

CHƯƠNG 3

CĂN THỨC

BÀI 1

CĂN BẬC HAI VÀ CĂN BẬC BA CỦA SỐ THỰC

1. Căn bậc hai của số thực không âm

Định nghĩa: Căn bậc hai của số thực a không âm là số x sao cho $x^2 = a$.

Chú ý:

- Mỗi số thực dương $a (a > 0)$ có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau. Số dương kí hiệu là: \sqrt{a} , số âm kí hiệu là: $-\sqrt{a}$. Ta gọi \sqrt{a} là căn bậc hai số học của a .

- Số 0 có đúng 1 căn bậc hai là chính nó, ta viết $\sqrt{0} = 0$
- Số âm không có căn bậc hai.

Nhận xét: Với $a, b \geq 0$, ta có:

- Nếu $a < b$ thì $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.
- Nếu $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ thì $a < b$.

2. Căn bậc ba

Căn bậc ba của số thực a là số thực x sao cho $x^3 = a$.

Căn bậc ba của số thực a được kí hiệu là: $\sqrt[3]{a}$.

Nhận xét:

- $(\sqrt[3]{a})^3 = a$.
- Nếu $a < b$ thì $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$.
- Nếu $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$ thì $a < b$.

CHỦ ĐỀ 1
CĂN BẬC HAI

DẠNG 1
TÌM CĂN BẬC HAI

- Nếu $a > 0$ thì các căn bậc hai của a là $\pm\sqrt{a}$.
- Với số $a \geq 0$, ta có $\sqrt{a^2} = a$; $(\sqrt{a})^2 = (-\sqrt{a})^2 = a$

Bài 1. Tìm căn bậc hai của :

a) 169

b) 2,25

c) 0,64

d) $\frac{36}{121}$

Bài 2. Tính

a) $\sqrt{49}$

b) $\sqrt{\frac{121}{169}}$

c) $(-\sqrt{7})^2$

d) $\sqrt{\left(\frac{-3}{5}\right)^2}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Tìm căn bậc hai của :

a) 64

b) 400

c) 0,49

d) $\frac{25}{169}$

Bài 4. Tính

a) $\sqrt{9}$

b) $\sqrt{\frac{4}{49}}$

c) $-\sqrt{(-8)^2}$

d) $\left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2$

DẠNG 2
SO SÁNH CĂN BẬC HAI**Phương pháp**

Với: $a \geq 0, b \geq 0$ nếu $a < b$ thì $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Bài 1. So sánh các cặp số sau:

a) $\sqrt{120}$ và $\sqrt{97}$

b) $\sqrt{81}$ và 19

Bài 2. So sánh các cặp số sau:

a) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ và $\sqrt{\frac{3}{2}}$

b. 3 và $\sqrt{8}$

CHỦ ĐỀ 2

CĂN BẬC BA

DẠNG 1

TÌM CĂN BẬC BA

Phương pháp

Căn bậc ba của số thực a là số thực x sao cho $x^3 = a$.

Căn bậc ba của số thực a được kí hiệu là: $\sqrt[3]{a}$.

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = \sqrt[3]{a^3} = a.$$

Bài 1. Tìm căn bậc ba của :

- a) 216 b) $-\frac{1}{1000}$ c) $-0,0729$ d) $\frac{27}{512}$

Bài 2. Tính

- a) $\sqrt{49}$ b) $\sqrt{\frac{121}{169}}$ c) $(-\sqrt{7})^2$ d) $\sqrt{\left(\frac{-3}{5}\right)^2}$

Bài 3. Tính

- a) $\sqrt[3]{0,008}$ b) $\sqrt[3]{-\frac{1}{216}}$ c) $-\sqrt[3]{2024^3}$ d) $\left(-\sqrt[3]{\frac{4}{5}}\right)^3$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Tìm căn bậc ba của :

- a) -64 b) $\frac{125}{8}$ c) $0,512$ d) $-\frac{1000}{216}$

Bài 5. Tính

- a) $\sqrt[3]{-0,027}$ b) $\sqrt[3]{\frac{64}{343}}$ c) $-\sqrt[3]{\frac{1}{512}}$ d) $\left(-\sqrt[3]{\frac{2024}{2025}}\right)^3$

Bài 6. Tính

- a) $\sqrt[3]{27}$ a) $\sqrt[3]{729}$ b) $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$ b) $\sqrt[3]{\frac{1}{216}}$

DẠNG 2
SO SÁNH CĂN BẬC BA**Phương pháp**

- Nếu $a < b$ thì $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$.
- Nếu $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$ thì $a < b$.

Bài 1. So sánh các cặp số sau:

a) $\sqrt[3]{-2024}$ và $\sqrt[3]{-2025}$

b. 8 và $\sqrt[3]{511}$

Bài 2. So sánh các cặp số sau:

a) $\sqrt[3]{\frac{1}{1000}}$ và $\sqrt[3]{\frac{1}{1001}}$

b. -7 và $\sqrt[3]{-342}$

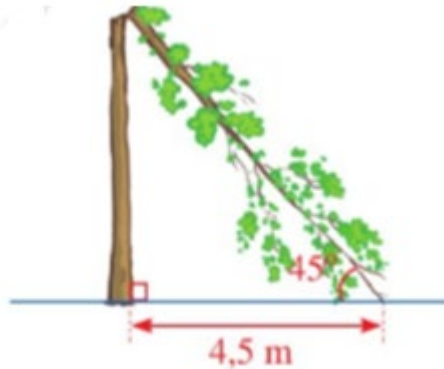
CHỦ ĐỀ 3

ỨNG DỤNG

Bài 1. Bạn Loan cần làm một chiếc hộp giấy có dạng hình lập phương với thể tích là 64 dm^3 . Hỏi cạnh của chiếc hộp giấy đó là bao nhiêu decimét? Biết rằng độ dày của tờ giấy để làm hộp là không đáng kể.

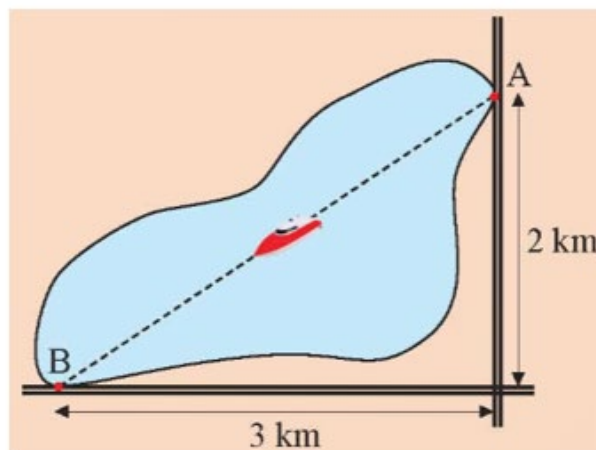
Bài 2. Đại Kim tự tháp Giza là Kim tự tháp Ai Cập lớn nhất và là lăng mộ của Vương triều thứ Tư của pharaoh Khufu. Nền kim tự tháp có dạng hình vuông với diện tích khoảng $53\,052 \text{ m}^2$. Hỏi độ dài cạnh của nền kim tự tháp đó là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Bài 3. Giông bão thổi mạnh, một cây bị gãy gập xuống làm ngọn cây chạm đất và tạo với phương nằm ngang một góc 45° (minh họa ở hình vẽ). Người ta đo được khoảng cách từ chỗ ngọn cây chạm đất đến gốc cây là $4,5 \text{ m}$. Giả sử cây mọc vuông góc với mặt đất, hãy tính chiều cao của cây đó theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

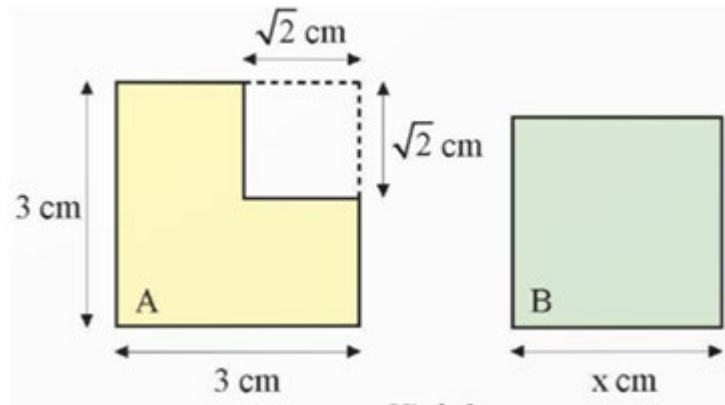


Bài 4. Trong Vật lí, quãng đường S (tính bằng mét) của một vật rơi tự do được cho bởi công thức $S = 4,9t^2$, trong đó t là thời gian rơi (tính bằng giây). Hỏi sau bao nhiêu giây thì vật sẽ chạm đất nếu được thả rơi tự do từ độ cao $122,5$ mét?

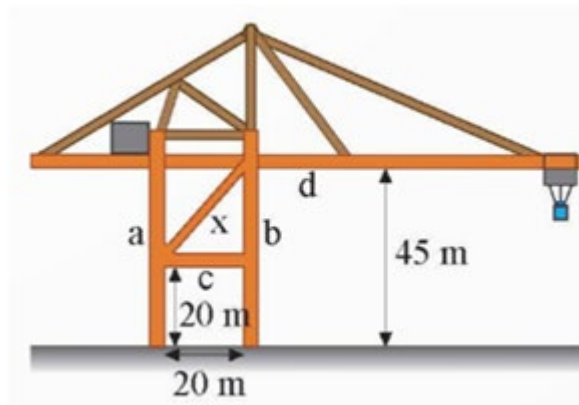
Bài 5. Hai bến thuyền A và B nằm sát con đường vuông góc với nhau cách chỗ giao nhau lần lượt là 2 km và 3 km (hình vẽ bên dưới). Một ca nô chạy thẳng từ A đến B. Quãng đường ca nô đi được dài bao nhiêu kilômét?



Bài 6. Biết rằng hình A và hình vuông B trong hình vẽ dưới có diện tích bằng nhau. Tính độ dài cạnh x của hình vuông B.



Bài 7. Trên cần trục ở hình vẽ, hai trụ a và b đứng cách nhau 20 m, hai xà ngang c và d lần lượt có độ cao 20 m và 45 m so với mặt đất. Xà chéo x có độ dài bao nhiêu mét (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

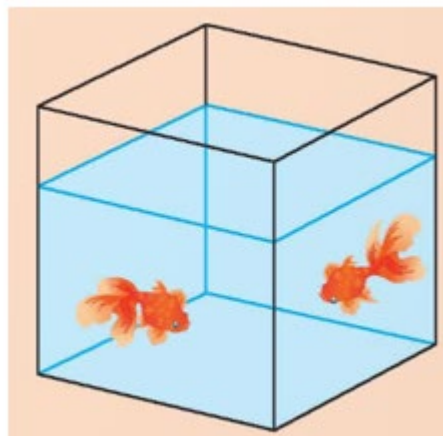


Bài 8. Thể tích của một khối bê tông có dạng hình lập phương là khoảng $220\,348\text{ cm}^3$. Hỏi độ dài cạnh của khối bê tông đó là bao nhiêu centimét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

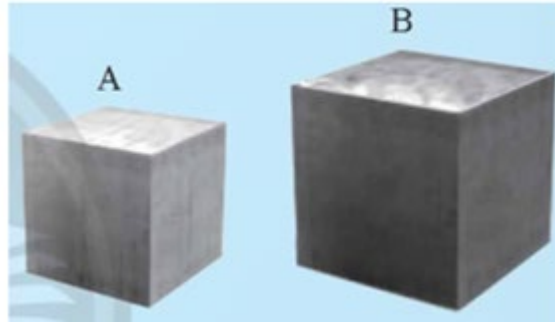
Bài 9. Có thể xếp 125 khối lập phương đơn vị (có cạnh bằng 1 cm) thành một khối lập phương lớn được không?

Bài 10. Một khối gỗ hình lập phương có thể tích $1\,000\text{ cm}^3$. Chia khối gỗ này thành 8 khối gỗ hình lập phương nhỏ có thể tích bằng nhau. Tính độ dài của mỗi khối gỗ hình lập phương nhỏ.

Bài 11. Một bể cá hình lập phương có sức chứa $1\,000\text{ dm}^3$. Muốn tăng sức chứa của bể lên 10 lần (giữ nguyên hình dạng lập phương) thì phải tăng chiều dài của mỗi cạnh lên bao nhiêu lần?



Bài 12. Có hai khối bê tông hình lập phương A và B có thể tích lần lượt là 8 dm^3 và 15 dm^3 (Hình 1).



a) Tính độ dài cạnh của khối bê tông A.

b) Gọi x (dm) là độ dài cạnh của khối bê tông B. Thay $\boxed{?}$ bằng số thích hợp để có đẳng thức: $x^3 = \boxed{?}$

CHƯƠNG 3

CĂN THỨC

BÀI 1

CĂN BẬC HAI VÀ CĂN BẬC BA CỦA SỐ THỰC

1. Căn bậc hai của số thực không âm

Định nghĩa: Căn bậc hai của số thực a không âm là số x sao cho $x^2 = a$.

Chú ý:

- Mỗi số thực dương $a (a > 0)$ có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau. Số dương kí hiệu là: \sqrt{a} , số âm kí hiệu là: $-\sqrt{a}$. Ta gọi \sqrt{a} là căn bậc hai số học của a .

- Số 0 có đúng 1 căn bậc hai là chính nó, ta viết $\sqrt{0} = 0$
- Số âm không có căn bậc hai.

Nhận xét: Với $a, b \geq 0$, ta có:

- Nếu $a < b$ thì $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.
- Nếu $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ thì $a < b$.

2. Căn bậc ba

Căn bậc ba của số thực a là số thực x sao cho $x^3 = a$.

Căn bậc ba của số thực a được kí hiệu là: $\sqrt[3]{a}$.

Nhận xét:

- $(\sqrt[3]{a})^3 = a$.
- Nếu $a < b$ thì $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$.
- Nếu $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$ thì $a < b$.

CHỦ ĐỀ 1
CĂN BẬC HAI

DẠNG 1
TÌM CĂN BẬC HAI

- Nếu $a > 0$ thì các căn bậc hai của a là $\pm\sqrt{a}$.
- Với số $a \geq 0$, ta có $\sqrt{a^2} = a$; $(\sqrt{a})^2 = (-\sqrt{a})^2 = a$

Bài 1. Tìm căn bậc hai của :

a) 169

b) 2,25

c) 0,64

d) $\frac{36}{121}$

Lời giải

a) 169

Ta có $13^2 = 169$ nên có hai căn bậc hai là 13 và -13 .

b) 2,25

Ta có $1,5^2 = 2,25$ nên có hai căn bậc hai là 1,5 và $-1,5$.

c) 0,64

Ta có $0,8^2 = 0,64$ nên có hai căn bậc hai là 0,8 và $-0,8$.

d) $\frac{36}{121}$

Ta có $\left(\frac{6}{11}\right)^2 = \frac{36}{121}$ nên có hai căn bậc hai là $\frac{6}{11}$ và $-\frac{6}{11}$.

Bài 2. Tính

a) $\sqrt{49}$

b) $\sqrt{\frac{121}{169}}$

c) $(-\sqrt{7})^2$

d) $\sqrt{\left(\frac{-3}{5}\right)^2}$

Lời giải

a) $\sqrt{49} = \sqrt{7^2} = 7$

b) $\sqrt{\frac{121}{169}} = \sqrt{\left(\frac{11}{13}\right)^2} = \frac{11}{13}$

c) $(-\sqrt{7})^2 = 7$

d) $\sqrt{\left(\frac{-3}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN**Bài 3.** Tìm căn bậc hai của :

a) 64

b) 400

c) 0,49

d) $\frac{25}{169}$

Lời giải

a) 64

Ta có $8^2 = 64$ nên có hai căn bậc hai là 8 và -8 .

b) 400

Ta có $20^2 = 400$ nên có hai căn bậc hai là 20 và -20 .

c) 0,49

Ta có $0,7^2 = 0,49$ nên có hai căn bậc hai là 0,7 và $-0,7$.

d) $\frac{25}{169}$

Ta có $\left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{25}{169}$ nên có hai căn bậc hai là $\frac{5}{13}$ và $-\frac{5}{13}$.**Bài 4.** Tính

a) $\sqrt{9}$

b) $\sqrt{\frac{4}{49}}$

c) $-\sqrt{(-8)^2}$

d) $\left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$

b) Ta có: $\sqrt{\frac{4}{49}} = \sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^2} = \frac{2}{7}$

c) Ta có: $-\sqrt{(-8)^2} = -\sqrt{64} = -\sqrt{8^2} = -8$

d) Ta có: $\left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2 = \frac{3}{4}$

DẠNG 2
SO SÁNH CĂN BẬC HAI**Phương pháp**

Với: $a \geq 0, b \geq 0$ nếu $a < b$ thì $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Bài 1. So sánh các cặp số sau:

a) $\sqrt{120}$ và $\sqrt{97}$

b) $\sqrt{81}$ và 19

Lời giải

a) Ta có: $120 > 97 \Rightarrow \sqrt{120} > \sqrt{97}$

b) Ta có: $\sqrt{81} = 9 < 19$

Bài 2. So sánh các cặp số sau:

a) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ và $\sqrt{\frac{3}{2}}$

b. 3 và $\sqrt{8}$

Lời giải

a) Ta có: $\frac{2}{3} < \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} < \sqrt{\frac{3}{2}}$

b) Ta có: $3^2 = 9; (\sqrt{8})^2 = 8 \Rightarrow 3 > 2\sqrt{2}$

CHỦ ĐỀ 2

CĂN BẬC BA

DẠNG 1

TÌM CĂN BẬC BA

Phương pháp

Căn bậc ba của số thực a là số thực x sao cho $x^3 = a$.

Căn bậc ba của số thực a được kí hiệu là: $\sqrt[3]{a}$.

$$(\sqrt[3]{a})^3 = \sqrt[3]{a^3} = a.$$

Bài 1. Tìm căn bậc ba của :

- a) 216 b) $-\frac{1}{1000}$ c) $-0,0729$ d) $\frac{27}{512}$

Lời giải

a) 216

Ta có $6^3 = 216$ nên số 6 là căn bậc ba của 216.

b) $-\frac{1}{1000}$

Ta có $\left(-\frac{1}{10}\right)^3 = -\frac{1}{1000}$ nên số $-\frac{1}{10}$ là căn bậc ba của $-\frac{1}{1000}$.

c) $-0,0729$

Ta có $(-0,9)^3 = -0,0729$ nên số $-0,9$ là căn bậc ba của $-0,0729$.

d) $\frac{27}{512}$

Ta có $\left(\frac{3}{8}\right)^3 = \frac{27}{512}$ nên số $\frac{3}{8}$ là căn bậc ba của $\frac{27}{512}$.

Bài 2. Tính

- a) $\sqrt{49}$ b) $\sqrt{\frac{121}{169}}$ c) $(-\sqrt{7})^2$ d) $\sqrt{\left(\frac{-3}{5}\right)^2}$

Lời giải

a) $\sqrt{49} = \sqrt{7^2} = 7$

b) $\sqrt{\frac{121}{169}} = \sqrt{\left(\frac{11}{13}\right)^2} = \frac{11}{13}$

c) $(-\sqrt{7})^2 = 7$

d) $\sqrt{\left(\frac{-3}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$

Bài 3. Tính

a) $\sqrt[3]{0,008}$

b) $\sqrt[3]{-\frac{1}{216}}$

c) $-\sqrt[3]{2024^3}$

d) $\left(-\sqrt[3]{\frac{4}{5}}\right)^3$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt[3]{0,008} = \sqrt[3]{(0,8)^3} = 0,8$

b) Ta có: $\sqrt[3]{-\frac{1}{216}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{6}\right)^3} = -\frac{1}{6}$

c) Ta có: $-\sqrt[3]{2024^3} = -2024$

d) Ta có: $\left(-\sqrt[3]{\frac{4}{5}}\right)^3 = -\frac{4}{5}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN**Bài 4.** Tìm căn bậc ba của :

a) -64

b) $\frac{125}{8}$

c) $0,512$

d) $-\frac{1000}{216}$

Lời giải

a) -64

Ta có $(-4)^3 = -64$ nên số -4 là căn bậc ba của -64 .

b) $\frac{125}{8}$

Ta có $\left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{8}$ nên số $\frac{5}{2}$ là căn bậc ba của $\frac{125}{8}$.

c) $0,512$

Ta có $(0,8)^3 = 0,512$ nên số $0,8$ là căn bậc ba của $0,512$.

d) $-\frac{1000}{216}$

Ta có $\left(-\frac{10}{6}\right)^3 = -\frac{1000}{216}$ nên số $-\frac{10}{6}$ là căn bậc ba của $-\frac{1000}{216}$.**Bài 5.** Tính

a) $\sqrt[3]{-0,027}$

b) $\sqrt[3]{\frac{64}{343}}$

c) $-\sqrt[3]{\frac{1}{512}}$

d) $\left(-\sqrt[3]{\frac{2024}{2025}}\right)^3$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt[3]{-0,027} = \sqrt[3]{(-0,3)^3} = -0,3$

b) Ta có: $\sqrt[3]{\frac{64}{343}} = \sqrt[3]{\left(\frac{4}{7}\right)^3} = \frac{4}{7}$

c) Ta có: $-\sqrt[3]{\frac{1}{512}} = -\sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^3} = -\frac{1}{8}$

d) Ta có: $\left(-\sqrt[3]{\frac{2024}{2025}}\right)^3 = \frac{2024}{2025}$

Bài 6. Tính

a) $\sqrt[3]{27}$

a) $\sqrt[3]{729}$

b) $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$

b) $\sqrt[3]{\frac{1}{216}}$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

b) Ta có: $\sqrt[3]{729} = \sqrt[3]{9^3} = 9$

c) Ta có: $\sqrt[3]{\frac{1}{125}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{5}\right)^3} = \frac{1}{5}$

d) Ta có: $\sqrt[3]{\frac{1}{216}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{6}\right)^3} = \frac{1}{6}$

DẠNG 2

SO SÁNH CĂN BẬC BA

Phương pháp

- Nếu $a < b$ thì $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$.
- Nếu $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$ thì $a < b$.

Bài 1. So sánh các cặp số sau:

a) $\sqrt[3]{-2024}$ và $\sqrt[3]{-2025}$

b. 8 và $\sqrt[3]{511}$

Lời giải

a) Ta có: $-2024 > -2025$ nên $\sqrt[3]{-2024} > \sqrt[3]{-2025}$

b) Ta có: $8 = \sqrt[3]{512}$

Do: $512 > 511$ nên $\sqrt[3]{512} > \sqrt[3]{511}$ hay $8 > \sqrt[3]{511}$

Bài 2. So sánh các cặp số sau:

a) $\sqrt[3]{\frac{1}{1000}}$ và $\sqrt[3]{\frac{1}{1001}}$

b. -7 và $\sqrt[3]{-342}$

Lời giải

a) Ta có: $\frac{1}{1000} > \frac{1}{1001}$ nên $\sqrt[3]{\frac{1}{1000}} > \sqrt[3]{\frac{1}{1001}}$

b) Ta có: $-7 = \sqrt[3]{-343}$

Do: $-343 < -342$ nên $\sqrt[3]{-343} < \sqrt[3]{-342}$ hay $-7 < \sqrt[3]{-342}$

CHỦ ĐỀ 3**ỨNG DỤNG**

Bài 1. Bạn Loan cần làm một chiếc hộp giấy có dạng hình lập phương với thể tích là 64 dm^3 . Hỏi cạnh của chiếc hộp giấy đó là bao nhiêu decimét? Biết rằng độ dày của tờ giấy để làm hộp là không đáng kể.

Lời giải

Gọi a (dm) là độ dài cạnh của chiếc hộp giấy dạng hình lập phương đó ($a > 0$).

Khi đó, thể tích của chiếc hộp giấy đó là a^3 (dm^3).

Theo bài, ta có: $a^3 = 64$ hay $a^3 = 4^3$, suy ra $a = 4$.

Vậy cạnh của chiếc hộp giấy đó là 4 decimét.

Bài 2. Đại Kim tự tháp Giza là Kim tự tháp Ai Cập lớn nhất và là lăng mộ của Vương triều thứ Tư của pharaoh Khufu. Nền kim tự tháp có dạng hình vuông với diện tích khoảng $53\,052 \text{ m}^2$. Hỏi độ dài cạnh của nền kim tự tháp đó là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Lời giải

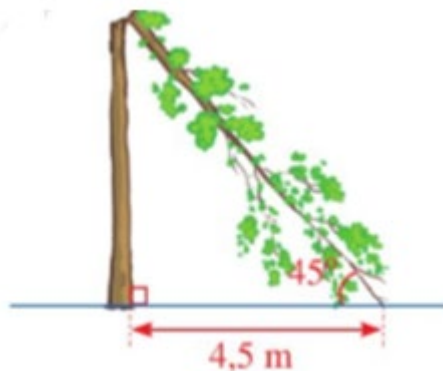
Gọi a (m) là độ dài cạnh của nền kim tự tháp dạng hình vuông ($a > 0$).

Diện tích của nền kim tự tháp đó là a^2 (m^2).

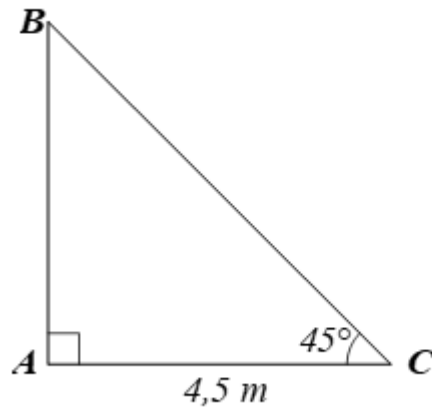
Theo bài, ta có: $a^2 = 53\,052$, suy ra $a = \sqrt{53052} \approx 230,3$ (m).

Vậy độ dài cạnh của nền kim tự tháp đó là khoảng 230,3 mét.

Bài 3. Giông bão thổi mạnh, một cây bị gãy gập xuống làm ngọn cây chạm đất và tạo với phương nằm ngang một góc 45° (minh họa ở hình vẽ). Người ta đo được khoảng cách từ chỗ ngọn cây chạm đất đến gốc cây là 4,5 m. Giả sử cây mọc vuông góc với mặt đất, hãy tính chiều cao của cây đó theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

**Lời giải**

Giả sử hình ảnh của cây được mô tả như hình vẽ dưới đây:



Vì $\triangle ABC$ vuông cân tại A có $\widehat{ACB} = 45^\circ$ nên $\triangle ABC$ vuông cân tại A.

Do đó $AB = AC = 4,5$ m.

Áp dụng định lí Pythagore vào $\triangle ABC$ vuông cân tại A, ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Suy ra $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{(4,5)^2 + (4,5)^2} = \sqrt{40,5} \approx 6,4$ (m).

Vậy chiều cao của cây đó là khoảng $4,5 + 6,4 = 10,9$ mét.

Bài 4. Trong Vật lí, quãng đường S (tính bằng mét) của một vật rơi tự do được cho bởi công thức $S = 4,9t^2$, trong đó t là thời gian rơi (tính bằng giây). Hỏi sau bao nhiêu giây thì vật sẽ chạm đất nếu được thả rơi tự do từ độ cao 122,5 mét?

Lời giải

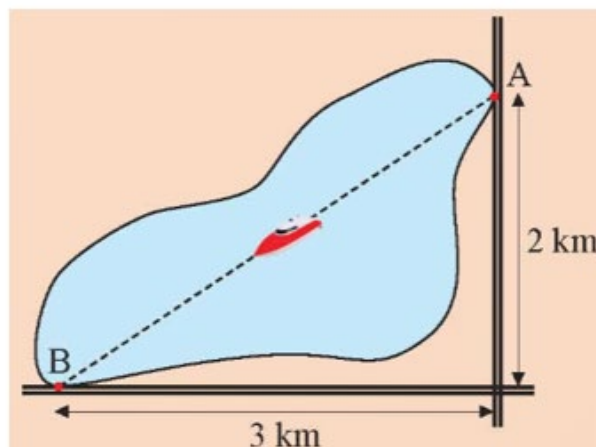
Quãng đường vật rơi tự do từ độ cao 122,5 mét đến khi chạm đất là $S = 122,5$ mét.

Từ công thức $S = 4,9t^2$, nên $t = \sqrt{\frac{S}{4,9}}$ (giây) (do $t > 0$).

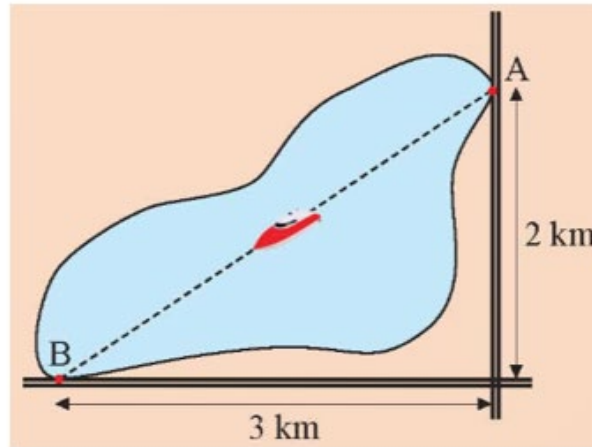
Suy ra $t = \sqrt{\frac{122,5}{4,9}} = \sqrt{25} = 5$ (giây).

Vậy sau 5 giây thì vật sẽ chạm đất nếu được thả rơi tự do từ độ cao 122,5 mét.

Bài 5. Hai bến thuyền A và B nằm sát con đường vuông góc với nhau cách chỗ giao nhau lần lượt là 2 km và 3 km (hình vẽ bên dưới). Một ca nô chạy thẳng từ A đến B. Quãng đường ca nô đi được dài bao nhiêu kilômét?



Lời giải



Gọi C là giao điểm của hai con đường.

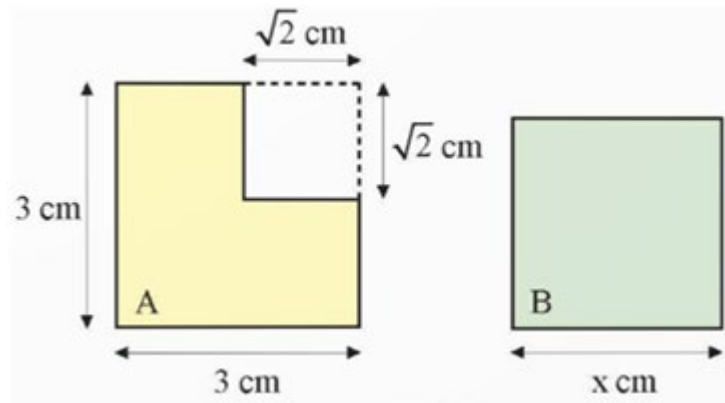
Xét tam giác ABC vuông tại C, áp dụng định lý Pythagore, ta có:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2^2 + 3^2 = 13.$$

Suy ra $AB = \sqrt{13} \approx 3,6$ km.

Vậy quãng đường ca nô đi được dài 3,6 kilômét.

Bài 6. Biết rằng hình A và hình vuông B trong hình vẽ dưới có diện tích bằng nhau. Tính độ dài cạnh x của hình vuông B.



Lời giải

• Xét hình A:

Diện tích cả hình vuông cạnh 3 cm là: $3 \cdot 3 = 9$ (cm²).

Diện tích cả hình vuông cạnh $\sqrt{2}$ (cm) là: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ (cm²).

Do đó, diện tích hình A là: $9 - 2 = 7$ (cm²).

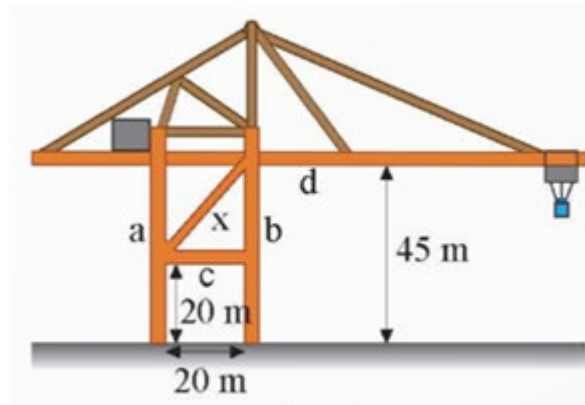
• Xét hình B:

Hình vuông B bằng diện tích hình A là 7 cm².

Do đó $x \cdot x = x^2 = 7$ suy ra $x = \sqrt{7}$ (cm).

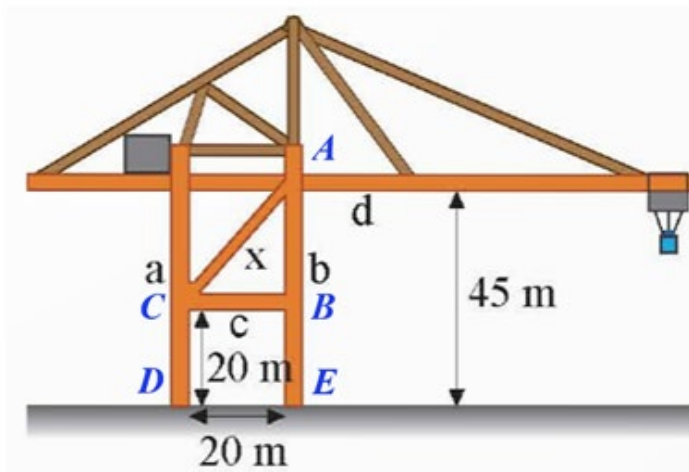
Vậy độ dài cạnh x của hình vuông B là $\sqrt{7}$ cm.

Bài 7. Trên cần trục ở hình vẽ, hai trụ a và b đứng cách nhau 20 m, hai xà ngang c và d lần lượt có độ cao 20 m và 45 m so với mặt đất. Xà chéo x có độ dài bao nhiêu mét (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?



Lời giải

Gọi các điểm A, B, C, D, E như trên hình vẽ.



Vì hai trụ a và b đứng cách nhau 20 m nên $DE = BC = 20$ m.

Vì xà ngang d có độ cao 45 m so với mặt đất nên $AE = 45$ m.

Suy ra $AB = AE - BE = 45 - 20 = 25$ (m).

Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác ABC vuông tại B, ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 25^2 + 20^2 = 1025.$$

$$\text{Suy ra } x = AC = \sqrt{1025} \approx 32 \text{ (m)}.$$

Vậy xà chéo x có độ dài khoảng 32 mét (làm tròn đến hàng đơn vị).

Bài 8. Thể tích của một khối bê tông có dạng hình lập phương là khoảng 220 348 cm^3 . Hỏi độ dài cạnh của khối bê tông đó là bao nhiêu centimét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Lời giải

Gọi a (cm) là độ dài cạnh của khối bê tông dạng hình lập phương ($a > 0$).

Thể tích của khối bê tông đó là : a^3 (cm^3).

Theo bài, ta có: $a^3 = 220\,348$, suy ra $a = \sqrt[3]{220348} \approx 60,4$ (cm).

Vậy độ dài cạnh của khối bê tông đó là khoảng 60,4 centimét.

Bài 9. Có thể xếp 125 khối lập phương đơn vị (có cạnh bằng 1 cm) thành một khối lập phương lớn được không ?

Lời giải

Thể tích của một khối lập phương đơn vị là: $1^3 = 1 \text{ (cm}^3\text{)}$.

Thể tích của 125 khối lập phương đơn vị là: $125 \cdot 1 = 125 \text{ (cm}^3\text{)}$.

Giả sử 125 khối lập phương đơn vị xếp được thành một khối lập phương có cạnh là $a \text{ (cm)}$. Thể tích của khối lập phương cạnh $a \text{ cm}$ là: $a^3 \text{ (cm}^3\text{)}$.

Khi đó, ta có $a^3 = 125$, suy ra $a = \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5 \text{ (cm)}$.

Vậy ta có thể xếp 125 khối lập phương đơn vị (có cạnh bằng 1 cm) thành một khối lập phương lớn có cạnh bằng 5 cm.

Bài 10. Một khối gỗ hình lập phương có thể tích 1 000 cm^3 . Chia khối gỗ này thành 8 khối gỗ hình lập phương nhỏ có thể tích bằng nhau. Tính độ dài của mỗi khối gỗ hình lập phương nhỏ.

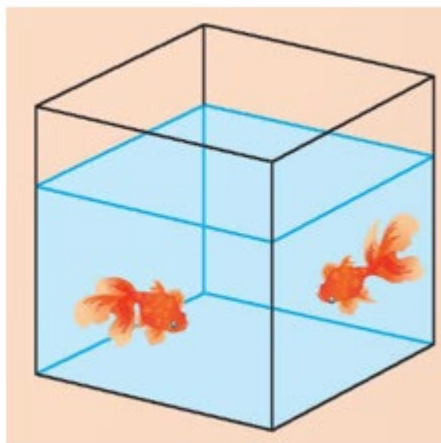
Lời giải

Thể tích 1 khối gỗ hình lập phương nhỏ là: $\frac{V}{8} = \frac{1000}{8} = 125 \text{ (cm}^3\text{)}$

Độ dài cạnh của mỗi khối gỗ hình lập phương nhỏ là: $\sqrt[3]{125} = 5 \text{ (cm)}$

Vậy độ dài của mỗi khối gỗ hình lập phương nhỏ là 5 cm.

Bài 11. Một bể cá hình lập phương có sức chứa 1 000 dm^3 . Muốn tăng sức chứa của bể lên 10 lần (giữ nguyên hình dạng lập phương) thì phải tăng chiều dài của mỗi cạnh lên bao nhiêu lần?



Lời giải

Bể cá hình lập phương có sức chứa 1 000 dm^3 nghĩa là thể tích của bể cá là 1 000 dm^3 .

Độ dài mỗi cạnh của hình lập phương ban đầu là: $\sqrt[3]{1000} = 10 \text{ (dm)}$.

Sức chứa (hay thể tích) của bể sau khi tăng lên 10 lần là:

$$1\,000 \cdot 10 = 10\,000 \text{ (dm}^3\text{)}.$$

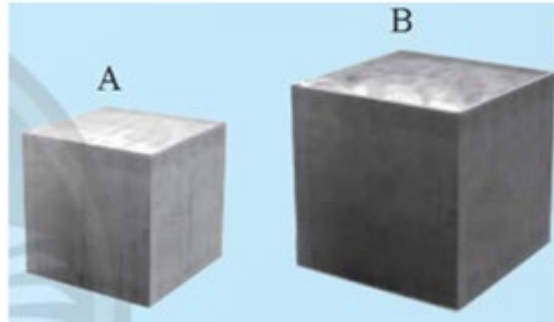
Độ dài mỗi cạnh của hình lập phương sau khi tăng sức chứa lên 10 lần là:

$$\sqrt[3]{10000} = 10\sqrt[3]{10} \text{ (dm)}$$

Khi đó, phải tăng chiều dài của mỗi cạnh lên: $\frac{10\sqrt[3]{10}}{10} = \sqrt[3]{10} \approx 2,15$ (lần).

Vậy muốn tăng sức chứa của bể lên 10 lần (giữ nguyên hình dạng lập phương) thì phải tăng chiều dài của mỗi cạnh lên khoảng 2,15 lần.

Bài 12. Có hai khối bê tông hình lập phương A và B có thể tích lần lượt là 8 dm^3 và 15 dm^3 (Hình 1).



a) Tính độ dài cạnh của khối bê tông A.

b) Gọi x (dm) là độ dài cạnh của khối bê tông B. Thay $\boxed{?}$ bằng số thích hợp để có đẳng thức: $x^3 = \boxed{?}$

Lời giải

a) Khối bê tông hình lập phương A có thể tích là 8 dm^3 .

Độ dài cạnh của khối bê tông A là: $\sqrt[3]{8} = 2 (\text{dm}^3)$

Vậy độ dài cạnh của khối bê tông A là 2 dm^3 .

b) Khối bê tông hình lập phương B có thể tích là 15 dm^3 .

Độ dài cạnh của khối bê tông B là $\sqrt[3]{15} (\text{dm}^3)$

Vậy $x^3 = \boxed{15}$.

BÀI 2**MỘT SỐ PHÉP TÍNH VỀ CĂN THỨC HAI CỦA SỐ THỰC****1. Căn bậc hai của một bình phương**

Với mọi số a , ta có: $\sqrt{a^2} = |a|$

2. Căn bậc hai của một tích

Với hai số không âm a, b , ta có: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

Chú ý: Quy tắc trên có thể mở rộng cho tích có nhiều thừa số không âm.

3. Căn bậc hai của một thương

Với $a \geq 0, b > 0$, ta có: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

4. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn bậc hai

Cho hai số a, b , với $b \geq 0$. Khi đó: $\sqrt{a^2 b} = |a| \sqrt{b}$

Cụ thể, ta có:

- Nếu $a \geq 0$ thì $\sqrt{a^2 b} = a \sqrt{b}$
- Nếu $a < 0$ thì $\sqrt{a^2 b} = -a \sqrt{b}$

5. Đưa thừa số vào trong dấu căn bậc hai

- Với $a \geq 0$ và $b \geq 0$, ta có: $a \sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$
- Với $a < 0$ và $b \geq 0$, ta có: $a \sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}$

DẠNG 1

CĂN BẬC HAI CỦA MỘT BÌNH PHƯƠNG

Với mọi số a , ta có: $\sqrt{a^2} = |a|$

Bài 1. Tính

a) $\sqrt{2024^2}$ b) $\sqrt{\frac{4}{49}}$ c) $-\sqrt{(-8)^2}$ d) $\left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2$

Bài 2. Tính giá trị của các biểu thức sau

a) $A = \sqrt{144} \cdot \sqrt{\frac{-49}{64}} \cdot \sqrt{0,01}$ b) $B = \left(\sqrt{0,25} - \sqrt{(-15)^2} + \sqrt{2,25}\right) : \sqrt{169}$
 c) $C = \left(\sqrt{0,04} - \sqrt{(-1,2)^2} + \sqrt{121}\right) \sqrt{81}$ d) $D = 75 : \sqrt{3^2 + (-4)^2} - 3\sqrt{(-5)^2} - 3^2$

Bài 3. Tính

a) $\sqrt{(\sqrt{24} - 5)^2}$ b) $\sqrt{(4 - \sqrt{15})^2}$ c) $\sqrt{(\sqrt{8} - 3)^2}$

Bài 4. Tính giá trị của các biểu thức sau

a) $3\sqrt{5} - \sqrt{(1 - \sqrt{5})^2}$ b) $\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} + \sqrt{2}$
 c) $\sqrt{6 - 4\sqrt{2}} + \sqrt{22 - 12\sqrt{2}}$ d) $\sqrt{17 - 12\sqrt{2}} + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}$

Bài 5. Tính giá trị của các biểu thức sau

a) $A = \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{(2\sqrt{2} - \sqrt{5})^2}$ b) $B = \sqrt{(\sqrt{7} - 2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})^2}$
 c) $C = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$ d) $D = \sqrt{17 + 12\sqrt{2}} + \sqrt{17 - 12\sqrt{2}}$

Bài 6. Chứng minh rằng

a) $11 + 6\sqrt{2} = (3 + \sqrt{2})^2$ b) $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = 6$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 7. Tính

a) $\sqrt{121}$ b) $\sqrt{\frac{121}{169}}$ c) $(-\sqrt{2})^2$ d) $\sqrt{\left(\frac{-3}{5}\right)^2}$

Bài 8. Tính giá trị của các biểu thức sau

a) $A = 0,5\sqrt{0,04} + 5\sqrt{0,36}$ b) $B = -4\sqrt{\frac{-25}{-16}} + 5\sqrt{\frac{-9}{25}}$
 c) $C = \frac{2}{3}\sqrt{81} - \frac{1}{2}\sqrt{16}$ d) $D = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{9}} - \frac{2}{5}\sqrt{\frac{25}{16}}$

Bài 9. Tính giá trị của các biểu thức sau

$$a) A = \sqrt{49} \cdot \sqrt{144} + \sqrt{256} : \sqrt{64}$$

$$b) B = 72 : \sqrt{2^2 \cdot 36 \cdot 3^2} - \sqrt{225}$$

Bài 10. Rút gọn các biểu thức sau

$$a) A = \sqrt{(4 - \sqrt{15})^2} + \sqrt{15}$$

$$b) B = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}$$

$$c) C = \sqrt{49 - 12\sqrt{5}} - \sqrt{49 + 12\sqrt{5}}$$

$$d) D = \sqrt{29 + 12\sqrt{5}} - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}$$

Bài 11. Tính giá trị của các biểu thức sau

$$a) \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$$

$$b) \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$$

$$c) \sqrt{24 + 8\sqrt{5}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$$

$$d) \sqrt{41 - 12\sqrt{5}} - \sqrt{41 + 12\sqrt{5}}$$

Bài 12. Tính giá trị của các biểu thức sau

$$a) A = (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$$

$$b) C = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{9 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}}$$

$$c) D = \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}$$

Bài 13. Chứng minh rằng

$$a) 8 - 2\sqrt{7} = (\sqrt{7} - 1)^2$$

$$b) \sqrt{8 - 2\sqrt{7}} - \sqrt{8 + 2\sqrt{7}} = -2$$

DẠNG 2
CĂN BẬC HAI THỨC CỦA MỘT TÍCH

• Với hai số không âm a, b , ta có: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

Bài 1. Tính

a) $\sqrt{25 \cdot 144}$

b) $\sqrt{52 \cdot 13}$

c) $\sqrt{45 \cdot 80}$

d) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{28}$

Bài 2. Tính

a) $\sqrt{55 \cdot 77 \cdot 35}$

b) $\sqrt{\frac{1}{8}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{125} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}}$

c) $\sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt{\sqrt{2}+1}$

Bài 3. Thực hiện phép tính

a) $\sqrt{5^2 - 4^2}$

b) $\sqrt{26^2 - 24^2}$

c) $\sqrt{85^2 - 84^2}$

Bài 4. Tính

a) $\left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{50}{3}} - \sqrt{24} \right) \cdot \sqrt{6}$

b) $\sqrt{3+\sqrt{5}} \cdot \sqrt{2}$

c) $\left(\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{3} + 5\sqrt{\frac{4}{3}} \right) \cdot \sqrt{12}$

d) $\sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{8}$

Bài 5. Rút gọn

a) $A = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{15}}{\sqrt{8} - \sqrt{12}}$

b) $B = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{15}}{\sqrt{35} - \sqrt{14}}$

c) $C = \frac{5 + \sqrt{5}}{\sqrt{10} + \sqrt{2}}$

d) $D = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} - 1} + \frac{5 - 2\sqrt{5}}{2\sqrt{5} - 4}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6. Tính

a) $A = \sqrt{32 \cdot 200}$

b) $B = \sqrt{5} \cdot \sqrt{125}$

c) $C = \sqrt{(9+2\sqrt{14})(9-2\sqrt{14})}$

d) $D = \sqrt{117,5^2 - 26,5^2 - 1440}$

Bài 7. Tính

a) $A = \sqrt{3 + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}}$

b) $B = \sqrt{4 + \sqrt{8}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$

c) $C = (\sqrt{12} + 12\sqrt{15} - 4\sqrt{135})\sqrt{3}$

d) $D = 2\sqrt{40\sqrt{12}} - 2\sqrt{\sqrt{75}} - 3\sqrt{5\sqrt{48}}$

Bài 8. Tính

a) $A = (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$

b) $B = (3 - \sqrt{5})\sqrt{3 + \sqrt{5}} + (3 + \sqrt{5})\sqrt{3 - \sqrt{5}}$

c) $C = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$

Bài 9. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{14}}{2\sqrt{3} + \sqrt{28}}$

b) $B = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + 4}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}$

Bài 10. Rút gọn biểu thức sau:

a) $A = \frac{3\sqrt{8} - 2\sqrt{12} + \sqrt{20}}{3\sqrt{18} - 2\sqrt{27} + \sqrt{45}}$

b) $B = \frac{2\sqrt{15} - 2\sqrt{10} + \sqrt{6} - 3}{2\sqrt{5} - 2\sqrt{10} - \sqrt{3} + \sqrt{6}}$

DẠNG 3**CĂN BẬC HAI THỨC CỦA MỘT THƯƠNG**

Với $a \geq 0, b > 0$, ta có: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Bài 1. Tính

a) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$

b) $\frac{\sqrt{12,5}}{\sqrt{0,5}}$

c) $\sqrt{\frac{25}{64}}$

d) $\frac{\sqrt{230}}{\sqrt{2,3}}$

Bài 2. Tính

a) $\left(\sqrt{\frac{1}{7}} - \sqrt{\frac{16}{7}} + \sqrt{7}\right) : \sqrt{7}$

b) $\sqrt{36 - 12\sqrt{5}} : \sqrt{6}$

c) $\left(\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{4}{3}} + \sqrt{3}\right) : \sqrt{3}$

d) $\sqrt{3 - \sqrt{5}} : \sqrt{2}$

Bài 3. Tính

a) $A = (\sqrt{12} + \sqrt{75} + \sqrt{27}) : \sqrt{15}$

b) $B = (12\sqrt{50} - 8\sqrt{200} + 7\sqrt{450}) : \sqrt{10}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN**Bài 4.** Thực hiện phép tính

a) $A = \sqrt{1,6} \cdot \sqrt{250} + \sqrt{19,6} : \sqrt{4,9}$

b) $B = \sqrt{1\frac{3}{4} \cdot 2\frac{2}{7} \cdot 5\frac{4}{9}}$

Bài 5. Thực hiện phép tính

a) $A = (20\sqrt{300} - 15\sqrt{675} + 5\sqrt{75}) : \sqrt{15}$

b) $B = (\sqrt{325} - \sqrt{117} + 2\sqrt{208}) : \sqrt{13}$

Bài 6. Tính

a) $A = (\sqrt{27} - \sqrt{12} + 2\sqrt{6}) : 3\sqrt{3}$

b) $B = (\sqrt{12} - 2\sqrt{18}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $C = \left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} - \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right) : \sqrt{72}$

d) $D = \left(\frac{1}{\sqrt{3}-2} - \frac{1}{\sqrt{3}+2}\right) \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

Bài 7. Tính

a) $\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}$

b) $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{2}$

c) $\sqrt{6,5+\sqrt{12}} + \sqrt{6,5-\sqrt{12}} + 2\sqrt{6}$

DẠNG 4**ĐƯA THỪA SỐ RA NGOÀI HOẶC VÀO TRONG DẤU CĂN BẬC HAI**

- Nếu $a \geq 0$ và $b \geq 0$ thì $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$
- Nếu $a < 0$ và $b \geq 0$ thì $\sqrt{a^2b} = -a\sqrt{b}$
- Với $a \geq 0$ và $b \geq 0$, ta có: $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$
- Với $a < 0$ và $b \geq 0$, ta có: $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2b}$

Bài 1. Viết gọn các biểu thức sau

a) $\sqrt{25.90}$

b) $\sqrt{96.125}$

c) $\sqrt{75.54}$

d) $\sqrt{245.35}$

Bài 2. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a) $\sqrt{45} + \sqrt{20} - \sqrt{245}$

b) $4\sqrt{3} + \sqrt{27} - \sqrt{45} + \sqrt{5}$

c) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$

d) $\sqrt{7-2\sqrt{10}} + \sqrt{2}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Tính giá trị các biểu thức sau

a) $A = \sqrt{125} + \sqrt{45} - \sqrt{405}$

b) $B = \sqrt{50} - \sqrt{128} + \sqrt{162} - \sqrt{18}$

c) $C = \sqrt{63} - \sqrt{252} - \sqrt{343} + \sqrt{175}$

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = \sqrt{200} - \sqrt{32} + \sqrt{72}$

b) $B = 4\sqrt{20} - 3\sqrt{125} + 5\sqrt{45} - 15\sqrt{\frac{1}{5}}$

Bài 5. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = \sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$

b) $B = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 6\sqrt{20}}}}$

c) $C = \sqrt{6 + 2\sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}$

d) $D = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + \sqrt{48 - 10\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}}}$

DẠNG 5
SO SÁNH CÁC CĂN BẬC HAI

Bài 1. So sánh các cặp số dưới đây

a) $2\sqrt{29}$ và $4\sqrt{3}$

b) $\frac{5}{4}\sqrt{2}$ và $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$

c) $3\sqrt{3}$ và $\sqrt{12}$

d) $\sqrt{7}$ và $3\sqrt{5}$

Bài 2. Sắp xếp các số sau theo thứ tự tăng dần: $3\sqrt{5}; 2\sqrt{6}; \sqrt{29}; 4\sqrt{2}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. So sánh các cặp số dưới đây

a) $5\sqrt{2}$ và $3\sqrt{13}$

b) $\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{6}}$ và $6\sqrt{\frac{1}{37}}$

a) $\frac{1}{3}\sqrt{51}$ và $\frac{1}{5}\sqrt{150}$

b) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ và $6\sqrt{\frac{1}{2}}$

Bài 4. Tìm số lớn hơn trong các cặp số dưới đây

a) $2\sqrt{6}$ và $3\sqrt{3}$

b) $\frac{2}{5}\sqrt{6}$ và $\frac{7}{4}\sqrt{\frac{1}{3}}$

Bài 5. Tìm số bé hơn trong các cặp số dưới đây

a) $2\sqrt{23}$ và $3\sqrt{10}$

b) $2\sqrt{\frac{1}{5}}$ và $\frac{1}{5}\sqrt{21}$

Bài 6. Sắp xếp các số sau theo thứ tự giảm dần: $7\sqrt{2}; 2\sqrt{8}; \sqrt{28}; 5\sqrt{2}$

Bài 7. Sắp xếp các số

a) $2\sqrt{5}; 3\sqrt{2}; 5; \sqrt{23}$ theo thứ tự tăng dần

b) $5\sqrt{2}; 2\sqrt{13}; 4\sqrt{3}; \sqrt{47}$ theo thứ tự giảm dần

DẠNG 6

ỨNG DỤNG

Bài 1. Khi một quả bóng rổ được thả xuống, nó sẽ nảy trở lại, nhưng do tiêu hao năng lượng nên nó không đạt được chiều cao như lúc bắt đầu. Hệ số phục hồi của quả bóng rổ được tính theo công thức $C_R = \sqrt{\frac{h}{H}}$, trong đó H là độ cao mà quả bóng được thả rơi và h là độ cao mà quả bóng bật lại. Một quả bóng rổ rơi từ độ cao 3,24 m và bật lại độ cao 2,25 m. Làm thế nào để viết hệ số phục hồi của quả bóng đó dưới dạng phân số?



Bài 2. Trong Vật lí, ta có định luật Joule – Lenz để tính nhiệt lượng toả ra ở dây dẫn khi có dòng điện chạy qua: $Q = I^2Rt$.

Trong đó: Q là nhiệt lượng toả ra trên dây dẫn tính theo Jun (J);

I là cường độ dòng điện chạy trong dây dẫn tính theo Ampe (A);

R là điện trở dây dẫn tính theo Ohm (Ω);

t là thời gian dòng điện chạy qua dây dẫn tính theo giây.

Áp dụng công thức trên để giải bài toán sau: Một bếp điện khi hoạt động bình thường có điện trở $R = 80 \Omega$. Tính cường độ dòng điện chạy trong dây dẫn, biết nhiệt lượng mà dây dẫn toả ra trong 1 giây là 500 J.

Bài 3. Tốc độ gần đúng của một ô tô ngay trước khi đạp phanh được tính theo công thức $v = \sqrt{2\lambda gd}$, trong đó v (m/s) là tốc độ của ô tô, d (m) là chiều dài của vết trượt tính từ thời điểm đạp phanh cho đến khi ô tô dừng lại trên đường, λ là hệ số cản lăn của mặt đường, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Nếu một chiếc ô tô để lại vết trượt dài khoảng 20 m trên đường nhựa thì tốc độ của ô tô trước khi đạp phanh là khoảng bao nhiêu mét trên giây (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)? Biết rằng hệ số cản lăn của đường nhựa là $\lambda = 0,7$.

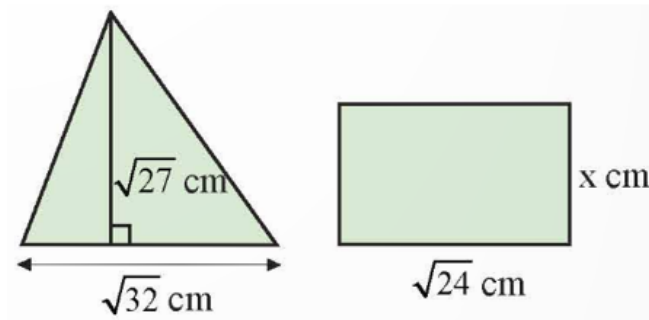


Vết trượt của ô tô

Bài 4. Vận tốc m/s của một vật đang bay được cho bởi công thức $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$, trong đó E là động năng của vật (tính bằng Joule, kí hiệu là J) và m (kg) là khối lượng của vật. Tính vận tốc bay của một vật khi biết vật đó có khối lượng 2,5 kg và động năng 281,25 J.

Bài 5. Công suất P (W), hiệu điện thế U (V), điện trở R (Ω) trong đoạn mạch một chiều liên hệ với nhau theo công thức $U = \sqrt{PR}$. Nếu công suất tăng gấp 8 lần, điện trở giảm 2 lần thì tỉ số giữa hiệu điện thế lúc đó và hiệu điện thế ban đầu bằng bao nhiêu?

Bài 6. Biết rằng hình tam giác và hình chữ nhật ở hình vẽ có diện tích bằng nhau. Tính chiều rộng x của hình chữ nhật.

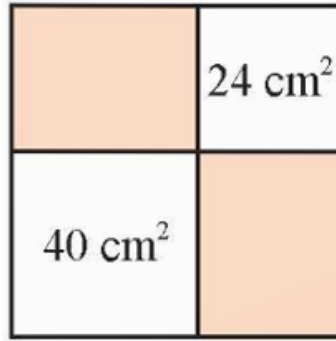


Bài 7. Cho hình chữ nhật có chiều rộng a (cm), chiều dài b (cm) và diện tích S (cm^2).

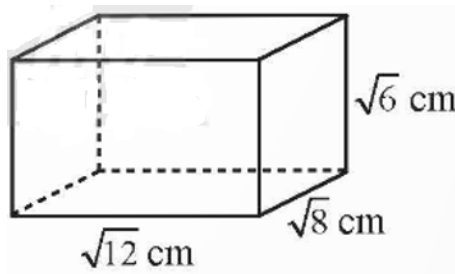
a) Tìm S, biết $a = \sqrt{8}, b = \sqrt{32}$.

b) Tìm b, biết $S = 3\sqrt{2}, a = 2\sqrt{3}$

Bài 8. Từ một tấm thép hình vuông, người thợ cắt ra hai mảnh hình chữ nhật có diện tích lần lượt là 24 cm^2 và 40 cm^2 như hình vẽ. Tính diện tích phần còn lại của tấm thép



Bài 9. Cho hình hộp chữ nhật có chiều dài $\sqrt{12}$ cm, chiều rộng $\sqrt{8}$ cm, chiều cao $\sqrt{6}$ cm, như hình vẽ.



- Tính thể tích của hình hộp chữ nhật đó.
- Tính diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật đó.

BÀI 2**MỘT SỐ PHÉP TÍNH VỀ CĂN THỨC HAI CỦA SỐ THỰC****1. Căn bậc hai của một bình phương**

Với mọi số a , ta có: $\sqrt{a^2} = |a|$

2. Căn bậc hai của một tích

Với hai số không âm a, b , ta có: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

Chú ý: Quy tắc trên có thể mở rộng cho tích có nhiều thừa số không âm.

3. Căn bậc hai của một thương

Với $a \geq 0, b > 0$, ta có: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

4. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn bậc hai

Cho hai số a, b , với $b \geq 0$. Khi đó: $\sqrt{a^2 b} = |a| \sqrt{b}$

Cụ thể, ta có:

- Nếu $a \geq 0$ thì $\sqrt{a^2 b} = a \sqrt{b}$
- Nếu $a < 0$ thì $\sqrt{a^2 b} = -a \sqrt{b}$

5. Đưa thừa số vào trong dấu căn bậc hai

- Với $a \geq 0$ và $b \geq 0$, ta có: $a \sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$
- Với $a < 0$ và $b \geq 0$, ta có: $a \sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}$

DẠNG 1

CĂN BẬC HAI CỦA MỘT BÌNH PHƯƠNG

Với mọi số a , ta có: $\sqrt{a^2} = |a|$

Bài 1. Tính

a) $\sqrt{2024^2}$

b) $\sqrt{\frac{4}{49}}$

c) $-\sqrt{(-8)^2}$

d) $\left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2$

Lời giải

a) $\sqrt{2024^2} = |2024| = 2024$

b) $\sqrt{\frac{4}{49}} = \sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^2} = \left|\frac{2}{7}\right| = \frac{2}{7}$

c) $-\sqrt{(-8)^2} = -|-8| = -8$

d) $\left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2 = \frac{3}{4}$

Bài 2. Tính giá trị của các biểu thức sau

a) $A = \sqrt{144} \cdot \sqrt{-\frac{49}{64}} \cdot \sqrt{0,01}$

b) $B = \left(\sqrt{0,25} - \sqrt{(-15)^2} + \sqrt{2,25}\right) : \sqrt{169}$

c) $C = \left(\sqrt{0,04} - \sqrt{(-1,2)^2} + \sqrt{121}\right) \sqrt{81}$

d) $D = 75 : \sqrt{3^2 + (-4)^2} - 3\sqrt{(-5)^2} - 3^2$

Lời giải

a) $A = \sqrt{144} \cdot \sqrt{-\frac{49}{64}} \cdot \sqrt{0,01} = \sqrt{12^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{7}{8}\right)^2} \cdot \sqrt{(0,1)^2} = 12 \cdot \frac{7}{8} \cdot 0,1 = 1,05$

b) $B = \left(\sqrt{0,25} - \sqrt{(-15)^2} + \sqrt{2,25}\right) : \sqrt{169}$

$$= \left(\sqrt{(0,5)^2} - \sqrt{15^2} + \sqrt{(1,5)^2}\right) : \sqrt{13^2}$$

$$= (0,5 - 15 + 1,5) : 13$$

$$= -13 : 13 = -1$$

c) $C = \left(\sqrt{0,04} - \sqrt{(-1,2)^2} + \sqrt{121}\right) \sqrt{81}$

$$= \left(\sqrt{(0,2)^2} - \sqrt{(-1,2)^2} + \sqrt{11^2}\right) \sqrt{9^2}$$

$$= (0,2 - |-1,2| + 11)9$$

$$= 10,9 = 90$$

$$d) D = 75 : \sqrt{3^2 + (-4)^2} - 3\sqrt{(-5)^2 - 3^2}$$

$$= 75 : \sqrt{9+16} - 3\sqrt{25-9}$$

$$= 75 : \sqrt{25} - 3\sqrt{16}$$

$$= 75 : 5 - 3 \cdot 4$$

$$= 3$$

Bài 3. Tính

$$a) \sqrt{(\sqrt{24}-5)^2}$$

$$b) \sqrt{(4-\sqrt{15})^2}$$

$$c) \sqrt{(\sqrt{8}-3)^2}$$

Lời giải

$$a) \sqrt{(\sqrt{24}-5)^2} = |\sqrt{24}-5|$$

Do $\sqrt{24} < \sqrt{25}$ hay $\sqrt{24} < 5$ nên $\sqrt{24}-5 < 0$

Vì thế $|\sqrt{24}-5| = -(\sqrt{24}-5) = 5-\sqrt{24}$

$$\text{Vậy } \sqrt{(\sqrt{24}-5)^2} = |\sqrt{24}-5| = 5-\sqrt{24}$$

$$b) \sqrt{(4-\sqrt{15})^2} = |4-\sqrt{15}|$$

Do $\sqrt{16} > \sqrt{15}$ hay $4 > \sqrt{15}$ nên $4-\sqrt{15} > 0$

Vì thế $|4-\sqrt{15}| = 4-\sqrt{15}$

$$\text{Vậy } \sqrt{(4-\sqrt{15})^2} = |4-\sqrt{15}| = 4-\sqrt{15}$$

$$c) \sqrt{(\sqrt{8}-3)^2} = |\sqrt{8}-3|$$

Do $\sqrt{8} < \sqrt{9}$ hay $\sqrt{8} < 3$ nên $\sqrt{8}-3 < 0$

Vì thế $|\sqrt{8}-3| = -(\sqrt{8}-3) = 3-\sqrt{8}$

$$\text{Vậy } \sqrt{(\sqrt{8}-3)^2} = |\sqrt{8}-3| = 3-\sqrt{8}$$

Bài 4. Tính giá trị của các biểu thức sau

$$a) 3\sqrt{5} - \sqrt{(1-\sqrt{5})^2}$$

$$b) \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} + \sqrt{2}$$

$$c) \sqrt{6-4\sqrt{2}} + \sqrt{22-12\sqrt{2}}$$

$$d) \sqrt{17-12\sqrt{2}} + \sqrt{9+4\sqrt{2}}$$

Lời giải

$$a) 3\sqrt{5} - \sqrt{(1-\sqrt{5})^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= 3\sqrt{5} - |1 - \sqrt{5}| \\
 &= 3\sqrt{5} - (\sqrt{5} - 1) \text{ (do } 1 - \sqrt{5} < 0) \\
 &= 2\sqrt{5} + 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } &\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} + \sqrt{2} \\
 &= |\sqrt{3} - \sqrt{2}| + \sqrt{2} \\
 &= \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{2} \\
 &= \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } &\sqrt{6 - 4\sqrt{2}} + \sqrt{22 - 12\sqrt{2}} \\
 &= \sqrt{(2 - \sqrt{2})^2} + \sqrt{(3\sqrt{2} - 2)^2} \\
 &= |2 - \sqrt{2}| + |3\sqrt{2} - 2| \\
 &= 2 - \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2 \\
 &= 2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } &\sqrt{17 - 12\sqrt{2}} + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}} \\
 &= \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(2\sqrt{2} + 1)^2} \\
 &= |3 - 2\sqrt{2}| + |2\sqrt{2} + 1| \\
 &= 3 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 1 \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

Bài 5. Tính giá trị của các biểu thức sau

$$\text{a) } A = \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{(2\sqrt{2} - \sqrt{5})^2}$$

$$\text{b) } B = \sqrt{(\sqrt{7} - 2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})^2}$$

$$\text{c) } C = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$$

$$\text{d) } D = \sqrt{17 + 12\sqrt{2}} + \sqrt{17 - 12\sqrt{2}}$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{a) } A &= \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{(2\sqrt{2} - \sqrt{5})^2} \\
 &= |2 - \sqrt{5}| + |2\sqrt{2} - \sqrt{5}| \\
 &= -(2 - \sqrt{5}) + 2\sqrt{2} - \sqrt{5} \\
 &= -2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2} - \sqrt{5} \\
 &= 2\sqrt{2} - 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } B &= \sqrt{(\sqrt{7} - 2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})^2} \\
 &= |\sqrt{7} - 2\sqrt{2}| + |3 - 2\sqrt{2}| \\
 &= -(\sqrt{7} - 2\sqrt{2}) - (3 - 2\sqrt{2}) \\
 &= 3 - \sqrt{7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } C &= \sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{11-6\sqrt{2}} \\
 &= \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(3-\sqrt{2})^2} \\
 &= |3+\sqrt{2}| - |3-\sqrt{2}| \\
 &= 3+\sqrt{2} - (3-\sqrt{2}) \\
 &= 2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } D &= \sqrt{17+12\sqrt{2}} + \sqrt{17-12\sqrt{2}} \\
 &= \sqrt{17+12\sqrt{2}} + \sqrt{17-12\sqrt{2}} \\
 &= \sqrt{(3+2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3-2\sqrt{2})^2} \\
 &= |3+2\sqrt{2}| + |3-2\sqrt{2}| \\
 &= 3+2\sqrt{2} + 3-2\sqrt{2} \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

Bài 6. Chứng minh rằng

$$\text{a) } 11+6\sqrt{2} = (3+\sqrt{2})^2$$

$$\text{b) } \sqrt{11+6\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}} = 6$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } VT = 11+6\sqrt{2} = 9+2\cdot 3\sqrt{2}+2 = (\sqrt{3}+2)^2 = VP \Rightarrow \text{đpcm}$$

$$\text{b) Ta có: } VT = \sqrt{11+6\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}} = |\sqrt{2}+3| + |\sqrt{2}-3| = 6 = VP \Rightarrow \text{đpcm}$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 7. Tính

$$\text{a) } \sqrt{121}$$

$$\text{b) } \sqrt{\frac{121}{169}}$$

$$\text{c) } (-\sqrt{2})^2$$

$$\text{d) } \sqrt{\left(\frac{-3}{5}\right)^2}$$

Lời giải

$$\text{a) } \sqrt{144} = \sqrt{12^2} = 12$$

$$\text{b) } \sqrt{\frac{121}{169}} = \sqrt{\left(\frac{11}{13}\right)^2} = \frac{11}{13}$$

$$\text{c) } (-\sqrt{2})^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$$

$$\text{d) } \sqrt{\left(\frac{-3}{5}\right)^2} = \left|-\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}$$

Bài 8. Tính giá trị của các biểu thức sau

$$\text{a) } A = 0,5\sqrt{0,04} + 5\sqrt{0,36}$$

$$\text{b) } B = -4\sqrt{\frac{-25}{-16}} + 5\sqrt{\frac{-9}{25}}$$

c) $C = \frac{2}{3}\sqrt{81} - \frac{1}{2}\sqrt{16}$

d) $D = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{9}} - \frac{2}{5}\sqrt{\frac{25}{16}}$

Lời giải

a) $A = 0,5\sqrt{0,04} + 5\sqrt{0,36} = 0,5\sqrt{(0,2)^2} + 5\sqrt{(0,6)^2} = 0,5 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,6 = 3,1$

b) $B = -4\sqrt{\frac{-25}{-16}} + 5\sqrt{\frac{-9}{-25}} = -4\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2} + 5\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2} = -4 \cdot \frac{5}{4} + 5 \cdot \frac{3}{5} = -2$

c) $C = \frac{2}{3}\sqrt{81} - \frac{1}{2}\sqrt{16} = \frac{2}{3}\sqrt{9^2} - \frac{1}{2}\sqrt{4^2} = \frac{2}{3} \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 4 = 6 - 2 = 4$

d) $D = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{9}} - \frac{2}{5}\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2} - \frac{2}{5}\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$

Bài 9. Tính giá trị của các biểu thức sau

a) $A = \sqrt{49} \cdot \sqrt{144} + \sqrt{256} : \sqrt{64}$

b) $B = 72 : \sqrt{2^2 \cdot 36 \cdot 3^2} - \sqrt{225}$

Lời giải

a) $A = \sqrt{49} \cdot \sqrt{144} + \sqrt{256} : \sqrt{64} = \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{12^2} + \sqrt{16^2} : \sqrt{8^2} = 7 \cdot 12 + 16 : 8 = 86$

b) $B = 72 : \sqrt{2^2 \cdot 36 \cdot 3^2} - \sqrt{225} = 72 : \sqrt{2^2 \cdot 6^2 \cdot 3^2} - \sqrt{15^2} = 72 : \sqrt{(2 \cdot 6 \cdot 3)^2} - \sqrt{15^2} = 72 : 36 - 15 = -13$

Bài 10. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = \sqrt{(4 - \sqrt{15})^2} + \sqrt{15}$

b) $B = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}$

c) $C = \sqrt{49 - 12\sqrt{5}} - \sqrt{49 + 12\sqrt{5}}$

d) $D = \sqrt{29 + 12\sqrt{5}} - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}$

Lời giải

a) $A = \sqrt{(4 - \sqrt{15})^2} + \sqrt{15} = |4 - \sqrt{15}| + \sqrt{15} = 4 - \sqrt{15} + \sqrt{15} = 4$

b) $B = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} = |2 - \sqrt{3}| + |1 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3} - (1 - \sqrt{3}) = 1$

c) $C = \sqrt{49 - 12\sqrt{5}} - \sqrt{49 + 12\sqrt{5}}$

$$= \sqrt{(2 - 3\sqrt{5})^2} - \sqrt{(2 + 3\sqrt{5})^2}$$

$$= |2 - 3\sqrt{5}| - |2 + 3\sqrt{5}|$$

$$= -(2 - 3\sqrt{5}) - (2 + 3\sqrt{5})$$

$$= -4$$

d) $D = \sqrt{29 + 12\sqrt{5}} - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{(3+2\sqrt{5})^2} - \sqrt{(3-2\sqrt{5})^2} \\
&= |3+2\sqrt{5}| - |3-2\sqrt{5}| \\
&= 3+2\sqrt{5} + (3-2\sqrt{5}) \\
&= 6
\end{aligned}$$

Bài 11. Tính giá trị của các biểu thức sau

a) $\sqrt{6+2\sqrt{5}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}}$

b) $\sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}}$

c) $\sqrt{24+8\sqrt{5}} + \sqrt{9-4\sqrt{5}}$

d) $\sqrt{41-12\sqrt{5}} - \sqrt{41+12\sqrt{5}}$

Lời giải

a) $\sqrt{6+2\sqrt{5}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}}$
 $= \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}$
 $= |\sqrt{5}+1| + |\sqrt{5}-1|$
 $= \sqrt{5}+1 + \sqrt{5}-1$
 $= 2\sqrt{5}$

b) $\sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}}$
 $= \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} + \sqrt{(2-\sqrt{2})^2}$
 $= |\sqrt{2}+1| + |2-\sqrt{2}|$
 $= \sqrt{2}+1 + 2-\sqrt{2}$
 $= 3$

c) $\sqrt{24+8\sqrt{5}} + \sqrt{9-4\sqrt{5}}$
 $= \sqrt{4(6+2\sqrt{5})} + \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}$
 $= 2|\sqrt{5}+1| + |\sqrt{5}-2|$
 $= 3\sqrt{5}$

d) $\sqrt{41-12\sqrt{5}} - \sqrt{41+12\sqrt{5}}$
 $= \sqrt{(6-\sqrt{5})^2} - \sqrt{(6+\sqrt{5})^2}$
 $= |6-\sqrt{5}| - |6+\sqrt{5}|$
 $= -2\sqrt{5}$

Bài 12. Tính giá trị của các biểu thức sau

a) $A = (\sqrt{3}-\sqrt{2}) \cdot \sqrt{5+2\sqrt{6}}$

b) $B = \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{9-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$

c) $C = \sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$

Lời giải

$$a) A = (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$$

$$= (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}$$

$$= (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})$$

$$= (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 1$$

$$b) B = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{9 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}}$$

$$= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{9 - \sqrt{20 - 12\sqrt{5} + 9}}}$$

$$= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{9 - \sqrt{(2\sqrt{5} + 3)^2}}}$$

$$= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}$$

$$= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}}$$

$$= \sqrt{\sqrt{5} - (\sqrt{5} - 1)}$$

$$= 1$$

$$c) C = \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}$$

$$= \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{(2\sqrt{2} + 1)^2}}}$$

$$= \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + (2\sqrt{2} + 1)}}$$

$$= \sqrt{13 + 30\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt{13 + 30\sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2}}$$

$$= \sqrt{13 + 30(\sqrt{2} + 1)}$$

$$= \sqrt{43 + 30\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{25 + 2 \cdot 5 \cdot 3\sqrt{2} + 18}$$

$$= \sqrt{(5 + 3\sqrt{2})^2}$$

$$= 5 + 3\sqrt{2}$$

Bài 13. Chứng minh rằng

$$a) 8 - 2\sqrt{7} = (\sqrt{7} - 1)^2$$

$$b) \sqrt{8 - 2\sqrt{7}} - \sqrt{8 + 2\sqrt{7}} = -2$$

Lời giải

$$a) 8 - 2\sqrt{7} = 7 - 2\sqrt{7} + 1 = (\sqrt{7} - 1)^2 \Rightarrow \text{đpcm}$$

$$b) VT = \sqrt{8 - 2\sqrt{7}} - \sqrt{8 + 2\sqrt{7}} = \sqrt{(\sqrt{7} - 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{7} + 1)^2} = -2 = VP \Rightarrow \text{đpcm}$$

DẠNG 2**CĂN BẬC HAI THỨC CỦA MỘT TÍCH**

- Với hai số không âm a, b , ta có: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

Bài 1. Tính

a) $\sqrt{25 \cdot 144}$

b) $\sqrt{52 \cdot 13}$

c) $\sqrt{45 \cdot 80}$

d) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{28}$

Lời giải

a) $\sqrt{25 \cdot 144} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{144} = 5 \cdot 12 = 60$

b) $\sqrt{52 \cdot 13} = \sqrt{52 \cdot 13} = \sqrt{4 \cdot 13 \cdot 13} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{13^2} = 26$

c) $\sqrt{45 \cdot 80} = \sqrt{5 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 16} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{4^2} = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$

d) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{28} = \sqrt{7 \cdot 28} = \sqrt{7 \cdot 7 \cdot 4} = \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{2^2} = 14$

Bài 2. Tính

a) $\sqrt{55 \cdot 77 \cdot 35}$

b) $\sqrt{\frac{1}{8}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{125} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}}$

c) $\sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt{\sqrt{2}+1}$

Lời giải

a) $\sqrt{55 \cdot 77 \cdot 35} = \sqrt{5 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 7} = \sqrt{5^2 \cdot 11^2 \cdot 7^2} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{11^2} \cdot \sqrt{7^2} = 5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$

b) $\sqrt{\frac{1}{8}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{125} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{1}{8} \cdot 2 \cdot 125 \cdot \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{1}{8} \cdot 2 \cdot 125 \cdot \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 125}{8 \cdot 5}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$

c) $\sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt{\sqrt{2}+1} = \sqrt{(\sqrt{2}-1) \cdot (\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2-1} = 1$

Bài 3. Thực hiện phép tính

a) $\sqrt{5^2 - 4^2}$

b) $\sqrt{26^2 - 24^2}$

c) $\sqrt{85^2 - 84^2}$

Lời giải

a) $\sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{(5-4)(5+4)} = \sqrt{9} = 3$

b) $\sqrt{26^2 - 24^2} = \sqrt{(26-24)(26+24)} = \sqrt{100} = 10$

c) $\sqrt{85^2 - 84^2} = \sqrt{(85-84)(85+84)} = \sqrt{169} = 13$

Bài 4. Tính

a) $\left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{50}{3}} - \sqrt{24} \right) \cdot \sqrt{6}$

b) $\sqrt{3+\sqrt{5}} \cdot \sqrt{2}$

c) $\left(\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{3} + 5\sqrt{\frac{4}{3}} \right) \cdot \sqrt{12}$

d) $\sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{8}$

Lời giải

$$a) \left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{50}{3}} - \sqrt{24} \right) \cdot \sqrt{6} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 6 + \sqrt{\frac{50}{3}} \cdot 6 - \sqrt{24} \cdot 6 = \sqrt{4} + \sqrt{100} - \sqrt{144} = 2 + 10 - 12 = 0$$

$$b) \sqrt{3+\sqrt{5}} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3 \cdot 2 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} = \sqrt{5} + 1$$

$$c) \left(\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{3} + 5\sqrt{\frac{4}{3}} \right) \cdot \sqrt{12} = \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot 12 - \sqrt{3} \cdot 12 + 5\sqrt{\frac{4}{3}} \cdot 12 = \sqrt{9} - \sqrt{36} + 5\sqrt{16} = 3 - 6 + 5 \cdot 4 = 7$$

$$d) \sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{(3-\sqrt{5})8} = \sqrt{24-8\sqrt{5}} = \sqrt{(2\sqrt{5}-2)^2} = |2\sqrt{5}-2| = 2\sqrt{5}-2$$

Bài 5. Rút gọn

$$a) A = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{15}}{\sqrt{8} - \sqrt{12}}$$

$$b) B = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{15}}{\sqrt{35} - \sqrt{14}}$$

$$c) C = \frac{5 + \sqrt{5}}{\sqrt{10} + \sqrt{2}}$$

$$d) D = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} - 1} + \frac{5 - 2\sqrt{5}}{2\sqrt{5} - 4}$$

Lời giải

$$a) A = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{15}}{\sqrt{8} - \sqrt{12}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{4} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{\sqrt{4}(\sqrt{2} - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$b) B = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{15}}{\sqrt{35} - \sqrt{14}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{7} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{2} - \sqrt{5})}{\sqrt{7}(\sqrt{5} - \sqrt{2})} = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{-\sqrt{21}}{7}$$

$$c) C = \frac{5 + \sqrt{5}}{\sqrt{10} + \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{5})^2 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5} + 1)}{\sqrt{2}(\sqrt{5} + 1)} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$d) D = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} - 1} + \frac{5 - 2\sqrt{5}}{2\sqrt{5} - 4} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3} - 1} + \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5} - 2)}{2(\sqrt{5} - 2)} = \sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6. Tính

$$a) A = \sqrt{32 \cdot 200}$$

$$b) B = \sqrt{5} \cdot \sqrt{125}$$

$$c) C = \sqrt{(9 + 2\sqrt{14})(9 - 2\sqrt{14})}$$

$$d) D = \sqrt{117,5^2 - 26,5^2 - 1440}$$

Lời giải

$$a) A = \sqrt{32 \cdot 200} = \sqrt{4 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 10^2} = \sqrt{2^2 \cdot 4^2 \cdot 10^2} = 2 \cdot 4 \cdot 10 = 80$$

$$b) B = \sqrt{5} \cdot \sqrt{125} = \sqrt{5 \cdot 5 \cdot 25} = \sqrt{5^2 \cdot 5^2} = 5 \cdot 5 = 25$$

$$c) C = \sqrt{(9 + 2\sqrt{14})(9 - 2\sqrt{14})} = \sqrt{9^2 - (2\sqrt{14})^2} = \sqrt{81 - 56} = \sqrt{25} = 5$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } D &= \sqrt{117,5^2 - 26,5^2 - 1440} \\
 &= \sqrt{(117,5 - 26,5)(117,5 + 26,5) - 1440} \\
 &= \sqrt{144,91 - 144,10} \\
 &= \sqrt{144 \cdot (91 - 10)} \\
 &= \sqrt{144 \cdot 81} \\
 &= \sqrt{144} \cdot \sqrt{81} \\
 &= 12 \cdot 9 \\
 &= 108
 \end{aligned}$$

Bài 7. Tính

$$\text{a) } A = \sqrt{3 + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}}$$

$$\text{b) } B = \sqrt{4 + \sqrt{8}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

$$\text{c) } C = (\sqrt{12} + 12\sqrt{15} - 4\sqrt{135})\sqrt{3}$$

$$\text{d) } D = 2\sqrt{40\sqrt{12}} - 2\sqrt{\sqrt{75}} - 3\sqrt{5\sqrt{48}}$$

Lời giải

$$\text{a) } A = \sqrt{3 + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}}$$

$$A = \sqrt{(3 + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}})(3 - \sqrt{5 + 2\sqrt{3}})}$$

$$= \sqrt{3^2 - (\sqrt{5 + 2\sqrt{3}})^2}$$

$$= \sqrt{9 - (5 + 2\sqrt{3})}$$

$$= \sqrt{9 - 5 - 2\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$$

$$= |\sqrt{3} - 1|$$

$$= \sqrt{3} - 1$$

$$\text{b) } B = \sqrt{4 + \sqrt{8}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt{4 + \sqrt{8}} \cdot \sqrt{(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}})(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}})}$$

$$= \sqrt{4 + \sqrt{4} \cdot \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2^2 - (\sqrt{2 + \sqrt{2}})^2}$$

$$= \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{4 - (2 + \sqrt{2})}$$

$$= \sqrt{2(2 + \sqrt{2})} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{2 \cdot (2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}$$

$$= \sqrt{2 \cdot (4 - 2)}$$

$$= \sqrt{2 \cdot 2}$$

$$= 2$$

$$c) C = (\sqrt{12} + 12\sqrt{15} - 4\sqrt{135})\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{12 \cdot 3} + 12\sqrt{15 \cdot 3} - 4\sqrt{135 \cdot 3}$$

$$= \sqrt{36} + 12\sqrt{9 \cdot 5} - 4\sqrt{9^2 \cdot 5}$$

$$= 6 + 36\sqrt{5} - 36\sqrt{5}$$

$$= 6$$

$$d) C = 2\sqrt{40\sqrt{12}} - 2\sqrt{\sqrt{75}} - 3\sqrt{5\sqrt{48}}$$

$$= 2\sqrt{40\sqrt{12}} - 2\sqrt{5\sqrt{3}} - 3\sqrt{20\sqrt{3}}$$

$$= 2\sqrt{80\sqrt{3}} - 2\sqrt{5\sqrt{3}} - 6\sqrt{5\sqrt{3}}$$

$$8\sqrt{5\sqrt{3}} - 2\sqrt{5\sqrt{3}} - 6\sqrt{5\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{5\sqrt{3}}(8 - 2 - 6)$$

$$= 0$$

Bài 8. Tính

$$a) A = (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$$

$$b) B = (3 - \sqrt{5})\sqrt{3 + \sqrt{5}} + (3 + \sqrt{5})\sqrt{3 - \sqrt{5}}$$

$$c) C = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

Lời giải

$$a) A = (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$$

$$= (\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 + \sqrt{15}} \cdot \sqrt{4 + \sqrt{15}} \cdot \sqrt{4 - \sqrt{15}}$$

$$= (\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 + \sqrt{15}} \cdot \sqrt{(4 + \sqrt{15})(4 - \sqrt{15})}$$

$$= \sqrt{\sqrt{10} - \sqrt{6}} \cdot \sqrt{(\sqrt{10} - \sqrt{6})(4 + \sqrt{15})}$$

$$= \sqrt{\sqrt{10} - \sqrt{6}} \cdot \sqrt{4\sqrt{10} + \sqrt{150} - 4\sqrt{6} - \sqrt{90}}$$

$$= \sqrt{\sqrt{10} - \sqrt{6}} \cdot \sqrt{\sqrt{10} + \sqrt{6}}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{10} - \sqrt{6})(\sqrt{10} + \sqrt{6})}$$

$$= \sqrt{4}$$

$$= 2$$

$$b) B = (3 - \sqrt{5})\sqrt{3 + \sqrt{5}} + (3 + \sqrt{5})\sqrt{3 - \sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{3 - \sqrt{5}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{5}} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{5}} + (3 + \sqrt{5})\sqrt{3 - \sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{5}} \left(\sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{3+\sqrt{5}} \right) \\
 &= 2(\sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{3+\sqrt{5}}) \\
 &= \sqrt{2}(\sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{3+\sqrt{5}} \cdot \sqrt{2}) \\
 &= \sqrt{2}(\sqrt{6-2\sqrt{5}} + \sqrt{6+2\sqrt{5}}) \\
 &= \sqrt{2}(\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}) \\
 &= \sqrt{2}(\sqrt{5}-1 + \sqrt{5}+1) \\
 &= 2\sqrt{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } C &= \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \\
 &= \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)} \\
 &= \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} \\
 &= \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)} \\
 &= \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} \\
 &= \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \\
 &= \sqrt{4-3} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Bài 9. Rút gọn các biểu thức sau

$$\text{a) } A = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{14}}{2\sqrt{3} + \sqrt{28}}$$

$$\text{b) } B = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + 4}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{a) } A &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{14}}{2\sqrt{3} + \sqrt{28}} \\
 &= \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{7}}{2\sqrt{3} + \sqrt{4} \cdot \sqrt{7}} \\
 &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{7})}{2(\sqrt{3} + \sqrt{7})} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

$$\text{b) } B = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + 4}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{6} + \sqrt{8}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}} \\
&= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4})}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}} \\
&= \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4})(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}} \\
&= \sqrt{2} + 1
\end{aligned}$$

Bài 10. Rút gọn biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \frac{3\sqrt{8} - 2\sqrt{12} + \sqrt{20}}{3\sqrt{18} - 2\sqrt{27} + \sqrt{45}}$$

$$\text{b) } B = \frac{2\sqrt{15} - 2\sqrt{10} + \sqrt{6} - 3}{2\sqrt{5} - 2\sqrt{10} - \sqrt{3} + \sqrt{6}}$$

Lời giải

$$\text{a) } A = \frac{3\sqrt{8} - 2\sqrt{12} + \sqrt{20}}{3\sqrt{18} - 2\sqrt{27} + \sqrt{45}}$$

$$= \frac{3 \cdot 2\sqrt{2} - 2 \cdot 2\sqrt{3} + 2\sqrt{5}}{3 \cdot 3\sqrt{2} - 2 \cdot 3\sqrt{3} + 3\sqrt{5}}$$

$$= \frac{2(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{5})}{3(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{5})}$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$\text{b) } B = \frac{2\sqrt{15} - 2\sqrt{10} + \sqrt{6} - 3}{2\sqrt{5} - 2\sqrt{10} - \sqrt{3} + \sqrt{6}}$$

$$= \frac{2\sqrt{5 \cdot 3} - 2\sqrt{5 \cdot 2} + \sqrt{3 \cdot 2} - 3}{2\sqrt{5} - 2\sqrt{5 \cdot 2} - \sqrt{3} + \sqrt{3 \cdot 2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - \sqrt{3}(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{2\sqrt{5}(1 - \sqrt{2}) - \sqrt{3}(1 - \sqrt{2})}$$

$$= \frac{(2\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(2\sqrt{5} - \sqrt{3})(1 - \sqrt{2})}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$$

DẠNG 3**CĂN BẬC HAI THỨC CỦA MỘT THƯƠNG**

Với $a \geq 0, b > 0$, ta có: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Bài 1. Tính

a) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$

b) $\frac{\sqrt{12,5}}{\sqrt{0,5}}$

c) $\sqrt{\frac{25}{64}}$

d) $\frac{\sqrt{230}}{\sqrt{2,3}}$

Lời giải

a) $\sqrt{1\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4}$

b) $\frac{\sqrt{12,5}}{\sqrt{0,5}} = \sqrt{\frac{12,5}{0,5}} = \sqrt{25} = 5$

c) $\sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{64}} = \frac{5}{8}$

d) $\frac{\sqrt{230}}{\sqrt{2,3}} = \sqrt{\frac{230}{2,3}} = \sqrt{100} = 10$

Bài 2. Tính

a) $\left(\sqrt{\frac{1}{7}} - \sqrt{\frac{16}{7}} + \sqrt{7}\right) : \sqrt{7}$

b) $\sqrt{36-12\sqrt{5}} : \sqrt{6}$

c) $\left(\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{4}{3}} + \sqrt{3}\right) : \sqrt{3}$

d) $\sqrt{3-\sqrt{5}} : \sqrt{2}$

Lời giải

a) $\left(\sqrt{\frac{1}{7}} - \sqrt{\frac{16}{7}} + \sqrt{7}\right) : \sqrt{7} = \left(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{7}} - \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{7}} + \sqrt{7}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{1}{7} - \frac{4}{7} + 1 = \frac{4}{7}$

b) $\sqrt{36-12\sqrt{5}} : \sqrt{6} = \sqrt{6(6-2\sqrt{5})} : \sqrt{6} = \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = \sqrt{5}-1$

c) $\left(\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{4}{3}} + \sqrt{3}\right) : \sqrt{3} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right) : \sqrt{3} = \frac{2}{3}$

d) $\sqrt{3-\sqrt{5}} : \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3-\sqrt{5}}}{2} = \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{2} = \frac{\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Bài 3. Tính

a) $A = (\sqrt{12} + \sqrt{75} + \sqrt{27}) : \sqrt{15}$

b) $B = (12\sqrt{50} - 8\sqrt{200} + 7\sqrt{450}) : \sqrt{10}$

Lời giải

a) $A = (\sqrt{12} + \sqrt{75} + \sqrt{27}) : \sqrt{15}$

$$= \sqrt{\frac{12}{15}} + \sqrt{\frac{75}{15}} + \sqrt{\frac{27}{15}}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{5}} + \sqrt{5} + \sqrt{\frac{9}{5}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} + \sqrt{5} + \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{5}} + \sqrt{5}$$

$$= 2\sqrt{5}$$

b) $B = (12\sqrt{50} - 8\sqrt{200} + 7\sqrt{450}) : \sqrt{10}$

$$= 12\sqrt{5} - 8\sqrt{20} + 7\sqrt{45}$$

$$= 12\sqrt{5} - 16\sqrt{5} + 21\sqrt{5}$$

$$= 17\sqrt{5}$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN**Bài 4.** Thực hiện phép tính

a) $A = \sqrt{1,6} \cdot \sqrt{250} + \sqrt{19,6} : \sqrt{4,9}$

b) $B = \sqrt{1\frac{3}{4} \cdot 2\frac{2}{7} \cdot 5\frac{4}{9}}$

Lời giải

a) $A = \sqrt{1,6} \cdot \sqrt{250} + \sqrt{19,6} : \sqrt{4,9}$

$$= \sqrt{1,6 \cdot 250} + \sqrt{\frac{19,6}{4,9}}$$

$$= \sqrt{16 \cdot 25} + \sqrt{\frac{196}{49}}$$

$$= \sqrt{16} \cdot \sqrt{25} + \frac{\sqrt{196}}{\sqrt{49}}$$

$$= 4 \cdot 5 + \frac{14}{7}$$

$$= 22$$

b) $B = \sqrt{1\frac{3}{4} \cdot 2\frac{2}{7} \cdot 5\frac{4}{9}}$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{1 \frac{3}{4} \cdot 2 \frac{2}{7} \cdot 5 \frac{4}{9}} \\
&= \sqrt{\frac{7}{4} \cdot \frac{16}{7} \cdot \frac{49}{9}} \\
&= \sqrt{4 \cdot \frac{49}{9}} \\
&= \sqrt{4} \cdot \sqrt{\frac{49}{9}} \\
&= 2 \cdot \frac{7}{3} \\
&= \frac{14}{3}
\end{aligned}$$

Bài 5. Thực hiện phép tính

$$\text{a) } A = (20\sqrt{300} - 15\sqrt{675} + 5\sqrt{75}) : \sqrt{15} \qquad \text{b) } B = (\sqrt{325} - \sqrt{117} + 2\sqrt{208}) : \sqrt{13}$$

Lời giải

$$\text{a) } A = (20\sqrt{300} - 15\sqrt{675} + 5\sqrt{75}) : \sqrt{15}$$

$$\begin{aligned}
&= 20\sqrt{\frac{300}{15}} - 15\sqrt{\frac{675}{15}} + 5\sqrt{\frac{75}{15}} \\
&= 20\sqrt{20} - 15\sqrt{45} + 5\sqrt{5} \\
&= 20\sqrt{4 \cdot 5} - 15\sqrt{9 \cdot 5} + 5\sqrt{5} \\
&= 40\sqrt{5} - 45\sqrt{5} + 5\sqrt{5} \\
&= (40 - 45 + 5)\sqrt{5} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\text{b) } B = (\sqrt{325} - \sqrt{117} + 2\sqrt{208}) : \sqrt{13}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{325}{13}} - \sqrt{\frac{117}{13}} + 2\sqrt{\frac{208}{13}} \\
&= \sqrt{25} - \sqrt{9} + 2\sqrt{16} \\
&= 5 - 3 + 2 \cdot 4 \\
&= 10
\end{aligned}$$

Bài 6. Tính

$$\text{a) } A = (\sqrt{27} - \sqrt{12} + 2\sqrt{6}) : 3\sqrt{3} \qquad \text{b) } B = (\sqrt{12} - 2\sqrt{18}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{c) } C = \left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} - \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \right) : \sqrt{72} \qquad \text{d) } D = \left(\frac{1}{\sqrt{3}-2} - \frac{1}{\sqrt{3}+2} \right) \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$$

Lời giải

a) **Cách 1:**

$$A = (\sqrt{27} - \sqrt{12} + 2\sqrt{6}) : 3\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{27}}{3\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{12}}{3\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{27}{3}} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{12}{3}} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{6}{3}} \\
&= \frac{1}{3} \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Cách 2:

$$\begin{aligned}
A &= (\sqrt{27} - \sqrt{12} + 2\sqrt{6}) : 3\sqrt{3} \\
&= \frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \\
&= \frac{\sqrt{3}(1 + 2\sqrt{2})}{3\sqrt{3}} \\
&= \frac{1 + 2\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } B &= (\sqrt{12} - 2\sqrt{18}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= (\sqrt{12} - 2\sqrt{18}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} \\
&= \sqrt{\frac{12}{2}} - 2\sqrt{\frac{18}{2}} \\
&= \sqrt{6} - 2\sqrt{9} \\
&= \sqrt{6} - 6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } C &= \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} - \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \right) : \sqrt{72} \\
&= \frac{(1 - \sqrt{2})^2 - (1 + \sqrt{2})^2}{(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})} : \sqrt{72} \\
&= \frac{-2\sqrt{2} \cdot 2}{1 - 2} : \sqrt{72} \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{72}} \\
&= 4 \cdot \sqrt{\frac{1}{36}} \\
&= \frac{4}{6} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } D &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}-2} - \frac{1}{\sqrt{3}+2} \right) \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \\
 &= \frac{4}{3-4} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \\
 &= \frac{4\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1} \\
 &= 4\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

Bài 7. Tính

$$\text{a) } \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$\text{b) } \sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{2}$$

$$\text{c) } \sqrt{6,5+\sqrt{12}} + \sqrt{6,5-\sqrt{12}} + 2\sqrt{6}$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{a) } &\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}} \\
 &= \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}} \\
 &= \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{|\sqrt{3}+1|}{\sqrt{2}} - \frac{|\sqrt{3}-1|}{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{2}} \\
 &= \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } &\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{2} \\
 &= \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{2} \\
 &= \sqrt{\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{2}} - \sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{2}} - \sqrt{2} \\
 &= \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\text{c) } \sqrt{6,5+\sqrt{12}} + \sqrt{6,5-\sqrt{12}} + 2\sqrt{6}$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\frac{13}{2} + \sqrt{12}} + \sqrt{\frac{13}{2} - \sqrt{12}} + 2\sqrt{6} \\ &= \sqrt{\frac{13 + 2\sqrt{12}}{2}} + \sqrt{\frac{13 - 2\sqrt{12}}{2}} + 2\sqrt{6} \\ &= \sqrt{\frac{(\sqrt{12} + 1)^2}{2}} + \sqrt{\frac{(\sqrt{12} - 1)^2}{2}} + 2\sqrt{6} \\ &= \frac{\sqrt{12} + 1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{12} - 1}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{6} \\ &= \frac{\sqrt{12} + 1 + \sqrt{12} - 1}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{6} \\ &= \frac{2\sqrt{12}}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{6} \\ &= \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{6} \\ &= 2\sqrt{6} + 2\sqrt{6} \\ &= 4\sqrt{6} \end{aligned}$$

DẠNG 4**ĐƯA THỪA SỐ RA NGOÀI HOẶC VÀO TRONG DẤU CĂN BẬC HAI**

- Nếu $a \geq 0$ và $b \geq 0$ thì $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$
- Nếu $a < 0$ và $b \geq 0$ thì $\sqrt{a^2b} = -a\sqrt{b}$
- Với $a \geq 0$ và $b \geq 0$, ta có: $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$
- Với $a < 0$ và $b \geq 0$, ta có: $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2b}$

Bài 1. Viết gọn các biểu thức sau

a) $\sqrt{25.90}$

b) $\sqrt{96.125}$

c) $\sqrt{75.54}$

d) $\sqrt{245.35}$

Lời giải

a) $\sqrt{25.90} = \sqrt{25.9.10} = \sqrt{(5.3)^2 \cdot 10} = 15\sqrt{10}$

b) $\sqrt{96.125} = \sqrt{16.6.5.25} = \sqrt{16.25.30} = \sqrt{(4.5)^2 \cdot 30} = 20\sqrt{30}$

c) $\sqrt{75.54} = \sqrt{25.3.9.3.2} = \sqrt{(5.9)^2 \cdot 2} = 45\sqrt{2}$

d) $\sqrt{245.35} = \sqrt{49.5.5.7} = \sqrt{(7.5)^2 \cdot 7} = 35\sqrt{7}$

Bài 2. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a) $\sqrt{45} + \sqrt{20} - \sqrt{245}$

b) $4\sqrt{3} + \sqrt{27} - \sqrt{45} + \sqrt{5}$

c) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$

d) $\sqrt{7-2\sqrt{10}} + \sqrt{2}$

Lời giải

a) $\sqrt{45} + \sqrt{20} - \sqrt{245} = \sqrt{3^2 \cdot 5} + \sqrt{2^2 \cdot 5} - \sqrt{7^2 \cdot 5} = 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 7\sqrt{5} = -2\sqrt{5}$

b) $4\sqrt{3} + \sqrt{27} - \sqrt{45} + \sqrt{5} = 4\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{5} + \sqrt{5} = 7\sqrt{3} - 2\sqrt{5}$

c) $\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5} + 1} = \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} = |\sqrt{5}+1| = \sqrt{5}+1$

d) $\sqrt{7-2\sqrt{10}} + \sqrt{2} = \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2} + \sqrt{2} = |\sqrt{5}-\sqrt{2}| + \sqrt{2} = \sqrt{5}-\sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{5}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Tính giá trị các biểu thức sau

a) $A = \sqrt{125} + \sqrt{45} - \sqrt{405}$

b) $B = \sqrt{50} - \sqrt{128} + \sqrt{162} - \sqrt{18}$

c) $C = \sqrt{63} - \sqrt{252} - \sqrt{343} + \sqrt{175}$

Lời giải

$$a) A = \sqrt{125} + \sqrt{45} - \sqrt{405} = \sqrt{25 \cdot 5} + \sqrt{9 \cdot 5} - \sqrt{81 \cdot 5} = 5\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 9\sqrt{5} = -\sqrt{5}$$

$$b) B = \sqrt{50} - \sqrt{128} + \sqrt{162} - \sqrt{18} = \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{64 \cdot 2} + \sqrt{81 \cdot 2} - \sqrt{9 \cdot 2} = 5\sqrt{2} + 9\sqrt{2} - 8\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$c) C = \sqrt{63} - \sqrt{252} - \sqrt{343} + \sqrt{175} = \sqrt{7 \cdot 9} - \sqrt{7 \cdot 36} - \sqrt{7 \cdot 49} + \sqrt{7 \cdot 25} = 3\sqrt{7} - 6\sqrt{7} - 7\sqrt{7} + 5\sqrt{7} = -5\sqrt{7}.$$

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau

$$a) A = \sqrt{200} - \sqrt{32} + \sqrt{72}$$

$$b) B = 4\sqrt{20} - 3\sqrt{125} + 5\sqrt{45} - 15\sqrt{\frac{1}{5}}$$

Lời giải

$$a) A = \sqrt{200} - \sqrt{32} + \sqrt{72}$$

$$= 10\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 6\sqrt{2}$$

$$= 12\sqrt{2}$$

$$b) B = 4\sqrt{20} - 3\sqrt{125} + 5\sqrt{45} - 15\sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$= 4 \cdot 2\sqrt{5} - 3 \cdot 5\sqrt{5} + 5 \cdot 3\sqrt{5} - 3\sqrt{\frac{25}{5}}$$

$$= 8\sqrt{5} - 15\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 15\sqrt{5}$$

$$= 5\sqrt{5}$$

Bài 5. Rút gọn các biểu thức sau

$$a) A = \sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$$

$$b) B = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 6\sqrt{20}}}}$$

$$c) C = \sqrt{6 + 2\sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}$$

$$d) D = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + \sqrt{48 - 10\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}}}$$

Lời giải

$$a) A = \sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$$

$$= \sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{(\sqrt{20} - 3)^2}}$$

$$= \sqrt{5} - \sqrt{3 - (\sqrt{20} - 3)}$$

$$= \sqrt{5} - \sqrt{6 - \sqrt{20}}$$

$$= \sqrt{5} - \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}$$

$$= \sqrt{5} - (\sqrt{5} - 1)$$

$$= 1$$

$$b) B = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 6\sqrt{20}}}}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{(2\sqrt{5} - 3)^2}} \\
&= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}} \\
&= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{5} + 1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } C &= \sqrt{6 + 2\sqrt{5} - \sqrt{13 + \sqrt{48}}} \\
&= \sqrt{6 + 2\sqrt{5} - \sqrt{(2\sqrt{3} + 1)^2}} \\
&= \sqrt{6 + 2\sqrt{4} - 2\sqrt{3}} \\
&= \sqrt{6 + 2\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}} \\
&= \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \\
&= \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} \\
&= \sqrt{3} + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{d) } D &= \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + \sqrt{48}} - 10\sqrt{7} + 4\sqrt{3}} \\
&= \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48}} - 10(2 + \sqrt{3})} \\
&= \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5(5 - \sqrt{3})}} \\
&= \sqrt{4 + \sqrt{25}} \\
&= \sqrt{9} \\
&= 3
\end{aligned}$$

DẠNG 5
SO SÁNH CÁC CĂN BẬC HAI

Bài 1. So sánh các cặp số dưới đây

a) $2\sqrt{29}$ và $4\sqrt{3}$

b) $\frac{5}{4}\sqrt{2}$ và $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$

c) $3\sqrt{3}$ và $\sqrt{12}$

d) $\sqrt{7}$ và $3\sqrt{5}$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \begin{cases} 2\sqrt{29} = \sqrt{2^2 \cdot 29} = \sqrt{116} \\ 3\sqrt{13} = \sqrt{117} \end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{29} < 3\sqrt{13}$$

$$\text{b) Ta có: } \begin{cases} \frac{5}{4}\sqrt{2} = \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot 2} = \sqrt{\frac{25}{8}} \\ \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{27}{8}} \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{4}\sqrt{2} < \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

c) Ta có: $3\sqrt{3} = \sqrt{3^2 \cdot 3} = \sqrt{27} > \sqrt{12}$

d) Ta có: $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{45} > \sqrt{7}$

Bài 2. Sắp xếp các số sau theo thứ tự tăng dần: $3\sqrt{5}; 2\sqrt{6}; \sqrt{29}; 4\sqrt{2}$

Lời giải

Ta có: $3\sqrt{5} = \sqrt{45}; 2\sqrt{6} = \sqrt{24}; 4\sqrt{2} = \sqrt{32}$

Vậy: $2\sqrt{6} < \sqrt{29} < 4\sqrt{2} < 3\sqrt{5}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. So sánh các cặp số dưới đây

a) $5\sqrt{2}$ và $3\sqrt{13}$

b) $\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{6}}$ và $6\sqrt{\frac{1}{37}}$

a) $\frac{1}{3}\sqrt{51}$ và $\frac{1}{5}\sqrt{150}$

b) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ và $6\sqrt{\frac{1}{2}}$

Lời giải

a) Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} 5\sqrt{2} = \sqrt{50} \\ 4\sqrt{3} = \sqrt{48} \end{array} \right\} \rightarrow 4\sqrt{3} < 5\sqrt{2}$$

b) Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{25}{24}} \\ 6\sqrt{\frac{1}{37}} = \sqrt{\frac{36}{37}} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{6}} > 6\sqrt{\frac{1}{37}} \left(\frac{25}{4} > 1 > \frac{36}{37} \right)$$

c) Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{3}\sqrt{51} = \sqrt{\frac{51}{9}} = \sqrt{\frac{17 \cdot 3}{9}} = \sqrt{\frac{17}{3}} \\ \frac{1}{5}\sqrt{150} = \sqrt{\frac{150}{25}} = \sqrt{6} \end{array} \right\}, \text{ mà } \sqrt{\frac{17}{3}} < \sqrt{6} \Rightarrow \frac{1}{3}\sqrt{51} < \frac{1}{5}\sqrt{150}$$

d) Ta có: $\frac{1}{2}\sqrt{6} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 6} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}; 6\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{6^2 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{36}{2}} = \sqrt{18}$

mà $\sqrt{18} > \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow 6\sqrt{\frac{1}{2}} > \frac{1}{2}\sqrt{6}$.

Bài 4. Tìm số lớn hơn trong các cặp số dưới đây

a) $2\sqrt{6}$ và $3\sqrt{3}$

b) $\frac{2}{5}\sqrt{6}$ và $\frac{7}{4}\sqrt{\frac{1}{3}}$

Lời giải

a) Ta có: $\left\{ \begin{array}{l} 2\sqrt{6} = \sqrt{24} \\ 3\sqrt{3} = \sqrt{27} \end{array} \right. \Rightarrow 2\sqrt{6} < 3\sqrt{3}$

b) Ta có:

$$\frac{2}{5}\sqrt{6} = \sqrt{\frac{4}{25} \cdot 6} = \sqrt{\frac{24}{25}};$$

$$\frac{7}{4}\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{49}{16} \cdot \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{49}{48}}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5}\sqrt{6} < \frac{7}{4}\sqrt{\frac{1}{3}} \left(\frac{24}{25} < 1 < \frac{49}{48} \right)$$

Bài 5. Tìm số bé hơn trong các cặp số dưới đây

a) $2\sqrt{23}$ và $3\sqrt{10}$

b) $2\sqrt{\frac{1}{5}}$ và $\frac{1}{5}\sqrt{21}$

Lời giải

a) Ta có: $\left\{ \begin{array}{l} 2\sqrt{23} = \sqrt{4 \cdot 23} = \sqrt{92} \\ 3\sqrt{10} = \sqrt{3^2 \cdot 10} = \sqrt{90} \end{array} \right. \Rightarrow 2\sqrt{23} > 3\sqrt{10}$

b) Ta có:

$$2\sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}};$$

$$\frac{1}{5}\sqrt{21} = \frac{21}{25};$$

$$\frac{4}{5} > \frac{21}{25} \Rightarrow 2\sqrt{\frac{1}{5}} > \frac{1}{5}\sqrt{21}$$

Bài 6. Sắp xếp các số sau theo thứ tự giảm dần: $7\sqrt{2}; 2\sqrt{8}; \sqrt{28}; 5\sqrt{2}$

Lời giải

Ta có: $2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}; \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

Vậy: $7\sqrt{2} > 5\sqrt{2} > 2\sqrt{8} > \sqrt{28}$

Bài 7. Sắp xếp các số

a) $2\sqrt{5}; 3\sqrt{2}; 5; \sqrt{23}$ theo thứ tự tăng dần

b) $5\sqrt{2}; 2\sqrt{13}; 4\sqrt{3}; \sqrt{47}$ theo thứ tự giảm dần

Lời giải

a) Ta có: $3\sqrt{2} < 2\sqrt{5} < \sqrt{23} < 5$

b) Ta có: $2\sqrt{13} > 5\sqrt{2} > 4\sqrt{3} > \sqrt{47}$

DẠNG 6

ỨNG DỤNG

Bài 1. Khi một quả bóng rổ được thả xuống, nó sẽ nảy trở lại, nhưng do tiêu hao năng lượng nên nó không đạt được chiều cao như lúc bắt đầu. Hệ số phục hồi của quả bóng rổ được tính theo công thức $C_R = \sqrt{\frac{h}{H}}$, trong đó H là độ cao mà quả bóng được thả rơi và h là độ cao mà quả bóng bật lại. Một quả bóng rổ rơi từ độ cao 3,24 m và bật lại độ cao 2,25 m. Làm thế nào để viết hệ số phục hồi của quả bóng đó dưới dạng phân số?



Lời giải

Thay $H = 3,24$ m và $h = 2,25$ m, ta được:

$$C_R = \sqrt{\frac{2,25}{3,24}} = \sqrt{\frac{225}{324}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{324}} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$$

Vậy $C_R = \frac{5}{6}$

Bài 2. Trong Vật lí, ta có định luật Joule – Lenz để tính nhiệt lượng toả ra ở dây dẫn khi có dòng điện chạy qua: $Q = I^2Rt$.

Trong đó: Q là nhiệt lượng toả ra trên dây dẫn tính theo Jun (J);

I là cường độ dòng điện chạy trong dây dẫn tính theo Ampe (A);

R là điện trở dây dẫn tính theo Ohm (Ω);

t là thời gian dòng điện chạy qua dây dẫn tính theo giây.

Áp dụng công thức trên để giải bài toán sau: Một bếp điện khi hoạt động bình thường có điện trở $R = 80 \Omega$. Tính cường độ dòng điện chạy trong dây dẫn, biết nhiệt lượng mà dây dẫn toả ra trong 1 giây là 500 J.

Lời giải

Theo bài, ta có $R = 80 (\Omega)$, $t = 1 (s)$ và $Q = 500 (J)$.

Áp dụng công thức $Q = I^2RT$, ta có: $500 = I^2 \cdot 80 \cdot 1$

Suy ra $80I^2 = 500$, nên $I^2 = \frac{500}{80} = \frac{25}{4}$.

$$\text{Do đó } I = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2} = 2,5(A) \text{ (do } I > 0).$$

Vậy cường độ dòng điện chạy trong dây dẫn là 2,5 Ampe.

Bài 3. Tốc độ gần đúng của một ô tô ngay trước khi đạp phanh được tính theo công thức $v = \sqrt{2\lambda gd}$, trong đó v (m/s) là tốc độ của ô tô, d (m) là chiều dài của vết trượt tính từ thời điểm đạp phanh cho đến khi ô tô dừng lại trên đường, λ là hệ số cản lăn của mặt đường, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Nếu một chiếc ô tô để lại vết trượt dài khoảng 20 m trên đường nhựa thì tốc độ của ô tô trước khi đạp phanh là khoảng bao nhiêu mét trên giây (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)? Biết rằng hệ số cản lăn của đường nhựa là $\lambda = 0,7$.



Vết trượt của ô tô

Lời giải

Theo bài, ta có $\lambda = 0,7$; $d = 20$ (m) ; $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Do đó tốc độ của ô tô đó trước khi đạp phanh là: $v = \sqrt{2\lambda gd} = \sqrt{2 \cdot 0,7 \cdot 9,8 \cdot 20} = \sqrt{274,4} \approx 17$ (m/s)

Vậy tốc độ của ô tô trước khi đạp phanh là khoảng 17 m/s.

Bài 4. Vận tốc m/s của một vật đang bay được cho bởi công thức $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$, trong đó E là động năng của vật (tính bằng Joule, kí hiệu là J) và m (kg) là khối lượng của vật. Tính vận tốc bay của một vật khi biết vật đó có khối lượng 2,5 kg và động năng 281,25 J.

Lời giải

Vận tốc bay của một vật có khối lượng 2,5 kg và động năng 281,25 J là:

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 281,25}{2,5}} = \sqrt{\frac{562,5}{2,5}} = \sqrt{\frac{5625}{25}} = \frac{\sqrt{5625}}{\sqrt{25}} = \frac{75}{5} = 15 \text{ (m/s)}$$

Vậy vận tốc bay của vật đó là 15 m/s.

Bài 5. Công suất P (W), hiệu điện thế U (V), điện trở R (Ω) trong đoạn mạch một chiều liên hệ với nhau theo công thức $U = \sqrt{PR}$. Nếu công suất tăng gấp 8 lần, điện trở giảm 2 lần thì tỉ số giữa hiệu điện thế lúc đó và hiệu điện thế ban đầu bằng bao nhiêu?

Lời giải

Gọi công suất ban đầu là P_1 (W), điện trở ban đầu là R_1 (Ω) và hiệu điện thế ban đầu là U_1 (V). Khi đó $U_1 = \sqrt{P_1 R_1}$.

Nếu công suất tăng gấp 8 lần thì công suất lúc này là $P_2 = 8P_1$.

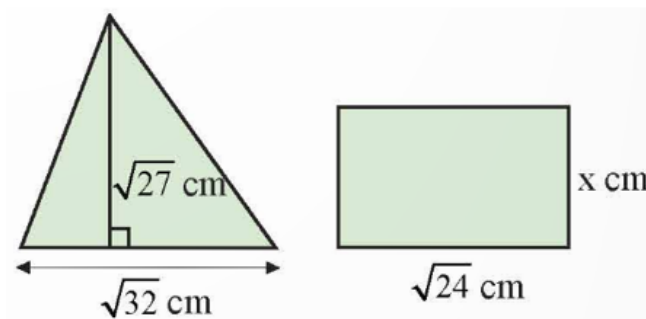
Nếu điện trở giảm 2 lần thì điện trở lúc này là $R_2 = \frac{R_1}{2}$.

Khi đó, $U_2 = \sqrt{P_2 R_2} = \sqrt{8P_1 \cdot \frac{R_1}{2}} = \sqrt{4P_1 R_1}$.

Do đó $\frac{U_2}{U_1} = \frac{\sqrt{4P_1 R_1}}{\sqrt{P_1 R_1}} = \frac{\sqrt{2^2 \cdot P_1 R_1}}{\sqrt{P_1 R_1}} = \frac{2\sqrt{P_1 R_1}}{\sqrt{P_1 R_1}} = 2$.

Vậy tỉ số giữa hiệu điện thế lúc sau và hiệu điện thế ban đầu bằng 2.

Bài 6. Biết rằng hình tam giác và hình chữ nhật ở hình vẽ có diện tích bằng nhau. Tính chiều rộng x của hình chữ nhật.

**Lời giải**

Diện tích hình tam giác là:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{32} \cdot \sqrt{27} &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{32 \cdot 27} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{16 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 3} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{6} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \sqrt{6} = 6\sqrt{6} \text{ (cm}^2\text{)}. \end{aligned}$$

Vi hình tam giác và hình chữ nhật ở Hình 3 có diện tích bằng nhau nên diện tích hình chữ nhật bằng $6\sqrt{6} \text{ cm}^2$.

$$\text{Chiều rộng } x \text{ của hình chữ nhật là: } 6\sqrt{6} : \sqrt{24} = \frac{6\sqrt{6}}{\sqrt{6 \cdot 4}} = \frac{6\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} = 3 \text{ (cm)}.$$

Vậy chiều rộng x của hình chữ nhật là 3 cm.

Bài 7. Cho hình chữ nhật có chiều rộng a (cm), chiều dài b (cm) và diện tích S (cm^2).

a) Tìm S , biết $a = \sqrt{8}, b = \sqrt{32}$.

b) Tìm b , biết $S = 3\sqrt{2}, a = 2\sqrt{3}$

Lời giải

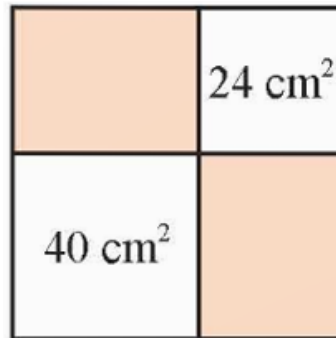
a) Diện tích S của hình chữ nhật là: $S = a.b = \sqrt{8}.\sqrt{32} = \sqrt{256} = 16(\text{cm}^2)$

Vậy $S = 16(\text{cm}^2)$

b) Chiều rộng b của hình chữ nhật là: $b = \frac{S}{a} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3^2 \cdot 2}}{\sqrt{2^2 \cdot 3}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{18}{12}} = \sqrt{\frac{3}{2}}(\text{cm})$

Vậy $b = \sqrt{\frac{3}{2}}(\text{cm})$.

Bài 8. Từ một tấm thép hình vuông, người thợ cắt ra hai mảnh hình chữ nhật có diện tích lần lượt là 24 cm^2 và 40 cm^2 như hình vẽ. Tính diện tích phần còn lại của tấm thép



Lời giải

Cạnh của hình vuông có diện tích 24 cm^2 là: $\sqrt{24} = \sqrt{4.6} = \sqrt{4}.\sqrt{6} = 2\sqrt{6}(\text{cm}^2)$

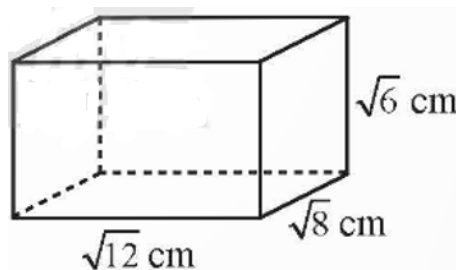
Cạnh của hình vuông có diện tích 40 cm^2 là: $\sqrt{40} = \sqrt{4.10} = \sqrt{4}.\sqrt{10} = 2\sqrt{10}(\text{cm}^2)$.

Hai hình chữ nhật còn lại có chiều dài bằng nhau (đều bằng cạnh của hình vuông có diện tích 40 cm^2) và có chiều rộng bằng nhau (đều bằng cạnh của hình vuông có diện tích 24 cm^2).

Diện tích phần còn lại của tấm thép (bằng tổng diện tích hai hình chữ nhật trong hình vẽ) là: $2.2\sqrt{6}.2\sqrt{10} = 8\sqrt{6.10} = 8\sqrt{4.15} = 8\sqrt{4}.\sqrt{15} = 16\sqrt{15}(\text{cm}^2)$.

Vậy diện tích phần còn lại của tấm thép là $16\sqrt{15}(\text{cm}^2)$.

Bài 9. Cho hình hộp chữ nhật có chiều dài $\sqrt{12}$ cm, chiều rộng $\sqrt{8}$ cm, chiều cao $\sqrt{6}$ cm, như hình vẽ.



a) Tính thể tích của hình hộp chữ nhật đó.

b) Tính diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật đó.

Lời giải

a) Thể tích của hình hộp chữ nhật đó là: $\sqrt{12} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{12 \cdot 8 \cdot 6} = \sqrt{576} = 24 \text{ (cm}^3\text{)}$

Vậy thể tích của hình hộp chữ nhật là 24 cm^3 .

b) Diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật đó là:

$$2(\sqrt{12} + \sqrt{8}) \cdot \sqrt{6} = 2(\sqrt{72} + \sqrt{48}) = 2(6\sqrt{2} + 4\sqrt{3}) = 12\sqrt{2} + 8\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vậy diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật là $12\sqrt{2} + 8\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$.

BÀI 3**CĂN THỨC BẬC HAI VÀ CĂN THỨC BẬC BA CỦA BIỂU THỨC ĐẠI SỐ****1. Căn thức bậc hai**

Với A là một biểu thức đại số, người ta gọi \sqrt{A} là căn thức bậc hai của A , còn A được gọi là biểu thức lấy căn bậc hai hay biểu thức dưới dấu căn.

Điều kiện xác định cho căn thức bậc hai \sqrt{A} là $A \geq 0$.

Chú ý: Các số, biến số được nối nhau bởi dấu các phép tính cộng, trừ, nhân, chia, nâng lũy thừa, khai căn bậc hai làm thành một biểu thức đại số.

2. Căn thức bậc ba

Với A là một biểu thức đại số, người ta gọi $\sqrt[3]{A}$ là căn thức bậc ba của A , còn A được gọi là biểu thức lấy căn bậc ba hay biểu thức dưới dấu căn.

Điều kiện xác định cho căn thức bậc ba $\sqrt[3]{A}$ chính là điều kiện xác định biểu thức A .

Chú ý: Các số, biến số được nối nhau bởi dấu các phép tính cộng, trừ, nhân, chia, nâng lũy thừa, khai căn bậc hai hoặc bậc ba làm thành một biểu thức đại số.

CHỦ ĐỀ 1
CĂN THỨC BẬC HAI**DẠNG 1**
TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC TẠI GIÁ TRỊ CHO TRƯỚC

Bài 1. Tính giá trị của mỗi căn thức bậc hai sau :

a) $\sqrt{2024-x}$ tại $x = 2023$; $x = 2015$; $x = 1943$.

b) $\sqrt{x^2+5}$ tại $x = -2$; $x = 2$; $x = \sqrt{11}$.

c) $\sqrt{x^2-x+4}$ tại $x = -3$; $x = 0$; $x = 4$.

Bài 2. Tính giá trị của mỗi căn thức bậc hai sau :

a) $\sqrt{2x+1}$ tại $x = 0$; $x = 4$; $x = 12$.

b) $\sqrt{13-x^2}$ tại $x = -3$; $x = -2$; $x = 0$.

c) $\sqrt{2x^2+x+6}$ tại $x = -3$; $x = 1$; $x = 2$.

DẠNG 2**TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ CĂN THỨC BẬC HAI CÓ NGHĨA**

- \sqrt{A} có nghĩa $\Leftrightarrow A \geq 0$
- $\frac{1}{\sqrt{A}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow A > 0$
- $A^2 \geq 0 \quad \forall A \in \mathbb{R}$
- $\sqrt{A^2}$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R}$
- $\frac{1}{\sqrt{A^2}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow A \neq 0$
- $A^2 > 0 \quad \forall A \neq 0$

Bài 1. Tìm x để các căn thức sau có nghĩa

a) $\sqrt{-2024x}$

b) $\sqrt{3x-15}$

c) $\sqrt{-2x-5}$

Bài 2. Với giá trị nào của x thì mỗi biểu thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{\frac{2025}{2x+3}}$

b) $\sqrt{\frac{-1}{3x-1}}$

c) $\sqrt{\frac{2-7x}{2024}}$

Bài 3. Với giá trị nào của x thì mỗi biểu thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{\frac{2025}{x^2}}$

b) $\frac{x}{x-2} + \sqrt{x-2}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{-2021x}$

b) $\sqrt{3-6x}$

c) $\frac{2021}{3-\sqrt{x}}$

d) $\frac{1}{\sqrt{4x-1}}$

Bài 5. Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{\frac{1}{2}x^2+3}$

b) $\frac{3}{\sqrt{-x^2-2021}}$

Bài 6. Với mỗi giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa

a) $\sqrt{\frac{2}{3x-5}}$

b) $\sqrt{-3x}$

c) $\sqrt{\frac{1}{3-2x}}$

d) $\sqrt{x^2+2}$

e) $\sqrt{\frac{3}{x^2+1}}$

f) $\sqrt{2x-1}$

g) $\sqrt{-x^2+2x-1}$

h) $\sqrt{-|x+1|}$

i) $\sqrt{-x^2-3}$

Bài 7. Với giá trị nào của x thì mỗi biểu thức sau có nghĩa:

a) $\frac{x}{x+2} + \sqrt{x-2}$

b) $\sqrt{x+\frac{3}{x}} + \sqrt{-3x}$

CHỦ ĐỀ 2
CĂN THỨC BẬC BA**DẠNG 1**
TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC TẠI GIÁ TRỊ CHO TRƯỚC

Bài 1. Tính giá trị của mỗi căn thức bậc hai sau :

a) $\sqrt[3]{2025-x}$ tại $x = 2017$; $x = 1998$; $x = 1961$.

b) $\sqrt[3]{150-x^2}$ tại $x = -5$; $x = 5$; $x = \sqrt{86}$.

Bài 2. Tính giá trị của mỗi căn thức bậc hai sau :

a) $\sqrt[3]{4x+7}$ tại $x = -2$; $x = 5$; $x = \frac{203}{4}$.

b) $\sqrt[3]{x^2+9}$ tại $x = -\sqrt{18}$; $x = \sqrt{7}$; $x = 5$.

DẠNG 2**TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ CĂN THỨC BẬC BA CÓ NGHĨA****Bài 1.** Tìm x để các căn thức sau có nghĩa

a) $\sqrt[3]{x-2024}$

b) $\sqrt[3]{\frac{2025-2024x}{2023}}$

c) $\sqrt[3]{\frac{-2}{x-1}}$

Bài 2. Tìm x để các căn thức sau có nghĩa

a) $\sqrt[3]{\frac{1}{x^2 + \frac{1}{2}}}$

b) $\sqrt[3]{\frac{-5}{x^2 - 4x + 4}}$

c) $\sqrt[3]{\frac{-5}{x^2 + 2x + 3}}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN**Bài 3.** Tìm x để các căn thức sau có nghĩa

a) $\sqrt[3]{1 - \frac{1}{2}x}$

b) $\sqrt[3]{\frac{2x-3}{5}}$

c) $\sqrt[3]{\frac{-2024}{4x-3}}$

d) $\sqrt[3]{\frac{-1}{2x^2 + 1}}$

e) $\sqrt[3]{\frac{1}{4x^2 + 12x + 9}}$

f) $\sqrt[3]{\frac{3}{-x^2 + x - 4}}$

CHỦ ĐỀ 3

ỨNG DỤNG

Bài 1. Để lái xe an toàn khi đi qua đoạn đường có dạng cung tròn, người lái cần biết tốc độ tối đa cho phép là bao nhiêu. Vì thế, ở những đoạn đường đó thường có bảng chỉ dẫn cho tốc độ tối đa cho phép của ô tô. Tốc độ tối đa cho phép v (m/s) được tính bởi công thức $v = \sqrt{rg\mu}$, trong đó r (m) là bán kính của cung đường, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, μ là hệ số ma sát trượt của đường.

a) Hãy viết biểu thức tính v theo r khi biết $\mu = 0,12$.

b) Trong toán học, biểu thức đó được gọi là gì?

Bài 2. Hệ quả của hiện tượng nóng lên toàn cầu là băng của một số sông băng đang tan chảy. Mười hai năm sau khi băng biến mất, những loài thực vật nhỏ bé, được gọi là địa y, bắt đầu mọc trên đá. Mỗi nhóm địa y phát triển ở dạng (gần như) một hình tròn. Đường kính d (mm) của hình tròn này có thể được tính gần đúng bằng công thức: $d = 7\sqrt{t-12}$ với t là số năm tính từ khi băng biến mất ($t \geq 12$). Tính đường kính của hình tròn do địa y tạo nên sau khi băng biến mất 13 năm; 16 năm.

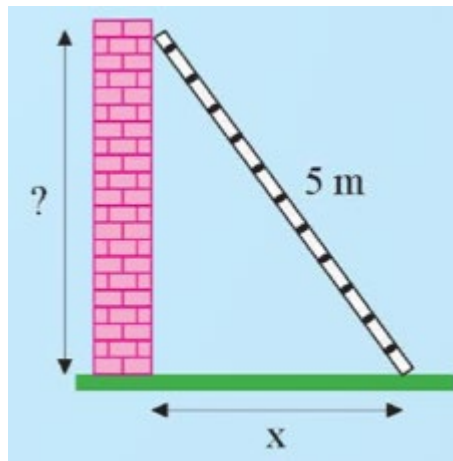
Bài 3. Vận tốc m/s của một vật đang bay được cho bởi công thức $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$, trong đó E là động năng của vật (tính bằng Joule, kí hiệu là J) và m (kg) là khối lượng của vật. Tính vận tốc bay của một vật khi biết vật đó có khối lượng 2,5 kg và động năng 281,25 J.

Bài 4. Cửa hàng điện máy xanh trưng bày một chiếc ti vi màn hình phẳng 55 in, tức là độ dài đường chéo của màn hình ti vi bằng 55 in (1 in = 2,54 cm). Gọi x (in) là chiều rộng của màn hình ti vi (*Hình vẽ*)



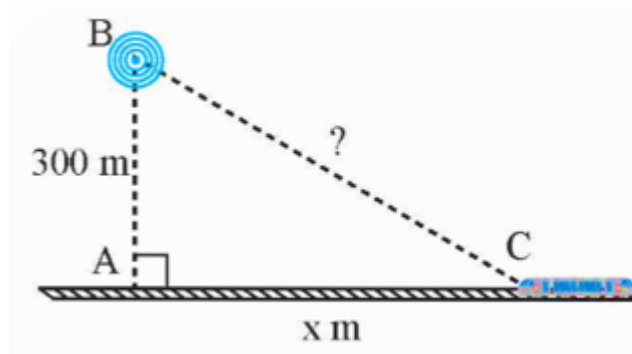
Viết công thức tính chiều dài của màn hình ti vi theo x .

Bài 5. Một chiếc thang dài 5 m tựa vào bức tường như hình vẽ.



- Nếu chân thang cách chân tường x (m) thì đỉnh thang ở độ cao bao nhiêu so với chân tường?
- Tính độ cao trên khi x nhận giá trị lần lượt là 1; 2; 3; 4.

Bài 6. Một trạm phát sóng được đặt ở vị trí B cách đường tàu một khoảng $AB = 300$ m. Đầu tàu đang ở vị trí C, cách vị trí A một khoảng $AC = x$ (m) (Hình 4).

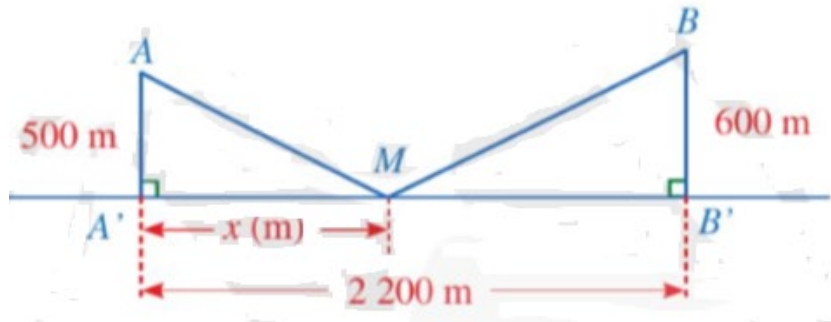


- Viết biểu thức (theo x) biểu thị khoảng cách từ trạm phát sóng đến đầu tàu.
- Tính khoảng cách trên khi $x = 400$, $x = 1\,000$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của mét).

Bài 7. Kích thước màn hình tivi hình chữ nhật được xác định bởi độ dài đường chéo. Một loại tivi có tỉ lệ hai cạnh màn hình là 4 : 3.

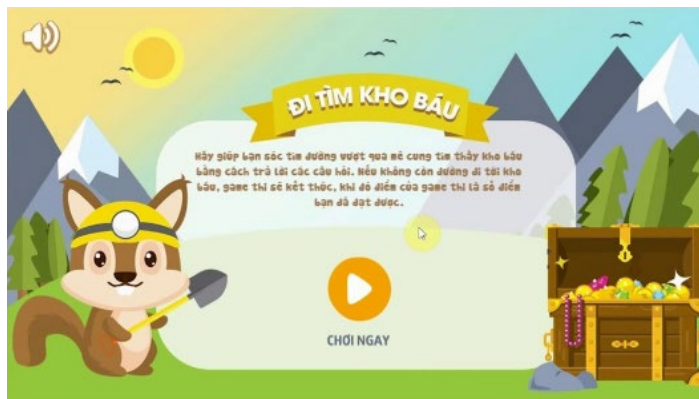
- Gọi x (inch) là chiều rộng của màn hình tivi. Viết công thức tính độ dài đường chéo d (inch) của màn hình tivi theo x .
- Tính chiều rộng và chiều dài (theo centimét) của màn hình tivi loại 40 inch.

Bài 8. Có hai xã cùng ở một bên bờ sông. Người ta đo được khoảng cách từ trung tâm A, B của hai xã đó đến bờ sông lần lượt là $AA' = 500$ m, $BB' = 600$ m và khoảng cách $A'B' = 2\,200$ m (minh họa ở Hình vẽ). Các kĩ sư muốn xây một trạm cung cấp nước sạch nằm bên bờ sông cho người dân hai xã. Giả sử vị trí của trạm cung cấp nước sạch đó là điểm M trên đoạn $A'B'$ với $MA' = x$ (m), $0 < x < 2\,200$



- a) Viết công thức tính tổng khoảng cách $MA + MB$ theo x .
 b) Tính tổng khoảng cách $MA + MB$ khi $x = 1\,200$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).

Bài 9. Trò chơi “tìm kho báu” là một trò chơi quốc tế, rất phổ biến trong sinh hoạt Đoàn Đội. Ai đã một lần chơi sẽ cảm nhận được tính thú vị, hấp dẫn và lôi cuốn của nó, nhất là với các bạn yêu thích khám phá. Trong trò chơi bạn An phải giải bài toán có nội dung sau: “Số để bấm vào khóa mở được cửa kho báu bằng giá trị $\sqrt{(n^2 + 2)(n^2 + 4)} + 1$ khi $n = 10$ ”. Em hãy trình bày cách tìm ra số để bạn An bấm vào ổ khóa số mở cửa kho báu nhé.



Bài 10. Vận tốc v (tính bằng m/s) của một vật thể nặng m (tính bằng kg) được tác động một lực E_k (gọi là năng lượng Kinetic Energy, ký hiệu E_k , tính bằng Joule) được cho bởi công thức:

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}}$$



- a) Hãy tính vận tốc của một quả banh bowling nặng 3kg khi một người tác động một lực $E_k = 18$ J?

b) Muốn lăng một quả bowling nặng 3kg với vận tốc 6m/s, thì cần sử dụng năng lượng Kinetic E_k bao nhiêu Joule?

Bài 11. Điện áp V (tính theo volt) yêu cầu cho một mạch điện được cho bởi công thức $V = \sqrt{PR}$, trong đó P là công suất (tính theo watt) và R là điện trở trong (tính theo ohm).



a) Cần bao nhiêu volt để thắp sáng một bóng đèn A có công suất 100 watt và điện trở của mỗi bóng đèn là 110 ohm?

b) Bóng đèn B có điện áp bằng 110 volt, điện trở trong là 88 ohm có công suất lớn hơn bóng đèn A không? Giải thích.

Bài 12. Tốc độ của một chiếc canô và độ dài đường sóng nước để lại sau đuôi của nó được cho bởi công thức $v = 5\sqrt{l}$. Trong đó, l là độ dài đường nước sau đuôi canô (mét), v là vận tốc canô (m/giây).



a) Một canô đi từ Năm Căn về huyện Đất Mũi (Cà Mau) để lại đường sóng nước sau đuôi dài $7 + 4\sqrt{3}$ m. Hỏi vận tốc của canô?

b) Khi canô chạy với vận tốc 54km/giờ thì đường sóng nước để lại sau đuôi chiếc canô dài bao nhiêu mét?

Bài 13. Sóng thần (tsunami) là một loạt các đợt sóng tạo nên khi một thể tích lớn của nước đại dương bị dịch chuyển chớp nhoáng trên một quy mô lớn. Động đất cùng những dịch chuyển địa chất lớn bên trên hoặc bên dưới mặt nước, núi lửa phun và va chạm thiên thạch đều có khả năng gây ra sóng thần. Con sóng thần khởi phát từ dưới đáy biển sâu, khi còn ngoài xa khơi, sóng có biên độ (chiều cao sóng) khá nhỏ nhưng chiều dài của con sóng lên đến hàng trăm km. Con sóng đi qua đại dương với tốc độ trung bình 500 dặm một giờ. Khi tiến tới đất liền, đáy biển trở nên nông, con sóng không còn dịch chuyển nhanh được nữa, vì thế nó bắt đầu “dựng đứng lên” có thể đạt chiều cao một tòa nhà sáu tầng hay hơn nữa và tàn phá khủng khiếp.

Tốc độ của con sóng thần và chiều sâu của đại dương liên hệ bởi công thức $s = \sqrt{dg}$. Trong đó, $g = 9,81\text{m/s}^2$, d (deep) là chiều sâu đại dương tính bằng m, s là vận tốc của sóng thần tính bằng m/s.



a) Biết độ sâu trung bình của đại dương trên trái đất là $d = 3790$ mét hãy tính tốc độ trung bình của các con sóng thần xuất phát từ đáy các đại dương theo km/h.

b) Susan Kieffer, một chuyên gia về cơ học chất lỏng địa chất của đại học Illinois tại Mỹ, đã nghiên cứu năng lượng của trận sóng thần Tohoku 2011 tại Nhật Bản. Những tính toán của Kieffer cho thấy tốc độ sóng thần vào xấp xỉ 220 m/giây. Hãy tính độ sâu của đại dương nơi xuất phát con sóng thần này.

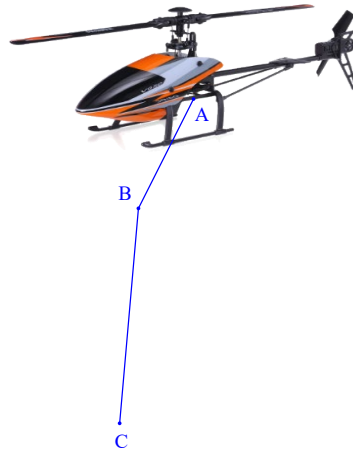
Bài 14. Vận tốc v (m/s) của một tàu lượn di chuyển trên một cung tròn có bán kính r (m) được cho bởi công thức: $v = \sqrt{ar}$. Trong đó a là gia tốc của tàu (m/s^2) (gia tốc là đại lượng vật lý đặc trưng cho sự thay đổi của vận tốc theo thời gian. Nó là một trong những đại lượng cơ bản dùng để mô tả chuyển động và là độ biến thiên của vận tốc theo thời gian).



a) Nếu tàu lượn đang chạy với vận tốc $v = 14m/s$ và muốn đạt mức gia tốc tối đa cho phép là $a = 9m/s^2$ thì bán kính tối thiểu của cung tròn phải là bao nhiêu để xe không văng ra khỏi đường ray?

b) Nếu tàu lượn đang di chuyển với vận tốc $v = 8m/s$ xung quanh một cung tròn có bán kính $r = 25m$ thì có gia tốc tối đa cho phép là bao nhiêu?

Bài 15. Quãng đường đi của một vật rơi tự do không vận tốc đầu cho bởi công thức $S = \frac{1}{2}gt^2$ (trong đó g là gia tốc trọng trường $g \approx 9,8m/s^2$, t là thời gian rơi tự do, S là quãng đường rơi tự do). Một vận động viên nhảy dù, nhảy khỏi máy bay ở độ cao 3500 mét (vị trí A) với vận tốc ban đầu không đáng kể. Hỏi sau thời gian bao nhiêu giây (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất) vận động viên phải mở dù để khoảng cách từ (vị trí B) đến mặt đất (vị trí C) trong hình vẽ là 1500 mét.



Bài 16. Galilei là người phát hiện ra quãng đường chuyển động của vật rơi tự do tỉ lệ thuận với bình phương của thời gian. Quan hệ giữa quãng đường chuyển động y (mét) và thời gian chuyển động x (giây) được biểu diễn gần đúng bởi công thức $y = 5x^2$. Người ta thả một vật nặng từ độ cao 55m trên tháp nghiêng Pi – da xuống đất (sức cản của không khí không đáng kể)



- Hãy cho biết sau 3 giây thì vật nặng còn cách mặt đất bao nhiêu mét?
- Khi vật nặng còn cách đất 25m thì nó đã rơi được thời gian bao lâu?

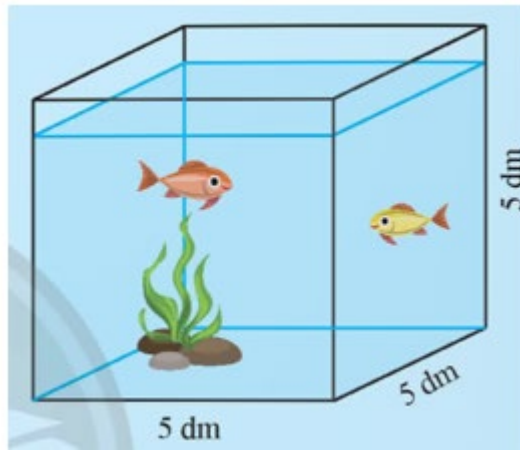
Bài 17. Thời gian t (tính bằng giây) từ khi một người bắt đầu nhảy bungee trên cao cách mặt nước d (tính bằng m) đến khi chạm mặt nước được cho bởi công thức: $t = \sqrt{\frac{3d}{9,8}}$



- Tìm thời gian một người nhảy bungee từ vị trí cao cách mặt nước 108m đến khi chạm mặt nước?
- Nếu một người nhảy bungee từ một vị trí khác đến khi chạm mặt nước là 7 giây. Hãy tìm độ cao của người nhảy bungee so với mặt nước?

Bài 18. Thể tích V của một khối lập phương được tính bởi công thức: $V = a^3$ với a là độ dài cạnh của khối lập phương. Viết công thức tính độ dài cạnh của khối lập phương theo thể tích V của nó.

Bài 19. Ông An có một bể kính hình lập phương như Hình vẽ.



Ông An muốn làm thêm một bể kính mới hình lập phương có thể tích gấp n lần thể tích của bể kính cũ (bỏ qua bề dày của kính).

a) Gọi a (dm) là độ dài cạnh của bể kính mới.

Thay mỗi \square bằng biểu thức thích hợp để nhận được các đẳng thức: $a^3 = \square$ hay $a = \square$.

b) Tính giá trị của a khi $n = 8$ và khi $n = 4$ (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Bài 20. Chiều cao ngang vai của một con voi đực ở châu Phi là h (cm) có thể được tính xấp xỉ bằng công thức: $h = 62,5\sqrt[3]{t} + 75,8$ với t là tuổi của con voi tính theo năm.

a) Một con voi đực 8 tuổi ở châu Phi sẽ có chiều cao ngang vai là bao nhiêu centimét?

b) Nếu một con voi đực ở châu Phi có chiều cao ngang vai là 205 cm thì con voi đó bao nhiêu tuổi (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Bài 21. Định luật Kepler về sự chuyển động của các hành tinh trong Hệ mặt trời xác định mối quan hệ giữa chu kỳ quay quanh Mặt Trời của một hành tinh và khoảng cách giữa hành tinh đó với Mặt Trời.

Định luật được cho bởi công thức $d = \sqrt[3]{6t^2}$. Trong đó, d là khoảng cách giữa hành tinh quay xung quanh Mặt Trời và Mặt Trời (đơn vị: triệu dặm, 1 dặm = 1609 mét), t là thời gian hành tinh quay quanh Mặt Trời đúng một vòng (đơn vị: ngày của Trái Đất).



a) Trái Đất quay quanh Mặt Trời trong 365 ngày. Hãy tính khoảng cách giữa Trái Đất và Mặt Trời theo km.

b) Một năm Sao Hỏa dài bằng 687 ngày trên Trái Đất, nghĩa là Sao Hỏa quay xung quanh Mặt Trời đúng một vòng với thời gian bằng 687 ngày Trái Đất. Hãy tính khoảng cách giữa Sao Hỏa và Mặt Trời theo km.

BÀI 3**CĂN THỨC BẬC HAI VÀ CĂN THỨC BẬC BA CỦA BIỂU THỨC ĐẠI SỐ****1. Căn thức bậc hai**

Với A là một biểu thức đại số, người ta gọi \sqrt{A} là căn thức bậc hai của A , còn A được gọi là biểu thức lấy căn bậc hai hay biểu thức dưới dấu căn.

Điều kiện xác định cho căn thức bậc hai \sqrt{A} là $A \geq 0$.

Chú ý: Các số, biến số được nối nhau bởi dấu các phép tính cộng, trừ, nhân, chia, nâng lũy thừa, khai căn bậc hai làm thành một biểu thức đại số.

2. Căn thức bậc ba

Với A là một biểu thức đại số, người ta gọi $\sqrt[3]{A}$ là căn thức bậc ba của A , còn A được gọi là biểu thức lấy căn bậc ba hay biểu thức dưới dấu căn.

Điều kiện xác định cho căn thức bậc ba $\sqrt[3]{A}$ chính là điều kiện xác định biểu thức A .

Chú ý: Các số, biến số được nối nhau bởi dấu các phép tính cộng, trừ, nhân, chia, nâng lũy thừa, khai căn bậc hai hoặc bậc ba làm thành một biểu thức đại số.

CHỦ ĐỀ 1
CĂN THỨC BẬC HAI

DẠNG 1
TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC TẠI GIÁ TRỊ CHO TRƯỚC

Bài 1. Tính giá trị của mỗi căn thức bậc hai sau :

a) $\sqrt{2024-x}$ tại $x = 2023$; $x = 2015$; $x = 1943$.

b) $\sqrt{x^2+5}$ tại $x = -2$; $x = 2$; $x = \sqrt{11}$.

c) $\sqrt{x^2-x+4}$ tại $x = -3$; $x = 0$; $x = 4$.

Lời giải

a) $\sqrt{2024-x}$

- Thay $x = 2023$ vào biểu thức ta được: $\sqrt{2024-2023} = \sqrt{1} = 1$

- Thay $x = 2015$ vào biểu thức ta được: $\sqrt{2024-2015} = \sqrt{9} = 3$

- Thay $x = 1943$ vào biểu thức ta được: $\sqrt{2024-1943} = \sqrt{81} = 9$

b) $\sqrt{x^2+5}$

- Thay $x = -2$ vào biểu thức ta được: $\sqrt{(-2)^2+5} = \sqrt{4+5} = \sqrt{9} = 3$

- Thay $x = 2$ vào biểu thức ta được: $\sqrt{2^2+5} = \sqrt{4+5} = \sqrt{9} = 3$

- Thay $x = \sqrt{11}$ vào biểu thức ta được: $\sqrt{(\sqrt{11})^2+5} = \sqrt{11+5} = \sqrt{16} = 4$

c) $\sqrt{x^2-x+4}$

- Thay $x = -3$ vào biểu thức ta được: $\sqrt{(-3)^2-(-3)+4} = \sqrt{9+3+4} = \sqrt{16} = 4$

- Thay $x = 0$ vào biểu thức ta được: $\sqrt{0^2-0+4} = \sqrt{4} = 2$

- Thay $x = 4$ vào biểu thức ta được: $\sqrt{4^2-4+4} = \sqrt{4^2} = 4$

Bài 2. Tính giá trị của mỗi căn thức bậc hai sau :

a) $\sqrt{2x+1}$ tại $x = 0$; $x = 4$; $x = 12$.

b) $\sqrt{13-x^2}$ tại $x = -3$; $x = -2$; $x = 0$.

c) $\sqrt{2x^2+x+6}$ tại $x = -3$; $x = 1$; $x = 2$.

DẠNG 2**TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ CĂN THỨC BẬC HAI CÓ NGHĨA**

- \sqrt{A} có nghĩa $\Leftrightarrow A \geq 0$
- $\frac{1}{\sqrt{A}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow A > 0$
- $A^2 \geq 0 \quad \forall A \in \mathbb{R}$
- $\sqrt{A^2}$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R}$
- $\frac{1}{\sqrt{A^2}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow A \neq 0$
- $A^2 > 0 \quad \forall A \neq 0$

Bài 1. Tìm x để các căn thức sau có nghĩa

a) $\sqrt{-2024x}$

b) $\sqrt{3x-15}$

c) $\sqrt{-2x-5}$

Lời giải

a) $\sqrt{-2024x}$ có nghĩa khi $-2024x \geq 0$ hay $x \leq 0$.

b) $\sqrt{3x-15}$ có nghĩa khi $3x-15 \geq 0$ hay $3x \geq 15$ hay $x \geq 5$.

c) $\sqrt{-2x-5}$ có nghĩa khi $-2x-5 \geq 0$ hay $-2x \geq 5$ hay $x \leq -\frac{5}{2}$.

Bài 2. Với giá trị nào của x thì mỗi biểu thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{\frac{2025}{2x+3}}$

b) $\sqrt{\frac{-1}{3x-1}}$

c) $\sqrt{\frac{2-7x}{2024}}$

Lời giải

a) $\sqrt{\frac{2025}{2x+3}}$

Do $2025 > 0$ nên $\sqrt{\frac{2025}{2x+3}}$ có nghĩa khi $2x+3 > 0$ hay $2x \geq -3$ hay $x > -\frac{3}{2}$.

b) $\sqrt{\frac{-1}{3x-1}}$

Do $-1 < 0$ nên $\sqrt{\frac{-1}{3x-1}}$ có nghĩa khi $3x-1 < 0$ hay $3x < 1$ hay $x < \frac{1}{3}$.

c) $\sqrt{\frac{2-7x}{2024}}$

Do $2024 > 0$ nên $\sqrt{\frac{2-7x}{2024}}$ có nghĩa khi $2-7x \geq 0$ hay $-7x \geq -2$ hay $x \leq \frac{2}{7}$.

Bài 3. Với giá trị nào của x thì mỗi biểu thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{\frac{2025}{x^2}}$

b) $\frac{x}{x-2} + \sqrt{x-2}$

Lời giải

a) $\sqrt{\frac{2025}{x^2}}$

Do $x^2 \geq 0$ mọi x nên $\sqrt{\frac{2025}{x^2}}$ có nghĩa khi $x \neq 0$

b) $\frac{x}{x-2} + \sqrt{x-2}$ có nghĩa khi $x-2 \neq 0$ và $x-2 \geq 0$ hay $x \neq 2$ và $x \geq 2$ hay $x > 2$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{-2021x}$

b) $\sqrt{3-6x}$

c) $\frac{2021}{3-\sqrt{x}}$

d) $\frac{1}{\sqrt{4x-1}}$

Lời giải

a) $\sqrt{-2021x}$ có nghĩa khi $-2021x \geq 0$ hay $x \leq 0$

b) $\sqrt{3-6x}$ có nghĩa khi $3-6x \geq 0$ hay $x \leq \frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{\sqrt{4x-1}}$ có nghĩa khi $4x-1 > 0$ hay $x > \frac{1}{4}$

Bài 5. Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + 3}$

b) $\frac{3}{\sqrt{-x^2 - 2021}}$

Lời giải

e) $\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + 3}$

ta có $\frac{1}{2}x^2 + 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra biểu thức luôn có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R}$

Vậy biểu thức luôn có nghĩa.

f) $\frac{3}{\sqrt{-x^2 - 2021}}$ có nghĩa khi $-x^2 - 2021 > 0$

ta có $-x^2 - 2021 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra biểu thức vô nghĩa

Bài 6. Với mỗi giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa

a) $\sqrt{\frac{2}{3x-5}}$

b) $\sqrt{-3x}$

c) $\sqrt{\frac{1}{3-2x}}$

d) $\sqrt{x^2 + 2}$

e) $\sqrt{\frac{3}{x^2 + 1}}$

f) $\sqrt{2x-1}$

g) $\sqrt{-x^2 + 2x - 1}$

h) $\sqrt{-|x+1|}$

i) $\sqrt{-x^2 - 3}$

Lời giải

a) $\sqrt{\frac{2}{3x-5}}$ có nghĩa khi $\frac{2}{3x-5} > 0$

$$\frac{2}{3x-5} > 0$$

$$3x-5 > 0$$

$$3x > 5$$

$$x > \frac{5}{3}$$

b) $\sqrt{-3x}$ có nghĩa khi $-3x \geq 0$ hay $x \leq 0$

c) $\sqrt{\frac{1}{3-2x}}$ có nghĩa khi $\frac{1}{3-2x} > 0$

$$\frac{1}{3-2x} > 0$$

$$3-2x > 0$$

$$3 > 2x$$

$$\frac{3}{2} > x$$

$$x < \frac{3}{2}$$

d) $\sqrt{x^2+2}$

Do $x^2+2 \geq 0$ với mọi x nên biểu thức luôn có nghĩa

e) $\sqrt{\frac{3}{x^2+1}}$

Do $3 > 0$ và $x^2+1 > 0, \forall x \in R$ nên $\sqrt{\frac{3}{x^2+1}}$ có nghĩa với mọi $x \in R$

f) $\sqrt{2x-1}$ có nghĩa khi $2x-1 \geq 0$ hay $2x \geq 1$ hay $x \geq \frac{1}{2}$

g) Ta có: $-x^2+2x-1 = -(x^2-2x+1) = -(x-1)^2 \leq 0, \forall x \in R$, nên $\sqrt{-x^2+2x-1}$ có nghĩa khi

$$-(x-1)^2 = 0 \text{ hay } x = 1$$

h) Ta có $|x+1| \geq 0$ hay $-|x+1| \leq 0, \forall x \in R \Rightarrow \sqrt{-|x+1|}$ có nghĩa khi $-|x+1| = 0 \Leftrightarrow x = -1$

i) Ta có $-x^2-3 = -(x^2+3)$, do $x^2+3 \geq 3 > 0 \Rightarrow -(x^2+3) < 0$

Do đó không tồn tại x để $\sqrt{-x^2-3}$ có nghĩa.

Bài 7. Với giá trị nào của x thì mỗi biểu thức sau có nghĩa:

a) $\frac{x}{x+2} + \sqrt{x-2}$

b) $\sqrt{x+\frac{3}{x}} + \sqrt{-3x}$

Lời giải

a) $\frac{x}{x+2} + \sqrt{x-2}$ có nghĩa khi $x-2 \geq 0$ và $x+2 \neq 0$ hay $x \geq 2$ và $x \neq -2$ hay $x \geq 2$

$$\text{b) } \sqrt{x + \frac{3}{x}} + \sqrt{-3x} = \sqrt{\frac{x^2 + 3}{x}} + \sqrt{-3x}$$

Do $x^2 + 3 > 0$ mọi x nên $\sqrt{x + \frac{3}{x}} + \sqrt{-3x}$ có nghĩa khi $x > 0$ và $-3x \geq 0$ hay $x > 0$ và $x \leq 0$ (vô lí)

Vậy không có giá trị nào của x làm biểu thức có nghĩa.

CHỦ ĐỀ 2
CĂN THỨC BẬC BA

DẠNG 1
TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC TẠI GIÁ TRỊ CHO TRƯỚC

Bài 1. Tính giá trị của mỗi căn thức bậc hai sau :

a) $\sqrt[3]{2025-x}$ tại $x = 2017$; $x = 1998$; $x = 1961$.

b) $\sqrt[3]{150-x^2}$ tại $x = -5$; $x = 5$; $x = \sqrt{86}$.

Lời giải

a) $\sqrt[3]{2025-x}$

- Thay $x = 2017$ vào biểu thức ta được: $\sqrt[3]{2025-2017} = \sqrt[3]{8} = 2$

- Thay $x = 1998$ vào biểu thức ta được: $\sqrt[3]{2025-1998} = \sqrt[3]{27} = 3$

- Thay $x = 1961$ vào biểu thức ta được: $\sqrt[3]{2025-1961} = \sqrt[3]{64} = 4$

b) $\sqrt[3]{150-x^2}$

- Thay $x = -5$ vào biểu thức ta được: $\sqrt[3]{150-(-5)^2} = \sqrt[3]{150-25} = \sqrt[3]{125} = 5$

- Thay $x = 5$ vào biểu thức ta được: $\sqrt[3]{150-5^2} = \sqrt[3]{150-25} = \sqrt[3]{125} = 5$

- Thay $x = \sqrt{86}$ vào biểu thức ta được: $\sqrt[3]{150-(\sqrt{86})^2} = \sqrt[3]{150-86} = \sqrt[3]{64} = 4$

Bài 2. Tính giá trị của mỗi căn thức bậc hai sau :

a) $\sqrt[3]{4x+7}$ tại $x = -2$; $x = 5$; $x = \frac{203}{4}$.

b) $\sqrt[3]{x^2+9}$ tại $x = -\sqrt{18}$; $x = \sqrt{7}$; $x = 5$.

DẠNG 2**TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ CĂN THỨC BẬC BA CÓ NGHĨA****Bài 1.** Tìm x để các căn thức sau có nghĩa

a) $\sqrt[3]{x-2024}$

b) $\sqrt[3]{\frac{2025-2024x}{2023}}$

c) $\sqrt[3]{\frac{-2}{x-1}}$

Lời giảia) $\sqrt[3]{x-2024}$ xác định với mọi số thực x vì $x-2024$ xác định với mọi số thực x .b) $\sqrt[3]{\frac{2025-2024x}{2023}}$ xác định với mọi số thực x vì $\frac{2025-2024x}{2023}$ xác định với mọi số thực x .c) $\sqrt[3]{\frac{-2}{x-1}}$ xác định khi $x-1 \neq 0$ hay $x \neq 1$.**Bài 2.** Tìm x để các căn thức sau có nghĩa

a) $\sqrt[3]{\frac{1}{x^2+\frac{1}{2}}}$

b) $\sqrt[3]{\frac{-5}{x^2-4x+4}}$

c) $\sqrt[3]{\frac{-5}{x^2+2x+3}}$

Lời giải

a) $\sqrt[3]{\frac{1}{x^2+\frac{1}{2}}}$

Ta có $x^2+\frac{1}{2} > 0$ với mọi số thực x nên $x^2+\frac{1}{2} \neq 0$ với mọi số thực x Do đó $\sqrt[3]{\frac{1}{x^2+\frac{1}{2}}}$ xác định với mọi số thực x

b) $\sqrt[3]{\frac{-5}{x^2-4x+4}}$

Ta có $x^2-4x+4 = (x-2)^2 \geq 0$ với mọi số thực x nên $x-2 \neq 0$ hay $x \neq 2$ Do đó $\sqrt[3]{\frac{-5}{x^2-4x+4}}$ xác định khi $x \neq 2$ c) $\sqrt[3]{\frac{-5}{x^2+2x+3}}$ xác định khi $x-1 \neq 0$ hay $x \neq 1$.Ta có $x^2+2x+3 = (x+1)^2+2 > 0$ với mọi số thực x

Do đó $\sqrt[3]{\frac{-5}{x^2+2x+3}}$ xác định với mọi số thực x

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Tìm x để các căn thức sau có nghĩa

a) $\sqrt[3]{1-\frac{1}{2}x}$

b) $\sqrt[3]{\frac{2x-3}{5}}$

c) $\sqrt[3]{\frac{-2024}{4x-3}}$

d) $\sqrt[3]{\frac{-1}{2x^2+1}}$

e) $\sqrt[3]{\frac{1}{4x^2+12x+9}}$

f) $\sqrt[3]{\frac{3}{-x^2+x-4}}$

Lời giải

a) $\sqrt[3]{1-\frac{1}{2}x}$ xác định với mọi số thực x vì $1-\frac{1}{2}x$ xác định với mọi số thực x .

b) $\sqrt[3]{\frac{2x-3}{5}}$ xác định với mọi số thực x vì $\frac{2x-3}{5}$ xác định với mọi số thực x .

c) $\sqrt[3]{\frac{-2024}{4x-3}}$ xác định khi $4x-3 \neq 0$ hay $x \neq \frac{3}{4}$.

d) $\sqrt[3]{\frac{-1}{2x^2+1}}$

Ta có $2x^2+1$ với mọi số thực x nên $2x^2+1 \neq 0$ với mọi số thực x

Do đó $\sqrt[3]{\frac{-1}{2x^2+1}}$ xác định với mọi số thực x

e) $\sqrt[3]{\frac{1}{4x^2+12x+9}}$

Ta có $4x^2+12x+9 = (2x+9)^2 \geq 0$ với mọi số thực x nên $2x+9 \neq 0$ hay $x \neq -\frac{9}{2}$

Do đó $\sqrt[3]{\frac{1}{x^2+\frac{1}{2}}}$ xác định khi $x \neq -\frac{9}{2}$

f) $\sqrt[3]{\frac{3}{-x^2+x-4}}$ xác định khi $x-1 \neq 0$ hay $x \neq 1$.

Ta có $-x^2+x-4 = -\left(x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)-4 = -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{15}{4} = -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{15}{4} < 0$ với mọi số thực x

Do đó $\sqrt[3]{\frac{3}{-x^2+x-4}}$ xác định với mọi số thực x

CHỦ ĐỀ 3

ỨNG DỤNG

Bài 1. Để lái xe an toàn khi đi qua đoạn đường có dạng cung tròn, người lái cần biết tốc độ tối đa cho phép là bao nhiêu. Vì thế, ở những đoạn đường đó thường có bảng chỉ dẫn cho tốc độ tối đa cho phép của ô tô. Tốc độ tối đa cho phép v (m/s) được tính bởi công thức $v = \sqrt{rg\mu}$, trong đó r (m) là bán kính của cung đường, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, μ là hệ số ma sát trượt của đường.

a) Hãy viết biểu thức tính v theo r khi biết $\mu = 0,12$.

b) Trong toán học, biểu thức đó được gọi là gì?

Lời giải

a) Theo bài, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ và $\mu = 0,12$.

Thay vào biểu thức $v = \sqrt{rg\mu}$, ta được: $v = \sqrt{r \cdot 9,8 \cdot 0,12} = \sqrt{1,176r}$ (m/s).

Vậy biểu thức tính v theo r là $v = \sqrt{1,176r}$ (m/s).

b) Trong toán học, biểu thức trên được gọi là căn thức bậc hai.

Bài 2. Hệ quả của hiện tượng nóng lên toàn cầu là băng của một số sông băng đang tan chảy. Mười hai năm sau khi băng biến mất, những loài thực vật nhỏ bé, được gọi là địa y, bắt đầu mọc trên đá. Mỗi nhóm địa y phát triển ở dạng (gần như) một hình tròn. Đường kính d (mm) của hình tròn này có thể được tính gần đúng bằng công thức: $d = 7\sqrt{t-12}$ với t là số năm tính từ khi băng biến mất ($t \geq 12$). Tính đường kính của hình tròn do địa y tạo nên sau khi băng biến mất 13 năm; 16 năm.

Lời giải

Với $t = 13$, đường kính của hình tròn do địa y tạo nên là:

$$d = 7\sqrt{13-12} = 7(mm).$$

Với $t = 16$, đường kính của hình tròn do địa y tạo nên là:

$$d = 7\sqrt{16-12} = 7\sqrt{4} = 14(mm)$$

Bài 3. Vận tốc m/s của một vật đang bay được cho bởi công thức $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$, trong đó E là động năng của vật (tính bằng Joule, kí hiệu là J) và m (kg) là khối lượng của vật. Tính vận tốc bay của một vật khi biết vật đó có khối lượng 2,5 kg và động năng 281,25 J.

Lời giải

Vận tốc bay của một vật có khối lượng 2,5 kg và động năng 281,25 J là:

$$v = \sqrt{\frac{2.281,25}{2,5}} = \sqrt{\frac{5625}{25}} = \frac{\sqrt{5625}}{\sqrt{25}} = \frac{75}{5} = 15(m/s)$$

Vậy vận tốc bay của vật đó là 15 m/s.

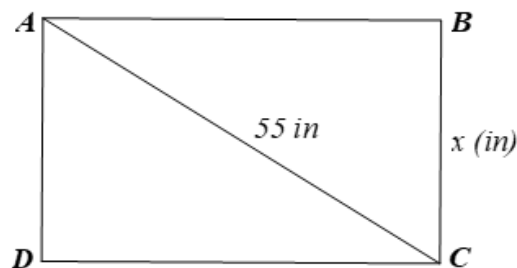
Bài 4. Cửa hàng điện máy xanh trưng bày một chiếc tivi màn hình phẳng 55 in, tức là độ dài đường chéo của màn hình tivi bằng 55 in (1 in = 2,54 cm). Gọi x (in) là chiều rộng của màn hình tivi (*Hình vẽ*)



Viết công thức tính chiều dài của màn hình tivi theo x .

Lời giải

Giả sử hình ảnh chiếc tivi được mô tả như hình vẽ dưới đây



Áp dụng định lý Pythagore cho $\triangle ABC$ vuông tại B, ta có:

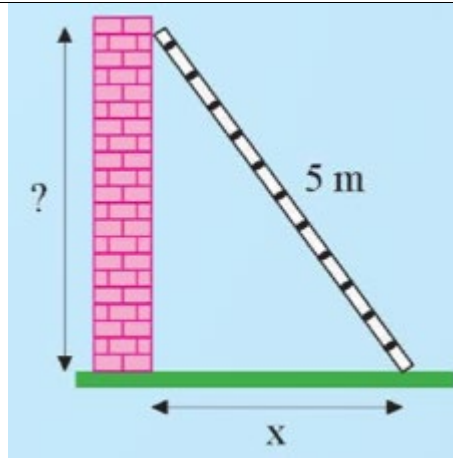
$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$\text{Suy ra } AB^2 = AC^2 - BC^2 = 55^2 - x^2$$

$$\text{Do đó } AB = \sqrt{55^2 - x^2} \text{ (in).}$$

Vậy công thức tính chiều dài của màn hình tivi là $\sqrt{55^2 - x^2}$ (in).

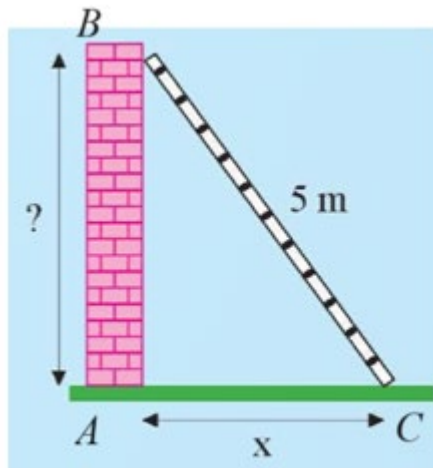
Bài 5. Một chiếc thang dài 5 m tựa vào bức tường như hình vẽ.



- a) Nếu chân thang cách chân tường x (m) thì đỉnh thang ở độ cao bao nhiêu so với chân tường?
 b) Tính độ cao trên khi x nhận giá trị lần lượt là 1; 2; 3; 4.

Lời giải

- a) Gọi tam giác ABC như hình vẽ.



- a) Trong thực tế bức tường vuông góc với mặt đất nên $AB \perp AC$.

Xét tam giác ABC vuông tại A, áp dụng định lý Pythagore, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$\text{Suy ra } AC^2 = BC^2 - AB^2 = 5^2 - x^2 = 25 - x^2.$$

$$\text{Do đó } AC = \sqrt{25 - x^2} \text{ (m)}.$$

Vậy nếu chân thang cách chân tường x (m) thì đỉnh thang ở độ cao $\sqrt{25 - x^2}$ (m) so với chân tường.

- b)

$$\text{- Khi } x = 1 \text{ thì độ cao đỉnh thang so với chân tường là: } \sqrt{25 - 1^2} = \sqrt{24} \text{ (m)}$$

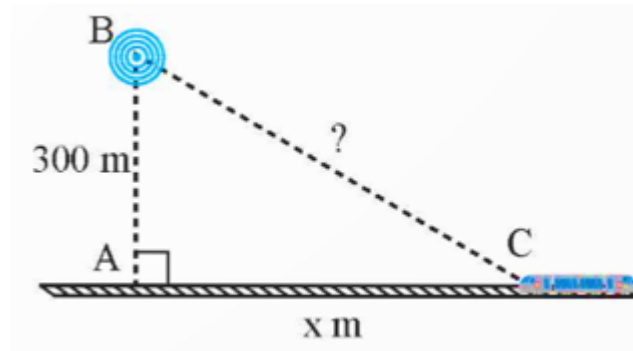
$$\text{- Khi } x = 2 \text{ thì độ cao đỉnh thang so với chân tường là: } \sqrt{25 - 2^2} = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21} \text{ (m)}$$

$$\text{- Khi } x = 3 \text{ thì độ cao đỉnh thang so với chân tường là: } \sqrt{25 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4 \text{ (m)}$$

$$\text{- Khi } x = 4 \text{ thì độ cao đỉnh thang so với chân tường là: } \sqrt{25 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3 \text{ (m)}$$

Vậy x nhận giá trị lần lượt là 1; 2; 3; 4. thì độ cao đỉnh thang so với chân tường lần lượt là $\sqrt{24}(m)$; $\sqrt{21}(m)$; $4(m)$; $3(m)$

Bài 6. Một trạm phát sóng được đặt ở vị trí B cách đường tàu một khoảng $AB = 300$ m. Đầu tàu đang ở vị trí C, cách vị trí A một khoảng $AC = x$ (m) (Hình 4).



- Viết biểu thức (theo x) biểu thị khoảng cách từ trạm phát sóng đến đầu tàu.
- Tính khoảng cách trên khi $x = 400$, $x = 1\,000$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của mét).

Lời giải

a) Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác vuông ABC, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 300^2 + x^2.$$

$$\text{Suy ra } BC = \sqrt{300^2 + x^2} \text{ (m)}.$$

Vậy biểu thức (theo x) biểu thị khoảng cách từ trạm phát sóng đến đầu tàu là $\sqrt{300^2 + x^2}$ (m).

b) Thay $x = 400$ thì khoảng cách từ trạm phát sóng đến đầu tàu là:

$$\sqrt{300^2 + 400^2} = \sqrt{250000} = 500(m).$$

Thay $x = 1\,000$ thì khoảng cách từ trạm phát sóng đến đầu tàu là:

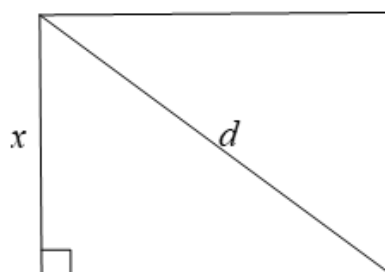
$$\sqrt{300^2 + 1000^2} = \sqrt{1090000} \approx 1044(m).$$

Bài 7. Kích thước màn hình ti vi hình chữ nhật được xác định bởi độ dài đường chéo. Một loại ti vi có tỉ lệ hai cạnh màn hình là 4 : 3.

- Gọi x (inch) là chiều rộng của màn hình ti vi. Viết công thức tính độ dài đường chéo d (inch) của màn hình ti vi theo x .
- Tính chiều rộng và chiều dài (theo centimét) của màn hình ti vi loại 40 inch.

Lời giải

a) Hình vẽ dưới đây mô tả màn hình ti vi hình chữ nhật có chiều rộng là x (inch).



Vì tỉ vi có tỉ lệ hai cạnh màn hình là 4 : 3 nên chiều dài của tỉ vi là: $\frac{4}{3}x$ (inch).

Theo định lí Pythagore, ta có:

$$d^2 = \left(\frac{4}{3}x\right)^2 + x^2 = \frac{25}{9}x^2$$

Suy ra $d = \sqrt{\frac{25}{9}x^2} = \sqrt{\frac{25}{9}} \cdot \sqrt{x^2} = \frac{5}{3}|x| = \frac{5}{3}x$ (inch) (do $d > 0$ và $x > 0$).

Vậy công thức tính độ dài đường chéo d của màn hình tỉ vi là $\frac{5}{3}x$ (inch).

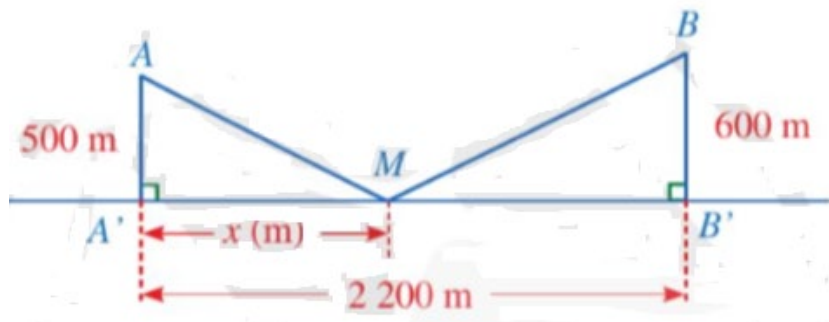
b) Màn hình tỉ vi loại 40 inch tức là $d = 40$.

Do đó $\frac{5}{3}x = 40$, suy ra $x = 40 : \frac{5}{3} = 24$.

Vì vậy, chiều rộng của màn hình tỉ vi đó là $24 \text{ inch} \approx 24.2,54 \text{ cm} = 60,96 \text{ cm}$;

chiều dài của màn hình tỉ vi đó là $\frac{4}{3} \cdot 24 = 32 \text{ inch} \approx 32.2,54 \text{ cm} = 81,28 \text{ cm}$.

Bài 8. Có hai xã cùng ở một bên bờ sông. Người ta đo được khoảng cách từ trung tâm A, B của hai xã đó đến bờ sông lần lượt là $AA' = 500 \text{ m}$, $BB' = 600 \text{ m}$ và khoảng cách $A'B' = 2\,200 \text{ m}$ (minh họa ở Hình vẽ). Các kĩ sư muốn xây một trạm cung cấp nước sạch nằm bên bờ sông cho người dân hai xã. Giả sử vị trí của trạm cung cấp nước sạch đó là điểm M trên đoạn $A'B'$ với $MA' = x \text{ (m)}$, $0 < x < 2\,200$



a) Viết công thức tính tổng khoảng cách $MA + MB$ theo x .

b) Tính tổng khoảng cách $MA + MB$ khi $x = 1\,200$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).

Lời giải

a) Áp dụng định lý Pythagore cho $\triangle AA'M$ vuông tại A' ta có:

$$MA^2 = AA'^2 + A'M^2 = 500^2 + x^2 = 250\,000 + x^2$$

$$\text{Suy ra } MA = \sqrt{250\,000 + x^2} \text{ (m).}$$

Ta có $A'B' = A'M + B'M$, suy ra $B'M = A'B' - A'M = 2\,200 - x$ (m).

Áp dụng định lý Pythagore cho $\triangle BB'M$ vuông tại B' ta có:

$$MB^2 = BB'^2 + B'M^2 = 600^2 + (2\,200 - x)^2 = 360\,000 + (2\,200 - x)^2$$

$$\text{Suy ra } MB = \sqrt{360\,000 + (2\,200 - x)^2} \text{ (m).}$$

Khi đó, tổng khoảng cách $MA + MB$ theo x là:

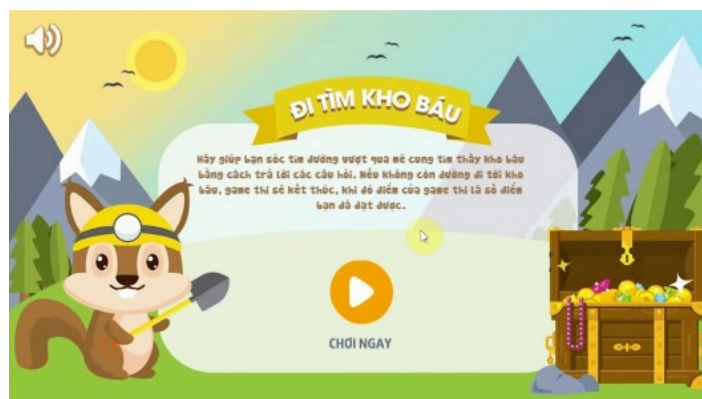
$$MA + MB = \sqrt{250\,000 + x^2} + \sqrt{360\,000 + (2\,200 - x)^2} \text{ (m).}$$

b) Khi $x = 1\,200$, ta có tổng khoảng cách $MA + MB$ là:

$$\begin{aligned} MA + MB &= \sqrt{250\,000 + 1\,200^2} + \sqrt{360\,000 + (2\,200 - 1\,200)^2} \\ &= \sqrt{1\,690\,000} + \sqrt{360\,000 + 1\,000^2} \\ &= 1\,300 + \sqrt{1\,360\,000} \approx 2\,466 \text{ (m).} \end{aligned}$$

Vậy tổng khoảng cách $MA + MB$ khoảng 2 466 m khi $x = 1\,200$.

Bài 9. Trò chơi “tìm kho báu” là một trò chơi quốc tế, rất phổ biến trong sinh hoạt Đoàn Đội. Ai đã một lần chơi sẽ cảm nhận được tính thú vị, hấp dẫn và lôi cuốn của nó, nhất là với các bạn yêu thích khám phá. Trong trò chơi bạn An phải giải bài toán có nội dung sau: “Số để bấm vào khóa mở được cửa kho báu bằng giá trị $\sqrt{(n^2 + 2)(n^2 + 4)} + 1$ khi $n = 10$ ”. Em hãy trình bày cách tìm ra số để bạn An bấm vào ổ khóa số mở cửa kho báu nhé.



Lời giải

Thay $n = 10$ vào công thức $\sqrt{(n^2 + 2)(n^2 + 4)} + 1$, ta được:

$$\sqrt{(10^2 + 2)(10^2 + 4)} + 1 = \sqrt{(100 + 2)(100 + 4)} + 1 = \sqrt{102 \cdot 104} + 1 = \sqrt{10608} + 1 = 103$$

Vậy số để bạn An bấm vào ổ khóa số mở cửa kho báu là 103

Bài 10. Vận tốc v (tính bằng m/s) của một vật thể nặng m (tính bằng kg) được tác động một lực E_k (gọi là năng lượng Kinetic Energy, ký hiệu E_k , tính bằng Joule) được cho bởi công thức:

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}}$$



a) Hãy tính vận tốc của một quả banh bowling nặng 3kg khi một người tác động một lực $E_k = 18\text{J}$?

b) Muốn lăn một quả bowling nặng 3kg với vận tốc 6m/s, thì cần sử dụng năng lượng Kinetic E_k bao nhiêu Joule?

Lời giải

a) Thay $E_k = 18, m = 3$ vào công thức $v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}}$, ta được: $v = \sqrt{\frac{2 \cdot 18}{3}} \approx 3,46\text{m/s}$

Vậy vận tốc của một quả banh bowling là 3,46m/s

b) Thay $v = 6, m = 3$ vào công thức $v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}}$, ta được: $\sqrt{\frac{2E_k}{3}} = 6 \Rightarrow \frac{2E_k}{3} = 36 \Rightarrow E_k = 54\text{J}$

Vậy cần sử dụng năng lượng Kinetic $E_k = 54\text{J}$

Bài 11. Điện áp V (tính theo volt) yêu cầu cho một mạch điện được cho bởi công thức $V = \sqrt{PR}$, trong đó P là công suất (tính theo watt) và R là điện trở trong (tính theo ohm).



a) Cần bao nhiêu volt để thắp sáng một bóng đèn A có công suất 100 watt và điện trở của mỗi bóng đèn là 110 ohm?

b) Bóng đèn B có điện áp bằng 110 volt, điện trở trong là 88 ohm có công suất lớn hơn bóng đèn A không? Giải thích.

Lời giải

a) Thay $P = 100, R = 110$ vào công thức $V = \sqrt{PR}$, ta được: $V = \sqrt{100 \cdot 110} \approx 104,88$ (volt)

Vậy số volt để thắp sáng một bóng đèn A là 104,88 (volt)

b) Thay $V = 110, R = 88$ vào công thức $V = \sqrt{PR}$, ta được:

$$\sqrt{P \cdot 88} = 110 \Rightarrow P \cdot 88 = (110)^2 \Rightarrow P = \frac{(110)^2}{88} \approx 137,50 \text{ (watt)} > 100 \text{ (watt)}$$

Vậy bóng đèn B có công suất lớn hơn bóng đèn A

Bài 12. Tốc độ của một chiếc canô và độ dài đường sóng nước để lại sau đuôi của nó được cho bởi công thức $v = 5\sqrt{l}$. Trong đó, l là độ dài đường nước sau đuôi canô (mét), v là vận tốc canô (m/giây).



a) Một canô đi từ Năm Căn về huyện Đất Mũi (Cà Mau) để lại đường sóng nước sau đuôi dài $7 + 4\sqrt{3}$ m.

Hỏi vận tốc của canô?

b) Khi canô chạy với vận tốc 54km/giờ thì đường sóng nước để lại sau đuôi chiếc canô dài bao nhiêu mét?

Lời giải

a) Thay $l = 7 + 4\sqrt{3}$ vào công thức $v = 5\sqrt{l}$, ta được:

$$v = 5\sqrt{l} = 5\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} \approx 18,66\text{m/s} \approx 67,18\text{km/h}$$

Vậy vận tốc của canô là 18,66m/s hay 67,18km/h.

b) Thay $v = 54\text{km/h} = 15\text{m/s}$ vào công thức $v = 5\sqrt{l}$, ta được: $5\sqrt{l} = 15 \Rightarrow \sqrt{l} = 3 \Rightarrow l = 9\text{m}$

Vậy đường sóng nước để lại sau đuôi chiếc canô dài 9m

Bài 13. Sóng thần (tsunami) là một loạt các đợt sóng tạo nên khi một thể tích lớn của nước đại dương bị dịch chuyển chớp nhoáng trên một quy mô lớn. Động đất cùng những dịch chuyển địa chất lớn bên trên hoặc bên dưới mặt nước, núi lửa phun và va chạm thiên thạch đều có khả năng gây ra sóng thần. Con sóng thần khởi phát từ dưới đáy biển sâu, khi còn ngoài xa khơi, sóng có biên độ (chiều cao sóng) khá nhỏ nhưng chiều dài của con sóng lên đến hàng trăm km. Con sóng đi qua đại dương với tốc độ trung bình 500 dặm một giờ. Khi tiến tới đất liền, đáy biển trở nên nông, con sóng không còn dịch chuyển nhanh được nữa, vì thế nó bắt đầu “dựng đứng lên” có thể đạt chiều cao một tòa nhà sáu tầng hay hơn nữa và tàn phá khủng khiếp.

Tốc độ của con sóng thần và chiều sâu của đại dương liên hệ bởi công thức $s = \sqrt{dg}$. Trong đó, $g = 9,81\text{m/s}^2$, d (deep) là chiều sâu đại dương tính bằng m, s là vận tốc của sóng thần tính bằng m/s.



a) Biết độ sâu trung bình của đại dương trên trái đất là $d = 3790$ mét hãy tính tốc độ trung bình của các con sóng thần xuất phát từ đáy các đại dương theo km/h.

b) Susan Kieffer, một chuyên gia về cơ học chất lỏng địa chất của đại học Illinois tại Mỹ, đã nghiên cứu năng lượng của trận sóng thần Tohoku 2011 tại Nhật Bản. Những tính toán của Kieffer cho thấy tốc độ sóng thần vào xấp xỉ 220 m/giây. Hãy tính độ sâu của đại dương nơi xuất phát con sóng thần này.

Lời giải

a) Thay $d = 3790$; $g = 9,81$ vào công thức $s = \sqrt{dg}$, ta được:

$$s = \sqrt{3790 \cdot 9,81} \approx 193 \text{ m/s} = 694,8 \text{ km/h}$$

Vậy tốc độ trung bình của các con sóng thần là 193m/s

b) Thay $s = 220$; $g = 9,81$ vào công thức $s = \sqrt{dg}$, ta được:

$$\sqrt{9,81 \cdot d} = 220 \Rightarrow 9,81 \cdot d = (220)^2 \Rightarrow d = \frac{(220)^2}{9,81} \approx 4934 \text{ m}$$

Vậy độ sâu của đại dương nơi xuất phát con sóng thần này là 4934m

Bài 14. Vận tốc v (m/s) của một tàu lượn di chuyển trên một cung tròn có bán kính r (m) được cho bởi công thức: $v = \sqrt{ar}$. Trong đó a là gia tốc của tàu (m/s^2) (gia tốc là đại lượng vật lý đặc trưng cho sự thay đổi của vận tốc theo thời gian. Nó là một trong những đại lượng cơ bản dùng để mô tả chuyển động và là độ biến thiên của vận tốc theo thời gian).



a) Nếu tàu lượn đang chạy với vận tốc $v = 14 \text{ m/s}$ và muốn đạt mức gia tốc tối đa cho phép là $a = 9 \text{ m/s}^2$ thì bán kính tối thiểu của cung tròn phải là bao nhiêu để xe không văng ra khỏi đường ray?

b) Nếu tàu lượn đang di chuyển với vận tốc $v = 8 \text{ m/s}$ xung quanh một cung tròn có bán kính $r = 25 \text{ m}$ thì có gia tốc tối đa cho phép là bao nhiêu?

Lời giải

a) Thay $v = 14$; $a = 9$ vào công thức $v = \sqrt{ar}$, ta được:

$$\sqrt{9r} = 14 \Rightarrow 9r = 196 \Rightarrow r = 21,8 \text{ m}$$

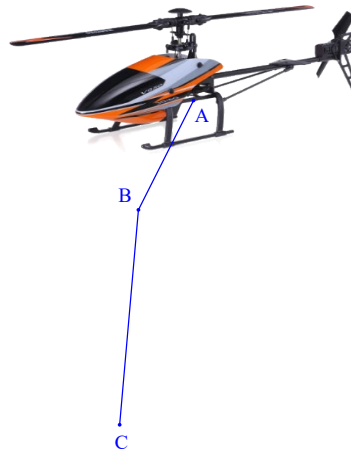
Vậy bán kính tối thiểu của cung tròn phải là 21,8m.

b) Thay $v = 8$; $r = 25$ vào công thức $v = \sqrt{ar}$, ta được:

$$\sqrt{25a} = 8 \Rightarrow 25a = 64 \Rightarrow a = 2,56 \text{ m/s}^2$$

Vậy gia tốc tối đa cho phép là 2,56m/s²

Bài 15. Quãng đường đi của một vật rơi tự do không vận tốc đầu cho bởi công thức $S = \frac{1}{2}gt^2$ (trong đó g là gia tốc trọng trường $g \approx 9,8\text{m/s}^2$, t là thời gian rơi tự do, S là quãng đường rơi tự do). Một vận động viên nhảy dù, nhảy khỏi máy bay ở độ cao 3500 mét (vị trí A) với vận tốc ban đầu không đáng kể. Hỏi sau thời gian bao nhiêu giây (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất) vận động viên phải mở dù để khoảng cách từ (vị trí B) đến mặt đất (vị trí C) trong hình vẽ là 1500 mét.



Lời giải

Quãng đường vận động viên nhảy từ vị trí A đến vị trí B là: $S = 3500 - 1500 = 2000\text{m}$

Thay $S = 2000$; $g = 9,8$ vào công thức $S = \frac{1}{2}gt^2$, ta được:

$$2000 = \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{4000}{9,8} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{4000}{9,8}} \approx 20,2 \text{ giây}$$

Vậy vận động viên phải mở dù sau thời gian 20,2 giây.

Bài 16. Galilei là người phát hiện ra quãng đường chuyển động của vật rơi tự do tỉ lệ thuận với bình phương của thời gian. Quan hệ giữa quãng đường chuyển động y (mét) và thời gian chuyển động x (giây) được biểu diễn gần đúng bởi công thức $y = 5x^2$. Người ta thả một vật nặng từ độ cao 55m trên tháp nghiêng Pi – da xuống đất (sức cản của không khí không đáng kể)



- Hãy cho biết sau 3 giây thì vật nặng còn cách mặt đất bao nhiêu mét?
- Khi vật nặng còn cách đất 25m thì nó đã rơi được thời gian bao lâu?

Lời giải

a) Thay $x = 3$ vào công thức $y = 5x^2$, ta được: $y = 5 \cdot 3^2 = 45\text{m}$

Vậy sau 3 giây thì vật nặng còn cách mặt đất là: $55 - 45 = 10\text{m}$

b) Quãng đường chuyển động của vật nặng còn cách đất 25m là: $55 - 25 = 30\text{m}$

Thay $y = 30$ vào công thức $y = 5x^2$, ta được:

$$30 = 5x^2 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \sqrt{6} \approx 2,4 \text{ (giây)}$$

Vậy thời gian vật nặng rơi được là 2,4 giây

Bài 17. Thời gian t (tính bằng giây) từ khi một người bắt đầu nhảy bungee trên cao cách mặt nước d (tính bằng m) đến khi chạm mặt nước được cho bởi công thức: $t = \sqrt{\frac{3d}{9,8}}$



a) Tìm thời gian một người nhảy bungee từ vị trí cao cách mặt nước 108m đến khi chạm mặt nước?

b) Nếu một người nhảy bungee từ một vị trí khác đến khi chạm mặt nước là 7 giây. Hãy tìm độ cao của người nhảy bungee so với mặt nước?

Lời giải

a) Thay $d = 108$ vào công thức $t = \sqrt{\frac{3d}{9,8}}$, ta được:

$$t = \sqrt{\frac{3 \cdot 108}{9,8}} = 5,75 \text{ giây}$$

Vậy thời gian một người nhảy bungee là 5,75 giây

b) Thay $t = 7$ vào công thức $t = \sqrt{\frac{3d}{9,8}}$, ta được:

$$\sqrt{\frac{3d}{9,8}} = 7 \Rightarrow \frac{3d}{9,8} = 49 \Rightarrow d = \frac{49 \cdot 9,8}{3} = 160,07\text{m}$$

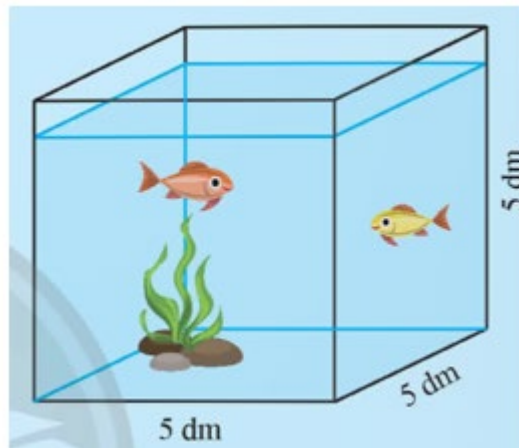
Vậy độ cao của người nhảy bungee so với mặt nước là 160,07m

Bài 18. Thể tích V của một khối lập phương được tính bởi công thức: $V = a^3$ với a là độ dài cạnh của khối lập phương. Viết công thức tính độ dài cạnh của khối lập phương theo thể tích V của nó.

Lời giải

Từ công thức $V = a^3$, ta suy ra $a = \sqrt[3]{V}$

Bài 19. Ông An có một bể kính hình lập phương như Hình vẽ.



Ông An muốn làm thêm một bể kính mới hình lập phương có thể tích gấp n lần thể tích của bể kính cũ (bỏ qua bề dày của kính).

a) Gọi a (dm) là độ dài cạnh của bể kính mới.

Thay mỗi \square bằng biểu thức thích hợp để nhận được các đẳng thức: $a^3 = \square$ hay $a = \square$.

b) Tính giá trị của a khi $n = 8$ và khi $n = 4$ (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

a) Thể tích của bể kính cũ là: $5^3 = 125$ (dm³).

Thể tích của bể kính mới là: a^3 (dm³).

Vì bể kính mới hình lập phương có thể tích gấp n lần thể tích của bể kính cũ nên

$$a^3 = 125n \text{ hay } a = \sqrt[3]{125n} = 5\sqrt[3]{n}$$

$$\text{Vậy } a^3 = \boxed{125n} \text{ hay } a = \boxed{5\sqrt[3]{n}}$$

b) Khi $n = 8$, ta được: $a = 5\sqrt[3]{8} = 5 \cdot 2 = 10$.

Khi $n = 4$, ta được: $a = 5\sqrt[3]{4} \approx 7,94$

Bài 20. Chiều cao ngang vai của một con voi đực ở châu Phi là h (cm) có thể được tính xấp xỉ bằng công thức: $h = 62,5\sqrt[3]{t} + 75,8$ với t là tuổi của con voi tính theo năm.

a) Một con voi đực 8 tuổi ở châu Phi sẽ có chiều cao ngang vai là bao nhiêu centimét?

b) Nếu một con voi đực ở châu Phi có chiều cao ngang vai là 205 cm thì con voi đó bao nhiêu tuổi (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

a) Theo bài, $t = 8$ thay vào biểu thức $h = 62,5\sqrt[3]{t} + 75,8$, ta được:

$$h = 62,5\sqrt[3]{8} + 75,8 = 62,5 \cdot 2 + 75,8 = 200,8 \text{ (cm)}.$$

Vậy nếu con voi đực 8 tuổi ở châu Phi thì có chiều cao ngang vai là 200,8 cm.

b) Theo bài, $h = 205$ (cm), khi đó ta có:

$$205 = 62,5 \cdot \sqrt[3]{t} + 75,8$$

$$62,5 \cdot \sqrt[3]{t} = 205 - 75,8$$

$$\sqrt[3]{t} = \frac{205 - 75,8}{62,5}$$

$$\sqrt[3]{t} = 2,0673$$

$$t = (2,0673)^3$$

$$t \approx 9$$

Vậy nếu con voi đực ở châu Phi có chiều cao ngang vai là 205 cm thì con voi đó khoảng 9 tuổi.

Bài 21. Định luật Kepler về sự chuyển động của các hành tinh trong Hệ mặt trời xác định mối quan hệ giữa chu kỳ quay quanh Mặt Trời của một hành tinh và khoảng cách giữa hành tinh đó với Mặt Trời.

Định luật được cho bởi công thức $d = \sqrt[3]{6t^2}$. Trong đó, d là khoảng cách giữa hành tinh quay xung quanh Mặt Trời và Mặt Trời (đơn vị: triệu dặm, 1 dặm = 1609 mét), t là thời gian hành tinh quay quanh Mặt Trời đúng một vòng (đơn vị: ngày của Trái Đất).



a) Trái Đất quay quanh Mặt Trời trong 365 ngày. Hãy tính khoảng cách giữa Trái Đất và Mặt Trời theo km.

b) Một năm Sao Hỏa dài bằng 687 ngày trên Trái Đất, nghĩa là Sao Hỏa quay xung quanh Mặt Trời đúng một vòng với thời gian bằng 687 ngày Trái Đất. Hãy tính khoảng cách giữa Sao Hỏa và Mặt Trời theo km.

Lời giải

a) Thay $t = 365$ vào công thức $d = \sqrt[3]{6t^2}$, ta được:

$$d = \sqrt[3]{6 \cdot 365^2} \approx 92,8 \text{ (triệu dặm)} \approx 149,3 \text{ (triệu km)}$$

Vậy khoảng cách giữa Trái Đất và Mặt Trời 149,3 triệu km

b) Thay $t = 687$ vào công thức $d = \sqrt[3]{6t^2}$, ta được:

$$d = \sqrt[3]{6 \cdot 687^2} \approx 141,478 \text{ (triệu dặm)} \approx 227,6 \text{ (triệu km)}$$

Vậy khoảng cách giữa Sao Hỏa và Mặt Trời 227,6 triệu km

BÀI 4

MỘT SỐ PHÉP BIẾN ĐỔI CĂN THỨC BẬC HAI CỦA BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

1. Căn thức bậc hai của một bình phương

Với mỗi biểu thức A , ta có: $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A, (A \geq 0) \\ -A, (A < 0) \end{cases}$

Chú ý:

- Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

$$\sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B} (B \geq 0) = \begin{cases} A \sqrt{B} (A \geq 0; B \geq 0) \\ -A \sqrt{B} (A < 0; B \geq 0) \end{cases}$$

- Đưa thừa số vào trong dấu căn

$$A \sqrt{B} = \begin{cases} \sqrt{A^2 B} (\text{khi } A \geq 0; B \geq 0) \\ -\sqrt{A^2 B} (\text{khi } A < 0; B \geq 0) \end{cases}$$

2. Căn thức bậc hai của một tích

Với các biểu thức A, B không âm, ta có: $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$

3. Căn thức bậc hai của một thương

Với biểu thức A không âm và biểu thức B dương, ta có: $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$

4. Trục căn thức ở mẫu

- $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A \sqrt{B}}{B} (B > 0)$

- $\frac{C}{\sqrt{A+B}} = \frac{C(\sqrt{A}-B)}{A-B^2} (A \geq 0; A \neq B^2)$

- $\frac{C}{\sqrt{A-B}} = \frac{C(\sqrt{A}+B)}{A-B^2} (A \geq 0; A \neq B^2)$

- $\frac{C}{\sqrt{A+\sqrt{B}}} = \frac{C(\sqrt{A}-\sqrt{B})}{A-B} (A, B \geq 0; A \neq B)$

- $\frac{C}{\sqrt{A-\sqrt{B}}} = \frac{C(\sqrt{A}+\sqrt{B})}{A-B} (A, B \geq 0; A \neq B)$

Chú ý: Để trục căn thức ở mẫu, bình thường ta nhân cả tử và mẫu của phân thức với lượng liên hợp của mẫu và cần các hằng đẳng thức sau: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Các dạng liên hợp cơ bản thường gặp

- $(\sqrt{A}-\sqrt{B})(\sqrt{A}+\sqrt{B}) = A-B$

- $(A-\sqrt{B})(A+\sqrt{B}) = A^2 - B$

DẠNG 1

CĂN THỨC BẬC HAI CỦA MỘT BÌNH PHƯƠNG

$$\bullet \sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A, (A \geq 0) \\ -A, (A < 0) \end{cases}$$

$$\bullet \sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B} (B \geq 0) = \begin{cases} A \sqrt{B} (A \geq 0; B \geq 0) \\ -A \sqrt{B} (A < 0; B \geq 0) \end{cases}$$

$$\bullet A \sqrt{B} = \begin{cases} \sqrt{A^2 B} (\text{khi } A \geq 0; B \geq 0) \\ -\sqrt{A^2 B} (\text{khi } A < 0; B \geq 0) \end{cases}$$

Bài 1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a) $\sqrt{27x^2} (x \geq 0)$

b) $\sqrt{8xy^2} (x \geq 0; y \leq 0)$

c) $\sqrt{25x^3} (x > 0)$

d) $\sqrt{48xy^4} (x \geq 0; y \in R)$

Bài 2. Đưa thừa số vào trong dấu căn

a) $a\sqrt{13} (a \geq 0)$

b) $a\sqrt{\frac{-15}{a}} (a < 0)$

c) $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{12}{a}} (a > 0)$

d) $a\sqrt{2} (a \leq 0)$

Bài 3. Rút gọn các biểu thức sau

a) $\sqrt{64a^2} + 2a (a \geq 0)$

b) $5\sqrt{25a^2} - 25a (a < 0)$

c) $\sqrt{16a^4} + 6a^2$

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = 3\sqrt{9a^6} - 6a^3$

b) $B = \sqrt{a^2 + 6a + 9} + \sqrt{a^2 - 6a + 9}$

Bài 5. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = 4\sqrt{x} - \frac{(x + 6\sqrt{x} + 9)(\sqrt{x} - 3)}{x - 9} (0 \leq x; x \neq 9)$

b) $B = \frac{\sqrt{9x^2 + 12x + 4}}{3x + 2} \left(x \neq \frac{-2}{3} \right)$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

a) $\sqrt{5a^2} (a \leq 0)$

b) $\sqrt{18a^2} (a \geq 0)$

c) $\sqrt{-9b^3} (b \leq 0)$

d) $\sqrt{24a^4 b^8} (a, b \in R)$

Bài 7. Đưa thừa số vào trong dấu căn:

a) $x\sqrt{7} (x \geq 0)$

b) $x\sqrt{15} (x \leq 0)$

c) $\frac{1}{y}\sqrt{19y} (y > 0)$

d) $\frac{1}{3}y\sqrt{\frac{27}{y^2}} (y \leq 0)$

Bài 8. Rút gọn biểu thức

a) $A = 4\sqrt{\frac{25x}{4}} - \frac{8}{3}\sqrt{\frac{9x}{4}} - \frac{4}{3x}\sqrt{\frac{9x^3}{64}} (x \geq 0)$

b) $B = \frac{y}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{1 - 4y + 4y^2} - \frac{3}{2} \left(y \leq \frac{1}{2} \right)$

Bài 9. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = \sqrt{a^2 + 6a + 9} + \sqrt{a^2 - 6a + 9} \quad (-3 \leq a \leq 3)$

b) $B = \sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}} \quad (1 \leq a \leq 2)$

Bài 10. Thực hiện các phép tính

a) $A = 5\sqrt{x} - \frac{(x - 10\sqrt{x} + 25)(\sqrt{x} + 5)}{x - 25} \quad (0 \leq x \neq 25)$

b) $B = \frac{\sqrt{4x^2 - 4x + 1}}{2x - 1} \left(x \neq \frac{1}{2} \right)$

Bài 11. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = \sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}} \quad (1 \leq a \leq 2)$

b) $B = 4x - \sqrt{x^2 - 4x + 4} \quad (x \geq 2)$

c) $C = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} \quad (x \neq 2)$

d) $D = 2x - 1 - \frac{\sqrt{x^2 - 10x + 25}}{x - 5}$

Bài 12. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = \frac{2}{a-2} \cdot \sqrt{2a^8(a^2 - 4a + 4)} \quad (a \neq 2)$

b) $B = 4\sqrt{25u} - \frac{15}{2}\sqrt{\frac{16u}{9}} - \frac{2}{u}\sqrt{\frac{169u^3}{4}} \quad (u > 0)$

c) $C = 5\sqrt{4x} - 3\sqrt{\frac{100x}{9}} - \frac{4}{x}\sqrt{\frac{x^3}{4}} \quad (x > 0)$

d) $D = -\sqrt{36b} - \frac{1}{3}\sqrt{54b} + \frac{1}{5}\sqrt{150b} \quad (b \geq 0)$

e) $E = \frac{1}{3}\sqrt{9 + 6v + v^2} + \frac{4v}{3} + 5 \quad (v \leq -3)$

f) $F = \frac{t}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{4 - 4t + t^2} - 2 \quad (t \leq 2)$

Bài 13. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = \sqrt{64a^2} + 2a$

b) $B = 3\sqrt{9a^6} - 6a^3$

c) $C = (x - y)\sqrt{\frac{xy}{(x - y)^2}} \quad (xy > 0)$

d) $D = \sqrt{\frac{9 - 6x + x^2}{25y^2}}$

e) $E = \frac{3}{2(2x-1)}\sqrt{8x^4(4x^2 - 2x + 1)}$

f) $F = \frac{2}{2a-1}\sqrt{5a^2(1 - 4a + 4a^2)}$

Bài 14. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn: $xy + yz + zx = 1$

Tính: $A = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$

DẠNG 2

CĂN THỨC BẬC HAI CỦA MỘT TÍCH

$$\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$$

Bài 1. Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \sqrt{\frac{-2t}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3t}{8}} \quad (t \leq 0)$$

$$\text{b) } B = \frac{\sqrt{28y^6}}{\sqrt{7y^4}} \quad (y < 0)$$

Bài 2. Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} \quad (x \geq 1)$$

$$\text{b) } B = \sqrt{\sqrt{x^4 + 4} - x^2} \cdot \sqrt{\sqrt{x^4 + 4} + x^2}$$

Bài 3. Rút gọn các biểu thức

$$\text{a) } A = \frac{u - v}{\sqrt{u} + \sqrt{v}} - \frac{\sqrt{u^3} + \sqrt{v^3}}{u - v} \quad (u, v \geq 0; u \neq v)$$

$$\text{b) } B = \frac{x^2 - 2x\sqrt{2} + 2}{x^2 - 2} \quad (x \neq \pm\sqrt{2})$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{x + 2\sqrt{xy} + y} \quad (x \geq 0; y \geq 0; xy \neq 0)$$

$$\text{b) } B = \frac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{x - 2\sqrt{xy} + y} \quad (x \geq 0; y \geq 0; x \neq y)$$

$$\text{c) } C = \frac{3\sqrt{a} - 2a - 1}{4a - 4\sqrt{a} + 1} \quad (a \geq 0; a \neq \frac{1}{4})$$

Bài 5. Rút gọn biểu thức (giả sử các biểu thức đều có nghĩa)

$$\text{a) } A = \sqrt{\frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{x + 2\sqrt{x} + 1}}$$

$$\text{b) } B = \frac{x - 1}{\sqrt{y} - 1} \cdot \sqrt{\frac{(y - 2\sqrt{y} + 1)^2}{(x - 1)^4}}$$

Bài 6. Rút gọn biểu thức (giả sử các biểu thức đều có nghĩa)

$$\text{a) } A = \frac{a + 4\sqrt{a} + 4}{\sqrt{a} + 2} + \frac{4 - a}{\sqrt{a} - 2}$$

$$\text{b) } B = \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$$

DẠNG 3

CĂN THỨC BẬC HAI CỦA MỘT THƯƠNG

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$$

Bài 1. Rút gọn các biểu thức

a) $P = xy^2 \sqrt{\frac{5}{x^2 y^4}}$ với $x < 0; y \neq 0$

b) $Q = \sqrt{\frac{36(a-4)^2}{144}}$ với $a < 4$

Bài 2. Cho $A = \sqrt{\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{b}+1}} : \sqrt{\frac{\sqrt{b}-1}{\sqrt{a}+1}}$

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tính giá trị A tại $a = 7,25; b = 3,25$

Bài 3. Cho $A = \frac{x+3}{2-\sqrt{y}} \cdot \sqrt{\frac{y-4\sqrt{y}+4}{(z+3)^4}}$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tính giá trị A , biết $x = 2$ và $y = 16$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = \frac{2u + \sqrt{uv} - 3v}{2u - 5\sqrt{uv} + 3v}$ ($u \geq 0; v \geq 0; u \neq \frac{9}{4}v$)

b) $B = \frac{x + \sqrt{5}}{x^2 + 2x\sqrt{5} + 5}$ ($x \neq -\sqrt{5}$)

c) $C = 0,2x^3 y^3 \sqrt{\frac{16}{x^4 y^8}}$ ($x \neq 0; y \neq 0$)

d) $D = \frac{x-1}{\sqrt{y}-1} \sqrt{\frac{(y-2\sqrt{y}+1)^2}{(x-1)^4}}$

Bài 5. Rút gọn các biểu thức

a) $H = (\sqrt{a^3 b} + \sqrt{ab^3} - ab) : \sqrt{ab}$

b) $E = \sqrt{\frac{9-6x+x^2}{(x-3)^2}}$ với $x > 3$

c) $F = (x-y) \sqrt{\frac{xy}{(x-y)^2}}$ với $x < y < 0$

d) $T = \sqrt{\frac{(x-1)^4}{(2-x)^2}} + \frac{x^2-2}{x-2}$ với $x < 2$

Bài 6. Rút gọn các biểu thức

a) $A = \frac{x^2 - 2x\sqrt{2} + 2}{x^2 - 2}$ ($x \neq \pm\sqrt{2}$)

b) $B = \frac{x-2024}{x^2 + 2x\sqrt{2024} + 2024}$ ($x \neq -\sqrt{2024}$)

Bài 7. Rút gọn các biểu thức rồi tính

a) $A = 5x - \sqrt{125} + \frac{\sqrt{x^3 + 5x^2}}{\sqrt{x+5}}$ ($x \geq 0$) tại $x = \sqrt{5}$

b) $B = \sqrt{a^2 + 2\sqrt{a^2 - 1}} - \sqrt{a^2 - 2\sqrt{a^2 - 1}}$ tại $a = \sqrt{5}$

CHỦ ĐỀ 2

TRỤC CĂN THỨC

$$\bullet \frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B} \quad (B > 0)$$

$$\bullet \frac{C}{\sqrt{A+B}} = \frac{C(\sqrt{A}-B)}{A-B^2} \quad (A \geq 0; A \neq B^2)$$

$$\bullet \frac{C}{\sqrt{A-B}} = \frac{C(\sqrt{A}+B)}{A-B^2} \quad (A \geq 0; A \neq B^2)$$

$$\bullet \frac{C}{\sqrt{A+\sqrt{B}}} = \frac{C(\sqrt{A}-\sqrt{B})}{A-B} \quad (A, B \geq 0; A \neq B)$$

$$\bullet \frac{C}{\sqrt{A-\sqrt{B}}} = \frac{C(\sqrt{A}+\sqrt{B})}{A-B} \quad (A, B \geq 0; A \neq B)$$

Chú ý: Để trục căn thức ở mẫu, bình thường ta nhân cả tử và mẫu của phân thức với lượng liên hợp của mẫu và cần các hằng đẳng thức sau: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Các dạng liên hợp cơ bản thường gặp

$$\bullet (\sqrt{A}-\sqrt{B})(\sqrt{A}+\sqrt{B}) = A-B$$

$$\bullet (A-\sqrt{B})(A+\sqrt{B}) = A^2 - B$$

DẠNG 1

TRỤC CĂN THỨC BIỂU THỨC CHỨA SỐ THỰC

Bài 1. Khử căn thức ở mẫu số các phân số

a) $\sqrt{\frac{7}{108}}$

b) $\sqrt{\frac{5}{6}}$

c) $\sqrt{\frac{10}{13}}$

d) $\sqrt{\frac{4}{75}}$

e) $\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{2}}$

f) $\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{3}}$

Bài 2. Trục căn thức ở mẫu và rút gọn

a) $\frac{1}{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}}$

b) $\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}$

Bài 3. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = \frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{2-\sqrt{2}}$

b) $B = \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{24}+1} - \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{24}-1}$

c) $C = \left(\frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{4}{\sqrt{6}-2} - \frac{12}{3-\sqrt{6}} \right) (\sqrt{6}+11)$

d) $D = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN**Bài 4.** Trục căn thức ở mẫu rồi rút gọn

a) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

b) $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$

Bài 5. Trục căn thức và thực hiện phép tính

a) $A = \left(\frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{4}{\sqrt{6}-2} - \frac{12}{3-\sqrt{6}} \right) (\sqrt{6}+11)$

b) $B = \left(1 - \frac{5+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right) \left(\frac{5-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} - 1 \right)$

Bài 6. Thực hiện phép tính

a) $A = \left(\frac{2}{\sqrt{3}-1} + \frac{3}{\sqrt{3}-2} + \frac{15}{3-\sqrt{3}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}+5}$

b) $B = \left(\frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}} \right) : \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

DẠNG 2
TRỤC CĂN THỨC BIỂU THỨC CHỨA BIẾN

Bài 1. Khử mẫu của mỗi biểu thức dưới dấu căn bậc hai sau

$$\text{a) } \sqrt{\frac{5x^3}{49y}} \quad (x \geq 0; y > 0) \qquad \text{b) } 7xy\sqrt{\frac{-3}{xy}} \quad (x < 0; y > 0)$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 2. Khử mẫu của mỗi biểu thức dưới dấu căn bậc hai sau

$$\text{a) } \sqrt{\frac{5b}{49a^3}} \quad (a > 0, b \geq 0) \qquad \text{b) } \frac{-1}{4}ab\sqrt{\frac{16}{ab}} \quad (a < 0, b < 0)$$

Bài 3. Chứng minh rằng

$$\text{a) } \frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \quad (a, b > 0)$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a+b}{a-b} \quad (a, b \geq 0; a \neq b)$$

$$\text{c) } \frac{(a\sqrt{b} + b)(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a-b} \cdot \sqrt{\frac{ab + b^2 - 2\sqrt{ab^3}}{a(a + 2\sqrt{b}) + b}} = b \quad (a, b > 0)$$

CHỦ ĐỀ 3
RÚT GỌN BIỂU THỨC

DẠNG 1
RÚT GỌN BIỂU THỨC RỒI TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC TẠI GIÁ TRỊ CHO TRƯỚC

Bài 1. Cho biểu thức $C = \frac{\sqrt{2x+2\sqrt{x^2-4}}}{\sqrt{x^2-4}+x+2}$ với $x \neq -2$

- Rút gọn C .
- Tính giá trị của biểu thức C khi $x = 2\sqrt{6} + 3$.

Bài 2. Cho biểu thức $C = \frac{a}{a-16} - \frac{2}{\sqrt{a}-4} - \frac{2}{\sqrt{a}+4}$ với $a \geq 0, a \neq 16$

- Rút gọn C .
- Tính giá trị của biểu thức C khi $a = 9 - 4\sqrt{5}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Cho biểu thức $M = \left(\frac{1}{a-\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}-1} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}+1}$ với $a \geq 0, a \neq 1$

- Rút gọn biểu thức M .
- Tính giá trị của biểu thức M khi $a = 16$.

Bài 4. Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{a-\sqrt{a}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{a}+1} + \frac{2}{a-1} \right)$ với $0 < a \neq 1$

- Rút gọn A .
- Tính giá trị của biểu thức A khi $a = 4 + 2\sqrt{3}$.

Bài 5. Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} - \frac{x-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x-x}} \right)$ với $x \geq 1; x \neq 2; x \neq 3$

- Rút gọn biểu thức P .
- Tính giá trị của P với $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

Bài 6. Cho $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} - \frac{10\sqrt{x}}{x-25} - \frac{5}{\sqrt{x}+5}$ với $x \geq 0, x \neq 25$

- Rút gọn biểu thức A
- Tính giá trị của A với $x = 4 - 2\sqrt{3}$.

Bài 7. Cho biểu thức $A = \frac{1}{2+\sqrt{x}} + \frac{1}{2-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{4-x}$ ($x \geq 0, x \neq 4$).

- a) Rút gọn A .
 b) Tính giá trị của A với $x = 3$.

Bài 8. Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0; x \neq 1$

- a) Rút gọn P .
 b) Tính giá trị của P với $x = \frac{25}{9}$.

Bài 9. Cho biểu thức $B = \left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^3}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) \left(\frac{1+\sqrt{x^3}}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$

- a) Rút gọn B .
 b) Tính giá trị của B với $x = \frac{1}{121}$.

Bài 10. Cho biểu thức $P = \left[\frac{x+3\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{x+\sqrt{x}}{x-1} \right] : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right)$ ($x > 0; x \neq 1$)

- a) Rút gọn biểu thức P .
 b) Tính giá trị của P với $x = 64$.

DẠNG 2**TÌM x ĐỂ BIỂU THỨC RÚT GỌN LÀ SỐ NGUYÊN**

Bài toán: Cho biểu thức $A = \frac{a}{cx+d}$ hoặc $A = \frac{a}{c\sqrt{x+d}}$. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $A \in \mathbb{Z}$

Phương pháp:

- Lập luận: $A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$ Mẫu thức là Ư(a)
- Liệt kê Ư(a)
- Mẫu thức bằng Ư(a) tìm ra x

Chú ý: Giá trị $x \in \mathbb{Z}$ tìm được phải thoả mãn điều kiện của biểu thức rút gọn mới nhận.

Bài 1. Cho biểu thức $A = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}}$ ($x > 0, x \neq 4$).

- Rút gọn biểu thức A .
- Tìm x sao cho A nhận giá trị là một số nguyên.

Bài 2. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} + \frac{4}{\sqrt{x}-4} \right) : \frac{x+16}{\sqrt{x}+2}$ (với $x \geq 0, x \neq 16$).

Hãy tìm các giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức $M = B(A-1)$ là số nguyên.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Cho biểu thức $A = \frac{15\sqrt{x}-19}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

- Rút gọn A
- Tìm x nguyên để A có giá trị nguyên.

Bài 4. Cho biểu thức $M = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$

- Rút gọn A
- Tìm x nguyên để A có giá trị nguyên.

Bài 5. Cho biểu thức $Q = \frac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

- Rút gọn A
- Tìm x nguyên để A có giá trị nguyên.

Bài 6. Cho biểu thức $A = \left(\frac{6x+4}{3\sqrt{3x^3}-8} - \frac{\sqrt{3x}}{3x+2\sqrt{3x}+4} \right) \left(\frac{1+3\sqrt{3x^3}}{1+\sqrt{3x}} - \sqrt{3x} \right)$ với $x \geq 0; x \neq 4$

- Rút gọn biểu thức A
- Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên

DẠNG 3

TÌM GTLN – GTNN CỦA BIỂU THỨC RÚT GỌN

Bài 1. Cho biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+9}{x-9}$, với $x \geq 0, x \neq 9$.

- Rút gọn P.
- Tìm giá trị lớn nhất của P.

Bài 2. Cho biểu thức: $P = \frac{x\sqrt{x}+5\sqrt{x}-12}{x-\sqrt{x}-6} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

- Rút gọn biểu thức P
- Tìm giá trị nhỏ nhất của P

Bài 3. Cho biểu thức $A = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right] : \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3}}$ với $x > 0, y > 0$

- Rút gọn A.
- Biết $x \cdot y = 16$. Tìm các giá trị của x, y để A có giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị đó.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Cho biểu thức $P = \frac{3x+6\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}+2}{1-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

- Rút gọn A.
- Tìm giá trị lớn nhất của P và giá trị x tương ứng.

Bài 5. Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} + \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{1-\sqrt{xy}} + 1 \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} \right)$.

- Rút gọn biểu thức A.
- Cho $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của A.

CHỦ ĐỀ 4

ỨNG DỤNG

Bài 1. Áp suất P (lb/in²) cần thiết để ép nước qua một ống dài L (ft) và đường kính d (in) với tốc độ v (ft/s) được cho bởi công thức: $P = 0,00161 \cdot \frac{v^2 L}{d}$

a) Hãy tính v theo P , L và d .

b) Cho $P = 198,5$; $L = 11\,560$; $d = 6$. Hãy tính tốc độ v (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của feet trên giây).

$$1 \text{ in} = 2,54 \text{ cm};$$

$$1 \text{ ft (feet)} = 0,3048 \text{ m};$$

$$1 \text{ lb (pound)} = 0,45359237 \text{ kg};$$

$$1 \text{ lb/in}^2 = 6\,894,75729 \text{ Pa (Pascal)}.$$

Bài 2. Trong thuyết tương đối, khối lượng m (kg) của một vật khi chuyển động với vận tốc v (m/s) được cho bởi công thức $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, trong đó m_0 (kg) là khối lượng của vật khi đứng yên, c (m/s) là vận tốc

của ánh sáng trong chân không

a) Viết lại công thức tính khối lượng m dưới dạng không có căn thức ở mẫu.

b) Tính khối lượng m theo m_0 (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba) khi vật chuyển động với vận tốc $v = \frac{1}{10}c$.

Bài 3. Khi bay vào không gian, trọng lượng P (N) của một phi hành gia ở vị trí cách mặt đất một độ cao h (m) được tính theo công thức: $P = \frac{28014 \cdot 10^{12}}{(64 \cdot 10^5 + h)^2}$

a) Trọng lượng của phi hành gia là bao nhiêu Newton khi cách mặt đất 10 000 m (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

b) Ở độ cao bao nhiêu mét thì trọng lượng của phi hành gia là 619 N (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Bài 4. Ngày 28/9/2018, sau trận động đất 7,5 độ Richter, cơn sóng thần (tiếng Anh là Tsunami) cao hơn 6 m đã tràn vào đảo Sulawesi (Indonesia) và tàn phá thành phố Palu gây thiệt hại vô cùng to lớn. Tốc độ

cơn sóng thần v (m/s) và chiều sâu đại dương d (m) của nơi bắt đầu sóng thần liên hệ bởi công thức $v = \sqrt{dg}$, trong đó $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.



Sóng thần

- a) Hãy tính tốc độ cơn sóng thần xuất phát từ Thái Bình Dương, ở độ sâu trung bình 400 m (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét trên giây).
- b) Theo tính toán của các nhà khoa học địa chất, tốc độ cơn sóng thần ngày 28/9/2018 là 800 km/h, hãy tính chiều sâu đại dương của nơi tâm chấn động đất gây ra sóng thần (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).

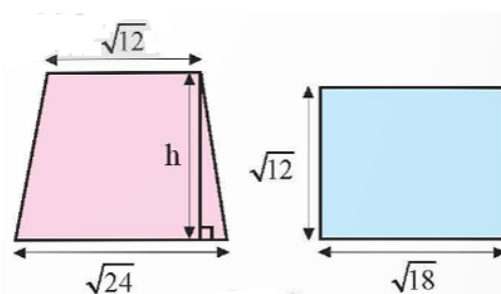
Bài 5. Biết rằng nhiệt lượng toả ra trên dây dẫn được tính bởi công thức $Q = I^2Rt$, trong đó Q là nhiệt lượng tính bằng đơn vị Joule (J), R là điện trở tính bằng đơn vị Ohm (Ω), I là cường độ dòng điện tính bằng đơn vị Ampe (A), t là thời gian tính bằng giây (s). Dòng điện chạy qua một dây dẫn có $R = 10 \Omega$ trong thời gian 5 giây.

- a) Thay dấu "?" trong bảng sau bằng các giá trị thích hợp.

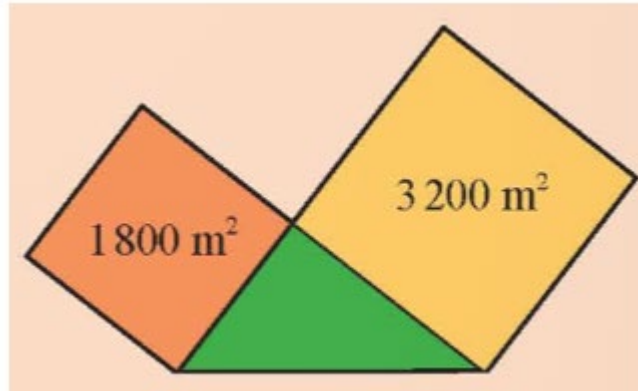
I (A)	1	1,5	2
Q (J)	?	?	?

- b) Cường độ dòng điện là bao nhiêu Ampe để nhiệt lượng toả ra trên dây dẫn đạt 800 J?

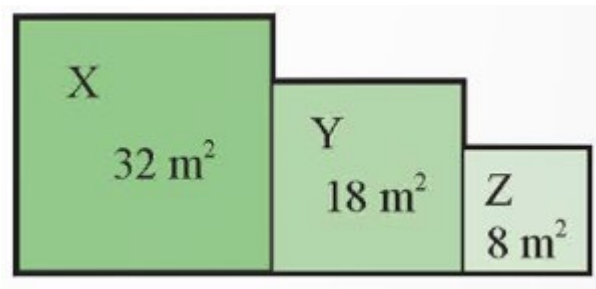
Bài 6. Biết rằng hình thang và hình chữ nhật ở hình vẽ có diện tích bằng nhau. Tính chiều cao h của hình thang.



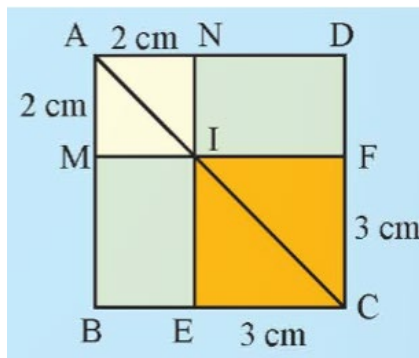
Bài 7. Một khu đất hình tam giác vuông tiếp giáp hai thửa ruộng hình vuông có diện tích như hình vẽ bên dưới. Khu đất hình tam giác vuông có chu vi bằng chu vi thửa ruộng hình vuông bé không?



Bài 8. Một vườn hoa gồm ba thửa hình vuông X, Y, Z lần lượt có diện tích như hình vẽ. Tính chu vi của vườn hoa đó.



Bài 9. Hình vuông ABCD được chia thành hai hình vuông và hai hình chữ nhật như hình vẽ.



- Tính độ dài đường chéo của hai hình vuông AMIN và CEIF.
- Tính độ dài đường chéo của hình vuông ABCD theo hai cách khác nhau.

BÀI 4**MỘT SỐ PHÉP BIẾN ĐỔI CĂN THỨC BẬC HAI CỦA BIỂU THỨC ĐẠI SỐ****1. Căn thức bậc hai của một bình phương**

Với mỗi biểu thức A , ta có: $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A, (A \geq 0) \\ -A, (A < 0) \end{cases}$

Chú ý:

- Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

$$\sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B} (B \geq 0) = \begin{cases} A \sqrt{B} (A \geq 0; B \geq 0) \\ -A \sqrt{B} (A < 0; B \geq 0) \end{cases}$$

- Đưa thừa số vào trong dấu căn

$$A \sqrt{B} = \begin{cases} \sqrt{A^2 B} (\text{khi } A \geq 0; B \geq 0) \\ -\sqrt{A^2 B} (\text{khi } A < 0; B \geq 0) \end{cases}$$

2. Căn thức bậc hai của một tích

Với các biểu thức A, B không âm, ta có: $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$

3. Căn thức bậc hai của một thương

Với biểu thức A không âm và biểu thức B dương, ta có: $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$

4. Trục căn thức ở mẫu

- $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A \sqrt{B}}{B} (B > 0)$

- $\frac{C}{\sqrt{A+B}} = \frac{C(\sqrt{A}-B)}{A-B^2} (A \geq 0; A \neq B^2)$

- $\frac{C}{\sqrt{A-B}} = \frac{C(\sqrt{A}+B)}{A-B^2} (A \geq 0; A \neq B^2)$

- $\frac{C}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A}-\sqrt{B})}{A-B} (A, B \geq 0; A \neq B)$

- $\frac{C}{\sqrt{A}-\sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A}+\sqrt{B})}{A-B} (A, B \geq 0; A \neq B)$

Chú ý: Để trục căn thức ở mẫu, bình thường ta nhân cả tử và mẫu của phân thức với lượng liên hợp của mẫu và cần các hằng đẳng thức sau: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Các dạng liên hợp cơ bản thường gặp

- $(\sqrt{A}-\sqrt{B})(\sqrt{A}+\sqrt{B}) = A-B$

- $(A-\sqrt{B})(A+\sqrt{B}) = A^2 - B$

DẠNG 1

CĂN THỨC BẬC HAI CỦA MỘT BÌNH PHƯƠNG

$$\bullet \sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A, (A \geq 0) \\ -A, (A < 0) \end{cases}$$

$$\bullet \sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B} (B \geq 0) = \begin{cases} A \sqrt{B} (A \geq 0; B \geq 0) \\ -A \sqrt{B} (A < 0; B \geq 0) \end{cases}$$

$$\bullet A \sqrt{B} = \begin{cases} \sqrt{A^2 B} (\text{khi } A \geq 0; B \geq 0) \\ -\sqrt{A^2 B} (\text{khi } A < 0; B \geq 0) \end{cases}$$

Bài 1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a) $\sqrt{27x^2} (x \geq 0)$

b) $\sqrt{8xy^2} (x \geq 0; y \leq 0)$

c) $\sqrt{25x^3} (x > 0)$

d) $\sqrt{48xy^4} (x \geq 0; y \in R)$

Lời giải

a) $\sqrt{27x^2} = \sqrt{(3x)^2 \cdot 3} = |3x| \sqrt{3} = 3\sqrt{3}x (x \geq 0)$

b) $\sqrt{8xy^2} = \sqrt{(2y)^2 \cdot 2x} = |2y| \sqrt{2x} = -2y \sqrt{2x} (x \geq 0; y \leq 0)$

c) $\sqrt{25x^3} = \sqrt{(5x)^2 \cdot x} = |5x| \sqrt{x} = 5x \sqrt{x} (x > 0)$

d) $\sqrt{48xy^4} = \sqrt{16 \cdot 3xy^4} = \sqrt{(4y^2)^2 \cdot 3x} = |4y^2| \sqrt{3x} = 4y^2 \sqrt{3x} (y^2 \geq 0)$

Bài 2. Đưa thừa số vào trong dấu căn

a) $a\sqrt{13} (a \geq 0)$

b) $a\sqrt{\frac{-15}{a}} (a < 0)$

c) $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{12}{a}} (a > 0)$

d) $a\sqrt{2} (a \leq 0)$

Lời giải

a) $a\sqrt{13} = \sqrt{13a^2} (a \geq 0)$

b) $a\sqrt{\frac{-15}{a}} = -(-a)\sqrt{\frac{-15}{a}} = -\sqrt{\frac{-15a^2}{a}} = -\sqrt{-15a} (a < 0)$

c) $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{12}{a}} = \sqrt{\frac{12}{a} \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{12 \cdot a^2}{4 \cdot a}} = \sqrt{3a} (a > 0)$

d) $a\sqrt{2} = (-a)\sqrt{2} = -\sqrt{2a^2} (a \leq 0)$

Bài 3. Rút gọn các biểu thức sau

$$\text{a) } \sqrt{64a^2} + 2a \quad (a \geq 0) \qquad \text{b) } 5\sqrt{25a^2} - 25a \quad (a < 0) \qquad \text{c) } \sqrt{16a^4} + 6a^2$$

Lời giải

$$\text{a) } \sqrt{64a^2} + 2a = \sqrt{(8a)^2} + 2a = |8a| + 2a = 10a \quad (a \geq 0)$$

$$\text{b) } 5\sqrt{25a^2} - 25a = 5\sqrt{(5a)^2} - 25a = 5|5a| - 25a = 5 \cdot (-5a) - 25a = -50a \quad (a < 0)$$

$$\text{c) } \sqrt{16a^4} + 6a^2 = |4a^2| + 6a^2 = 4a^2 + 6a^2 = 10a^2 \quad (\text{với } a \text{ bất kỳ})$$

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau

$$\text{a) } A = 3\sqrt{9a^6} - 6a^3 \qquad \text{b) } B = \sqrt{a^2 + 6a + 9} + \sqrt{a^2 - 6a + 9}$$

Lời giải

$$\text{b) } A = 3\sqrt{9a^6} - 6a^3 = 3\sqrt{(3a^3)^2} - 6a^3 = 3|3a^3| - 6a^3$$

$$+ \text{ Với } a < 0 \Rightarrow A = 3 \cdot |3a^3| - 6a^3 = 3 \cdot (-3a^3) - 6a^3 = -15a^3$$

$$+ \text{ Với } a \geq 0 \Rightarrow A = 3 \cdot |3a^3| - 6a^3 = 9a^3 - 6a^3 = 3a^3$$

$$\text{b) } B = \sqrt{a^2 + 6a + 9} + \sqrt{a^2 - 6a + 9} = |a + 3| + |a - 3|$$

$$+ \text{ Với } a < 3 \Rightarrow B = |a + 3| + |a - 3| = -a - 3 + 3 - a = -2a$$

$$+ \text{ Với } -3 \leq a \leq 3 \Rightarrow B = |a + 3| + |a - 3| = a + 3 + 3 - a = 6$$

$$+ \text{ Với } a > 3 \Rightarrow B = |a + 3| + |a - 3| = a + 3 + a - 3 = 2a$$

Bài 5. Rút gọn các biểu thức sau

$$\text{a) } A = 4\sqrt{x} - \frac{(x + 6\sqrt{x} + 9)(\sqrt{x} - 3)}{x - 9} \quad (0 \leq x; x \neq 9) \qquad \text{b) } B = \frac{\sqrt{9x^2 + 12x + 4}}{3x + 2} \quad \left(x \neq \frac{-2}{3}\right)$$

Lời giải

$$\text{a) } A = 4\sqrt{x} - \frac{(x + 6\sqrt{x} + 9)(\sqrt{x} - 3)}{x - 9} = 4\sqrt{x} - \frac{(\sqrt{x} + 3)^2(\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} = 4\sqrt{x} - (\sqrt{x} + 3) = 3(\sqrt{x} - 1)$$

$$\text{b) } B = \frac{\sqrt{9x^2 + 12x + 4}}{3x + 2} = \frac{\sqrt{(3x + 2)^2}}{3x + 2} = \frac{|3x + 2|}{3x + 2}$$

$$+ \text{ Với } x > -\frac{2}{3} \Rightarrow B = \frac{|3x + 2|}{3x + 2} = \frac{3x + 2}{3x + 2} = 1$$

$$+ \text{ Với } x < -\frac{2}{3} \Rightarrow B = \frac{|3x + 2|}{3x + 2} = \frac{-(3x + 2)}{3x + 2} = -1$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

a) $\sqrt{5a^2}$ ($a \leq 0$) b) $\sqrt{18a^2}$ ($a \geq 0$) c) $\sqrt{-9b^3}$ ($b \leq 0$) d) $\sqrt{24a^4b^8}$ ($a, b \in R$)

Lời giải

a) $\sqrt{5a^2} = |a|\sqrt{5} = -a\sqrt{5}$ ($a \leq 0$)

b) $\sqrt{18a^2} = \sqrt{2(3a)^2} = |3a|\sqrt{2} = 3a\sqrt{2}$ ($a \geq 0$)

c) $\sqrt{-9b^3} = \sqrt{-b(3b)^2} = |3b|\sqrt{-b} = -3b\sqrt{-b}$ ($b \leq 0$)

d) $\sqrt{24a^4b^8} = \sqrt{6(2a^2b^4)^2} = |2a^2b^4|\sqrt{6} = 2\sqrt{6}a^2b^4$ ($a, b \in R$)

Bài 7. Đưa thừa số vào trong dấu căn:

a) $x\sqrt{7}$ ($x \geq 0$) b) $x\sqrt{15}$ ($x \leq 0$) c) $\frac{1}{y}\sqrt{19y}$ ($y > 0$) d) $\frac{1}{3}y\sqrt{\frac{27}{y^2}}$ ($y \leq 0$)

Lời giải

a) $x\sqrt{7} = \sqrt{7x^2}$ ($x \geq 0$)

b) $x\sqrt{15} = (-x)\sqrt{15} = -\sqrt{15x^2}$

c) $\frac{1}{y}\sqrt{19y} = \sqrt{19y \cdot \frac{1}{y^2}} = \sqrt{\frac{19}{y}}$ ($y > 0$)

d) $\frac{1}{3}y\sqrt{\frac{27}{y^2}} = \left(-\frac{1}{3}y\right)\sqrt{\frac{27}{y^2}} = -\sqrt{\frac{27}{y^2}\left(\frac{1}{3}y\right)^2} = -\sqrt{\frac{27}{y^2} \cdot \frac{1}{9}y^2} = -\sqrt{3}$ ($y \leq 0$)

Bài 8. Rút gọn biểu thức

a) $A = 4\sqrt{\frac{25x}{4}} - \frac{8}{3}\sqrt{\frac{9x}{4}} - \frac{4}{3x}\sqrt{\frac{9x^3}{64}}$ ($x \geq 0$) b) $B = \frac{y}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{1-4y+4y^2} - \frac{3}{2}$ ($y \leq \frac{1}{2}$)

Lời giải

a) $A = 4\sqrt{\frac{25x}{4}} - \frac{8}{3}\sqrt{\frac{9x}{4}} - \frac{4}{3x}\sqrt{\frac{9x^3}{64}} = \frac{11}{2}\sqrt{x}$

b) $B = \frac{y}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{1-4y+4y^2} - \frac{3}{2} = -y - \frac{3}{4}$

Bài 9. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = \sqrt{a^2 + 6a + 9} + \sqrt{a^2 - 6a + 9}$ ($-3 \leq a \leq 3$)

b) $B = \sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$ ($1 \leq a \leq 2$)

Lời giải

a) $A = \sqrt{a^2 + 6a + 9} + \sqrt{a^2 - 6a + 9} = \sqrt{(a+3)^2} + \sqrt{(a-3)^2} = |a+3| + |a-3| = a+3+3-a = 6$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } B &= \sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}} \\
 &= \sqrt{a-1+2\sqrt{a-1}+1} + \sqrt{a-1-2\sqrt{a-1}+1} \\
 &= \sqrt{(\sqrt{a-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{a-1}-1)^2} \\
 &= |\sqrt{a-1}+1| + |\sqrt{a-1}-1| \\
 &= \sqrt{a-1}+1 - (\sqrt{a-1}-1) \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

Bài 10. Thực hiện các phép tính

$$\text{a) } A = 5\sqrt{x} - \frac{(x-10\sqrt{x}+25)(\sqrt{x}+5)}{x-25} \quad (0 \leq x \neq 25)$$

$$\text{b) } B = \frac{\sqrt{4x^2-4x+1}}{2x-1} \quad \left(x \neq \frac{1}{2}\right)$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{a) } A &= 5\sqrt{x} - \frac{(x-10\sqrt{x}+25)(\sqrt{x}+5)}{x-25} \\
 &= 5\sqrt{x} - \frac{(\sqrt{x}-5)^2(\sqrt{x}+5)}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} \\
 &= 4\sqrt{x} + 5
 \end{aligned}$$

$$\text{b) } B = \frac{\sqrt{4x^2-4x+1}}{2x-1} = \frac{|2x-1|}{2x-1} \begin{cases} 1 & \left(x > \frac{1}{2}\right) \\ -1 & \left(x < \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } x > \frac{1}{2} \Rightarrow B = \frac{|2x-1|}{2x-1} = \frac{2x-1}{2x-1} = 1$$

$$+ \text{ Với } x < \frac{1}{2} \Rightarrow B = \frac{|2x-1|}{2x-1} = \frac{-(2x-1)}{2x-1} = -1$$

Bài 11. Rút gọn các biểu thức sau

$$\text{a) } A = \sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}} \quad (1 \leq a \leq 2)$$

$$\text{b) } B = 4x - \sqrt{x^2 - 4x + 4} \quad (x \geq 2)$$

$$\text{c) } C = \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} \quad (x \neq 2)$$

$$\text{d) } D = 2x - 1 - \frac{\sqrt{x^2-10x+25}}{x-5}$$

Lời giải

$$\text{a) } A = \sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}} \quad (1 \leq a \leq 2) = |\sqrt{a-1}+1| + |\sqrt{a-1}-1|$$

Với $1 \leq a \leq 2 \Rightarrow \sqrt{a-1}+1 > 0; \sqrt{a-1}-1 \leq 0$, ta được:

$$A = |\sqrt{a-1}+1| + |\sqrt{a-1}-1| = \sqrt{a-1}+1 - \sqrt{a-1}+1 = 2$$

$$\text{b) } \text{Ta có: } B = 4x - \sqrt{x^2 - 4x + 4} \quad (x \geq 2) = 4x - |x-2| = 4x - (x-2) = 3x + 2$$

$$c) C = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} (x \neq -2) = \frac{|x + 2|}{x + 2}$$

- Nếu $x < -2$ thì $A = -1$

- Nếu $x > -2$ thì $A = 1$

$$d) D = 2x - 1 - \frac{\sqrt{x^2 - 10x + 25}}{x - 5} = 2x - 1 - \frac{|x - 5|}{x - 5}$$

+ Nếu $x - 5 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 5 \Rightarrow A = 2x - 1 + 1 = 2x$

+ Nếu $x \geq 5 \Rightarrow A = 2x - 2$

Bài 12. Rút gọn các biểu thức sau

$$a) A = \frac{2}{a-2} \cdot \sqrt{2a^8(a^2 - 4a + 4)} (a \neq 2)$$

$$b) B = 4\sqrt{25u} - \frac{15}{2}\sqrt{\frac{16u}{9}} - \frac{2}{u}\sqrt{\frac{169u^3}{4}} (u > 0)$$

$$c) C = 5\sqrt{4x} - 3\sqrt{\frac{100x}{9}} - \frac{4}{x}\sqrt{\frac{x^3}{4}} (x > 0)$$

$$d) D = -\sqrt{36b} - \frac{1}{3}\sqrt{54b} + \frac{1}{5}\sqrt{150b} (b \geq 0)$$

$$e) E = \frac{1}{3}\sqrt{9 + 6v + v^2} + \frac{4v}{3} + 5 (v \leq -3)$$

$$f) F = \frac{t}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{4 - 4t + t^2} - 2 (t \leq 2)$$

Lời giải

$$a) A = \frac{2}{a-2} \cdot \sqrt{2a^8(a^2 - 4a + 4)} = \frac{2}{a-2} \cdot \sqrt{2a^8(a-2)^2} = \frac{2\sqrt{2}a^4|a-2|}{a-2}$$

+ Nếu $a - 2 > 0 \Rightarrow A = 2\sqrt{2}a^4$

+ Nếu $a - 2 < 0 \Rightarrow A = -2\sqrt{2}a^4$

$$b) B = 4\sqrt{25u} - \frac{15}{2}\sqrt{\frac{16u}{9}} - \frac{2}{u}\sqrt{\frac{169u^3}{4}} = 20\sqrt{u} - 10\sqrt{u} - 13\sqrt{u} = -3\sqrt{u} (u \geq 0)$$

$$c) C = 5\sqrt{4x} - 3\sqrt{\frac{100x}{9}} - \frac{4}{x}\sqrt{\frac{x^3}{4}} = 10\sqrt{x} - 10\sqrt{x} - 2\sqrt{x} = -2\sqrt{x}$$

$$d) D = -\sqrt{36b} - \frac{1}{3}\sqrt{54b} + \frac{1}{5}\sqrt{150b} = -6\sqrt{b} - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \sqrt{6b} + \frac{1}{5} \cdot 5 \cdot \sqrt{6b} = -6\sqrt{b} - \sqrt{6b} + \sqrt{6b} = -6\sqrt{b} (b \geq 0)$$

$$e) E = \frac{1}{3}\sqrt{9 + 6v + v^2} + \frac{4v}{3} + 5 (v \leq -3) = \frac{1}{3}\sqrt{(v+3)^2} + \frac{4v}{3} + 5 = v + 4$$

$$f) F = \frac{t}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{4 - 4t + t^2} - 2 (t \leq 2) = \frac{t}{2} + \frac{3}{2}|2 - t| - 2 = 1 - t (t \leq 2)$$

Bài 13. Rút gọn các biểu thức sau

$$a) A = \sqrt{64a^2} + 2a$$

$$b) B = 3\sqrt{9a^6} - 6a^3$$

$$c) C = (x - y) \sqrt{\frac{xy}{(x - y)^2}} (xy > 0)$$

$$d) D = \sqrt{\frac{9 - 6x + x^2}{25y^2}}$$

$$e) E = \frac{3}{2(2x-1)} \sqrt{8x^4(4x^2 - 2x + 1)}$$

$$f) F = \frac{2}{2a-1} \sqrt{5a^2(1 - 4a + 4a^2)}$$

Lời giải

a) $A = \sqrt{64a^2} + 2a = \sqrt{(8a)^2} + 2a = |8a| + 2a$

+ Với $a \geq 0 \Rightarrow A = |8a| + 2a = 8a + 2a = 10a$

+ Với $a < 0 \Rightarrow A = |8a| + 2a = -8a + 2a = -6a$

b) $B = 3\sqrt{9a^6} - 6a^3 = 3\sqrt{(3a^3)^2} - 6a^3 = 3|3a^3| - 6a^3 \Rightarrow \begin{cases} B = -15a^3 (a < 0) \\ B = 3a^3 (a \geq 0) \end{cases}$

+ Với $a \geq 0 \Rightarrow B = 3|3a^3| - 6a^3 = 3.3a^3 - 6a^3 = 3a^3$

+ Với $a < 0 \Rightarrow B = 3|3a^3| - 6a^3 = 3.(-3a^3) - 6a^3 = -12a^3$

c) Biểu thức có nghĩa khi $xy \geq 0; x \neq y$

$$C = (x-y) \sqrt{\frac{xy}{(x-y)^2}} = (x-y) \cdot \frac{\sqrt{xy}}{|x-y|} = \begin{cases} \sqrt{xy} (x > y) \\ -\sqrt{xy} (x < y) \end{cases}$$

+ Với $x > y \Rightarrow C = (x-y) \cdot \frac{\sqrt{xy}}{|x-y|} = (x-y) \cdot \frac{\sqrt{xy}}{x-y} = \sqrt{xy}$

+ Với $x < y \Rightarrow C = (x-y) \cdot \frac{\sqrt{xy}}{|x-y|} = (x-y) \cdot \frac{\sqrt{xy}}{-(x-y)} = -\sqrt{xy}$

d) Biểu thức có nghĩa khi $y \neq 0$

$$D = \sqrt{\frac{9-6x+x^2}{25y^2}} = \sqrt{\frac{(x-3)^2}{25y^2}} = \sqrt{\left(\frac{x-3}{5y}\right)^2} = \left|\frac{x-3}{3y}\right| = \frac{|x-3|}{|3y|}$$

+ Với $x-3 \geq 0$ và $y > 0$ hoặc $x-3 < 0$ và $y < 0 \Rightarrow D = \frac{|x-3|}{|3y|} = \frac{x-3}{3y}$

+ Với $x-3 \geq 0$ và $y < 0$ hoặc $x-3 < 0$ và $y > 0 \Rightarrow D = \frac{|x-3|}{|3y|} = -\frac{x-3}{3y}$

e) $E = \frac{3}{2(2x-1)} \sqrt{8x^4(4x^2-2x+1)} = \frac{3}{2(2x-1)} \sqrt{2 \cdot (2x^2)^2 \cdot (2x-1)^2} = \frac{3}{2(2x-1)} \cdot 2x^2 \cdot |2x-1| \cdot \sqrt{2}$

$$= \frac{3\sqrt{2}x^2}{2x-1} \cdot |2x-1|$$

+ Với $x > \frac{1}{2} \Rightarrow E = \frac{3\sqrt{2}x^2}{2x-1} \cdot |2x-1| = \frac{3\sqrt{2}x^2}{2x-1} \cdot (2x-1) = 3\sqrt{2}x^2$

+ Với $x < \frac{1}{2} \Rightarrow E = \frac{3\sqrt{2}x^2}{2x-1} \cdot |2x-1| = \frac{3\sqrt{2}x^2}{2x-1} \cdot [-(2x-1)] = -3\sqrt{2}x^2$

f) $F = \frac{2}{2a-1} \sqrt{5a^2(1-4a+4a^2)} = \frac{2}{2a-1} \sqrt{5a^4(1-4a+4a^2)} = \frac{2}{2a-1} \sqrt{5a^4(2a-1)^2} = \frac{2}{2a-1} \cdot 5a^2 |2a-1|$

$$+ \text{ Với } a > \frac{1}{2} \Rightarrow F = \frac{2}{2a-1} \cdot 5a^2 |2a-1| = \frac{2}{2a-1} \cdot 5a^2 (2a-1) = 10a^2$$

$$+ \text{ Với } a < \frac{1}{2} \Rightarrow F = \frac{2}{2a-1} \cdot 5a^2 |2a-1| = \frac{2}{2a-1} \cdot 5a^2 [-(2a-1)] = -10a^2$$

Bài 14. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn: $xy + yz + zx = 1$

$$\text{Tính: } A = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 1+y^2 = (xy + yz + zx) + y^2 = (x+y)(y+z); 1+z^2 = (y+z)(z+x); 1+x^2 = (x+z)(x+y)$$

$$\Rightarrow A = x(y+z) + y(z+x) + z(x+y) = 2(xy + yz + zx) = 2$$

Vậy $A = 2$.

DẠNG 2
CĂN THỨC BẬC HAI CỦA MỘT TÍCH

$$\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$$

Bài 1. Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \sqrt{\frac{-2t}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3t}{8}} \quad (t \leq 0)$$

$$\text{b) } B = \frac{\sqrt{28y^6}}{\sqrt{7y^4}} \quad (y < 0)$$

Lời giải

$$\text{a) } A = \sqrt{\frac{-2t}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3t}{8}} = \sqrt{\frac{-2t}{3} \cdot \frac{3t}{8}} = \sqrt{\frac{-2t \cdot (-3t)}{8}} = \sqrt{\frac{t^2}{4}} = \frac{|t|}{2} = \frac{-t}{2} \quad (t \leq 0)$$

$$\text{b) } B = \frac{\sqrt{28y^6}}{\sqrt{7y^4}} = \sqrt{\frac{28y^6}{7y^4}} = \sqrt{(2y)^2} = |2y| = -2y \quad (y < 0)$$

Bài 2. Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} \quad (x \geq 1)$$

$$\text{b) } B = \sqrt{\sqrt{x^4 + 4} - x^2} \cdot \sqrt{\sqrt{x^4 + 4} + x^2}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } C &= \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \sqrt{(x - \sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1})} \\ &= \sqrt{x^2 - (\sqrt{x^2 - 1})^2} \\ &= \sqrt{x^2 - (x^2 - 1)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } B &= \sqrt{\sqrt{x^4 + 4} - x^2} \cdot \sqrt{\sqrt{x^4 + 4} + x^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{x^4 + 4} - x^2)(\sqrt{x^4 + 4} + x^2)} \\ &= \sqrt{(x^4 + 4) - (x^2)^2} \\ &= \sqrt{4} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Bài 3. Rút gọn các biểu thức

$$\text{a) } A = \frac{u - v}{\sqrt{u} + \sqrt{v}} - \frac{\sqrt{u^3} + \sqrt{v^3}}{u - v} \quad (u, v \geq 0; u \neq v)$$

$$\text{b) } B = \frac{x^2 - 2x\sqrt{2} + 2}{x^2 - 2} \quad (x \neq \pm\sqrt{2})$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{a) } A &= \frac{u-v}{\sqrt{u}+\sqrt{v}} - \frac{\sqrt{u^3}+\sqrt{v^3}}{u-v} \\
 &= \frac{(\sqrt{u}+\sqrt{v})(\sqrt{u}-\sqrt{v})}{\sqrt{u}+\sqrt{v}} - \frac{(\sqrt{u}+\sqrt{v})(u-\sqrt{uv}+v)}{(\sqrt{u}+\sqrt{v})(\sqrt{u}-\sqrt{v})} \\
 &= \sqrt{u}-\sqrt{v} - \frac{u-\sqrt{uv}+v}{\sqrt{u}-\sqrt{v}} \\
 &= \frac{(\sqrt{u}-\sqrt{v})^2 - (u-\sqrt{uv}+v)}{\sqrt{u}-\sqrt{v}} \\
 &= \frac{u-2\sqrt{uv}+v-u+\sqrt{uv}-v}{\sqrt{u}-\sqrt{v}} \\
 &= \frac{-\sqrt{uv}}{\sqrt{u}-\sqrt{v}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } B &= \frac{x^2-2x\sqrt{2}+2}{x^2-2} \\
 &= \frac{(x-\sqrt{2})^2}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})} \\
 &= \frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \frac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{x+2\sqrt{xy}+y} \quad (x \geq 0; y \geq 0; xy \neq 0)$$

$$\text{b) } B = \frac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{x-2\sqrt{xy}+y} \quad (x \geq 0; y \geq 0; x \neq y)$$

$$\text{c) } C = \frac{3\sqrt{a}-2a-1}{4a-4\sqrt{a}+1} \quad (a \geq 0; a \neq \frac{1}{4})$$

Lời giải

$$\text{a) } A = \frac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{x+2\sqrt{xy}+y} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2} = \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$\text{b) } B = \frac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{x-2\sqrt{xy}+y} = \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2} = \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

$$\text{c) } C = \frac{3\sqrt{a}-2a-1}{4a-4\sqrt{a}+1} = \frac{(2\sqrt{a}-1)(1-\sqrt{a})}{(2\sqrt{a}-1)^2} = \frac{1-\sqrt{a}}{2\sqrt{a}-1}$$

Bài 5. Rút gọn biểu thức (giả sử các biểu thức đều có nghĩa)

$$\text{a) } A = \sqrt{\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}+1}}$$

$$\text{b) } B = \frac{x-1}{\sqrt{y}-1} \sqrt{\frac{(y-2\sqrt{y}+1)^2}{(x-1)^4}}$$

Lời giải

$$\text{b) } A = \sqrt{\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}+1}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}+1)^2}} = \frac{|\sqrt{x}-1|}{\sqrt{x}+1}$$

$$\text{c) } B = \frac{x-1}{\sqrt{y}-1} \sqrt{\frac{(y-2\sqrt{y}+1)^2}{(x-1)^4}} = \frac{x-1}{\sqrt{y}-1} \sqrt{\frac{(\sqrt{y}-1)^4}{(x-1)^4}} = \frac{x-1}{\sqrt{y}-1} \cdot \frac{(\sqrt{y}-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{\sqrt{y}-1}{x-1}$$

Bài 6. Rút gọn biểu thức (giả sử các biểu thức đều có nghĩa)

$$\text{a) } A = \frac{a+4\sqrt{a}+4}{\sqrt{a}+2} + \frac{4-a}{\sqrt{a}-2}$$

$$\text{b) } B = \frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$$

Lời giải

$$\text{a) } A = \frac{a+4\sqrt{a}+4}{\sqrt{a}+2} + \frac{4-a}{\sqrt{a}-2} = \frac{(\sqrt{a}+2)^2}{\sqrt{a}+2} - \frac{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+2)}{\sqrt{a}-2} = \sqrt{a}+2 - (\sqrt{a}+2) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \\ &= \frac{(\sqrt{x})^3 + (\sqrt{y})^3}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - (x+y-2\sqrt{xy}) \\ &= \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x-\sqrt{xy}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - (x+y-2\sqrt{xy}) \\ &= x-\sqrt{xy}+y - (x+y-2\sqrt{xy}) \\ &= \sqrt{xy} \end{aligned}$$

DẠNG 3

CĂN THỨC BẬC HAI CỦA MỘT THƯƠNG

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$$

Bài 1. Rút gọn các biểu thức

a) $P = xy^2 \sqrt{\frac{5}{x^2 y^4}}$ với $x < 0; y \neq 0$

b) $Q = \sqrt{\frac{36(a-4)^2}{144}}$ với $a < 4$

Lời giải

a) $P = xy^2 \sqrt{\frac{5}{x^2 y^4}} = xy^2 \frac{5}{\sqrt{(xy^2)^2}} = \frac{xy^2 \sqrt{5}}{|x|y^2} = \frac{xy^2 \sqrt{5}}{-xy^2} = -\sqrt{5} (x < 0; y \neq 0)$

b) $Q = \sqrt{\frac{36(a-4)^2}{144}} = \frac{6|a-4|}{12} = \frac{|a-4|}{2} = \frac{4-a}{2} (a < 4)$

Bài 2. Cho $A = \sqrt{\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{b}+1}} : \sqrt{\frac{\sqrt{b}-1}{\sqrt{a}+1}}$

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tính giá trị A tại $a = 7,25; b = 3,25$

Lời giải

a) $A = \sqrt{\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{b}+1}} : \sqrt{\frac{\sqrt{b}-1}{\sqrt{a}+1}} = \sqrt{\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{b}+1}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{b}-1}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{b}-1)(\sqrt{b}+1)}} = \sqrt{\frac{a-1}{b-1}}$

b) Thay vào biểu thức ta được:

$$A = \sqrt{\frac{a-1}{b-1}} = \sqrt{\frac{7,25-1}{3,25-1}} = \sqrt{\frac{6,25}{2,25}} = \sqrt{\frac{625}{225}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$$

Bài 3. Cho $A = \frac{x+3}{2-\sqrt{y}} \cdot \sqrt{\frac{y-4\sqrt{y}+4}{(z+3)^4}}$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tính giá trị A , biết $x = 2$ và $y = 16$

Lời giải

a) $A = \frac{x+3}{2-\sqrt{y}} \cdot \sqrt{\frac{y-4\sqrt{y}+4}{(z+3)^4}} = \frac{x+3}{2-\sqrt{y}} \cdot \sqrt{\frac{(\sqrt{y}-2)^2}{(z+3)^4}} = \frac{x+3}{2-\sqrt{y}} \cdot \frac{|\sqrt{y}-2|}{(z+3)^2} = \frac{|\sqrt{y}-2|}{(2-\sqrt{y})(z+3)}$

b) Thay $y = 16, x = 2$ vào biểu thức $A = \frac{|\sqrt{y}-2|}{(2-\sqrt{y})(x+3)}$, ta được: $A = \frac{|\sqrt{16}-2|}{(2-\sqrt{16})(2+3)} = \frac{|4-2|}{(2-4).5} = \frac{-1}{5}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = \frac{2u + \sqrt{uv} - 3v}{2u - 5\sqrt{uv} + 3v} \quad (u \geq 0; v \geq 0; u \neq \frac{9}{4}v)$

b) $B = \frac{x + \sqrt{5}}{x^2 + 2x\sqrt{5} + 5} \quad (x \neq -\sqrt{5})$

c) $C = 0,2x^3y^3 \sqrt{\frac{16}{x^4y^8}} \quad (x \neq 0; y \neq 0)$

d) $D = \frac{x-1}{\sqrt{y}-1} \sqrt{\frac{(y-2\sqrt{y}+1)^2}{(x-1)^4}}$

Lời giải

a) $A = \frac{2u + \sqrt{uv} - 3v}{2u - 5\sqrt{uv} + 3v} = \frac{(\sqrt{u} - \sqrt{v})(2\sqrt{u} + 3\sqrt{v})}{(\sqrt{u} - \sqrt{v})(2\sqrt{u} - 3\sqrt{v})} = \frac{2\sqrt{u} + 3\sqrt{v}}{2\sqrt{u} - 3\sqrt{v}}$

b) $B = \frac{x + \sqrt{5}}{x^2 + 2x\sqrt{5} + 5} = \frac{x + \sqrt{5}}{(x + \sqrt{5})^2} = \frac{1}{x + \sqrt{5}}$

c) $C = 0,2x^3y^3 \sqrt{\frac{16}{x^4y^8}} = 0,2x^3y^3 \sqrt{\left(\frac{4}{x^2y^4}\right)^2} = 0,2x^3y^3 \cdot \left|\frac{4}{x^2y^4}\right| = 0,2x^3y^3 \cdot \frac{4}{x^2y^4} = 0,8 \frac{x}{y}$

d) $D = \frac{x-1}{\sqrt{y}-1} \sqrt{\frac{(y-2\sqrt{y}+1)^2}{(x-1)^4}} = \frac{x-1}{\sqrt{y}-1} \cdot \frac{(\sqrt{y}-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{\sqrt{y}-1}{x-1}$.

Bài 5. Rút gọn các biểu thức

a) $H = (\sqrt{a^3b} + \sqrt{ab^3} - ab) : \sqrt{ab}$

b) $E = \sqrt{\frac{9-6x+x^2}{(x-3)^2}}$ với $x > 3$

c) $F = (x-y) \sqrt{\frac{xy}{(x-y)^2}}$ với $x < y < 0$

d) $T = \sqrt{\frac{(x-1)^4}{(2-x)^2}} + \frac{x^2-2}{x-2}$ với $x < 2$

Lời giải

a) $H = (\sqrt{a^3b} + \sqrt{ab^3} - ab) : \sqrt{ab} = \sqrt{a^3b} : \sqrt{ab} + \sqrt{ab^3} : \sqrt{ab} - ab : \sqrt{ab} = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} - \sqrt{ab} = a + b - \sqrt{ab}$

b) $E = \sqrt{\frac{9-6x+x^2}{(x-3)^2}} = \sqrt{\frac{(3-x)^2}{(x-3)^2}} = \sqrt{\frac{[-(x-3)]^2}{(x-3)^2}} = \sqrt{\frac{(x-3)^2}{(x-3)^2}} = \sqrt{1} = 1$

c) $F = (x-y) \sqrt{\frac{xy}{(x-y)^2}} = (x-y) \cdot \frac{\sqrt{xy}}{|x-y|}$

Vì $x < y \Rightarrow |x-y| = -(x-y) \Rightarrow F = (x-y) \frac{\sqrt{xy}}{-(x-y)} = -\sqrt{xy}$

$$d) T = \frac{\sqrt{(x-1)^4} + x^2 - 2}{\sqrt{(2-x)^2} + x - 2} = \frac{(x-1)^2 + x^2 - 2}{|2-x| + x - 2} = \frac{-(x^2 - 2x + 1) + x^2 - 2}{x - 2} = \frac{2x - 3}{x - 2}$$

Bài 6. Rút gọn các biểu thức

$$a) A = \frac{x^2 - 2x\sqrt{2} + 2}{x^2 - 2} \quad (x \neq \pm\sqrt{2})$$

$$b) B = \frac{x - 2024}{x^2 + 2x\sqrt{2024} + 2024} \quad (x \neq -\sqrt{2024})$$

Lời giải

$$a) A = \frac{x^2 - 2x\sqrt{2} + 2}{x^2 - 2} = \frac{(x - \sqrt{2})^2}{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})} = \frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}}$$

$$b) B = \frac{x^2 - 2024}{x^2 + 2x\sqrt{2024} + 2024} = \frac{(x - \sqrt{2024})(x + \sqrt{2024})}{(x + \sqrt{2024})^2} = \frac{x - \sqrt{2024}}{x + \sqrt{2024}}$$

Bài 7. Rút gọn các biểu thức rồi tính

$$a) A = 5x - \sqrt{125} + \frac{\sqrt{x^3 + 5x^2}}{\sqrt{x+5}} \quad (x \geq 0) \text{ tại } x = \sqrt{5}$$

$$b) B = \sqrt{a^2 + 2\sqrt{a^2 - 1}} - \sqrt{a^2 - 2\sqrt{a^2 - 1}} \text{ tại } a = \sqrt{5}$$

Lời giải

a) Ta có: $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^3 + 5x^2}$ và $\sqrt{x+5}$. Vậy biểu thức luôn xác định

$$A = 5x - \sqrt{125} + \frac{\sqrt{x^3 + 5x^2}}{\sqrt{x+5}} = 5x - \sqrt{125} + \frac{\sqrt{x^2 \cdot (x+5)}}{\sqrt{x+5}} = 5x - \sqrt{125} + |x| = 6x - 5\sqrt{5}$$

Thay $x = \sqrt{5}$ vào biểu thức ta được:

$$A = 6x - 5\sqrt{5} = 6\sqrt{5} - 5\sqrt{5} = \sqrt{5}$$

$$b) B = \sqrt{a^2 + 2\sqrt{a^2 - 1}} - \sqrt{a^2 - 2\sqrt{a^2 - 1}}$$

$$= \sqrt{(a^2 - 1) + 2\sqrt{a^2 - 1} + 1} - \sqrt{(a^2 - 1) - 2\sqrt{a^2 - 1} + 1}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{a^2 - 1} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{a^2 - 1} - 1)^2}$$

$$= |\sqrt{a^2 - 1} + 1| - |\sqrt{a^2 - 1} - 1|$$

$$= |\sqrt{(\sqrt{5})^2 - 1} + 1| - |\sqrt{(\sqrt{5})^2 - 1} - 1|$$

Thay $a = \sqrt{5}$ vào biểu thức ta được:

$$B = |\sqrt{(\sqrt{5})^2 - 1} + 1| - |\sqrt{(\sqrt{5})^2 - 1} - 1| = |\sqrt{4} + 1| - |\sqrt{4} - 1| = |2 + 1| - |2 - 1| = 2$$

CHỦ ĐỀ 2

TRỰC CĂN THỨC

$$\bullet \frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B} \quad (B > 0)$$

$$\bullet \frac{C}{\sqrt{A+B}} = \frac{C(\sqrt{A}-\sqrt{B})}{A-B^2} \quad (A \geq 0; A \neq B^2)$$

$$\bullet \frac{C}{\sqrt{A-B}} = \frac{C(\sqrt{A}+\sqrt{B})}{A-B^2} \quad (A \geq 0; A \neq B^2)$$

$$\bullet \frac{C}{\sqrt{A+\sqrt{B}}} = \frac{C(\sqrt{A}-\sqrt{B})}{A-B} \quad (A, B \geq 0; A \neq B)$$

$$\bullet \frac{C}{\sqrt{A-\sqrt{B}}} = \frac{C(\sqrt{A}+\sqrt{B})}{A-B} \quad (A, B \geq 0; A \neq B)$$

Chú ý: Để trực căn thức ở mẫu, bình thường ta nhân cả tử và mẫu của phân thức với lượng liên hợp của mẫu và cần các hằng đẳng thức sau: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Các dạng liên hợp cơ bản thường gặp

$$\bullet (\sqrt{A}-\sqrt{B})(\sqrt{A}+\sqrt{B}) = A-B$$

$$\bullet (A-\sqrt{B})(A+\sqrt{B}) = A^2 - B$$

DẠNG 1

TRỰC CĂN THỨC BIỂU THỨC CHỨA SỐ THỰC

Bài 1. Khử căn thức ở mẫu số các phân số

a) $\sqrt{\frac{7}{108}}$

b) $\sqrt{\frac{5}{6}}$

c) $\sqrt{\frac{10}{13}}$

d) $\sqrt{\frac{4}{75}}$

e) $\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{2}}$

f) $\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{3}}$

Lời giải

a) $\sqrt{\frac{7}{108}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{36 \cdot 3}} = \frac{\sqrt{7}}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{3}}{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{18}$

b) $\sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{30}}{6}$

c) $\sqrt{\frac{10}{13}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{13}}{13} = \frac{\sqrt{130}}{13}$

d) $\sqrt{\frac{4}{75}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25 \cdot 3}} = \frac{2}{5\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{15}$

$$e) \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}+1)\cdot\sqrt{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

$$f) \sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{3}} = \frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 1 - \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Bài 2. Trục căn thức ở mẫu và rút gọn

$$a) \frac{1}{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}} \qquad b) \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}$$

Lời giải

$$a) \frac{1}{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{8-27} = \frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{-19} = \frac{-(\sqrt{8}+\sqrt{27})}{19}$$

$$b) \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}} = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})^2}{4}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Bài 3. Rút gọn các biểu thức sau

$$a) A = \frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{2-\sqrt{2}} \qquad b) B = \frac{1}{\sqrt{7-\sqrt{24}+1}} - \frac{1}{\sqrt{7+\sqrt{24}-1}}$$

$$c) C = \left(\frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{4}{\sqrt{6}-2} - \frac{12}{3-\sqrt{6}} \right) (\sqrt{6}+11) \qquad d) D = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1}$$

Lời giải

$$a) A = \frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{2-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

$$b) B = \frac{1}{\sqrt{7-\sqrt{24}+1}} - \frac{1}{\sqrt{7+\sqrt{24}-1}} = \frac{1}{\sqrt{7-2\sqrt{6}+1}} - \frac{1}{\sqrt{7+2\sqrt{6}-1}} = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{6}-1)^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{6}+1)^2-1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}-1+1} - \frac{1}{\sqrt{6}+1-1} = 0$$

$$c) C = \left(\frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{4}{\sqrt{6}-2} - \frac{12}{3-\sqrt{6}} \right) (\sqrt{6}+11) = \left[\frac{15(\sqrt{6}-1)}{6-1} + \frac{4(\sqrt{6}+2)}{6-2} + \frac{12(3+\sqrt{6})}{9-6} \right] (\sqrt{6}+11) = -115$$

$$d) D = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1} = \sqrt{3} \left[\frac{(\sqrt{\sqrt{3}+1}+1) - (\sqrt{\sqrt{3}+1}-1)}{(\sqrt{\sqrt{3}+1}-1)(\sqrt{\sqrt{3}+1}+1)} \right] = \sqrt{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}+1-1} = 2$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN**Bài 4.** Trục căn thức ở mẫu rồi rút gọn

a) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

b) $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$

Lời giải

a) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} = \sqrt{10} + \sqrt{6}$

b) $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^2}{2^2-(\sqrt{3})^2}} = 2-\sqrt{3}$

Bài 5. Trục căn thức và thực hiện phép tính

a) $A = \left(\frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{4}{\sqrt{6}-2} - \frac{12}{3-\sqrt{6}} \right) (\sqrt{6}+11)$

b) $B = \left(1 - \frac{5+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right) \left(\frac{5-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} - 1 \right)$

Lời giải

a) $A = \left(\frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{4}{\sqrt{6}-2} - \frac{12}{3-\sqrt{6}} \right) (\sqrt{6}+11)$

Ta có:

$$\frac{15}{\sqrt{6}+1} = \frac{15(\sqrt{6}-1)}{6-1} = 3(\sqrt{6}-1)$$

$$\frac{4}{\sqrt{6}-2} = 2(\sqrt{6}+2)$$

$$\frac{12}{3-\sqrt{6}} = 4(3+\sqrt{6})$$

$$\Rightarrow A = -115$$

b) $B = \left(1 - \frac{5+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right) \left(\frac{5-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} - 1 \right)$

Ta có:

$$\frac{5+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$\frac{5-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = -\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow B = (1-\sqrt{5})(-\sqrt{5}-1) = -(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5}) = -(-4) = 4$$

Bài 6. Thực hiện phép tính

a) $A = \left(\frac{2}{\sqrt{3}-1} + \frac{3}{\sqrt{3}-2} + \frac{15}{3-\sqrt{3}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}+5}$

b) $B = \left(\frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}} \right) : \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

Lời giải

$$\text{a) } A = \left(\frac{2}{\sqrt{3}-1} + \frac{3}{\sqrt{3}-2} + \frac{15}{3-\sqrt{3}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}+5} = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } B = \left(\frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}} \right) : \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = -2$$

DẠNG 2
TRỰC CĂN THỨC BIỂU THỨC CHỨA BIẾN

Bài 1. Khử mẫu của mỗi biểu thức dưới dấu căn bậc hai sau

$$\text{a) } \sqrt{\frac{5x^3}{49y}} \quad (x \geq 0; y > 0) \qquad \text{b) } 7xy\sqrt{\frac{-3}{xy}} \quad (x < 0; y > 0)$$

Lời giải

$$\text{a) } \sqrt{\frac{5x^3}{49y}} = \frac{x}{7} \sqrt{\frac{5x}{y}} = \frac{x}{7} \sqrt{\frac{5xy}{y^2}} = \frac{x}{7|y|} \sqrt{5xy} = \frac{x}{7y} \sqrt{5xy} \quad (x \geq 0; y > 0)$$

$$\text{b) } 7xy\sqrt{\frac{-3}{xy}} = 7xy\sqrt{\frac{-3xy}{x^2y^2}} = \frac{7xy}{|xy|} \sqrt{-3xy} = -7\sqrt{-3xy} \quad (x < 0; y > 0)$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 2. Khử mẫu của mỗi biểu thức dưới dấu căn bậc hai sau

$$\text{a) } \sqrt{\frac{5b}{49a^3}} \quad (a > 0, b \geq 0) \qquad \text{b) } \frac{-1}{4}ab\sqrt{\frac{16}{ab}} \quad (a < 0, b < 0)$$

Lời giải

$$\text{a) } \sqrt{\frac{5b}{49a^3}} = \frac{1}{7a} \sqrt{\frac{5b}{a}} = \frac{1}{7a} \sqrt{\frac{5ab}{a^2}} = \frac{1}{7a^2} \sqrt{5ab} \quad (a > 0, b \geq 0)$$

$$\text{b) } \frac{-1}{4}ab\sqrt{\frac{16}{ab}} = -ab\sqrt{\frac{1}{ab}} = -ab\sqrt{\frac{ab}{a^2b^2}} = -\sqrt{ab}$$

Bài 3. Chứng minh rằng

$$\text{a) } \frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \quad (a, b > 0)$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a+b}{a-b} \quad (a, b \geq 0; a \neq b)$$

$$\text{c) } \frac{(a\sqrt{b} + b)(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a-b} \cdot \sqrt{\frac{ab + b^2 - 2\sqrt{ab^3}}{a(a + 2\sqrt{b}) + b}} = b \quad (a, b > 0)$$

Lời giải

$$\text{a) } VP = \frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} = a - \sqrt{ab} + b - \sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = VT \quad \text{Suy ra ĐPCM}$$

$$\text{b) } VP = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - \sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{a+b}{a-b} = VT \quad \text{Suy ra ĐPCM}$$

$$\text{c) } VP = \frac{(a\sqrt{b} + b)(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a-b} \cdot \sqrt{\frac{ab + b^2 - 2\sqrt{ab^3}}{a(a + 2\sqrt{b}) + b}}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(a\sqrt{b}+b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b} \sqrt{\frac{b[(\sqrt{a})^2-2\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2]}{a^2+2a\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2}} \\ &= \frac{\sqrt{b}(a+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b} \sqrt{\frac{b(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{(a+\sqrt{b})^2}} \\ &= \frac{\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a+\sqrt{b}} = VT \text{ Suy ra ĐPCM} \end{aligned}$$

CHỦ ĐỀ 3
RÚT GỌN BIỂU THỨC

DẠNG 1
RÚT GỌN BIỂU THỨC RỒI TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC TẠI GIÁ TRỊ CHO TRƯỚC

Bài 1. Cho biểu thức $C = \frac{\sqrt{2x+2\sqrt{x^2-4}}}{\sqrt{x^2-4}+x+2}$ với $x \neq -2$

a) Rút gọn C .

b) Tính giá trị của biểu thức C khi $x = 2\sqrt{6} + 3$.

Lời giải

a)

$$C = \frac{\sqrt{2x+2\sqrt{x^2-4}}}{\sqrt{x^2-4}+x+2} = \frac{\sqrt{x+2+x-2+2\sqrt{(x+2)(x-2)}}}{\sqrt{(x+2)(x-2)}+x+2} = \frac{\sqrt{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})^2}}{\sqrt{x+2}(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2})} = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

b) Thay $x = 2\sqrt{6} + 3$ vào $C = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$

$$\text{Ta được: } C = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{6}+2+3}} = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

Bài 2. Cho biểu thức $C = \frac{a}{a-16} - \frac{2}{\sqrt{a}-4} - \frac{2}{\sqrt{a}+4}$ với $a \geq 0, a \neq 16$

a) Rút gọn C .

b) Tính giá trị của biểu thức C khi $a = 9 - 4\sqrt{5}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } C &= \frac{a}{a-16} - \frac{2}{\sqrt{a}-4} - \frac{2}{\sqrt{a}+4} = \frac{a}{(\sqrt{a}-4)(\sqrt{a}+4)} - \frac{2}{\sqrt{a}-4} - \frac{2}{\sqrt{a}+4} \\ &= \frac{a-2(\sqrt{a}+4)-2(\sqrt{a}-4)}{(\sqrt{a}+4)(\sqrt{a}-4)} = \frac{a-2\sqrt{a}-8-2\sqrt{a}+8}{(\sqrt{a}+4)(\sqrt{a}-4)} = \frac{a-4\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+4)(\sqrt{a}-4)} \\ &= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-4)}{(\sqrt{a}-4)(\sqrt{a}+4)} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+4}. \end{aligned}$$

b) Giá trị của C khi $a = 9 - 4\sqrt{5}$.

Ta có: $a = 9 - 4\sqrt{5} = 4 - 4\sqrt{5} + 5 = (2 - \sqrt{5})^2 \Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = \sqrt{5} - 2$

$$\text{Vậy } C = \frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a} + 4)} = \frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} - 2 + 4} = \frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} + 2} = 9 - 4\sqrt{5}.$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Cho biểu thức $M = \left(\frac{1}{a - \sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a} - 1} \right) : \frac{\sqrt{a} + 1}{a - 2\sqrt{a} + 1}$ với $a \geq 0, a \neq 1$

a) Rút gọn biểu thức M .

b) Tính giá trị của biểu thức M khi $a = 16$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } M &= \left(\frac{1}{a - \sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a} - 1} \right) : \frac{\sqrt{a} + 1}{a - 2\sqrt{a} + 1} = \left[\frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)} + \frac{1}{\sqrt{a} - 1} \right] : \frac{\sqrt{a} + 1}{(\sqrt{a} - 1)^2} \\ &= \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)} \cdot \frac{(\sqrt{a} - 1)^2}{\sqrt{a} + 1} = \frac{(1 + \sqrt{a})(\sqrt{a} - 1)^2}{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)} = \frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a}} \end{aligned}$$

$$\text{b) Ta có } M = \frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{16} - 1}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$$

Bài 4. Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1} - \frac{1}{a - \sqrt{a}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{a} + 1} + \frac{2}{a - 1} \right)$ với $0 < a \neq 1$

a) Rút gọn A .

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $a = 4 + 2\sqrt{3}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1} - \frac{1}{a - \sqrt{a}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{a} + 1} + \frac{2}{a - 1} \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1} - \frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{a} + 1} + \frac{2}{(\sqrt{a} + 1)(\sqrt{a} - 1)} \right) \\ &= \frac{a - 1}{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)} : \frac{\sqrt{a} + 1}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)} \\ &= \frac{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)} : \frac{\sqrt{a} + 1}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(\sqrt{a+1})}{\sqrt{a}} : \frac{1}{(\sqrt{a}-1)} \\
 &= \frac{(\sqrt{a+1})(\sqrt{a}-1)}{\sqrt{a} \cdot 1} \\
 &= \frac{a-1}{\sqrt{a}} \\
 \Rightarrow A &= \frac{a-1}{\sqrt{a}}
 \end{aligned}$$

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $a = 4 + 2\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}
 a &= 4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3} + 1)^2 \\
 \Rightarrow A &= \frac{a-1}{\sqrt{a}} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} = \frac{2(1 + \sqrt{3})}{\sqrt{3} + 1} = 2
 \end{aligned}$$

Bài 5. Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} - \frac{x-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x-x}} \right)$ với $x \geq 1; x \neq 2; x \neq 3$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của P với $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

Lời giải

a)

$$\begin{aligned}
 P &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} - \frac{x-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x-x}} \right) \\
 &= \left[\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})} - \frac{(x-3)(\sqrt{x-1}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x-1}-\sqrt{2})(\sqrt{x-1}+\sqrt{2})} \right] \left[\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}(\sqrt{2}-\sqrt{x})} \right] \\
 &= \left[\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{x-(x-1)} - \frac{(x-3)(\sqrt{x-1}+\sqrt{2})}{(x-1)-2} \right] \cdot \frac{2\sqrt{x}-\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x}(\sqrt{2}-\sqrt{x})} \\
 &= \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{x-x+1} - \frac{(x-3)(\sqrt{x-1}+\sqrt{2})}{x-3} \right) \cdot \frac{-(\sqrt{2}-\sqrt{x})}{\sqrt{x}(\sqrt{2}-\sqrt{x})} \\
 &= (\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-\sqrt{x-1}-\sqrt{2}) \cdot \frac{-1}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2}) \cdot (-1)}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\
 \Rightarrow P &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

b) Tính giá trị của P với $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

Thay $x = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$ vào biểu thức $P = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, ta có:

$$P = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2}}{\sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2}} = \frac{\sqrt{2} - |\sqrt{2} - 1|}{|\sqrt{2} - 1|} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

Bài 6. Cho $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 5} - \frac{10\sqrt{x}}{x - 25} - \frac{5}{\sqrt{x} + 5}$ với $x \geq 0, x \neq 25$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của A với $x = 4 - 2\sqrt{3}$.

Lời giải

a) Rút gọn biểu thức A

với $x \geq 0, x \neq 25$

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 5} - \frac{10\sqrt{x}}{x - 25} - \frac{5}{\sqrt{x} + 5} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 5) - 10\sqrt{x} - 5(\sqrt{x} - 5)}{(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} + 5)} \\ &= \frac{x + 5\sqrt{x} - 10\sqrt{x} - 5\sqrt{x} + 25}{(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} + 5)} \\ &= \frac{x - 10\sqrt{x} + 25}{(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} + 5)} \\ &= \frac{(\sqrt{x} - 5)^2}{(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} + 5)} \\ &= \frac{\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} + 5} \end{aligned}$$

b) $x = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$

$$\Rightarrow A = \frac{\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} + 5} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} - 5}{\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} + 5} = \frac{\sqrt{3} - 6}{\sqrt{3} - 4} = \frac{(\sqrt{3} - 6)(\sqrt{3} + 4)}{-13} = \frac{21 + 2\sqrt{3}}{13}$$

Bài 7. Cho biểu thức $A = \frac{1}{2 + \sqrt{x}} + \frac{1}{2 - \sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{4 - x}$ ($x \geq 0, x \neq 4$).

a) Rút gọn A .

b) Tính giá trị của A với $x = 3$.

Lời giải

a) Rút gọn A .

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2+\sqrt{x}} + \frac{1}{2-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{4-x} \\ &= \frac{2-\sqrt{x}}{(2+\sqrt{x})(2-\sqrt{x})} + \frac{2+\sqrt{x}}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})} - \frac{2\sqrt{x}}{4-x} \\ &= \frac{4}{4-x} - \frac{2\sqrt{x}}{4-x} = \frac{2(2-\sqrt{x})}{4-x} = \frac{2}{2+\sqrt{x}} \\ \Rightarrow A &= \frac{2}{2+\sqrt{x}} \end{aligned}$$

b) $A = \frac{2}{2+\sqrt{3}} = \frac{2(2-\sqrt{3})}{4-3} = 4-2\sqrt{3}$

Bài 8. Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0; x \neq 1$

a) Rút gọn P .

b) Tính giá trị của P với $x = \frac{25}{9}$.

Lời giải

a) Rút gọn P .

$$P = \left(\frac{x-2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \left(\frac{(\sqrt{x}-1) \cdot (\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \Rightarrow P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

b) $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{\frac{25}{9}}+1}{\sqrt{\frac{25}{9}}} = \frac{\frac{5}{3}+1}{\frac{5}{3}} = \frac{8}{5}$

Bài 9. Cho biểu thức $B = \left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^3}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) \left(\frac{1+\sqrt{x^3}}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$

a) Rút gọn B .

b) Tính giá trị của B với $x = \frac{1}{121}$.

Lời giải

a) Rút gọn B .

$$B = \left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^3}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) \left(\frac{1+\sqrt{x^3}}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2x+1-\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)\cdot(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \left[\frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} - \sqrt{x} \right] \\
&= \frac{2x+1-x+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)\cdot(x+\sqrt{x}+1)} \cdot (1-2\sqrt{x}+x) \\
&= \frac{x+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)\cdot(x+\sqrt{x}+1)} \cdot (\sqrt{x}-1)^2 \\
&= \sqrt{x}-1
\end{aligned}$$

$$b) B = \sqrt{x}-1 = \sqrt{\frac{1}{121}}-1 = \frac{1}{11}-1 = -\frac{10}{11}.$$

Bài 10. Cho biểu thức $P = \left[\frac{x+3\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{x+\sqrt{x}}{x-1} \right] : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right)$ ($x > 0; x \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tính giá trị của P với $x = 64$.

Lời giải

a) Rút gọn biểu thức P .

$$\begin{aligned}
P &= \left[\frac{x+3\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{x+\sqrt{x}}{x-1} \right] : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) \\
&= \left[\frac{x+3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right] : \left(\frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \right) \\
&= \frac{x+3\sqrt{x}+2-x-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow P = \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$$

$$b) P = \frac{\sqrt{64}+1}{2\sqrt{64}} = \frac{8+1}{2 \cdot 8} = \frac{9}{16}$$

DẠNG 2**TÌM x ĐỂ BIỂU THỨC RÚT GỌN LÀ SỐ NGUYÊN**

Bài toán: Cho biểu thức $A = \frac{a}{cx+d}$ hoặc $A = \frac{a}{c\sqrt{x+d}}$. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $A \in \mathbb{Z}$

Phương pháp:

- Lập luận: $A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$ Mẫu thức là Ư(a)
- Liệt kê Ư(a)
- Mẫu thức bằng Ư(a) tìm ra x

Chú ý: Giá trị $x \in \mathbb{Z}$ tìm được phải thỏa mãn điều kiện của biểu thức rút gọn mới nhận.

Bài 1. Cho biểu thức $A = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}}$ ($x > 0, x \neq 4$).

- Rút gọn biểu thức A .
- Tìm x sao cho A nhận giá trị là một số nguyên.

Lời giải

a) Với $x > 0, x \neq 4$ biểu thức có nghĩa ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}} \\ &= \frac{2(2\sqrt{x}+1) + 3(\sqrt{x}-2) - (5\sqrt{x}-7)}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} : \frac{2\sqrt{x}+3}{5\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{2\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+2)(2\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{5\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{2\sqrt{x}+3} = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}. \end{aligned}$$

Vậy với $x > 0, x \neq 4$ thì $A = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$.

b) Ta có $\sqrt{x} > 0, \forall x > 0, x \neq 4$ nên $A = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} > 0, x > 0, x \neq 4$

$A = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2(2\sqrt{x}+1)} < \frac{5}{2}, x > 0, x \neq 4 \Rightarrow 0 < A < \frac{5}{2}$, kết hợp với A nhận giá trị là một số nguyên

thì $A \in \{1, 2\}$.

$A = 1 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$ thỏa mãn điều kiện.

$A = 2 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 4\sqrt{x} + 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$ không thỏa mãn điều kiện.

Vậy với $x = \frac{1}{9}$ thì A nhận giá trị là nguyên.

Bài 2. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} + \frac{4}{\sqrt{x}-4} \right) : \frac{x+16}{\sqrt{x}+2}$ (với $x \geq 0, x \neq 16$).

Hãy tìm các giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức $M = B(A-1)$ là số nguyên.

Lời giải

$$B = \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-4)}{x-16} + \frac{4(\sqrt{x}+4)}{x-16} \right) \frac{\sqrt{x}+2}{x+16} = \frac{(x+16)(\sqrt{x}+2)}{(x-16)(x+16)} = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16}.$$

$$\text{Biểu thức } M = B(A-1) = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16} \left(\frac{\sqrt{x}+4-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \right) = \frac{2}{x-16}$$

$M = B(A-1)$ nguyên, x nguyên thì $x-16$ là ước của 2, mà $U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$.

Hay

$$x-16 = -1 \Rightarrow x = 15$$

$$x-16 = 1 \Rightarrow x = 17$$

$$x-16 = -2 \Rightarrow x = 14$$

$$x-16 = 2 \Rightarrow x = 18$$

Kết hợp điều kiện, để $B(A-1)$ nguyên thì $x \in \{14; 15; 17; 18\}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Cho biểu thức $A = \frac{15\sqrt{x}-19}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

a) Rút gọn A

b) Tìm x nguyên để A có giá trị nguyên.

Lời giải

$$\text{a) } A = \frac{15\sqrt{x}-19}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} = \frac{\sqrt{x}+22}{\sqrt{x}+3} \quad (x \geq 0; x \neq 1)$$

$$\text{b) Ta có: } A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+22}{\sqrt{x}+3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{19}{\sqrt{x}+3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+3 \in U(19) \\ \sqrt{x}+3 \geq 3 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x}+3 = 19 \Leftrightarrow x = 256 \text{ (thỏa mãn)}$$

Bài 4. Cho biểu thức $M = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$

a) Rút gọn A

b) Tìm x nguyên để A có giá trị nguyên.

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } M = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$$

$$\text{b) } M = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}-3} \quad (x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9) \Rightarrow x \in \{1; 16; 25; 49\}$$

Bài 5. Cho biểu thức $Q = \frac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

a) Rút gọn A

b) Tìm x nguyên để A có giá trị nguyên.

Lời giải

a) Rút gọn được: $Q = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

b) $Q = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1}$, $Q \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1) \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\} \Rightarrow x \in \{0; 4; 9\}$

Bài 6. Cho biểu thức $A = \left(\frac{6x+4}{3\sqrt{3x^3}-8} - \frac{\sqrt{3x}}{3x+2\sqrt{3x}+4} \right) \left(\frac{1+3\sqrt{3x^3}}{1+\sqrt{3x}} - \sqrt{3x} \right)$ với $x \geq 0; x \neq 4$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{6x+4}{3\sqrt{3x^3}-8} - \frac{\sqrt{3x}}{3x+2\sqrt{3x}+4} \right) \left(\frac{1+3\sqrt{3x^3}}{1+\sqrt{3x}} - \sqrt{3x} \right) \\ &= \left(\frac{6x+4 - (\sqrt{3x}-2)\sqrt{3x}}{(\sqrt{3x}-2)(3x+2\sqrt{3x}+4)} \right) (3x - \sqrt{3x} + 1 - \sqrt{3x}) \\ &= \left(\frac{3x+4+2\sqrt{3x}}{(\sqrt{3x}-2)(3x+2\sqrt{3x}+4)} \right) (3x - 2\sqrt{3x} + 1) = \frac{(\sqrt{3x}-1)^2}{\sqrt{3x}-2} \end{aligned}$$

b) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên

$$A = \frac{(\sqrt{3x}-1)^2}{\sqrt{3x}-2} = \frac{(\sqrt{3x}-2)^2 + 2(\sqrt{3x}-2) + 1}{\sqrt{3x}-2} = \sqrt{3x} + \frac{1}{\sqrt{3x}-2}$$

Với x là số nguyên không âm, để A là số nguyên thì $\begin{cases} \sqrt{3x}-2 = \pm 1 \\ \sqrt{3x} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x} = 3 \\ \sqrt{3x} = 1 \\ \sqrt{3x} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 9 \\ 3x = 1 \\ \sqrt{3x} \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$\Rightarrow x = 3 \quad (\text{Vì } x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \geq 0)$$

DẠNG 3
TÌM GTLN – GTNN CỦA BIỂU THỨC RÚT GỌN

Bài 1. Cho biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}} - \frac{3x+9}{x-9}$, với $x \geq 0, x \neq 9$.

- a) Rút gọn P .
 b) Tìm giá trị lớn nhất của P .

Lời giải

a) Rút gọn P .

$$P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) + 2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3) - 3x - 9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{3}{\sqrt{x}+3}$$

b) Tìm giá trị lớn nhất của P .

Với $x \geq 0, P = \frac{3}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{3}{0+3} = 1 \Rightarrow P_{\max} = 1$ khi $x = 0$ (TM).

Bài 2. Cho biểu thức: $P = \frac{x\sqrt{x} + 5\sqrt{x} - 12}{x - \sqrt{x} - 6} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

- a) Rút gọn biểu thức P
 b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P

Lời giải

a) Rút gọn biểu thức P

$$\begin{aligned} P &= \frac{x\sqrt{x} + 5\sqrt{x} - 12}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} \\ &= \frac{x\sqrt{x} + 5\sqrt{x} - 12 - 2(\sqrt{x}-3)^2 - (\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{x\sqrt{x} + 5\sqrt{x} - 12 - 2x + 12\sqrt{x} - 18 - x - 5\sqrt{x} - 6}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x\sqrt{x} - 3x + 12\sqrt{x} - 36}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{x(\sqrt{x}-3) + 12(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{(\sqrt{x}-3)(x+12)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x+12}{\sqrt{x}+2} \Rightarrow P = \frac{x+12}{\sqrt{x}+2} \end{aligned}$$

b/ Vì $x \geq 0, x \neq 9$ nên: $P = \frac{x+12}{\sqrt{x}+2} = \sqrt{x} - 2 + \frac{16}{\sqrt{x}+2} = \sqrt{x} + 2 + \frac{16}{\sqrt{x}+2} - 4$

Áp dụng bất đẳng thức Cossi ta có: $\sqrt{x} + 2 + \frac{16}{\sqrt{x}+2} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+2) \cdot \frac{16}{\sqrt{x}+2}} = 8$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x} + 2 = \frac{16}{\sqrt{x} + 2} \Leftrightarrow (\sqrt{x} + 2)^2 = 4^2 \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn)

Vậy GTNN của $P = 4 \Leftrightarrow x = 4$

Bài 3. Cho biểu thức $A = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right] : \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3}}$ với $x > 0, y > 0$

a) Rút gọn A .

b) Biết $x \cdot y = 16$. Tìm các giá trị của x, y để A có giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị đó.

Lời giải

a) Rút gọn A .

$$\begin{aligned} A &= \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right] : \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{x+y}{xy} \right) : \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y) + \sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{xy}} + \frac{x+y}{xy} \right) : \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)}{\sqrt{xy}(x+y)} \\ &= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{xy} \cdot \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}}. \end{aligned}$$

b/ Ta có $(\sqrt{\sqrt{x}} - \sqrt{\sqrt{y}})^2 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} - 2\sqrt{\sqrt{xy}} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2\sqrt{\sqrt{xy}}.$$

Do đó $A = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}} \geq \frac{2\sqrt{\sqrt{xy}}}{\sqrt{xy}} = \frac{2\sqrt{\sqrt{16}}}{\sqrt{16}} = 1$ (vì $xy = 16$)

Vậy min $A = 1$ khi $\begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{y} \\ xy = 16 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 4$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Cho biểu thức $P = \frac{3x + 6\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} - 2} + \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x} + 2}{1 - \sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

a) Rút gọn A .

b) Tìm giá trị lớn nhất của P và giá trị x tương ứng.

Lời giải

a) Với $x \geq 0; x \neq 1$.

$$P = \frac{3x+6\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}+2}{1-\sqrt{x}} = \frac{3x+6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} + \frac{\sqrt{x^2}-1}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} - \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \frac{x+2\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} \Rightarrow P = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

b) Do $\sqrt{x}+2 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow P = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \leq 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow P \leq \frac{3}{2}$

Vậy GTLN của $P = \frac{3}{2}$ khi $x=0$

Bài 5. Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} + \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{1-\sqrt{xy}} + 1 \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} \right)$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Cho $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của A .

Lời giải

a) Rút gọn biểu thức A .

Điều kiện: $\sqrt{xy} \neq 1$.

$$A = \frac{(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy}) + (\sqrt{xy}+\sqrt{x})(\sqrt{xy}+1) + (\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})}{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})}$$

$$= \frac{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy}) + (\sqrt{xy}+\sqrt{x})(\sqrt{xy}+1) - (\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy})}{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy}) + (\sqrt{xy}+\sqrt{x})(\sqrt{xy}+1) + (\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})}{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy}) + (\sqrt{xy}+\sqrt{x})(\sqrt{xy}+1) - (\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy})}$$

$$= \frac{1+\sqrt{x}}{x\sqrt{y}+\sqrt{xy}} = \frac{1}{\sqrt{xy}}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{xy}}$$

b) Cho $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của A .

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $6 = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{xy}}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{xy}} \leq 9$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{y}} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{9}$.

Vậy: $\max A = 9$, đạt được khi: $x = y = \frac{1}{9}$

CHỦ ĐỀ 4**ỨNG DỤNG**

Bài 1. Áp suất P (lb/in^2) cần thiết để ép nước qua một ống dài L (ft) và đường kính d (in) với tốc độ v (ft/s) được cho bởi công thức: $P = 0,00161 \cdot \frac{v^2 L}{d}$

a) Hãy tính v theo P , L và d .

b) Cho $P = 198,5$; $L = 11\,560$; $d = 6$. Hãy tính tốc độ v (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của feet trên giây).

$$1 \text{ in} = 2,54 \text{ cm};$$

$$1 \text{ ft (feet)} = 0,3048 \text{ m};$$

$$1 \text{ lb (pound)} = 0,45359237 \text{ kg};$$

$$1 \text{ lb}/\text{in}^2 = 6\,894,75729 \text{ Pa (Pascal)}.$$

Lời giải

a) Từ công thức $P = 0,00161 \cdot \frac{v^2 L}{d}$ ta có

$$P = 0,00161 \cdot \frac{v^2 L}{d}$$

$$v^2 L = \frac{Pd}{0,00161}$$

$$v^2 = \frac{Pd}{0,00161L}$$

$$v = \sqrt{\frac{Pd}{0,00161L}} \text{ (ft/s)}$$

b) Tốc độ khi $P = 198,5$; $L = 11\,560$; $d = 6$ là:

$$v = \sqrt{\frac{Pd}{0,00161L}} = \sqrt{\frac{198,5 \cdot 6}{0,00161 \cdot 11560}} \approx 8 \text{ (ft/s)}$$

Vậy $v \approx 8 \text{ (ft/s)}$.

Bài 2. Trong thuyết tương đối, khối lượng m (kg) của một vật khi chuyển động với vận tốc v (m/s) được cho bởi công thức $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, trong đó m_0 (kg) là khối lượng của vật khi đứng yên, c (m/s) là vận tốc

của ánh sáng trong chân không

a) Viết lại công thức tính khối lượng m dưới dạng không có căn thức ở mẫu.

b) Tính khối lượng m theo m_0 (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba) khi vật chuyển động với vận tốc $v = \frac{1}{10}c$.

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\text{Vậy } m = \frac{m_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

$$\text{b) Khi } v = \frac{1}{10}c, \text{ ta có } \frac{v}{c} = \frac{\frac{1}{10}c}{c} = \frac{1}{10}, \text{ suy ra } \frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100}.$$

$$\text{Thay vào } m = \frac{m_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \text{ ta được:}$$

$$m = \frac{m_0 \sqrt{1 - \frac{1}{100}}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{m_0 \sqrt{\frac{99}{100}}}{\frac{99}{100}} = \frac{m_0 \sqrt{\frac{9}{100}} \cdot 11}{\frac{99}{100}}$$

$$= \frac{m_0 \sqrt{\left(\frac{3}{10}\right)^2} \cdot 11}{\frac{99}{100}} = \frac{m_0 \cdot \frac{3}{10} \cdot \sqrt{11}}{\frac{99}{100}}$$

$$= \frac{m_0 \cdot \sqrt{11}}{\frac{33}{10}} = \frac{10\sqrt{11}}{33} m_0 \approx 1,005 m_0.$$

$$\text{Vậy } m \approx 1,005 m_0 \text{ khi } v = \frac{1}{10}c.$$

Bài 3. Khi bay vào không gian, trọng lượng P (N) của một phi hành gia ở vị trí cách mặt đất một độ cao

$$h \text{ (m) được tính theo công thức: } P = \frac{28014 \cdot 10^{12}}{(64 \cdot 10^5 + h)^2}$$

a) Trọng lượng của phi hành gia là bao nhiêu Newton khi cách mặt đất 10 000 m (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

b) Ở độ cao bao nhiêu mét thì trọng lượng của phi hành gia là 619 N (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Lời giải

a) Trọng lượng của phi hành gia khi cách mặt đất 10 000 m là:

$$P = \frac{28014 \cdot 10^{12}}{(64 \cdot 10^5 + h)^2} = \frac{28014 \cdot 10^{12}}{(64 \cdot 10^5 + 10000)^2} \approx 681,8 \text{ (N)}$$

b) Vì trọng lượng của phi hành gia là 619 N nên ta có:

$$619 = \frac{28014 \cdot 10^{12}}{(64 \cdot 10^5 + h)^2}$$

$$(64 \cdot 10^5 + h)^2 = \frac{28014 \cdot 10^{12}}{619}$$

$$64 \cdot 10^5 + h = \sqrt{\frac{28014 \cdot 10^{12}}{619}}$$

$$h = \sqrt{\frac{28014 \cdot 10^{12}}{619}} - 64 \cdot 10^5 \approx 327322,3(m)$$

Vậy ở độ cao khoảng 327 322,3 mét thì trọng lượng của phi hành gia là 619 N.

Bài 4. Ngày 28/9/2018, sau trận động đất 7,5 độ Richter, cơn sóng thần (tiếng Anh là Tsunami) cao hơn 6 m đã tràn vào đảo Sulawesi (Indonesia) và tàn phá thành phố Palu gây thiệt hại vô cùng to lớn. Tốc độ cơn sóng thần v (m/s) và chiều sâu đại dương d (m) của nơi bắt đầu sóng thần liên hệ bởi công thức $v = \sqrt{dg}$, trong đó $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.



Sóng thần

a) Hãy tính tốc độ cơn sóng thần xuất phát từ Thái Bình Dương, ở độ sâu trung bình 400 m (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét trên giây).

b) Theo tính toán của các nhà khoa học địa chất, tốc độ cơn sóng thần ngày 28/9/2018 là 800 km/h, hãy tính chiều sâu đại dương của nơi tâm chấn động đất gây ra sóng thần (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).

Lời giải

a) Tốc độ cơn sóng thần xuất phát từ Thái Bình Dương, ở độ sâu trung bình 400 m là:

$$v = \sqrt{dg} = \sqrt{400 \cdot 9,8} = \sqrt{3920} \approx 62,64 \text{ (m/s)}.$$

$$\text{b) Đổi } 800(km/h) = \frac{800000}{3600} = \frac{2000}{9}(m/s) \Rightarrow v = \frac{2000}{9}(m/s)$$

Khi đó:

$$\frac{2000}{9} = \sqrt{9,81d}$$

$$\left(\frac{2000}{9}\right)^2 = 9,81d$$

$$d = \frac{\left(\frac{2000}{9}\right)^2}{9,8} \approx 5,034(m)$$

Vậy chiều sâu đại dương của nơi tâm chấn động đất gây ra sóng thần là khoảng 5,034(m)

Bài 5. Biết rằng nhiệt lượng toả ra trên dây dẫn được tính bởi công thức $Q = I^2Rt$, trong đó Q là nhiệt lượng tính bằng đơn vị Joule (J), R là điện trở tính bằng đơn vị Ohm (Ω), I là cường độ dòng điện tính bằng đơn vị Ampe (A), t là thời gian tính bằng giây (s). Dòng điện chạy qua một dây dẫn có $R = 10 \Omega$ trong thời gian 5 giây.

a) Thay dấu "?" trong bảng sau bằng các giá trị thích hợp.

I (A)	1	1,5	2
Q (J)	?	?	?

b) Cường độ dòng điện là bao nhiêu Ampe để nhiệt lượng toả ra trên dây dẫn đạt 800 J?

Lời giải

Thay $R = 10 (\Omega)$ và thời gian $t = 5$ (giây) vào công thức $Q = I^2Rt$, ta được: $Q = I^2 \cdot 10 \cdot 5 = 50I^2$ (J).

a) Thay $I = 1$ (A) vào biểu thức trên, ta được: $Q = 50 \cdot 1^2 = 50$ (J).

Thay $I = 1,5$ (A) vào biểu thức trên, ta được: $Q = 50 \cdot 1,5^2 = 112,5$ (J).

Thay $I = 2$ (A) vào biểu thức trên, ta được: $Q = 50 \cdot 2^2 = 200$ (J).

Vậy ta hoàn thành được bảng đã cho như sau:

I (A)	1	1,5	2
Q (J)	50	112,5	200

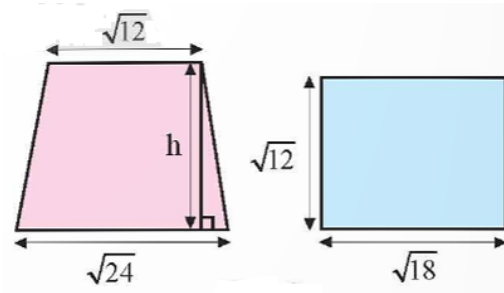
b) Để nhiệt lượng toả ra trên dây dẫn đạt 800 J thì $Q = 800$ (J)

Suy ra $50I^2 = 800$.

Do đó $I^2 = 16$ nên $I = \sqrt{16} = 4$ (A) (do $I > 0$).

Vậy cường độ dòng điện là 4 Ampe thì nhiệt lượng toả ra trên dây dẫn đạt 800 J.

Bài 6. Biết rằng hình thang và hình chữ nhật ở hình vẽ có diện tích bằng nhau. Tính chiều cao h của hình thang.



Lời giải

Diện tích hình chữ nhật là:

$$\sqrt{18} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{18 \cdot 12} = \sqrt{18 \cdot 2 \cdot 6} = \sqrt{36 \cdot 6} = 6\sqrt{6} \text{ (đvdt)}.$$

Vì hình thang và hình chữ nhật ở Hình 2 có diện tích bằng nhau nên diện tích hình thang bằng $6\sqrt{6}$ (đvdt).

Khi đó, diện tích hình thang là: $\frac{\sqrt{24} + \sqrt{12}}{2} \cdot h = 6\sqrt{6}$.

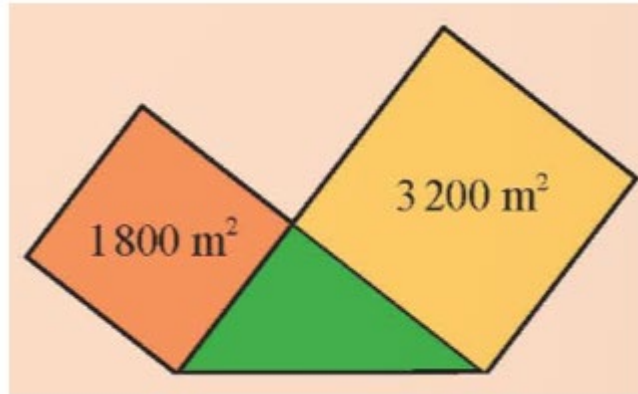
$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{\sqrt{24} + \sqrt{12}}{2} &= \frac{\sqrt{4 \cdot 6} + \sqrt{4 \cdot 3}}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{6} + 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2(\sqrt{6} + \sqrt{3})}{2} = \sqrt{6} + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Do đó, $(\sqrt{6} + \sqrt{3}) \cdot h = 6\sqrt{6}$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } h &= \frac{6\sqrt{6}}{\sqrt{6} + \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{6}(\sqrt{6} - \sqrt{3})}{(\sqrt{6} + \sqrt{3})(\sqrt{6} - \sqrt{3})} \\ &= \frac{6(6 - \sqrt{18})}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{6(6 - 3\sqrt{2})}{6 - 3} \\ &= \frac{6(6 - 3\sqrt{2})}{3} = 2(6 - 3\sqrt{2}) = 12 - 6\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Vậy chiều cao h của hình thang $h = 12 - 6\sqrt{2}$.

Bài 7. Một khu đất hình tam giác vuông tiếp giáp hai thửa ruộng hình vuông có diện tích như hình vẽ bên dưới. Khu đất hình tam giác vuông có chu vi bằng chu vi thửa ruộng hình vuông bé không?



Lời giải

• Hình vuông bé (màu cam) có diện tích là $1\,800\text{ m}^2$.

Khi đó, cạnh thửa ruộng bé hình vuông là: $\sqrt{1800} = \sqrt{2 \cdot 900} = 30\sqrt{2}\text{ (m)}$

Chu vi thửa ruộng bé là: $30\sqrt{2} \cdot 4 = 120\sqrt{2}\text{ (m)}$

• Hình vuông lớn có diện tích (màu vàng) là $3\,200\text{ m}^2$.

Khi đó, cạnh thửa ruộng lớn hình vuông là: $\sqrt{3200} = \sqrt{2 \cdot 1600} = 40\sqrt{2}\text{ (m)}$

• Hình tam giác vuông (màu xanh) có hai cạnh góc vuông là hai cạnh của của hai hình vuông trong hình vẽ trên.

Áp dụng định lí Pythagore vào tam giác vuông (màu xanh), ta có:

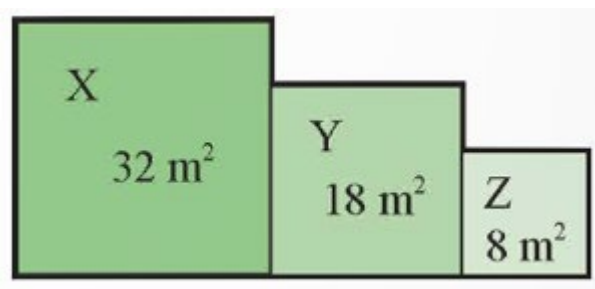
Độ dài cạnh huyền của tam giác vuông (màu xanh) là:

$$\sqrt{(30\sqrt{2})^2 + (40\sqrt{2})^2} = \sqrt{900 \cdot 2 + 1600 \cdot 2} = \sqrt{2500 \cdot 2} = 50\sqrt{2}\text{ (m)}$$

Chu vi tam giác vuông là: $30\sqrt{2} + 40\sqrt{2} + 50\sqrt{2} = 120\sqrt{2}\text{ (m)}$

Vậy khu đất hình tam giác vuông có chu vi bằng chu vi thửa ruộng bé.

Bài 8. Một vườn hoa gồm ba thửa hình vuông X, Y, Z lần lượt có diện tích như hình vẽ. Tính chu vi của vườn hoa đó.



Lời giải

• Cạnh hình vuông X là: $\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$ (m).

Suy ra chu vi hình vuông X là: $4 \cdot 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$ (m).

• Cạnh hình vuông Y là: $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$ (m).

Suy ra chu vi hình vuông Y là: $4 \cdot 3\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ (m).

• Cạnh hình vuông Z là: $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$ (m).

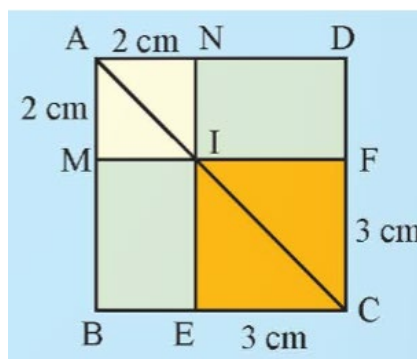
Suy ra chu vi hình vuông Z là: $4 \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ (m).

Do đó, chu vi của vườn hoa đó là:

$$16\sqrt{2} + 12\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 36\sqrt{2} \text{ (m)}.$$

Vậy chu vi của vườn hoa đó là $36\sqrt{2}$ m.

Bài 9. Hình vuông ABCD được chia thành hai hình vuông và hai hình chữ nhật như hình vẽ.



a) Tính độ dài đường chéo của hai hình vuông AMIN và CEIF.

b) Tính độ dài đường chéo của hình vuông ABCD theo hai cách khác nhau.

Lời giải

a) Vì AMIN là hình vuông nên $AM = IN = 2$ cm, $\widehat{ANI} = 90^\circ$

Xét tam giác ANI vuông tại N, áp dụng định lý Pythagore, ta có

$$AI^2 = AN^2 + IN^2 = 2^2 + 2^2 = 8.$$

$$\text{Suy ra } AI = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

Vì CEIF là hình vuông nên $IE = CF = 3$ cm, $\widehat{AEC} = 90^\circ$

Xét tam giác IEC vuông tại E, áp dụng định lý Pythagore, ta có

$$IC^2 = IE^2 + EC^2 = 3^2 + 3^2 = 18.$$

$$\text{Suy ra } IC = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

Vậy độ dài đường chéo của hai hình vuông AMIN và CEIF lần lượt là $2\sqrt{2}$ (cm) và $3\sqrt{2}$ (cm)

b)

Cách 1: Độ dài đường chéo hình vuông là:

$$AC = AI + IC = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

Cách 2:

• Vì BMIE là hình chữ nhật nên $BM = IE = 3 \text{ cm}$.

• Vì DNIF là hình chữ nhật nên $IN = DF = 2 \text{ cm}$.

Độ dài cạnh AB là: $AB = AM + BM = 2 + 3 = 5 \text{ (cm)}$.

Độ dài cạnh BC là: $BC = BE + EC = 2 + 3 = 5 \text{ (cm)}$.

Vì ABCD là hình vuông nên $\widehat{BAC} = 90^\circ$ suy ra tam giác ABC vuông tại B.

Xét tam giác ABC vuông tại B, áp dụng định lí Pythagore, ta có

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 5^2 + 5^2 = 50.$$

$$\text{Suy ra } AC = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

Vậy độ dài đường chéo của hình vuông ABCD là $5\sqrt{2} \text{ (cm)}$