=\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{NK}$.



□

2. Bài tập rèn luyện

Bài 1. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Xác định các véc-tơ đối của các véc-tơ sau đây:

a) $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{DO}$.

b) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DA}$.

Lời giải.

a) $-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$, $-\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BO}$.

b) $-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}$, $-\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

□

Bài 2. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Xác định các véc-tơ sau đây:

a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$.

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}$.

c) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}$.

d) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AD}$.

Lời giải.

a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{CA}$.

c) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}$.

d) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$.

□

Bài 3. Cho tam giác ABC. Tìm véc-tơ $\vec{x}$ trong các trường hợp:

a) $\vec{x}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}$.

b) $\overrightarrow{CA}-\vec{x}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

a) $\vec{x}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$.

b) $\vec{x}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BE}$, với $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BA}$.

□

Bài 4. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, AC, AB. Xác định các véc-tơ sau đây:

a) $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{NA}$.

b) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{CM}$.

Lời giải.

a) $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NA}=\vec{0}$.

b) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{ND}$ (dựng thêm điểm D sao cho $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}$).

□

Bài 5. Cho tam giác ABC, gọi M là trung điểm AC và N là điểm đối xứng của B qua M. Xác định các véc-tơ sau đây:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AN}$.

b) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CN}$.

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MN}$.

d) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{MN}$.

Lời giải.

Ta có, tứ giác $BANC$ là hình bình hành.

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}$ (tính chất hình bình hành $BANC$).

b) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{BE}$ (dựng $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CN}$).

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}$.

d) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{BM}$.

□

Bài 6. Cho hình lục giác đều $ABCDEF$, gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DE, EF, FA. Xác định các véc-tơ sau đây:

a) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{CD}$.

b) $\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{PS}$.

Lời giải.

a) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{DF}=\vec{0}$.

b) $\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{DF}=\vec{0}$.

□

Bài 7. Cho tam giác ABC. Gọi D, E, F lần lượt nằm trên cạnh BC, AC, AB sao cho $BD=\dfrac{1}{3}BC$, $CE=\dfrac{1}{3}CA$, $AF=\dfrac{1}{3}AB$. Xác định các véc-tơ sau đây:

a) $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}$

b) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$

Lời giải.

a) Lấy thêm các điểm P, Q về phía ngoài cạnh AB, AC sao cho $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{QA}=\overrightarrow{AF}$. Theo đó, tam giác APQ đồng dạng tam giác ACB nên ta có $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{BD}$. Khi đó, $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$.

b) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{AF})-(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC})=\vec{0}$.

□

Dạng 2. Xác định điểm thỏa đẳng thức véc-tơ cho trước

Để xác định điểm M thỏa đẳng thức véc-tơ cho trước, ta làm như sau:

◦ **HƯỚNG 1:**

– Biến đổi đẳng thức véc-tơ đã cho về dạng $\overrightarrow{AM}=\vec{v}$, trong đó A là điểm cố định và $\vec{v}$ là véc-tơ cố định.

– Lấy A làm điểm gốc, dựng véc-tơ bằng $\vec{v}$ thì điểm ngọn chính là điểm M cần tìm.

◦ **HƯỚNG 2:**

– Biến đổi đẳng thức véc-tơ đã cho về dạng $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$, trong đó A, B là hai điểm cố định.

– Khi đó điểm M cần tìm trùng với điểm B.

◦**HƯỚNG 3:**

– Biến đổi đẳng thức véc-tơ đã cho về một đẳng thức véc-tơ luôn đúng với mọi điểm M.

– Khi đó điểm M cần tìm là điểm tùy ý.

◦**HƯỚNG 4:**

– Biến đổi đẳng thức véc-tơ đã cho về một đẳng thức véc-tơ luôn sai với mọi điểm M.

– Khi đó không có điểm M nào thỏa điều kiện.

◦**HƯỚNG 5:**

– Biến đổi đẳng thức véc-tơ đã cho về dạng $\left|\overrightarrow{IM}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$, trong đó I, A, B là các điểm cố định.

– Khi đó điểm M cần tìm thuộc đường tròn tâm I, bán kính AB.

◦**HƯỚNG 6:**

– Biến đổi đẳng thức véc-tơ đã cho về dạng $\left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{MB}\right|$, trong đó A, B là các điểm cố định phân biệt.

– Khi đó điểm M cần tìm thuộc đường trung trực của đoạn AB.

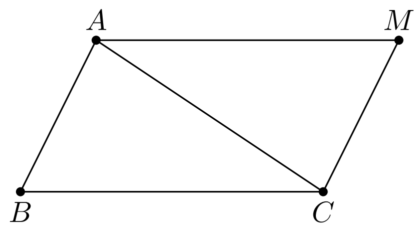
1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Lời giải.

$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA}$

$\Rightarrow$ Điểm M là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$.



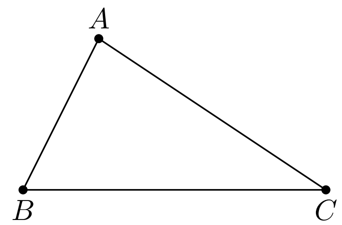
□

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CM}$

$\Rightarrow$ Điểm M trùng với điểm A.

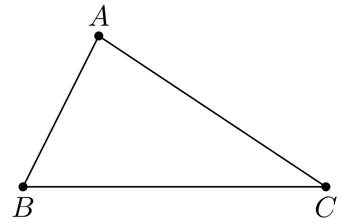


□

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB}$
$\Rightarrow$ không có M nào thỏa điều kiện bài toán.

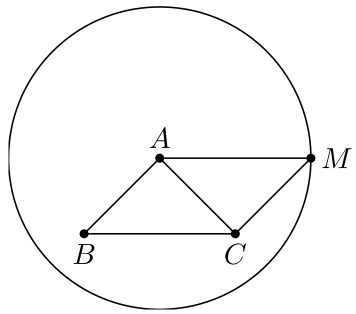


□

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$.

Lời giải.

$|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{CB}| \Leftrightarrow MA = CB$
$\Rightarrow$ Điểm M thuộc đường tròn tâm A, bán kính CB.



□

2. Bài tập rèn luyện

Bài 8. Cho $\triangle ABC$. Dựng điểm M thỏa mãn điều kiện

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}. \quad (1)$$

Lời giải.

Ta có (1) $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{CB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BC}$. Vậy bốn điểm A, C, B, M tạo thành hình bình hành. □

Bài 9. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Lời giải.

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{CB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AM}$.
$\Rightarrow$ Điểm M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ACBM$. □

Bài 10. Cho tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của cạnh AC. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.

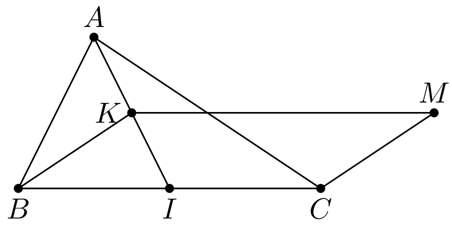
Lời giải.

$\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{CM} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \left(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CM}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IM}$.
$\Rightarrow$ M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $IABM$. □

Bài 11. Cho tam giác ABC. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, AI. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Lời giải.

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BI}-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BK}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BK}$
$\Rightarrow$ Điểm M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CBKM$.



Bài 12. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OM}$.

Lời giải.
$\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AM}$.
$\Rightarrow$ Điểm M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $AODM$.

Bài 13. Cho hình bình hành $ABCD$. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$.

Lời giải.
$\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AD}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MD}=\vec{0}$.
$\Rightarrow$ Điểm M trùng với điểm D.

Bài 14. Cho tam giác ABC. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CM}=\vec{0}$.

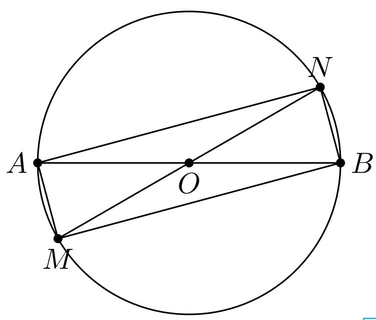
Lời giải.
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CM}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AM}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AM}$.
$\Rightarrow$ Điểm M trùng với điểm G.

Bài 15. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}$.

Lời giải.
$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CA}$.
$\Rightarrow$ Không có điểm M nào thỏa điều kiện trên.

Bài 16. Cho hai điểm A và B. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}|$.

Lời giải.
$|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}| \Leftrightarrow MN=BA$.
Với N là đỉnh thứ tư của hình bình hành $AMBN$. Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB.
$\Rightarrow 2MO=2OB \Rightarrow MO=OB$.
$\Rightarrow$ Điểm M thuộc đường tròn tâm O, bán kính OB.



Bài 17. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|$.

Lời giải.
$|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MC}|=|\overrightarrow{BC}| \Leftrightarrow MC=BC$.

$\Rightarrow$ Điểm M thuộc đường tròn tâm C, bán kính BC. □

Bài 18. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}|$.

Lời giải.

$|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}| \Leftrightarrow MA = MC$.
$\Rightarrow$ Điểm M thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AC. □

Bài 19. Cho năm điểm A, B, C, D, E. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CD}$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CD} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{DM} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DM} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM} = \vec{0}$.
$\Rightarrow$ Điểm M là điểm tùy ý. □

Dạng 3. Tính độ dài của tổng và hiệu hai véc-tơ

– Độ dài của véc-tơ bằng độ dài của đoạn thẳng có hai đầu mút là điểm đầu và điểm cuối của véc-tơ đó.
– Ta thường sử dụng các công thức về cạnh như hệ thức lượng tam giác vuông, định lý Pytago, tính chất tam giác đều, hình chữ nhật, hình vuông,. . .

1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 9. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Tính $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right|$.

Lời giải.

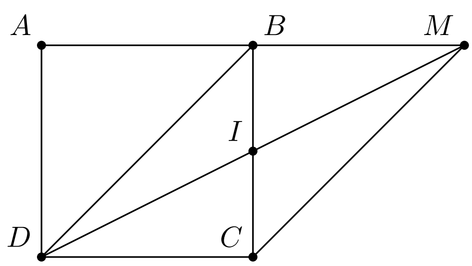
Ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ nên $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right| = CB = a$.

□

Ví dụ 10. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính $\left|\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}\right|$.

Lời giải.

Vẽ hình bình hành $CDBM$ thì DM cắt BC tại trung điểm I của mỗi đường.
Ta có $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DM}$ nên $\left|\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}\right| = DM = 2DI$
Mà $DI^2 = a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4}a^2$ nên $\left|\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}\right| = a\sqrt{5}$.

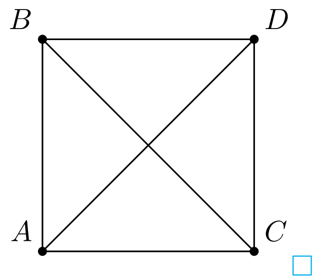


□

Ví dụ 11. Chứng minh rằng nếu $\triangle ABC$ thỏa mãn $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right|$ thì ΔABC là tam giác vuông.

Lời giải.

Dựng hình bình hành $ABDC$.
Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$
Theo quy tắc hiệu hai véc-tơ ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.
Từ giả thiết suy ra $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$, tức là $AD = BC$.
Hình bình hành $ABDC$ có hai đường chéo bằng nhau nên nó là hình chữ nhật, tức là tam giác ABC vuông.



□

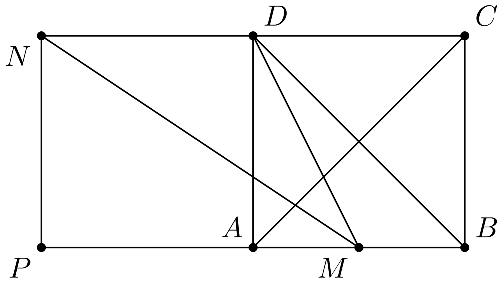
Ví dụ 12. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi M là trung điểm của AB, N là điểm đối xứng với C qua D. Hãy tính độ dài của véc-tơ sau $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{MN}$.

Lời giải.

Áp dụng Định lý Pytago trong tam giác vuông MAD ta có
$DM^2 = AM^2 + AD^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Suy ra $\left|\overrightarrow{MD}\right| = MD = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Qua N kẻ đường thẳng song song với AD cắt AB tại P.
Khi đó tứ giác $ADNP$ là hình vuông và $PM = PA + AM = a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$.



Áp dụng Định lý Pytago trong tam giác vuông NPM ta có
$MN^2 = NP^2 + PM^2 = a^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{13a^2}{4} \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{13}}{2}$. Suy ra $\left|\overrightarrow{MN}\right| = MN = \frac{a\sqrt{13}}{2}$. □

Ví dụ 13. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, M là một điểm bất kỳ. Tính độ dài véc-tơ $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.

Lời giải.

Áp dụng quy tắc trừ ta có
$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) - \left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\right) = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DC}$
LấyB' là điểm đối xứng của B qua A
Khi đó $-\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB'} \Rightarrow \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BB'}$
Suy ra $|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = |\overrightarrow{BB'}| = BB' = 2a$.

□

2. Bài tập rèn luyện

Bài 20. Cho tam giác đều ABC cạnh $5a$. Tính độ dài các véc-tơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = AC = 5a$.

Ta có $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow \left|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right| = BA = 5a$. □

Bài 21. Xét các véc-tơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ khác $\overrightarrow{0}$. Khi nào thì $|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|$.

Lời giải.

Từ điểm O nào đó, ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$. Khi đó $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$. Như vậy:

$$\left|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right| = |\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OA}\right| + \left|\overrightarrow{AB}\right| \Leftrightarrow OB = OA + AB.$$

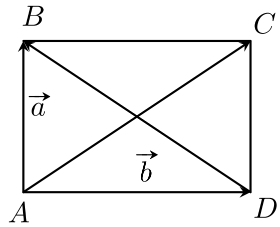
Điều này xảy ra khi và chỉ khi O, A, B thẳng hàng theo thứ tự này. Hay hai véc-tơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ cùng hướng. □

Bài 22. Xét các véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Khi nào thì $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

Lời giải.

Từ điểm A nào đó, ta kẻ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Vẽ điểm C sao cho $ABCD$ là hình bình hành. Theo quy tắc hình bình hành ta có: $\vec{a}+\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Theo quy tắc về hiệu véc-tơ ta có: $\vec{a}-\vec{b} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$. Như vậy:

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{a}-\vec{b}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{DB}\right| \Leftrightarrow AC = BD.$$



Điều này xảy ra khi $ABCD$ là hình chữ nhật. Vậy AB vuông góc với AD hay giá của hai véc-tơ vuông góc với nhau.

□

Bài 23. Chứng minh rằng với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương thì

$$|\vec{a}| - |\vec{b}| < \left|\vec{a}+\vec{b}\right| < |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

Lời giải.

Gọi A, B là điểm đầu và điểm cuối của $\vec{a}$. Vẽ điểm C sao cho $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nên ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Ta có:

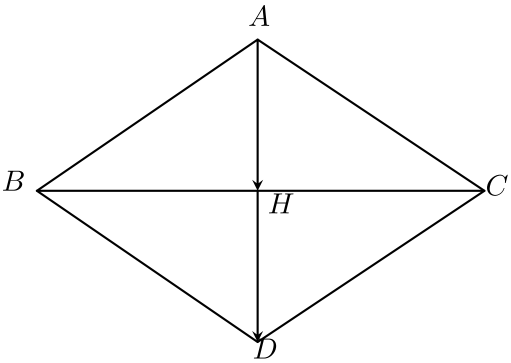
$$|\vec{a}| - |\vec{b}| = AB - BC < AC = \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right| < AB + BC = |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

Bài toán được chứng minh xong. □

Bài 24. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH. Biết $AB = a$ và $BC = 2b$ (với $a > b > 0$). Tính độ dài véc-tơ tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}$ và độ dài véc-tơ hiệu $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}$.

Lời giải.

Do tam giác ABC cân tại A, đường cao AH nên H là trung điểm BC. Suy ra $BH = b$. Trong tam giác vuông ABH, ta có:
$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - b^2}$.
Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH}$.
Suy ra $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}\right| = \left|\overrightarrow{AH}\right| = \sqrt{a^2 - b^2}$.
Vẽ hình bình hành $ABDC$. Khi đó:
$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.
Do đó: $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = 2AH = 2\sqrt{a^2 - b^2}$.

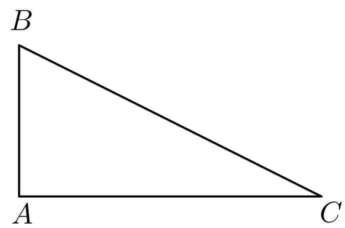


□

Bài 25. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$, $BC = a\sqrt{5}$. Tính độ dài các véc-tơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

Do tam giác ABC vuông tại A nên
$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{5a^2 - a^2} = 2a$.
Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = AC = 2a$.
Ta có $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow \left|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right| = BA = a$.

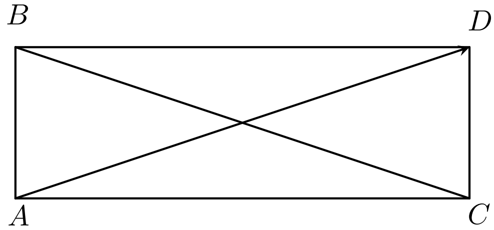


□

Bài 26. Cho tam giác ABC vuông tại A, biết $AB = a$ và $AC = 3a$. Tính độ dài véc-tơ tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ và độ dài véc-tơ hiệu $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$.
Hay $BC = \sqrt{a^2 + 9a^2} = a\sqrt{10}$.
Ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.
Do đó $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right| = CB = a\sqrt{10}$.
Vẽ hình bình hành $ABDC$. Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$. Do đó $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = AD = a\sqrt{10}$.



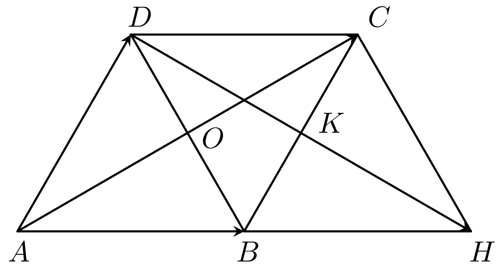
□

Bài 27. Cho hình thoi $ABCD$ có tâm O, cạnh bằng 4 và $\widehat{BAD} = 60°$. Tính:

$$\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right|, \left|\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AB}\right|, \left|-\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{OC}\right|.$$

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra ABD là tam giác đều cạnh bằng 4. Do đó $AO = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$, $AC = 4\sqrt{3}$. Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. Như vậy $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right| = AC = 4\sqrt{3}$.
Ta có: $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BO}$.
Suy ra $\left|\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AB}\right| = BO = \dfrac{1}{2}BD = 2$.
Vẽ hình bình hành $BDCH$. Do $DB = DC = 4$ nên hình bình hành $BDCH$ là hình thoi, do đó $DH = 2DK = 4\sqrt{3}$ (K là trung điểm của BC).



Ta có: $\left|-\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{OC}\right| = \left|\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB}\right| = \left|\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB}\right| = \left|\overrightarrow{DH}\right| = 4\sqrt{3}$. □

Bài 28. Cho đường thẳng d và hai điểm A, B phân biệt, không nằm trên d. Tìm $M \in d$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA}\right|$ nhỏ nhất.

Lời giải.

Gọi C là điểm đối xứng của B qua A. Khi đó C là điểm cố định và

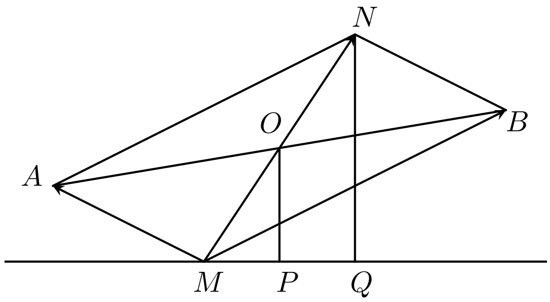
$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MC}.$$

Do đó $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA}\right| = \left|\overrightarrow{MC}\right| = MC$. Như vậy $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA}\right|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MC nhỏ nhất, hay M là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng d. □

Bài 29. Cho đường thẳng d và hai điểm A, B nằm trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng d. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$, với $M \in d$.

Lời giải.

Trong trường hợp M, A, B không thẳng hàng, ta dựng hình bình hành $MANB$. Khi đó $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MN}$. Suy ra $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right| = MN$. Gọi O là giao điểm của MN và AB. Khi đó, O là trung điểm AB nên O là điểm cố định. Từ O, N lần lượt kẻ các đường vuông góc với d, cắt d tại P, Q. Ta có $MN \geq NQ = 2OP$. Còn khi M, A, B thẳng hàng thì hiển nhiên $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right| > 2OP$. Vậy $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất là bằng $2OP$, đạt được khi M trùng P.



□

Dạng 4. Chứng minh đẳng thức véc-tơ

a) Sử dụng quy tắc ba điểm.

b) Sử dụng quy tắc hình bình hành.

1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 14. Cho 5 điểm A, B, C, D, E. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$.

Lời giải.

Đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned}
&\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{ED}\right)+\overrightarrow{EA} = \vec{0}\\
\Leftrightarrow &\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EA} = \vec{0}\\
\Leftrightarrow &\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EA} = \vec{0} \quad \text{(luôn đúng)}
\end{aligned}$$

□

Ví dụ 15. Cho hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

Lời giải.

Do $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$
Đẳng thức cần chứng minh tương đương với$\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC} = \vec{0}$ (luôn đúng) □

Ví dụ 16. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP} = \vec{0}$.

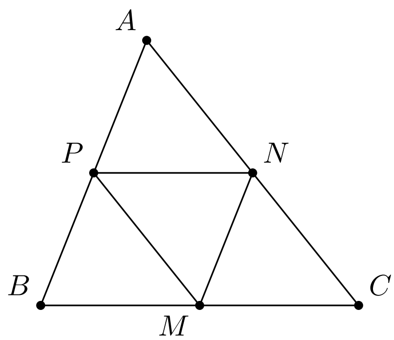
Lời giải.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}\\ \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}\\ \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BP}\end{cases}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP} &= \left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AN}\right)\\
&= \vec{0}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AN}
\end{aligned}$$

Lại có $\begin{cases}\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{MN}\\ \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NC}\end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC} = \vec{0}$



□

Ví dụ 17. Cho 5 điểm A, B, C, D, E. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CB} &= \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DC}\right) + \left(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CE}\right)\overrightarrow{CB}\\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}\\ &= \overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

□

Ví dụ 18. Chứng minh rằng nếu hai hình bình hành $ABCD$ và $A'B'C'D'$ có cùng tâm thì $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm của hai hình bình hành.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} &= \left(\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OB}\right) + \left(\overrightarrow{OC'} - \overrightarrow{OC}\right) + \left(\overrightarrow{OD'} - \overrightarrow{OD}\right)\\ &= -\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) - \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\right) + \left(\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OC'}\right) + \left(\overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OD'}\right)\\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

□

2. Ví dụ minh họa

Bài 30. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Lời giải.

Ta có sự tương đương:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}.$$

Do đó ta có điều phải chứng minh. □

Bài 31. Cho hình bình hành $ABCD$ và M là điểm tùy ý. Chứng minh:

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}.$$

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CD}$. Mà $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$. Vậy ta có đẳng thức cần chứng minh. □

Bài 32. Cho hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng với điểm M bất kì ta luôn có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

Lời giải.

Ta có

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) + \left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\right) = \vec{0}$$

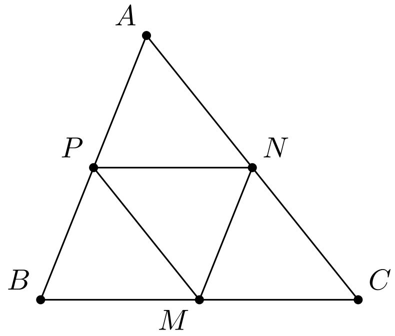
$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ (luôn đúng do $ABCD$ là hình bình hành). □

Bài 33. Cho tam giác ABC, gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng với điểm O bất kì ta luôn có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$.

Lời giải.

Ta có

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$
$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}\right) + \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{ON}\right) + \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}\right) = \vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$



Mặt khác $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} \\ \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} \\ \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BP} \end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}\right) + \left(\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AN}\right)$
$= \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AN}$

Lại có $\begin{cases} \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{MN} \\ \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NC} \end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$

□

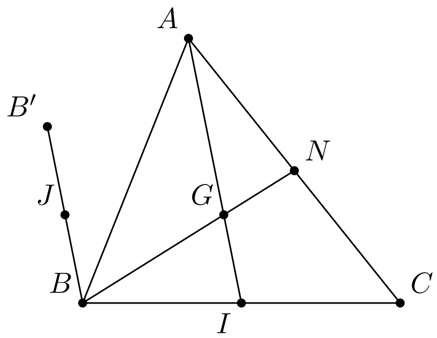
Bài 34. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi I là trung điểm của BC. Dựng điểm B' sao cho $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AG}$. Gọi J là trung điểm của BB'. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$.

Lời giải.

Ta có:

$\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AG} \Rightarrow AGBB'$ là hình bình hành.
$\Rightarrow \overrightarrow{BJ}$ và $\overrightarrow{GA}$ cùng hướng.
$\Rightarrow \overrightarrow{BJ}$ và $\overrightarrow{IG}$ cùng hướng.

Mặt khác $\begin{cases} BJ = \dfrac{1}{2}BB' \\ IG = \dfrac{1}{2}GA \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$



□

Bài 35. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D} = \vec{0}$.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB'} \\ \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{D'D} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD'} \end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right) - \left(\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'} - \overrightarrow{AC'}\right) = \vec{0}$ □

Bài 36. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD. Nối AF và CE, hai đường này cắt đường chéo BD lần lượt tại M và N. Chứng minh $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NB}$.

Lời giải.

Gọi I là giao điểm của AC và BD.
Dễ thấy I là trung điểm của MN.
Dễ thấy M là trọng tâm $\Delta ADC \Rightarrow DM = 2MI$.
N là trọng tâm tam giác $\Delta ABC \Rightarrow BN = 2NI$
$\Rightarrow DM = MN = NB \Rightarrow \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NB}$

□

Bài 37. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các đoạn thẳng DC, AB theo thứ tự lấy các điểm M, N sao cho $DM = BN$. Gọi P là giao điểm của AM, DB và Q là giao điểm của CN, DB. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{QB}$.

Lời giải.

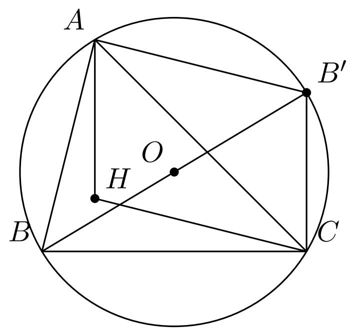
Ta có $AMCN$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$
$\Delta DPM = \Delta BQN \Rightarrow DP = QB \Rightarrow \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{QB}$

□

Bài 38. Cho tam giác ABC có H là trực tâm và O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi B' là điểm đối xứng của B qua O. Chứng minh $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$ và $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{HC}$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{BCB'} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
$\Rightarrow AH$ song song với $B'C$ (cùng vuông góc với BC)
$\widehat{BAB'} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
$\Rightarrow CH$ song song với AB' (cùng vuông góc với AB).
$\Rightarrow AHCB'$ là hình bình hành
$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$ và $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{HC}$.



□

Bài 39. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = \frac{1}{3}AC$ và BE cắt AM tại N. Chứng minh $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NM} = \vec{0}$.

Lời giải.

Gọi F là trung điểm của EC
$\Rightarrow E$ là trung điểm của AF
$\Rightarrow MF$ là đường trung bình của ΔBEC
$\Rightarrow MF$ song song với BE.
$\Rightarrow NE$ là đường trung bình của tam giác AMF.
$\Rightarrow N$ là trung điểm của $AM \Rightarrow \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NM} = \vec{0}$.

□

Bài 40. Cho ngũ giác đều $ABCDE$ tâm O. Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$.

Lời giải.

Các điểm B, E đối xứng với nhau qua $OA \Rightarrow \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}$ có giá là đường thẳng OA.
Các điểm D, C đối xứng với nhau qua $OA \Rightarrow \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ có giá là đường thẳng OA.
$\Rightarrow$ Véc-tơ $\vec{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$ có giá là đường thẳng OA.
Tương tự các véc-tơ $\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right)$ và $\left(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OD}\right)$ có giá là đường thẳng OB.
$\Rightarrow$ Véc-tơ $\vec{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$ có giá là đường thẳng OB.
Do $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ có giá không trùng nhau $\Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$

□

Bài 41. Cho đa giác đều $A_1A_2...A_n$ với $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 3$ có tâm O. Chứng minh rằng $\vec{u} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$.

Lời giải.

Ta xét hai trường hợp

- Trường hợp 1: n là số chẵn $\Rightarrow n = 2k$ với $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Khi đó các cặp điểm A_i và A_{k+i} với $i = \overline{1,k}$ đối xứng với nhau qua O.

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_{k+1}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_{k+2}} = \vec{0} \\ \dots \\ \overrightarrow{OA_k} + \overrightarrow{OA_{2k}} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}.$$

- Trường hợp 2: n là số lẻ $\Rightarrow n = 2k+1$ với $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$. Khi đó các cặp điểm A_i và A_{2k+3-i} với $i = \overline{2, k+1}$ đối xứng với nhau qua đường thẳng OA_1.
$\Rightarrow$ Giá của các véc-tơ $\left(\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_{2k+3-i}}\right)$ là đường thẳng OA_1.
$\Rightarrow$ Giá của véc-tơ $\vec{u}$ là đường thẳng OA_1.
Tương tự, giá của các véc-tơ $\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_3}\right)$, $\left(\overrightarrow{OA_{2k}} + \overrightarrow{OA_4}\right)$... là đường thẳng OA_2.
$\Rightarrow$ Giá của véc-tơ $\vec{u}$ là đường thẳng OA_2.
$\Rightarrow \vec{u}$ có giá là các đường thẳng OA_1 và $OA_2 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

□

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 42. Cho n véc-tơ $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n}$. Dựng $\overrightarrow{OA_1} = \vec{a_1}, \overrightarrow{A_1A_2} = \vec{a_2}, \dots, \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \vec{a_n}$. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để đường gấp khúc $OA_1A_2\dots A_n$ khép kín là $\vec{a_1} + \vec{a_2} + \dots + \vec{a_n} = \vec{0}$.

Lời giải.

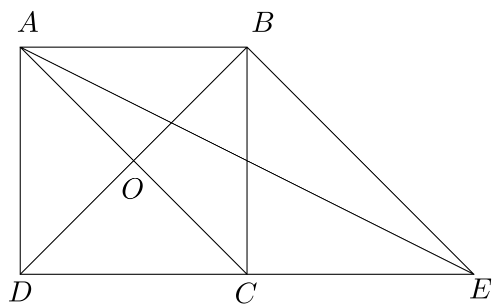
Dựng $\overrightarrow{OA_1} = \vec{a_1}, \overrightarrow{A_1A_2} = \vec{a_2}, \dots, \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \vec{a_n}$. Khi đó $\vec{a_1} + \vec{a_2} + \dots + \vec{a_n} = \overrightarrow{OA_n}$. Như vậy đường gấp khúc $OA_1A_2\dots A_n$ khép kín khi và chỉ khi O trùng với A_n hay $\overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$, tức là $\vec{a_1} + \vec{a_2} + \dots + \vec{a_n} = \vec{0}$. □

Bài 43. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, cạnh a. Hãy xác định và tính độ dài các véc-tơ:

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD}, \ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

Lời giải.

Trước hết ta có $AC = BD = a\sqrt{2}$ và $OA = OB = OC = OD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



Ta có: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow |\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = a\sqrt{2}$.
Vì O là trung điểm AC nên $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.
Vậy: $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}| = |\vec{0}| = 0$.

Theo quy tắc ba điểm: $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OD} \Rightarrow |\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{OD}| = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Dựng hình bình hành $BACE$. Ta có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AE}| = AE.$$

Do đó:

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}.$$

□

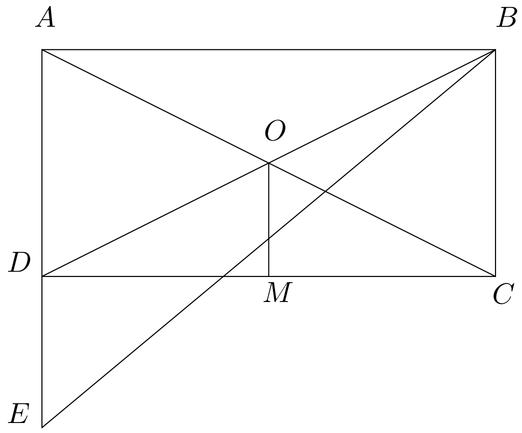
Bài 44. Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O, $AB = 2a$, $AD = a$, M là trung điểm CD.

a) Chứng minh $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$.

b) Tính $\left|\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{OM}\right|$.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$. (1)
Ta có $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB}$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$.



b) Dựng điểm E sao cho $OMED$ là hình bình hành. Khi đó

$$\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BE}.$$

Ta có:

$$BE^2 = AB^2 + AE^2 = 4a^2 + \frac{9a^2}{4} = \frac{25a^2}{4} \Rightarrow \left|\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{OM}\right| = \left|\overrightarrow{BE}\right| = BE = \frac{5a}{2}.$$

□

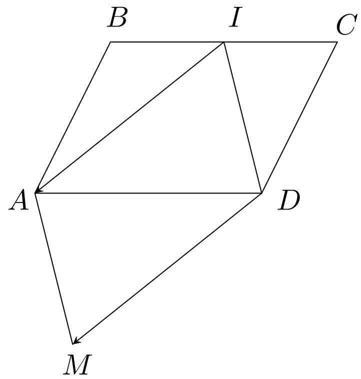
Bài 45. Cho hình bình hành $ABCD$, I là trung điểm BC. Tìm điểm M thỏa mãn:

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{CA}. \qquad (*)$$

Lời giải.

Ta có sự tương đương sau:

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BI}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BI} \Leftrightarrow (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BI}) + \overrightarrow{MD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{DM}.$$

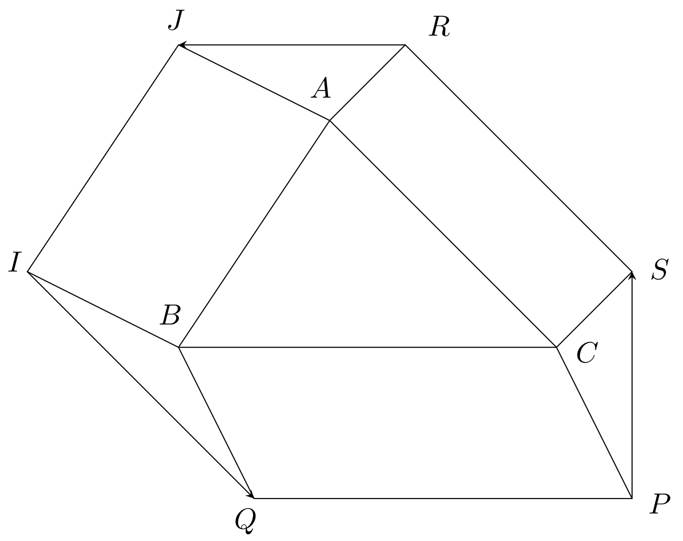


Vậy M là điểm sao cho $MDIA$ là hình bình hành. □

Bài 46. Cho tam giác ABC. Về phía ngoài tam giác vẽ các hình bình hành $ABIJ$, $BCPQ$, $CARS$. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{RJ}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{PS}=\vec{0}.$$

Lời giải.



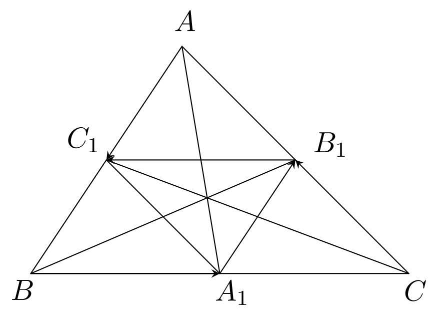
Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RJ}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{PS}&=\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CS}\\&=(\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{CS})+(\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{IB})+(\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{PC})=\vec{0}.\end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Bài 47. Cho tam giác ABC. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$.

Lời giải.



Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}&=\left(\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{C_1A_1}\right)+\left(\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}\right)+\left(\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{B_1C_1}\right)\\&=\left(\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{A_1B_1}\right)+\left(\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{B_1C_1}\right)+\left(\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{C_1A_1}\right)\\&=\vec{0}+\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}.\end{aligned}$$

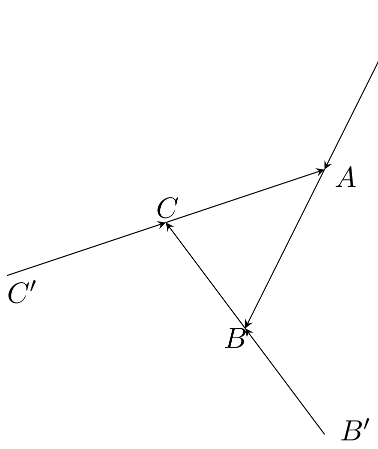
□

Bài 48. Cho ΔABC. Gọi A' là điểm đối xứng với B qua A, gọi B' là điểm đối xứng với C qua B, gọi

C' là điểm đối xứng với A qua C. Chứng minh rằng với một điểm O bất kì ta có

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}.$$

Lời giải.



Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}&=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{C'C}\\&=\left(\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}\right)+\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{C'C}\\&=\left(\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}\right)+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\\&=\left(\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}\right)+\vec{0}\\&=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}.\end{aligned}$$

□

Bài 49. Cho bảy điểm A,B,C,D,E,F,H. Chứng minh:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{HF}.$$

Lời giải.

Ta có:

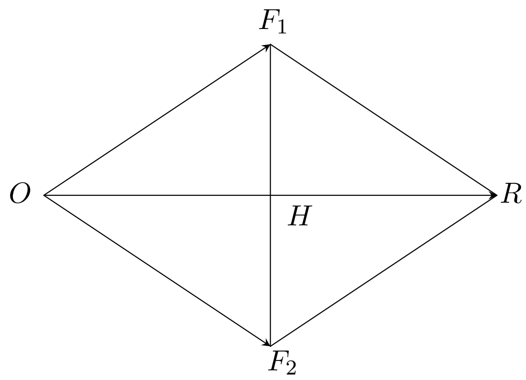
$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{HA}-(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{HF})\\=&\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB})+(\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{ED})+(\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HF})\\=&\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FA}=\vec{0}.\end{aligned}$$

Vậy $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{HF}$. □

Bài 50. Cho hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ đều có cường độ là 40 N, có điểm đặt tại O và hợp với nhau một góc 60°. Tính cường độ lực tổng hợp của hai lực này.

Lời giải.

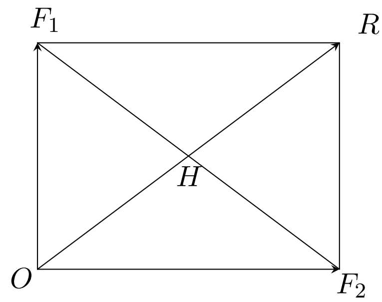
Theo quy tắc hình bình hành thì $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{OR}$. Mà $OF_1 = OF_2 = 40$ (N) nên OF_1RF_2 là hình thoi có góc $\widehat{F_1OF_2} = 60^\circ$ và hai đường chéo RO, F_1F_2 vuông góc với nhau tại trung điểm H. Ta có $OH = 40 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$ (OH là đường cao của tam giác đều cạnh bằng 40). Vậy cường độ lực tổng hợp của hai lực đã cho là $\left|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}\right| = \left|\overrightarrow{OR}\right| = 20\sqrt{3}$ (N).



□

Bài 51. Cho hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ lần lượt có cường độ 30 N và 40 N, có điểm đặt O và vuông góc với nhau. Tính cường độ lực tổng hợp của chúng.

Lời giải.
Do hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ có cùng điểm đặt O nên tổng hợp lực $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$ là đường chéo OR của hình bình hành OF_1RF_2. Do hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ vuông góc với nhau nên hình bình hành OF_1RF_2 trở thành hình chữ nhật. Vậy $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{OR}$. Ta có $OF_1 = 30$, $OF_2 = 40$. Như vậy $OR = F_1F_2 = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50$. Do đó cường độ lực tổng hợp $\overrightarrow{OR}$ là $\left|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}\right| = \left|\overrightarrow{OR}\right| = 50$(N).



□

Bài 52. Cho 2018 điểm trên mặt phẳng. Bạn Quỳnh kí hiệu chúng là A_1, A_2,..., A_{2018}. Bạn Vân kí hiệu chúng là B_1, B_2,..., B_{2018}. Chứng minh rằng:
$$\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \cdots + \overrightarrow{A_{2018}B_{2018}} = \vec{0}.$$

Lời giải.
Lấy một điểm O nào đó. Ta có
$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \cdots + \overrightarrow{A_{2018}B_{2018}}\\
=&\overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_2} - \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OB_{2018}} - \overrightarrow{OA_{2018}}\\
=&\left(\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \cdots + \overrightarrow{OB_{2018}}\right) - \left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_{2018}}\right).
\end{aligned}$$
Vì 2018 điểm B_1, B_2,..., B_{2018} cũng là 2018 điểm A_1, A_2,..., A_{2018} nhưng được kí hiệu một cách khác, do đó
$$\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \cdots + \overrightarrow{OB_{2018}} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_{2018}}.$$
Suy ra $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \cdots + \overrightarrow{A_{2018}B_{2018}} = \vec{0}$. □

Bài 53. Cho n-đa giác đều $A_1A_2\ldots A_n$ (n lẻ, $n > 2$) nội tiếp đường tròn tâm O. Chứng minh rằng
$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}.$$

Lời giải.
Gọi d_1 là đường thẳng đi qua điểm O và điểm A_1. Xét các đỉnh của đa giác đã cho mà không nằm trên d_1. Chúng có thể phân tích thành những cặp đỉnh A_i, A_j đối xứng nhau qua đường thẳng d_1 (chẳng hạn cặp A_2, A_{n-1}, cặp A_3, A_{n-2},...). Khi đó tổng $\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_j}$ là một véc-tơ nằm trên đường thẳng d_1. Từ đó suy ra tổng $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n}$ cũng là một véc-tơ có giá nằm trên đường thẳng d_1. Hoàn toàn tương tự, nếu gọi d_2 là đường thẳng đi qua O và A_2 thì tổng $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n}$ cũng là một véc-tơ có giá nằm trên

đường thẳng d_2. Vì hai đường thẳng d_1 và d_2 không trùng nhau nên $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n}$ có hai phương khác nhau, hay $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{0}$. □

C – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Trắc nghiệm khách quan

Câu 1. Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Đẳng thức nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB}$. (B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$. (C) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC}$. (D) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$.

Mặt khác

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \neq \overrightarrow{CB}$.
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} \neq \overrightarrow{BC}$.
- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \neq \overrightarrow{BC}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 2. Rút gọn biểu thức véc-tơ $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AC}$ ta được kết quả đúng là

(A) $\overrightarrow{MB}$. (B) $\overrightarrow{BC}$. (C) $\overrightarrow{CB}$. (D) $\overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Tính $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$.

(A) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}$. (B) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DA}$.

(C) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$. (D) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt và $\vec{u} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BD}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\vec{u} = \vec{0}$. (B) $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$. (C) $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$. (D) $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$.

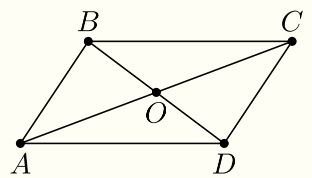
Chọn đáp án (B) □

Câu 5.

Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Hỏi véc-tơ $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{DO}$ bằng véc-tơ nào trong các véc-tơ sau?

(A) $\overrightarrow{BA}$. (B) $\overrightarrow{BC}$.

(C) $\overrightarrow{DC}$. (D) $\overrightarrow{AC}$.



Lời giải.

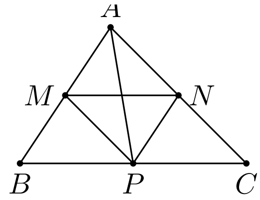
Ta có $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{DO} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
Chọn đáp án B □

Câu 6. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC, BC. Tổng $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP}$ bằng vec-tơ nào?

A $\overrightarrow{PA}$. B $\overrightarrow{AM}$. C $\overrightarrow{PB}$. D $\overrightarrow{AP}$.

Lời giải.

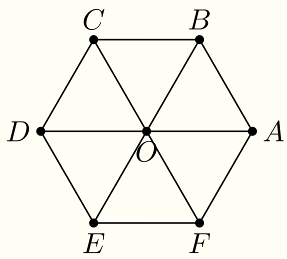
Ta có tứ giác $MANP$ là hình bình hành.
Mà $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP} = -\left(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}\right) = -\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AP}$.



Chọn đáp án D □

Câu 7.
Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$.
B $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{EB}$.
C $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \vec{0}$.
D $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD}$.



Lời giải.

Ta có
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$ đúng.
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} = \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{EB}$ đúng.
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO}\right) + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ đúng.
Chọn đáp án D □

Câu 8. Cho hình bình hành $ABCD$. Véc-tơ $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$ bằng véc-tơ nào dưới đây?

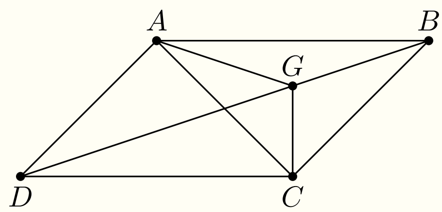
A $\overrightarrow{DB}$. B $\overrightarrow{BD}$. C $\overrightarrow{AC}$. D $\overrightarrow{CA}$.

Lời giải.

$\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD}$.
Chọn đáp án B □

Câu 9.
Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{BD}$. B $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{CD}$.
C $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{O}$. D $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{CD}$.



Lời giải.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GB}$.
Do đó $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = -\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GD} - \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{BD}$.
Chọn đáp án A □

Câu 10. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

(A) Nếu $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ thì $|\vec{a}|+\left|\vec{b}\right|=|\vec{c}|$.

(B) $\overrightarrow{FY}-\overrightarrow{BY}=\overrightarrow{FB}$ với B, F, Y bất kì.

(C) Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

(D) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{AH}$ với A, M, H bất kì.

Lời giải.

Mệnh đề sai: Nếu $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ thì $|\vec{a}|+\left|\vec{b}\right|=|\vec{c}|$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 11. Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Đẳng thức nào sau đây là **đúng** ?

(A) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$. (B) $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}$. (C) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}$. (D) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$.

Lời giải.

Áp dụng quy tắc ba điểm $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Rút gọn biểu thức $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{AC}$ ta được kết quả nào dưới đây?

(A) $\overrightarrow{MB}$. (B) $\overrightarrow{BC}$. (C) $\overrightarrow{CB}$. (D) $\overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Trong mặt phẳng cho bốn điểm bất kì A, B, C, O. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

(A) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}$. (B) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$. (C) $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CO}$. (D) $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{BA}$.

Lời giải.

Nhắc lại lý thuyết: Với 3 điểm O, A, B bất kì:

Quy tắc 3 điểm: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$.

Quy tắc hiệu: $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

(A) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$. (B) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. (C) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$. (D) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

Nhắc lại lý thuyết: Với 3 điểm C, A, B bất kì:

Quy tắc 3 điểm: $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$.

Quy tắc hiệu: $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BA}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Tổng $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}$ bằng

(A) $\overrightarrow{MR}$. (B) $\overrightarrow{MN}$. (C) $\overrightarrow{MP}$. (D) $\overrightarrow{MQ}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RN}=\overrightarrow{MN}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Cho 4 điểm bất kì A, B, C, D. Đẳng thức nào sau đây sai?

Ⓐ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$. Ⓑ $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD}$. Ⓒ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}$. Ⓓ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 17. Cho bốn điểm A, B, C. Tính $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

Ⓐ $\overrightarrow{CA}$. Ⓑ $2 \cdot \overrightarrow{AC}$. Ⓒ $\vec{0}$. Ⓓ $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 18. Cho tam giác ABC và điểm M bất kỳ, chọn đẳng thức **đúng**.

Ⓐ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$. Ⓑ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$. Ⓒ $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CB}$. Ⓓ $\overrightarrow{AA} - \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

Áp dụng quy tắc cộng, trừ. Ta có: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA}$
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BA}$
$\overrightarrow{AA} - \overrightarrow{BB} = \vec{0}$

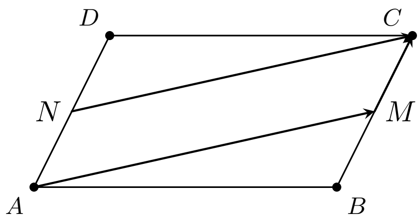
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 19. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và AD. Tổng của $\overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{MC}$ là

Ⓐ $\vec{0}$. Ⓑ $\overrightarrow{MN}$. Ⓒ $\overrightarrow{NM}$. Ⓓ $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

$ANCM$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AM}$.
Do đó: $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC}$.



Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 20. Cho bốn điểm A, B, C, D. Hãy tính $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

Ⓐ $\overrightarrow{DC}$. Ⓑ $\overrightarrow{AC}$. Ⓒ $\vec{0}$. Ⓓ $\overrightarrow{CD}$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CD}$.

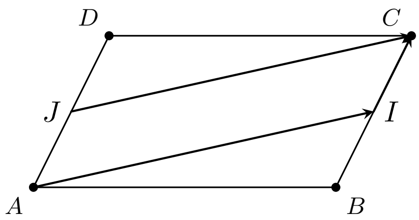
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 21. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm BC và AD. Tính $\overrightarrow{JC} - \overrightarrow{IC}$ không bằng

Ⓐ $\overrightarrow{DC}$. Ⓑ $\overrightarrow{JI}$. Ⓒ $\overrightarrow{AB}$. Ⓓ $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{JC}-\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{DJ}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{JI}=\overrightarrow{AB}$. .



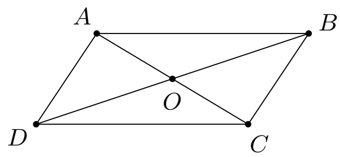
Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Cho hình bình hành $ABCD$. Điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{DO}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) M trùng với A. (B) M trùng với B. (C) M trùng với O. (D) M trùng với C.

Lời giải.

VìO là tâm hình bình hành $ABCD$ nên $\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OB}$.
Khi đó $\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{DO}\Leftrightarrow\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{DO}-\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{OC}$.
Suy ra O là trung điểm MC. Mà O là trung điểm AC.
Vậy M trùng với A.



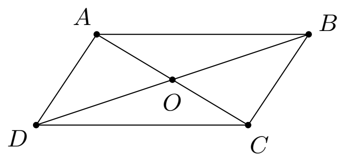
Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{DC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) M trùng với B. (B) M trùng với D.
(C) M trùng với A. (D) M trùng với điểm O.

Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$.
Khi đó



$$\begin{aligned}&\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{DC}\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{OM}=\vec{0}.\end{aligned}$$

Suy ra M trùng với điểm O.
Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D. Biết điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) M là trung điểm CD. (B) M là trung điểm AB.
(C) M là trung điểm AD. (D) M là trung điểm BC.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{AD}\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}.\end{aligned}$$

Suy ra M là trung điểm AB.
Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Cho các điểm phân biệt A, B, C, D, E, F. Biết điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DF}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. M là trọng tâm tam giác ABC.
B. M là trọng tâm tam giác BCD.
C. M là trọng tâm tam giác ABD.
D. M là trọng tâm tam giác ACD.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{MC}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DF} \\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{MC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{ME}-\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{MF}-\overrightarrow{DF}=\vec{0} \\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FD}=\vec{0} \\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}. \end{aligned}$$

Suy ra M là trọng tâm tam giác ABD.

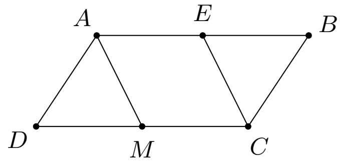
Chọn đáp án C □

Câu 26. Cho hình bình hành $ABCD$ có E là trung điểm AB. Điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{BC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm AD.
B. M là trung điểm CD.
C. M là trung điểm AB.
D. M là trung điểm BC.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{EC}$.
Do đó $AMCE$ là hình bình hành.
Suy ra $AE=MC$ và $AE \parallel MC$.
Vậy M là trung điểm CD.



Chọn đáp án B □

Câu 27. Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng a. Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện $\left|\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$.

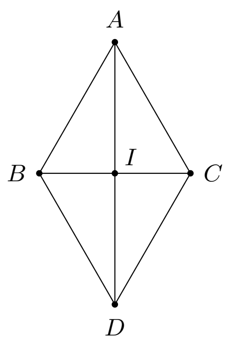
A. M thuộc đường tròn tâm A bán kính $a\sqrt{3}$.
B. M thuộc đường tròn tâm C bán kính $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
C. M thuộc đường tròn tâm B bán kính $a\sqrt{3}$.
D. M thuộc đường tròn tâm C bán kính $a\sqrt{3}$.

Lời giải.

Dựng hình bình hành $ABDC$. Suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.
Khi đó $\left|\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right| \Leftrightarrow MC=AD$.

Gọi I là tâm của hình bình hành $ABDC$. Ta có $AD=2AI=2\cdot\dfrac{AB\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$.

Do đó $MC=a\sqrt{3}$.
Vậy M thuộc đường tròn tâm C bán kính $a\sqrt{3}$.



Chọn đáp án D □

Câu 28. Cho hình thang $ABCD$ có AB song song với CD. Cho $AB=2a$, $CD=a$. O là trung điểm của AD. Khi đó,

A. $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=\dfrac{3a}{2}$.
B. $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=a$.
C. $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=2a$.
D. $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=3a$.

Lời giải.

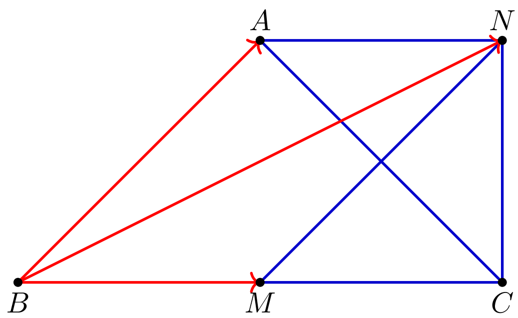
Gọi M là trung điểm của BC. Ta có $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OM}$, mà OM là đường trung bình của hình thang $ABCD$ nên $2OM=AB+AD=3a$ suy ra $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=3a$.

Chọn đáp án D □

Câu 29. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $BC=a\sqrt{2}$, M là trung điểm của BC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}\right|=a$. B $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}\right|=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. C $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}\right|=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. D $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}\right|=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.



Dựng hình bình hành $ABMN$.
Ta có: $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BN}$ nên

$$\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}\right|=\left|\overrightarrow{BN}\right|=BN.$$

Tam giác BCN vuông tại C có

$$NC=AM=\frac{1}{2}BC=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Suy ra

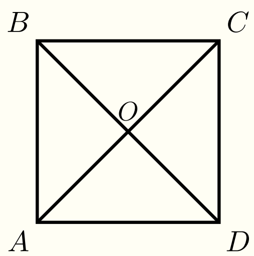
$$BN=\sqrt{BC^2+NC^2}=\sqrt{2a^2-\frac{2a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 30.

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a tâm O. Tính theo a độ dài của véc-tơ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{BC}$.

A $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. B $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. C $a\sqrt{2}$. D a.

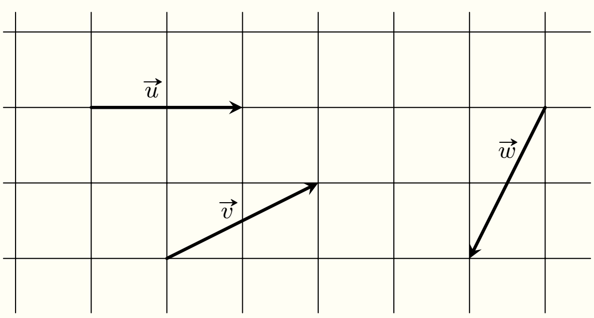


Lời giải.

Ta có $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$.
Suy ra $|\vec{u}|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=OB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AB=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

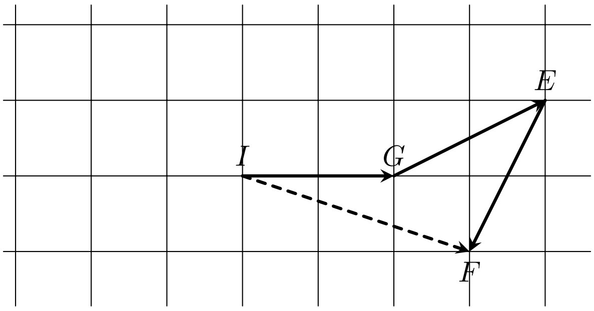
Chọn đáp án A □

Câu 31. Cho ba véc-tơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ và $\vec{w}$ như hình vẽ. Biết mỗi ô vuông có kích thước 1cm × 1cm, tính độ dài của véc-tơ $\vec{a}=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$.



(A) $\sqrt{5}$ cm. (B) $\sqrt{10}$ cm. (C) $\sqrt{13}$ cm. (D) $\sqrt{17}$ cm.

Lời giải.



Dựng $\overrightarrow{IG} = \vec{u}$, $\overrightarrow{GE} = \vec{v}$, $\overrightarrow{EF} = \vec{w}$ như hình vẽ.
Khi đó, $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{IF}$. Suy ra $|\vec{a}| = IF = \sqrt{10}$ cm.
Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Khi đó $\left|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\right|$ bằng

(A) $2a$. (B) $a\sqrt{2}$. (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.
Ta có $\left|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = a\sqrt{2}$.
Chọn đáp án (B) □

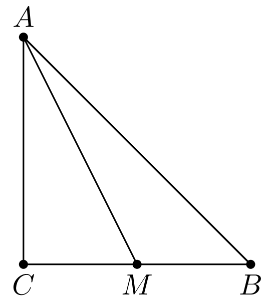
Câu 33. Cho tam giác ABC vuông cân tại C, $AB = \sqrt{2}$. Tính độ dài của $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

(A) $\sqrt{5}$. (B) $2\sqrt{5}$. (C) $\sqrt{3}$. (D) $2\sqrt{3}$.

Lời giải.
Ta có $AC^2 + BC^2 = AB^2 \Leftrightarrow 2AC^2 = 2 \Rightarrow AC = BC = 1$.

$AM = \sqrt{AC^2 + CM^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

$\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = \left|2\overrightarrow{AM}\right| = 2AM = \sqrt{5}$.

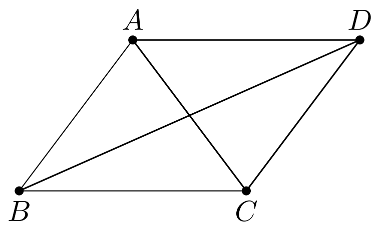


Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Cho hình bình hành $ABCD$ có $DA = 2$cm, $AB = 4$cm và đường chéo $BD = 5$cm. Tính $\left|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA}\right|$.

(A) 2cm. (B) 4cm. (C) 5cm. (D) 6cm.

Lời giải.
$\left|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA}\right| = \left|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right| = BD = 5$cm.



Chọn đáp án C

Câu 35. Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy $AB = a$, $CD = 2a$. Gọi M, N là trung điểm của AD, BC. Khi đó $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MN}\right|$ bằng

A $\dfrac{a}{2}$.
B $3a$.
C a.
D $2a$.

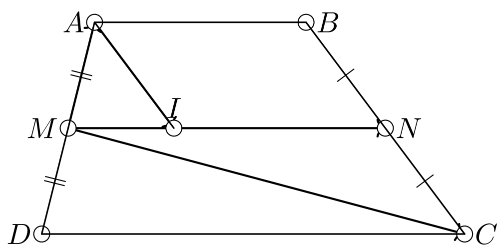
Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NC}$. (1)

Qua A, dựng véc-tơ $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{NC}$. Suy ra I nằm trên đường thẳng MN và tứ giác $ABNI$ là hình bình hành.

Khi đó, từ (1) suy ra $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{MI}$. (2)

Vì M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AD và BC nên MN là đường trung bình của hình thang $ABCD$. Suy ra, $MN = \dfrac{3a}{2}$ và $MI = \dfrac{a}{2}$



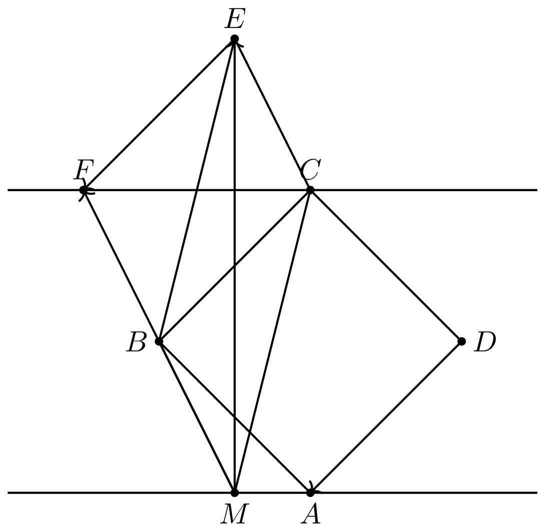
Từ (1) và (2), suy ra $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MN}\right| = |\overrightarrow{MI}| = \dfrac{a}{2}$.

Chọn đáp án A

Câu 36. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, d là đường thẳng qua A, song song với BD. Gọi M là điểm thuộc đường thẳng d sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}|$ nhỏ nhất. Tính theo a độ dài véc-tơ $\overrightarrow{MD}$.

A $a\sqrt{2}$.
B $\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.
C a.
D $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.



Dựng hình bình hành $MBEC$, $BCEF$, ta có $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}| = |\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{DA}| = |\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EF}| = |\overrightarrow{MF}|$.

Khi M thay đổi trên d thì F thuộc đường thẳng cố định qua C song song với d, điểm M cần tìm là hình chiếu vuông góc của B trên d.

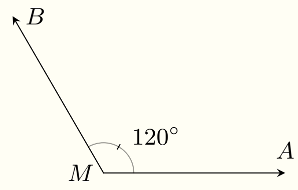
Khi đó, ta có $|\overrightarrow{MD}| = MD = \sqrt{BD^2 + BM^2} = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

Chọn đáp án B

Câu 37.

Cho hai lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ đều bằng 300 (N) và $\widehat{AMB} = 120^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

A 300 (N). **B** 700 (N). **C** 100 (N). **D** 500 (N).

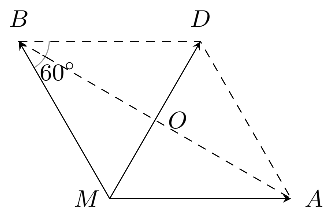


Lời giải.

Gọi D là đỉnh thứ tư của hình thoi $MBDA$, ta có

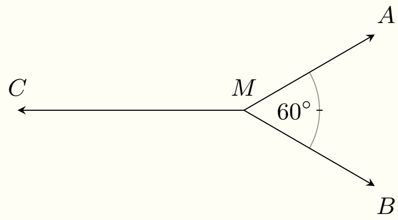
$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD}.$$

Vậy cường độ lực tổng hợp tại M là $\left|\overrightarrow{MD}\right| = MD$.



Gọi O là tâm hình thoi $MBDA$ có cạnh 300, do $\widehat{BMA} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{MBD} = 60^\circ$.
Vậy tam giác MBD đều cạnh 300 suy ra $MD = 300$ (N).
Chọn đáp án A

Câu 38.
Cho ba lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$, $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ đều bằng 25 (N) và góc $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Khi đó cường độ lực của $\vec{F}_3$ là



A $25\sqrt{3}$ (N). **B** $50\sqrt{3}$ (N). **C** $50\sqrt{2}$ (N). **D** $100\sqrt{3}$ (N).

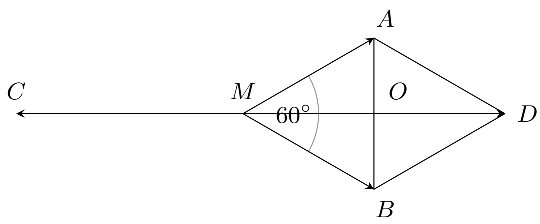
Lời giải.

Gọi D là đỉnh thứ tư của hình thoi $MADB$, ta có

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD}.$$

Vậy lực tổng hợp tại M là

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC}.$$



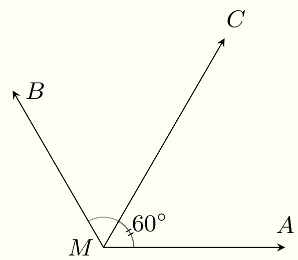
Do vật đứng yên nên $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MD}$.
Vậy cường độ lực $\vec{F}_3$ là

$$\left|\overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MD}\right| = MD.$$

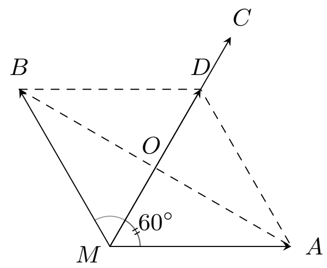
Gọi O là tâm hình thoi $MBDA$ có cạnh 25, ta có $MD = 2MO = 25\sqrt{3}$ (N).
Chọn đáp án A

Câu 39.
Cho ba lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$, $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ đều bằng 300 (N) và $\vec{F}_3 = 400$ (N). Lại có $\widehat{AMB} = 120^\circ$ và $\widehat{AMC} = 60^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

A 300 (N). **B** 700 (N). **C** 100 (N). **D** 500 (N).



Lời giải.



Gọi D là đỉnh thứ tư của hình thoi $MBDA$, ta có

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}.$$

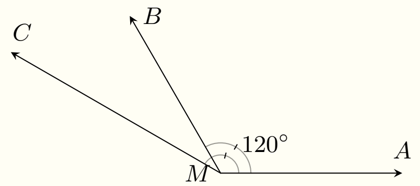
Vậy cường độ lực tổng hợp tại M là

$$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}\right|.$$

Lại có $\overrightarrow{MD}$ và $\overrightarrow{MD}$ là 2 véc-tơ cùng hướng nên $\left|\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}\right|=MD+MC$.

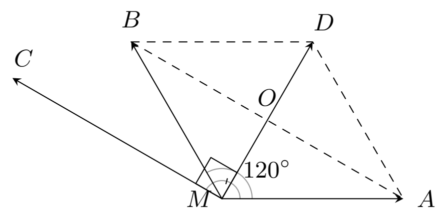
Gọi O là tâm hình thoi $MBDA$ có cạnh 300, do $\widehat{BMA}=120^\circ \Rightarrow \widehat{MBD}=60^\circ$.
Vậy tam giác MBD đều cạnh 300 suy ra $MD=300$ (N).
Vậy cường độ lực tổng hợp tại M là $MD+MC=300+400=700$ (N).
Chọn đáp án B

Câu 40.
Cho ba lực $\vec{F}_1=\overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2=\overrightarrow{MB}$, $\vec{F}_3=\overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ đều bằng 300 (N) và $\vec{F}_3=400$ (N). Lại có $\widehat{AMB}=120^\circ$ và $\widehat{AMC}=150^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.



A 300 (N). B 700 (N). C 100 (N). D 500 (N).

Lời giải.



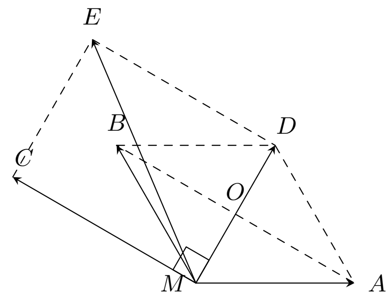
Gọi D là đỉnh thứ tư của hình thoi $MBDA$, ta có

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}.$$

Vậy cường độ lực tổng hợp tại M là

$$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}\right|.$$

Gọi O là tâm hình thoi $MBDA$ có cạnh 300, do $\widehat{BMA}=120^\circ \Rightarrow \widehat{MBD}=60^\circ$.
Vậy tam giác MBD đều cạnh 300 suy ra $MD=300$ (N) và $\widehat{DMA}=60^\circ$.
Suy ra $\widehat{CMD}=150^\circ-60^\circ=90^\circ$ hay tam giác CMD vuông tại M.
Gọi E là đỉnh thứ tư của hình chữ nhật $CMDE$, ta có



$$\left|\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{ME}\right|=ME.$$

Do $CMDE$ là hình chữ nhật nên

$$ME=\sqrt{300^2+400^2}=500 \text{ (N)}.$$

Chọn đáp án B

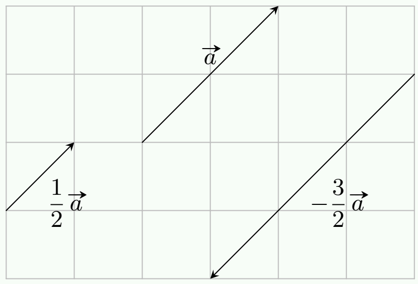
Bài 3 TÍCH CỦA MỘT VÉC-TƠ VỚI MỘT SỐ

A – TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Tích của một véc-tơ với một số

Định nghĩa 3.1.

- Tích của một véc-tơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ với một số $k > 0$ là một véc-tơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, cùng hướng với véc-tơ $\vec{a}$ và có độ dài bằng $k|\vec{a}|$.
- Tích của một véc-tơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ với một số $k < 0$ là một véc-tơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, ngược hướng với véc-tơ $\vec{a}$ và có độ dài bằng $(-k)|\vec{a}|$.



Ta quy ước $k\vec{a} = \vec{0}$ *nếu* $\vec{a} = \vec{0}$ *hoặc* $k = 0$.

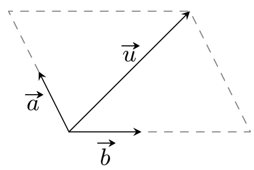
2. Các tính chất của phép nhân véc-tơ với một số

Với hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và hai số thực k, t, ta luôn có

- $k(t\vec{a}) = (kt)\vec{a}$;
- $(k+t)\vec{a} = k\vec{a} + t\vec{a}$;
- $k(\vec{a} \pm \vec{b}) = k\vec{a} \pm k\vec{b}$;
- $1\vec{a} = \vec{a}$; $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

- *Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi* $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
- *Cho tam giác ABC, điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi* $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Cho hai véc-tơ không cùng phương $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$. *Khi đó, mọi véc-tơ* $\vec{u}$ *đều biểu thị (phân tích) được một các duy nhất theo hai véc-tơ* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$, *nghĩa là có duy nhất cặp số* (x, y) *sao cho* $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b}$.



B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định véc-tơ tích, tính độ dài véc-tơ

Véc-tơ $k\vec{a}$ có độ dài bằng $|k||\vec{a}|$ và

- cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k \geq 0$;
- ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $\begin{cases} \vec{a} \neq \vec{0} \\ k < 0. \end{cases}$

1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm nằm trên đoạn AB sao cho $AM = \dfrac{1}{5}AB$. Tìm k trong các đẳng thức sau

a) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.

b) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$.

c) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

a) Thấy $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng nên $k > 0$.

Ta có $|k| = \dfrac{\left|\overrightarrow{AM}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{1}{5}$. Suy ra $k = \dfrac{1}{5}$.

b) Thấy $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$ ngược hướng nên $k < 0$.

Ta có $|k| = \dfrac{\left|\overrightarrow{MA}\right|}{\left|\overrightarrow{MB}\right|} = \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{1}{4}$. Suy ra $k = -\dfrac{1}{4}$.

c) Thấy $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng nên $k < 0$.

Ta có $|k| = \dfrac{\left|\overrightarrow{MA}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{1}{5}$. Suy ra $k = -\dfrac{1}{5}$.

□

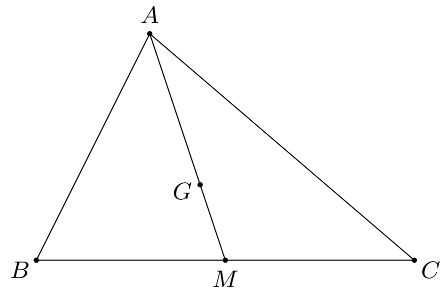
Ví dụ 2. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng 1, trọng tâm G. Tính độ dài véc-tơ $\overrightarrow{AG}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC.

Khi đó, ta có $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ nên

$$\left|\overrightarrow{AG}\right| = \frac{2}{3}\left|\overrightarrow{AM}\right| = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



□

Ví dụ 3. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a, I là trung điểm của cạnh BC. Tính độ dài véc-tơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

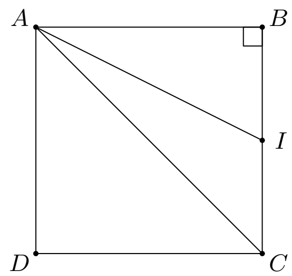
Lời giải.

Vì I là trung điểm BC nên ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$.

Do đó $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = \left|2\overrightarrow{AI}\right| = 2AI$.

Xét $\triangle ABI$ vuông tại B, ta có $AI = \sqrt{AB^2 + BI^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Vậy $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = a\sqrt{5}$.



□

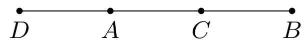
2. Bài tập áp dụng

Bài 1. Trên đoạn thẳng AB, gọi C là trung điểm AB và D là điểm đối xứng của C qua A. Tìm k trong các đẳng thức sau

a) $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

b) $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB}$.

Lời giải.



- Vì C là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng. Do đó $k > 0$.

  Ta lại có $|k| = \dfrac{\left|\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{1}{2}$. Suy ra $k = \dfrac{1}{2}$.

- Vì D đối xứng với C qua A nên $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AB}$ là ngược hướng, do đó $k < 0$.

  Ta lại có $AD = AC$ nên $|k| = \dfrac{\left|\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{1}{2}$. Suy ra $k = -\dfrac{1}{2}$.

□

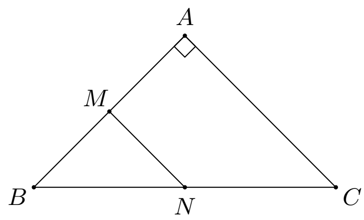
Bài 2. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, cạnh $BC = 2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AB và BC. Tính độ dài $\overrightarrow{MN}$.

Lời giải.

Vì $\triangle ABC$ vuông cân tại A nên $AB^2 = AC^2 = \dfrac{1}{2}BC^2 = 2$, do đó $AB = AC = \sqrt{2}$.

Dễ thấy rằng MN là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Suy ra $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right| = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



□

Bài 3. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 2a$, $BD = a$. Tính độ dài véc-tơ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

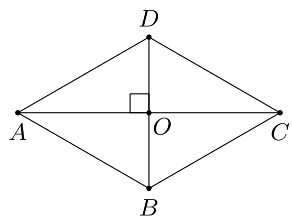
Lời giải.

Gọi O là tâm của hình thoi.

Khi đó ta có $\left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right| = \left|2\overrightarrow{AO} + 2\overrightarrow{OD}\right| = \left|2\overrightarrow{AD}\right| = 2AD$.

Áp dụng định lý Pi-ta-go trong tam giác AOD ta có

$$AD = \sqrt{AO^2 + OD^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$



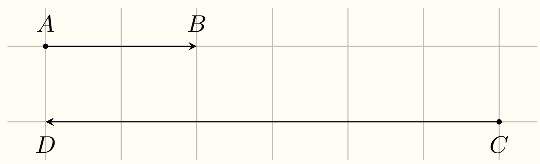
Do đó $\left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right| = 2AD = a\sqrt{5}$.

□

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1.
Cho hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ trong hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{AB}$.
B. $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.
C. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$.
D. $\overrightarrow{CD} = -3\overrightarrow{AB}$.



Lời giải.

Từ hình vẽ, theo định nghĩa ta có $\overrightarrow{CD} = -3\overrightarrow{AB}$.

Chọn đáp án D □

Câu 2. Cho véc-tơ $\vec{a}$ (khác $\vec{0}$) và véc-tơ $\vec{b} = k\vec{a}$, $(k \neq 0)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}$ nếu $k > 0$.
Ⓑ $\vec{a}$ ngược hướng $\vec{b}$ nếu $k > 0$.
Ⓒ $\vec{a}$ cùng hướng $\vec{b}$ nếu $k < 0$.
Ⓓ $\vec{a}$ cùng hướng $\vec{b}$ nếu $k > 0$.

Lời giải.

Véc-tơ $\vec{b} = k\vec{a}$ có độ dài bằng $|k||\vec{a}|$ và

- cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$;
- ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bất kì và số thực k. Ta có $k\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$ bằng

Ⓐ $\vec{a} + k\vec{b}$.
Ⓑ $k\vec{a} + k\vec{b}$.
Ⓒ $k\vec{a} - k\vec{b}$.
Ⓓ $k\vec{a} + \vec{b}$.

Lời giải.

Theo tính chất, ta có $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ thỏa mãn $\vec{a} = -\dfrac{1}{2}\vec{b}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $|\vec{a}| = -\dfrac{1}{2}\left|\vec{b}\right|$.
Ⓑ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai véc-tơ đối nhau.
Ⓒ $\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{b}$.
Ⓓ $\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{b}$.

Lời giải.

Do $\vec{a} = -\dfrac{1}{2}\vec{b}$ và $-\dfrac{1}{2} < 0$ nên $\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{b}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Cho véc-tơ $\vec{u}$ có độ dài bằng 2 và véc-tơ $\vec{v} = -3\vec{u}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ Véc-tơ $\vec{v}$ có độ dài bằng -6 và cùng hướng với $\vec{u}$.
Ⓑ Véc-tơ $\vec{v}$ có độ dài bằng -6 và ngược hướng với $\vec{u}$.
Ⓒ Véc-tơ $\vec{v}$ có độ dài bằng 6 và cùng hướng với $\vec{u}$.
Ⓓ Véc-tơ $\vec{v}$ có độ dài bằng 6 và ngược hướng với $\vec{u}$.

Lời giải.

Với $\vec{u} \neq \vec{0}$ và số thực $k \neq 0$, ta có $k\vec{u}$ ngược hướng với $\vec{u}$ nếu $k < 0$ và $|k\vec{u}| = |k| \cdot |\vec{u}|$.
Do đó, khẳng định đúng là: "Véc-tơ $\vec{v}$ có độ dài bằng 6 và ngược hướng với $\vec{u}$."
Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Cho $\vec{a} = -2\vec{b}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai véc-tơ bằng nhau.
Ⓑ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai véc-tơ đối nhau.
Ⓒ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.
Ⓓ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

Lời giải.

Theo định nghĩa, nếu $\vec{a} = -2\vec{b}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai véc-tơ ngược hướng.
Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Tích của véc-tơ $\vec{a}$ và -3 là véc-tơ $\vec{b}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\vec{b}$ cùng hướng $\vec{a}$.
Ⓑ $\vec{b} = 3\vec{a}$.
Ⓒ $\left|\vec{b}\right| = -3|\vec{a}|$.
Ⓓ $\vec{b}$ ngược hướng $\vec{a}$.

Lời giải.

Theo giả thiết, ta có $\vec{b} = -3\vec{a}$ và $-3 < 0$ nên $\vec{b}$ ngược hướng $\vec{a}$.

Chọn đáp án D □

Câu 8. Cho véc-tơ $\vec{q}$ có độ dài bằng 27. Hỏi độ dài của véc-tơ $\vec{x} = -\dfrac{1}{9}\vec{q}$ là bao nhiêu?

A. 243. B. 3. C. 9. D. -3.

Lời giải.

Ta có $|\vec{x}| = \dfrac{1}{9}|\vec{q}| = \dfrac{27}{9} = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Cho véc-tơ $\vec{a}$ có độ dài bằng 2022. Tính độ dài của véc-tơ $\vec{b} = -2\vec{a}$.

A. $\left|\vec{b}\right| = 4044$. B. $\left|\vec{b}\right| = -2022$. C. $\left|\vec{b}\right| = 2022$. D. $\left|\vec{b}\right| = -4044$.

Lời giải.

Ta có $\left|\vec{b}\right| = |-2\vec{a}| = 2|\vec{a}| = 2 \cdot 2022 = 4044$.

Chọn đáp án A □

Câu 10.

Cho đoạn thẳng AB và điểm I thuộc đoạn thẳng AB như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. B. $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{IB}$.

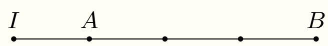
C. $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{BA}$. D. $\overrightarrow{AI} = -\dfrac{1}{4}\overrightarrow{IB}$.

Lời giải.

Từ hình vẽ ta có $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{IB}$.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Đẳng thức nào mô tả đúng hình vẽ bên?



A. $3\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$. B. $3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{BI} + 3\overrightarrow{BA} = \vec{0}$. D. $\overrightarrow{AI} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Lời giải.

Từ hình vẽ ta thấy $\overrightarrow{IA} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

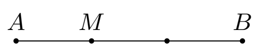
Chọn đáp án A □

Câu 12. Cho M là một điểm trên đoạn AB sao cho $AM = \dfrac{1}{3}AB$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{MB} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. B. $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. C. $\overrightarrow{MA} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{MB}$. D. $\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{AM}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng và $MB = \dfrac{2}{3}AB$ nên $\overrightarrow{MB} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.



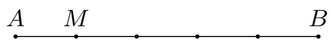
Khẳng định **sai** là $\overrightarrow{MB} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm trên đoạn AB sao cho $AB = 5AM$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{MB}$.
B. $\overrightarrow{MB} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$.
C. $\overrightarrow{MB} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$.
D. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$.

Lời giải.



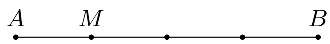
Dễ thấy rằng $\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{AB}$ là hai véc-tơ cùng hướng nên mệnh đề sai là $\overrightarrow{MB} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Cho đoạn thẳng AB, M là một điểm trên đoạn thẳng AB sao cho $AM = \frac{1}{4}AB$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$.
B. $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$.
C. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.
D. $\overrightarrow{MB} = -3\overrightarrow{MA}$.

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ ngược hướng và $MA = \frac{1}{3}MB$ nên $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

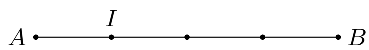
Khẳng định **sai** là $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Trên đoạn thẳng AB lấy điểm I sao cho $AB = 4AI$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{IB} = -3\overrightarrow{IA}$.
B. $\overrightarrow{IB} = 3\overrightarrow{IA}$.
C. $\overrightarrow{IB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$.
D. $\overrightarrow{IB} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

Lời giải.



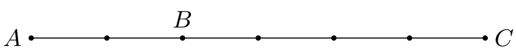
Theo giả thiết ta có $IB = AB - AI = 3AI$.
Vì $\overrightarrow{IB}$ và $\overrightarrow{IA}$ ngược hướng nên $\overrightarrow{IB} = -3\overrightarrow{IA}$.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Cho điểm B nằm giữa hai điểm A và C, với $AB = 2a$, $AC = 6a$. Đẳng thức nào dưới đây là đẳng thức đúng?

A. $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{BA}$.
B. $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AB}$.
C. $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AB}$.
D. $\overrightarrow{BC} = -4\overrightarrow{AB}$.

Lời giải.



Theo giả thiết ta có $BC = AC - AB = 4a$.
Vì $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$ ngược hướng nên $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{BA}$.

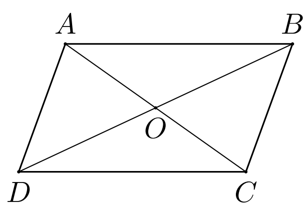
Chọn đáp án A □

Câu 17. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.
B. $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{OC}$.
C. $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{OA}$.
D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{OA}$ là hai véc-tơ ngược hướng và $AC = 2OA$ nên $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{OA}$.



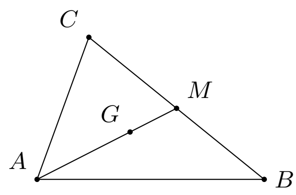
Chọn đáp án C □

Câu 18. Cho tam giác ABC với trung tuyến AM và trọng tâm G. Khi đó, véc-tơ $\overrightarrow{GA}$ bằng với véc-tơ nào sau đây?

A $2\overrightarrow{GM}$. **B** $-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}$. **C** $\dfrac{2}{3}\overrightarrow{GM}$. **D** $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.

Lời giải.

Ta có $GA = \dfrac{2}{3}AM$ và $\overrightarrow{GA}$ ngược hướng $\overrightarrow{AM}$ nên $\overrightarrow{GA} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.



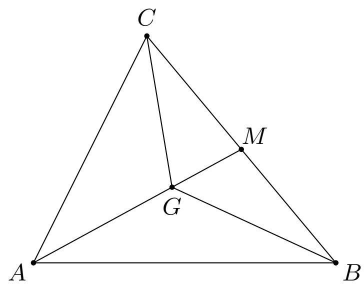
Chọn đáp án B

Câu 19. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, M là trung điểm của BC. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM}$. **B** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AG}$. **C** $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GM}$. **D** $\overrightarrow{MG} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{MA}$.

Lời giải.

Theo tính chất trung điểm ta có $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM}$.



Chọn đáp án A

Câu 20. Cho tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. **B** $\overrightarrow{MN} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. **C** $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{NM}$. **D** $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$.

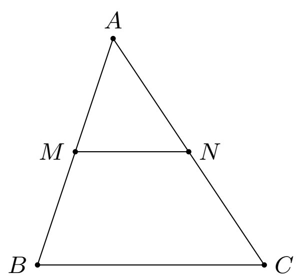
Lời giải.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC nên MN là đường trung bình của $\triangle ABC$. Do đó $MN \parallel BC$ và $MN = \dfrac{1}{2}BC$.

Ta có các đẳng thức đúng là

- $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
- $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$.
- $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{NM}$.

Đẳng thức $\overrightarrow{MN} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ là khẳng định **sai**.



Chọn đáp án B

Câu 21. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và trung tuyến BM. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A $\overrightarrow{AM} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}$. **B** $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

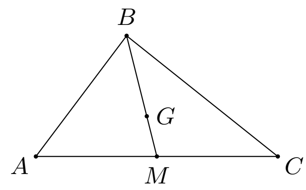
C $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$, với mọi điểm O. **D** $\overrightarrow{GB} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BM}$.

Lời giải.

Do $\triangle ABC$ có trọng tâm G và trung tuyến BM nên ta có $BG = \dfrac{2}{3}BM$.

Lại có $\overrightarrow{GB}$ và $\overrightarrow{BM}$ là hai véc-tơ ngược hướng nên $\overrightarrow{GB} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BM}$.

Suy ra khẳng định sai là $\overrightarrow{GB} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BM}$.



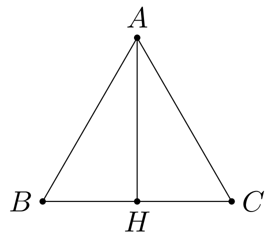
Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Cho tam giác đều ABC với đường cao AH. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. (B) $\left|\overrightarrow{AH}\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left|\overrightarrow{HC}\right|$. (C) $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HC}$. (D) $\left|\overrightarrow{AC}\right| = 2\left|\overrightarrow{HC}\right|$.

Lời giải.

Ta có $2\left|\overrightarrow{HC}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = BC = AC = \left|\overrightarrow{AC}\right|$.



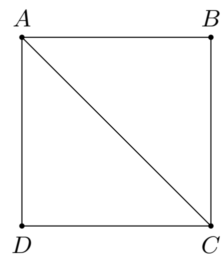
Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Giá trị của $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right|$ bằng

(A) $A\sqrt{2}$. (B) $2a$. (C) $2a\sqrt{2}$. (D) $3a$.

Lời giải.

Ta có
$$\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}\right| = 2\left|\overrightarrow{AC}\right| = 2AC = 2a\sqrt{2}.$$



Chọn đáp án (C) □

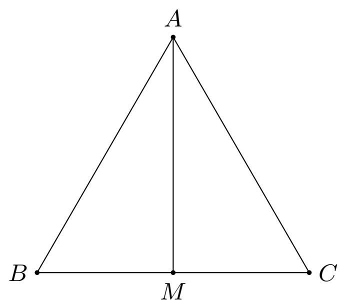
Câu 24. Cho tam giác ABC đều cạnh a. Khi đó, giá trị $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right|$ bằng

(A) $a\sqrt{3}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (C) $2a$. (D) $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC.
Vì AM là đường trung tuyến của tam giác đều nên
$$AM = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Khi đó, ta có
$$\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = \left|2\overrightarrow{AM}\right| = 2 \cdot AM = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

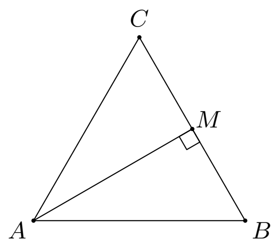


Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng 4. Độ dài $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ là

Ⓐ $2\sqrt{3}$. Ⓑ $\sqrt{5}$. Ⓒ $\sqrt{6}$. Ⓓ $4\sqrt{3}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của BC .
Vì AM là đường trung tuyến của tam giác đều cạnh 4 nên

$$AM=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4=2\sqrt{3}.$$

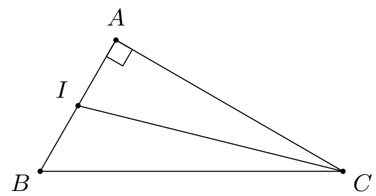
Do đó $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|2\overrightarrow{AM}\right|=2AM=4\sqrt{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 26. Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB=2$, $AC=3$. Độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$ bằng

Ⓐ 5. Ⓑ 40. Ⓒ $\sqrt{13}$. Ⓓ $2\sqrt{10}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của AB. Ta có

$$\left|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\right|=\left|2\overrightarrow{CI}\right|=2CI.$$

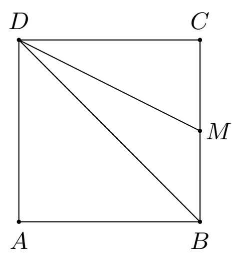
Tam giác AIC vuông tại A nên $CI=\sqrt{AI^2+AC^2}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$.
Vậy $\left|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\right|=2\sqrt{10}$.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DB}\right|$ theo a.

Ⓐ $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. Ⓑ a. Ⓒ $a\sqrt{5}$. Ⓓ $a\sqrt{3}$.

Lời giải.

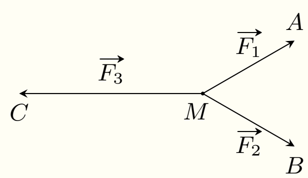


Gọi M là trung điểm của BC.
Ta có $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DB}\right|=\left|\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DB}\right|=2\left|\overrightarrow{DM}\right|=2\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=a\sqrt{5}$.

Chọn đáp án C □

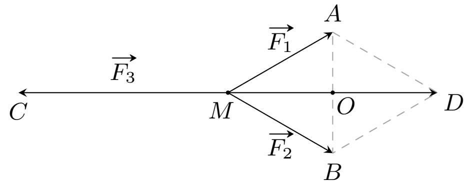
Câu 28.
Cho ba lực $\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ đều bằng 100N và $\widehat{AMB}=60^\circ$. Khi đó, cường độ lực của $\overrightarrow{F_3}$ bằng

Ⓐ $50\sqrt{2}$N. Ⓑ $50\sqrt{3}$N. Ⓒ $25\sqrt{3}$N. Ⓓ $100\sqrt{3}$N.



Lời giải.

Gọi D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $MADB$ và O là tâm hình bình hành.
Khi đó, hợp lực $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MO}$.
Dễ thấy rằng $\triangle AMB$ là tam giác đều nên $MO=100\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Suy ra hợp lực $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}$ có độ lớn $100\sqrt{3}$.
Vì điểm M đứng yên nên độ lớn của lực $\overrightarrow{F_3}$ là $100\sqrt{3}N$.



Chọn đáp án (D) □

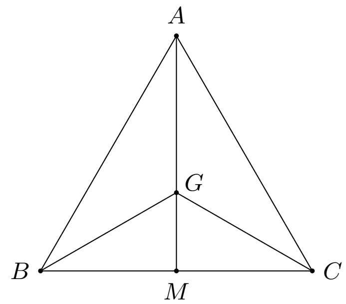
Câu 29. Cho tam giác ABC là tam giác đều cạnh $2a$ với G là trọng tâm. Tính $\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|$.

(A) $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. (B) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. (C) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. (D) $a\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC.

Ta có $\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|=\left|2\overrightarrow{GM}\right|=2\cdot GM=2\cdot\frac{1}{3}\cdot AM=\frac{2}{3}\cdot\frac{2a\sqrt{3}}{2}=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.



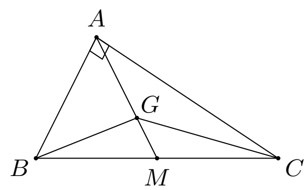
Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Gọi G là trọng tâm tam giác vuông ABC với cạnh huyền $BC=12$. Véc-tơ $\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{CG}$ có độ dài bằng bao nhiêu?

(A) 4. (B) $2\sqrt{3}$. (C) 8. (D) 2.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC.
Ta có $\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GM}$.
Vì $\triangle ABC$ vuông tại A nên $AM=\frac{BC}{2}=6\Rightarrow GM=\frac{1}{3}AM=2$.
Vậy $\left|\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{CG}\right|=2\left|\overrightarrow{GM}\right|=2GM=4$.



Chọn đáp án (A) □

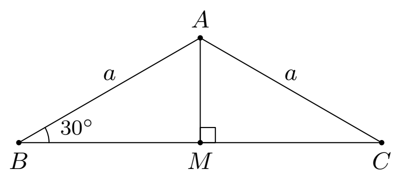
Câu 31. Tam giác ABC có $AB=AC=a$, $\widehat{ABC}=120^\circ$. Độ dài véc-tơ tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ bằng

(A) $2a$. (B) $a\sqrt{3}$. (C) a. (D) $3a$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC, ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$.
Tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC}=120^\circ$ nên

$$\widehat{ABM}=\frac{1}{2}(180^\circ-120^\circ)=30^\circ.$$



Tam giác ABM vuông tại M có $\widehat{ABM}=30^\circ$ nên

$$AM=AB\cdot\sin 30^\circ=\frac{a}{2}.$$

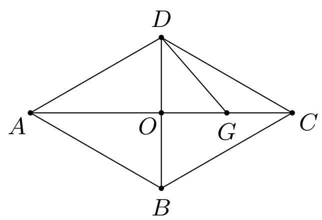
Vậy $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=2\left|\overrightarrow{AM}\right|=2AM=a$.

Chọn đáp án (C)

Câu 32. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a, tâm O và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Độ dài véc-tơ $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{CD}$ bằng

(A) $\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. (C) $2a$. (D) $a\sqrt{3}$.

Lời giải.



Gọi G là trung điểm của đoạn OC.
Ta có $\left|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{CD}\right| = \left|\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{DC}\right| = 2\left|\overrightarrow{DG}\right| = 2DG$.

Tam giác DOG vuông tại O có $DO = \dfrac{a}{2}$, $OG = \dfrac{OC}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ nên

$$DG = \sqrt{DO^2 + OG^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{4}.$$

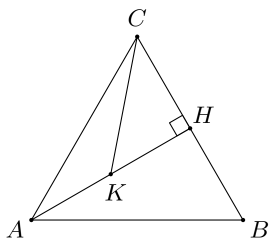
Suy ra $\left|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{CD}\right| = 2 \cdot \dfrac{a\sqrt{7}}{4} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

Chọn đáp án (A)

Câu 33. Cho tam giác ABC đều cạnh a, H là trung điểm của BC. Tính $\left|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}\right|$ bằng

(A) $\dfrac{2\sqrt{3}a}{3}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$. (C) $\dfrac{a}{2}$. (D) $\dfrac{3a}{2}$.

Lời giải.



Gọi K là trung điểm của AH. Khi đó

$$\left|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}\right| = \left|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CH}\right| = \left|2\overrightarrow{CK}\right| = 2CK.$$

Xét $\triangle KHC$ vuông tại H có $HC = \dfrac{a}{2}$, $KH = \dfrac{1}{2}AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Do đó

$$CK = \sqrt{CH^2 + HK^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{4}.$$

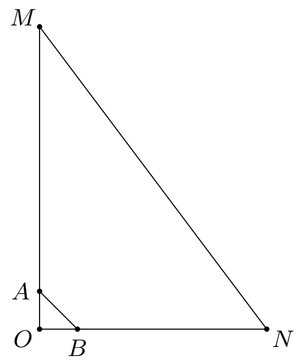
Vậy $\left|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}\right| = \dfrac{a\sqrt{7}}{4}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 34. Cho tam giác OAB vuông cân tại O với $OA = OB = a$. Tính độ dài véc-tơ $\vec{u} = 8\overrightarrow{OA} - 6\overrightarrow{OB}$.

(A) $2a$. (B) $14a$. (C) $16a$. (D) $10a$.

Lời giải.



Lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = 8\overrightarrow{OA}$. Khi đó

$$OM = \left|\overrightarrow{OM}\right| = \left|8\overrightarrow{OA}\right| = 8OA = 8a.$$

Lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{ON} = 6\overrightarrow{OB}$. Khi đó

$$ON = \left|\overrightarrow{ON}\right| = \left|6\overrightarrow{OB}\right| = 6OB = 6a.$$

Vì $OA \perp OB$ nên $OM \perp ON$, hay $\triangle OMN$ vuông tại O. Do đó

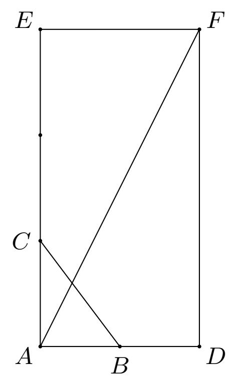
$$\begin{aligned}|\vec{u}| &= \left|8\overrightarrow{OA} - 6\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}\right| \\ &= \left|\overrightarrow{NM}\right| = MN = \sqrt{OM^2 + ON^2} \\ &= \sqrt{(8a)^2 + (6a)^2} = 10a.\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 35. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3$, $AC = 4$. Tính độ dài vec-tơ $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.

A $|\vec{u}| = 18$. B $|\vec{u}| = 6\sqrt{5}$. C $|\vec{u}| = 9$. D $|\vec{u}| = 5\sqrt{6}$.

Lời giải.



Gọi D, E là hai điểm thỏa $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AC}$.
Suy ra $AD = 6$, $AE = 12$.
Gọi F là điểm sao cho tứ giác $ADFE$ là hình chữ nhật.
Suy ra $AF = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{6^2 + 12^2} = 6\sqrt{5}$.
Ta có

$$\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF}.$$

Suy ra $|\vec{u}| = \left|\overrightarrow{AF}\right| = 6\sqrt{5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 36. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Tập hợp điểm M trong mặt phẳng chứa tam giác ABC sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = 6$ là

A đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
B đường tròn tâm G bán kính bằng 1.
C đường tròn tâm G bán kính bằng 2.
D đường tròn tâm G bán kính bằng 6.

Lời giải.

Ta có G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.
Do đó $\left|3\overrightarrow{MG}\right| = 6 \Leftrightarrow MG = 2$.
Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm G bán kính bằng 2.
Chọn đáp án C □

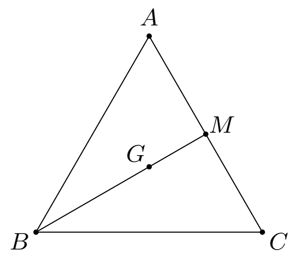
Câu 37. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $2a$ và G là trọng tâm của tam giác. Khi đó, giá trị $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}\right|$ là

A $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. B $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. C $\dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$. D $\dfrac{2a}{3}$.

Lời giải.

Vì G là trọng tâm của $\triangle ABC$ nên ta có $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
Do đó

$$\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{GC}\right|=\left|\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GC}\right|=\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}\right|=\left|2\overrightarrow{GB}\right|=2GB.$$



Gọi M là trung điểm AC. Khi đó

$$GB=\frac{2}{3}BM=\frac{2}{3}\cdot 2a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Suy ra $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{GC}\right|=2\cdot\frac{2a\sqrt{3}}{3}=\frac{4a\sqrt{3}}{3}$.

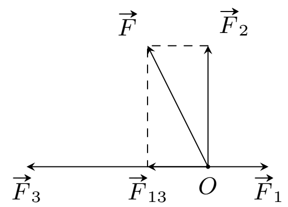
Chọn đáp án C □

Câu 38. Cho ba lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ có cùng điểm đặt tại O. Trong đó, có hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ có phương hợp với nhau một góc 90° và lực $\vec{F}_3$ ngược hướng với lực $\vec{F}_1$. Ba lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ có cường độ lần lượt là 100 N, 200 N và 300 N. Cường độ lực tổng hợp của ba lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ là

Ⓐ 400 N. Ⓑ $100\sqrt{2}$ N. Ⓒ 600 N. Ⓓ $200\sqrt{2}$ N.

Lời giải.

Gọi $\vec{F}_{13}=\vec{F}_1+\vec{F}_3$.
Vì $\vec{F}_1$ ngược hướng với $\vec{F}_3$ nên $F_{13}=|F_1-F_3|=200$ N.
Suy ra $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=\vec{F}_{13}+\vec{F}_2$.
Do $\vec{F}_2\perp\vec{F}_{13}$, suy ra $F=\sqrt{F_2^2+F_{13}^2}=\sqrt{200^2+200^2}=200\sqrt{2}$ N.



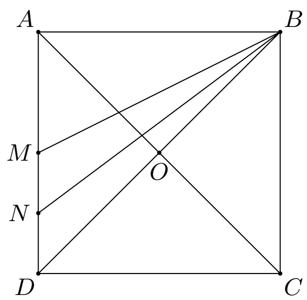
Chọn đáp án D □

Câu 39. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1. Độ dài của véc-tơ $\vec{u}=12\overrightarrow{AC}-7\overrightarrow{AB}$ bằng

Ⓐ $|\vec{u}|=17$. Ⓑ $|\vec{u}|=5$. Ⓒ $|\vec{u}|=13$. Ⓓ $|\vec{u}|=12\sqrt{2}-7$.

Lời giải.

Gọi O, M, N lần lượt là tâm của hình vuông $ABCD$, trung điểm của đoạn AD, trung điểm của đoạn DM. Ta có



$$\begin{aligned}12\overrightarrow{AC}-7\overrightarrow{AB}&=6\overrightarrow{AO}-6\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}=6\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{AB}\\&=3\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{BD}+\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}\right)\\&=2\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{BM}=2\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BM}\right)\\&=2\cdot 2\overrightarrow{BN}=4\overrightarrow{BN}.\end{aligned}$$

Do đó $|\vec{u}|=4BN$.

Xét $\triangle ABN$ vuông tại A, có $BN=\sqrt{AB^2+AN^2}=\sqrt{1^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{5}{4}$.

Vậy $|\vec{u}|=4\cdot\frac{5}{4}=5$.

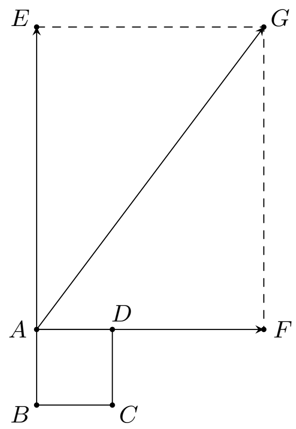
Chọn đáp án B □

Câu 40. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1. Độ dài của véc-tơ $\vec{u}=3\overrightarrow{AC}-7\overrightarrow{AB}$ là

Ⓐ $|\vec{u}|=5$. Ⓑ $|\vec{u}|=12\sqrt{2}-7$. Ⓒ $|\vec{u}|=17$. Ⓓ $|\vec{u}|=13$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u} = 3\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) - 7\overrightarrow{AB} = -4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}$.
Dựng E, F, G sao cho $\overrightarrow{AE} = -4\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$ và $AEGF$ là hình bình hành.
Vì $AB \perp AD$ nên $AE \perp AF$. Do đó $AEGF$ là hình chữ nhật.
Vậy $\vec{u} = \overrightarrow{AG}$ và $|\vec{u}| = \left|\overrightarrow{AG}\right| = AG = EF = \sqrt{AE^2 + AF^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.



Chọn đáp án A

Dạng 2. Chứng minh đẳng thức véc-tơ, thu gọn biểu thức

- HƯỚNG 1. Biến đổi một vế thành vế còn lại. Khi đó
  a) Nếu xuất phát từ vế phức tạp ta cần thực hiện việc đơn giản biểu thức.
  b) Nếu xuất phát từ vế đơn giản ta cần thực hiện việc phân tích véc-tơ.
- HƯỚNG 2. Biến đổi cả hai vế thành một véc-tơ hoặc biểu thức véc-tơ.
- HƯỚNG 3. Biến đổi đẳng thức cần chứng minh tương đương với một đẳng thức véc-tơ đã biết đúng.
- HƯỚNG 4. Xuất phát từ một đẳng thức véc-tơ đã biết đúng biến đổi thành đẳng thức véc-tơ cần chứng minh.

Khi thực hiện các phép biến đổi cần lưu ý

a) *Quy tắc ba điểm:* Với ba điểm A, B, C bất kì ta luôn có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.

b) *Quy tắc hình bình hành:* Với hình bình hành $ABCD$ ta luôn có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

c) *Quy tắc hiệu véc-tơ:* Với ba điểm A, B, O bất kì ta luôn có $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$.

d) *Tính chất trung điểm của đoạn thẳng:* Cho đoạn thẳng AB ta có

$$\begin{aligned} I \text{ là trung điểm của } AB &\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}, M \text{ là điểm bất kì.} \end{aligned}$$

e) *Tính chất trọng tâm tam giác:* Cho tam giác ABC ta có

$$\begin{aligned} G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC &\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}. \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}, M \text{ là điểm bất kì .} \end{aligned}$$

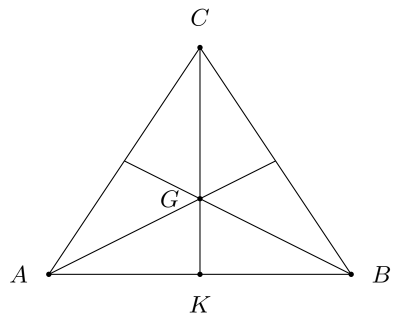
f) *Các tính chất của phép cộng, trừ véc-tơ và phép nhân một số với một véc-tơ.*

1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC với trọng tâm G. Chứng minh rằng $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{CG}$.

Lời giải.

Gọi K là trung điểm của AB thì $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CK}$. (1)
Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{CG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CK}$, tức là $3\overrightarrow{CG}=2\overrightarrow{CK}$. (2)
Từ (1) và (2) ta có $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{CG}$.



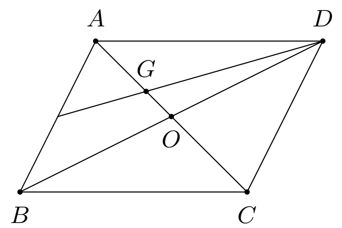
□

Ví dụ 5. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=9\overrightarrow{AG}.$$

Lời giải.
Vì $ABCD$ là hình bình hành nên ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.
Suy ra

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD} &= \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+2\overrightarrow{AC}\\ &= \overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AC}. \qquad (1)\end{aligned}$$

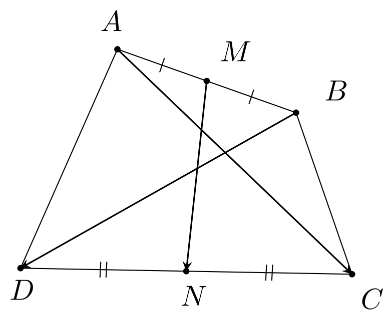


Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$.
Vì G là trọng tâm tam giác ABD nên ta có $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Suy ra $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}$. (2)
Từ (1) và (2) ta có $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=9\overrightarrow{AG}$. □

Ví dụ 6. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB và CD. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MN}$.

Lời giải.
Cách 1. Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}&=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC},\\ \overrightarrow{BD}&=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND}.\end{aligned}$$



Cộng hai đẳng thức trên theo vế ta được:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD} &= 2\overrightarrow{MN}+\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}\right)+\left(\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}\right)\\ &= 2\overrightarrow{MN}.\end{aligned}$$

(Vì $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}$).
Cách 2. Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}&=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN},\\ \overrightarrow{MN}&=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DN}.\end{aligned}$$

Cộng hai đẳng thức trên theo vế ta được

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{MN} &= \left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}\right)+\left(\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}\right)+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\\ &= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}.\end{aligned}$$

(Vì $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}$).

Ta cũng có đẳng thức $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{MN}$. Học sinh chứng minh tương tự.

□

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC. Lần lượt lấy các điểm M, N, P trên các đoạn thẳng AB, BC và CA sao cho $AM = \frac{1}{3}AB$, $BN = \frac{1}{3}BC$, $CP = \frac{1}{3}CA$. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}.$$

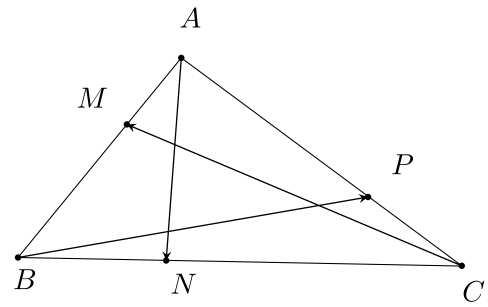
Lời giải.

Ta có

$$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}. \quad (4.1)$$

$$\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}. \quad (4.2)$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}. \quad (4.3)$$



Từ (1), (2) và (3) ta suy ra

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} - \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) \\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \frac{4}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) \\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \frac{4}{3}\vec{0} \\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 8. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Gọi M là một điểm bất kì. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$.

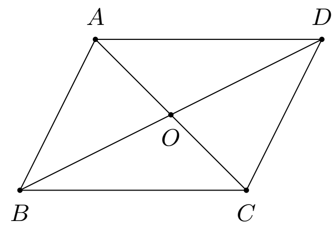
Lời giải.

a) Chứng minh $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

Vì O là trung điểm của AC và BD nên ta có

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0},$$
$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}.$$

Do đó $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.



b) Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA},$$
$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB},$$
$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC},$$
$$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}.$$

Suy ra $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO} + \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$.
Theo ý a) ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.
Vậy $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$ với M là điểm bất kì.

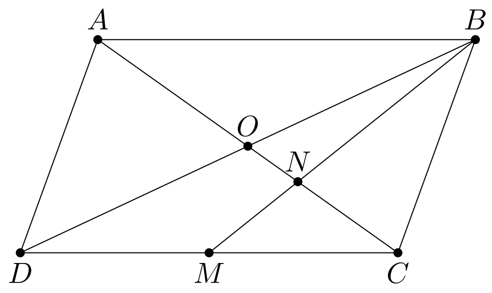
□

Ví dụ 9. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm CD. Lấy N trên đoạn BM sao cho $BN = 2MN$. Chứng minh rằng

a) $3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{MN}$,

b) $4\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{AN}$.

Lời giải.



a) Ta có

$$VT = 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{CD} = 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD}. \qquad (1)$$
$$VP = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND} = \overrightarrow{CD}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $VT = VP$.

b) Ta có N thuộc đoạn BM và $BN = 2MN$ nên N là trọng tâm của tam giác BCD.
Ta có

$$\begin{aligned} VP &= 3\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC}. \\ VT &= 4\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BD} \\ &= 2\overrightarrow{AB} + 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) \\ &= 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} \\ &= 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} \\ &= 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = 2\overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

Vậy $4\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{AN}$

□

2. Bài tập áp dụng

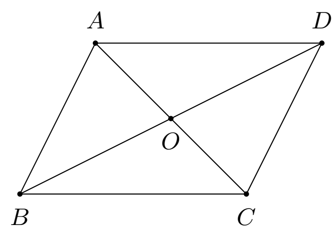
Bài 4. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{OD}.$$

Lời giải.

Ta có

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{OD}.$$



□

Bài 5. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và $A'B'C'$. Chứng minh rằng
$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}.$$

Lời giải.

Áp dụng quy tắc ba điểm, ta có
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA'} &= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{GA'},\\ \overrightarrow{BB'} &= \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{GB'},\\ \overrightarrow{CC'} &= \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{GC'}.\end{aligned}$$

Suy ra $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'} + \left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}\right) + \left(\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'}\right)$.
Vì G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và $A'B'C'$ nên ta có
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} &= \vec{0},\\ \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} &= \vec{0}.\end{aligned}$$

Vậy $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$. □

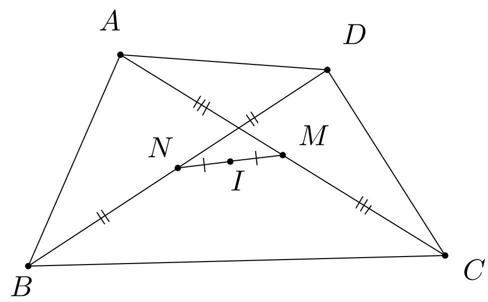
Bài 6. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của AC, BD và MN. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$,

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OI}$ (với O là điểm bất kì).

Lời giải.

a) Vì M, N lần lượt là trung điểm của AC và BD nên ta có



$$\begin{aligned}\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} &= 2\overrightarrow{IM},\\ \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} &= 2\overrightarrow{IN}.\end{aligned}$$

Suy ra
$$\begin{aligned}\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} &= \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}\right) + \left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID}\right)\\ &= 2\left(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN}\right).\end{aligned}$$
Mặt khác I là trung điểm của MN nên $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0}$.
Vậy $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2\vec{0} = \vec{0}$.
b) Với điểm O bất kì ta có
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} &= 2\overrightarrow{OM},\\ \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} &= 2\overrightarrow{ON},\\ \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} &= 2\overrightarrow{OI}.\end{aligned}$$

Do đó
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} &= \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) + \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\right)\\ &= 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON}\\ &= 2\left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}\right)\\ &= 4\overrightarrow{OI}.\end{aligned}$$

□

Bài 7. Cho tam giác ABC không vuông. Gọi G, H, O lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi D là điểm đối xứng của A qua O và M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh

a) $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$.

b) $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$.

c) $\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{OA}$.

d) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$.

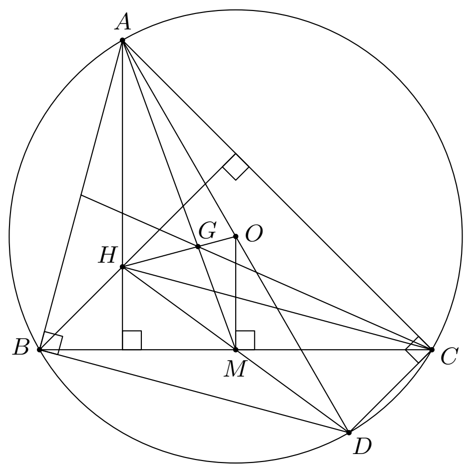
e) $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$.

f) $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OM}$.

Lời giải.

a) Chứng minh $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$.

Ta có $BH \parallel CD$ (vì cùng vuông góc với AC).
Và $BD \parallel CH$ (vì cùng vuông góc với AB).
Suy ra $BDCH$ là hình bình hành.
Vậy $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$ (quy tắc hình bình hành).



b) Chứng minh $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$.
Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC} &= \overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HD} \text{ (theo ý trên)}\\ &= 2\overrightarrow{HO} \text{ (vì } O \text{ là trung điểm của } AD).\end{aligned}$$

c) Chứng minh $\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{OA}$.
Ta có

$$\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HA}-\left(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}\right)=\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{DA}=2\overrightarrow{OA}.$$

d) Chứng minh $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$.
Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} &= 3\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC} \text{ (Quy tắc 3 điểm)}\\ &= 3\overrightarrow{OH}+2\overrightarrow{HO} \text{ (theo ý (2))}\\ &= \overrightarrow{OH}.\end{aligned}$$

e) Chứng minh $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$.
Theo ý (4) ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$.
Mặt khác, G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$.
Suy ra $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$.

f) Chứng minh $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OM}$.
Trong tam giác AHD, ta có OM là đường trung bình nên $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OM}$.

□

Bài 8. Dựng bên ngoài tứ giác $ABCD$ các hình bình hành $ABEF$, $BCGH$, $CDIJ$, $DAKL$.

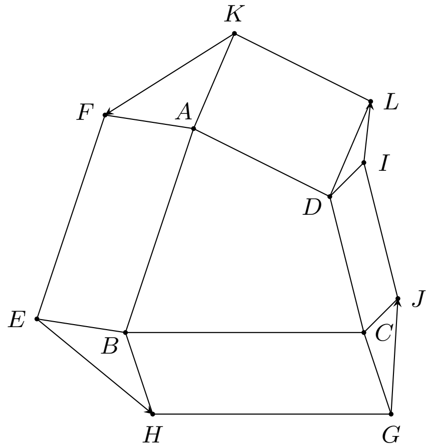
a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{KF}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{IL}=\vec{0}$.

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{EL} - \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{FK} - \overrightarrow{GJ}$.

Lời giải.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{KF} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{IL} = \vec{0}$.

Ta có



$$\overrightarrow{KF} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AF}. \quad (1)$$
$$\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BH}. \quad (2)$$
$$\overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CJ}. \quad (3)$$
$$\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DL}. \quad (4)$$

Cộng vế theo vế của (1), (2), (3), (4) ta được

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{KF} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{IL}\\ = \ &\underbrace{(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{DL})}_{\vec{0}} + \underbrace{(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{AF})}_{\vec{0}} + \underbrace{(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{GC})}_{\vec{0}} + \underbrace{(\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{ID})}_{\vec{0}}.\end{aligned}$$

Suy ra $\overrightarrow{KF} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{IL} = \vec{0}$ (đpcm).

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{EL} - \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{FK} - \overrightarrow{GJ}$.
Ta có

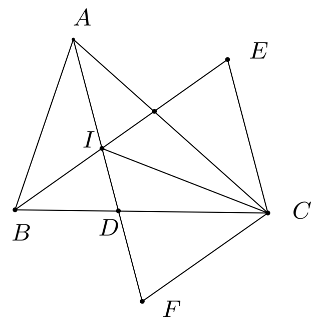
$$\begin{aligned}\overrightarrow{EL} - \overrightarrow{HI} &= \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DL} - \left(\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DI}\right)\\ &= \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{DL} - \left(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{DI}\right) \left(\text{vì } BCGH \text{ là hình bình hành nên } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HG}\right)\\ &= \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AK} - \left(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CJ}\right)\\ &= \overrightarrow{FK} - \overrightarrow{GJ}.\end{aligned}$$

(Vì $ABEF$, $ADLK$, $CDIJ$ là các hình bình hành nên $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{DL} = \overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{CJ}$.) □

Bài 9. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC có $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Chứng minh rằng

$$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

Lời giải.



Qua C dựng đường thẳng song song với IA, cắt đường thẳng BI tại E.
Qua C dựng đường thẳng song song với IB, cắt đường thẳng AI tại F.
$IECF$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF}$. (1).
Gọi D là giao điểm của AI và BC. Vì $ID \parallel CE$ và AD là đường phân giác nên ta có

$$\frac{BI}{IE} = \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \overrightarrow{IE} = -\frac{b}{c}\overrightarrow{IB}. \quad (2)$$

Tương tự ta chứng minh được $\overrightarrow{IF} = -\dfrac{a}{c}\overrightarrow{IA}$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra

$$\overrightarrow{IC} = -\frac{b}{c}\overrightarrow{IB} - \frac{a}{c}\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

Bài tập tương tự: Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng

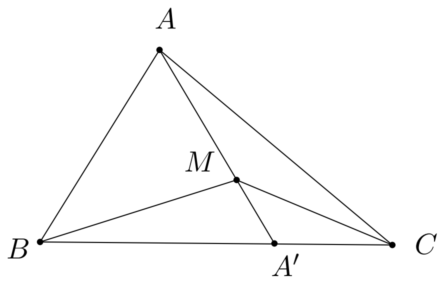
$$\sin A \cdot \overrightarrow{IA} + \sin B \cdot \overrightarrow{IB} + \sin C \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

□

Bài 10. Cho tam giác ABC và một điểm M bất kì nằm trong tam giác ABC. Đặt $S_{MBC} = S_a$, $S_{MCA} = S_b$, $S_{MAB} = S_c$. Chứng minh rằng

$$S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

Lời giải.



Gọi A' là giao điểm của đường thẳng MA với BC.

Ta có $\overrightarrow{MA'} = \dfrac{A'C}{BC}\overrightarrow{MB} + \dfrac{A'B}{BC}\overrightarrow{MC}$.

Mà $\dfrac{A'C}{A'B} = \dfrac{S_{MA'C}}{S_{MA'B}} = \dfrac{S_{MAC}}{S_{MAB}} = \dfrac{S_b}{S_c}$ nên

$$\frac{A'C}{BC} = \frac{S_b}{S_b + S_c}, \ \frac{A'B}{BC} = \frac{S_c}{S_c + S_b}.$$

Suy ra $\overrightarrow{MA'} = \dfrac{S_b}{S_b + S_c}\overrightarrow{MB} + \dfrac{S_c}{S_b + S_c}\overrightarrow{MC}$. (1)

Mặt khác

$$\frac{MA'}{MA} = \frac{S_{MA'B}}{S_{MAB}} = \frac{S_{MA'C}}{S_{MAC}} = \frac{S_{MA'B} + S_{MA'C}}{S_{MAB} + S_{MAC}} = \frac{S_a}{S_b + S_c} \Rightarrow \overrightarrow{MA'} = \frac{-S_a}{S_b + S_c}\overrightarrow{MA}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được

$$-S_a\overrightarrow{MA} = S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

□

a) *Cho M trùng với trọng tâm G của tam giác ABC, ta được $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.*

b) *Cho M trùng với tâm đường tròn nội tiếp I của tam giác ABC, ta được kết quả*

$$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

c) *Nếu tam giác ABC đều thì với điểm M bất kì trong tam giác, Ta có*

$$x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC} = \vec{0},$$

trong đó x, y, z lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA và AB.

d) *Khi M nằm ngoài tam giác ABC, ta có các kết quả như sau*

(a) *Nếu M thuộc góc $\widehat{BAC}$ và góc đối đỉnh của nó thì*

$$-S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

(b) *Nếu M thuộc góc $\widehat{ABC}$ và góc đối đỉnh của nó thì*

$$S_a\overrightarrow{MA} - S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

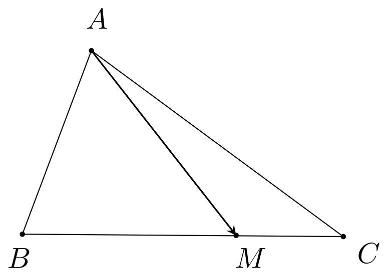
(c) *Nếu M thuộc góc $\widehat{ACB}$ và góc đối đỉnh của nó thì*

$$S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} - S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

3. Bài tập điền khuyết

Câu 41. Cho tam giác ABC. Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Biết rằng $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AM}$. Tìm x.
Đáp án: ☐

Lời giải.



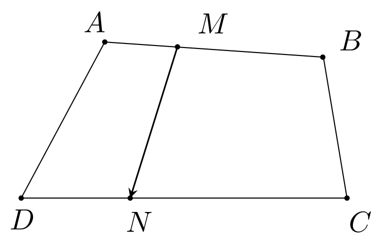
$$M \text{ là điểm thuộc cạnh } BC \text{ và } MB = 2MC \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MC}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = -2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM})$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AM}.$$

□

Câu 42. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB, CD sao cho $MB = 2MA$ và $NC = 2ND$. Biết rằng $2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = x\overrightarrow{MN}$. Tìm x.
Đáp án: ☐

Lời giải.
Vì M, N lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB, CD sao cho $MB = 2MA$ và $NC = 2ND$ nên ta có $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ và $2\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$.

Áp dụng quy tắc ba điểm, ta có



$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}. \qquad (1)$$
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$$
$$\Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CN}. \qquad (2)$$

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta được

$$3\overrightarrow{MN} = \left(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) + 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \left(2\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN}\right)$$
$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

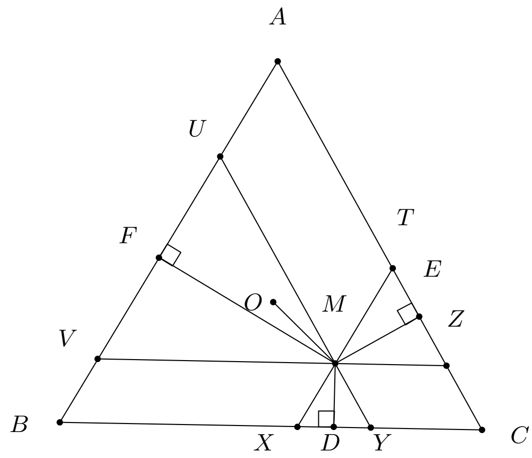
□

Câu 43. Cho tam giác đều ABC tâm O. Lấy M là một điểm bất kì trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của M trên BC, CA, AB. Biết rằng $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = x\overrightarrow{MO}$, tìm x.
Đáp án: ☐

Lời giải.

Qua điểm M dựng

- đường thẳng song song với BC, cắt các cặp đường thẳng AB, AC tại V, Z;
- đường thẳng song song với AB, cắt các cặp đường thẳng AC, BC tại T, X;
- đường thẳng song song với BC, cắt các cặp đường thẳng AB, AC tại V, Z.



Ta thấy các tứ giác $MTAU$, $MVBX$, $MYCZ$ là các hình bình hành và các điểm D, E, F tương ứng là trung điểm của XY, ZT, UV.
Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MX}+\overrightarrow{MY}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MZ}+\overrightarrow{MT}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MU}+\overrightarrow{MV}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MT}+\overrightarrow{MU}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MV}+\overrightarrow{MX}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MY}+\overrightarrow{MZ}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}.\end{aligned}$$

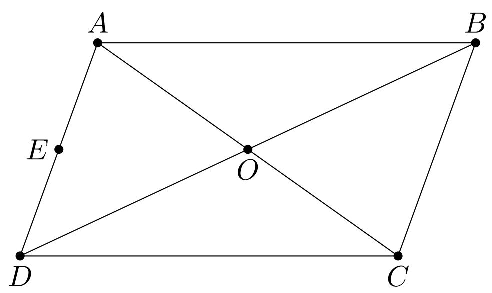
□

Câu 44. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O và E là trung điểm AD. Tìm các số thực x và y biết rằng

a) $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{EC}=x\overrightarrow{AB}$. **Đáp án:** □

b) $\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{EA}+4\overrightarrow{ED}=y\overrightarrow{EC}$. **Đáp án:** □

Lời giải.



a) Theo tính chất trung điểm ta có $4\overrightarrow{EO}=2\overrightarrow{AB}$.
Khi đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{EC} &= \overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{EC}\\ &= \overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{EC}\\ &= 2\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC}\right)+\overrightarrow{AB}\\ &= 4\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{AB}\\ &= 2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{EA}+4\overrightarrow{ED} &= \overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{EA}+4\overrightarrow{ED}\\ &= \overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{ED}+2\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{ED}\right)\\ &= \left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{ED}\right)+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{EC}.\end{aligned}$$

□

Câu 45. Cho tam giác ABC. Dựng bên ngoài tam giác các hình bình hành $ABIF$, $BCPQ$, $CARS$. Biết rằng $\overrightarrow{RF}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{PS}=x(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$. Tìm x.

Đáp án: ☐

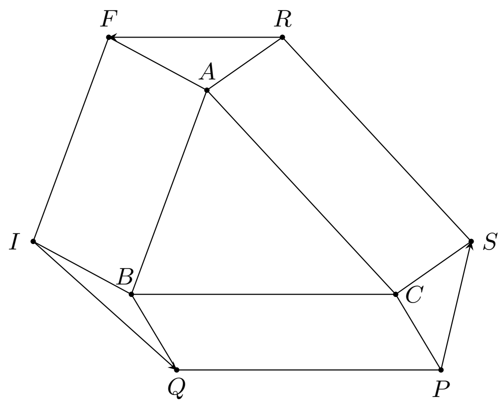
Lời giải.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{RF}=\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{AF} & (1)\\ \overrightarrow{IQ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BQ} & (2)\\ \overrightarrow{PS}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CS}. & (3)\end{cases}$

Cộng vế theo vế của (1), (2), (3), ta được

$\overrightarrow{RF}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{PS}=\underbrace{(\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{CS})}_{\vec{0}}+\underbrace{(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{IB})}_{\vec{0}}+\underbrace{(\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{PC})}_{\vec{0}}.$

Suy ra $\overrightarrow{RF}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{PS}=\vec{0}$.



□

4. Bài tập trắc nghiệm

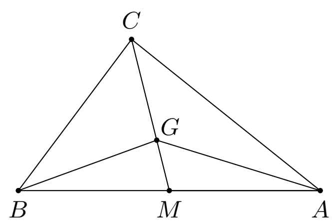
Câu 46. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi M là trung điểm AB. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

Ⓐ $\overrightarrow{CM}=-3\overrightarrow{MG}$.
Ⓑ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{AC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}$.
Ⓓ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$, O là điểm bất kì.

Lời giải.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên ta có

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$$



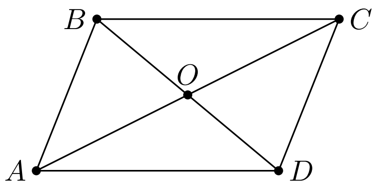
Chọn đáp án B □

Câu 47. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$.

Lời giải.

Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
Mặt khác O là trung điểm AC nên $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO}$.
Vậy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$.



Chọn đáp án B □

Câu 48. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Với điểm M bất kỳ, ta luôn có

A. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}$. B. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$. C. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MI}$. D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MI}$.

Lời giải.

Áp dụng tính chất trung điểm của đoạn thẳng: Với điểm M bất kỳ, ta luôn có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.
Chọn đáp án B □

Câu 49. Cho G là trọng tâm của tam giác ABC. Với mọi điểm M, ta luôn có:

A. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG}$.
B. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}$.
C. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.
D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG}$.

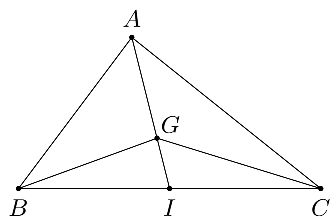
Lời giải.

Áp dụng tính chất trọng tâm của tam giác: Với mọi điểm M, ta luôn có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.
Chọn đáp án C □

Câu 50. Cho $\triangle ABC$ có G là trọng tâm, I là trung điểm BC. Đẳng thức nào đúng?

A. $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GI}$. B. $\overrightarrow{IG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$. C. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$. D. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$.

Lời giải.



Áp dụng tính chất trung điểm của đoạn thẳng, ta có $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.
Chọn đáp án C □

Câu 51. Khẳng định nào sau đây **không phải** là điều kiện cần và đủ để G là trọng tâm ΔABC, với M là trung điểm của BC và O là điểm bất kì?

A. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.
B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + 3\overrightarrow{OG} = \vec{0}$.
C. $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$.
D. $\overrightarrow{GM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$.

Lời giải.

Xét khẳng định $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + 3\overrightarrow{OG} = \vec{0}$, ta có
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + 3\overrightarrow{OG} = \vec{0} \Leftrightarrow 6\overrightarrow{OG} = \vec{0} \Leftrightarrow G \equiv O$ với mọi điểm O (vô lí).
Vậy khẳng định $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + 3\overrightarrow{OG} = \vec{0}$ không phải là điều kiện cần và đủ để G là trọng tâm ΔABC.
Chọn đáp án B □

Câu 52. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Với M là một điểm bất kỳ, tìm đẳng thức **đúng**.

(A) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$. (B) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MI}$. (C) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}$. (D) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{IM}$.

Lời giải.

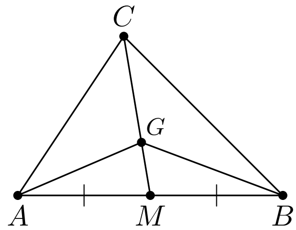
Áp dụng tính chất trung điểm.

Chọn đáp án (A) □

Câu 53. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và M là trung điểm của AB. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

(A) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
(B) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GM}$.
(C) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.
(D) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

Lời giải.



- Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
- Vì M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GM}$. ($G$ có thể tùy ý)
- Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$. ($M$ có thể tùy ý)
- $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ là mệnh đề **sai**.

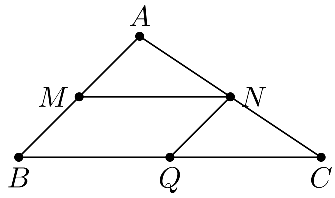
Chọn đáp án (C) □

Câu 54. Cho $\triangle ABC$ có M, Q, N lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Khi đó véc-tơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{BQ}$ là véc-tơ nào sau đây?

(A) $\vec{0}$. (B) $\overrightarrow{BC}$. (C) $\overrightarrow{AQ}$. (D) $\overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

Ta có



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{BQ} &= \overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BQ}\\ &= \overrightarrow{NM}+\overrightarrow{BQ}\\ &= \vec{0}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 55. Cho $\triangle ABC$ và điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IA}=3\overrightarrow{IB}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

(A) $\overrightarrow{CI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}-\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$. (B) $\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{CB}$. (C) $\overrightarrow{CI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$. (D) $\overrightarrow{CI}=3\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$.

Lời giải.

Ta có

$$\overrightarrow{IA}=3\overrightarrow{IB}\Leftrightarrow \overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CI}=3(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CI})\Leftrightarrow \overrightarrow{CI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 56. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

(A) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$ với mọi điểm M.
(B) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
(C) $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GA}$.
(D) $3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

- Theo tính chất trọng tâm tam giác ta có $\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}$.

- Ta có $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}$. Suy ra mệnh đề $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GA}$ là mệnh đề sai.
- Các mệnh đề còn lại **đúng**.

Chọn đáp án C □

Câu 57. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Nếu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.

B. Nếu O là trung điểm của AB thì với mọi M ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MO}$.

C. Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{AG}$.

D. Với 3 điểm bất kì I, J, K ta có $\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{IK}$.

Lời giải.

Khẳng định "Nếu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ thì $ABCD$ là hình bình hành" là phương án **sai** trong trường hợp bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng.

Chú ý.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow\begin{cases}A,\ B,\ C \text{ không thẳng hàng}\\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A,\ B,\ C \text{ không thẳng hàng}\\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}.\end{cases}$

Chọn đáp án A □

Câu 58. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}$.

B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AD}$.

D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BD}$.

Lời giải.

Theo qui tắc hình hình hành ta có

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}.$$

Do đó

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 59. Cho tam giác ABC biết I là trung điểm của đoạn thẳng AB, G là trọng tâm tam giác, M là điểm bất kỳ. Hãy chọn khẳng định **đúng**.

A. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG}$.

B. $\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$.

C. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MI}$.

D. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

Lời giải.

- Vì $\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{BC}$ nên phương án $\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$ là phương án **sai**.
- Vì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ nên phương án $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MI}$ là phương án **sai**.
- Theo quy tắc trọng tâm tam giác ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

Chọn đáp án D □

Câu 60. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Hỏi đẳng thức nào **đúng**?

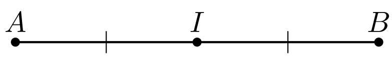
A. $2\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}$.

B. $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}$.

C. $\overrightarrow{AI}-2\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{IB}$.

D. $\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}$.

Lời giải.



Ta có:

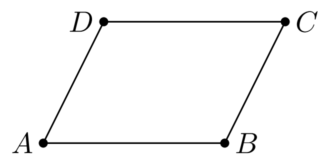
- $\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}=\vec{0}$ nên $\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ đúng.
- $2\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$ nên $2\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ là phương án **sai**.
- $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{BA}\neq\vec{0}$ nên $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ là phương án **sai**.
- $\overrightarrow{AI}-2\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IB}=3\overrightarrow{IB}\neq\overrightarrow{IB}$ nên $\overrightarrow{AI}-2\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{IB}$ là phương án **sai**.

Chọn đáp án D

Câu 61. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=\vec{0}$. B. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$. C. $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}$. D. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BC}$.

Lời giải.



- $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ **sai** vì $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$ không cùng phương.
- $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$ là phương án **sai**.
- Vì $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$ nên $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}$ là phương án **sai**.
- $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)=2\overrightarrow{BC}+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)=2\overrightarrow{BC}+\vec{0}=2\overrightarrow{BC}$.

Chọn đáp án D

Câu 62. Cho G là trọng tâm tam giác ABC và I là trung điểm cạnh BC. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{GI}$. B. $\overrightarrow{IG}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AI}$. C. $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GI}$. D. $\overrightarrow{GA}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.

Lời giải.

Ta thấy mệnh đề sai là mệnh đề $\overrightarrow{GA}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.

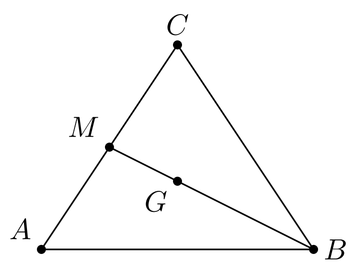
Chọn đáp án D

Câu 63. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và M là trung điểm cạnh AC. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $BG=\dfrac{2}{3}BM$. B. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{BG}$. C. $\overrightarrow{MG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BM}$. D. $GM=\dfrac{1}{2}GB$.

Lời giải.

Do M là trung điểm là AC và G là trọng tâm của $\triangle ABC$
nên $BG=\dfrac{2}{3}BM$; $MG=\dfrac{1}{3}BM$ và $GM=\dfrac{1}{2}GB$.
Mặt khác $\overrightarrow{MG}$ và $\overrightarrow{BM}$ ngược hướng; $\overrightarrow{GM}$ và $\overrightarrow{BG}$ cùng hướng
nên $\overrightarrow{MG}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BM}$; $\overrightarrow{GM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BG}$.
Do M là trung điểm AC nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{BG}$.



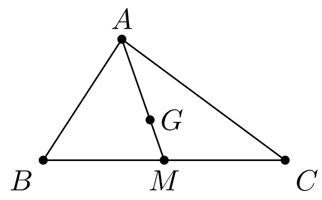
Chọn đáp án C

Câu 64. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của BC và G là trọng tâm của tam giác ABC. Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{GM}$. B. $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GM}=\vec{0}$. C. $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AG}$. D. $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}$.

Lời giải.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có $GA = 2GM$.
Suy ra $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GM} \Rightarrow \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GM} = \vec{0}$.



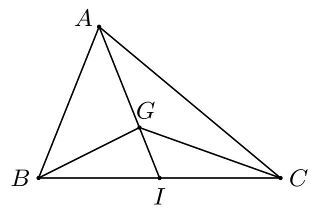
Chọn đáp án (B) □

Câu 65. Cho G là trọng tâm tam giác ABC, gọi I là trung điểm của BC. Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

(A) $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GI}$. (B) $\overrightarrow{IG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$. (C) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$. (D) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$.

Lời giải.

Vì I là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 66. Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Hãy chọn hệ thức đúng.

(A) $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}$. (B) $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.
(C) $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$. (D) $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.

Lời giải.

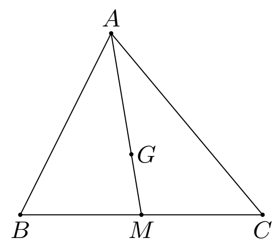
Ta có $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 67. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của BC và G là trọng tâm của tam giác ABC. Đẳng thức nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GM}$. (B) $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GM} = \vec{0}$. (C) $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AG}$. (D) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$.

Lời giải.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có $GA = 2GM$.
$\Rightarrow \overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GM} \Rightarrow \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GM} = \vec{0}$.



Chọn đáp án (B) □

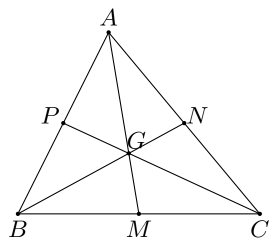
Câu 68. Ba trung tuyến AM, BN, CP của tam giác ABC đồng quy tại G. Hỏi véc-tơ $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}$ bằng véc-tơ nào?

(A) $\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{CG}\right)$. (B) $3\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{NG} + \overrightarrow{GP}\right)$.
(C) $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}\right)$. (D) $\vec{0}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BG}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CG}\\ &= \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}\right)\\ &= \vec{0}.\end{aligned}$$



Chọn đáp án D □

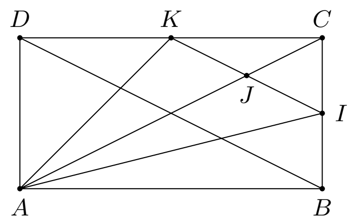
Câu 69. Cho hình chữ nhật $ABCD$, I và K lần lượt là trung điểm của BC, CD. Hệ thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AC}$.
B. $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.
C. $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{IK}$.
D. $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Gọi J là giao điểm của AC và KI.

Ta có $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AJ}=2\cdot\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.



Chọn đáp án D □

Câu 70. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của cạnh BC. Các điểm D, E thỏa mãn các đẳng thức: $\overrightarrow{BD}=4\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}$.
B. $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{6}\overrightarrow{DE}$.
C. $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}$.
D. $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DE}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BD}=4\overrightarrow{BA}$, suy ra $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{BA}$ hay $\overrightarrow{AD}=-3\overrightarrow{AB}$. Khi đó

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AB}=3\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)=6\overrightarrow{AM}.$$

Vậy $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{6}\overrightarrow{DE}$.

Chọn đáp án B □

Câu 71. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N là trung điểm AB và DC. Lấy các điểm P, Q lần lượt thuộc các đường thẳng AD và BC sao cho $\overrightarrow{PA}=-2\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{QB}=-2\overrightarrow{QC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$.
B. $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}$.
C. $\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$.
D. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NA}\right)$.

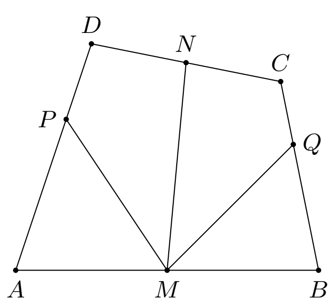
Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$ (1)

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}$ (2)

Cộng theo vế (1) và 2) ta được

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{DN}\\ &= \vec{0}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}+\vec{0}\\ &= \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$



Vậy $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$.

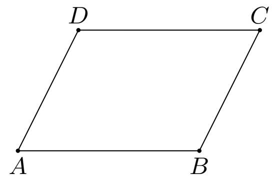
Chọn đáp án (A) □

Câu 72. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào đúng?
(A) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BC}$. (B) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$. (C) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{CD}$. (D) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\\ &= 2\overrightarrow{BC}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})\\ &= 2\overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

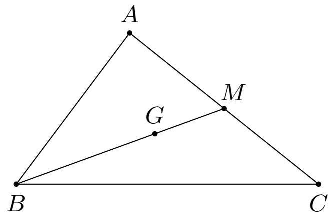


Chọn đáp án (A) □

Câu 73. Cho G là trọng tâm của tam giác ABC. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng?
(A) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$. (B) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BG}$.
(C) $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CG}$. (D) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của AC.
Ta có
$$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BM}=2\cdot\frac{3}{2}\overrightarrow{BG}=3\overrightarrow{BG}.$$



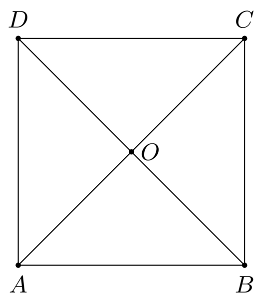
Chọn đáp án (B) □

Câu 74. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **sai**?
(A) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}$. (B) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.
(C) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$. (D) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=4\overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\\ &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\\ &= 2\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$



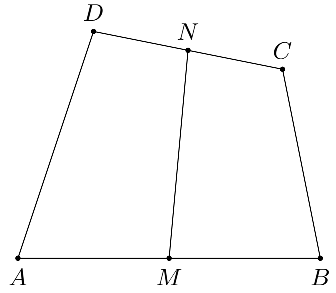
Chọn đáp án (D) □

Câu 75. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Khi đó $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$ bằng
(A) $\overrightarrow{MN}$. (B) $2\overrightarrow{MN}$. (C) $3\overrightarrow{MN}$. (D) $-2\overrightarrow{MN}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}\\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DN}\end{cases}\Rightarrow 2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}.$$



Chọn đáp án (B) □

Câu 76. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O và điểm M bất kì. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MO}$.

(B) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MO}$.

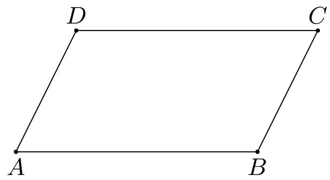
(C) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=3\overrightarrow{MO}$.

(D) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}&=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC})+(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD})\\&=2\overrightarrow{MO}+2\overrightarrow{MO}\\&=4\overrightarrow{MO}.\end{aligned}$$



Chọn đáp án (D) □

Câu 77. Cho năm điểm A, B, C, D, E. Khẳng định nào đúng?

(A) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EC}=2\left(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}\right)$.

(B) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EC}=3\left(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}\right)$.

(C) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EC}=\dfrac{\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}}{4}$.

(D) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}\\ \Leftrightarrow\ &\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}\right)+\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}\right)-\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}.\end{aligned}$$

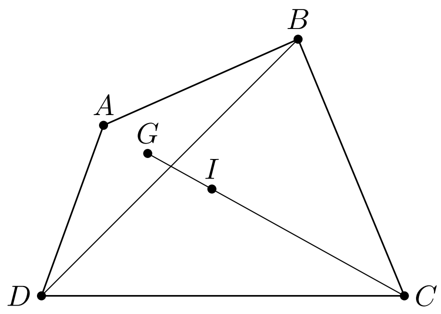
Chọn đáp án (D) □

Câu 78. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD, I là điểm trên GC sao cho $IC=3IG$. Với mọi điểm M ta luôn có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$ bằng

(A) $2\overrightarrow{MI}$. (B) $3\overrightarrow{MI}$. (C) $4\overrightarrow{MI}$. (D) $5\overrightarrow{MI}$.

Lời giải.

Ta có $3\overrightarrow{IG} = -\overrightarrow{IC}$.
Do G là trọng tâm của tam giác ABD nên



$$\begin{aligned} & \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = 3\overrightarrow{IG} \\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = -\overrightarrow{IC} \\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \\ = & \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID} \\ = & 4\overrightarrow{MI} + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}) \\ = & 4\overrightarrow{MI} + \vec{0} = 4\overrightarrow{MI}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 79. Cho tam giác ABC. Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho $MA = 2MB$ và N là trung điểm của AC. Gọi P là trung điểm của MN. Khi đó

A. $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. C. $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

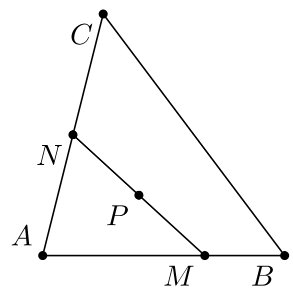
Vì P là trung điểm của MN nên $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}\right)$. (1)

VÌ N là trung điểm của AC nên $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. (2)

Ta có M thuộc cạnh AB sao cho $MA = 2MB$ nên suy ra $MA = \frac{2}{3}AB$.

Do đó $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. (3)

Từ (1), (2), (3) ta có $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.



Chọn đáp án D □

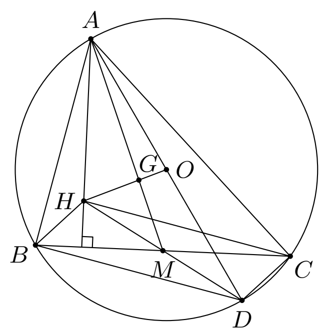
Câu 80. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi H, G lần lượt là trực tâm, trọng tâm của tam giác. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\overrightarrow{OH} = 4\overrightarrow{OG}$. B. $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$. C. $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OG}$. D. $3\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OG}$.

Lời giải.

Gọi D là điểm đối xứng với A qua O. Ta có

$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HO}. \qquad (1)$$



Vì $HBDC$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}$. (2)
Từ (1), (2) suy ra

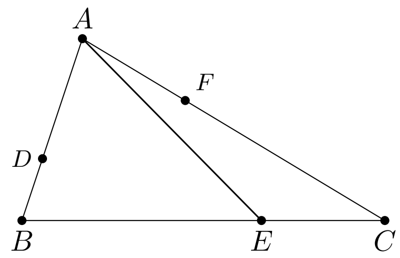
$$\begin{aligned} & \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO} \\ \Leftrightarrow & (\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OC}) = 2\overrightarrow{HO} \\ \Leftrightarrow & 3\overrightarrow{HO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 2\overrightarrow{HO} \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{HO} \\ \Leftrightarrow & 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 81. Cho $\triangle ABC$. Trên các cạnh AB, BC và CA lấy các điểm D, E, F sao cho $DA = 2DB$, $EB = 2EC$, $FC = 2FA$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây.

Ⓐ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.



Vì $DA = 2DB$ nên $AD = \frac{2}{3}AB \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Tương tự $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Khi đó

$$\begin{aligned} VT &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \\ &= \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = VP. \end{aligned}$$

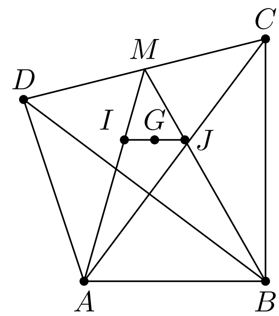
Vậy $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 82. Cho tứ giác $ABCD$ và điểm G thảo mãn $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} + k\overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm tam giác các ACD, BCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh CD, AB. Tìm k sao cho G là trung điểm của IJ.

Ⓐ $k = 1$.
Ⓑ $k = 2$.
Ⓒ $k = 3$.
Ⓓ $k = 4$.

Lời giải.



Vì I, J lần lượt là trọng tâm tam giác các ACD, BCD nên

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GI},$$
$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GJ}.$$

Cộng vế theo vế hai đẳng thức véc-tơ trên ta được

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GD} = 3\left(\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ}\right).$$

Nhưng G là trung điểm của IJ nên $\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ} = \vec{0}$. Do đó $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Vậy $k = 2$.

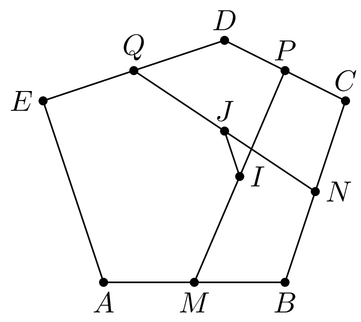
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 83. Cho ngũ giác $ABCDE$ có M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của MP, NQ. Biết $\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{EA}$, tìm k.

Ⓐ $k = -\frac{1}{2}$.
Ⓑ $k = \frac{1}{2}$.
Ⓒ $k = -\frac{1}{4}$.
Ⓓ $k = \frac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có



$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{IN}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IC}\right)\\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}\\ &= -\frac{1}{4}\overrightarrow{EA}.\end{aligned}$$

Vậy $k = -\dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án C □

Dạng 3. Xác định điểm thỏa mãn đẳng thức véc-tơ

Bài toán: Xác định điểm M thỏa đẳng thức véc-tơ cho trước

- Bước 1. Ta biến đổi đẳng thức đã cho (bằng chèn điểm, quy tắc ba điểm, qui tắc hình bình hành, tính chất trung điểm, trọng tâm,...) về dạng: $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$. Trong đó điểm O và véc-tơ $\vec{v}$ cho trước.
- Bước 2. Nếu muốn dựng điểm M, ta lấy điểm O làm gốc, dựng một véc-tơ bằng véc-tơ $\vec{v}$, khi đó điểm ngọn của véc-tơ này chính là điểm M.

- *Lưu ý 1. Thông thường, biểu thức $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$ là những biểu thức đặc biệt (trung điểm, trọng tâm, điểm chia đoạn thẳng theo tỉ lệ $\vec{a} = k\vec{b}$, hình bình hành,... Ta dựa vào biểu thức này để dựng.*
- *Lưu ý 2. Một số cách chứng minh thường dùng.*
  - *Để chứng minh I là trung điểm của đoạn thẳng AB, ta cần chứng minh một trong các hệ thức sau*
    + $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$.
    + $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
    + $2\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AB}$.
    + $2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ *(O bất kì).*
  - *Để chứng minh điểm G là trọng tâm của $\triangle ABC$, ta cần chứng minh một trong các hệ thức sau*
    + $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
    + *Với I là trung điểm của cạnh BC thì* $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.
    + *Với O là điểm bất kì trong mặt phẳng thì:* $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
  - *Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành* $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}\\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.\end{array}\right.$
  - *Để chứng minh hai điểm A_1 và A_2 trùng nhau ta có thể chứng minh một trong các hệ thức sau*
    + $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{0}$.
    + $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2}$ *với O là điểm bất ỳ.*
  - *Điều kiện cần và đủ để $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có cùng trọng tâm là*

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}.$$

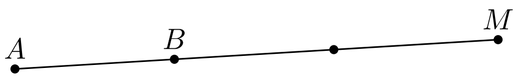
  - *Nếu* $\overrightarrow{MB} = k \cdot \overrightarrow{MC}$ $(k \neq 1)$ *thì* $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\overrightarrow{AB} - k \cdot \overrightarrow{AC}}{1-k}$ *(hay điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k \neq 1$).*

1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 10. Cho hai điểm A và B. Xác định điểm M thỏa mãn $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Lời giải.

Ta có $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MA} - 3\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) = -\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$.
Khi đó điểm M được xác định như sau:



- M nằm trên đường thẳng AB và nằm ngoài đoạn AB, gần B. Hai véc-tơ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng.
- Độ dài $AM = 3AB$, nghĩa là điểm B chia AM ra 3 đoạn bằng nhau.

□

Ví dụ 11. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AB và N thuộc cạnh AC, sao cho $NC = 2NA$. Hãy xác định K và D khi

a) $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{AK} = \vec{0}$.

b) $3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{KD} = \vec{0}$.

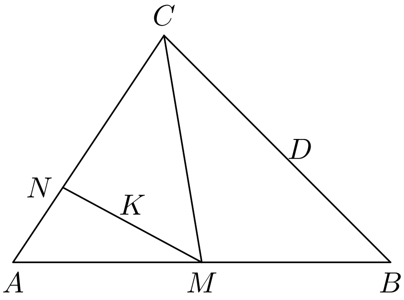
Lời giải.

a) **Xác định điểm K thỏa mãn** $3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}-12\overrightarrow{AK}=\vec{0}$ (1)

Theo giả thiết thì

$$\begin{cases} AB=2AM \\ \overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AM}\end{cases}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AM} \quad (2).$$

và $\begin{cases} AC=3AN \\ \overrightarrow{AC}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AN}\end{cases}\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AN}$ (3)



Thay (2) và (3) vào (1) ta được: $6\overrightarrow{AM}+6\overrightarrow{AN}-12\overrightarrow{AK}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\right)$.

Suy ra K là trung điểm của MN.

b) **Xác định điểm D thỏa mãn** $3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}-12\overrightarrow{KD}=\vec{0}$ (4)

Ta có $\overrightarrow{KD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AK}$ (5). Mà theo (4) suy ra $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ (6)

Thay (6) vào (5) ta được: $\overrightarrow{KD}=\overrightarrow{AD}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ (7)

Thay (7) vào (4) ta được

$$3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}-12\left(\overrightarrow{AD}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).$$

Suy ra D là trung điểm của BC.

□

Ví dụ 12. Cho hình bình hành $ABCD$.

a) Hãy dựng các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}-\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BA}$.

Lời giải.

a) **Dựng điểm** M **thỏa:** $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AD}$.
Ta có $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$
Do $ABCD$ là hình bình hành nên: $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AC}\Rightarrow C$ là trung điểm của CM.

b) **Dựng điểm M thỏa:**$\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}-\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$.
Ta có

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}-\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\\ \Leftrightarrow&\left(\overrightarrow{NC}-\overrightarrow{NA}\right)+\overrightarrow{ND}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)-\overrightarrow{AC}\\ \Leftrightarrow&\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{ND}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}\\ \Leftrightarrow&\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Suy ra N là đỉnh thứ tư của hình bình hành $DACN$.

c) Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BA}$.
Ta có $DACN$ là hình bình hành (câu b) bên $NC=DA$.
Mà $ABCD$ là hình bình hành (giả thiết) nên $DA=BC$.
Suy ra $NC=NB\Rightarrow C$ là trung điểm BN.
Suy ra tứ giác $ABMN$ là hình bình hành (do dó 2 đường chéo NB và AM cắt nhau tại trung điểm của mỗi dường) Suy ra $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BA}$.

□

Ví dụ 13. Cho trước hai điểm A, B và hai số thực α, β thỏa mãn $\alpha+\beta\neq 0$

a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I thỏa mãn $\alpha\cdot\overrightarrow{IA}+\beta\cdot\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

b) Từ đó suy ra với điểm M bất kỳ, ta luôn có: $\alpha\cdot\overrightarrow{MA}+\beta\cdot\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\cdot\overrightarrow{MI}$.

Lời giải.

a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I thỏa mãn $\alpha\cdot\overrightarrow{IA}+\beta\cdot\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.
Ta có

$$\begin{aligned}
&\alpha\cdot\overrightarrow{IA}+\beta\cdot\overrightarrow{IB}=\vec{0}\\
\Leftrightarrow&\alpha\cdot\overrightarrow{IA}+\beta\cdot\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)=\vec{0}\\
\Leftrightarrow&(\alpha=\beta)\cdot\overrightarrow{IA}+\beta\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{0}\\
\Leftrightarrow&(\alpha+\beta)\cdot\overrightarrow{AI}=\beta\cdot\overrightarrow{AB}\\
\Rightarrow&\overrightarrow{AI}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\cdot\overrightarrow{AB}.
\end{aligned}$$

Vì A, B cố định nên véc-tơ $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\cdot\overrightarrow{AB}$ không đổi, do đó tồn tại duy nhất điểm I thỏa mãn đề bài.

b) Từ đó suy ra với điểm M bất kỳ, ta luôn có: $\alpha\cdot\overrightarrow{MA}+\beta\cdot\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\cdot\overrightarrow{MI}$.
Ta có

$$\begin{aligned}
\alpha\cdot\overrightarrow{MA}+\beta\cdot\overrightarrow{MB}&=\alpha\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+\beta\cdot\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)\\
&=(\alpha+\beta)\cdot\overrightarrow{MI}+\left(\alpha\cdot\overrightarrow{IA}+\beta\cdot\overrightarrow{IB}\right)\\
&=(\alpha+\beta)\cdot\overrightarrow{MI}.
\end{aligned}$$

Vậy $\alpha\cdot\overrightarrow{MA}+\beta\cdot\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\cdot\overrightarrow{MI}$, $\forall M$ (đpcm).

□

Lời bình 3

- *Nếu $\alpha=\beta=1$ thì điểm I chính là trung điểm của AB.*
- *Bài toán trên được mở rộng cho ba điểm A, B, C và bộ 3 số thực α, β, γ cho trước thỏa mãn $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$, nghĩa là:*
  - *Tồn tại điểm I duy nhất thỏa mãn $\alpha\cdot\overrightarrow{IA}+\beta\cdot\overrightarrow{IB}+\gamma\cdot\overrightarrow{IC}=\vec{0}$*
  - *Từ đó suy ra với điểm M bất kỳ, ta luôn có $\alpha\cdot\overrightarrow{IA}+\beta\cdot\overrightarrow{IB}+\gamma\cdot\overrightarrow{IC}=(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\overrightarrow{MI}$. Khi $\alpha=\beta=\gamma=1$ thì I là trọng tâm của $\triangle ABC$.*
- *Bài toán trên vẫn đúng với n điểm A_i $(i=\overline{1,n})$ và bộ số thực α_i $(i=\overline{1,n})$ thỏa mãn $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$*
- *Kết quả trên dùng giải bài toán "Cho n điểm A_i, $i=\overline{1,n}$ và bộ số thực α_i, $i=\overline{i,n}$ thỏa mãn $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$. Tìm số thực k và điểm cố định I sao cho đẳng thức véc-tơ $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}=k\cdot\overrightarrow{MI}$ thỏa mãn với mọi điểm M".*

2. Bài tập áp dụng

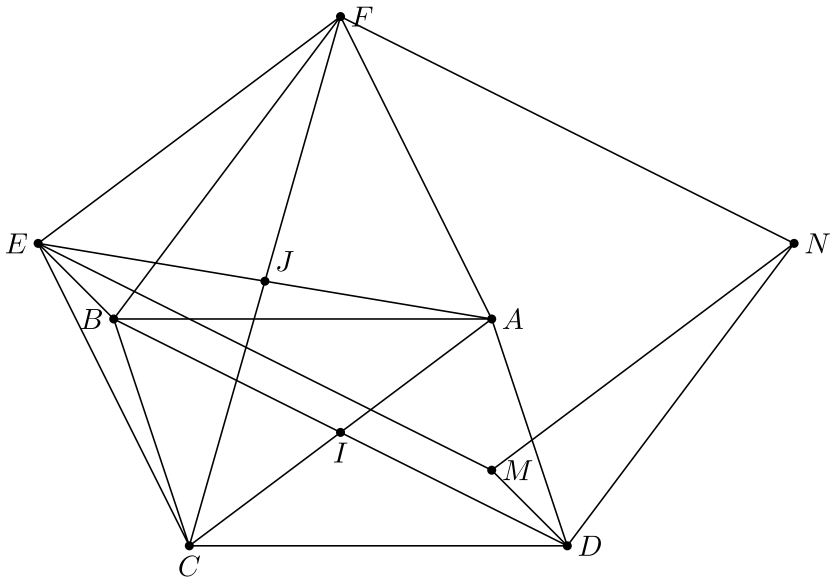
Bài 11. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ACEF$.

a) Dựng các điểm M, N sao cho $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{FN} = \overrightarrow{BD}$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MN}$.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{BD}$ suy ra $EMDB$ là hình bình hành.
Ta có $\overrightarrow{FN} = \overrightarrow{BD}$ suy ra $FNDB$ là hình bình hành.



b) Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CA}$.

□

Bài 12. Cho tam giác ABC.

a) Chứng minh với mọi điểm M, ta luôn có $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$.

b) Hãy dựng điểm D sao cho $\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{CB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$ luôn thỏa, với mọi điểm M.

b) Mọi điểm trong mặt phẳng đều thỏa bài toán.

□

Bài 13. Cho tứ giác $ABCD$, M là điểm tùy ý. Trong mỗi trường hợp hãy tìm số k và điểm cố định I, J, K sao cho đẳng thức véc-tơ sau thỏa mãn với mọi điểm M.

a) $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k \cdot \overrightarrow{MI}$.

b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2 \cdot \overrightarrow{MC} = k \cdot \overrightarrow{MJ}$.

c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3 \cdot \overrightarrow{MD} = k \cdot \overrightarrow{MK}$

Lời giải.

a) **Tìm k thỏa mãn** $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=k\cdot\overrightarrow{MI}$.
Vì $2\cdot\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=k\cdot\overrightarrow{MI}$ (1) thỏa với mọi M, do đó nó cũng đúng với $M\equiv I$.
Khi đó $2\cdot\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=k\cdot\overrightarrow{II}=\vec{0}$ (2)
Ta có (2) $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA}+\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}\Rightarrow I$ được xác định. Nó nằm trên đường thẳng AB, ngoài đoạn AB, véc-tơ $\overrightarrow{IA}$ ngược chiều với véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và có độ dài lớn hơn $IA=\dfrac{1}{3}AB$.
Từ (2) ta có $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=(2+1)\overrightarrow{MI}=3\overrightarrow{MI}$ (3) (áp dụng lời bình 3 và $M\equiv I$)
Từ (1), (3) $\Rightarrow 3\overrightarrow{MI}=k\cdot\overrightarrow{MI}\Rightarrow k=3$.

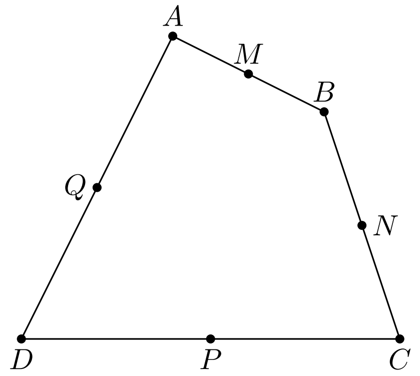
b) **Tìm k thỏa:** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\cdot\overrightarrow{MC}=k\cdot\overrightarrow{MJ}$.
Vì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=k\cdot\overrightarrow{MJ}$ (4) thỏa với mọi M, do đó nó cũng đúng với $M\equiv I$.
Khi đó $\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}+2\overrightarrow{JC}=k\cdot\overrightarrow{IJ}=\vec{0}$ (5)
Gọi E là trung điểm của AB, từ (5) $\Rightarrow 2\overrightarrow{JE}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{JE}+\overrightarrow{JC}=\vec{0}\Rightarrow J$ là trung điểm của CE.
Từ (5), ta được $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=(1+1+2)\overrightarrow{MJ}=4\overrightarrow{MJ}$ (6)
Từ (4) và (6) suy ra $k\overrightarrow{MJ}=4\overrightarrow{MJ}\Rightarrow k=4$.

c) **Tìm k thỏa**$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+3\cdot\overrightarrow{MD}=k\cdot\overrightarrow{MK}$
Vì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}=k\overrightarrow{MK}$ (7) thỏa mãn với mọi điểm M nên ns đúng với $M\equiv K$.
Khi đó $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}+3\overrightarrow{KD}=k\cdot\overrightarrow{KD}=\vec{0}$ (8) Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$, từ (8) $\Leftrightarrow 3\overrightarrow{KG}+3\overrightarrow{KD}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{KG}=\overrightarrow{KD}\Rightarrow K$ là trung điểm của GD.
Từ (8), ta được $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}=(1+1+1+3)\overrightarrow{MK}=6\overrightarrow{MK}$ (9).
Từ (7), (9) $\Rightarrow k\cdot\overrightarrow{MK}=6\cdot\overrightarrow{MK}\Rightarrow k=6$.

□

Bài 14. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh $\triangle ANP$ và $\triangle CMQ$ có cùng trọng tâm.

Lời giải.



Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của $\triangle ANP$, $\triangle CMQ$, O là một điểm tùy ý.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=3\overrightarrow{OG_1}\\ \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OQ}=3\overrightarrow{OG_2}.\end{cases}$ (1)

Mặc khác $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)$.

$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OC}+\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}\right)=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $\overrightarrow{OG_1}=\overrightarrow{OG_2}\Rightarrow G_1\equiv G_2\Rightarrow\triangle ANP$ và $\triangle CMQ$ có cùng trọng tâm (đpcm).

□

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 84. Cho điểm A và véc-tơ $\vec{u}$. Có bao nhiêu điểm M thoả mãn $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$?
(A) Duy nhất một. (B) Hai. (C) Không có. (D) Vô số.

Lời giải.

Có duy nhất điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$.
Chọn đáp án (A)

□

Câu 85. Cho hình bình hành $ABCD$, điểm M thỏa mãn $4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$. Khi đó M là

A trung điểm AC. **B** điểm C. **C** trung điểm AB. **D** trung điểm AD.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Khi đó $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$. Từ đó ta có

$$4\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG}.$$

Vậy điểm M là trung điểm của AC.

Chọn đáp án A □

Câu 86. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ và không cùng phương. Biết hai véc-tơ $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + (x-1)\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là

A $\frac{1}{2}$. **B** $-\frac{3}{2}$. **C** $-\frac{1}{2}$. **D** $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Hai véc-tơ $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + (x-1)\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{x-1}{-3} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 87. Cho hai điểm phân biệt A, B và hai số thực α, β khác 0 thoả mãn $\alpha + \beta = 0$. Có bao nhiêu điểm M thoả mãn $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0}$?

A 0. **B** 1. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.

Ta có $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \alpha\overrightarrow{MA} - \alpha\overrightarrow{MB} = \alpha\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) = \alpha\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ (Vô lí vì $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ và $\alpha \neq 0$).
Vậy không có điểm M nào thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án A □

Câu 88. Cho ba điểm không thẳng hàng A, B, C và M là điểm thoả mãn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CM}$. Chọn khẳng định đúng.

A $ABMC$ là hình bình hành. **B** $ABCM$ là hình bình hành.
C M là trọng tâm của tam giác ABC. **D** CM là trung tuyến của tam giác ABC.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CM} \Rightarrow \begin{cases} AB \parallel CM \\ AB = CM \end{cases} \Rightarrow ABMC$ là hình bình hành.

Chọn đáp án A □

Câu 89. Cho hai điểm phân biệt A, B và hai số thực α, β thoả mãn $\alpha + \beta \neq 0$. Có bao nhiêu điểm M thoả mãn $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0}$?

A 0. **B** 1. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\vec{0}\\
&\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{MA}+(-\alpha+\beta+\alpha)\,\overrightarrow{MB}=\vec{0}\\
&\Leftrightarrow \alpha\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)+(\beta+\alpha)\,\overrightarrow{MB}=\vec{0}\\
&\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{BA}+(\beta+\alpha)\,\overrightarrow{MB}=\vec{0}.\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{MB}=-\frac{\alpha}{\beta+\alpha}\overrightarrow{BA}.
\end{aligned}$$

Vậy có 1 điểm M nào thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án (B) □

Câu 90. Cho hai điểm phân biệt A và B. Điều kiện cần và đủ để I là trung điểm của đoạn thẳng AB là

(A) $IA=IB$. (B) $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$. (C) $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IB}$. (D) $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{BI}$.

Lời giải.

Ta có I là trung điểm AB khi và chỉ khi $IA=IB$ và $\overrightarrow{IA}$ ngược hướng $\overrightarrow{IB}$ hay $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 91. Cho tam giác ABC, điểm I là trung điểm BC. Điểm G có tính chất nào sau đây thì G là trọng tâm tam giác ABC?

(A) $\overrightarrow{GI}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AI}$. (B) $GA=2GI$.

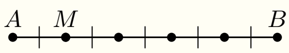
(C) $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$. (D) $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GI}$.

Lời giải.

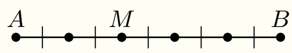
Ta có G là trọng tâm tam giác ABC suy ra $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow -\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{CG}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$.

Chọn đáp án (C) □

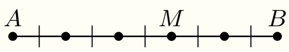
Câu 92. Cho đoạn thẳng AB, hình nào sau đây biểu diễn đúng điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.



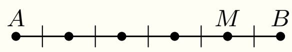
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

(A) Hình 1. (B) Hình 2. (C) Hình 3. (D) Hình 4.

Lời giải.

$\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow 5\overrightarrow{AM}=4\overrightarrow{AB}$.

Suy ra M nằm trên tia AB và $AM=\dfrac{4}{5}AB$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 93. Cho đoạn thẳng AB có trung điểm I. Tìm điểm M thỏa mãn $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

(A) M trùng với I. (B) M là trung điểm của BI.

(C) M là trung điểm của AI. (D) M trùng với A hoặc M trùng với B.

Lời giải.

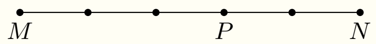
Do I là trung điểm của đoạn thẳng AB nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.

Ta có

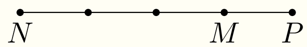
$$\begin{aligned} & 3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0} \\ \Leftrightarrow\ & 2\overrightarrow{MA}+\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)=\vec{0} \\ \Leftrightarrow\ & 2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MI}=\vec{0} \\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MI}=\vec{0}. \end{aligned}$$

Vậy M là trung điểm của IA.
Chọn đáp án C

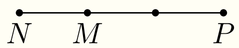
Câu 94. Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN}=-3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định trong hình vẽ nào sau đây?



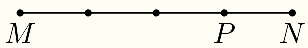
Hình 1



Hình 3



Hình 2

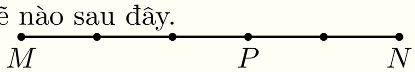


Hình 4

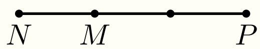
A. Hình 1.
B. Hình 2.
C. Hình 3.
D. Hình 4.

Lời giải.
Ta có $\overrightarrow{MN}=-3\overrightarrow{MP}$ nên M nằm giữa N, P và $MN=3MP$.
Chọn đáp án C

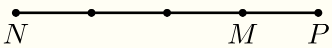
Câu 95. Trên đuường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN}=-3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định đúng theo hình vẽ nào sau đây.

A. 

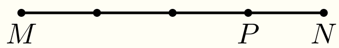
.

B. 

.

C. 

.

D. 

.

Lời giải.
Vì $\overrightarrow{MN}=-3\overrightarrow{MP}$ nên $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$ ngược hướng và $MN=3MP$.
Chọn đáp án C

Câu 96. Cho tam giác ABC với I là trung điểm của AB. Tìm điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

A. M là trung điểm của IC.
B. M là trung điểm của IA.
C. M là điểm trên cạnh IC sao cho $IM=2MC$.
D. M là trung điểm của BC.

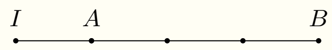
Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0} \\ \Leftrightarrow\ & 2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0} \\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}. \end{aligned}$$

Suy ra M là trung điểm của IC.
Chọn đáp án A

Câu 97.

Đẳng thức nào sau đây mô tả đúng hình vẽ bên?



Ⓐ $3\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.   Ⓑ $3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Ⓒ $\overrightarrow{BI} + 3\overrightarrow{BA} = \vec{0}$.   Ⓓ $\overrightarrow{AI} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Lời giải.

Hai vec-tơ $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng và $AB = 3AI$ nên đẳng thức mô tả đúng hình vẽ là $3\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 98. Trong mặt phẳng Oxy, tam giác ABC có trọng tâm G là điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+6\overrightarrow{AG} = 6\overrightarrow{AM}$. Vị trí của điểm M là

Ⓐ M là trung điểm của AC.

Ⓑ M là trung điểm của BC.

Ⓒ M là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$.

Ⓓ M là trung điểm của AB.

Lời giải.

Vì G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}.$$

Do đó $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 6\overrightarrow{AG} = 6\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = 6\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.

Suy ra M là trung điểm của BC.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 99. Cho tam giác ABC. Để điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ thì M phải thỏa mãn

Ⓐ M là trọng tâm tam giác ABC.

Ⓑ M là điểm sao cho tứ giác $ABMC$ là hình bình hành.

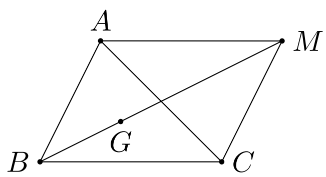
Ⓒ M thuộc trung trực của AB.

Ⓓ M là điểm sao cho tứ giác $BAMC$ là hình bình hành.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AM}$.

Vậy $BAMC$ là hình bình hành.



Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 100. Cho tứ giác $ABCD$ và M là điểm thoả $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$. Chọn khẳng định đúng.

Ⓐ M là giao điểm hai đường chéo của tứ giác $ABCD$.

Ⓑ M là giao điểm của các đoạn thẳng nối hai trung điểm hai cạnh đối diện của tứ giác $ABCD$.

Ⓒ M là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.

Ⓓ M là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$.

Lời giải.

Gọi E, F lần lượt là trung điểm AB, CD.

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0} \\
\Leftrightarrow\ & 2\overrightarrow{ME}+2\overrightarrow{MF}=\vec{0} \\
\Leftrightarrow\ & M \text{ là trung điểm } EF.
\end{aligned}$$

Tương tự nếu gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AD, BC thì ta cũng có M là trung điểm PQ. Khi đó M cũng chính là giao điểm của EF và PQ.

Chọn đáp án (B) □

Câu 101. Cho tam giác ABC, gọi M là điểm thoả mãn $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Khi đó,

(A) $ABCM$ là hình bình hành.
(B) $ABMC$ là hình bình hành.
(C) $ABCM$ là hình bình thang có đáy lớn AM.
(D) $ABCM$ là hình bình thang có đáy lớn BC.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0} \\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{BC}=\vec{0} \\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{BC}.
\end{aligned}$$

Khi đó $ABCM$ là hình thang với đáy lớn AM.

Chọn đáp án (C) □

Câu 102. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC và $A'B'C'$. Tìm điều kiện cần và đủ để $G \equiv G'$.

(A) $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}+3\overrightarrow{GG'}=\vec{0}$.
(B) $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}$.
(C) $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}-3\overrightarrow{G'G}=\vec{0}$.
(D) $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{G'G}$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{G'G}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'C'}=3\overrightarrow{G'G}$
$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG})+(\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'})+3\overrightarrow{GG'}=3\overrightarrow{G'G}$
$\Leftrightarrow \vec{0}+\vec{0}+3\overrightarrow{GG'}=3\overrightarrow{G'G} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{GG'}=3\overrightarrow{G'G} \Leftrightarrow \overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{G'G} \Leftrightarrow G \equiv G'$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 103. Cho tam giác ABC có I là trung điểm BC. Gọi M là điểm thoả mãn $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Xác định vị trí của điểm M.

(A) M là trọng tâm tam giác ABC.
(B) M là trung điểm AI.
(C) M là điểm thuộc đoạn thẳng AI thoả $MA=2MI$.
(D) M là điểm thuộc đoạn thẳng AI thoả $MI=2MA$.

Lời giải.

Ta có $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MI}=\vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MF}=\vec{0} \Leftrightarrow M \equiv F$ với F là trung điểm AI.

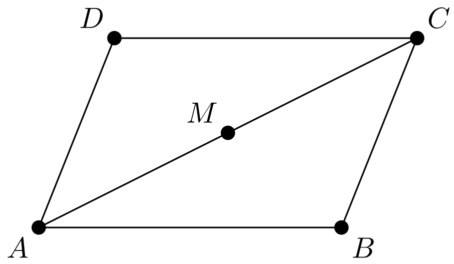
Chọn đáp án (B) □

Câu 104. Cho hình bình hành $ABCD$, điểm M thỏa $4\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$. Khi đó điểm M là

(A) trung điểm AC.
(B) điểm C.
(C) trung điểm AB.
(D) trung điểm AD.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AM}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\dfrac{\overrightarrow{AC}}{2}$.
Từ đó suy ra M là trung điểm của AC.



Chọn đáp án (A) □

Câu 105. Cho tam giác ABC. Gọi D,E là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Gọi K là trung điểm của DE và M xác định bởi $\overrightarrow{BM}=x\overrightarrow{BC}$. Tìm giá trị thực của x sao cho A,K,M thẳng hàng.

(A) $\dfrac{3}{8}$. (B) $-\dfrac{4}{3}$. (C) $\dfrac{8}{3}$. (D) $-\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AK}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+x\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=(1-x)\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{AC}$
Do đó A,K,M thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AK}$ cùng phương
$\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AK}\Leftrightarrow(1-x)\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{AC}=\dfrac{k}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{k}{5}\overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1-x=\dfrac{k}{3}\\ x=\dfrac{k}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\dfrac{15}{8}\\ x=\dfrac{3}{8}\end{cases}.$$

Vậy $x=\dfrac{3}{8}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 106. Cho tam giác ABC. Gọi D là trung điểm cạnh AC và I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) I là trực tâm tam giác BCD.
(B) I là trọng tâm tam giác ABC.
(C) I là trọng tâm tam giác CDB.
(D) I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IC}=2(\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC})=\vec{0}$.
Khi đó I là trọng tâm tam giác BCD.

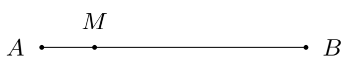
Chọn đáp án (C) □

Câu 107. Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm nằm trên đường thẳng AB sao cho $\overrightarrow{MA}=-\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AB}$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) $\overrightarrow{MB}=-4\overrightarrow{MA}$. (B) $\overrightarrow{MB}=-\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AB}$. (C) $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AB}$. (D) $\overrightarrow{MA}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{MB}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MA}=-\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{AB}=-\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{MB}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AB}$.
Vậy mệnh đề "$\overrightarrow{MB}=-\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AB}$" là sai.



Chọn đáp án (B) □

Câu 108. Cho tam giác ABC. Hãy xác định vị trí điểm M thỏa mãn $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Ⓐ M thuộc cạnh AB và $AM = 2MB$.
Ⓑ M trên AB và ngoài đoạn AB.
Ⓒ M là trung điểm AB.
Ⓓ M không thuộc đoạn AB.

Lời giải.

Ta có $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{MB}$.

Khi đó M không thuộc đoạn AB sao cho $\overrightarrow{MA} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{MB}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 109. Cho tam giác ABC, N là trung điểm AB, M là điểm thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Kết luận nào dưới đây đúng?

Ⓐ M đối xứng với C qua A.
Ⓑ A đối xứng với M qua C.
Ⓒ C đối xứng với A qua M.
Ⓓ M là điểm tùy ý.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Suy ra A là trung điểm MC hay M đối xứng với C qua A.

Chọn đáp án (A) □

Câu 110. Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$. Tìm vị trí điểm M.

Ⓐ M là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$.
Ⓑ M là trung điểm của AB.
Ⓒ M là trung điểm của BC.
Ⓓ M là trung điểm của AC.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của BC.

Ta có $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Suy ra MI song song và bằng một nửa AB, mà I là trung điểm BC nên M phải là trung điểm của AC.

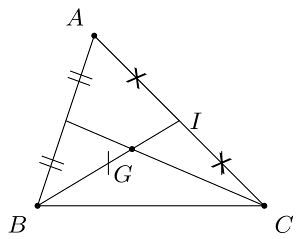
Chọn đáp án (D) □

Câu 111. Cho tam giác ABC, I là trung điểm AC. Vị trí điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CB}$ xác định bởi hệ thức

Ⓐ $\overrightarrow{BN} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BI}$.
Ⓑ $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{BI}$.
Ⓒ $\overrightarrow{BN} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BI}$.
Ⓓ $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BI}$.

Lời giải.

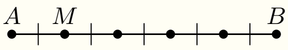
Ta có



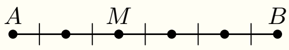
$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{CB}\\
\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IN}+2\overrightarrow{IB}-2\overrightarrow{IN}=\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}\\
\Leftrightarrow\ &3\overrightarrow{IN}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IB}\\
\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{IN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IB}.\quad (\text{Do } \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=\vec{0})\\
\Leftrightarrow\ &3\overrightarrow{BN}-3\overrightarrow{BI}=-\overrightarrow{BI}\\
\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{BN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BI}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

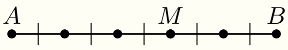
Câu 112. Cho đoạn thẳng AB, hình nào sau đây biểu diễn đúng điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.



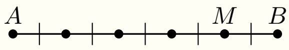
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

(A) Hình 1. (B) Hình 2. (C) Hình 3. (D) Hình 4.

Lời giải.

$\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow 5\overrightarrow{AM}=4\overrightarrow{AB}$.

Suy ra M nằm trên tia AB và $AM=\frac{4}{5}AB$.

Chọn đáp án D □

Câu 113. Cho đoạn thẳng AB có trung điểm I. Tìm điểm M thỏa mãn $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

(A) M trùng với I.
(B) M là trung điểm của BI.
(C) M là trung điểm của AI.
(D) M trùng với A hoặc M trùng với B.

Lời giải.

Do I là trung điểm của đoạn thẳng AB nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.

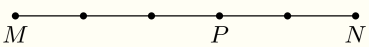
Ta có

$$\begin{aligned}
&3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}\\
\Leftrightarrow\ &2\overrightarrow{MA}+\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)=\vec{0}\\
\Leftrightarrow\ &2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MI}=\vec{0}\\
\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MI}=\vec{0}.
\end{aligned}$$

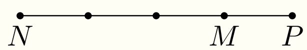
Vậy M là trung điểm của IA.

Chọn đáp án C □

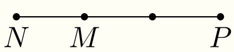
Câu 114. Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN}=-3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định trong hình vẽ nào sau đây?



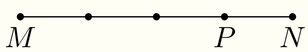
Hình 1



Hình 3



Hình 2



Hình 4

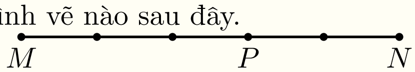
Ⓐ Hình 1. Ⓑ Hình 2. Ⓒ Hình 3. Ⓓ Hình 4.

Lời giải.

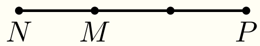
Ta có $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$ nên M nằm giữa N, P và $MN = 3MP$.

Chọn đáp án Ⓒ □

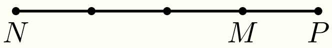
Câu 115. Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định đúng theo hình vẽ nào sau đây.

Ⓐ 

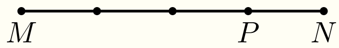
.

Ⓑ 

.

Ⓒ 

.

Ⓓ 

.

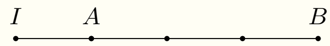
Lời giải.

Vì $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$ nên $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$ ngược hướng và $MN = 3MP$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 116.

Đẳng thức nào sau đây mô tả đúng hình vẽ bên?



Ⓐ $3\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$. Ⓑ $3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Ⓒ $\overrightarrow{BI} + 3\overrightarrow{BA} = \vec{0}$. Ⓓ $\overrightarrow{AI} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Lời giải.

Hai vec-tơ $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng và $AB = 3AI$ nên đẳng thức mô tả đúng hình vẽ là $3\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 117. Trong mặt phẳng Oxy, tam giác ABC có trọng tâm G là điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+6\overrightarrow{AG} = 6\overrightarrow{AM}$. Vị trí của điểm M là

Ⓐ M là trung điểm của AC.

Ⓑ M là trung điểm của BC.

Ⓒ M là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$.

Ⓓ M là trung điểm của AB.

Lời giải.

Vì G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}.$$

Do đó $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 6\overrightarrow{AG} = 6\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = 6\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.

Suy ra M là trung điểm của BC.

Chọn đáp án Ⓑ □

Dạng 4. Biểu diễn véc-tơ theo hai véc-tơ không cùng phương

Đặt vấn đề : Trong dạng toán này, chúng ta giải quyết bài toán dựa vào kiến thức: "Cho trước hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ và không cùng phương. Với mọi véc-tơ $\vec{c}$ ta luôn tìm được một cặp số thực (α, β) duy nhất sao cho $\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$".

Phương pháp giải : Ta có thể chọn 1 trong 2 hướng giải sau

- **Hướng 1**: Từ giả thiết xác định được tính chất hình học, rồi từ đó khai triển véc-tơ cần biểu diễn bằng quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành, tính chất trung điểm, trọng tâm, ...
- **Hướng 2**: Từ giả thiết, ta lập được mối quan hệ véc-tơ giữa các đối tượng, rồi từ đó khai triển

biểu thức bằng quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành, tính chất trung điểm, trọng tâm, ...

1. Ví dụ minh họa

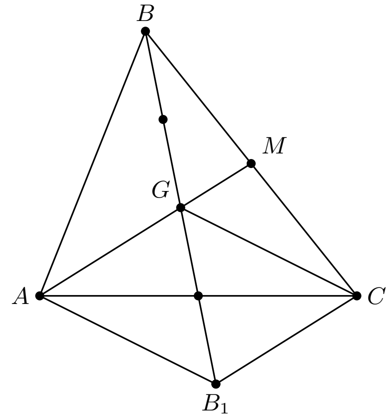
Ví dụ 14. Cho $\triangle ABC$, gọi G là trọng tâm của tam giác và B_1 là điểm đối xứng của B qua G. Gọi M là trung điểm của BC. Hãy biểu diễn các véc-tơ

a) $\overrightarrow{CB_1}$ và $\overrightarrow{AB_1}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) $\overrightarrow{MB_1}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Theo giả thiết thì AB_1CG là hình bình hành.



a) Tính $\overrightarrow{CB_1}$ và $\overrightarrow{AB_1}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

- Ta có $\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{AG} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.
  Mà M là trung điểm của đoạn BC nên

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).$$

  Do đó $\overrightarrow{CB_1} = -\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.

- Mặt khác

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB_1} &= \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}\\ &= \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

b) Tính $\overrightarrow{MB_1}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.
Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MB_1} &= \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AM} = \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right) - \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\\ &= -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

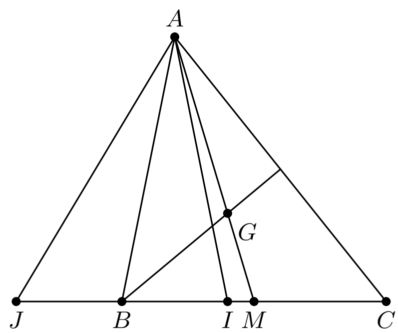
□

Ví dụ 15. Cho $\triangle ABC$. Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI = 3BI$ và J là điểm trên BC kéo dài sao cho $5JB = 2JC$. Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$.

a) Tính $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AJ}$.

Lời giải.



a) Tính các véc-tơ $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.
Do $2CI = 3BI$ và $\overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{IB}$ ngược hướng nên

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{IC} = -3\overrightarrow{IB} &\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI}\right) = -3\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}\right)\\ &\Leftrightarrow 5\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Vậy $\overrightarrow{AI} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.
Do $5JB = 2JC$ và $\overrightarrow{JC}$, $\overrightarrow{JB}$ cùng hướng nên

$$\begin{aligned}5\overrightarrow{JB}=2\overrightarrow{JC} &\Leftrightarrow 5\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AJ}\right)=2\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AJ}\right)\\ &\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AJ}=5\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AJ}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

b) Tính véc-tơ $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AJ}$.

Gọi M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

Do $\begin{cases}\overrightarrow{AI}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AJ}=\dfrac{5}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\dfrac{5}{8}\overrightarrow{AI}+\dfrac{3}{8}\overrightarrow{AJ}\\ \overrightarrow{AC}=\dfrac{25}{16}\overrightarrow{AI}+\dfrac{9}{16}\overrightarrow{AJ}.\end{cases}$

Vậy $\overrightarrow{AG}=\dfrac{35}{48}\overrightarrow{AI}-\dfrac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$.

□

Ví dụ 16. Cho $\triangle ABC$ và hai điểm D, E thỏa mãn $\overrightarrow{DB}=k\cdot\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{EB}=\dfrac{1}{k}\overrightarrow{EC}$ (với $k\neq 1$).

a) Biểu diễn các véc-tơ $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{DE}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Điểm F, I thỏa mãn $\overrightarrow{FA}=k\cdot\overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{IC}=k\cdot\overrightarrow{IA}$. Chứng minh $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$.

Lời giải.

a) Biểu diễn các véctơ $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{DE}$ theo các véctơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

- Tính $\overrightarrow{AD}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

  Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{DB}=k\cdot\overrightarrow{DC}\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=k\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right)$.

  Suy ra $\overrightarrow{AD}=\dfrac{k}{k-1}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{k-1}\overrightarrow{AB}$. (1)

- Tính $\overrightarrow{AE}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

  Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}\\ \overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}\\ \overrightarrow{EB}=\dfrac{1}{k}\overrightarrow{EC}\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}=k\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}\right)$.

  Do đó $\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{k-1}\overrightarrow{AC}+\dfrac{k}{k-1}\overrightarrow{AB}$. (2)

- Tính $\overrightarrow{DE}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

  Ta có $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}$. (3)

  Thay (1), (2) vào (3) và rút gọn, ta được $\overrightarrow{DE}=\dfrac{k+1}{k-1}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$.

b) Điểm F, I thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{FA}=k\cdot\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{IC}=k\cdot\overrightarrow{IA}$. Chứng minh $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$.

- Ta có $\overrightarrow{IC}=k\cdot\overrightarrow{IA}\Rightarrow\overrightarrow{AI}=-\dfrac{1}{k-1}\cdot\overrightarrow{AC}$.

  Mà $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AI}\Rightarrow\overrightarrow{BI}=-\dfrac{1}{k-1}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.

- Từ giả thiết, ta có $\overrightarrow{FA}=k\cdot\overrightarrow{FB}\Rightarrow\overrightarrow{AF}=\dfrac{k}{k-1}\cdot\overrightarrow{AB}$.

  Nên $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AC}=\dfrac{k}{k-1}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

Do đó $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{CF}=\dfrac{k}{k-1}\overrightarrow{AC}+\dfrac{-1}{k-1}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}+\dfrac{k}{k-1}\cdot\overrightarrow{AB}+\dfrac{-1}{k-1}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}$
$\Rightarrow \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$ (đpcm).

□

2. Bài tập áp dụng

Bài 15. Cho $\triangle ABC$ có M, D lần lượt là trung điểm của AB, BC và N là điểm trên cạnh AC sao cho $\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{NC}$. Gọi K là trung điểm của MN. Hãy tính các véc-tơ $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{KD}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AK}=\dfrac{1}{4}\cdot\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{6}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{KD}=\dfrac{1}{4}\cdot\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Bài 16. Cho $\triangle ABC$. Trên hai cạnh AB và AC lấy hai điểm D và E sao cho $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CE}=3\overrightarrow{EA}$. Gọi M, I lần lượt là trung điểm của DE và BC. Hãy tính véc-tơ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MI}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{8}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MI}=\dfrac{1}{6}\cdot\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{8}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Bài 17. Cho $\triangle ABC$, lấy điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NA}+3\overrightarrow{NC}=\vec{0}$, $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0}$. Phân tích $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{PN}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{PM}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PN}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PM}$.

Bài 18. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm là O. Hãy tính các véc-tơ sau theo véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

a) $\overrightarrow{AI}$ với I là trung điểm của $\overrightarrow{BO}$.

$\overrightarrow{AI}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

b) $\overrightarrow{BG}$ với G là trọng tâm $\triangle OCD$.

$\overrightarrow{BG}=-\dfrac{7}{9}\overrightarrow{AB}+\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AD}$.

Bài 19. Cho $\triangle ABC$ có hai đường trung tuyến BN, CP. Hãy biểu thị các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$.

$\overrightarrow{BC}=-\dfrac{2}{3}\cdot\overrightarrow{CP}+\dfrac{2}{3}\cdot\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CA}=\dfrac{2}{3}\cdot\overrightarrow{BN}+\dfrac{4}{3}\cdot\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{AB}=\dfrac{4}{3}\cdot\overrightarrow{BN}+\dfrac{2}{3}\cdot\overrightarrow{CP}$.

Bài 20. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G. Gọi I, J nằm trên cạnh BC và BC kéo dài sao cho $2CI=3BI$, $5JB=2JC$.

a) Tính $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AI}=\dfrac{3}{5}\cdot\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AJ}=\dfrac{5}{3}\cdot\overrightarrow{AB}-\dfrac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Bài 21. Cho $\triangle ABC$ có G là trọng tâm tam giác và I là điểm đối xứng của B qua G. M là trung điểm của BC. Hãy tính $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{CI}$, $\overrightarrow{MI}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AI}=-\dfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CI}=-\dfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MI}=-\dfrac{5}{6}\cdot\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{6}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Bài 22. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm là G và các đường trung tuyến AM, BP. Gọi G' là điểm đối xứng với điểm G qua P.

a) Hãy biểu diễn các véc-tơ $\overrightarrow{AG'}$, $\overrightarrow{CG'}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh hệ thức: $5\overrightarrow{AC}-6\overrightarrow{AB}=6\overrightarrow{MG'}$.

$\overrightarrow{AG'}=\dfrac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CG'}=-\dfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Bài 23. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CD. Hãy biểu diễn các véc-tơ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$. $\overrightarrow{BC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AM} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{CD} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AM} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AN}$.

Bài 24. Cho tứ giác $ABCD$ có M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AD, BC. Hãy biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ và theo $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$.

Bài 25. Cho $\triangle ABC$. Gọi I là điểm đối xứng của trọng tâm G qua B.

a) Chứng minh $\overrightarrow{IA} - 5\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

b) Đặt $\overrightarrow{AG} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AI} = \vec{b}$. Tính $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ theo $\vec{a}$, $\vec{b}$.

$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$, $\overrightarrow{AC} = \frac{5}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

Bài 26. Cho $\triangle ABC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Tính các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$. $\overrightarrow{AB} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{BN} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{CA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BN} + \frac{4}{3}\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BN} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$.

Bài 27. Cho $\triangle ABC$. Gọi I là điểm trên cạnh BC kéo dài sao cho $IB = 3IC$.

a) Tính $\overrightarrow{AI}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

b) Gọi J và K lần lượt là các điểm thuộc cạnh AC, AB sao cho $JA = 2JC$ và $KB = 3KA$. Tính $\overrightarrow{JK}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

c) Tính $\overrightarrow{BC}$ theo $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{JK}$. $\overrightarrow{BC} = -5\overrightarrow{AI} + \frac{21}{2}\overrightarrow{JK}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 118. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của đoạn BC. Tìm mệnh đề đúng.

A. $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

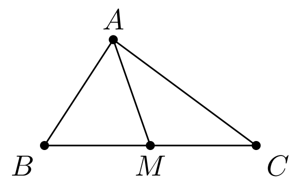
C. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Vì M là trung điểm của BC nên ta có

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$



Chọn đáp án C

Câu 119. Cho hình bình hành $ABCD$, gọi I là trung điểm của CD, đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{BI}$ theo các véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$.

A. $\overrightarrow{BI} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

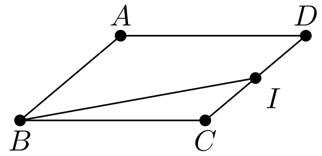
B. $\overrightarrow{BI} = \vec{a} + \vec{b}$.

C. $\overrightarrow{BI} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$.

D. $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$.

Lời giải.

Ta có



$$\begin{aligned}\overrightarrow{BI} &= \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\\ &= -\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 120. Cho tam giác ABC và một điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{BM}=k\overrightarrow{BC}$. Biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{AM}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AM}=(1-k)\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}$.
B. $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}+(1-k)\overrightarrow{AC}$.
D. $\overrightarrow{AM}=(1-k)\overrightarrow{AB}+(1-k)\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{AB}+k\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\\ &= (1-k)\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 121. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là điểm trên cạnh BC được xác định bởi $\overrightarrow{BI}=k\overrightarrow{BC}$ $(k\neq 1)$. Tìm hệ thức liên hệ giữa $\overrightarrow{DI}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$.

A. $\overrightarrow{DI}=(k-1)\overrightarrow{DB}-k\overrightarrow{DC}$.
B. $\overrightarrow{DI}=(1-k)\overrightarrow{DB}+k\overrightarrow{DC}$.
C. $\overrightarrow{DI}=(1+k)\overrightarrow{DB}-k\overrightarrow{DC}$.
D. $\overrightarrow{DI}=(1+k)\overrightarrow{DB}+k\overrightarrow{DC}$.

Lời giải.
Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BI}=k\overrightarrow{BC} &\Leftrightarrow \overrightarrow{DI}-\overrightarrow{DB}=k\left(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB}\right)\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{DI}=(1-k)\overrightarrow{DB}+k\overrightarrow{DC}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 122. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC. Tính $\overrightarrow{AB}$ theo $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
B. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.
C. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
D. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.

Lời giải.
Ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AM}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Chọn đáp án C □

Câu 123. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC, I là trung điểm của AM. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.
B. $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$.
C. $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
D. $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.
Ta có

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 124. Cho tam giác ABC. Hai điểm M, N chia cạnh BC theo ba phần bằng nhau $BM = MN = NC$. Tính $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

(A) $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
(B) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
(C) $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
(D) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \\
&= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) \\
&= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 125. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm tam giác. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

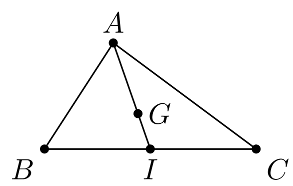
(A) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$.
(B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}$.
(C) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AG}$.
(D) $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AG}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của BC, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$.

Do G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AG}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 126. Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm của BC. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

(A) $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
(B) $2\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
(C) $2\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$.
(D) $2\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

Do M là trung điểm của BC nên ta có

$$\begin{aligned}
2\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\
&= \overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \\
&= 2\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}.
\end{aligned}$$

Từ các phương án đã cho, ta thấy mệnh đề sai là "$2\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$ ".

Chọn đáp án (D) □

Câu 127. Cho $\triangle ABC$ và I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{IB}$. Phân tích $\overrightarrow{CI}$ theo $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$.

(A) $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{CB}\right)$.
(B) $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{CB}$.
(C) $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\left(3\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right)$.
(D) $\overrightarrow{CI} = 3\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CI} &= \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{IB}\\ &= \overrightarrow{CA}-3\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CB}\right)=\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CI}-3\overrightarrow{CB}\\ &= -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{2}\left(3\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right).\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 128. Cho hình bình hành $ABCD$ có N là trung điểm AB và G là trọng tâm $\triangle ABC$. Phân tích $\overrightarrow{GA}$ theo $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{NC}$.

A. $\overrightarrow{GA}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{NC}$.

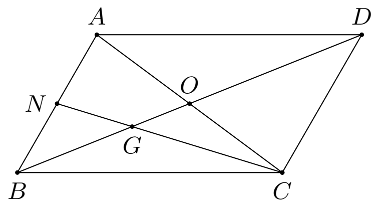
B. $\overrightarrow{GA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}-\frac{4}{3}\overrightarrow{NC}$.

C. $\overrightarrow{GA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{NC}$.

D. $\overrightarrow{GA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{NC}$.

Lời giải.

Vì G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên



$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0} &\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}=-\left(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}=-\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{NC}\right)\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{NC}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 129. Cho $\triangle ABC$ có AK, BM là hai trung tuyến. Đặt $\overrightarrow{AK}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BM}=\vec{b}$. Hãy biểu diễn $\overrightarrow{BC}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

A. $\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}$.

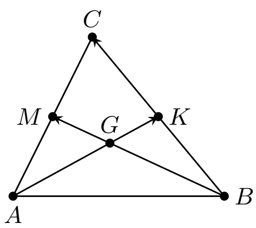
B. $\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{4}{3}\vec{b}$.

C. $\overrightarrow{BC}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}$.

D. $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}$.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.



Ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}=\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$ (1)

Do K là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AK}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC}=2\vec{a}-\overrightarrow{AB}=\frac{4}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}$.

Chọn đáp án A □

Câu 130. Cho $\triangle ABC$ với trọng tâm G. Đặt $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$. Biểu thị véc-tơ $\overrightarrow{AG}$ theo hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ta được

A. $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2\vec{a}-\vec{b}}{3}$.

B. $\overrightarrow{AG}=\dfrac{-2\vec{a}+\vec{b}}{3}$.

C. $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$.

D. $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\vec{a}-2\vec{b}}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\\ &= \left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\\ &= -2\vec{a}+\vec{b}.\end{aligned}$$

Do đó $\overrightarrow{AG}=\dfrac{-2\vec{a}+\vec{b}}{3}$.

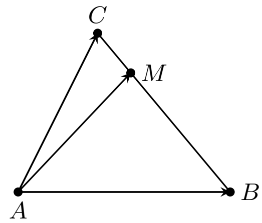
Chọn đáp án (B) □

Câu 131. Cho tam giác ABC. Gọi M trên cạnh BC sao cho $MB = 3MC$. Khi đó, biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{AM}$ theo véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và véc-tơ $\overrightarrow{AC}$ là

(A) $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.
(B) $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.
(C) $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.
(D) $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)\\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

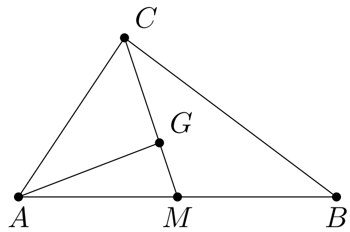
Chọn đáp án (B) □

Câu 132. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{v}$. Khi đó $\overrightarrow{AG}$ bằng

(A) $\dfrac{2\vec{u} - \vec{v}}{3}$.
(B) $\dfrac{2\vec{u} + \vec{v}}{3}$.
(C) $\dfrac{\vec{u} - 2\vec{v}}{3}$.
(D) $\dfrac{-2\vec{u} + \vec{v}}{3}$.

Lời giải.

Ta có



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{CG} - \overrightarrow{CA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA}\\ &= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right) - \overrightarrow{CA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}\\ &= \frac{-2\vec{u} + \vec{v}}{3}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 133. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm tam giác. Điểm N trên BC sao cho $\overrightarrow{CN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{AC}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{AG}$ và $\overrightarrow{AN}$.

(A) $\overrightarrow{AC} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AG} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.
(B) $\overrightarrow{AC} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AG} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.
(C) $\overrightarrow{AC} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AG} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.
(D) $\overrightarrow{AC} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AG} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.

Lời giải.

Do G là trọng tâm của $\triangle ABC$ nên

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AC}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AN} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\left(3\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AC}\right) + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 134. Cho $\triangle ABC$ với G là trọng tâm. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Khi đó $\overrightarrow{AG}$ được biểu diễn theo hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

Ⓐ $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}\vec{a}-\dfrac{2}{3}\vec{b}$. Ⓑ $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$. Ⓒ $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}$. Ⓓ $\overrightarrow{AG}=-\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm cạnh BC.
Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)-\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 135. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Đặt $\overrightarrow{GA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{GB}=\vec{b}$. Tìm các giá trị thực của m, n để $\overrightarrow{BC}=m\vec{a}+n\vec{b}$.

Ⓐ $m=1$; $n=2$. Ⓑ $m=-1$; $n=-2$. Ⓒ $m=-2$; $n=-1$. Ⓓ $m=2$; $n=1$.

Lời giải.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GC}\\ &= -\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}\\ &= -\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}.\end{aligned}$$

Suy ra $m=-1$; $n=-2$.
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 136. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Hãy tìm m và n sao cho $\overrightarrow{MN}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{DC}$.

Ⓐ $m=\dfrac{1}{2}$, $n=\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $m=-\dfrac{1}{2}$, $n=\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $m=\dfrac{1}{2}$, $n=-\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $m=-\dfrac{1}{2}$, $n=-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}\right)$.
Vì M là trung điểm AD nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$.
Vậy $\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.
Suy ra $m=\dfrac{1}{2}$, $n=\dfrac{1}{2}$.
Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 137. Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Đặt $\overrightarrow{GA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{GB}=\vec{b}$. Hãy tìm m, n để có $\overrightarrow{BC}=m\vec{a}+n\vec{b}$.

Ⓐ $m=1$, $n=2$. Ⓑ $m=-1$, $n=-2$. Ⓒ $m=2$, $n=1$. Ⓓ $m=-2$, $n=-1$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}$.
Suy ra

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GB}$$

$$\begin{aligned} &= -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GB} \\ &= -\vec{a} - 2\vec{b}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 138. Cho tứ giác $ABCD$ (với AB, CD không song song). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Tìm m, n để $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{DC}$.

(A) $m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$. (B) $m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$. (C) $m = \frac{1}{2}, n = -\frac{1}{2}$. (D) $m = -\frac{1}{2}, n = -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}. \end{cases}$

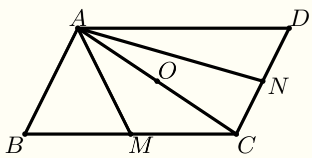
Suy ra $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.

Vậy $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 139.

Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AM}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$. Hãy biểu diễn $\overrightarrow{AO}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.



(A) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$. (B) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

(C) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\vec{a} + 2\vec{b}$. (D) $\overrightarrow{AO} = \vec{a} + 3\vec{b}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AO} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC}\right) \\ &= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\overrightarrow{AO} = \vec{a} + \vec{b} - 2\overrightarrow{AO} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AO} = \vec{a} + \vec{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}.$$

Chọn đáp án (A) □

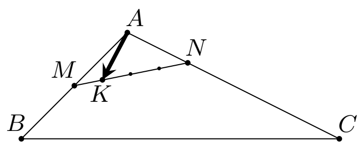
Câu 140. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NC = 2NA$. Gọi K là là điểm trên cạnh MN sao cho $KN = 3KM$. Kết quả nào dưới đây đúng?

(A) $\overrightarrow{AK} = -\frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$. (B) $\overrightarrow{AK} = -\frac{3}{8}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$.

(C) $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$. (D) $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có



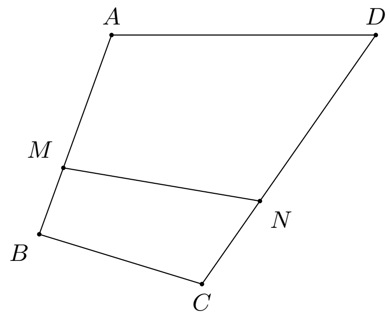
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AK} &= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{MN} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}\right) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{12}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{8}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{12}\overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 141. Cho tứ giác $ABCD$. Trên cạnh AB, CD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$ và $3\overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{DC}$. Tính véc-tơ $\overrightarrow{MN}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$.

(A) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.
(B) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.
(C) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.
(D) $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Lời giải.



Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}.\end{cases}$

Suy ra

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} + 2\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}\right) \\ &= \left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right) + \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{BC} + \left(\overrightarrow{DN} + 2\overrightarrow{CN}\right). \end{aligned}$$

Theo bài ra, ta có $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{DN} + 2\overrightarrow{CN} = \vec{0}$.

Vậy $3\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 142. Cho tam giác đều ABC và điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

(A) $\overrightarrow{CI} = \dfrac{\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB}}{3}$.
(B) $\overrightarrow{CI} = \dfrac{\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}}{3}$.
(C) $\overrightarrow{CI} = -\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$.
(D) $\overrightarrow{CI} = \dfrac{\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}}{-3}$.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB} \Rightarrow B$ là trung điểm của IA.

Suy ra $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$.

Lại có $\begin{cases}\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BI} \\ \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AI}.\end{cases}$

Do đó

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{CI} &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI} \\ &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + 3\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + 3\left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right) \\ &= -2\overrightarrow{CA} + 4\overrightarrow{CB}. \end{aligned}$$

Vậy $\overrightarrow{CI} = -\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 143. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm tam giác. Lấy các điểm P, Q sao cho $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PB}$, $3\overrightarrow{QA} + 2\overrightarrow{QC} = \vec{0}$. Biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{AG}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$.

(A) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AP} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AQ}$.
(B) $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AQ}$.
(C) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AP} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AQ}$.
(D) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AQ}$.

Lời giải.

Ta có

- $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{BP} = 2\left(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}\right)$, suy ra $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AP}$.
- $3\overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{QC} = 2\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AQ}\right)$, suy ra $\overrightarrow{AC} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AQ}$.

Do đó $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AP}+\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AQ}$.

Chọn đáp án C □

Câu 144. Cho tam giác ABC. Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI=3BI$ và J thuộc BC kéo dài sao cho $5JB=2JC$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{AG}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$.

(A) $\overrightarrow{AG}=\dfrac{35}{48}\overrightarrow{AI}-\dfrac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$.
(B) $\overrightarrow{AG}=\dfrac{35}{48}\overrightarrow{AI}+\dfrac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$.
(C) $\overrightarrow{AG}=\dfrac{25}{16}\overrightarrow{AI}-\dfrac{3}{16}\overrightarrow{AJ}$.
(D) $\overrightarrow{AG}=\dfrac{25}{16}\overrightarrow{AI}+\dfrac{3}{16}\overrightarrow{AJ}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AI}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AJ}=\dfrac{5}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

Suy ra $\overrightarrow{AB}=\dfrac{5}{8}\overrightarrow{AI}+\dfrac{3}{8}\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{AC}=\dfrac{25}{16}\overrightarrow{AI}-\dfrac{9}{16}\overrightarrow{AJ}$.

Do đó $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{35}{48}\overrightarrow{AI}-\dfrac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$.

Chọn đáp án A □

Câu 145. Cho tam giác ABC. Gọi G là trọng tâm tam giác và H là điểm đối xứng của B qua G. Gọi M là trung điểm BC. Biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{MH}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

(A) $\overrightarrow{MH}=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.
(B) $\overrightarrow{MH}=-\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.
(C) $\overrightarrow{MH}=-\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.
(D) $\overrightarrow{MH}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Lại có $\overrightarrow{BH}=2\overrightarrow{BG}=\dfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}\right)$.

Do đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MH} &= -\overrightarrow{HM}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{HB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{HC}\\ &= \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BH}-\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AH}\right)\\ &= -\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 146. Cho góc $\widehat{xOy}=60^\circ$. Các điểm A, B nằm trên tia Ox, các điểm C, D nằm trên tia Oy sao cho $AB=CD=2$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm các đoạn AC, BD. Biết A nằm giữa O và B, C nằm giữa O và D, tính IJ.

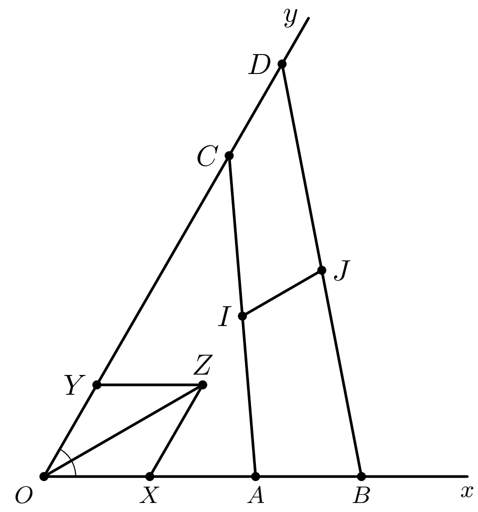
(A) $IJ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
(B) $IJ=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.
(C) $IJ=\sqrt{3}$.
(D) $IJ=2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Trên các tia Ox, Oy lần lượt lấy các điểm X, Y sao cho $OX = OY = 2$.
Dựng hình bình hành $OXZY$, ta có

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{IJ} &= \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}\right) + \left(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DJ}\right) \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OZ}. \end{aligned}$$

Suy ra $IJ = \dfrac{1}{2}OZ = \sqrt{3}$.



Chọn đáp án C

Câu 147. Cho tam giác ABC, N là điểm xác định bởi $\overrightarrow{CN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Hệ thức tính $\overrightarrow{AC}$ theo $\overrightarrow{AG}$ và $\overrightarrow{AN}$ là

A. $\overrightarrow{AC} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AG} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AN}$. B. $\overrightarrow{AC} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AG} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AN}$. C. $\overrightarrow{AC} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AG} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AN}$. D. $\overrightarrow{AC} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AG} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC.
Vì G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AG}$.
Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN} \\ &= \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C

Dạng 5. Chứng minh ba điểm thẳng hàng, hai đường thẳng song song, hai điểm trùng nhau

- Để chứng minh 3 điểm A, B, C thẳng hàng, ta chứng minh: $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ (1).
Để nhận được (1), ta lựa chọn một trong hai hướng sau:
  - Sử dụng các quy tắc biến đổi véc-tơ.
  - Xác định (tính) véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ thông qua một tổ hợp trung gian.

Chú ý:

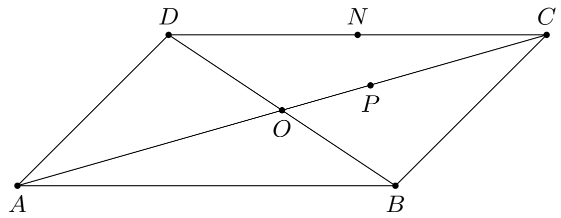
- Cho ba điểm A, B, C. Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là: $\overrightarrow{MC} = \alpha\overrightarrow{MA} + (1-\alpha)\overrightarrow{MB}$ với điểm M tùy ý và số thực α bất k".
Đặc biệt khi $0 \le \alpha \le 1$ thì $C \in AB$. Kết quả trên còn được sử dụng để tìm điều kiện của tham số k (hoặc m) cho ba điểm A, B, C thẳng hàng.
- Nếu không dễ nhận thấy k trong biểu thức $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, ta nên quy đồng biểu thức phân tích véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ để tìm ra số k.

- Để chứng minh $AB \parallel CD$ ta cần chứng minh $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$.

1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 17. Cho hình bình hành $ABCD$, tâm O. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD và P là điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OP} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}$. Chứng minh 3 điểm B, P, N thẳng hàng.

Lời giải.



Ta có CO là đường trung tuyến của tam giác BCD. Hơn nữa $\overrightarrow{OP} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ suy ra P là trọng tâm của tam giác BCD.
Mặt khác BN cũng là đường trung tuyến trong tam giác BCD nên B, P, N thẳng hàng. □

Ví dụ 18. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D thỏa: $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AD}$. Chứng minh B, C, D thẳng hàng.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned}
& 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AD} \\
\Leftrightarrow\ & 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{AD} = \vec{0} \\
\Leftrightarrow\ & 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AD} = \vec{0} \\
\Leftrightarrow\ & 2\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right) + 3\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\right) = \vec{0} \\
\Leftrightarrow\ & 2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC} = \vec{0} \\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{DB} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{DC}.
\end{aligned}$$

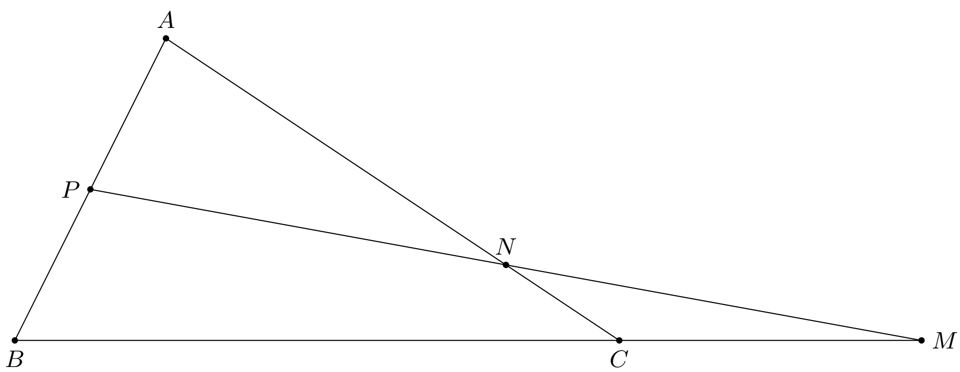
Suy ra ba điểm B, C, D thẳng hàng. □

Ví dụ 19. Cho $\triangle ABC$, lấy điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$.

a) Tính $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{PN}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh ba điểm: M, N, P thẳng hàng.

Lời giải.



a) Ta có:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}=3\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}\right)\\
&\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}.\\
\overrightarrow{NA}+3\overrightarrow{NC}=\vec{0} &\Leftrightarrow -\overrightarrow{AN}+3\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AN}\right)=\vec{0}\\
&\Leftrightarrow -4\overrightarrow{AN}=-3\overrightarrow{AC}\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}.\\
\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0} &\Leftrightarrow -\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP}=\vec{0}\\
&\Leftrightarrow -2\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{AB}\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PM} &= \overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AP}=\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\right)-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\ ;\\
\overrightarrow{PN} &= \overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.
\end{aligned}$$

b) Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{PM}=-\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{PN}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{PM}=2\overrightarrow{PN}.$

Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{PM}$ và $\overrightarrow{PN}$ cùng phương, nên ba điểm M, N, P thẳng hàng.

□

Ví dụ 20. Cho $\triangle ABC$ có I là trung điểm của trung tuyến AM và D là điểm thỏa hệ thức $3\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$. Biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BI}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ và chứng minh ba điểm B, I, D thẳng hàng.

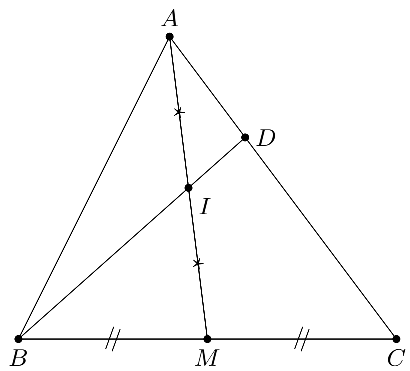
Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}.$ (1)

Lại có

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) &\Leftrightarrow \overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{BI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta có $\overrightarrow{BI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BD}$, suy ra ba điểm B, I, D thẳng hàng.



□

2. Bài tập áp dụng

Bài 28. Cho $\triangle ABC$.

a) Dựng các điểm K, L sao cho $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}+3\overrightarrow{KC}=\vec{0}$, $2\overrightarrow{LB}+3\overrightarrow{LC}=\vec{0}$

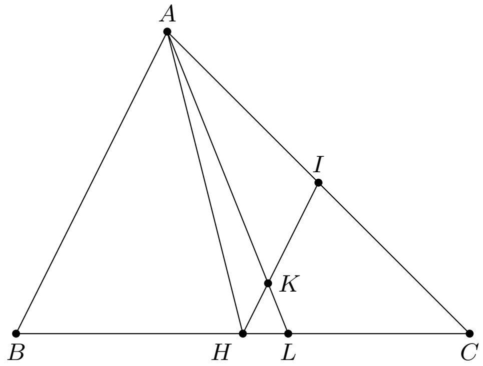
b) Chứng minh ba điểm A, K, L thẳng hàng.

Lời giải.

a) Gọi H, I lần lượt là trung điểm của BC, AC. Khi đó

$$\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}+3\overrightarrow{KC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KC}+2\left(\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}\right)=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{KI}+4\overrightarrow{KH}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{IH}.$$

Từ đó dựng các điểm K, L như hình vẽ.



b) Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AK} &= \overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{IH}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \text{ (do } IH \text{ là đường trung bình trong } \triangle ABC).\end{aligned}$$

Lại có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AL} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}\\ &= \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}=\frac{6}{5}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{6}{5}\overrightarrow{AK}.\end{aligned}$$

Vậy ba điểm A, K, L thẳng hàng.

□

Bài 29. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là trung điểm của AB và E là điểm thoả hệ thức $3\overrightarrow{IE}=\overrightarrow{ID}$. Chứng minh ba điểm A, C, E thẳng hàng.

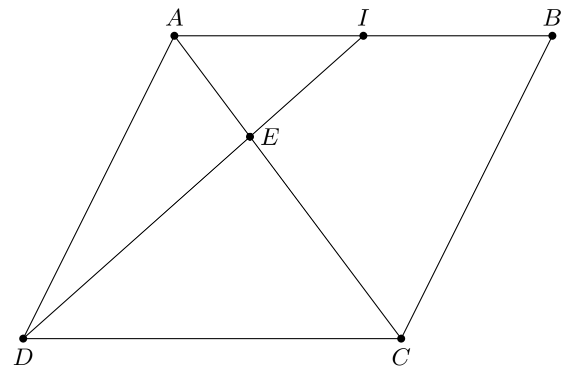
Lời giải.

Ta có $3\overrightarrow{IE}=\overrightarrow{ID} \Leftrightarrow \overrightarrow{DI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DE}$.

Do $ABCD$ là hình bình hành nên

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AD}\\ &= 2\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{DE}=3\overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

Vậy ba điểm A, C, E thẳng hàng.



□

Bài 30. Cho $\triangle ABC$.

a) Dựng các điểm K, L sao cho $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}+3\overrightarrow{KC}=\vec{0}$ và $2\overrightarrow{LB}+3\overrightarrow{LC}=\vec{0}$

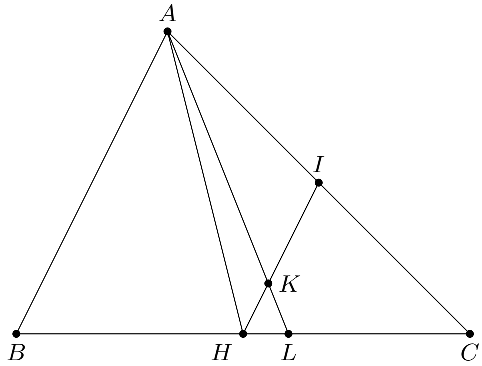
b) Chứng minh ba điểm A, K, L thẳng hàng.

Lời giải.

a) Gọi H, I lần lượt là trung điểm của BC, AC. Khi đó

$$\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}+3\overrightarrow{KC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KC}+2\left(\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}\right)=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{KI}+4\overrightarrow{KH}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{IH}.$$

Từ đó dựng các điểm K, L như hình vẽ.



b) Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AK} &= \overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{IH}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \text{ (do } IH \text{ là đường trung bình trong } \triangle ABC).\end{aligned}$$

Lại có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AL} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}\\ &= \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}=\frac{6}{5}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{6}{5}\overrightarrow{AK}.\end{aligned}$$

Vậy ba điểm A, K, L thẳng hàng.

□

Bài 31. Cho $\triangle ABC$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB, N và P là hai điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NC}=\vec{0}$, $\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$. Chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng.

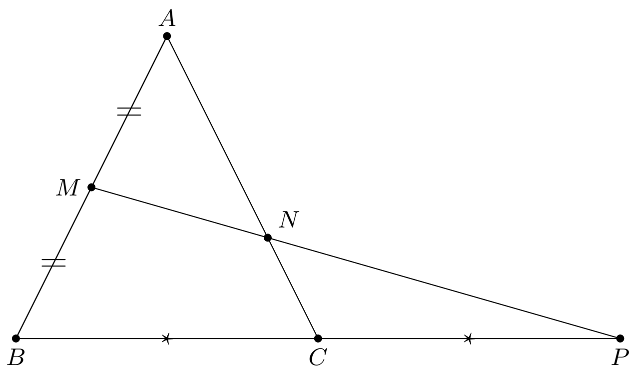
Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lại có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP} &= \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\\ &= 3\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)=3\overrightarrow{MN}.\end{aligned}$$

Vậy ba điểm M, N, P thẳng hàng.



□

Bài 32. Cho $\triangle ABC$. Hai điểm M, N được xác định bởi $3\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, $\overrightarrow{NB}-3\overrightarrow{NC}=\vec{0}$. Chứng minh MN đi qua trọng tâm $\triangle ABC$.

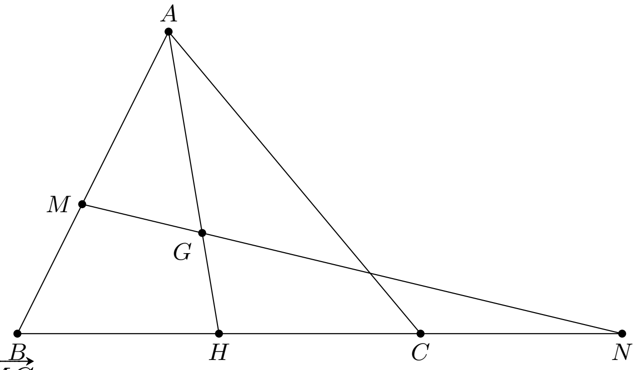
Lời giải.

Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MG} &= \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AG} = -\frac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AH}\\ &= -\frac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{5}{21}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Lại có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}\\ &= \frac{3}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right) = -\frac{15}{14}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{9}{2}\overrightarrow{MG}.\end{aligned}$$



Vậy M, N, G thẳng hàng, hay MN đi qua trọng tâm G của $\triangle ABC$.

□

Bài 33. Cho $\triangle ABC$.

a) Dựng các điểm D, E thỏa các hệ thức $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.

b) Chứng minh ba điểm A, C, E thẳng hàng.

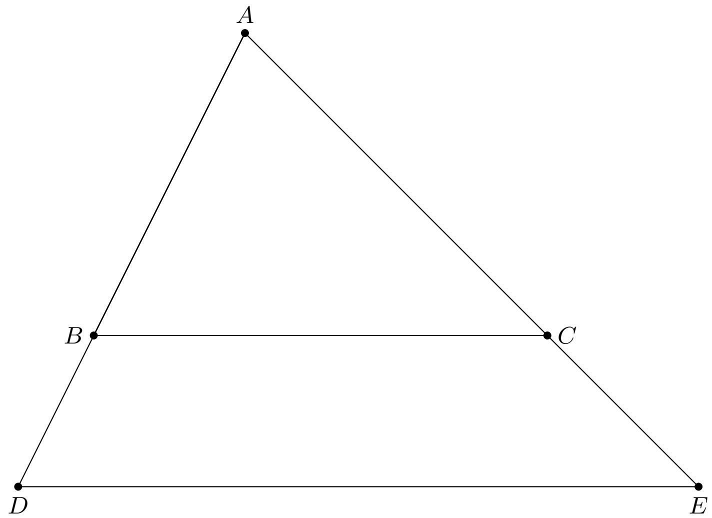
Lời giải.

a) Ta dựng các điểm D, E như hình vẽ.

b) Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}\\ &= \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Vậy ba điểm A, C, E thẳng hàng.



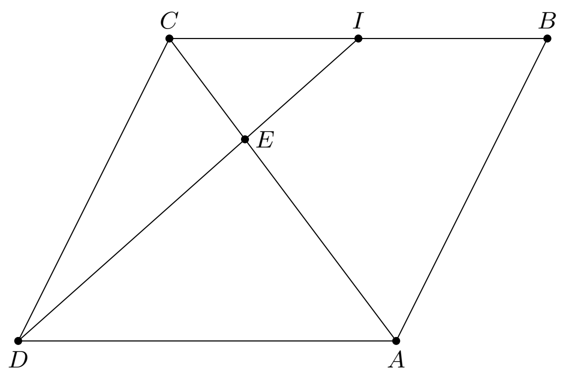
□

Bài 34. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là trung điểm của cạnh BC và E là điểm xác định bởi $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Chứng minh ba điểm D, E, I thẳng hàng.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DI} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{DA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DE}.\end{aligned}$$



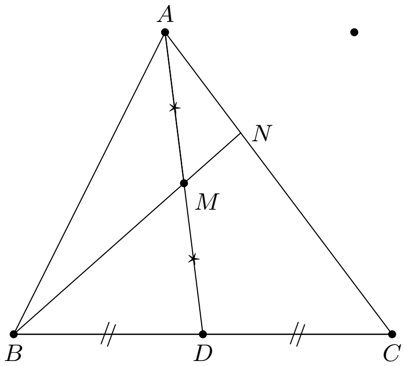
Vậy ba điểm D, E, I thẳng hàng.

Bài 35. Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến AD và M là trung điểm AD. Điểm N được lấy trên AC sao cho $3\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$. Chứng minh ba điểm B, M, N thẳng hàng.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{3}{4}\left(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{3}{4}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN}\right) = \frac{3}{4}\overrightarrow{BN}.\end{aligned}$$



Vậy ba điểm B, M, N thẳng hàng.

Bài 36. Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm BC và O là trung điểm của AM. Trên AB lấy điểm I, AC lấy điểm J sao cho $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Chứng minh ba điểm I, J, O thẳng hàng.

Lời giải.

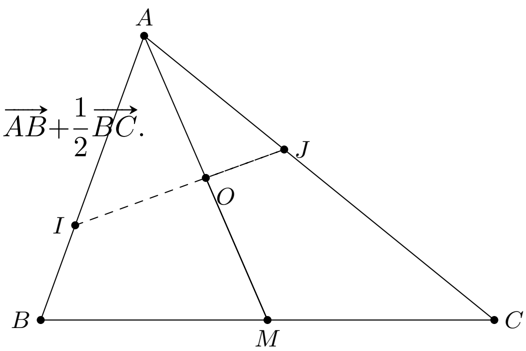
Do $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ nên $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Tương tự thì $\overrightarrow{JC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$.

Ta có

$$2\overrightarrow{IO} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IM} = \frac{-2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BM} = \frac{-2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{-1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

Tương tự,

$$2\overrightarrow{JO} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{5}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{10}\overrightarrow{BC}.$$



Suy ra $6\overrightarrow{IO} = -10\overrightarrow{JO}$ hay $\overrightarrow{IO} = \frac{-5}{3}\overrightarrow{JO}$.

Vậy ba điểm I, J, O thẳng hàng.

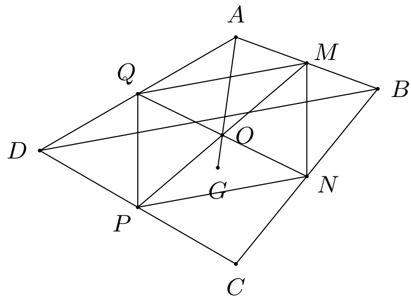
Bài 37. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Gọi O là giao điểm của MP và NQ, G là trọng tâm của tam giác BCD. Chứng minh rằng ba điểm A, O, G thẳng hàng.

Lời giải.

MN, PQ lần lượt là đường trung bình của ΔABC, ΔACD

$$\Rightarrow \begin{cases} MN \parallel PQ \parallel AC \\ MN = PQ = \dfrac{1}{2}AC. \end{cases}$$

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành $\Rightarrow O$ là trung điểm của MP.



Ta có

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}\right) + \left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}\right) + \left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC}\right) + \left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PD}\right)$

$= 2\left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP}\right) = \vec{0}.$

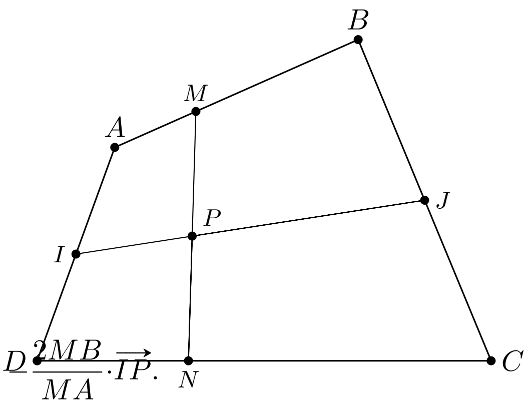
G là trọng tâm $\Delta BCD \Rightarrow \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OG}$.
Khi đó $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OG}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}=-3\overrightarrow{OG}$.
Vậy ba điểm A, O, G thẳng hàng (đpcm). □

Bài 38. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N là hai điểm di động trên AB, CD sao cho $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{ND}{NC}$ và hai điểm I, J lần lượt là trung điểm của AD, BC.

a) Tính $\overrightarrow{IJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$.

b) Chứng minh trung điểm P của MN nằm trên IJ.

Lời giải.



a) $2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$.
Suy ra $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.
b) Từ giải thiết ta có $\overrightarrow{BM}=-\overrightarrow{AM}\cdot\dfrac{NC}{ND}$ và $\overrightarrow{CN}=-\overrightarrow{DN}\cdot\dfrac{MB}{MA}$.
Mặt khác

$$2\overrightarrow{IP}=\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{DN}.$$

Mà

$$2\overrightarrow{JP}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=-\overrightarrow{AM}\cdot\frac{NC}{ND}-\overrightarrow{DN}\cdot\frac{MB}{MA}=-\frac{MB}{MA}(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{DN})=2\frac{MB}{MA}\cdot\overrightarrow{IP}.$$

Suy ra I, P, J thẳng hàng hay P của MN nằm trên IJ. □

Bài 39. Cho $\triangle ABC$. Gọi P, Q, R là các điểm thỏa các đẳng thức :

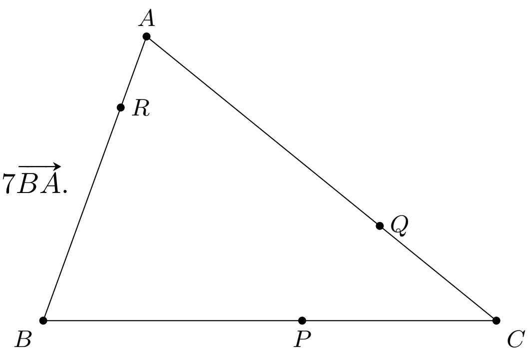
$$3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\vec{0},\quad \overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{QC},\quad k\overrightarrow{RA}=\overrightarrow{RB},\ k\neq 1.$$

a) Chứng minh rằng: $21\overrightarrow{PQ}=2\overrightarrow{BC}+7\overrightarrow{BA}$.

b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{RP}=\dfrac{k}{1-k}\overrightarrow{BA}+\dfrac{4}{7}\overrightarrow{BC}$.

c) Tìm k sao cho P, Q, R thẳng hàng.

Lời giải.



a) Từ $3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\vec{0}$, $\overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{QC}$ suy ra $\overrightarrow{PC}=\frac{3}{7}\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{CQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.
Do đó

$$21\overrightarrow{PQ}=21\overrightarrow{PC}+21\overrightarrow{CQ}=9\overrightarrow{BC}+7\overrightarrow{CA}=9\overrightarrow{BC}+7(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA})=2\overrightarrow{BC}+7\overrightarrow{BA}.$$

b) Từ $k\overrightarrow{RA}=\overrightarrow{RB}$ suy ra $\overrightarrow{RB}=\dfrac{k}{1-k}\overrightarrow{BA}$.
Do đó $\overrightarrow{RP}=\overrightarrow{RB}+\overrightarrow{BP}=\dfrac{k}{1-k}\overrightarrow{BA}+\dfrac{4}{7}\overrightarrow{BC}$.
c) Để P, Q, R thẳng hàng thì $\overrightarrow{RP}=a\cdot\overrightarrow{PQ}$, $a\neq 0$.
Suy ra $\dfrac{k}{1-k}\overrightarrow{BA}+\dfrac{4}{7}\overrightarrow{BC}=a\cdot\left(\dfrac{2}{21}\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}\right)$
Suy ra $k=\dfrac{2}{3}$. □

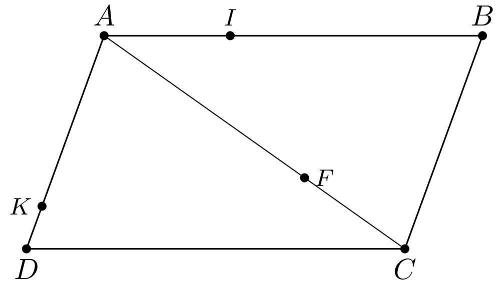
Bài 40. Cho hình bình hành $ABCD$.

a) Gọi I, F, K là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AI}=\alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF}=\beta\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AK}=\gamma\overrightarrow{AD}$. Chứng minh điều kiện cần và đủ để I, F, K thẳng hàng là

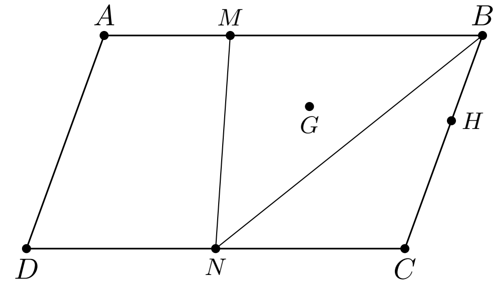
$$\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}\quad(\alpha,\ \beta,\ \gamma\neq 0).$$

b) Gọi M, N là hai điểm lần lượt trên đoạn AB, CD sao cho $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{CN}{CD}=\dfrac{1}{2}$. Gọi G là trọng tâm $\triangle MNB$. Tính $\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Gọi H là điểm xác định bởi $\overrightarrow{BH}=k\cdot\overrightarrow{BC}$. Tính $\overrightarrow{AH}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ và k. Tìm k để đường thẳng AH đi qua điểm G.

Lời giải.



a) Do $\overrightarrow{KI}=\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AK}=\alpha\overrightarrow{AB}-\gamma\overrightarrow{AD}$ và
$\overrightarrow{KF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AK}=\beta\overrightarrow{AC}-\gamma\overrightarrow{AD}=\beta(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})-\gamma\overrightarrow{AD}$.
Suy ra $\overrightarrow{KF}=\beta\overrightarrow{AB}+(\beta-\gamma)\overrightarrow{AD}$.
Mặt khác, I,F,K thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{KI}=k\overrightarrow{KF}, k\neq 0$.
Hay $\begin{cases}\alpha=k\beta\\ \gamma=-k(\beta-\gamma)\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{\alpha\gamma}{\beta}=\alpha+\gamma\Leftrightarrow\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\gamma}$.



b) Từ giả thiết suy ra $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CN}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\dfrac{-1}{2}\overrightarrow{AB}$.
Ta có
- $\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
- $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NG}=\overrightarrow{AN}+\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{NB})=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AN}+\dfrac{2}{9}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{9}\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\dfrac{5}{18}\overrightarrow{AB}$.
- $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BC}=(1-k)\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}$.

Để AH đi qua điểm G khi và chỉ khi $\overrightarrow{AH}=t\overrightarrow{AG}$, $t\neq 0$ hay

$$(1-k)\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}=t\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{5}{18}\overrightarrow{AB}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}1-k=\dfrac{5}{18}t\\ k=\dfrac{t}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\dfrac{6}{11}\\ t=\dfrac{18}{11}.\end{cases}$$

Vậy $k=\dfrac{6}{11}$. □

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 148. Cho ba điểm A,B,C phân biệt. Điều kiện cần và đủ để ba điểm thẳng hàng là

A. $AB=AC$.
B. $\exists k\in\mathbb{R}^*\colon \overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$.
D. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC},\forall$ điểm M.

Lời giải.
Ba điểm A,B,C thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại số $k\in\mathbb{R}$ khác 0 để $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.
Chọn đáp án B □

Câu 149. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BC}, k\neq 0$.
B. Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{BC},\ k\neq 0$.

Ⓒ Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}, k \neq 0$.
Ⓓ Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.
Chọn đáp án D □

Câu 150. Phát biểu nào là **sai**?
Ⓐ Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ thì $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right|$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ thì A, B, C, D thẳng hàng.
Ⓒ Nếu $3\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ thì A, B, C thẳng hàng.
Ⓓ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BA}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ thì $\left[\begin{array}{l} AB \parallel CD \\ AB \equiv CD \end{array}\right.$.
Nên khẳng định "$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ thì A, B, C, D thẳng hàng " sai.
Chọn đáp án B □

Câu 151. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai véc-tơ nào sau đây là cùng phương?
Ⓐ $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$.
Ⓑ $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{v} = 2\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b}$.
Ⓒ $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{v} = 2\vec{a} - 9\vec{b}$.
Ⓓ $\vec{u} = 2\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$ và $\vec{v} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{v} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} = -\frac{1}{6}\left(2\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}\right) = -\frac{1}{6}\vec{u}$.
Hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là cùng phương.
Chọn đáp án D □

Câu 152. Biết rằng hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nhưng hai véc-tơ $2\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{a} + (x-1)\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là
Ⓐ $\frac{1}{2}$.
Ⓑ $-\frac{3}{2}$.
Ⓒ $-\frac{1}{2}$.
Ⓓ $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $2\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{a} + (x-1)\vec{b}$ cùng phương nên có tỉ lệ $\frac{1}{2} = \frac{x-1}{-3} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$.
Chọn đáp án C □

Câu 153. Cho $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương, $\vec{x} = -2\vec{a} + \vec{b}$. véc-tơ cùng hướng với $\vec{x}$ là
Ⓐ $2\vec{a} - \vec{b}$.
Ⓑ $-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.
Ⓒ $4\vec{a} + 2\vec{b}$.
Ⓓ $-\vec{a} + \vec{b}$.

Lời giải.

Ta có $-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\left(-2\vec{a} + \vec{b}\right) = \frac{1}{2}\vec{x}$.
Chọn đáp án B □

Câu 154. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai véc-tơ nào sau đây cùng phương?
Ⓐ $-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{a} - 2\vec{b}$.
Ⓑ $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$ và $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$.
Ⓒ $\frac{1}{2}\vec{a} + \sqrt{2}\vec{b}$ và $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.
Ⓓ $-3\vec{a} + \vec{b}$ và $-\frac{1}{2}\vec{a} + 100\vec{b}$.

Lời giải.

Ta có $-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}=-\dfrac{1}{2}\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 155. Cho điểm B nằm giữa hai điểm A và C , với $AB=2a$,$AC=6a$. Đẳng thức nào dưới đây là đẳng thức đúng?

(A) $\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{AB}$.
(B) $\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{AB}$.
(C) $\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{AB}$.
(D) $\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{BA}$.

Lời giải.

Nhận thấy khẳng định "$\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{AB}$." là khẳng định đúng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 156. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai véc-tơ nào sau đây cùng phương?

(A) $-3\vec{a}+\vec{b}$ và $-\dfrac{1}{2}\vec{a}+6\vec{b}$.
(B) $-\dfrac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$ và $2\vec{a}+\vec{b}$.
(C) $\dfrac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$ và $-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$.
(D) $\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$ và $\vec{a}-2\vec{b}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}=-\left(-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}\right)$ nên 2 véc-tơ cùng phương.

Chọn đáp án (C) □

Câu 157. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai véc-tơ nào sau đây là cùng phương?

(A) $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}$ và $\vec{v}=\dfrac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}$.
(B) $\vec{u}=\dfrac{3}{5}\vec{a}+3\vec{b}$ và $\vec{v}=2\vec{a}-\dfrac{3}{5}\vec{b}$.
(C) $\vec{u}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+3\vec{b}$ và $\vec{v}=2\vec{a}-9\vec{b}$.
(D) $\vec{u}=2\vec{a}-\dfrac{3}{2}\vec{b}$ và $\vec{v}=-\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}$.

Lời giải.

Ta có $2\vec{a}-\dfrac{3}{2}\vec{b}=-6\left(-\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}\right)$ nên 2 véc-tơ cùng phương.

Chọn đáp án (D) □

Câu 158. Cho hình bình hành $ABCD$. Tổng các véc-tơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ là

(A) $\overrightarrow{AC}$.
(B) $2\overrightarrow{AC}$.
(C) $3\overrightarrow{AC}$.
(D) $5\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}$ (quy tắc hình bình hành).

Chọn đáp án (B) □

Câu 159. Cho tam giác ABC, véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ được phân tích theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng

(A) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.
(B) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$.
(C) $-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.
(D) $\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 160. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Điều kiện cần và đủ để ba điểm thẳng hàng là

(A) $AB=AC$.
(B) $\exists k\neq 0\colon \overrightarrow{AB}=k.\overrightarrow{AC}$.
(C) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$.
(D) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC},\forall$ điểm M.

Lời giải.

Ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số k khác 0 để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Chọn đáp án B □

Câu 161. Cho ΔABC. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Các cặp véc-tơ nào sau đây cùng phương?

A. $2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + 2\vec{b}$.
B. $\vec{a} - 2\vec{b}$, $2\vec{a} - \vec{b}$.
C. $5\vec{a} + \vec{b}, -10\vec{a} - 2\vec{b}$.
D. $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$.

Lời giải.

Ta có $-10\vec{a} - 2\vec{b} = -2.(5\vec{a} + \vec{b}) \Rightarrow 5\vec{a} + \vec{b}$ và $-10\vec{a} - 2\vec{b}$ cùng phương.

Chọn đáp án C □

Câu 162. Biết rằng hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nhưng hai véc-tơ $3\vec{a} - 2\vec{b}$ và $(x+1)\vec{a} + 4\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là

A. -7.
B. 7.
C. 5.
D. 6.

Lời giải.

Điều kiện để hai véc-tơ $3\vec{a} - 2\vec{b}$ và $(x+1)\vec{a} + 4\vec{b}$ cùng phương là $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{4}{-2} \Leftrightarrow x = -7$.

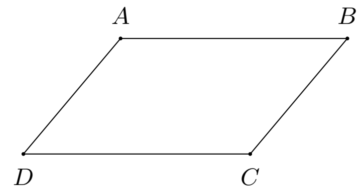
Chọn đáp án A □

Câu 163. Phát biểu nào là **sai**?

A. Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ thì $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right|$.
B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ thì A, B, C, D thẳng hàng.
C. Nếu $3\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ thì A, B, C thẳng hàng.
D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BA}$.

Lời giải.

Khẳng định "$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ thì A, B, C, D thẳng hàng" là khẳng định sai vì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ thì A, B, C, D có thể là các đỉnh của hình bình hành.



Chọn đáp án B □

Câu 164. Biết rằng hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nhưng hai véc-tơ $2\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{a} + (x-1)\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là

A. $\dfrac{1}{2}$.
B. $-\dfrac{3}{2}$.
C. $-\dfrac{1}{2}$.
D. $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có $\dfrac{1}{2} = \dfrac{x-1}{-3} \Leftrightarrow x = \dfrac{-1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 165. Nếu I là trung điểm đoạn thẳng AB và $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{AB}$ thì giá trị của k bằng

A. 1.
B. $\dfrac{1}{2}$.
C. $-\dfrac{1}{2}$.
D. -2.

Lời giải.

Ta có $IA = \dfrac{1}{2}AB$ và $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng. Vậy $\overrightarrow{IA} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Chọn đáp án C □

Câu 166. Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Chứng minh rằng véc-tơ $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$. Hãy xác định vị trí của điểm D sao cho $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$.

(A) D là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCD$.
(B) D là điểm thứ tư của hình bình hành $ACBD$.
(C) D là trọng tâm của tam giác ABC.
(D) D là trực tâm của tam giác ABC.

Lời giải.

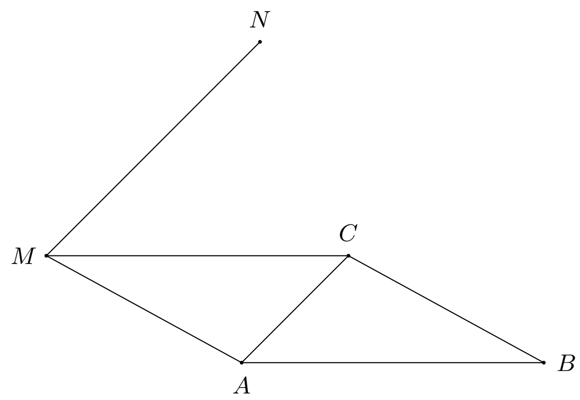
Ta có: $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CI}$ (Với I là trung điểm của AB).
Vậy véc-tơ $\vec{v}$ không phụ thuộc vào vị trú điểm M. Khi đó: $\overrightarrow{CD} = \vec{v} = 2\overrightarrow{CI} \Rightarrow I$ là trung điểm của CD
Vậy D là điểm thứ tư của hình bình hành $ACBD$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 167. Cho tam giác ABC. Hai điểm M, N được xác định bởi các hệ thức $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

(A) $MN \perp AC$.
(B) $MN // AC$.
(C) M nằm trên đường thẳng AC.
(D) Hai đường thẳng MN và AC trùng nhau.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow M$ là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$ nên $M \notin AC$. (1)
Cộng vế theo vế hai đẳng thức
$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$, ta được
$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AC}$
$\Rightarrow \overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $MN // AC$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 168. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Các điểm M, N thỏa mãn $7\overrightarrow{MG} = 3\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB}$; $\overrightarrow{GN} = \frac{1}{2}\left(3\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB}\right)$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

(A) Đường thẳng MN đi qua G.
(B) Đường thẳng MN đi qua A.
(C) Đường thẳng MN đi qua B.
(D) Đường thẳng MN đi qua C.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $2\overrightarrow{GN} = 7\overrightarrow{MG}$.
Vậy ba điểm M, N, G thẳng hàng hay đường thẳng MN đi qua G.
Chọn đáp án (A) □

Câu 169. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Các điểm A, B, C sao cho $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$; $\overrightarrow{AC} = m\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$. Khi A, B, C thẳng hàng thì khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $m \in (2; 3)$.
(B) $m \in (1; 2)$.
(C) $m \in (-1; 0)$.
(D) $m \in (0; 1)$.

Lời giải.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \dfrac{m}{2} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{-3} \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 170. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$. Khi đó, đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định I. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) I là trọng tâm của tam giác ABC.

(B) I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

(C) I là trực tâm của tam giác ABC.

(D) Tứ giác $ABCI$ là hình bình hành.

Lời giải.

Gọi I là trọng tâm của tam giác ABC suy ra I cố định.
Khi đó $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MI}$.
Suy ra $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MI} \Leftrightarrow$3 điểm M, N, I thẳng hàng.
$\Rightarrow$ đường thẳng MN luôn đi qua điểm Icố định.
Vậy đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định I là trọng tâm của tam giác ABC.
Chọn đáp án (A) □

Câu 171. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$. Khi đó, đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định I. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{IC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. (B) $\overrightarrow{IC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$. (C) $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. (D) $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

Lời giải.

Gọi I điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.
Ta có $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
Vì A, B, C cố định nên I cố định. Khi đó
$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) - \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) + 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right) = 2\overrightarrow{MI} + \left(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC}\right) = 2\overrightarrow{MI}$.
Suy ra $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MI} \Leftrightarrow$3 điểm M, N, I thẳng hàng.
$\Rightarrow$ đường thẳng MN luôn đi qua điểm I cố định.
Vậy đường thẳng MN luôn đi qua I là điểm cố định thỏa mãn $\overrightarrow{IC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 172. Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$. Khi đó, đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định I. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) I là trọng tâm của tam giác OBC.

(B) I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

(C) I là trung điểm của cạnh DC.

(D) Tứ giác $ABCI$ là hình bình hành.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} \\
&= \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right) + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \\
&= 2\overrightarrow{MO} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \\
&= 2\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) \\
&= 6\overrightarrow{MI} \text{ (với } I \text{ là trọng tâm của } \triangle OBC).
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$3 điểm M, N, I thẳng hàng.
$\Rightarrow$ đường thẳng MN luôn đi qua điểm I cố định.
Vậy đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định I là trọng tâm của tam giác OBC.

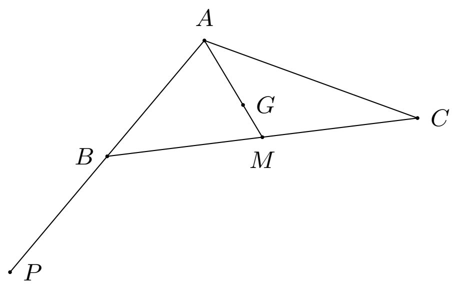
Chọn đáp án (A)

Câu 173. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi P, Q là các điểm sao cho $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{AQ} + k\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ với $k \in \mathbb{R}$. Tìm k để P, Q G thẳng hàng.

(A) $k = \dfrac{2}{5}$. (B) $k = \dfrac{2}{3}$. (C) $k = -\dfrac{2}{5}$. (D) $k = -\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PB}$ suy ra P đối xứng với A qua B. Gọi M là trung điểm của BC.



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AG} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\\
\overrightarrow{PG} &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AG} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\\
\overrightarrow{AQ} &= -k\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ} = -k\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = -2\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AC}.
\end{aligned}$$

Vì P, Q, G thẳng hàng nên $\dfrac{-k}{\frac{1}{3}} = \dfrac{2}{\frac{5}{3}}$. Suy ra $k = -\dfrac{2}{5}$.

Vậy $k = -\dfrac{2}{5}$.

Chọn đáp án (C)

Câu 174. Cho tam giác ABC. Gọi M, N là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}$. Tìm k để A, M, N thẳng hàng.

(A) $k = -\dfrac{3}{2}$. (B) $k = -\dfrac{1}{2}$. (C) $k = \dfrac{1}{2}$. (D) $k = \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AB}$.

Mặt khác $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AC} + 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \Rightarrow \overrightarrow{AN} = (k+3)\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$.

Vì A, M, N thẳng hàng nên $\dfrac{k+3}{3} = \dfrac{1}{2}$. Suy ra $k = -\dfrac{3}{2}$.

Vậy $k = -\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án (A)

Câu 175. Cho tam giác ABC có I là trung điểm của BC . Gọi M, N, P lần lượt là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AN} = n\overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{AP} = p\overrightarrow{AC}$, với $mnp \neq 0$. Tìm điều kiện của m, n, p để M, N, P thẳng hàng.

(A) $mp = mn + np$. (B) $2mn = mp + np$. (C) $2np = mn + mp$. (D) $2mp = mn + np$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MP} &= \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = p\overrightarrow{AC} - m\overrightarrow{AB}\\
\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = n\overrightarrow{AI} - m\overrightarrow{AB}.
\end{aligned}$$

Mà $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ suy ra $\overrightarrow{MN} = \dfrac{n}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) - m\overrightarrow{AB} = \left(\dfrac{n}{2} - m\right)\overrightarrow{AB} + \dfrac{n}{2}\overrightarrow{AC}$.

Do $mnp \neq 0$ nên M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi $\dfrac{\frac{n}{2} - m}{-m} = \dfrac{\frac{n}{2}}{p} \Leftrightarrow 2mp = mn + np$.

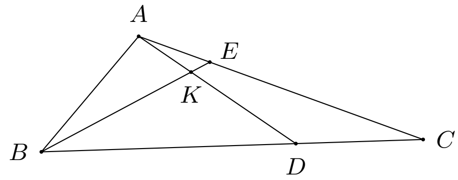
Chọn đáp án (D)

Câu 176. Cho tam giác ABC . Gọi D, E lần lượt là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BD} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Điểm K trên AD thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = \dfrac{a}{b}\overrightarrow{AD}$ (với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản) sao cho 3 điểm B, K, E thẳng hàng. Tính $P = a^2 + b^2$.

A $P = 5$. **B** $P = 13$. **C** $P = 29$. **D** $P = 10$.

Lời giải.



Vì $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BE} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{BA}$.

Giả sử $\overrightarrow{AK} = x.\overrightarrow{AD}$.

Ta có $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + x\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + x\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}\right) = (1-x)\,\overrightarrow{BA} + x\overrightarrow{BD}$.

Mà $\overrightarrow{BD} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ nên $\overrightarrow{BK} = \dfrac{2x}{3}\overrightarrow{BC} + (1-x)\overrightarrow{BA}$.

Vì B, K, E thẳng hàng ($B \neq E$) nên có m sao cho $\overrightarrow{BK} = m\overrightarrow{BE}$.

Do đó có: $\dfrac{m}{4}\overrightarrow{BC} + \dfrac{3m}{4}\overrightarrow{BA} = \dfrac{2x}{3}\overrightarrow{BC} + (1-x)\overrightarrow{BA}$.

Hay $\left(\dfrac{m}{4} - \dfrac{2x}{3}\right)\overrightarrow{BC} + \left(\dfrac{3m}{4} + x - 1\right)\overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

Do $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BA}$ không cùng phương nên $\dfrac{m}{4} - \dfrac{2x}{3} = 0$; $\dfrac{3m}{4} + x - 1 = 0$. Từ đó suy ra $x = \dfrac{1}{3}; m = \dfrac{8}{9}$.

Suy ra $\overrightarrow{AK} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. Vậy $P = a^2 + b^2 = 10$.

Chọn đáp án D □

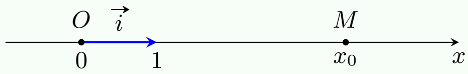
Bài 4 VÉC-TƠ TRONG MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

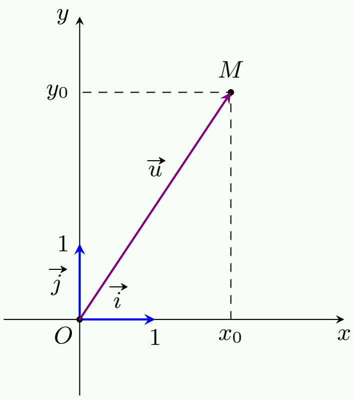
1. Tọa độ của véc-tơ

Định nghĩa 4.1.

- *Trục* tọa độ (còn gọi là *trục*, hay *trục số*) là một đường thẳng mà trên đó đã xác định một điểm O và một véc-tơ $\vec{i}$ có độ dài bằng 1. Điểm O gọi là *gốc tọa độ*, véc-tơ $\vec{i}$ gọi là *véc-tơ đơn vị* của trục. Điểm M trên trục biểu diễn số x_0 nếu $\overrightarrow{OM} = x_0\vec{i}$.



- Trên mặt phẳng, xét hai trục Ox, Oy có chung gốc O và vuông góc với nhau. Véc-tơ đơn vị trên trục Ox là $\vec{i}$, véc-tơ đơn vị của trục Oy là $\vec{j}$. Hệ gồm hai trục Ox, Oy như vậy được gọi là *hệ trục tọa độ* Oxy. Điểm O gọi là *gốc tọa độ*, trục Ox gọi là *trục hoành*, trục Oy gọi là *trục tung*. Mặt phẳng chứa hệ trục tọa độ Oxy gọi là mặt phẳng tọa độ Oxy hay mặt phẳng Oxy.



- Với mỗi véc-tơ $\vec{u}$ trên mặt phẳng Oxy, có duy nhất cặp số $(x_0; y_0)$ sao cho $\vec{u} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$. Ta nói véc-tơ $\vec{u}$ có tọa độ $(x_0; y_0)$ và viết $\vec{u} = (x_0; y_0)$ hay $\vec{u}(x_0; y_0)$. Các số x_0, y_0 tương ứng được gọi là hoành độ, tung độ của $\vec{u}$.

CHÚ Ý

Hai véc-tơ bằng nhau khi và chỉ khi chúng có cùng tọa độ.

$$\vec{u}(x; y) = \vec{v}(x'; y') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y'. \end{cases}$$

2. Biểu thức tọa độ của các phép toán véc-tơ

Định lí 4.1. *Cho hai véc-tơ $\vec{u} = (x; y)$ và $\vec{v} = (x'; y')$. Khi đó*
- $\vec{u} + \vec{v} = (x + x'; y + y')$; • $\vec{u} - \vec{v} = (x - x'; y - y')$; • $k\vec{u} = (kx; ky)$, *với* $k \in \mathbb{R}$.

CHÚ Ý

Véc-tơ $\vec{v}(x'; y')$ cùng phương với véc-tơ $\vec{u}(x; y) \neq \vec{0}$ khi và chỉ khi tồn tại số k sao cho $x' = kx$,

$y' = ky$ (hay là $\dfrac{x'}{x} = \dfrac{y'}{y}$ nếu $xy \neq 0$).

Định lí 4.2. *Nếu điểm M có tọa độ $(x; y)$ thì véc-tơ $\overrightarrow{OM}$ có tọa độ $(x; y)$ và độ dài* $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

CHÚ Ý

Với véc-tơ $\vec{u} = (x; y)$, ta lấy điểm $M(x; y)$ thì $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. Do đó, $|\vec{u}| = \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Chẳng hạn, véc-tơ $\vec{u} = (2; -1)$ có độ dài là $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$.

Định lí 4.3. *Với hai điểm $M(x; y)$ và $N(x'; y')$ thì $\overrightarrow{MN} = (x' - x; y' - y)$ và khoảng cách giữa hai điểm M, N là* $MN = \left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y - y')^2}$.

CHÚ Ý

a) Trung điểm M của đoạn thẳng AB có tọa độ là $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$.

b) Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ là $\left(\dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}; \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$.

B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tìm tọa độ của một điểm và độ dài đại số của một véc-tơ trên trục $(O; \vec{e})$. Tìm tọa độ của các véc-tơ $\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}, k\vec{u}$

Căn cứ vào định nghĩa tọa độ của điểm, độ dài đại số của véc-tơ và các công thức tọa độ của véc-tơ $\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}, k\vec{u}$.

- Điểm M có tọa độ $a \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = a.\vec{e}$ với O là điểm gốc.
- Véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ có độ dài đại số là $m = \overline{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = m\vec{e}$.
- Nếu A và B có tọa độ lần lượt là a và b thì $\overline{AB} = b - a$.
- Tọa độ trung điểm I của đoạn AB : $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}$.
- Nếu $\vec{u} = (u_1; u_2)$, $\vec{v} = (v_1; v_2)$ thì $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2)$; $\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1; u_2 - v_2)$; $k\vec{u} = (ku_1; ku_2), k \in \mathbb{R}$.

1. Ví dụ minh họa

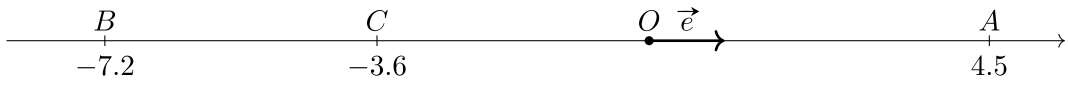
Ví dụ 1. Trên trục tọa độ $(O; \vec{e})$, cho ba điểm A, B, C với: $\overrightarrow{OA} = 4,5\vec{e}$, $\overrightarrow{OB} = -7,2\vec{e}$, $\overrightarrow{OC} = -3,6\vec{e}$.

a. Xác định tọa độ các điểm A, B, C.

b. Tìm tọa độ các trung điểm M, N, P theo thứ tự của các đoạn thẳng AB, BC, CA.

c. Tính độ dài các đoạn thẳng AB, BC, CA.

Lời giải.



a. $A(4,5)$, $B(-7,2)$, $C(-3,6)$.

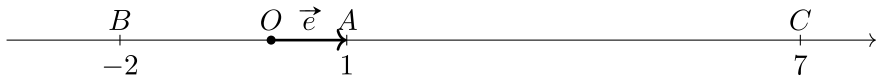
b. Vì M là trung điểm $AB \Rightarrow x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = -1,35 \Rightarrow M(-1,35)$. Tương tự ta được $N(-5,4)$, $P(0,45)$.

c. $\overline{AB} = 11,7$, $\overline{BC} = 3,6$, $\overline{CA} = 8,1$.

□

Ví dụ 2. Trên trục tọa độ $(O, \vec{e})$, cho ba điểm $A(1)$, $B(-2)$, $C(7)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overline{AM} + 3\overline{BM} = 2\overline{CM}$.

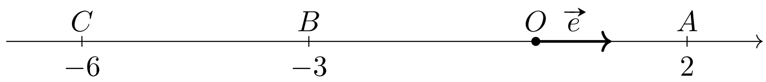
Lời giải.



Gọi $M(x)$, ta có $\overline{AM} = x - 1$, $\overline{BM} = x + 2$, $\overline{CM} = x - 7$.
Theo giả thiết ta suy ra $x - 1 + 3(x + 2) = 3(x - 7) \Leftrightarrow x = -26$. □

Ví dụ 3. Trên trục tọa độ $(O, \vec{e})$, cho các điểm $A(2)$, $B(-3)$, $C(-6)$. Tìm tọa độ của $D(x)$ sao cho $\overline{DA} + 4\overline{DB} \leq 3\overline{DC}$.

Lời giải.



Ta có: $\overline{DA} = 2 - x$, $4\overline{DB} = -12 - 4x$, $3\overline{DC} = -18 - 3x$.
Theo giả thiết ta suy ra $2 - x - 12 - 4x \leq -18 - 3x \Rightarrow x \geq 4$. □

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{a} = (-4;2)$, $\vec{b} = (5;8)$. Tính tọa độ của các véc-tơ $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $3\vec{a}$, $5\vec{a} + 2\vec{b}$, $-(5\vec{a} - 2\vec{b})$.

Lời giải.
$\vec{a} + \vec{b} = (1;10)$, $\vec{a} - \vec{b} = (-9;-6)$, $3\vec{a} = (-12;6)$.
Ta có: $5\vec{a} = (-20;10)$, $2\vec{b} = (10;16)$
Nên $5\vec{a} + 2\vec{b} = (-10;26)$ và $-(5\vec{a} - 2\vec{b}) = (30;6)$. □

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng Oxy, cho các véc-tơ $\vec{a} = (4;-2)$, $\vec{b} = (-1;-1)$, $\vec{c} = (2;5)$. Hãy phân tích véc-tơ $\vec{b}$ theo hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{c}$.

Lời giải.

Giả sử $\vec{b} = m\vec{a} + n\vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 4m + 2n \\ -1 = -2m + 5n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\dfrac{1}{8} \\ n = -\dfrac{1}{4}. \end{cases}$

Vậy $\vec{b} = -\dfrac{1}{8}\vec{a} - \dfrac{1}{4}\vec{c}$. □

Ví dụ 6. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{a} = (x;2)$, $\vec{b} = \left(-5;\dfrac{1}{3}\right)$, $\vec{c} = (x;7)$. Tìm véc-tơ $\vec{c} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$.

Lời giải.

Ta có: $\vec{c} = 4\vec{a} - 3\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4x - 3.(-5) \\ 7 = 4.2 - 3.\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = -5.$ □

Ví dụ 7. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{a}(1;-2)$; $\vec{b}(-3;0)$; $\vec{c}(4;1)$. Tìm tọa độ của $\vec{t} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

Lời giải.

Ta có $2\vec{a} = (2;-4)$; $-3\vec{b} = (9;0)$.
Mà $\vec{t} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} = (15;-3) \Rightarrow \vec{t}\,(15;-3)$. □

2. Bài tập rèn luyện

Bài 1. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{a} = (2;1)$, $\vec{b} = (3;4)$, $\vec{c} = (7;2)$.

a. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

b. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{v}$ sao cho $\vec{v} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$.

c. Tìm các số k, h để $\vec{c} = k\vec{a} + h\vec{b}$.

Lời giải.

a. $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} = (4;2) - (9;12) + (7;2) = (2;-8)$.

b. $\vec{v} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c} \Leftrightarrow \vec{v} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = (-6;1)$.

c. $\vec{c} = k\vec{a} + h\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 2k + 7h \\ 2 = k + 4h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{22}{5} \\ h = -\dfrac{3}{5} \end{cases}$. Suy ra $\vec{c} = \dfrac{22}{5}\vec{a} - \dfrac{3}{5}\vec{b}$.

□

Bài 2. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{a} = (-1;3)$, $\vec{b} = (0;5)$, $\vec{c} = (5;-2)$. Tính tọa độ của các véc-tơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ định bởi:

a) $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c}$.

b) $4\vec{a} + 2\vec{v} = 2\vec{b} - 3\vec{c}$.

Lời giải.

a) Ta có: $2\vec{a} = (-2;6)$, $3\vec{b} = (0;15)$, $4\vec{c} = (20;-8)$, $2\vec{a} + 3\vec{b} = (-2;21)$.
$\Rightarrow \vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c} = (-22;29)$.

b) Ta có: $4\vec{a} + 2\vec{v} = 2\vec{b} - 3\vec{c} \Rightarrow \vec{v} = -2\vec{a} + \vec{b} - \dfrac{3}{2}\vec{c}$.
mà $-2\vec{a} = (2;-6)$, $\dfrac{3}{2}\vec{c} = \left(\dfrac{15}{2};-3\right)$, $-2\vec{a} + \vec{b} = (2;-1)$.
$\Rightarrow \vec{v} = -2\vec{a} + \vec{b} - \dfrac{3}{2}\vec{c} = \left(-\dfrac{11}{2};2\right)$.

□

Bài 3. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{a} = (x;2)$, $\vec{b} = (-5;1)$, $\vec{c} = (x;7)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.

Lời giải.

Ta có: $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2x+3.(-5) \\ 7=2.2+3.1 \end{cases} \Leftrightarrow x=15.$ □

Bài 4. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{a}=(2;1)$, $\vec{b}=(3;4)$, $\vec{c}=(7;2)$. Tìm tọa độ $\vec{c}=m.\vec{a}+n.\vec{b}$.

Lời giải.

Ta có: $\vec{c}=m.\vec{a}+n.\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 7=2m+3n \\ 2=m+4n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\dfrac{22}{5} \\ n=-\dfrac{3}{5}. \end{cases}$ □

Bài 5. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{a}=(-2;1)$, $\vec{b}=(3;4)$ và $\vec{c}=(0;8)$. Tìm tọa độ $\vec{x}$ thỏa $\vec{x}+\vec{a}=\vec{b}-\vec{c}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{x}+\vec{a}=\vec{b}-\vec{c} \Leftrightarrow \vec{x}=-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c} \Leftrightarrow \vec{x}=-(-2;1)+(3;4)-(0;8) \Leftrightarrow \vec{x}=-(-2;1)+(3;4)-(0;8) \Leftrightarrow \vec{x}=(5;-5).$ □

Bài 6. Cho $\vec{a}=(0;1)$, $\vec{b}=(-1;2)$, $\vec{c}=(-3;-2)$. Tìm tọa độ của $\vec{u}=3\vec{a}+2\vec{b}-4\vec{c}$.

Lời giải.

Ta có: $3\vec{a}=(0;3)$, $2\vec{b}=(-2;4)$, $-4\vec{c}=(12;8)$ nên $\vec{u}=(10;15)$. □

Bài 7. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{a}=(2;1)$, $\vec{b}=(3;4)$, $\vec{c}=(7;2)$. Tìm m và n để $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$.

Lời giải.

Ta có: $m\vec{a}+n\vec{b}=(2m+3n;m+4n)$.

Mà: $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+3n=7 \\ m+4n=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\dfrac{22}{5} \\ n=-\dfrac{3}{5}. \end{cases}$ □

Bài 8. Trên trục Ox cho các điểm $A(2)$, $B(-2)$. Tìm điểm $M(x)$ thỏa mãn điều kiện $\overline{MA}.\overline{MB} \leq \overline{AB}^2$.

Lời giải.

Ta có: $\overline{MA}=2-x$, $\overline{MB}=-2-x$, $\overline{AB}=-4$.

$\overline{MA}.\overline{MB} \leq \overline{AB}^2 \Leftrightarrow (2-x)(2+x) \geq -16 \Leftrightarrow x^2-8 \leq 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{5} \leq x \leq 2\sqrt{5}.$ □

Bài 9. Trên trục tọa độ $(O;\vec{e})$, cho ba điểm $A(-4)$, $B(9)$, $C(-3)$.

a. Tìm điểm $M(x)$ thỏa mãn điều kiện $\overline{AB}=2\overline{CM}$.

b. Tìm điểm $P(x)$ thỏa mãn điều kiện $\overline{PA}+2\overline{PB}+3\overline{PC} \leq 0$.

c. Tìm điểm $Q(x)$ thỏa mãn điều kiện $\overline{QA}.\overline{QB} \leq \overline{QC}^2$.

Lời giải.

a. $\overline{AB}=13$, $2\overline{CM}=2x+6$. Theo giả thiết ta suy ra $13=2x+6 \Leftrightarrow x=\dfrac{7}{2}$.

b. $\overline{PA}=-4-x$, $2\overline{PB}=18-2x$, $3\overline{PC}=-9-3x$.
Theo giả thiết ta suy ra $-4-x+18-2x-9-3x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{5}{6}$.

c. $\overline{QA}=-4-x$, $\overline{QB}=9-x$, $\overline{QC}=-3-x$.

Theo giả thiết ta suy ra $(-4-x)(9-x) \le (-3-x)^2 \Leftrightarrow x \ge -\dfrac{45}{11}$.

□

Bài 10. Trên trục tọa độ $x'Ox$ cho ba điểm A, B, C có tọa độ lần lượt là 9, -6, 2. Tìm các điểm đối xứng với điểm A và B qua C.

Lời giải.

Gọi A', B' lần lượt là điểm đối xứng với điểm A và B qua C.

Vì C là trung điểm của đoạn AA' nên $x_C = \dfrac{x_A + x_{A'}}{2} \Rightarrow x_{A'} = 2x_C - x_A = 4 - 9 = -5$.

Tương tự ta suy ra $x_{B'} = 4 + 6 = 10$.

□

Dạng 2. Xác định tọa độ của một véc-tơ và một điểm trên mặt phẳng tọa độ Oxy

Trong mặt phẳng Oxy, với điểm M tùy ý, luôn tồn tại duy nhất hai số thực x, y sao cho $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Bộ hai số thực $(x; y)$ được gọi là *tọa độ* của véc-tơ $\overrightarrow{OM}$, ký hiệu $\overrightarrow{OM} = (x; y)$ hay $\overrightarrow{OM}(x; y)$.

- *Tọa độ của véc-tơ đơn vị* $\vec{i}$ *là* $(1; 0)$, *tức là* $\vec{i} = (1; 0)$.
- *Tọa độ của véc-tơ đơn vị* $\vec{j}$ *là* $(0; 1)$, *tức là* $\vec{j} = (0; 1)$.
- *Tọa độ của véc-tơ-không là* $(0; 0)$, *tức là* $\vec{0} = (0; 0)$.

Nếu biết tọa độ của hai điểm A, B thì ta tính tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ theo công thức

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A).$$

1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 8. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(3; 2)$, $B(2; -1)$, $C(-2; -2)$. Tìm tọa độ điểm D.

Lời giải.

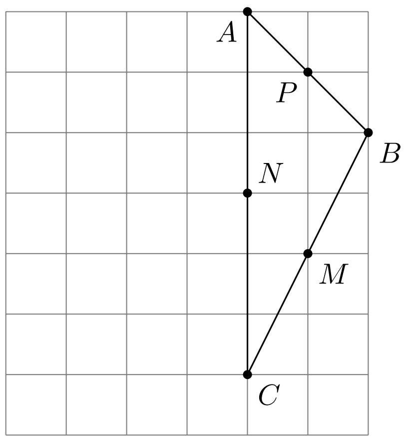
Gọi $D(x; y)$. Ta có $\overrightarrow{AD} = (x-3; y-2)$, $\overrightarrow{BC} = (-4; -1)$.

Vì $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ nên $\begin{cases} x - 3 = -4 \\ y - 2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1. \end{cases}$

Vậy tọa độ điểm D là $(-1; 1)$. □

Ví dụ 9. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC. Gọi $M(4; -1), N(3; 0)$ và $P(4; 2)$ lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA và AB. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Lời giải.



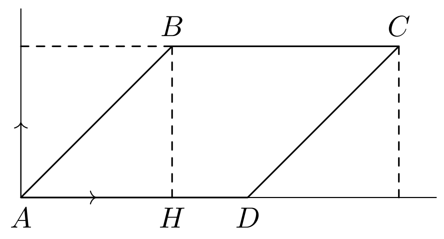
Ta có $\overrightarrow{NA} = (x_A - 3; y_A), \overrightarrow{MP} = (0; 3)$.
Vì $NAPM$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{MP}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A - 3 = 0 \\ y_A = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 3 \\ y_A = 3. \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm A là $(3; 3)$.
Tương tự, từ $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{PN}, \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{NP}$ ta tính được $B(5; 1), C(3; -3)$. □

Ví dụ 10. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình bình hành $ABCD$ có $AD = 3$ và chiều cao ứng với cạnh AD bằng 2 góc $\widehat{BAD} = 30°$. Chọn hệ trục tọa độ $(A; \vec{i}, \vec{j})$ sao cho $\vec{i}$ và $\overrightarrow{AD}$ cùng hướng. Tìm tọa độ của các véc-tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.



Kẻ $BH \perp AD$. Ta có $BH = 2,\ AB = 4,\ AH = 2\sqrt{3}$.
Do đó ta có $A(0; 0)$, $B(2; 2)$, $C(5; 2)$, $D(3; 0)$.
Suy ra $\overrightarrow{AB} = (2; 2), \overrightarrow{BC} = (3; 0), \overrightarrow{CD} = (-2; -2), \overrightarrow{AC} = (5; 2)$. □

2. Bài tập rèn luyện

Bài 11. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có $A(-1; 4)$, $B(2; 6)$, $C(1; 1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải.
Gọi $D(x; y)$. Ta có $\overrightarrow{AD} = (x + 1; y - 4)$, $\overrightarrow{BC} = (-1; -5)$.

Vì $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ nên $\begin{cases} x + 1 = -1 \\ y - 4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1. \end{cases}$

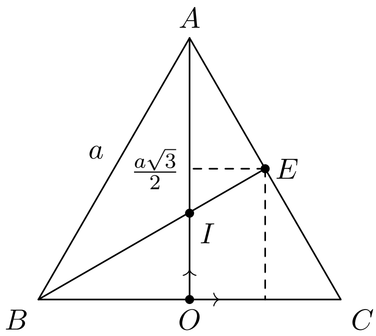
Vậy tọa độ điểm D là $(-2; -1)$. □

Bài 12. Trong mặt phẳng Oxy, cho bốn điểm $A(1; -1)$, $B(2; 2)$, $C(1; -5)$, $D(3; 1)$. Chứng minh rằng hai đường thẳng AB và CD song song với nhau.

Lời giải.
Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 3), \overrightarrow{CD} = (2; 6)$.
Suy ra $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$. Do đó hai đường thẳng AB và CD song song hoặc trùng nhau.
Ta có $\overrightarrow{AC} = (0; -4)$ và $\overrightarrow{AB} = (1; 3)$ không cùng phương vì $\dfrac{0}{1} \neq \dfrac{-4}{3}$.
Vậy $AB \parallel CD$. □

Bài 13. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Chọn hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$, trong đó O là trung điểm của cạnh BC, $\vec{i}$ cùng hướng với $\overrightarrow{OC}$, $\vec{j}$ cùng hướng với $\overrightarrow{OA}$.
a) Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC;
b) Tìm tọa độ trung điểm E của cạnh AC;
c) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải.



a) Ta có $B\left(-\frac{a}{2};0\right)$, $C\left(0;\frac{a}{2}\right)$.

Vì $\triangle ABC$ là tam giác đều nên $AO=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $A\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

b) $E\left(\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$.

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Ta có $OI=\frac{1}{3}OA=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Suy ra $I\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$. □

Dạng 3. Tính tọa độ trung điểm - trọng tâm

Phương pháp giải, kinh nghiệm giải.

M là trung điểm $AB \Leftrightarrow \begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}\\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}.\end{cases}$

G là trọng tâm tam giác $ABC \Leftrightarrow \begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}\\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}.\end{cases}$

1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 11. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(1;4)$, $B(-2;6)$. Tìm tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB.

Lời giải.

Gọi $M\left(x_M;y_M\right)$ là trung điểm AB, khi đó:

$$\begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}\\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M=\dfrac{1-2}{2}\\ y_M=\dfrac{4+6}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M=-\dfrac{1}{2}\\ y_M=5.\end{cases}$$

Vậy $M\left(\frac{-1}{2};5\right)$. □

Ví dụ 12. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(-1;2)$, $B(1;4)$, $C(-1;-2)$. Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác ABC.

Lời giải.

Gọi $G\left(x_G;y_G\right)$ là trọng tâm tam giác ABC, khi đó:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{-1+1-1}{3} \\ y_G = \dfrac{2+4-2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{-1}{3} \\ y_G = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Vậy $G\left(\dfrac{-1}{3}; \dfrac{4}{3}\right)$. □

Ví dụ 13. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(3;1)$, $B(2;2)$, $G(2;-1)$. Tìm tọa độ điểm C biết G là trọng tâm tam giác ABC.

Lời giải.

Gọi $C\left(x_C; y_C\right)$.
Ta có:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \dfrac{3+2+x_C}{3} \\ -1 = \dfrac{1+2+y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 1 \\ y_C = -6. \end{cases}$$

Vậy $C\left(1;-6\right)$. □

Ví dụ 14. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(-2;0)$, $B(0;-4)$. Gọi M là trung điểm của AB, tìm tọa độ trọng tâm tam giác OBM.

Lời giải.

Gọi $G\left(x_G; y_G\right)$ là trọng tâm tam giác OBM, $M\left(x_M; y_M\right)$ là trung điểm AB.
Ta có:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -1 \\ y_M = -2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_O + x_B + x_M}{3} \\ y_G = \dfrac{y_O + y_B + y_M}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{-1}{3} \\ y_G = \dfrac{-4-2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{-1}{3} \\ y_G = -2. \end{cases}$$

Vậy $G\left(\dfrac{-1}{3}; -2\right)$. □

Ví dụ 15. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC biết $A(1;5)$, $B(-4;-3)$, $C(2;-1)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, tìm tọa độ điểm G' là điểm đối xứng của G qua B.

Lời giải.

Gọi $G\left(x_G; y_G\right)$, $G'\left(x'_G; y'_G\right)$. Ta có:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{1-4+2}{3} \\ y_G = \dfrac{5-3-1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{-1}{3} \\ y_G = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Vì G' là ảnh đối xứng của G qua B nên B là trung điểm của GG'. Ta có:

$$\begin{cases} x_{G'} = 2x_B - x_G \\ y_{G'} = 2y_B - y_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{G'} = 2.(-4) - \dfrac{-1}{3} \\ y_{G'} = 2.(-3) - \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{G'} = \dfrac{-23}{3} \\ y_{G'} = \dfrac{-19}{3}. \end{cases}$$

Vậy $G\left(\dfrac{-23}{3}; \dfrac{-19}{3}\right)$. □

2. Bài tập rèn luyện

Bài 14. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(0;2)$, $B(-3;-2)$. Tìm tọa độ trung điểm của AB.

Lời giải.

Gọi $M\left(x_M, y_M\right)$ là trung điểm AB, khi đó:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{0-3}{2} \\ y_M = \dfrac{2-2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{-3}{2} \\ y_M = 0. \end{cases}$$

Vậy $M\left(\dfrac{-3}{2}; 0\right)$. □

Bài 15. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(-1;2)$, $B(5;-2)$, $C(-2;1)$. Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác ABC.

Lời giải.

Gọi $G\left(x_G; y_G\right)$ là trọng tâm tam giác ABC, khi đó:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{-1+5-2}{3} \\ y_G = \dfrac{2-2+1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{2}{3} \\ y_G = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Vậy $G\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$. □

Bài 16. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(-1;1)$, $D\left(-1; \dfrac{5}{2}\right)$.

a) Tìm tọa độ điểm B biết D là trung điểm đoạn AB.

b) Tìm tọa độ điểm M đối xứng với A qua B.

Lời giải.

a) Gọi $B\left(x_B; y_B\right)$.
Ta có:
$$\begin{cases} x_D = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_D = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = \dfrac{-1 + x_B}{2} \\ \dfrac{5}{2} = \dfrac{1 + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = -1 \\ y_B = 4. \end{cases}$$
Vậy $B\left(-1; 4\right)$.

b) Gọi $M\left(x_M; y_M\right)$ là điểm đối xứng với A qua B, khi đó B là trung điểm của MA.
Ta có:
$$\begin{cases} x_M = 2x_B - x_A \\ y_M = 2y_B - y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 2.(-1) - (-1) \\ y_M = 2.4 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -1 \\ y_M = 7. \end{cases}$$
Vậy $M\left(-1; 7\right)$.

□

Bài 17. Trọng mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC biết $A(-3;2)$, $B(4;3)$ và điểm C nằm trên trục Ox. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC và điểm C, biết G nằm trên trục Oy.

Lời giải.

Gọi $G\left(0; y_G\right)$, $C\left(x_C; 0\right)$

Ta có: $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \dfrac{-3 + 4 + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{2 + 3 + 0}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = -1 \\ y_G = \dfrac{5}{3}. \end{cases}$

Vậy $G\left(0; \dfrac{5}{3}\right)$, $C(-1; 0)$. □

Bài 18. Trong mặt phẳng Oxy, tìm tọa độ trọng tâm của tam giác ABC, biết trung điểm của các cạnh AB, BC, AC lần lượt là $M(2; 1)$, $N(2; 4)$, $P(-3; 0)$.

Lời giải.

Gọi $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$ là tọa độ ba đỉnh của tam giác ABC.
$G(x_G; y_G)$ là trọng tâm tam giác ABC.
Ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{x_A + x_B}{2} = x_M \\ \dfrac{x_B + x_C}{2} = x_N \\ \dfrac{x_A + x_C}{2} = x_P \end{cases} \text{ và } \begin{cases} \dfrac{y_A + y_B}{2} = y_M \\ \dfrac{y_B + y_C}{2} = y_N \\ \dfrac{y_A + y_C}{2} = y_P \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B + x_C = x_M + x_N + x_P \\ y_A + y_B + y_C = y_M + y_N + y_P. \end{cases}$$

Khi đó: $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{2} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_M + x_N + x_P}{3} \\ y_G = \dfrac{y_M + y_N + y_P}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{2 + 2 + (-3)}{3} = \dfrac{1}{3} \\ y_G = \dfrac{1 + 4 + 0}{3} = \dfrac{5}{3}. \end{cases}$

Vậy $G\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{5}{3}\right)$. □

Dạng 4. Chứng minh ba điểm thẳng hàng, điểm thuộc đường thẳng

Sử dụng các điều kiện cần và đủ sau:

- Hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương khi và chỉ khi tồn tại số k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.
- Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.
- Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi ba điểm M, A, B thẳng hàng.

1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 16. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(-1; 1)$, $B(1; 3)$, $C(2; 4)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

b) Đường thẳng AB cắt trục Ox tại điểm M. Tìm tọa độ điểm M.

Lời giải.

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2; 2)$ và $\overrightarrow{AC} = (3; 3) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương. Do đó, ba điểm A, B, C thẳng hàng.

b) Vì Đường thẳng AB cắt trục Ox tại điểm M nên ba điểm M, A, B thẳng hàng. Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương.
Gọi $M(x; 0)$ thuộc trục Ox. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2; 2)$ và $\overrightarrow{AM} = (x + 1; -1)$.
$\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{x + 1}{2} = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = -2$.
Vậy $M(-2; 0)$.

Ví dụ 17. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba véc-tơ $\vec{a} = (1;2)$, $\vec{b} = (-3;1)$ và $\vec{c} = (6;5)$. Tìm m để véc-tơ $\vec{u} = m\vec{a} + \vec{b}$ cùng phương với $\vec{c}$.

Lời giải.

Ta có: $\vec{u} = m\vec{a} + \vec{b} = (m-3; 2m+1)$.

Suy ra: $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{c} \Leftrightarrow \dfrac{m-3}{6} = \dfrac{2m+1}{5} \Leftrightarrow m = -3$.

Vậy $m = -3$.

Ví dụ 18. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(5;5)$, $B(6;-2)$, $C(-2;4)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải.

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1;-7)$ và $\overrightarrow{AC} = (-7;-1)$.
Vì $\dfrac{1}{-7} \neq \dfrac{-7}{-1}$ nên hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.
Suy ra ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Do đó A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Gọi $D(x;y)$. Ta có: $\overrightarrow{AD} = (x-5; y-5)$ và $\overrightarrow{BC} = (-8;6)$.
$ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-5=-8 \\ y-5=6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=11. \end{cases}$
Vậy $D(-3;11)$.

Ví dụ 19. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(-2;1)$ và $B(-4;5)$.

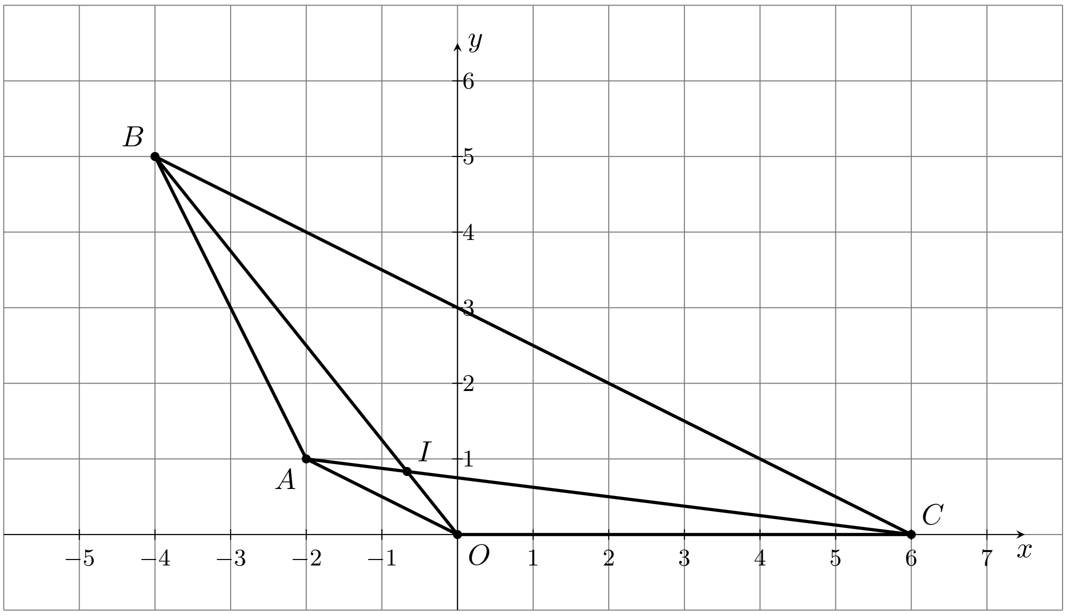
a) Tìm trên trục Ox điểm C sao cho $ABCO$ là hình thang có cạnh đáy là AO.

b) Tìm tọa độ giao điểm I của hai đường chéo của hình thang $ABCO$.

Lời giải.

a) Gọi $C(x;0)$ thuộc trục Ox. Vì $ABCO$ là hình thang có cạnh đáy là AO nên $AO \parallel BC$. Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{AO}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương.
Ta có: $\overrightarrow{AO} = (2;-1)$ và $\overrightarrow{BC} = (x+4;-5)$.
$\overrightarrow{AO}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{x+4}{2} = \dfrac{-5}{-1} \Leftrightarrow x = 6$.
Vậy $C(6;0)$.

b) Gọi $I(x;y)$ là giao điểm hai đường chéo OB và AC của hình thang $ABCO$.



Ta có: $\overrightarrow{OI} = (x; y)$, $\overrightarrow{OB} = (-4; 5)$, $\overrightarrow{AI} = (x+2; y-1)$, $\overrightarrow{AC} = (8; -1)$.

Ta có: O, I, B thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{OI}$ và $\overrightarrow{OB}$ cùng phương $\dfrac{x}{-4} = \dfrac{y}{5} \Leftrightarrow 5x + 4y = 0$ (1).

Lại có: A, I, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương $\dfrac{x+2}{8} = \dfrac{y-1}{-1} \Leftrightarrow x + 8y = 6$ (2).

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 5x + 4y = 0 \\ x + 8y = 6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{5}{6}. \end{cases}$

Vậy $I\left(-\dfrac{2}{3}; \dfrac{5}{6}\right)$.

□

2. Bài tập rèn luyện

Bài 19. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm phân biệt $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$. Ta nói điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k \neq 1$ nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$. Chứng minh rằng:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k} \\ y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k}. \end{cases}$$

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - x_M = k(x_B - x_M) \\ y_A - y_M = k(y_B - y_M). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k} \\ y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k}. \end{cases}$

Khi $k = -1$ thì $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$, M là trung điểm của đoạn thẳng AB. □

Bài 20. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC với $A(0; 2)$, $B(1; 1)$ và $C(-1; -2)$. Các điểm A', B', C' lần lượt chia các đoạn thẳng BC, CA, AB theo các tỉ số $\dfrac{1}{2}$, -2, -1.

a) Tìm tọa độ các điểm A', B', C'.

b) Chứng minh ba điểm A', B', C' thẳng hàng.

Lời giải.

a) Ta có:

$\overrightarrow{A'B} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{A'C} \Rightarrow A'(3;4)$.

$\overrightarrow{B'C} = -2\overrightarrow{B'A} \Rightarrow B'\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)$.

$\overrightarrow{C'A} = -\overrightarrow{C'B} \Rightarrow C'\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

b) Ta có: $\overrightarrow{A'B'} = \left(-\dfrac{10}{3};-\dfrac{10}{3}\right)$ và $\overrightarrow{A'C'} = \left(-\dfrac{5}{2};-\dfrac{5}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{A'C'}$.

Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{A'B'}$ và $\overrightarrow{A'C'}$ cùng phương. Do đó, ba điểm A', B', C' thẳng hàng.

□

Bài 21. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(5;0)$, $B(3;-2)$. Đường thẳng AB cắt trục Oy tại điểm M. Trong ba điểm A, B, M, điểm nào nằm giữa hai điểm còn lại?

Lời giải.

Vì Đường thẳng AB cắt trục Oy tại điểm M nên ba điểm M, A, B thẳng hàng. Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương.

Gọi $M(0;m)$ thuộc trục Oy. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2;-2)$ và $\overrightarrow{AM} = (-5;m)$.

$\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{-5}{-2} = \dfrac{m}{-2} \Leftrightarrow m = -5$.

Suy ra $M(-2;0)$. Khi đó, ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2;-2)$ và $\overrightarrow{AM} = (-5;-5)$, suy ra $\overrightarrow{AB} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AM}$.

Vậy điểm B nằm giữa hai điểm A và M. □

Bài 22. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(6;4)$, $B(3;-2)$, $C\left(\dfrac{1}{2};2\right)$.

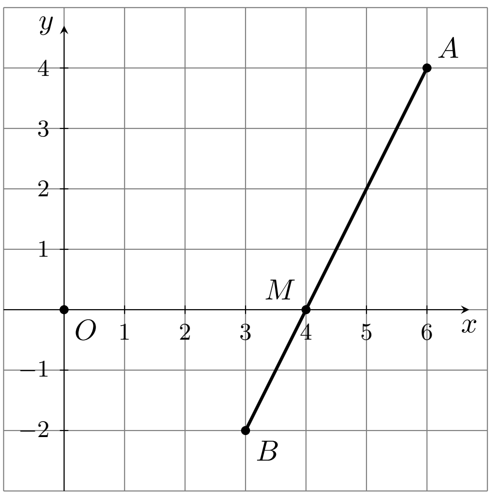
a) Tìm trên trục hoành điểm M sao cho $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Tìm trên trục hoành điểm N sao cho $NA + NC$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

a)

Ta có hai điểm A và B nằm về hai phía đối với trục hoành.
Với mọi $M \in Ox$, ta có $MA + MB \geq AB$ và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ba điểm A, M, B thẳng hàng.
Vậy $MA + MB$ có giá trị nhỏ nhất là bằng AB, đạt được khi M là giao điểm của của đường thẳng AB và trục hoành.
Vì M là giao điểm của của đường thẳng AB và trục hoành nên ba điểm M, A, B thẳng hàng. Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương.
Gọi $M(x;0)$ thuộc trục Ox. Ta có: $\overrightarrow{AM} = (x-6;-4)$ và $\overrightarrow{AB} = (-3;-6)$.

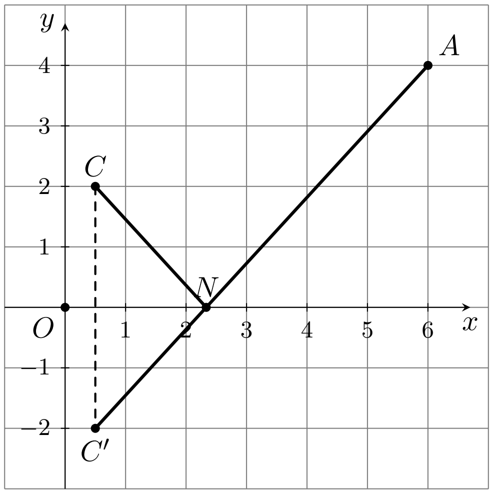


$\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{x-6}{-3} = \dfrac{-4}{-6} \Leftrightarrow x = 4$.

Vậy $M(4;0)$.

b)

Ta có hai điểm A và C nằm về một phía đối với trục hoành.
Gọi C' là điểm đối xứng với C qua trục hoành. Khi đó, ta có $C'\left(\frac{1}{2};-2\right)$.
Với mọi $N \in Ox$, ta có $NA + NC = NA + NC' \geq AC'$ và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ba điểm A, N, C' thẳng hàng.
Vậy $NA + NC$ có giá trị nhỏ nhất là bằng AC', đạt được khi N là giao điểm của của đường thẳng AC' và trục hoành.
Vì N là giao điểm của của đường thẳng AC' và trục hoành nên ba điểm N, A, C' thẳng hàng. Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{AC'}$ cùng phương.



Gọi $N(x;0)$ thuộc trục Ox. Ta có: $\overrightarrow{AN} = (x-6;-4)$ và $\overrightarrow{AC'} = \left(-\frac{11}{2};-6\right)$.

$\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{AC'}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{-2(x-6)}{11} = \frac{-4}{-6} \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}$.

Vậy $N\left(\frac{7}{3};0\right)$.

□

Bài 23. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(6;4)$, $B(2;3)$, $C(-2;1)$.

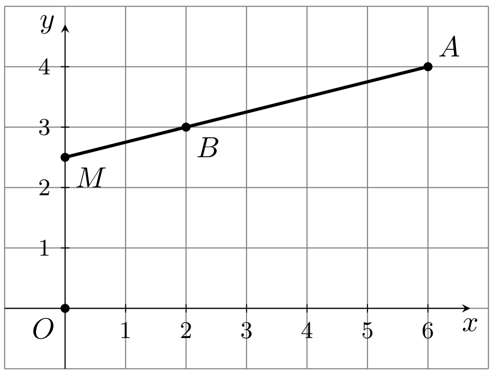
a) Tìm trên trục tung điểm M sao cho $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

b) Tìm trên trục tung điểm N sao cho $|NA - NC|$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

a)

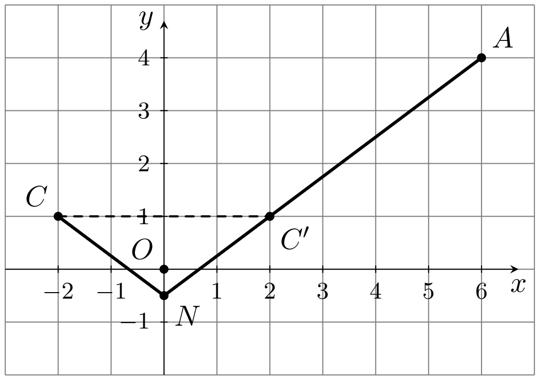
Ta có hai điểm A và B nằm về một phía đối với trục tung.
Với mọi $M \in Oy$, ta có $|MA - MB| \leq AB$ và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ba điểm A, M, B thẳng hàng.
Vậy $|MA - MB|$ có giá trị lớn nhất là bằng AB, đạt được khi M là giao điểm của của đường thẳng AB và trục tung.
Vì M là giao điểm của của đường thẳng AB và trục tung nên ba điểm M, A, B thẳng hàng. Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương.



Gọi $M(0;y)$ thuộc trục Oy. Ta có: $\overrightarrow{AM} = (-6;y-4)$ và $\overrightarrow{AB} = (-4;-1)$.
$\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{-6}{-4} = \frac{y-4}{-1} \Leftrightarrow y = \frac{5}{2}$.

Vậy $M\left(0;\frac{5}{2}\right)$.

b)



Ta có hai điểm A và C nằm về hai phía đối với trục hoành. Gọi C' là điểm đối xứng với C qua trục tung. Khi đó, ta có $C'(2;1)$.
Với mọi $N \in Oy$, ta có $|NA - NC| = |NA - NC'| \leq AC'$ và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ba điểm A, N, C' thẳng hàng.
Vậy $|NA - NC|$ có giá trị lớn nhất là bằng AC', đạt được khi N là giao điểm của của đường thẳng AC' và trục tung.

Vì N là giao điểm của của đường thẳng AC' và trục tung nên ba điểm N, A, C' thẳng hàng. Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{AC'}$ cùng phương.
Gọi $N(0;y)$ thuộc trục Oy. Ta có: $\overrightarrow{AN} = (-6; y-4)$ và $\overrightarrow{AC'} = (-4;-3)$.
$\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{AC'}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{-6}{-4} = \dfrac{y-4}{-3} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$.
Vậy $N\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$.

□

C – BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 24. Trong mặt phẳng Oxy, tìm tọa độ của các véc-tơ sau:
a) $\vec{a} = -5\vec{i}$;
b) $\vec{b} = 7\vec{j}$;
c) $\vec{c} = -3\vec{i} + 8\vec{j}$;
d) $\vec{d} = 0,5\vec{i} - \sqrt{11}\vec{j}$.

Lời giải.
a) $\vec{a} = -5\vec{i} = (-5;0)$;
b) $\vec{b} = 7\vec{j} = (0;7)$;
c) $\vec{c} = -3\vec{i} + 8\vec{j} = (-3;8)$;
d) $\vec{d} = 0,5\vec{i} - \sqrt{11}\vec{j} = (0,5;-\sqrt{11})$. □

Bài 25. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(-3;-1)$, $B(1;1)$ và $C(7;4)$.
a) Tìm tọa độ của $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$. Chứng minh A, B, C thẳng hàng.
b) Chứng minh A, B, O không thẳng hàng. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABO.
c) Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành để A, B, D thẳng hàng.

Lời giải.
a)Ta có $\overrightarrow{AB} = (4;2), \overrightarrow{BC} = (6;3)$.
Suy ra $\overrightarrow{AB} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.
Do đó hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ cùng phương.
Vậy A, B, C thẳng hàng.
b) Ta có $\overrightarrow{AO} = (3;1)$. Suy ra $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AO}$ là hai véc-tơ không cùng phương.
Do đó A, B, O không thẳng hàng.
Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABO
$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_O}{3} = \dfrac{-3+1+0}{3} = \dfrac{-2}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_O}{3} = \dfrac{-1+1+0}{3} = 0. \end{cases}$$
Vậy $G\left(-\dfrac{2}{3};0\right)$.

c) Vì $D \in Ox$ nên $D(x;0)$ và $\overrightarrow{AD} = (x+3;1)$
Do A, B, D thẳng hàng nên $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ cùng phương
$\Leftrightarrow \dfrac{x+3}{4} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = -1$.
Vậy $D(-1;0)$. □

Bài 26. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(-2;3)$, $B(2;4)$ và $C(1;-2)$.
a) Chứng minh A, B, C là ba đỉnh của tam giác.
b) Tính tọa độ véc-tơ $\overrightarrow{AM}$ với M là trung điểm của BC.
c) Tính tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Lời giải.
a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (4;1)$ và $\overrightarrow{AC} = (3;-5)$.
Vì $\dfrac{4}{3} \neq \dfrac{1}{-5}$ nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.
Suy ra A, B, C không thẳng hàng.
Vậy A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.
b) Gọi $M(x;y)$ là trung điểm của BC. Ta có
$$\begin{cases} x = \dfrac{2+1}{2} = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{4-2}{2} = 1. \end{cases}$$
Do đó $M\left(\dfrac{3}{2};1\right)$.
Vậy $\overrightarrow{AM} = \left(\dfrac{7}{2};-2\right)$.
c) Gọi $G(x;y)$ là trọng tâm tam giác ABC. Ta có
$$\begin{cases} x = \dfrac{-2+2+1}{3} = \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{3+4-2}{3} = \dfrac{5}{3}. \end{cases}$$
Vậy $G\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3}\right)$. □

Bài 27. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có $A(-2;2)$, $B(1;4)$, $C(5;1)$.
a) Tìm tọa độ trung điểm I của AC.
b) Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải.
a) Gọi $I(x;y)$ là trung điểm của AC. Ta có
$$\begin{cases} x = \dfrac{-2+5}{2} = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{2+1}{2} = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$
Vậy $I\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.
b) Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên I là trung điểm của BD.
Suy ra $\begin{cases} \dfrac{x_D+1}{2} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{y_D+4}{2} = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D+1=3 \\ y_D+4=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 2 \\ x_D = -1. \end{cases}$
Vậy $D(2;-1)$. □

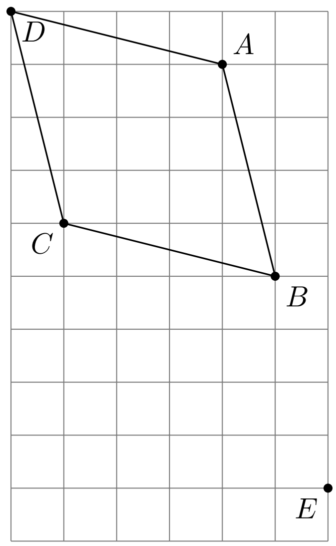
Bài 28. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;-1)$, $B(-3;5)$, $C(4;-7)$.
a) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.
b) Tìm tọa độ điểm D sao cho tức giác $BGCD$ là hình bình hành.

Lời giải.

a) Gọi $G(x;y)$ là trọng tâm tam giác ABC. Ta có
$$\begin{cases} x = \dfrac{2-3+4}{3} = 1 \\ y = \dfrac{-1+5-7}{3} = -1 \end{cases}.$$
Vậy $G(1;-1)$.
b) Ta có $\overrightarrow{CD} = (x_D - 4; y_D + 7), \overrightarrow{GB} = (-4;6)$.
Vì $BGCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{GB}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 4 = -4 \\ y_D + 7 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 0 \\ y_D = -1. \end{cases}$
Vậy tọa độ điểm D là $(0;-1)$. □

Bài 29. Trong mặt phẳng Oxy, cho $A(1;6), B(2;2)$ và $C(-2;3)$.
a) Chứng minh ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác.
b) Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là một hình bình hành.
c) Tìm tọa độ điểm $E(x;-2)$ sao cho A, B, E thẳng hàng.

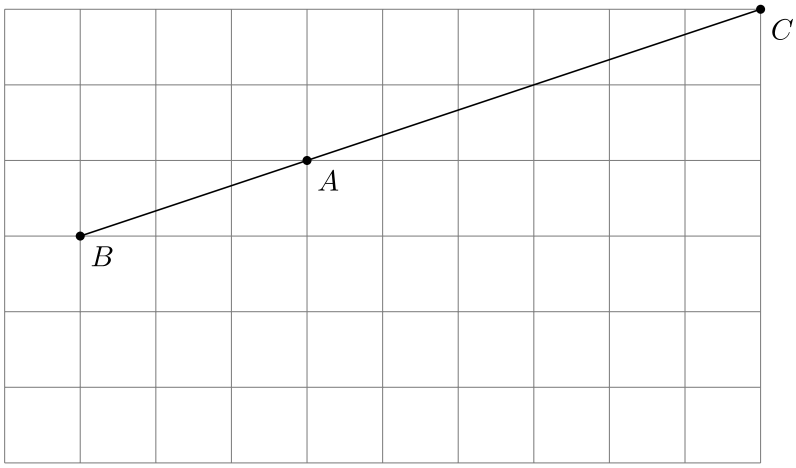
Lời giải.



a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;-4)$ và $\overrightarrow{AC} = (-3;-3)$.
Vì $\dfrac{1}{-3} \neq \dfrac{-4}{-3}$ nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.
Suy ra A, B, C không thẳng hàng.
Vậy A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.
b) Gọi $D(x;y)$. Ta có $\overrightarrow{CD} = (x+2; y-3), \overrightarrow{BA} = (-1;4)$.
Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = -1 \\ y - 3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 7. \end{cases}$
Vậy tọa độ điểm D là $(-3;7)$.
c) Ta có $\overrightarrow{AE} = (x-1;-8), \overrightarrow{AB} = (1;-4)$.
Vì A, B, E thẳng hàng nên $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{-8}{-4}$.
Suy ra $x = 3$.
Vậy $E(3;-2)$. □

Bài 30. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $B(-3;2)$ và $C(6;5)$. Tìm tọa độ điểm A thuộc trục tung sao cho $AB + AC$ bé nhất.

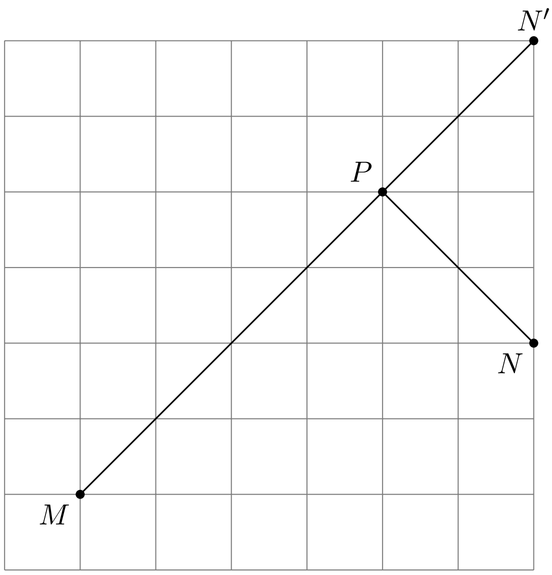
Lời giải.



Vì A thuộc trục tung nên $A(0;y)$.
Ta có $\overrightarrow{BA} = (3; y-2), \overrightarrow{BC} = (9;3)$.
Vì $x_B = -3 < 0$ và $x_C = 6 > 0$ nên B và C nằm về hai phía đối với trục tung.
Do đó $AB + AC$ bé nhất khi và chỉ khi A, B, C thẳng hàng.
Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ cùng phương.
Tức là $\dfrac{3}{9} = \dfrac{y-2}{3} \Leftrightarrow y = 3$.
Vậy $A(0;3)$. □

Bài 31. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $M(-3;-4)$ và $N(3;-2)$. Tìm tọa độ điểm P thuộc trục Ox sao cho $PM + PN$ bé nhất.

Lời giải.



Vì $P \in Ox$ nên $P(x;0)$.
Vì $y_M = -4 < 0$ và $y_N = -2 < 0$ nên M, N nằm cùng phía đối với Ox.
Gọi N' là điểm đối xứng với N qua Ox.
Suy ra $N'(3;2)$ và $\overrightarrow{MN'} = (6;6), \overrightarrow{MP} = (x+3;4)$.
Ta có $PM + PN = PM + PN'$. Do đó $PM + PN$ bé nhất khi và chỉ khi $PM + PN'$ bé nhất.
$PM + PN'$ bé nhất
$\Leftrightarrow P, M, N'$ thẳng hàng
$\Leftrightarrow$ Hai véc-tơ $\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MN'}$ cùng phương
$\Leftrightarrow \dfrac{x+3}{6} = \dfrac{4}{6} \Leftrightarrow x = 1$.
Vậy $P(1;0)$. □

Bài 32. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(1;-2)$, $B(0;4)$, $C(3;2)$. Tìm điểm D sao cho $D \in Ox$ và $ABCD$ là hình thang đáy là AB.

Lời giải.

Gọi $D(x_D;0)$ là điểm cầm tìm.

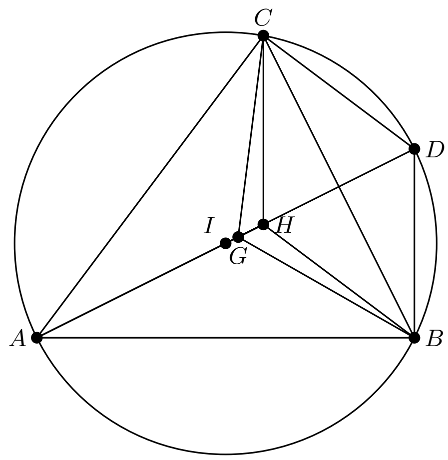
Để $ABCD$ là hình thang thì $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$ $(k > 0)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_B - x_A = k(x_C - x_D) \\ y_B - y_A = k(y_C - y_D) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 - 1 = 3k - k.x_D \\ 4 - (-2) = 2k \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} k = 3 & \text{(nhận)} \\ x_D = \dfrac{10}{3}. \end{cases}$

Vậy $D\left(\dfrac{10}{3};0\right)$. □

Bài 33. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC. Gọi G, I, H lần lượt là trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm của tam giác ABC. Tìm tọa độ trọng tâm G biết $I(0;2)$, $H(3;5)$.

Lời giải.



Kéo dài AI cắt đường tròn tại D.

Ta có: $\widehat{ACD} = 90^0 \Rightarrow CD \perp AC$ mà $BH \perp AC \Rightarrow BH$ song song CD.

Tương tự ta cũng có BD song song HC.

$\Rightarrow HCDB$ là hình bình hành.

Ta có: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Chèn điểm H vào ta suy ra $3\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$.

Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}$.

Ta suy ra được $3\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GH} = 2\overrightarrow{HI}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(x_H - x_G) = 2(x_I - x_H) \\ 3(y_H - y_G) = 2(x_I - x_H) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 5 \\ y_G = 7. \end{cases}$

Vậy $G\,(5;7)$. □

Bài 34. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(5;3)$, $B(2;-3)$, $C(-2;1)$.

a) Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Tìm trên trục hoành điểm M sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

c) Tìm trên trục tung điểm N sao cho $\left|\overrightarrow{NA} - 4\overrightarrow{NB} + 9\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3;-6)$ và $\overrightarrow{AC} = (-7;-2)$.

Vì $\dfrac{-3}{-7} \neq \dfrac{-6}{-2}$ nên hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

Suy ra ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Do đó A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, ta có: $G\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

Ta có: $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = \left|3\overrightarrow{MG}\right| = 3MG$.

Do đó, $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MG$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của G trên trục hoành.

Suy ra $M\left(\dfrac{5}{3};0\right)$.

c) Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} - 4\overrightarrow{IB} + 9\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.
Gọi $I(x; y)$, ta có:

$$\overrightarrow{IA} - 4\overrightarrow{IB} + 9\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 - 4(x-2) + 9(x+2) = 0 \\ y - 3 - 4(y+3) + 9(y-1) = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 21 = 0 \\ 6y - 24 = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{7}{3} \\ y = 4. \end{cases}$$

Suy ra $I\left(-\dfrac{7}{3}; 4\right)$.

Ta có:

$$\left|\overrightarrow{NA} - 4\overrightarrow{NB} + 9\overrightarrow{MC}\right|$$

$$= \left|\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IA} - 4\left(\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IB}\right) + 9\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)\right|$$

$$= \left|6\overrightarrow{NI} + \left(\overrightarrow{IA} - 4\overrightarrow{IB} + 9\overrightarrow{IC}\right)\right|$$

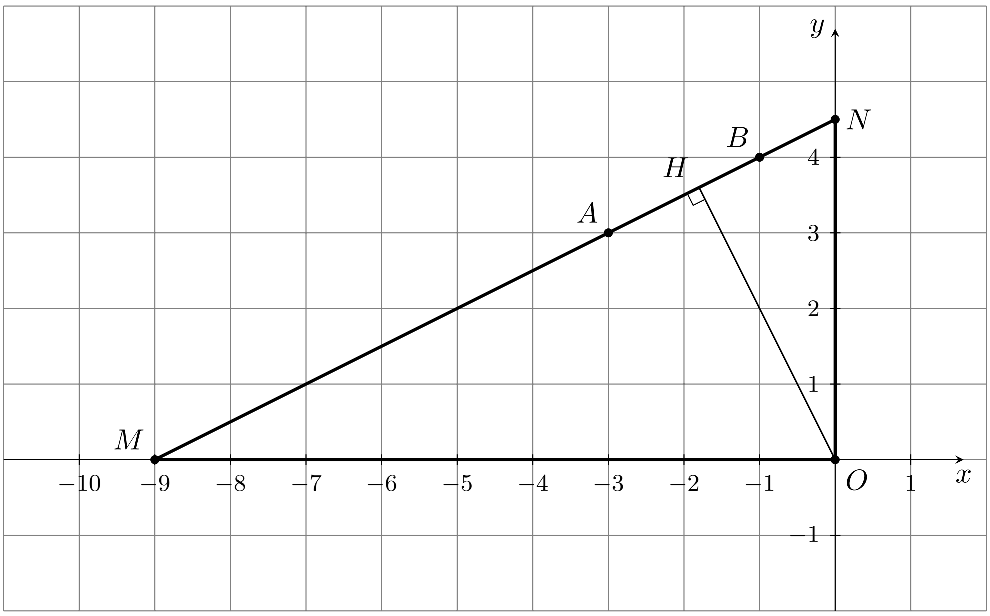
$$= \left|6\overrightarrow{NI}\right| = 6NI.$$

Do đó, $\left|\overrightarrow{NA} - 4\overrightarrow{NB} + 9\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow NI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow N$ là hình chiếu của I trên trục tung.
Suy ra $N(0; 4)$.

□

Bài 35. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(-3; 3)$, $B(-1; 4)$. Đường thẳng đi qua hai điểm A và B cắt trục hoành tại M và cắt trục tung tại N. Tính diện tích tam giác OMN và độ dài đường cao của tam giác OMN kẻ từ O.

Lời giải.



Vì Đường thẳng AB cắt trục Ox tại điểm M nên ba điểm M, A, B thẳng hàng. Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương.
Gọi $M(x; 0)$ thuộc trục Ox. Ta có: $\overrightarrow{AM} = (x+3; -3)$ và $\overrightarrow{AB} = (2; 1)$.
$\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{-3}{1} \Leftrightarrow x = -9$.
Vậy $M(-9; 0)$.
Vì Đường thẳng AB cắt trục Oy tại điểm N nên ba điểm N, A, B thẳng hàng. Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{AB}$

cùng phương.
Gọi $N(0; y)$ thuộc trục Oy. Ta có: $\overrightarrow{AN} = (3; y-3)$ và $\overrightarrow{AB} = (2; 1)$.
$\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{3}{2} = \dfrac{y-3}{1} \Leftrightarrow y = \dfrac{9}{2}$.
Vậy $N\left(0; \dfrac{9}{2}\right)$.
Vì tam giác OMN vuông tại O nên tam giác OMN có diện tích là:

$$S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} OM.ON = \frac{1}{2}.9.\frac{9}{2} = \frac{81}{4}.$$

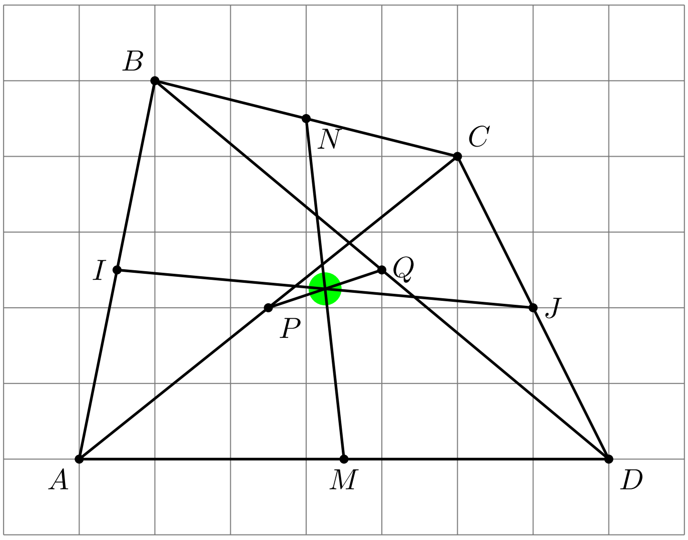
Gọi H là chân đường cao kẻ từ O của tam giác vuông OMN. Khi đó, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{81} + \frac{4}{91} = \frac{5}{81}.$$

Do đó, ta có: $OH^2 = \dfrac{81}{5} \Rightarrow OH = \dfrac{9\sqrt{5}}{5}$. □

Bài 36. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB và CD; P và Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AC và BD; M và N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AD và BC. Chứng minh rằng ba đoạn thẳng IJ, PQ và MN có cùng trung điểm.

Lời giải.



Xét mặt phẳng tọa độ Oxy. Giả sử $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$, $C(c_1; c_2)$ và $D(d_1; d_2)$. Ta có:

- $I\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}; \dfrac{a_2+b_2}{2}\right)$, $J\left(\dfrac{c_1+d_1}{2}; \dfrac{c_2+d_2}{2}\right)$.
  Suy ra trung điểm của đoạn thẳng IJ có tọa độ là $\left(\dfrac{a_1+b_1+c_1+d_1}{4}; \dfrac{a_2+b_2+c_2+d_2}{4}\right)$ (1).
- $P\left(\dfrac{a_1+c_1}{2}; \dfrac{a_2+c_2}{2}\right)$, $Q\left(\dfrac{b_1+d_1}{2}; \dfrac{b_2+d_2}{2}\right)$.
  Suy ra trung điểm của đoạn thẳng PQ có tọa độ là $\left(\dfrac{a_1+b_1+c_1+d_1}{4}; \dfrac{a_2+b_2+c_2+d_2}{4}\right)$ (2).
- $M\left(\dfrac{a_1+d_1}{2}; \dfrac{a_2+d_2}{2}\right)$, $N\left(\dfrac{b_1+c_1}{2}; \dfrac{b_2+c_2}{2}\right)$.
  Suy ra trung điểm của đoạn thẳng MN có tọa độ là $\left(\dfrac{a_1+b_1+c_1+d_1}{4}; \dfrac{a_2+b_2+c_2+d_2}{4}\right)$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra ba đoạn thẳng IJ, PQ và MN có cùng trung điểm. □

D – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong hệ tọa độ Oxy, biết $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$. Khi đó $\vec{u}$ có tọa độ là

A. $(2;-1)$. B. $(2;1)$. C. $(1;2)$. D. $(1;-2)$.

Lời giải.

$\vec{u}$ có tọa độ là $(2;-1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tọa độ của $\vec{i}$ là bao nhiêu?

A. $\vec{i} = (0;1)$. B. $\vec{i} = (-1;0)$. C. $\vec{i} = (0;0)$. D. $\vec{i} = (1;0)$.

Lời giải.

Ta có véc-tơ đơn vị $\vec{i} = (1;0)$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Trong mặt phẳng Oxy, cho $A(1;3)$, $B(2;-5)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$.

A. $\overrightarrow{AB} = (2;-15)$. B. $\overrightarrow{AB} = (3;-2)$. C. $\overrightarrow{AB} = (-1;8)$. D. $\overrightarrow{AB} = (1;-8)$.

Lời giải.

Tọa độ $\overrightarrow{AB} = (1;-8)$.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(1;3)$, $B(2;-3)$, $C(-2;1)$. Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn $5\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = 4\overrightarrow{MC}$.

A. $M(3;17)$. B. $M(-3;-17)$. C. $M(-9;-17)$. D. $M(9;17)$.

Lời giải.

Giả sử $M(a;b)$.

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{MA} = (1-a;3-b) \\ \overrightarrow{MB} = (2-a;-3-b) \\ \overrightarrow{MC} = (-2-a;1-b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5\overrightarrow{MA} = (5-5a;15-5b) \\ 2\overrightarrow{MB} = (4-2a;-6-2b) \\ 4\overrightarrow{MC} = (-8-4a;4-4b). \end{cases}$

Vậy $5\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = 4\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-5a-4+2a = -8-4a \\ 15-5b+6+2b = 4-4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -9 \\ b = -17. \end{cases}$

Vậy $M(-9;-17)$.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC, biết $B(9;7)$, $C(11;-1)$ và $M(1;2)$ là trung điểm của AB. Tìm tọa độ trung điểm N của AC.

A. $N(2;-2)$. B. $N(-2;8)$. C. $N(-2;2)$. D. $N(2;-8)$.

Lời giải.

Vì $M(1;2)$ là trung điểm của AB nên ta có $\begin{cases} x_A = 2x_M - x_B = -7 \\ y_A = 2y_M - y_B = -3 \end{cases} \Rightarrow A(-7;-3)$.

Mặt khác N là trung điểm của AC nên $\begin{cases} x_N = \dfrac{x_A + x_C}{2} = 2 \\ y_N = \dfrac{y_A + y_C}{2} = -2 \end{cases} \Rightarrow N(2;-2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(0;3)$, $B(4;2)$. Tìm tọa độ điểm D thỏa mãn $\overrightarrow{OD}-2\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DB}=\vec{0}$.

Ⓐ $(-8;2)$. Ⓑ $\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$. Ⓒ $(-3;3)$. Ⓓ $(8;-2)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BA}=(-4;1)$.

$\overrightarrow{OD}-2\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{BA}=(-8;2)$.

Suy ra tọa độ điểm D là $(-8;2)$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 7. Trong mặt phẳng Oxy, cho $A(2;3)$, $B(2;-5)$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Véc-tơ $\overrightarrow{AI}$ có tọa độ là

Ⓐ $(1;-3)$. Ⓑ $(0;5)$. Ⓒ $(0;-2)$. Ⓓ $(0;-4)$.

Lời giải.

Vì I là trung điểm của đoạn thẳng AB nên điểm I có tọa độ là $(2;-1)$.

Suy ra $\overrightarrow{AI}=(0;-4)$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 8. Cho $A(1;2)$ và $I(3;4)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB. Tọa độ của đỉnh B là

Ⓐ $(6;5)$. Ⓑ $(3;2)$. Ⓒ $(2;3)$. Ⓓ $(5;6)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}x_B=2x_I-x_A\\y_B=2y_I-y_A\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_B=5\\y_B=6\end{cases}$. Vậy $B(5;6)$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 9. Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho $A(-4;1)$, $B(2;4)$, $G(2;-2)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho G là trọng tâm tam giác ABC.

Ⓐ $C(8;-11)$. Ⓑ $C(8;11)$. Ⓒ $C(-8;-11)$. Ⓓ $C(12;11)$.

Lời giải.

G là trọng tâm tam giác ABC nên

$$\begin{cases}x_A+x_B+x_C=3x_G\\y_A+y_B+y_C=3y_G\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_C=3x_G-(x_A+x_B)\\y_C=3y_G-(y_A+y_B)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_C=6-(-4+2)=8\\y_C=-6-(1+4)=-11\end{cases}\Rightarrow C(8;-11).$$

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai véc-tơ $\vec{a}=(3;-1)$ và $\vec{b}=(3;4)$. Tính tọa độ véc-tơ $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$.

Ⓐ $\vec{c}=(3;3)$. Ⓑ $\vec{c}=(2;7)$. Ⓒ $\vec{c}=(2;1)$. Ⓓ $\vec{c}=(6;3)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}=(6;3)$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(1;-2)$, $B(0;-1)$, $C(3;0)$. Tìm tọa độ điểm G sao cho với điểm M bất kì ta luôn có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

Ⓐ $G\left(\dfrac{4}{3};-2\right)$. Ⓑ $G\left(\dfrac{5}{3};-1\right)$. Ⓒ $G\left(\dfrac{7}{3};-2\right)$. Ⓓ $G\left(\dfrac{4}{3};-1\right)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$. Do đó $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$, suy ra G là trọng tâm của tam giác ABC. Vậy $G\left(\dfrac{4}{3};-1\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Cho ba điểm $A(2;5)$, $B(1;1)$, $C(3;3)$. Tìm tọa độ điểm E sao cho $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$.

A. $E(-2;-3)$. B. $E(3;-3)$. C. $E(-3;3)$. D. $E(-3;-3)$.

Lời giải.

Gọi $E(x_E;y_E)$ là điểm cần tìm.
Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE}&=(x_E-2;y_E-5)\\ \overrightarrow{AB}&=(-1;-4)\\ \overrightarrow{AC}&=(1;-2).\end{aligned}$$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=(-5;-8)$, do đó

$$\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\begin{cases}x_E-2=-5\\ y_E-5=-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_E=-3\\ y_E=-3\end{cases}\Rightarrow E(-3;-3).$$

Chọn đáp án D □

Câu 13. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác MNP có $M(1;-1)$, $N(5;-3)$ và P thuộc trục Oy, trọng tâm G của tam giác MNP nằm trên trục Ox. Tìm toạ độ của điểm P.

A. $P(0;2)$. B. $P(0;10)$. C. $P(0;4)$. D. $P(2;0)$.

Lời giải.

Do $P\in Oy$ nên $P(0;y_P)$.
Trọng tâm $G\in Ox$ nên $G(x_G;0)$.
Do G là trọng tâm của tam giác MNP nên $\begin{cases}x_M+x_N+x_P=3x_G\\ y_M+y_N+y_P=3y_G.\end{cases}$

Khi đó $\begin{cases}1+5+0=3x_G\\ -1-3+y_P=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_G=6\\ y_P=4.\end{cases}$

Vậy $P(0;4)$.
Chọn đáp án C □

Câu 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\vec{a}=(-1;2)$ và $\vec{b}=(0;-2)$. Xác định tọa độ của $\vec{a}+\vec{b}$.

A. $(-1;0)$. B. $(2;1)$. C. $(-1;4)$. D. $(0;-4)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a}+\vec{b}=(-1;0)$.
Chọn đáp án A □

Câu 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(2;-4)$ và $B(-4;2)$.Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

A. $I(-2;-2)$. B. $I(-1;-1)$. C. $I(2;2)$. D. $I(1;1)$.

Lời giải.

Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là $\begin{cases}x_{\mathrm{I}}=\dfrac{x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{B}}}{2}=\dfrac{2+(-4)}{2}=-1\\ y_{\mathrm{I}}=\dfrac{y_{\mathrm{A}}+y_{\mathrm{B}}}{2}=\dfrac{-4+2}{2}=-1\end{cases}\Rightarrow I(-1;-1)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(1;3)$, $B(4;2)$, $C(-2;0)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

(A) $G(5;5)$. (B) $G\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$. (C) $G\left(1;\frac{5}{3}\right)$. (D) $G\left(1;\frac{1}{3}\right)$.

Lời giải.

Ta có $G=\left(\frac{1+4-2}{3};\frac{3+2+0}{3}\right)=\left(1;\frac{5}{3}\right)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 17. Trong mặt phẳng với Oxy, cho ba điểm $A(1;3)$, $B(-1;2)$, $C(-2;1)$. Toạ độ của véc-tơ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ là

(A) $(-5;-3)$. (B) $(1;1)$. (C) $(-1;2)$. (D) $(4;0)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}=(1;1)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC. Biết $A(1;-1)$, $B(5;-3)$ và $C\in Oy$, trọng tâm $G\in Ox$. Tọa độ điểm C là

(A) $(0;2)$. (B) $(2;0)$. (C) $(0;-4)$. (D) $(0;4)$.

Lời giải.

Gọi $C(0;m)$ và $G(n;0)$.

Do G là trọng tâm tam giác ABC nên $\begin{cases}1+5+0=3n\\ -1-3+m=3\cdot 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=4\\ n=2.\end{cases}$

Vậy $C(0;4)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các véc-tơ $\vec{a}=(-2;1)$, $\vec{b}=(1;-3)$ và $\vec{c}=(0;2)$. Tính tọa độ của véc-tơ $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

(A) $\vec{u}=(-1;6)$. (B) $\vec{u}=(3;0)$. (C) $\vec{u}=(-1;0)$. (D) $\vec{u}=(3;6)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(-2+1+0;1-3+2)\Rightarrow\vec{u}=(-1;0)$.

Chọn đáp án (C) □

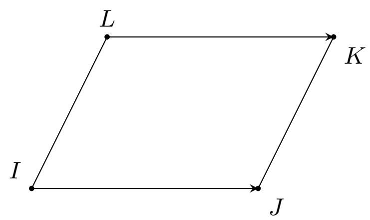
Câu 20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $I(-3;2)$, $J(-1;3)$, $K(4;-3)$. Tìm tọa độ điểm L để tứ giác $IJKL$ là hình bình hành.

(A) $L(2;-4)$. (B) $L(0;2)$. (C) $L(6;-2)$. (D) $L(-8;8)$.

Lời giải.

Tứ giác $IJKL$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{LK}$.
Gọi $L(x;y)$.
Do $\overrightarrow{IJ}=(2;1)$ và $\overrightarrow{LK}=(4-x;-3-y)$ nên

$$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{LK}\Leftrightarrow\begin{cases}2=4-x\\ 1=-3-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=-4.\end{cases}$$



Vậy điểm cần tìm là $L(2;-4)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trọng tâm $G(0;7)$, $A(-1;4)$, $B(2;5)$. Tìm tọa độ đỉnh C.

(A) $(1;12)$. (B) $(-1;12)$. (C) $(3;1)$. (D) $(2;12)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 3x_G - x_A - x_B \\ y_C = 3y_G - y_A - y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = -1 \\ y_C = 12. \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm C là $(-1;12)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\vec{a} = (m;3)$ và $\vec{b} = (2;-1)$. Tìm các giá trị của m để hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

(A) $m = -6$. (B) $m = 12$. (C) $m = \dfrac{3}{4}$. (D) $m = \dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Để $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}$ thì $\dfrac{m}{2} = \dfrac{3}{-1} \Leftrightarrow m = -6$.

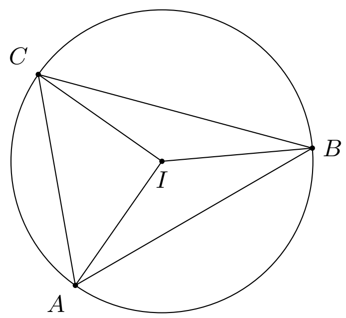
Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(3;4)$, $B(4;1)$, $C(2;-3)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

(A) $\left(3;\dfrac{2}{3}\right)$. (B) $(7;2)$. (C) $(9;2)$. (D) $(-1;1)$.

Lời giải.

Gọi $I(x;y)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, khi đó ta có



$$\begin{aligned} &\begin{cases} AI = BI \\ AI = CI \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2} \\ \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 2x - 6y = -8 \\ 2x + 14y = 12 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x = -1 \\ y = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy ta có $I(-1;1)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm $E(3;-2)$, $F(-1;-3)$. Tìm tọa độ điểm G thuộc trục hoành sao cho G thuộc đường thẳng EF.

(A) $G\left(-\dfrac{11}{5};0\right)$. (B) $G(11;0)$. (C) $G\left(0;-\dfrac{11}{4}\right)$. (D) $G\left(0;-\dfrac{11}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{EF} = (-4;-1)$.

Lấy $G(x;0) \in Ox$.

Để $G \in EF$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{EG} = (x-3;2)$ và $\overrightarrow{EF}$ cùng phương, khi đó ta có

$$\frac{x-3}{-4} = \frac{2}{-1} \Leftrightarrow -x+3=-8 \Leftrightarrow x=11.$$

Vậy ta có $G(11;0)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành $ABCD$ biết $A(1;-5)$, $B(2;3)$, $C(-3;3)$. Tọa độ tâm I của hình bình hành là

(A) $(1;1)$. (B) $(-1;1)$. (C) $(1;-1)$. (D) $(-1;-1)$.

Lời giải.

Do I là tâm hình bình hành $ABCD$ nên I là trung điểm của AC.

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{1-3}{2} = -1 \\ y_I = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{-5+3}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow I(-1;-1).$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai điểm $A(2;3), I(1;-2)$. Xác định toạ độ điểm B để I là trung điểm của AB.

(A) $(0;-7)$. (B) $\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$. (C) $(1;2)$. (D) $(-2;1)$.

Lời giải.

Gọi $B(x,y)$. Khi đó ta có: $\begin{cases} \dfrac{2+x}{2} = 1 \\ \dfrac{3+y}{2} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-7 \end{cases}.$

Vậy $B(0;-7)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(1;-2)$, $B(0;4)$, $C(4;3)$. Tìm tọa độ điểm M thỏa $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.

(A) $(7;27)$. (B) $(11;30)$. (C) $(-7;0)$. (D) $(15;6)$.

Lời giải.

Giả sử $M(x;y)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1;6)$, $\overrightarrow{AC} = (3;5)$.

Suy ra $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = (-11;-3)$ và $\overrightarrow{CM} = (x-4;y-3)$.

Do đó $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4=-11 \\ y-3=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-7 \\ y=0. \end{cases}$

Vậy $M(-7;0)$.

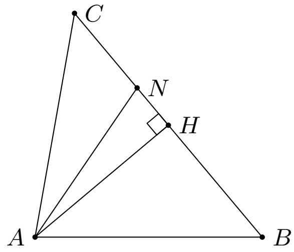
Chọn đáp án (C) □

Câu 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tọa độ điểm N trên cạnh BC của tam giác ABC có $A(1;-2)$, $B(2;3)$, $C(-1;-2)$ sao cho $S_{ABN} = 3S_{ANC}$ là

(A) $N\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$. (B) $N\left(-\frac{1}{4};-\frac{3}{4}\right)$. (C) $N\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$. (D) $N\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Lời giải.

Gọi $N(x_N; y_N)$, AH là đường cao của tam giác ABC, ta có



$$S_{ABN} = 3S_{ANC} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BN = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot AH \cdot CN \Leftrightarrow BN = 3CN.$$

Do N nằm trên cạnh BC nên $\overrightarrow{BN}$ ngược chiều với $\overrightarrow{CN}$, suy ra

$$\overrightarrow{BN} = -3\overrightarrow{CN} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N - x_B = -3\left(x_N - x_C\right) \\ y_N - y_B = -3\left(y_N - y_C\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = \dfrac{x_B + 3x_C}{4} = -\dfrac{1}{4} \\ y_N = \dfrac{y_B + 3y_C}{4} = -\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm N cần tìm là $\left(-\frac{1}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

Chọn đáp án B $\square$

Bài 5 TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉC-TƠ

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Góc giữa hai véc-tơ

Cho $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$. Từ một điểm O bất kì vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Khi đó số đo của góc $\widehat{AOB}$ được gọi là số đo góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ hay đơn giản là góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Kí hiệu $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \widehat{AOB}$.

- *Quy ước rằng góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có thể nhận một giá trị tùy ý từ O° đến 180°.*
- $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0^\circ \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ *cùng hướng.*
- $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 180^\circ \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ *ngược hướng.*
- *Nếu $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 90^\circ$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu $\vec{a} \perp \vec{b}$ hoặc $\vec{b} \perp \vec{a}$. Đặc biệt $\vec{0}$ được coi là vuông góc với mọi véc-tơ.*

2. Tích vô hướng của hai véc-tơ

Định nghĩa 5.1. Tích vô hướng của hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức sau

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right).$$

- *Ta có $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.*
- *$\vec{a} \cdot \vec{a}$ còn được viết là $\vec{a}^2$ được gọi là bình phương vô hướng của véc-tơ $\vec{a}$. Ta có $\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$.*

3. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Định nghĩa 5.2. Cho $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$. Khi đó tích vô hướng của hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được tính theo công thức sau $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

- *Hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$.*
- *Bình phương vô hướng của $\vec{a}(a_1; a_2)$ là $\vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2$.*
- *Nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$ thì* $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \vec{b}} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$.

B – CÁC DẠNG TOÁN

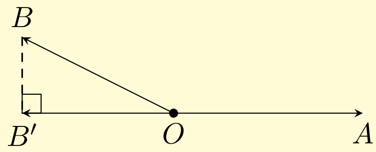
Dạng 1. Tính tích vô hướng của hai véc-tơ và xác định góc

Để tính tích vô hướng của hai véc-tơ ta có thể lựa chọn một trong các hướng sau đây:

- Đưa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ về chung gốc để xác định chính xác góc giữa hai véc-tơ rồi áp dụng định nghĩa $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.

- Sử dụng các tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai véc-tơ.
- Sử dụng dạng tọa độ nếu $\vec{a}=(a_1;a_2)$, $\vec{b}=(b_1;b_2)$ thì $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$.
- Sử dụng công thức hình chiếu

  Cho hai véc-tơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$. Gọi B' là hình chiếu của B trên đường thẳng OA. Khi đó $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB'}$.

  Chứng minh: Thật vậy, ta có $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{B'B}\right)=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB'}$.

Để xác định góc giữa hai véc-tơ ta có thể lựa chọn một trong các hướng sau đây:

- Đưa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ về chung gốc rồi xác định góc theo định nghĩa.
- Sử dụng các tính chất và các hằng đẳng thức để tính tích vô hướng của hai véc-tơ rồi sau đó áp dụng công thức $\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$
- Sử dụng công thức tính theo tọa độ. Nếu $\vec{a}=(a_1;a_2)$, $\vec{b}=(b_1;b_2)$ thì $\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\dfrac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$.

Cần lưu ý một số kết quả đặc biệt sau:

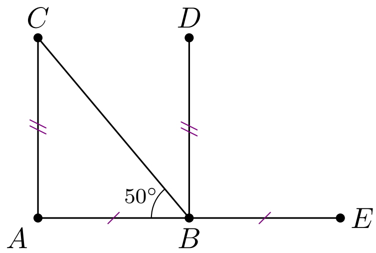
- $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{a}\right)$.
- Nếu $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\alpha$ thì $\left(\vec{a},-\vec{b}\right)=180^\circ-\alpha$.
- Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng thì $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0^\circ$.
- Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng thì $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=180^\circ$.

1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $\widehat{B}=50^\circ$. Hãy tính các góc $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$; $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)$; $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$; $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}\right)$; $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)$; $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right)$.

Lời giải.

Vẽ điểm D sao cho $ABDC$ là hình chữ nhật và vẽ điểm E sao cho B là trung điểm của AE.



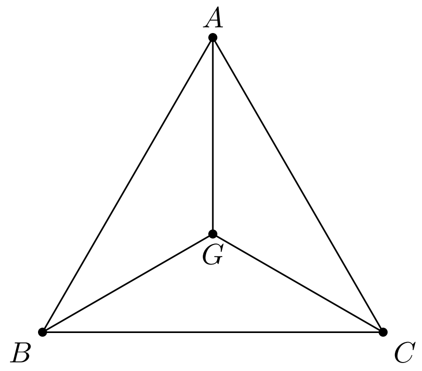
- $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\widehat{ABC}=50^\circ$.
- $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BC}\right)=\widehat{CBE}=130^\circ$.
- $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\widehat{ACB}=40^\circ$.
- $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC}\right)=\widehat{DBC}=40^\circ$.
- $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{AC},-\overrightarrow{BC}\right)=180^\circ-40^\circ=140^\circ$
- $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right)=\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}\right)=\widehat{ABD}=90^\circ$

Ví dụ 2. Cho tam giác đều ABC có cạnh a và trọng tâm G. Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}$; $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{GA}$; $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

Ta có G là trọng tâm của tam giác đều ABC nên $GA = GB = GC = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cách 1: Theo định nghĩa, ta có



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = a\cdot a\cdot\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}a^2$;

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB} = a\cdot a\cdot\cos 120^\circ = -\dfrac{1}{2}a^2$;

$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}\cdot a\cdot\cos 30^\circ = a^2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2}a^2$;

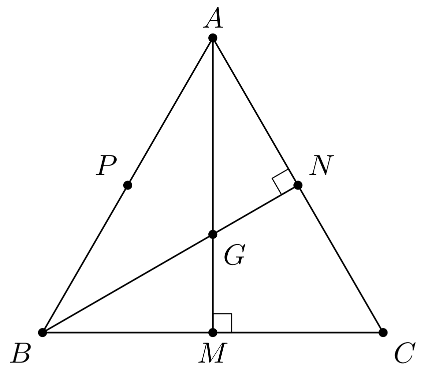
$\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\cos 120^\circ = -\dfrac{a^2}{6}$;

$\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{GA} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\cos 60^\circ = \dfrac{a^2}{6}$;

$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$ do $GA\perp BC$.

Cách 2: Sử dụng công thức hình chiếu.

Gọi M, N và P lần lượt là trung điểm của BC, CA và AB.



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP} = a\cdot\dfrac{1}{2}a = \dfrac{1}{2}a^2$;

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{CB} = \dfrac{1}{2}a\cdot(-a) = -\dfrac{1}{2}a^2$;

$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}a\cdot a = \dfrac{1}{2}a^2$;

$\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GN} = -\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{6} = -\dfrac{a^2}{6}$;

$\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{GN} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{6} = \dfrac{a^2}{6}$;

$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MM}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$ và G là trọng tâm. Tính giá trị của các biểu thức sau:

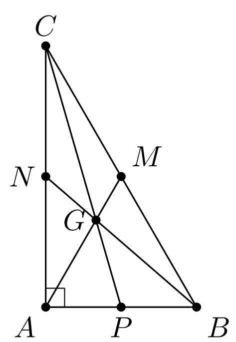
a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$.

b) $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{GA}$.

Lời giải.

a) **Cách 1:**

Vì tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} &= -\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}\\ &= -\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)\\ &= 2a^2\cos\widehat{ABC} = 2a^2\cdot\dfrac{a}{2a} = -a^2.\end{aligned}$$

Theo định lý Py-ta-go ta có $CA = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA} = -\left|\overrightarrow{CB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)$

$$= -2a\cdot a\sqrt{3}\cdot\cos\widehat{ACB} = -2a\cdot a\sqrt{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2a} = -3a^2.$$

Vậy $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB} = -a^2 - 3a^2 = -4a^2$.

Cách 2: Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$. Bình phương hai vế của đẳng thức, ta được

$$AB^2+BC^2+CA^2+2\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}\right)=0.$$

Do đó

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\left(AB^2+BC^2+CA^2\right)=-\frac{1}{2}\left(a^2+4a^2+3a^2\right)=-4a^2.$$

Cách 3: Đặt hệ trục tọa độ Oxy vào tam giác ABC sao cho $A\equiv O$, AB nằm trên tia Ox và AC nằm trên tia Oy. Khi đó ta có $A(0;0)$, $B(a;0)$ và $C(0;a\sqrt{3})$.
Dễ dàng tính được $\overrightarrow{AB}=(a;0)$, $\overrightarrow{BC}=(-a;a\sqrt{3})$ và $\overrightarrow{CA}=(0;-a\sqrt{3})$. Suy ra

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}\\ =\ &[a\cdot(-a)+0\cdot a\sqrt{3}]+[-a\cdot 0+a\sqrt{3}\cdot(-a\sqrt{3})]+[0\cdot a+(-a\sqrt{3})\cdot 0]=-4a^2.\end{aligned}$$

Cách 4: Sử dụng công thức hình chiếu.
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}=-a^2$.
$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CA}=-3a^2$.
$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.
Vậy $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=-a^2-3a^2=-4a^2$.

b) **Cách 1:** Biến đổi tương tự cách 2 của câu a,
vì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ nên $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{GA}=-\dfrac{1}{2}\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)$.
Gọi M,N và P lần lượt là trung điểm của BC, CA và AB.
Ta có $GA^2=\left(\dfrac{2}{3}AM\right)^2=\left(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}BC\right)^2=\dfrac{4a^2}{9}$.
Theo định lý Py-ta-go ta có:
$GB^2=\dfrac{4}{9}BN^2=\dfrac{4}{9}\left(AB^2+AN^2\right)=\dfrac{4}{9}\left(a^2+\dfrac{3a^2}{4}\right)=\dfrac{7a^2}{9}$;
$GC^2=\dfrac{4}{9}CP^2=\dfrac{4}{9}\left(AC^2+AP^2\right)=\dfrac{4}{9}\left(3a^2+\dfrac{a^2}{4}\right)=\dfrac{13a^2}{9}$.
Suy ra $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{GA}=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4a^2}{9}+\dfrac{7a^2}{9}+\dfrac{13a^2}{9}\right)=-\dfrac{4a^2}{3}$.
Cách 2: Sử dụng hệ trục toa độ như cách 3 của câu a, lúc này ta cần tính thêm tọa độ của trọng tâm G. Theo công thức tính tọa độ của trọng tâm tam giác, ta tính được $G\left(\dfrac{a}{3};-\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)$.
Từ đó suy ra $\overrightarrow{GA}=\left(-\dfrac{a}{3};\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)$, $\overrightarrow{GB}=\left(\dfrac{2a}{3};\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)$ và $\overrightarrow{GC}=\left(-\dfrac{a}{3};\dfrac{4a\sqrt{3}}{3}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{GA}=$
$\left(-\dfrac{a}{3}\cdot\dfrac{2a}{3}+\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)+\left[\dfrac{2a}{3}\cdot\left(-\dfrac{a}{3}\right)+\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{4a\sqrt{3}}{3}\right]+\left[\left(-\dfrac{a}{3}\right)\cdot\left(-\dfrac{a}{3}\right)+\dfrac{4a\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right]=-\dfrac{4a^2}{3}$.

□

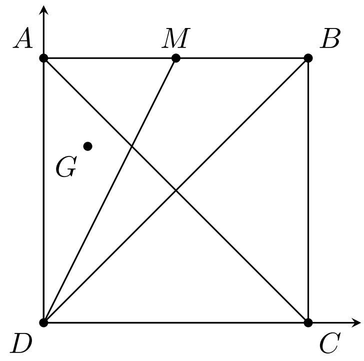
Ví dụ 4. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. M là trung điểm của AB, G là trọng tâm tam giác ADM. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)$.

b) $\overrightarrow{CG}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DM}\right)$.

Lời giải.

a) **Cách 1:**



Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$. Do đó

$$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$$

($\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ vì $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$)
Theo định lý Py-ta-go ta có $AC=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$.
Góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$ là góc $ACB=45°$.

Vậy $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CB}\right|\cdot\cos\widehat{ACB}=a\cdot a\sqrt{2}\cos 45°=a^2$.

Cách 2: Đặt hệ trục tọa độ Oxy vào hình vuông $ABCD$ sao cho $O\equiv D$, DC nằm trên tia Ox và DA nằm trên tia Oy. Khi đó ta có $D(0;0)$, $A(0;a)$, $B(a;a)$, $C(a;0)$. Dễ dàng tính được $\overrightarrow{AB}=(a;0)$; $\overrightarrow{AD}=(0;-a)$; $\overrightarrow{BD}=(-a;-a)$; $\overrightarrow{BC}=(0;-a)$. Suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=(a;-a)$ và $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}=(-a;-2a)$.
Vậy $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)=a\cdot(-a)+(-a)\cdot(-2a)=a^2$.

b) **Cách 1:**
Nhận xét: *Nếu ta nhân phân phối véc-tơ $\overrightarrow{CG}$ vào với $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{DM}$ thì ta sẽ nhận được những tích vô hướng mà khó tính được bằng định nghĩa. Tuy nhiên, hãy nhớ lại rằng một véc-tơ có thể được phân tích thành nhiều véc-tơ khác nhau, và nếu chúng ta chọn phân tích véc-tơ ra những thành phần đã biết trước có sự vuông góc với nhau thì khi nhân phân phối vào những thành phần vuông góc đó có tích vô hướng bằng* 0 *và bị triệt tiêu. Theo ý tưởng này, ta thử chọn chuyển hết các véc-tơ về hai véc-tơ $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{CB}$.*
Vì G là trọng tâm của tam giác ADM nên theo quy tắc trọng tâm

$$\overrightarrow{CG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CM}\right).$$

Mặt khác

$$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}$$

và

$$\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB},$$

suy ra

$$\overrightarrow{CG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CM}\right)=\frac{1}{3}\left[\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}\right)+\overrightarrow{CD}+\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}\right)\right]=\frac{5}{6}\overrightarrow{CD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}.$$

Theo quy tắc trung điểm thì

$$\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{CB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}.$$

Như vậy

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CG}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DM}\right)&=\left(\frac{5}{6}\overrightarrow{CD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}\right)\left[\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{CB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\right)\right]\\&=\left(\frac{5}{6}\overrightarrow{CD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}\right)\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{CB}\right)\\&=\frac{5}{12}CD^2+6\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB}+\frac{4}{3}CB^2=\frac{5}{12}a^2+\frac{4}{3}a^2=\frac{21a^2}{12}.\end{aligned}$$

Cách 2: Sử dụng hệ trục tọa độ giống như cách 2 ở câu a.
Vì M là trung điểm của AB và G là trọng tâm tam giác ADM nên sử dụng các công thức tọa độ tương ứng tính được $M\left(\frac{a}{2};a\right)$ và $G\left(\frac{a}{6};\frac{2a}{3}\right)$. Từ đó suy ra $\overrightarrow{CG}=\left(-\frac{5a}{6};\frac{2a}{3}\right)$; $\overrightarrow{CA}=(-a;a)$ và $\overrightarrow{DM}=\left(\frac{a}{2};a\right)$.
Vậy $\overrightarrow{CG}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DM}\right)=\left[-\frac{5a}{6}\cdot\left(-a+\frac{a}{2}\right)\right]+\left[\frac{2a}{3}\cdot(a+a)\right]=\frac{21a^2}{12}$.

□

Ví dụ 5. Cho các véc-tơ $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j}, \vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j}$. Tìm góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Lời giải.

Ta có $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{-1 \cdot 1 + 1 \cdot 3}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2}} = \dfrac{2}{2\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Do đó góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc $\alpha \in [0°; 180°]$ sao cho $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ hay $\alpha \approx 65°26'$. □

Ví dụ 6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(1;3)$ và $B(3;-1)$. Tính góc giữa đường thẳng OA và AB.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AO} = (-1;-3)$ và $\overrightarrow{AB} = (2;-4)$.

Suy ra $\cos\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}}{AO \cdot AB} = \dfrac{-1 \cdot 2 + (-3) \cdot (-4)}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{20}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{AO}$ và $\overrightarrow{AB}$ bằng góc $\widehat{BAO} = 45°$. Do đó góc giữa đường thẳng OA và đường thẳng AB bằng $45°$. □

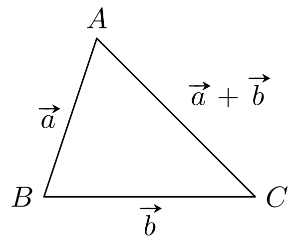
Ví dụ 7. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có $|\vec{a}| = 7, |\vec{b}| = 12$ và $|\vec{a} + \vec{b}| = 13$. Tính cosin của góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{a} + \vec{b}$.

Lời giải.

Dựng các điểm A, B, C sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, khi đó $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$. Ta có $\vec{a}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Mặt khác, từ đẳng thức $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$, ta bình phương hai vế và chuyển vế thu được

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right) = \frac{1}{2}\left(7^2 + 13^2 - 12^2\right) = 37.$$



Vậy $\cos\left(\vec{a}, (\vec{a} + \vec{b})\right) = \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{37}{7 \cdot 13} = \dfrac{37}{91}$. □

2. Bài tập rèn luyện

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tính góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $\vec{a} = (4;3)$, $\vec{b} = (1;7)$;

b) $\vec{a} = (2;5)$, $\vec{b} = (3;-7)$;

c) $\vec{a} = (6;-8)$, $\vec{b} = (12;9)$;

d) $\vec{a} = (2;-6)$, $\vec{b} = (-3;9)$.

Lời giải.

a) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 7}{\sqrt{4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 7^2}} = \dfrac{25}{5\sqrt{50}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Suy ra góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $45°$.

b) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{2 \cdot 3 + 5 \cdot (-7)}{\sqrt{2^2 + 5^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-7)^2}} = \dfrac{-29}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{58}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Suy ra góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $135°$.

c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 \cdot 12 + (-8) \cdot 9 = 0$ Suy ra góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $90°$.

d) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{2 \cdot (-3) + (-6) \cdot 9}{\sqrt{2^2 + (-6)^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 9^2}} = \dfrac{-60}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{90}} = -1.$

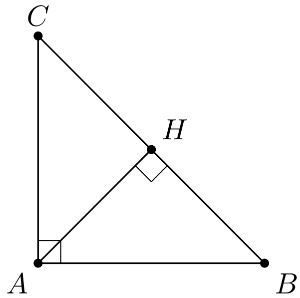
Suy ra góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là 180°.

□

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông cân có $AB = AC = a$ và AH là đường cao. Tính các tích vô hướng sau

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$; c) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$ và $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Lời giải.



a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ vì $AB \perp AC$.

b) $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ vì $AH \perp BC$.

c) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -CA \cdot CB \cdot \cos 45^\circ = -a \cdot a\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -a^2$;

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -BA \cdot BC \cdot \cos 45^\circ - a \cdot a\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -a^2.$

□

Bài 3. Cho tam giác ABC đều cạnh a và AM là trung tuyến của tam giác. Tính các tích vô hướng sau

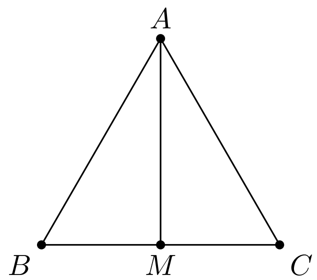
a) $\overrightarrow{AC}\left(2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}\right)$;

b) $\overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$;

c) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB}$;

d) $\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right)$.

Lời giải.



a) $\overrightarrow{AC}\left(2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}\right) = 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a \cdot a\cos 60^\circ - 3a^2 = -2a^2$.

b) $\overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = a^2 - a \cdot a\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}a^2$.

c) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a\cos 30^\circ = \dfrac{3}{4}a^2$.

d) $\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right) = \overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}^2 - \overrightarrow{BC}^2 = a^2 - a^2 = 0$.

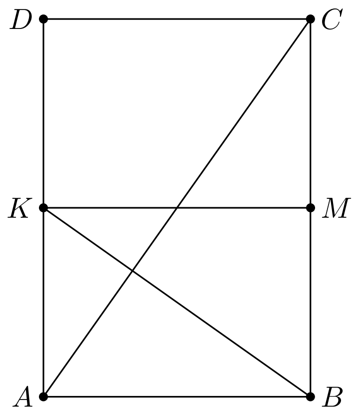
□

Bài 4. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a\sqrt{2}, AD = 2a$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD.

a) Phân tích $\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{AC}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

b) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.



a) Gọi M là trung điểm của cạnh BC.
Theo quy tắc hình bình hành, ta có
$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.
Mặt khác $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

b) $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(-\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$
$= -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD}$
$= -2a^2 + 0 + 0 + \dfrac{1}{2}(2a)^2 = 0.$

□

Bài 5. Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 8$, $BC = 7$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

Ta có $BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Suy ra $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \dfrac{\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2}{2} = \dfrac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2} = 20.$ □

Bài 6. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có độ dài bằng 1 và thỏa mãn điều kiện $\left|2\vec{a} - 3\vec{b}\right| = \sqrt{7}$. Tính $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.

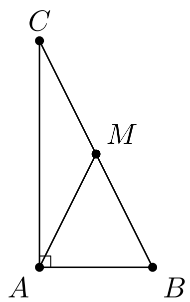
Lời giải.

$$\left|2\vec{a} - 3\vec{b}\right| = \sqrt{7} \Leftrightarrow \left(2\vec{a} - 3\vec{b}\right)^2 = 7 \Leftrightarrow 4\left|\vec{a}\right|^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\left|\vec{b}\right|^2 = 7 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -1.$$

Do đó $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} = -1.$ □

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = a\sqrt{3}$, M là trung điểm của BC. Biết rằng $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \dfrac{a^2}{2}$. Hãy tính AB, AC.

Lời giải.



Theo định lý Py-ta-go ta có $AB^2 + AC^2 = BC^2 = 3a^2$. Mặt khác

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{a^2}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(AC^2 - AB^2\right) = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow AC^2 - AB^2 = a^2.$$

Giải hệ phương trình $\begin{cases} AC^2 + AB^2 = 3a^2 \\ AC^2 - AB^2 = a^2 \end{cases}$ ta được $AB = a$ và $AC = 2a$.

□

Bài 8. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai véc-tơ đó bằng 60°. Xác định cosin góc giữa hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ với $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$.

Lời giải.

Ta có

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(\vec{a} + 2\vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \left|\vec{a}\right|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - 2\left|\vec{b}\right|^2 = 1 + 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ - 2 = -\frac{1}{2}.$$

Do đó $\cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|} = -\dfrac{1}{2}.$ □

Bài 9. Cho hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và véc-tơ $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$ vuông góc với véc-tơ $\vec{y} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$. Tính góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Lời giải.

Ta có

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \Leftrightarrow \left(\vec{a} + 2\vec{b}\right) \cdot \left(5\vec{a} - 4\vec{b}\right) = 0 \Leftrightarrow 5\left|\vec{a}\right|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 8\left|\vec{b}\right|^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}.$$

Do đó $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \dfrac{1}{2}$.

Từ đó suy ra góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 60°. □

Bài 10. Cho các véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 2$, $\left|\vec{b}\right| = 1$ và $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 60^\circ$. Tính góc giữa véc-tơ $\vec{a}$ và véc-tơ $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

Lời giải.

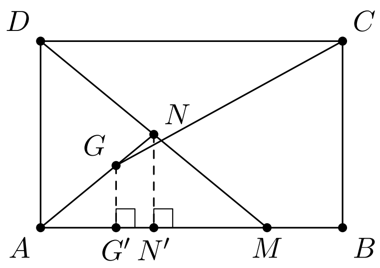
Ta có $\vec{c}^2 = \left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ nên $\left|\vec{c}\right| = \sqrt{3}$.

Lại có $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a}\left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 3$.

Do đó $\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{c}\right|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Từ đó tính được góc giữa véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{c}$ là 30°. □

Bài 11. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2$. M là điểm được xác định bởi $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$; G là trọng tâm tam giác ADM. Tính $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC}$.

Lời giải.



Gọi N là trung điểm của DM; G' và N' lần lượt là hình chiếu vuông góc của G và N lên AB.

Theo định lý Ta-lét ta có được các kết quả sau:

$AG' = \dfrac{2}{3}AN' = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2}AM = \dfrac{1}{3}AM$.

Mà điểm M được xác định bởi $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$ nên $AM = \dfrac{3}{4}AB$. Do đó $AG' = \dfrac{1}{4}AB = \dfrac{1}{2}$, suy ra $G'B = \dfrac{3}{2}$.

Vậy $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{G'B} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{8}$.

□

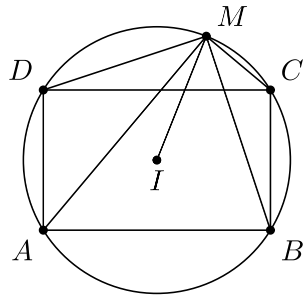
Bài 12. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB = a$, $AD = b$. Tính theo a, b các tích vô hướng sau:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$;

b) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$ với điểm M thuộc đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$.

Lời giải.

a)



$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = a^2.\\
&\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}\right)\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\right)\\
&\qquad = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB}\\
&\qquad = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} = b^2 - a^2.\\
&\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{BC}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}\\
&\qquad = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = 2b^2.
\end{aligned}$$

b) Gọi I là tâm hình chữ nhật $ABCD$, suy ra I là trung điểm của AC và BD. Theo quy tắc trung điểm, ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MI}$ và $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MI}$. Bình phương hai vế của hai đẳng thức này, ta được

$$MA^2+MC^2+2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=4MI^2 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=4MI^2-MA^2-MC^2$$
$$MB^2+MD^2+2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=4MI^2 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=4MI^2-MB^2-MD^2.$$

Cộng vế theo vế của hai đẳng thức trên, ta có

$$2\left(\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}\right)=8MI^2-\left(MA^2+MC^2+MB^2+MD^2\right). \qquad (*)$$

Vì điểm M nằm trên đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ có AC và BD là hai đường kính nên $MA^2+MC^2=AC^2=4MI^2$ và $MB^2+MD^2=BD^2=4MI^2$. Thay vào $(*)$ ta được kết quả $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=0$.

□

Dạng 2. Chứng minh đẳng thức tích vô hướng hay độ dài

- Với các biểu thức về tích vô hướng ta sử dụng định nghĩa hoặc tính chất của tích vô hướng. Cần đặc biệt lưu ý phép phân tích véc-tơ để biến đổi (quy tắc ba điểm, quy tắc trung điểm, quy tắc hình bình hành,...).
- Với các công thức về độ dài ta thường sử dụng $AB^2=\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$. Cần nắm vững tính chất của các hình cơ bản.

1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 8. Cho đoạn thẳng AB và I là trung điểm của AB. Chứng minh rằng với mỗi điểm O ta có

a) $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{IB}=0$.

b) $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}^2-\overrightarrow{OA}^2\right)$

Lời giải.

a) Vì I là trung điểm AB nên $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.
Vậy $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{OI}\cdot\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)=\overrightarrow{OI}\cdot\vec{0}=0$.

b) Vì I là trung điểm AB nên $2\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\Leftrightarrow\overrightarrow{OI}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\right)$. Do đó

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{AB} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\right)\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{OA}\right)\\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}\\
&= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}^2-\overrightarrow{OA}^2\right).
\end{aligned}$$

□

Ví dụ 9. Cho điểm M thay đổi trên đường tròn tâm O bán kính R ngoại tiếp tam giác đều ABC cho trước. Chứng minh $MA^2+MB^2+MC^2=6R^2$.

Lời giải.

Cách 1 (*Dùng tích vô hướng*). Vì tam giác ABC đều nên tâm O của đường tròn ngoại tiếp đồng thời là trọng tâm của tam giác. Vậy $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$. Ta có

$$\begin{aligned} MA^2+MB^2+MC^2 &= \overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2\\ &= \left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)^2\\ &= 3MO^2+OA^2+OB^2+OC^2+2\overrightarrow{MO}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\\ &= 6R^2. \end{aligned}$$

Cách 2 (*Dùng tọa độ*). Xét hệ trục tọa độ có gốc trùng với tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi tọa độ của các điểm là $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$, $C(x_C,y_C)$, $M(x,y)$. Vì tam giác ABC đều nên tâm đường tròn ngoại tiếp $O(0;0)$ đồng thời là trọng tâm của tam giác. Do đó $x_A+x_B+x_C=0$ và $y_A+y_B+y_C=0$.
Vì $OM^2=OA^2=R^2$ nên $x^2+y^2=x_A^2+y_A^2=R^2$.
Vậy

$$\begin{aligned} MA^2 &= (x-x_A)^2+(y-y_A)^2\\ &= 2R^2-2xx_A-2yy_A. \end{aligned}$$

Tương tự $MB^2=2R^2-2xx_B-2yy_B$ và $MC^2=2R^2-2xx_C-2yy_C$.
Do đó $MA^2+MB^2+MC^2=6R^2-2x(x_A+x_B+x_C)-2y(y_A+y_B+y_C)=6R^2$.

□

Ví dụ 10. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O, M là điểm bất kì. Chứng minh

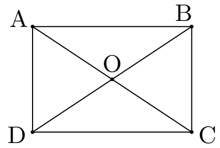
a) $MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$ (1);

b) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}$ (2).

Lời giải.

Nhận xét: Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật nên O là trung điểm AC và BD, do đó

$$\begin{cases}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MO}\\ \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MO}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}MA^2+MB^2+2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=4MO^2\\ MB^2+MD^2+2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=4MO^2.\end{cases}$$



Từ đây ta có thể thấy hai mệnh đề (1) và (2) là hai mệnh đề tương đương, tức là chứng minh được một mệnh đề thì sẽ suy ra được mệnh đề còn lại.
Tuy nhiên, ở đây hai mệnh đề vẫn được chứng minh một cách độc lập để bạn đọc có thêm nhiều cách nhìn nhận giải quyết vấn đề hơn.

a) Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật nên $\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{DA}\Rightarrow\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DA}=0$. Do đó

$$\begin{aligned} MA^2+MC^2 &= \left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}\right)^2\\ &= \overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MD}^2+\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{DC}^2+2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{DC}\\ &= MB^2+MD^2+2\overrightarrow{BA}^2+2\overrightarrow{BA}\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}\right)\ \text{(vì } \overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{BA}.\text{)}\\ &= MB^2+MD^2+2\overrightarrow{BA}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DB}\right)\\ &= MB^2+MD^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DA}=MB^2+MD^2. \end{aligned}$$

b) Ta có O là trung điểm AC nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$. Do đó

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} &= \left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)\\ &= MO^2+\overrightarrow{MO}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)-OA^2 \end{aligned}$$

$$= \quad MO^2 - OA^2.$$

Tương tự ta cũng chứng minh được $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = MO^2 - OB^2$.
Mà $OA = OB$ nên ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét: Ta có thể vận dụng cách chứng minh mệnh đề (1) để chứng minh mệnh đề (2) và ngược lại, bạn đọc có thể tự mình thử nghiệm để hiểu rõ hơn về các cách tiếp cận giải quyết các bài toán dạng này. □

2. Bài tập rèn luyện

Bài 13. Cho $\triangle ABC$, chứng minh $AB^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned} VT &= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \vec{0} = 0. \end{aligned}$$

□

Bài 14. Cho $\triangle ABC$ nhọn, đường cao AH, Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}$;

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

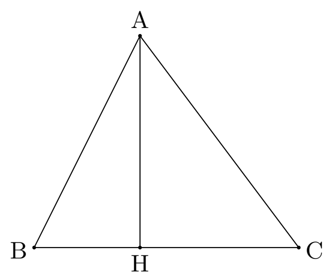
Lời giải.
Vì $AH \perp BC$ nên $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$.

a)

Ta có

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}\right) \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AH} = AH^2$.
- $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH} = \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}\right) \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AH} = AH^2$.

Vậy $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}$.



b) Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}\right) \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

□

Bài 15. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)^2}$.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)^2 &= AB^2 \cdot AC^2 - \left(AB^2 \cdot AC^2 \cdot \cos A\right)^2 \\ &= AB^2 \cdot AC^2 \cdot \left(1 - \cos^2 A\right) \\ &= AB^2 \cdot AC^2 \cdot \sin^2 A \\ &= (AB \cdot AC \cdot \sin A)^2 \\ &= \left(2S_{ABC}\right)^2. \end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Bài 16. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G. Chứng minh rằng với mỗi điểm M ta có

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

Lời giải.

Ta có G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Do đó

$$\begin{aligned} VT &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 \\ &= \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2 \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) = VP. \end{aligned}$$

□

Bài 17. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O, M là điểm bất kì. Chứng minh

$$MA^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MO}.$$

Lời giải.

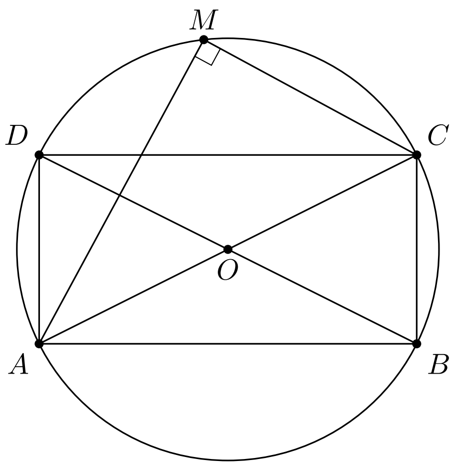
Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật nên O là trung điểm AC, do đó $2\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}$.
Suy ra $2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right) = MA^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$.
Mà theo Ví dụ 3 lại có $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$ nên ta có điều phải chứng minh. □

Bài 18. Cho hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính R. Chứng minh rằng với mọi M thuộc đường tròn (O) ta có

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}\right)\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right) = 8R^2.$$

Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên O là trung điểm AC và BD. Ta có



$$\begin{aligned} & \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \\ = {} & \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD} \\ = {} & 4\overrightarrow{MO} + \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) + \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\right) = 4\overrightarrow{MO}. \end{aligned}$$

Vì AC là đường kính của (O) nên $MA \perp MC$.
Suy ra $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$, dẫn tới

$$\begin{aligned} & \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}\right)\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right) \\ = {} & 2\overrightarrow{MO} \cdot 4\overrightarrow{MO} = 8MO^2 = 8R^2. \end{aligned}$$

□

Bài 19. Chứng minh rằng với mọi điểm A, B, C, M ta luôn có

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0. \text{ (hệ thức Euler).}$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} VT &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) \cdot \overrightarrow{CA} + \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BB} + \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC}\right) = 0. \end{aligned}$$

Bài 20. Cho $\triangle ABC$ các đường trung tuyến AD, BE, CF. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{AB}=0.$$

Lời giải.
Ta có AD, BE, CF là trung tuyến nên

$$\begin{aligned}
VT &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)\overrightarrow{AB}\\
&= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AB}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}\right)\right]\\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Bài 21. Cho $\triangle ABC$ đường cao AH, trung tuyến AI. Chứng minh rằng $\left|AB^2-AC^2\right|=2BC\cdot HI$.

Lời giải.
Ta có $AH\perp BC$ nên $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$. Do đó

$$\begin{aligned}
AB^2-AC^2 &= \left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\\
&= \overrightarrow{CB}\cdot 2\overrightarrow{AI}\\
&= 2\overrightarrow{CB}\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HI}\right)\\
&= 2\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{HI}
\end{aligned}$$

Do B, C, H, I thẳng hàng nên $\left|\cos\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{HI}\right)\right|=1$.
Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Dạng 3. Điều kiện vuông góc

Ta có thể lựa chọn một trong các hướng sau đây

- Nếu đề bài không cho tọa độ, ta sử dụng tính chất tích vô hướng của hai véc-tơ. Đặc biệt
$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0.$$
- Nếu đề bài cho dạng tọa độ $\vec{a}=(a_1;a_2)$, $\vec{b}=(b_1;b_2)$ thì
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2=0.$$

1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 11. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau và $|\vec{a}|=1$, $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2}$. Chứng minh hai véc-tơ $\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$ và $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ vuông góc với nhau.

Lời giải.
Vì $\vec{a}\perp\vec{b}$ nên $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.
Ta có

$$\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = 2\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}^2$$

$$= \quad 2|\vec{a}|^2 + 0 + \left|\vec{b}\right|^2$$
$$= \quad 2 \cdot 1^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = 0.$$

Vậy hai véc-tơ $\left(2\vec{a} - \vec{b}\right)$ và $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$ vuông góc với nhau. □

Ví dụ 12. Cho tam giác ABC có $A(2;4)$, $B(2;-2)$, $C(-4;1)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BC} = (-6;3)$, $\overrightarrow{AB} = (0;-6)$.
Giả sử tọa độ trực tâm H của $\triangle ABC$ là $H(x;y)$, ta có

$$\begin{cases} AH \perp BC \\ CH \perp AB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6(x-2) + 3(y-4) = 0 \\ 0(x+4) - 6(y-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}.$$

Vậy trực tâm của tam giác ABC là $H\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. □

2. Bài tập rèn luyện

Bài 22. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = c$, $AC = b$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ theo b và c.

Lời giải.

$\triangle ABC$ vuông tại $A \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
Ta có $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 = c^2$. □

Bài 23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai véc-tơ $\vec{u} = \left(\dfrac{1}{2};-5\right)$ và $\vec{v} = (k;-4)$. Tìm k để $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}k + (-5)(-4) = 0 \Leftrightarrow k = -40$. □

Bài 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba véc-tơ $\vec{u} = (4;1)$, $\vec{v} = (1;4)$ và $\vec{a} = \vec{u} + m \cdot \vec{v}$ với $m \in \mathbb{R}$. Tìm m để $\vec{a}$ vuông góc với trục hoành.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} = \vec{u} + m\vec{v} = (4+m;1+4m)$.
Trục hoành có véc-tơ đơn vị là $\vec{i} = (1;0)$.
$\vec{a}$ vuông góc với trục hoành $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{i} = 0 \Leftrightarrow 4 + m = 0 \Leftrightarrow m = -4$. □

Bài 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-2;4)$ và $B(8;4)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục hoành sao cho tam giác ABC vuông tại C.

Lời giải.

Ta có $C \in Ox \Rightarrow C(c;0)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{CA} = (-2-c;4) \\ \overrightarrow{CB} = (8-c;4). \end{cases}$

$\triangle ABC$ vuông tại C nên $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Rightarrow (-2-c)(8-c) + 4 \cdot 4 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} c = 6 \\ c = 0. \end{array}\right.$

Vậy $C(6;0)$ hoặc $C(0;0)$. □

Bài 26. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = \left|\vec{b}\right| = 1$ và hai véc-tơ $\vec{u} = \frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = 0 \Rightarrow \frac{2}{5}\vec{a}^2 - \frac{13}{5}\vec{a}\vec{b} - 3\vec{b}^2 = 0$ (1).

Vì $|\vec{a}| = \left|\vec{b}\right| = 1$ nên từ (1) ta suy ra $\vec{a}\vec{b} = -1$.

Khi đó ta có

$$\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|} = -1 \Rightarrow \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 180^\circ.$$

□

Dạng 4. Tập hợp điểm và chứng minh bất đẳng thức

Ta sử dụng các kết quả cơ bản sau:

a) Cho A, B là các điểm cố định, M là điểm di động

- Nếu $\left|\overrightarrow{AM}\right| = k$ với k là số thực dương cho trước thì tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A, bán kính $R = k$.
- Nếu $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ thì tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB.
- Nếu $\overrightarrow{MA} \cdot \vec{a} = 0$ với $\vec{a} \neq \vec{0}$ cho trước thì tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với giá của vectơ $\vec{a}$.

b) Các bất đẳng thức vectơ

- $\vec{a}^2 \geq 0\ \forall \vec{a}$. Dấu "=" xảy ra khi $\vec{a} = \vec{0}$.
- $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Dấu "=" xảy ra khi $\vec{a} = k\vec{b}$, $k > 0$.

1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 13. Cho hai điểm A, B cố định có độ dài bằng a, vectơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$. Tìm tập hợp điểm M sao cho

a) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{3a^2}{4}$

b) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA^2$

Lời giải.

a) Gọi I là trung điểm của AB ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{3a^2}{4} &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = \frac{3a^2}{4} \\ &\Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = \frac{3a^2}{4}\ (\text{Do } \overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}) \\ &\Leftrightarrow MI^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} \Leftrightarrow MI = a.\end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R = a$.

b) Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA^2 &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}^2 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BA} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{BA}.\end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng vuông góc với đường thẳng AB tại A.

□

Ví dụ 14. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M sao cho

$$\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{CB}\right)\overrightarrow{BC}=0.$$

Lời giải.

Gọi I là điểm xác định bởi

$$\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}&\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{CB}\right)\overrightarrow{BC}=0\\ \Leftrightarrow\ &\left[\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)\right]\cdot\overrightarrow{BC}=3BC^2\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{BC}=BC^2\end{aligned}$$

Gọi M', I' lần lượt là hình chiếu của M, I lên đường thẳng BC.
Theo công thức hình chiếu ta có

$$\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{M'I'}\cdot\overrightarrow{BC}.$$

Do đó

$$\overrightarrow{M'I'}\cdot\overrightarrow{BC}=BC^2.$$

Vì $BC^2>0$ nên $\overrightarrow{M'I'}$, $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng suy ra

$$\overrightarrow{M'I'}\cdot\overrightarrow{BC}=BC^2\Leftrightarrow M'I'\cdot BC=BC^2\Leftrightarrow M'I'=BC.$$

Do I cố định nên I' cố định suy ra M' cố định.
Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua M' và vuông góc với BC. □

Ví dụ 15. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

a) $\cos A+\cos B+\cos C\le\dfrac{3}{2}$.

b) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C\ge-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

a) Đặt $\vec{i}=\dfrac{1}{AB}\overrightarrow{AB}$, $\vec{j}=\dfrac{1}{BC}\overrightarrow{BC}$, $\vec{k}=\dfrac{1}{CA}\overrightarrow{CA}$. Khi đó

$$|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$$

và

$$(\vec{i},\vec{j})=180^\circ-B,\ (\vec{j},\vec{k})=180^\circ-C,\ (\vec{k},\vec{i})=180^\circ-A.$$

Ta có

$$\begin{aligned}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})^2\ge0&\Leftrightarrow\vec{i}^2+\vec{j}^2+\vec{k}^2+2\vec{i}\cdot\vec{j}+2\vec{j}\cdot\vec{k}+2\vec{k}\cdot\vec{i}\ge0\\&\Leftrightarrow1^2+1^2+1^2+2\cos(180^\circ-B)+2\cos(180^\circ-C)+2\cos(180^\circ-A)\ge0\\&\Leftrightarrow3-2\cos A-2\cos B-2\cos C\ge0\\&\Leftrightarrow\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

b) Gọi (O,R) là tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta có

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})^2\ge0&\Leftrightarrow OA^2+OB^2+OC^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}\ge0\\&\Leftrightarrow3R^2+2R^2(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)\ge0\\&\Leftrightarrow\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C\ge-\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

□

2. Bài tập rèn luyện

Bài 27. Cho đoạn thẳng AB và số thực k. Tìm tập hợp điểm M trong mỗi trường hợp sau

a) $2MA^2 = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.

b) $MA^2 + 2MB^2 = k$, $k > 0$.

c) $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{a} = k$.

Lời giải.

a) Ta có

$$2MA^2 = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\left(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) = 0. \qquad (*)$$

Gọi I là điểm thoả mãn:

$$2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}.$$

Khi đó

$$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}.$$

Do đó:

$$(*) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MI}.$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn đường kính AI.

b) Gọi E là điểm thoả mãn

$$\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EB} = \vec{0}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} & MA^2 + 2MB^2 = k \\ \Leftrightarrow\ & \left(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB}\right)^2 = k \\ \Leftrightarrow\ & 3ME^2 = k - EA^2 - 2EB^2. \quad (*) \end{aligned}$$

Mặt khác từ

$$\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EB} = \vec{0},$$

suy ra

$$EA = \frac{2}{3}AB;\ \ EB = \frac{1}{3}AB,$$

nên

$$(*) \Leftrightarrow 3ME^2 = k - \frac{2}{3}AB^2 \Leftrightarrow ME^2 = \frac{1}{3}\left(k - \frac{2}{3}AB^2\right).$$

- Nếu $k < \frac{2}{3}AB^2$: Tập hợp điểm M là rỗng.
- Nếu $k = \frac{2}{3}AB^2$: Tập hợp điểm M là một điểm E.
- Nếu $k > \frac{2}{3}AB^2$: Tập hợp điểm M là đường tròn tâm E, bán kính $R = \sqrt{\frac{1}{3}\left(k - \frac{2}{3}AB^2\right)}$.

c) Gọi Δ là giá của vectơ $\vec{a}$ và A', M' lần lượt là hình chiếu của A, M lên Δ. Theo công thức hình chiếu ta có

$$\overrightarrow{AM}.\vec{a} = \overrightarrow{A'M'} \cdot \vec{a}.$$

Suy ra

$$\overrightarrow{A'M'} \cdot \vec{a} = k \Leftrightarrow \overline{A'M'} \cdot \overline{a} = k \Leftrightarrow \overline{A'M'} = \frac{k}{\overline{a}},$$

trong đó $\overline{a}$ là độ dài đại số của vectơ $\vec{a}$.

Vì A' là điểm cố định, $\frac{k}{\overline{a}}$ là hằng số không đổi nên M' là điểm cố định.

Do đó tập hợp điểm M là đường thẳng vuông góc với Δ tại M'. □

Bài 28. Cho tứ giác $ABCD$, I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}=\dfrac{1}{2}IJ^2$.

Lời giải.

Ta có

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}IJ^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{MJ}^2-IA^2-JC^2=\frac{1}{2}IJ^2.$$

Gọi K là trung điểm IJ suy ra

$$\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{MJ}^2=2MK^2+2IK^2.$$

Do đó

$$MK^2=\frac{IA^2+JC^2}{2}.$$

Suy ra tập hợp điểm M là đường tròn tâm K bán kính $R=\sqrt{\dfrac{IA^2+JC^2}{2}}$. □

Bài 29. Cho tam giác ABC, góc A nhọn, trung tuyến AI. Tìm tập hợp những điểm M di động trong góc $\widehat{BAC}$ sao cho $AB\cdot AH+AC\cdot AK=AI^2$, trong đó H và K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M lên AB và AC.

Lời giải.

Sử dụng công thức hình chiếu ta có:

$$\begin{aligned}&AB\cdot AH+AC\cdot AK=AI^2\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AK}\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{AI}^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AM}\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{AI}^2=2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AM}.\end{aligned}$$

Gọi M_0 là hình chiếu của M lên AI khi đó ta có

$$AI^2=2AI\cdot AM_0\Leftrightarrow AM_0=\frac{AI}{2}$$

(M_0 nằm trên tia AI).

Suy ra tập hợp điểm M là đoạn trung trực của AI nằm trong góc $\widehat{BAC}$. □

Bài 30. Cho tam giác ABC và k là số thực cho trước. Tìm tập hợp những điểm M sao cho

$$MA^2-MB^2=k.$$

Lời giải.

Gọi I là trung điểm AB ta có

$$MA^2-MB^2=k\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{BA}=k\Leftrightarrow \overline{M'I}=\frac{k}{2\overline{BA}}.$$

Với M' là hình chiếu M lên AB suy ra M' là điểm cố định.

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua M' và vuông góc với AB. □

Bài 31. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a và số thực k cho trước. Tìm tập hợp điểm M sao cho

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=k.$$

Lời giải.

Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$. Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}&=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)\\&=MI^2+\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IA}\right)+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IC}\\&=MI^2+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IC}.\end{aligned}$$

Tương tự

$$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=MI^2+\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{ID},$$

nên

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=k &\Leftrightarrow 2MI^2+\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IC}=k\\ &\Leftrightarrow 2MI^2-IB^2-IA^2=k\Leftrightarrow MI^2=\frac{k}{2}+IA^2\\ &\Leftrightarrow MI^2=\frac{k}{2}+a^2\\ &\Leftrightarrow MI=\sqrt{\frac{k}{2}+IA^2}=\sqrt{\frac{k+a^2}{2}}.\end{aligned}$$

- Nếu $k<-a^2$: Tập hợp điểm M là tập rỗng.
- Nếu $k=-a^2$ thì $MI=0\Leftrightarrow M\equiv I$ suy ra tập hợp điểm M là điểm I.
- Nếu $k>-a^2$ thì $MI=\sqrt{\frac{k+a^2}{2}}$. Suy ra tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R=\sqrt{\frac{k+a^2}{2}}$.

□

Bài 32. Cho tam giác ABC và các số thực x,y,z. Chứng minh rằng

$$xy\cos A+yz\cos B+zx\cos C\le\frac{x^2+y^2+z^2}{2}.$$

Lời giải.

Đặt $\vec{i}=\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$, $\vec{j}=\frac{\overrightarrow{BC}}{BC}$, $\vec{k}=\frac{\overrightarrow{CA}}{CA}$. Suy ra $\left|\vec{i}\right|=\left|\vec{j}\right|=\left|\vec{k}\right|=1$ và $\vec{i}.\vec{j}=-\cos B$, $\vec{j}.\vec{k}=-\cos C$, $\vec{k}.\vec{i}=-\cos A$.

Ta có

$$\begin{aligned}\left(x\vec{k}+y\vec{i}+z\vec{j}\right)^2\ge 0 &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2xy\,\vec{i}.\vec{k}+2yz\,\vec{i}.\vec{j}+2zx\,\vec{j}.\vec{k}\ge 0\\ &\Leftrightarrow xy\cos A+yz\cos B+zx\cos C\le\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\ \text{(đpcm)}.\end{aligned}$$

□

C – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $\widehat{B}=60^\circ$. Góc giữa $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$ bằng

A. 60°. B. 30°. C. 90°. D. 45°.

Lời giải.

Ta có $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)=\widehat{ACB}$.

Do $\triangle ABC$ vuông tại A và có $\widehat{B}=60^\circ$ nên $\widehat{C}=30^\circ$.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Cho hai véc-tơ $\vec{a}=(3;2)$, $\vec{b}=(-2;4)$. Hãy chọn khẳng định đúng.

A. $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$. B. $\vec{a}\cdot\vec{b}=(-6;8)$. C. $\vec{a}\cdot\vec{b}=-14$. D. $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$.

Lời giải.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot(-2)+2\cdot 4=2$.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai véc-tơ $\vec{a} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$ và $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j}$. Tính tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

(A) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -30$. (B) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$. (C) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 30$. (D) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 43$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $\vec{a} = (4; 6)$ và $\vec{b} = (3; -7)$.

Suy ra $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 3 + 6 \cdot (-7) = -30$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Trong hệ tọa độ Oxy, cho $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (4; 3)$ và $\vec{c} = (2; 3)$. Giá trị của biểu thức $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ bằng bao nhiêu?

(A) 18. (B) 0. (C) 28. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} + \vec{c} = (6; 6)$.

Vậy $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 6 = 18$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Cho $A(1; 2)$, $B(-1; 1)$ và $C(5; -1)$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

(A) 7. (B) 5. (C) -7. (D) -5.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB} = (-2; -1)$, $\overrightarrow{AC} = (4; -3)$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-2) \cdot 4 + (-1) \cdot (-3) = -5$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(3; -1)$ và $B(2; 10)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB}$.

(A) $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = -4$. (B) $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$. (C) $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = 4$. (D) $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = 16$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AO} = (-3; 1)$, $\overrightarrow{OB} = (2; 10)$. Suy ra $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = -3 \cdot 2 + 1 \cdot 10 = 4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai véc-tơ cùng hướng và đều khác $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. (B) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. (C) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$. (D) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.

Do $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai véc-tơ cùng hướng nên $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0^\circ$.

Vậy $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a và H là trung điểm BC. Tính $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CA}$.

(A) $\dfrac{3a^2}{4}$. (B) $\dfrac{-3a^2}{4}$. (C) $\dfrac{3a^2}{2}$. (D) $\dfrac{-3a^2}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CA} = AH \cdot CA \cdot \cos\left(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CA}\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot \cos 150^\circ = -\dfrac{3a^2}{4}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 9. Cho tam giác ABC cân tại A, $\widehat{A}=120^\circ$ và $AB=a$. Tính $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}$.

(A) $\dfrac{a^2}{2}$. (B) $-\dfrac{a^2}{2}$. (C) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. (D) $-\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=BA\cdot CA\cdot\cos 120^\circ=-\dfrac{1}{2}a^2$.

Chọn đáp án (B)

Câu 10. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B}=60^\circ$, $AB=a$. Tính $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}$.

(A) $3a^2$. (B) $-3a^2$. (C) $3a$. (D) 0.

Lời giải.

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=AC\cdot BC\cdot\cos 150^\circ=a\sqrt{3}\cdot 2a\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-3a^2.$$

Chọn đáp án (B)

Câu 11. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính tích vô hướng của hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

(A) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=a\sqrt{2}$. (B) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2a$. (C) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=a^2$. (D) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2a^2$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=a\cdot a\sqrt{2}\cos 45^\circ=a^2$.

Chọn đáp án (C)

Câu 12. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai véc-tơ $\vec{a}=(a_1;a_2)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$.

(B) $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$.

(C) $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{a_1b_2+a_2b_1}{\sqrt{a_1^2+b_2^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_1^2}}$.

(D) $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{a_1^2+b_2^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_1^2}}$.

Lời giải.

Công thức cơ bản.

Chọn đáp án (B)

Câu 13. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|$.

(A) $\alpha=180^\circ$. (B) $\alpha=0^\circ$. (C) $\alpha=90^\circ$. (D) $\alpha=45^\circ$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Mà theo giả thiết $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|$ nên $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-1$ hay $\alpha=180^\circ$.

Chọn đáp án (A)

Câu 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai véc-tơ $\vec{a}=(-2;-1)$ và $\vec{b}=(4;-3)$. Tính cosin của góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

(A) $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. (B) $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. (C) $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{-2\cdot 4+(-1)\cdot(-3)}{\sqrt{4+1}\cdot\sqrt{16+9}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\vec{a}=(2;5)$ và $\vec{b}=(3;-7)$. Tính $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

(A) $90°$. (B) $120°$. (C) $135°$. (D) $45°$.

Lời giải.

$$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{2\cdot 3+5\cdot(-7)}{\sqrt{2^2+5^2}\cdot\sqrt{3^2+(-7)^2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$$

Suy ra: $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=135°$

Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Tam giác ABC vuông ở A và có $BC=2AC$. Tính $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)$.

(A) $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=\dfrac{1}{2}$. (B) $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

(C) $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Xác định được $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=180°-\widehat{ACB}$.

Ta có $\cos\widehat{ACB}=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{ACB}=60°$. Vậy $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=\cos 120°=-\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Cho hình vuông ABCD, tính $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CA}\right)$.

(A) $\dfrac{1}{2}$. (B) $-\dfrac{1}{2}$. (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (D) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Vì $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CA}\right)=180°-\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=135°$ nên $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CA}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 18. Cho tam giác đều ABC. Tính $P=\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)+\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)+\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)$.

(A) $P=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. (B) $P=\dfrac{3}{2}$. (C) $P=-\dfrac{3}{2}$. (D) $P=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\left(-\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=180°-\widehat{CBA}=120°\Rightarrow\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

Tương tự, ta cũng có $\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)=\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)+\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)+\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)=-\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right)$.

(A) $-2a^2$. (B) a^2. (C) $2a^2$. (D) $-\dfrac{a^2}{\sqrt{2}}$.

Lời giải.

$ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$ và $AC=a\sqrt{2}$.
Do đó

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right) &= \overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right)\\ &= \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=AC\cdot BC\cdot\cos 45^\circ=a^2.\end{aligned}$$

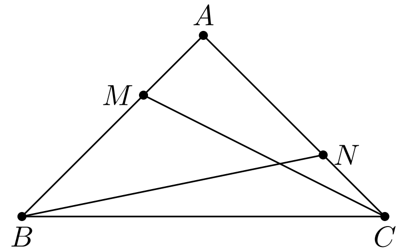
Chọn đáp án B

Câu 20. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh bằng 3. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $2AM=MB, NA=2NC$. Giá trị của tích vô hướng $\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{CM}$ là

A. $\frac{7}{2}$. B. $-\frac{7}{2}$. C. $\frac{11}{2}$. D. $-\frac{11}{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{CM} &= \left(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}\right)\\ &= \overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\ &= 1\cdot 2\cdot\cos 60^\circ-2\cdot 3\cos 0^\circ-3\cdot 1\cos 0^\circ+3\cdot 3\cos 60^\circ\\ &= -\frac{7}{2}.\end{aligned}$$



Chọn đáp án B

Câu 21. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=a$, $BC=2a$. Tính $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}$ theo a.

A. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=-a\sqrt{3}$.
B. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=-3a^2$.
C. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=a\sqrt{3}$.
D. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=3a^2$.

Lời giải.

Tam giác ABC vuông tại A nên $CA^2=BC^2-AB^2=3a^2$.
$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CA}=-3a^2$.
Chọn đáp án B

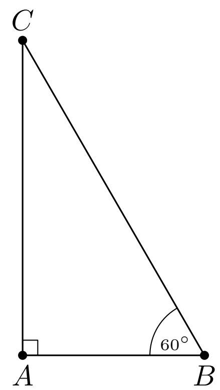
Câu 22. Cho tam giác ABC vuông tại A, có số đo góc B là 60° và $AB=a$. Kết quả nào sau đây là **sai**?

A. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.
B. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=3a^2$.
C. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-a^2$.
D. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=-3\sqrt{2}a^2$.

Lời giải.

Ta có $AB=a, BC=2a, AC=a\sqrt{3}$.

- Do $AB\perp AC$ nên $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.
- Ta có $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=CA\cdot CB\cdot\cos 30^\circ=3a^2$.
- Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-BA\cdot BC\cdot\cos 60^\circ=-a^2$.
- Ta có $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-CA\cdot CB\cdot\cos 30^\circ=-3a^2$.



Chọn đáp án D

Câu 23. Cho M là trung điểm AB, tìm mệnh đề **sai**.

A. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB}=-MA\cdot AB$.
B. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-MA\cdot MB$.

(C) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=AM\cdot AB$. (D) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MA\cdot MB$.

Lời giải.

$\overrightarrow{MA},\overrightarrow{AB}$ ngược hướng suy ra $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB}=MA\cdot AB\cdot\cos 180^\circ=-MA\cdot AB$.
$\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}$ ngược hướng suy ra $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MA\cdot MB\cdot\cos 180^\circ=-MA\cdot MB$.
$\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}$ cùng hướng suy ra $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=AM\cdot AB\cdot\cos 0^\circ=AM\cdot AB$.
$\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}$ ngược hướng suy ra $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MA\cdot MB\cdot\ \cos 180^\circ=-MA\cdot MB$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có $AD=6$. Đặt $\vec{v}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CB}$. Tính $\vec{v}\cdot\overrightarrow{AD}$.

(A) 18. (B) 24. (C) 36. (D) 48.

Lời giải.

$\vec{v}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ suy ra $\vec{v}\cdot\overrightarrow{AD}=AD^2=36$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Cho tam giác ABC có cạnh $BC=6$ và đường cao AH. H ở trên cạnh BC sao cho $BH=2HC$. Tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

(A) -24. (B) 24. (C) 18. (D) -18.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{BC}=-24$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC=12$, M là trung điểm AC. Tính $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CA}$.

(A) 144. (B) -144. (C) 72. (D) -72.

Lời giải.

$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CA}=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\right)\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CA}=-72$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Cho tam giác ABC có đường cao BH (H ở trên cạnh AC). Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=BH\cdot HC$. (B) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=AH\cdot HC$.
(C) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=AH\cdot AC$. (D) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=HC\cdot AC$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=\left(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HA}\right)\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{CA}=AH\cdot AC$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 28. Cho 2 véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=2$ và có độ lớn bằng 1. Hãy tính $\left(3\vec{a}-4\vec{b}\right)\left(2\vec{a}+5\vec{b}\right)$.

(A) 7. (B) 5. (C) -7. (D) -5.

Lời giải.

$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$.
$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=2\Leftrightarrow\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=4\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=1$.
$\left(3\vec{a}-4\vec{b}\right)\left(2\vec{a}+5\vec{b}\right)=6\vec{a}^2-20\vec{b}^2+7\vec{a}\cdot\vec{b}=-7$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 29. Cho hình thang vuông $ABCD$ có đường cao $AD = 3a$. Tính $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Ⓐ $-9a^2$. Ⓑ $15a^2$. Ⓒ 0. Ⓓ $9a^2$.

Lời giải.

$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA} \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right) = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AD} = -9a^2$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 30. Cho tam giác ABC vuông tại C có $AC = 9$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Ⓐ 9. Ⓑ 81. Ⓒ 3. Ⓓ 5.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = 81$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 31. Cho tam giác ABC có $BC = a,\ CA = b,\ AB = c$. Tính $P = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{BC}$.

Ⓐ $P = b^2 - c^2$. Ⓑ $P = \dfrac{c^2 + b^2}{2}$. Ⓒ $P = \dfrac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$. Ⓓ $P = \dfrac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}P &= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)\\ &= \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = AC^2 - AB^2 = b^2 - c^2.\end{aligned}$$

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 32. Cho tam giác ABC có $BC = a,\ CA = b,\ AB = c$. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Ⓐ $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \dfrac{b^2 - c^2}{2}$. Ⓑ $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \dfrac{c^2 + b^2}{2}$.

Ⓒ $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \dfrac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$. Ⓓ $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \dfrac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.

Lời giải.

Vì M là trung điểm của BC suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AM}$. Khi đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2\right) = \frac{1}{2}\left(AC^2 - AB^2\right) = \frac{b^2 - c^2}{2}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 33. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính $P = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA}\right)$.

Ⓐ $P = 2\sqrt{2}a$. Ⓑ $P = 2a^2$. Ⓒ $P = a^2$. Ⓓ $P = -2a^2$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BD = a\sqrt{2} \\ \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA} = \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}\right) + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BD}. \end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned}P &= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \cdot 2\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} + 0\\ &= -2 \cdot BA \cdot BD \cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}\right) = -2 \cdot a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -2a^2.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 34. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua C. Tính $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}$.

(A) $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=2a^2$. (B) $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{3}a^2$. (C) $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{5}a^2$. (D) $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=5a^2$.

Lời giải.

Ta có C là trung điểm của DE nên $DE=2a$. Khi đó

$$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\underbrace{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}}_{0}+\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AB}$$
$$=DE\cdot AB\cdot\cos\left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{AB}\right)=DE\cdot AB\cdot\cos 0^\circ=2a^2.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 35. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai véc-tơ $\vec{a}=(-2;3)$ và $\vec{b}=(4;1)$. Tìm véc-tơ $\vec{d}$ biết $\vec{a}\cdot\vec{d}=4$ và $\vec{b}\cdot\vec{d}=-2$.

(A) $\vec{d}=\left(\frac{5}{7};\frac{6}{7}\right)$. (B) $\vec{d}=\left(-\frac{5}{7};\frac{6}{7}\right)$. (C) $\vec{d}=\left(\frac{5}{7};-\frac{6}{7}\right)$. (D) $\vec{d}=\left(-\frac{5}{7};-\frac{6}{7}\right)$.

Lời giải.

Gọi $\vec{d}=(x;y)$. Từ giả thiết, ta có hệ $\begin{cases}-2x+3y=4\\ 4x+y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{5}{7}\\ y=\dfrac{6}{7}.\end{cases}$

Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-1;-1)$, $B(3;1)$, $C(6;0)$. Tính $\cos\widehat{B}$.

(A) $\cos\widehat{B}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. (B) $\cos\widehat{B}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. (C) $\cos\widehat{B}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. (D) $\cos\widehat{B}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

$\overrightarrow{BA}=(-4;-2)$, $\overrightarrow{BC}=(3;1)$.

$\cos\widehat{B}=\cos(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{(-4)3+(-2)1}{\sqrt{(-4)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 37. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(1;-1)$, $B(4;2)$ và $C(4;-2)$. Hỏi góc $\widehat{ABC}$ có số đo độ bằng bao nhiêu?

(A) 30°. (B) 45°. (C) 60°. (D) 90°.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BA}=(-3;-3)\Rightarrow BA=3\sqrt{2}$.

$\overrightarrow{BC}=(0;-4)\Rightarrow BC=4$.

$\cos\widehat{ABC}=\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{BA\cdot BC}=\dfrac{12}{3\sqrt{2}\cdot 4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\widehat{ABC}=45^\circ$

Chọn đáp án (B) □

Câu 38. Cho $\vec{u}=(1;-2)$, $\vec{v}=(-2;1)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $\vec{u}\cdot\vec{v}=-4$. (B) $|\vec{u}|=|\vec{v}|$. (C) $|\vec{u}|=\sqrt{5}$. (D) $\vec{u}\perp\vec{v}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u}\cdot\vec{v}=1\cdot(-2)+(-2)\cdot 1\neq 0\Rightarrow\vec{u}\not\perp\vec{v}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 39. Biết $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

(B) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ nằm trên hai đường thẳng hợp với nhau một góc 80°.

(C) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

(D) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ nằm trên hai đường thẳng hợp với nhau một góc 60°.

Lời giải.

Ta có

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Leftrightarrow \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = -1$$

nên $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 40. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(2;1)$, $B(2;-3)$ và $C(3;2)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

(A) Tam giác ABC là tam giác nhọn.

(B) Tam giác ABC là tam giác đều.

(C) Tam giác ABC là tam giác tù.

(D) Tam giác ABC là tam giác vuông.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (0;-4) \Rightarrow AB = 4$;
$\overrightarrow{AC} = (1;1) \Rightarrow AC = \sqrt{2}$;
$\overrightarrow{BC} = (1;5) \Rightarrow BC = \sqrt{26}$.
Ta nhận thấy: $AB \neq AC \neq BC$ nên tam giác ABC không phải là tam giác đều.
Ta có $AB^2 + AC^2 = 4^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 18 \neq 26 = BC^2$ suy ra tam giác ABC không phải là tam giác vuông.
Cạnh dài nhất là BC nên góc lớn nhất là góc A. Ta tính góc A.

$$\cos\widehat{A} = \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{0 \cdot 1 - 4 \cdot 1}{4\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0 \Rightarrow \widehat{A} \text{ tù.}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 41. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho bốn điểm $A(-8;0)$, $B(0;4)$, $C(2;0)$ và $D(-3;-5)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) Hai góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ phụ nhau.

(B) Góc $\widehat{BCD}$ là góc nhọn.

(C) $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \cos\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}\right)$.

(D) Hai góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ bù nhau.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (8;4)$, $\overrightarrow{AD} = (5;-5)$, $\overrightarrow{CB} = (-2;4)$, $\overrightarrow{CD} = (-5;5)$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \dfrac{8 \cdot 5 + 4 \cdot (-5)}{\sqrt{8^2+4^2} \cdot \sqrt{5^2+5^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \\ \cos\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}\right) = \dfrac{(-2) \cdot (-5) + 4 \cdot (-5)}{\sqrt{2^2+4^2} \cdot \sqrt{5^2+5^2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}. \end{cases}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 42. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính cô-sin góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{BC}$.

(A) $\cos\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BC}\right) = \dfrac{1}{2}$.

(B) $\cos\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BC}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

(C) $\cos\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BC}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(D) $\cos\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BC}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $\widehat{B} = 60^\circ$ và $\widehat{C} = 30^\circ$. $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}\right) = \widehat{AMC} = 120^\circ$

$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BC}\right) = \cos 120^\circ = -\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 43. Cho tam giác ABC. Tính tổng $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}\right) + \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}\right)$.

(A) 180°. (B) 360°. (C) 270°. (D) 120°.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = 180^\circ - \widehat{ABC} \\ \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}\right) = 180^\circ - \widehat{BCA} \\ \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}\right) = 180^\circ - \widehat{CAB} \end{cases}$

Suy ra $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}\right) + \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}\right) = 360^\circ$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 44. Tam giác ABC có góc A bằng 100° và có trực tâm H. Tính tổng $\left(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}\right) + \left(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}\right) + \left(\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA}\right)$.

(A) 360°. (B) 180°. (C) 80°. (D) 160°.

Lời giải.

Gọi BI và CF là hai đường cao của tam giác ABC. Suy ra tứ giác $HIAF$ nội tiếp, kéo theo $\widehat{BHC} = 80^\circ$.

Ta có $\begin{cases} \left(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}\right) = \widehat{BHA} \\ \left(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}\right) = \widehat{BHC} \\ \left(\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA}\right) = \widehat{CHA} \end{cases}$

$\left(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}\right) + \left(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}\right) + \left(\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA}\right) = 2\widehat{BHC} = 160^\circ$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 45. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O. Tính tổng $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}\right) + \left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}\right) + \left(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{DC}\right)$.

(A) 45°. (B) 405°. (C) 315°. (D) 225°.

Lời giải.

Vì $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ cùng hướng nên $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}\right) = 0^\circ$.

Vì $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}$ ngược hướng nên $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}\right) = 180^\circ$.

Vẽ $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DC}$, khi đó $\left(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{DC}\right) = \left(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CE}\right) = \widehat{OCE} = 135^\circ$.

Vậy $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}\right) + \left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}\right) + \left(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{DC}\right) = 0^\circ + 180^\circ + 135^\circ = 315^\circ$.

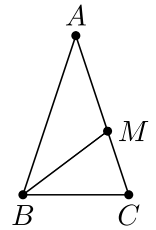
Chọn đáp án (C) □

Câu 46. Cho tam giác ABC cân tại A, góc $\hat{A} = 20^\circ$. Gọi BM là đường phân giác trong của góc $\widehat{ABC}$. Tính $\cos\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{MC}\right)$.

(A) $\dfrac{1}{2}$. (B) $\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$. (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (D) $\dfrac{-1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{BMC} = 180^\circ - \left(\widehat{MBC} + \widehat{BCM}\right) = 180^\circ - (40^\circ + 80^\circ) = 60^\circ$.
$\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{MC}\right) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.
$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{MC}\right) = \dfrac{-1}{2}$.



Chọn đáp án D ☐

Câu 47. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a, góc $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD và α là góc giữa hai đường thẳng DA và BG. Tính $\sin\alpha$.

A $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$. B $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. C $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. D $\sin\alpha = 1$.

Lời giải.

Vì $AD \parallel BC$ nên Ta có $\alpha = \widehat{(DA, BG)} = \widehat{(BC, BG)} = 30^\circ \Rightarrow \sin\alpha = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 48. Cho tam giác ABC có các cạnh bằng a, b, c. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ theo a, b, c.

A $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)$. B $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2)$.

C $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}(b^2 + c^2 + a^2)$. D $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 \Rightarrow BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 49. Cho nửa đường tròn tâm O, có đường kính $AB = 2R$. Gọi M, N là hai điểm thuộc nửa đường tròn sao cho hai dây cung AM và BN cắt nhau tại I. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

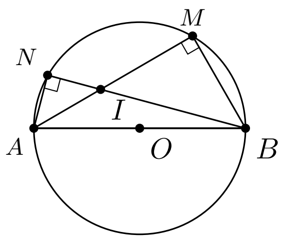
A $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$. B $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB}$.

C $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AN}$. D $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BA}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AI}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM})\\ &= \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BM}\\ &= \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$



Chọn đáp án A ☐

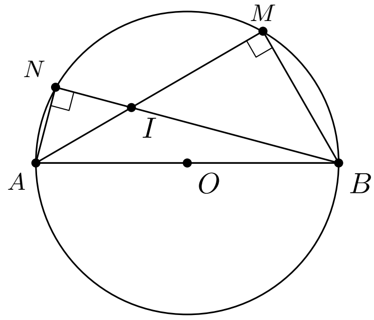
Câu 50. Cho hai điểm M, N nằm trên đường tròn đường kính $AB = 2r$. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AM và BN. Tính theo r giá trị biểu thức $P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI}$.

A $P = 4r^2$. B $P = 2r^2$. C $P = r^2$. D $P = \dfrac{r^2}{4}$.

Lời giải.

Vì $AI \perp BM$ và $BI \perp AN$ nên $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{AN} = 0$.

Do đó



$$\begin{aligned} P &= \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI} \\ &= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}\right) \cdot \overrightarrow{AI} + \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN}\right) \cdot \overrightarrow{BI} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BI} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}\right) \\ &= \overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = 4r^2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 51. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai véc-tơ $\vec{a} = (x; x-1)$, $\vec{b} = (x+2; x+1)$. Điều kiện của x để $\vec{a} \cdot \vec{b} < 3$ là

A. $-2 < x < 3$.
B. $-2 < x < 1$.
C. $0 < x < 1$.
D. $-2 < x$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = x(x+2) + (x-1)(x+1) < 3$
$\Leftrightarrow x^2 + 2x + x^2 - 1 - 3 < 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1$.
Chọn đáp án B □

Câu 52. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh là a. Giá trị của biểu thức $\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA}\right)\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$ là

A. 0.
B. $2a^2$.
C. $-2a^2$.
D. $-2\sqrt{2}a^2$.

Lời giải.

$$\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA}\right)\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = 2\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC} = 2\left|\overrightarrow{BD}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}\right) = 2 \cdot a\sqrt{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2a^2.$$

Chọn đáp án B □

Câu 53. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM = \dfrac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng DC. Tính $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN}$.

A. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = -4$.
B. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$.
C. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 4$.
D. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 16$.

Lời giải.

Vì giả thiết không cho góc nên ta thử phân tích các véc-tơ $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MN}$ theo các véc-tơ có giá vuông góc với nhau.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}. \\ \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} - \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) \\ &= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} &= \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{16}\left(3\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AB}^2 - 3\overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}\right) \\ &= \frac{1}{16}\left(0 + 3a^2 - 3a^2 - 0\right) = 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 54. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 8$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

A $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24$. B $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$. C $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28$. D $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 32$.

Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD$, giả thiết không cho góc, ta phân tích các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ theo các véc-tơ có giá vuông góc với nhau.

Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + 0 = \dfrac{1}{2}AC^2 = 32$.

Chọn đáp án D □

Câu 55. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$ và $AD = a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD. Tính $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$.

A $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. B $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -a^2\sqrt{2}$. C $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$. D $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$.

Lời giải.

Ta có $AC = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

Lại có $\begin{cases} \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}. \end{cases}$

$\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = -a^2 + 0 + 0 + \dfrac{1}{2}\left(a\sqrt{2}\right)^2 = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 56. Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho $\vec{u} = (2;5)$ và $\vec{v} = (-3;1)$. Tìm số thực m để $\vec{a} = m\vec{u} + \vec{v}$ tạo với $\vec{b} = (1;1)$ một góc $45°$.

A $m = \dfrac{3}{2}$. B $m = -1$. C $m = -\dfrac{1}{5}$. D $m = 2$.

Lời giải.

véc-tơ $\vec{a} = (2m-3; 5m+1)$; $\vec{b} = (1;1)$.

$$\begin{aligned}
& \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{(2m-3)\cdot 1 + (5m+1)\cdot 1}{\sqrt{(2m-3)^2 + (5m+1)^2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{7m-2}{\sqrt{29m^2 - 2m + 10}} = 1 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{29m^2 - 2m + 10} = 7m - 2 \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} 7m - 2 \geq 0 \\ 29m^2 - 2m + 10 = 49m^2 - 28m + 4 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} m \geq \dfrac{2}{7} \\ 20m^2 - 26m - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 57. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau tại M và $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$. Gọi P là trung điểm của AD. Góc giữa hai đường thẳng MP và BC là

A $90°$. B $60°$. C $45°$. D $30°$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}$; $\overrightarrow{MP} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}\right)$

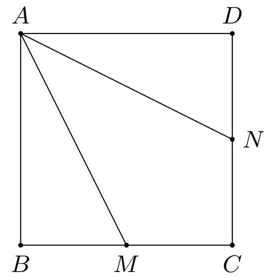
Suy ra $2\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}\right)$

$= \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}$
$= \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ (Vì $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}$ và $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}=0$)
Vậy $MP\perp BC \Rightarrow \widehat{(MP,BC)}=90^\circ$.
Chọn đáp án A □

Câu 58. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CD. Tính $\cos\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{NA}\right)$.

A. $\dfrac{4}{5}$. B. $-\dfrac{4}{5}$. C. $\dfrac{3}{5}$. D. $-\dfrac{3}{5}$.

Lời giải.



Từ giả thiết ta có $AM=AN=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM};\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{DA}$
$\Rightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{NA}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}\right)\left(\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{DA}\right)$
$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{DA}$
$=a\cdot\dfrac{a}{2}\cdot\cos 180^\circ+0+0+a\cdot\dfrac{a}{2}\cdot\cos 180^\circ=-a^2$

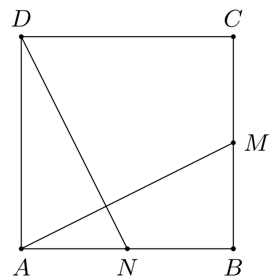
Suy ra $\cos\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{NA}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{NA}}{\left|\overrightarrow{AM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{NA}\right|}=\dfrac{-a^2}{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\cdot\dfrac{a\sqrt{5}}{2}}=-\dfrac{4}{5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 59. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}$.

A. 45°. B. 30°. C. 135°. D. 90°.

Lời giải.



Gọi N là trung điểm AB.
Có $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{DN}$
Chứng minh được $AM\perp DN$
Suy ra góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}$ bằng $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{DN}\right)=90^\circ$.

Chọn đáp án D □

Câu 60. Để $\vec{u}\cdot\vec{v}=-|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$ thì $\vec{u}$ và $\vec{v}$ phải là hai véc-tơ

A. cùng phương. B. cùng hướng. C. ngược hướng. D. vuông góc.

Lời giải.

Để thỏa mãn đề bài thì $\cos(\vec{u},\vec{v})=-1\Leftrightarrow(\vec{u},\vec{v})=180$.
Vậy $\vec{u}$ và $\vec{v}$ phải là hai véc-tơ ngược hướng.
Chọn đáp án C □

Câu 61. Cho M là trung điểm AB, đẳng thức nào **sai** ?

A. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB}=-MA\cdot AB$.
B. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MA\cdot MB$.
C. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=AM\cdot AB$.
D. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-MA\cdot MB$.

Lời giải.

- Do M là trung điểm của AB nên $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=180^\circ$.

Ta có $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MA\cdot MB\cdot\cos\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=MA\cdot MB\cdot\cos 180^\circ=-MA\cdot MB$.

- Do M là trung điểm của AB nên $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{AB}\right)=180^\circ$.
  Ta có $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB}=MA\cdot AB\cdot\cos\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{AB}\right)=MA\cdot AB\cdot\cos 180^\circ=-MA\cdot AB$.

- Do M là trung điểm của AB nên $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)=0^\circ$.
  Ta có $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=MA\cdot AB\cdot\cos\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)=MA\cdot AB\cdot\cos 0^\circ=AM\cdot AB$.

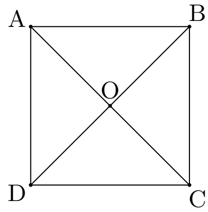
Chọn đáp án (B) □

Câu 62. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$.
(B) $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{OD}$.
(C) $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{OC}$.
(D) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

Giả sử hình vuông có cạnh bằng 1.



- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=AB\cdot CD\cdot\cos 180^\circ=-1$, $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=AD\cdot BC\cdot\cos 0^\circ=1$.
- $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OC}=AO\cdot OC\cdot\cos 0^\circ=\dfrac{1}{2}$, $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{OD}=BO\cdot OD\cdot\cos 0^\circ=\dfrac{1}{2}$.
- $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{OC}=0$.
- $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

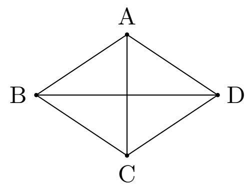
Chọn đáp án (A) □

Câu 63. Cho hình thoi $ABCD$, khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}$.
(B) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}$.
(C) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.
(D) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}$.

Lời giải.

Giả sử hình thoi có cạnh bằng 1.



- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\cos\widehat{BAD}$, $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=\cos\widehat{ADC}$ nhưng $\cos\widehat{BAD}\neq\cos\widehat{ADC}$.
  Nên $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\neq\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}$.
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AC\cdot\cos\widehat{BAC}$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}=-AC\cdot\cos\widehat{ACD}$, mà $\widehat{BAC}=\widehat{ACD}$.
  Nên $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\neq\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}$.
- $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ nhưng $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\neq 0$, nên $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}\neq\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.
- $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\cos\widehat{ABC}$, $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=\cos\widehat{ADC}$. Mà $\widehat{ABC}=\widehat{ADC}$. Nên $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 64. Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm E tùy ý, khi đó $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{EA}$ bằng

(A) AE^2.
(B) $-AE^2$.
(C) $AE\cdot CE$.
(D) $-AE\cdot DE$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE}$.
Suy ra $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EA}=-AE^2$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 65. Cho hai điểm A và B, O là trung điểm của AB và M là điểm tùy ý, biết rằng $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = OM^2 + kOA^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A $k=1$. **B** $k=-1$. **C** $k=2$. **D** $k=-2$.

Lời giải.

Ta có O là trung điểm AB nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{0}$. Do đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} &= \left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)\\ &= \overrightarrow{MO}^2+\overrightarrow{MO}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\\ &= OM^2-OA^2.\end{aligned}$$

Vậy $k=-1$.

Chọn đáp án B □

Câu 66. Cho I là trung điểm AB, M là điểm tùy ý. Biết rằng $\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{AB} = k\left(MB^2-MA^2\right)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $k=2$. **B** $k=\dfrac{1}{2}$. **C** $k=-1$. **D** $k=-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có I là trung điểm AB nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$. Do đó

$$\begin{aligned}MB^2-MA^2 &= \overrightarrow{MB}^2-\overrightarrow{MA}^2\\ &= \left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}\right)\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\left(2\overrightarrow{MI}\right)\\ &= 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\left(MB^2-MA^2\right)$. Vậy $k=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 67. Cho I là trung điểm AB, M là điểm tùy ý. Biết rằng $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2+kAB^2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $k=2$. **B** $k=\dfrac{1}{2}$. **C** $k=-1$. **D** $k=-\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có I là trung điểm AB nên $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=0$. Do đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} &= \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)\\ &= \overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}\end{aligned}$$

$$MI^2-\frac{1}{4}AB^2.$$

Vậy $k-\dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 68. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}=\vec{a}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$. **B** $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2$.

C $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)$. **D** $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}$.

Lời giải.

- Xét hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 1 thì
  - $\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\right)\overrightarrow{BC}=0\cdot\overrightarrow{BC}=\vec{0}$.
  - $\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot 1=\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$.

  Do đó $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}=\vec{a}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$ là khẳng định sai.
- Xét hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 1 thì
  - $\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\right)^2=0^2=0$.
  - $\overrightarrow{AB}^2\cdot\overrightarrow{AD}^2=1\cdot 1=1$.

  Do đó $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2$ là khẳng định sai.
- Ta có $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ nên $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ là khẳng định sai.
- Ta có $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+(-\vec{c})\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot(-\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}$.

Chọn đáp án D □

Câu 69. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{4}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$.

B. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$.

C. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-|\vec{a}|^2-\left|\vec{b}\right|^2\right)$.

D. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2+\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$.

Lời giải.

Ta có

- $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$.
- $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$.

Suy ra

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=4\vec{a}\cdot\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{4}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right).$$

Chọn đáp án B □

Câu 70. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a và $\widehat{A}=60^\circ$, điểm M tùy ý. Biết rằng $MA^2-MB^2+MC^2-MD^2=ka^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $k=1$. B. $k=2$. C. $k=4$. D. $k=6$.

Lời giải.

Ta có $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{A}=60^\circ$ nên $\triangle ABC$ đều cạnh a do đó $OB=OD=\frac{a}{2}$, $OA=OC=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do đó

$$\begin{aligned}
&MA^2-MB^2+MC^2-MD^2\\
=\;&\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)^2-\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)^2-\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD}\right)^2\\
=\;&2\overrightarrow{MO}\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}\right)+OA^2-OB^2+OC^2-OD^2\\
=\;&2\overrightarrow{MO}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}\right)+\frac{3a^2}{4}-\frac{a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}-\frac{a^2}{4}\\
=\;&a^2.
\end{aligned}$$

Vậy $k=1$.

Chọn đáp án A □

Câu 71. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD, M là điểm tuỳ ý. Biết rằng $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} = MO^2 + kBD^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A $k = -\dfrac{1}{2}$. B $k = 2$. C $k = -\dfrac{1}{4}$. D $k = 4$.

Lời giải.

Do O là trung điểm của AC nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MO} \Rightarrow \left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right)^2 = \left(2\overrightarrow{MO}\right)^2$

$\Rightarrow MA^2 + MC^2 + 2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} = 4MO^2.\qquad (1)$

Lại có $\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \left(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}\right)^2 = \left(\overrightarrow{AC}\right)^2$

$\Rightarrow MA^2 + MC^2 - 2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} = AC^2.\qquad (2)$

Từ (1) và (2), trừ vế theo vế ta được:

$4\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} = 4MO^2 - AC^2 \Rightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} = MO^2 - \dfrac{1}{4}BD^2$ (do $AC^2 = BD^2$).

Vậy $k = -\dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án C □

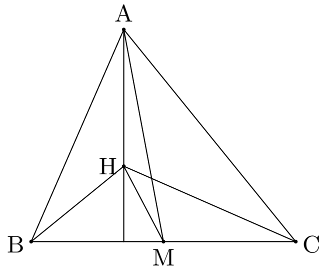
Câu 72. Cho tam giác ABC, gọi H là trực tâm của tam giác và M là trung điểm của cạnh BC. Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

A $\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{MA} = \dfrac{1}{2}BC^2$. B $\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{MA} = -\dfrac{1}{4}BC^2$.

C $\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{MA} = \dfrac{1}{4}BC^2$. D $\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{MA} = \dfrac{1}{5}BC^2$.

Lời giải.

M là trung điểm của BC, ta có $\begin{cases}\overrightarrow{MH} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CH})\\ \overrightarrow{MA} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA})\end{cases}$



$\Rightarrow \overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{MA} = \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CH})$

Do H là trực tâm nên lại có

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB},$$

suy ra

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{MA} &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA})\\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CH})\\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BC})\\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CA})\\ &= \frac{1}{4}BC^2.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 73. Cho điểm M thay đổi trên đường tròn tâm O bán kính R ngoại tiếp tam giác đều ABC cho trước. Biết rằng $MA^2 + 2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} = kR^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A $k = 2$. B $k = 3$. C $k = 4$. D $k = 6$.

Lời giải.

Ta có $\triangle ABC$ đều nên $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 120^\circ$, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} = \vec{0}$. Do đó

$$MA^2 + 2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}$$

$$\begin{aligned}&= \left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)\\&= 3MO^2+OA^2+2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{MO}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\\&= 4R^2+2R^2\cdot\cos 120^\circ=3R^2.\end{aligned}$$

Vậy $k=3$.
Chọn đáp án B □

Câu 74. Cặp véc-tơ nào sau đây vuông góc với nhau?

A $\vec{a}_1=(-4;-6)$ và $\vec{a}_2=(3;2)$.
B $\vec{b}_1=(3;-4)$ và $\vec{b}_2=(-3;4)$.
C $\vec{c}_1=(-4;-6)$ và $\vec{c}_2=(-3;2)$.
D $\vec{d}_1=(5;-3)$ và $\vec{d}_2=(3;-5)$.

Lời giải.
Ta có $\vec{c}_1\cdot\vec{c}_2=0$ nên $\vec{c}_1\perp\vec{c}_2$.
Chọn đáp án C □

Câu 75. Cho tam giác ABC có $A(-4;1), B(2;4), C(2;-2)$. Tìm toạ độ trực tâm H của tam giác ABC.

A $H\left(\frac{1}{2};1\right)$.
B $H(2;4)$.
C $H\left(\frac{1}{3};3\right)$.
D $H(1;3)$.

Lời giải.
Giả sử toạ độ trực tâm H của tam giác ABC là $H(x;y)$. Ta có

$$\begin{cases}AH\perp BC\\BH\perp AC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0(x+4)-6(y-1)=0\\6(x-2)-3(y-4)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\y=1.\end{cases}$$

Vậy toạ độ trực tâm của tam giác ABC là $H\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 76. Trong mặt phẳng toạ độ $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, cho $\vec{a}=(-1;2)$, $\vec{b}=(3;-5)$. Tìm số thực m sao cho $m\vec{a}+\vec{b}$ vuông góc với $\vec{i}+\vec{j}$.

A $m=-2$.
B $m=2$.
C $m=3$.
D $m=\frac{5}{2}$.

Lời giải.
Ta có $m\vec{a}+\vec{b}=(-m+3;2m-5)$ và $\vec{i}+\vec{j}=(1;1)$.
$m\vec{a}+\vec{b}$ vuông góc với $\vec{i}+\vec{j}\Leftrightarrow\left(m\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{i}+\vec{j}\right)=0\Leftrightarrow m-2=0\Leftrightarrow m=2$.
Chọn đáp án B □

Câu 77. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-3;-2)$, $B(5;2)$ và trực tâm $H(5;0)$. Tìm tọa độ đỉnh C.

A $C(6;-2)$.
B $C(4;-2)$.
C $C(5;-2)$.
D $C(4;-1)$.

Lời giải.
Gọi tọa độ đỉnh $C(x;y)$. Ta có $\overrightarrow{AC}=(x+3;y+2)$, $\overrightarrow{BC}=(x-5;y-2)$, $\overrightarrow{AH}=(8;2)$, $\overrightarrow{BH}=(0;-2)$.
Vì H là trực tâm tam giác ABC nên ta có

$$\begin{cases}AH\perp BC\\BH\perp AC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8(x-5)+2(y-2)=0\\-2(y+2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\y=-2\end{cases}$$

Chọn đáp án A □

Câu 78. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-3;0)$, $B(3;0)$ và $C(2;6)$. Gọi $H(a;b)$ là trực tâm của tam giác ABC. Tính $a+6b$.

A $a+6b=5$. **B** $a+6b=6$. **C** $a+6b=7$. **D** $a+6b=8$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AH}=(a+3;b)$, $\overrightarrow{BC}=(-1;6)$, $\overrightarrow{BH}=(a-3;b)$ và $\overrightarrow{AC}=(5;6)$.
H là trực tâm tam giác ABC khi và chỉ khi

$$\begin{cases}AH\perp BC\\ BH\perp AC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-a-3+6b=0\\ 5a-15+6b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=\dfrac{5}{6}.\end{cases}$$

Suy ra $a+6b=7$.
Chọn đáp án C □

Câu 79. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(1;3)$, $B(-6;2)$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB (với O là gốc tọa độ) là

A 6. **B** 5. **C** $\sqrt{50}$. **D** $\dfrac{\sqrt{50}}{2}$.

Lời giải.

Dễ thấy $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ nên tam giác OAB vuông tại O. Do đó bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là $\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{50}}{2}$.
Chọn đáp án D □

Câu 80. Trong mặt phẳng Oxy cho $\vec{a}=(4;-8)$. Véc-tơ nào sau đây không vuông góc với $\vec{a}$

A $\vec{b}=(-1;2)$. **B** $\vec{b}=(-2;-1)$. **C** $\vec{b}=(2;1)$. **D** $\vec{b}=(4;2)$.

Lời giải.

Hai véc-tơ vuông góc nhau khi $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, khi đó véc-tơ $\vec{a}=(4;-8)$ sẽ không vuông góc với véc-tơ $\vec{b}=(-1;2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 81. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hai điểm $M(1;2)$, $N(3;4)$. Tìm tọa độ điểm P trên trục Ox sao cho tam giác MNP vuông tại M?

A $P(0;3)$. **B** $P(-1;0)$. **C** $P(3;0)$. **D** $P(0;-1)$.

Lời giải.

Điểm P trên trục Ox có tọa độ là $P\left(x_P;0\right)$.
Có $\overrightarrow{MP}=(x_P-1;-2)$ và $\overrightarrow{MN}=(2;2)$.
Để tam giác MNP vuông tại M thì $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN}=0\Leftrightarrow 2\left(x_P-1\right)-4=0\Leftrightarrow x_P=3$.
Vậy điểm cần tìm là $P(3;0)$.
Chọn đáp án C □

Câu 82. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có $A(-1;1)$, $B(1;3)$ và $C(1;-1)$. Hãy chọn phát biểu đúng.

A Tam giác ABC vuông tại C. **B** Tam giác ABC vuông cân tại A.
C Tam giác ABC có ba góc đều nhọn. **D** Tam giác ABC vuông tại B.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2;2)$ và $\overrightarrow{AC} = (2;-2)$ suy ra

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 - 4 = 0 \\ AB = AC = 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Vậy tam giác ABC vuông cân tại A.
Chọn đáp án B □

Câu 83. Cho hai điểm $A(-6;3)$, $B(4;1)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc tia Oy sao cho tam giác ABC vuông tại C.

A. $(0;7)$. B. $(7;0)$. C. $(0;-3)$. D. $(0;-3)$ và $(0;7)$.

Lời giải.
Gọi $C(0;c) \in Oy$. Vì C thuộc tia Oy nên $c > 0$.
Ta có $\overrightarrow{CA} = (-6;3-c)$, $\overrightarrow{CB} = (4;1-c)$.
Tam giác ABC vuông tại C khi và chỉ khi $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$
$\Leftrightarrow (-6)\cdot 4 + (3-c)(1-c) = 0 \Leftrightarrow c^2 - 4c - 21 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} c = 7 & \text{(nhận)} \\ c = -3 & \text{(loại)}. \end{array}\right.$
Vậy $C(0;7)$.
Chọn đáp án A □

Câu 84. Tìm m để hai véc-tơ $\vec{a} = (1;-3)$, $\vec{b} = (m^2;4)$ vuông góc với nhau.

A. $m = 12$. B. $m = 2\sqrt{3}$. C. $m = -2\sqrt{3}$. D. $m = \pm 2\sqrt{3}$.

Lời giải.
Ta có $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot m^2 + (-3)\cdot 4 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{3}$.
Chọn đáp án D □

Câu 85. Cho tam giác ABC, với $A(0;3)$, $B(x;1)$, $C(4;1)$. Tìm x để tam giác ABC vuông tại A.

A. $x = -2$. B. $x = 1$. C. $x = 0$. D. $x = -1$.

Lời giải.
Ta có $\overrightarrow{AB} = (x;-2)$, $\overrightarrow{AC} = (4;-2)$. Tam giác ABC vuông tại A nên

$$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow 4x + (-2)\cdot(-2) = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Chọn đáp án D □

Câu 86. Trong mặt phẳng toạ độ (Oxy), cho $A(-4;1)$, $B(2;4)$, $C(2;-2)$. Tìm mệnh đề **sai**.

A. A, B, C không thẳng hàng.
B. Tam giác ABC vuông cân tại A.
C. $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{3}{5}$.
D. Độ dài $AB = AC = 3\sqrt{5}$.

Lời giải.
Ta có $\overrightarrow{AB} = (6;3), \overrightarrow{AC} = (6;-3)$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 36 - 9 = 27 \neq 0$.
Suy ra tam giác ABC không vuông tại A.
Chọn đáp án B □

Câu 87. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(2;3), B(-2;1)$. Điểm C thuộc trục Ox sao cho $\triangle ABC$ vuông tại C có thể nhận tọa độ là

A. $C(3;0)$. B. $C(-3;0)$. C. $C(-1;0)$. D. $C(2;0)$.

Lời giải.

Vì $C \in Ox$ nên $C(x;0) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{CA} = (2-x;3) \\ \overrightarrow{CB} = (-2-x;1). \end{cases}$

$\triangle ABC$ vuông tại C nên $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow (2-x)(-2-x)+3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Vậy $C(-1;0))$ hoặc $C(1;0)$.

Chọn đáp án C □

Câu 88. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(3;4)$, $C(0;-2)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.

A $H(-1;3)$. B $H(-9;7)$. C $H(9;-7)$. D $H(3;-1)$.

Lời giải.

Gọi $H(x;y)$ là trực tâm của tam giác ABC. Khi đó ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 6y = 15 \\ x + 4y = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9 \\ y = 7. \end{cases}$$

Vậy $H(-9;7)$.

Chọn đáp án B □

Câu 89. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC vuông tại A với $A(-1;0)$ và $B(-3;0)$. Tọa độ điểm C là:

A $(-3;-1)$. B $(-2;-2)$. C $(-2;0)$. D $(-1;-3)$.

Lời giải.

Ta có $A, B \in Ox$ do đó $\triangle ABC$ vuông tại A khi và chỉ khi $x_C = x_A = -1$.

Chọn đáp án D □

Câu 90. Cho hình vuông $ABCD$, biết đỉnh $A(1;-1)$, $B(3;0)$ và đỉnh C có tọa độ dương. Tìm tọa độ C.

A $C(4;-2)$. B $C(4;2)$. C $C(2;4)$. D $C(2;2)$.

Lời giải.

Gọi $C(x;y)$ với $x > 0$, $y > 0$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (2;1)$, $\overrightarrow{BC} = (x-3;y)$.

$ABCD$ là hình vuông nên $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ AB = BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-3) + y = 0 \\ AB^2 = BC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x \\ (x-3)^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x \\ (x-3)^2 + (6-2x)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x \\ 5x^2 - 30x + 40 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x \\ \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \quad \text{(loại)} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \quad \text{(nhận)}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy $C(2;2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 91. Cho $A(1;-2)$, $B(-1;-1)$. Tìm M trục Ox sao cho tam giác ABM vuông tại A.

A $M(-3;0)$. B $M(-2;0)$. C $M(2;0)$. D $M(3;0)$.

Lời giải.

M thuộc trục Ox cho nên $M(m;0)$, $\overrightarrow{AB} = (-2;1)$ và $\overrightarrow{AM} = (m-1;2)$. Tam giác ABM vuông tại A suy ra

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow -2m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = 2.$$

Chọn đáp án (C)

Câu 92. Cho $\vec{a}$, $\vec{b}$ có $\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)$ vuông góc với véc-tơ $\left(5\vec{a}-4\vec{b}\right)$ và $|\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|$. Khi đó

(A) $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
(B) $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=90^\circ$.
(C) $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
(D) $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Theo giả thiết, ta có

$$\begin{cases}\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\left(5\vec{a}-4\vec{b}\right)=0\\ |\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5|\vec{a}|^2-8\left|\vec{b}\right|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}=0\\ |\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}|\vec{a}|^2\\ |\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|.\end{cases}$$

Từ đó

$$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{\frac{1}{2}|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|}=\frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án (D)