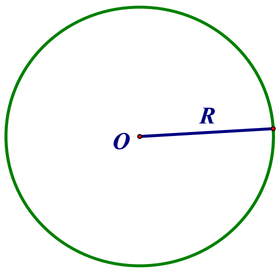
CHƯƠNG 5
ĐƯỜNG TRÒN

BÀI 1
ĐƯỜNG TRÒN
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

1. Khái niệm đường tròn

Trong mặt phẳng, đường tròn tâm O bán kính R (với $R > 0$) là tập hợp các điểm cách điểm O cố định một khoảng R, kí hiệu là: $(O;R)$



Chú ý:

- Một đường tròn hoàn toàn xác định khi biết tâm và bán kính.
- Khi không chú ý đến bán kính của đường tròn $(O;R)$, ta cũng có thể kí hiệu đường tròn (O).

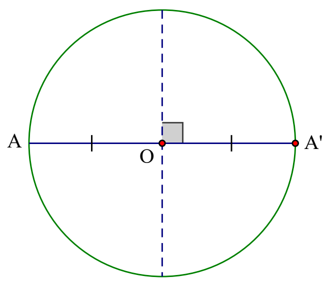
Vị trí tương đối của một điểm đối với đường tròn

Nhận xét:

- Điểm M nằm trên đường tròn (O) nếu $OM = R$
- Điểm M nằm trong đường tròn (O) nếu $OM < R$
- Điểm M nằm ngoài đường tròn (O) nếu $OM > R$

2. Tính chất đối xứng của đường tròn

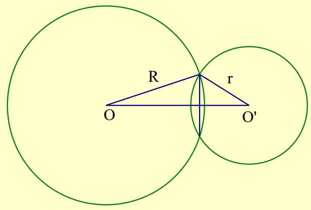
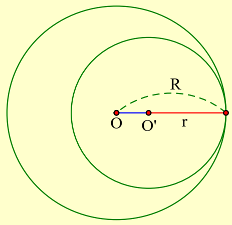
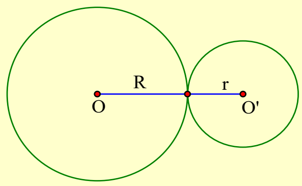
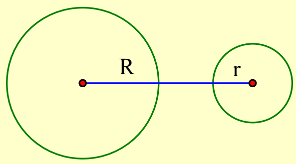
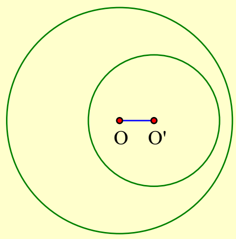
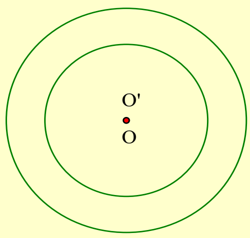
- Đường tròn là hình có tâm đối xứng: Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó
- Đường tròn là hình có trục đối xứng: Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn đó.



3. Liên hệ giữa đường kính và dây của đường tròn

- Đoạn thẳng nối hai điểm phân biệt thuộc đường tròn được gọi là dây (hay dây cung) của đường tròn.
- Dây đi qua tâm là đường kính của đường tròn. Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính của đường tròn đó

4. Vị trí của hai đường tròn

Vị trí tương đối của hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)(R \geq r)$		Số điểm chung	Hệ thức	Hình vẽ
Cắt nhau		2	$R-r<OO'<R+r$	
Tiếp xúc	Tiếp xúc trong	1	$OO'=R-r>0$	
	Tiếp xúc ngoài		$OO'=R+r$	
Không cắt nhau	Ngoài nhau	0	$OO'>R+r$	
	Đựng nhau		$0 \neq OO'<R-r$	
			$OO' \equiv O$	

Chú ý:

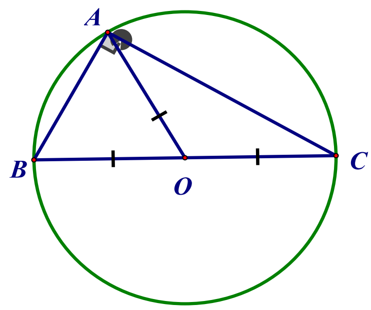
- Đường nối tâm (đường thẳng đi qua tâm 2 đường tròn) là trục đối xứng của hình tạo bởi hai đường tròn.
- Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.
- Nếu hai đường tròn cắt nhau thì đường nối tâm là đường trung trực của dây chung.

DẠNG 1
CHỨNG MINH CÁC ĐIỂM CHO TRƯỚC CÙNG NẰM TRÊN MỘT ĐƯỜNG TRÒN
TÍNH BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN

Phương pháp

Cách 1: Chứng minh các điểm cho trước cùng cách đều 1 điểm cho trước nào đó.

Cách 2: Nếu $\widehat{BAC}=90^0$ thì A thuộc đường tròn đường kính BC.



Xét tam giác vuông ABC, có AO là đường trung tuyến nên $AO=\frac{1}{2}BC\Rightarrow AO=OB=OC$

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông ở A có $AB=5cm, AC=12cm$.

a) Chứng minh ba điểm A,B,C cùng thuộc một đường tròn.

b) Tính bán kính của đường tròn đó.

Bài 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=9cm, BC=12cm$.

a) Chứng minh bốn điểm A,B,C,D cùng nằm trên một đường tròn.

b) Tính bán kính đường tròn đó.

Bài 3. Cho tam giác đều ΔABC cạnh bằng a, các đường cao BM, CN. Gọi O là trung điểm của BC

a) Chứng minh rằng B,C,M,N cùng thuộc đường tròn (O).

b) Gọi G là giao điểm của BM và CN. Chứng minh điểm G nằm trong, điểm A nằm ngoài đối với đường tròn đường kính BC.

Bài 4. Cho tam giác $ABC\left(\widehat{A}=90^0\right)$, đường cao AH. Từ M là điểm bất kỳ trên cạnh BC. Kẻ $MD\perp AB, ME\perp AC$. Chứng minh 5 điểm A,D,M,H,E cùng nằm trên một đường tròn

Bài 5. Cho đường tròn tâm (O), đường kính AB và một dây AC bằng bán kính đường tròn. Tính các góc của ΔABC.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. AM, BN, CP là các đường trung tuyến. Chứng minh 4 điểm B, P, N, C cùng thuộc một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

Bài 7. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{C}+\widehat{D}=90^0$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BD, DC, CA. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên 1 đường tròn

Bài 8. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A}=60^0$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng 6 điểm E, F, G, H, B, D cùng nằm trên 1 đường tròn

Bài 9. Cho tam giác ABC và điểm M là trung điểm của BC. Hạ MD, ME theo thứ tự vuông góc với AB, AC. Trên tia đối của tia DB và EC lần lượt lấy các điểm I, K sao cho D là trung điểm của BI, E là trung điểm của CK. Chứng minh rằng B, I, C, K cùng nằm trên 1 đường tròn.

Bài 10. Gọi I, K theo thứ tự là các điểm nằm trên AB, AD của hình vuông $ABCD$ sao cho $AI = AK$. Đường thẳng kẻ qua A vuông góc với DI ở P và cắt BC ở Q. Chứng minh rằng C, D, P, Q cùng thuộc 1 đường tròn.

Bài 11. Cho tam giác ABC, ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm của AB, AC, HC, HB. Chứng minh rằng 5 điểm I, J, K, L, E, F thuộc 1 đường tròn.

Bài 12. Cho hình vuông $ABCD$, gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OB, CD

a) Chứng minh rằng A, M, N, D thuộc 1 đường tròn.

b) So sánh AN và DM.

Bài 13. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Gọi E là giao điểm của CM và DN

a) Tính số đo góc CEN

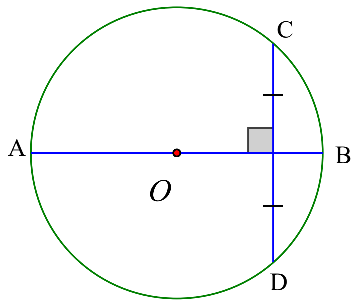
b) Chứng minh A, D, E, M cùng nằm trên 1 đường tròn

c) Xác định tâm của đường tròn đi qua 3 điểm B, D, E

DẠNG 2
LIÊN HỆ GIỮA ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN

- Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn đó.
- Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính của đường tròn đó

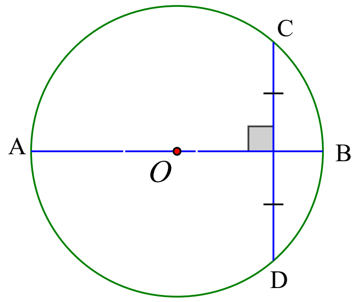
Bổ đề 1: Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy



Chứng minh:

Xét tam giác COD cân tại O ($OC = OD$) và OB là đường cao nên OB là đường trung trực của đoạn thẳng CD, do đó OB là trung tuyến vì vậy OB đi qua trung điểm CD.

Bổ đề 2: Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

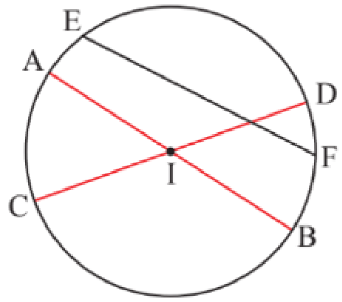


Chứng minh:

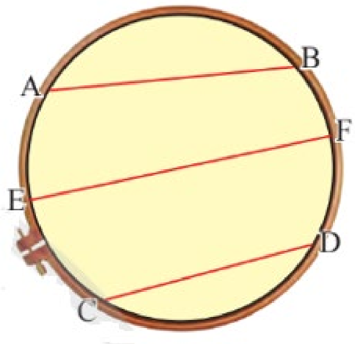
Xét tam giác COD cân tại O ($OC = OD$) và OB là đường trung tuyến nên OB là đường trung trực của đoạn thẳng CD, do đó OB vuông góc CD.

Chú ý: Khi dùng 2 bổ đề trên thì phải chứng minh vì trong sách giáo khoa không có nói đến chúng.

Bài 1. Cho đường tròn (I) có các dây cung AB, CD, EF. Cho biết AB và CD đi qua tâm I, EF không đi qua I (Hình vẽ). Hãy so sánh độ dài AB, CD, EF.



Bài 2. Bạn Minh Hiền căng ba đoạn chỉ AB, CD, EF có độ dài lần lượt là 32 cm, 28 cm và 40 cm trên một khung thêu hình tròn bán kính 20 cm (Hình vẽ). Trong ba dây trên, dây nào đi qua tâm của đường tròn? Giải thích.



Bài 3. Cho đường tròn tâm O bán kính $3cm$ và hai dây AB và AC. Cho biết $AB = 5cm$ $AC = 2cm$, hãy tính khoảng cách từ O đến dây AB và dây AC

Bài 4. Cho đường tròn tâm $(O;R)$ và một dây cung

AB. Gọi I là trung điểm của AB Tia OI cắt cung AB tại M

a) Cho $R = 5cm, AB = 6cm$. Tính độ dài dây cung MA

b) Gọi N là điểm đối xứng của M qua O, giả sử $MA = 5cm; AB = 6cm$. Tính bán kính R

Bài 5. Cho đường tròn tâm O, hai dây AB và CD vuông góc với nhau ở M. Biết $AB = 18cm, CD = 14cm, MC = 4cm$. Hãy tính khoảng cách từ tâm O đến mỗi dây AB và CD

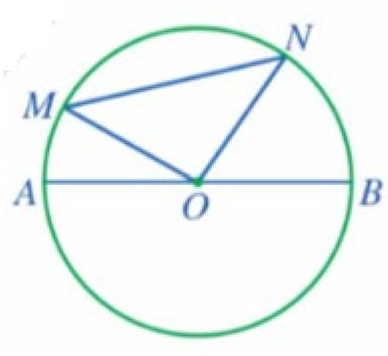
Bài 6. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB và một dây cung CD. Kẻ AE và BF vuông góc với CD lần lượt tại E và F. Chứng minh:

a) $CE = DF$

b) E và F đều ở ngoài (O)

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 7. Quan sát hình vẽ bên dưới.



a) So sánh MN và OM + ON.

b) So sánh MN và AB.

Bài 8. Cho đường tròn (O) và dây CD. Từ O kẻ tia vuông góc với CD tại M, cắt (O) tại H. Tính bán kính R của (O) biết: $CD = 16cm, MH = 4cm$

Bài 9. Cho đường tròn (O) bán kính $OA = 11cm$. Điểm M thộc bán kính AO và cách O khoảng 7cm. Qua M kẻ dây CD có độ dài 18cm. Tính độ dài các đoạn thẳng MC và MD

Bài 10. Cho đường tròn $(O;R)$ có hai dây AB, CD bằng nhau và vuông góc với nhau tại I. Giả sử $IA = 2cm, IB = 4cm$. Tính khoảng cách từ tâm O đến mỗi dây

Bài 11. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Dây CD cắt AB tại M, biết $MC = 4cm, MD = 12cm$. $\widehat{BMD} = 30^0$. Hãy tính :

a) Khoảng cách từ O đến CD

b) Bán kính của (O)

Bài 12. Cho đường tròn (O) có các dây $AB = 24cm, \mathrm{AC} = 20cm, \widehat{BAC} < 90^0$ và O nằm trong góc BAC. Gọi M là trung điểm của AC. Khoảng cách từ điểm M đến AB bằng 8cm

a) Chứng minh tam giác ABC cân

b) Tính bán kính của (O)

Bài 13. Cho đường tròn tâm $(O;R)$, A và B di động trên đường tròn (O) thỏa mãn $\widehat{AOB} = 120^0$. Vẽ $OH \perp AB = H$

a) Chứng minh H là trung điểm của AB

b) Tính OH, AB và S_{OAB} theo R

c) Tia OH cắt đường tròn $(O;R)$ tại C. Tứ giác $OABC$ là hình gì? Vì sao

Bài 14. Cho tam giác ABC có trực tâm H và nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD

a) Chứng minh $BHCD$ là hình bình hành

b) Kẻ đường kính OI vuông góc BC tại I. Chứng minh I, H, D thẳng hàng

c) Chứng minh $AH = 2OI$

Bài 15. Cho đường tròn (O) đường kính AB, dây CD cắt AB tại I. Gọi H, K theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ A và B đến CD. Chứng minh rằng: $CH = DK$

Bài 16. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại trực tâm H. Lấy I là trung điểm của BC

a) Gọi K là điểm đối xứng của H qua I. Chứng minh tứ giác $BHCK$ là hình bình hành

b) Xác định tâm O của đường tròn qua các điểm A, B, K, C

c) Chứng minh: $OI // CH$

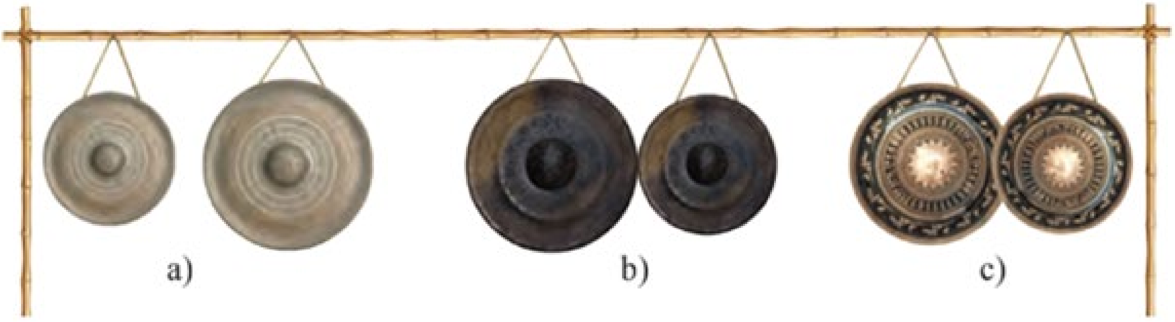
d) Chứng minh rằng: $BE.BA + CD.CA = BC^2$

Bài 17. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Trên đoạn thẳng OA lấy điểm C và trên đoạn thẳng OB lấy điểm D sao cho $OC = OD$. Từ C và D kẻ hai tia song song cắt nửa đường tròn ở E và F. Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh rằng: $S_{CEF} + S_{DEF} = EF.OI$

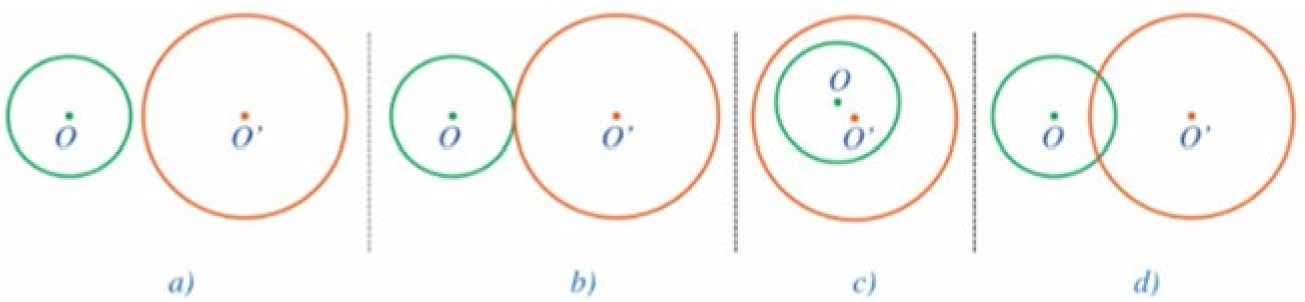
Bài 18. Cho đường tròn $(O;R)$. Các điểm A, B, C, D thuộc $(O;R)$. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác $ABCD$

DẠNG 3
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

Bài 1. Mô tả vị trí tương đối giữa mỗi cặp đường tròn trong hình chụp bộ cồng chiêng Tây Nguyên trong hình vẽ bên dưới.



Bài 2. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn (O) và (O’) trong mỗi hình a, b, c, d:



Bài 3. Xác định vị trí tương đối của (O; R) và (O’; R’) trong mỗi trường hợp sau:

a) OO’ = 18; R = 10; R’ = 6 b) OO’ = 2; R = 9; R’ = 3

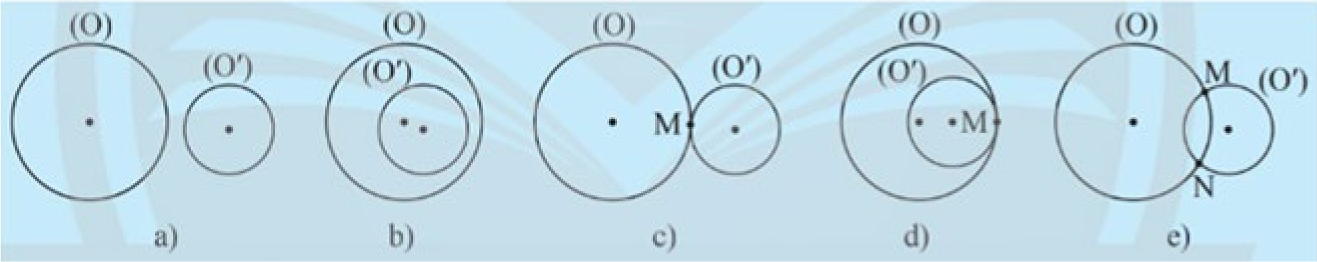
c) OO’ = 13; R = 8; R’ = 5 d) OO’ = 17; R = 15; R’ = 4.

Bài 4. Cho đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ cắt nhau tại A,B. Chứng minh OO' là đường trung trực của AB.

Bài 5. Cho hai đường tròn $(O;13cm)$ và $(O';15cm)$ cắt nhau tại A,B sao cho $AB=24(cm)$. Tính độ dài $O'O$.

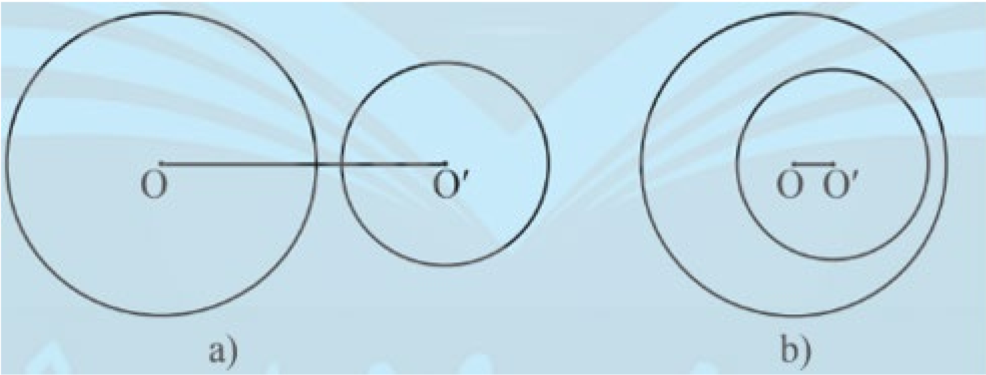
BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6. Tìm số điểm chung của hai đường tròn (O) và (O’) trong mỗi trường hợp sau:



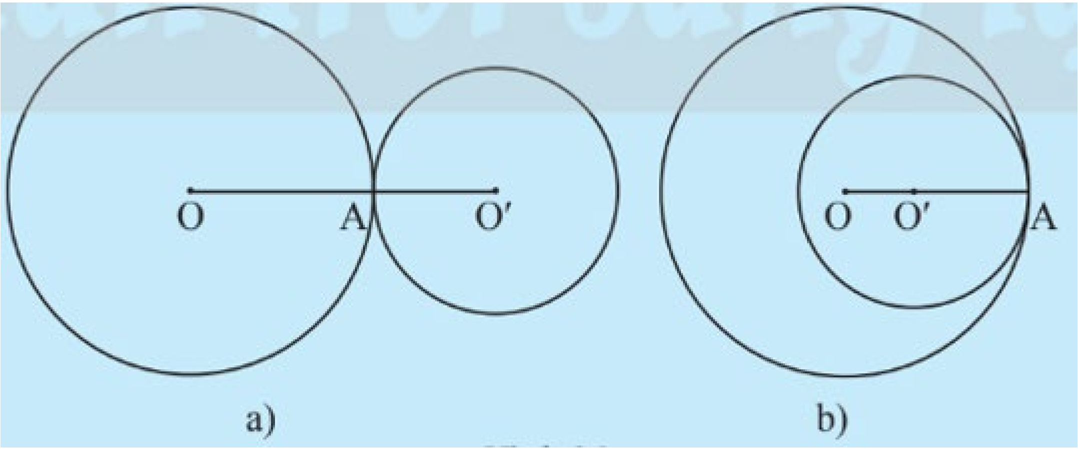
Bài 7. Cho hai đường tròn phân biệt (O; R) và (O'; R') với R ≥ R'. Hãy so sánh OO' với R + R' và R – R' trong mỗi trường hợp sau:

Trường hợp 1: (O; R) và (O'; R') không có điểm chung (Hình 1).



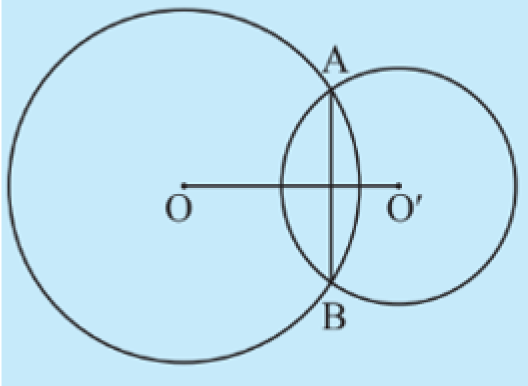
Hình 1

Trường hợp 2: (O; R) và (O'; R') chỉ có một điểm chung (Hình 2).



Hình 2

Trường hợp 3: (O; R) và (O'; R') có đúng hai điểm chung (Hình 3).



Hình 3

Bài 8. Cho hai đường tròn (O; 11,5 cm) và (O’; 6,5 cm). Biết rằng OO’ = 4 cm. Xét vị trí tương đối của hai đường tròn đó.

Bài 9. Xác định vị trí tương đối giữa hai đường tròn (I; R) và (J; R’) trong mỗi trường hợp sau:

a) IJ = 5; R = 3; R’ = 2

b) IJ = 4; R = 11; R’ = 7

c) IJ = 6; R = 9; R’ = 4

d) IJ = 10; R = 4; R’ = 1.

Bài 10. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A, B. Gọi I là trung điểm của OO'. Qua A vẽ đường thẳng vuông góc với IA cắt (O) tại C và cắt (O') tại D. So sánh AC và AD.

Bài 11. Cho đường tròn (O), đường kính $AD = R$. Vẽ cung tròn tâm D bán kính R cắt (O) ở B và C

a) Tứ giác $OBDC$ là gì ? vì sao ?

b) Tính số đo các góc $\widehat{CBD}; \widehat{CBO}; \widehat{OBA}$

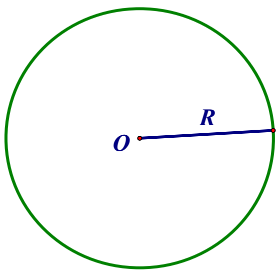
c) Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều.

CHƯƠNG 5
ĐƯỜNG TRÒN

BÀI 1
ĐƯỜNG TRÒN
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

1. Khái niệm đường tròn

Trong mặt phẳng, đường tròn tâm O bán kính R (với $R > 0$) là tập hợp các điểm cách điểm O cố định một khoảng R, kí hiệu là: $(O;R)$



Chú ý:

- Một đường tròn hoàn toàn xác định khi biết tâm và bán kính.
- Khi không chú ý đến bán kính của đường tròn $(O;R)$, ta cũng có thể kí hiệu đường tròn (O).

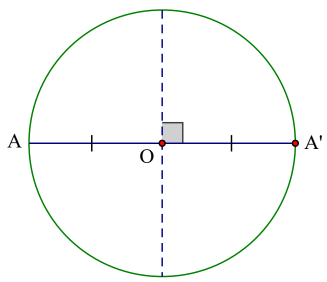
Vị trí tương đối của một điểm đối với đường tròn

Nhận xét:

- Điểm M nằm trên đường tròn (O) nếu $OM = R$
- Điểm M nằm trong đường tròn (O) nếu $OM < R$
- Điểm M nằm ngoài đường tròn (O) nếu $OM > R$

2. Tính chất đối xứng của đường tròn

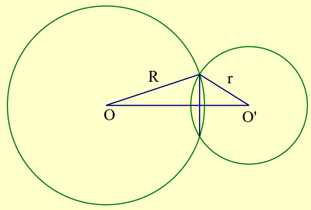
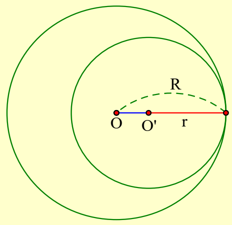
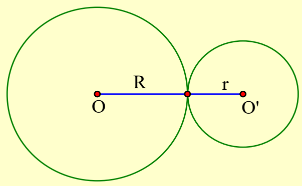
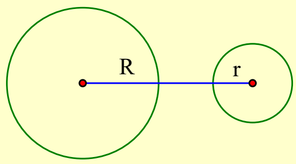
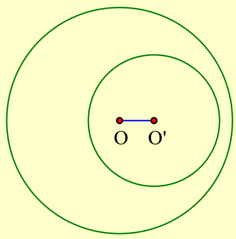
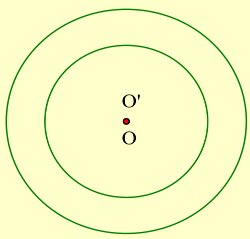
- Đường tròn là hình có tâm đối xứng: Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó
- Đường tròn là hình có trục đối xứng: Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn đó.



3. Liên hệ giữa đường kính và dây của đường tròn

- Đoạn thẳng nối hai điểm phân biệt thuộc đường tròn được gọi là dây (hay dây cung) của đường tròn.
- Dây đi qua tâm là đường kính của đường tròn. Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính của đường tròn đó

4. Vị trí của hai đường tròn

Vị trí tương đối của hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)(R\ge r)$		Số điểm chung	Hệ thức	Hình vẽ
Cắt nhau		2	$R-r<OO'<R+r$	
Tiếp xúc	Tiếp xúc trong	1	$OO'=R-r>0$	
	Tiếp xúc ngoài		$OO'=R+r$	
Không cắt nhau	Ngoài nhau	0	$OO'>R+r$	
	Đựng nhau		$0\ne OO'<R-r$	
			$OO'\equiv O$	

Chú ý:

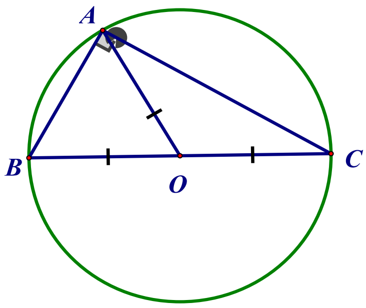
- Đường nối tâm (đường thẳng đi qua tâm 2 đường tròn) là trục đối xứng của hình tạo bởi hai đường tròn.
- Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.
- Nếu hai đường tròn cắt nhau thì đường nối tâm là đường trung trực của dây chung.

DẠNG 1
CHỨNG MINH CÁC ĐIỂM CHO TRƯỚC CÙNG NẰM TRÊN MỘT ĐƯỜNG TRÒN
TÍNH BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN

Phương pháp

Cách 1: Chứng minh các điểm cho trước cùng cách đều 1 điểm cho trước nào đó.

Cách 2: Nếu $\widehat{BAC}=90^0$ thì A thuộc đường tròn đường kính BC.



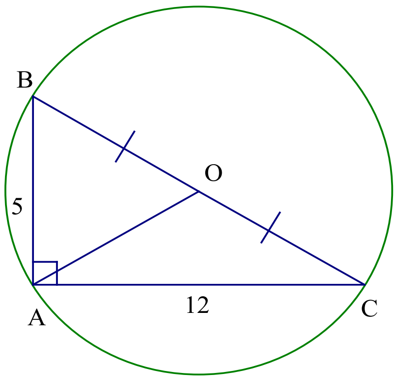
Xét tam giác vuông ABC, có AO là đường trung tuyến nên $AO=\frac{1}{2}BC \Rightarrow AO=OB=OC$

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông ở A có $AB=5cm, AC=12cm$.

a) Chứng minh ba điểm A,B,C cùng thuộc một đường tròn.

b) Tính bán kính của đường tròn đó.

Lời giải



a) Gọi O là trung điểm BC

Xét tam giác vuông ABC, có AO là đường trung tuyến nên $AO=\frac{1}{2}BC \Rightarrow AO=OB=OC$

Do đó ba điểm A,B,C cùng thuộc một đường tròn.

b) Áp dụng định lí Pythagore cho tam giác vuông ABC, ta có: $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=13cm$

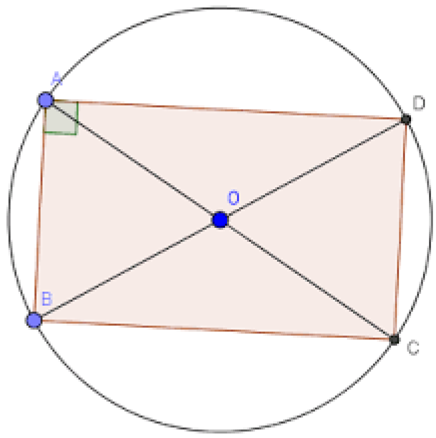
$\Rightarrow AO=OB=OC=\frac{1}{2}BC=6,5cm$

Bài 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 9cm, BC = 12cm$.

a) Chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.

b) Tính bán kính đường tròn đó.

Lời giải



a) Theo tính chất hình chữ nhật: Hai đường chéo của hình chữ nhật bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

Gọi O là giao điểm của AC và BD

$ABCD$ là hình chữ nhật, ta có: $OA = OB = OC = OD \Rightarrow A, B, C, D \in (O)$

b) Áp dụng định lí Pythagore cho tam giác vuông ABC, ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 15cm$

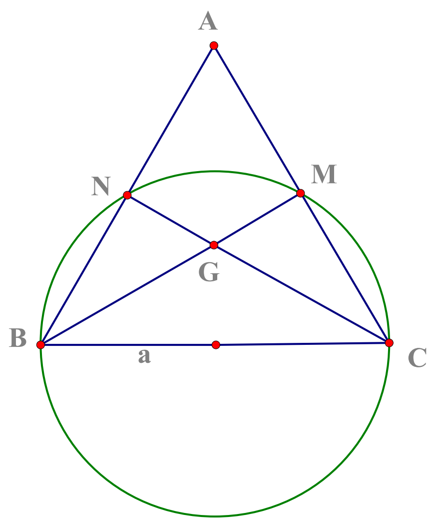
$\Rightarrow AO = OB = OC = OD = \dfrac{1}{2}BC = 7,5cm$

Bài 3. Cho tam giác đều ΔABC cạnh bằng a, các đường cao BM, CN. Gọi O là trung điểm của BC

a) Chứng minh rằng B, C, M, N cùng thuộc đường tròn (O).

b) Gọi G là giao điểm của BM và CN. Chứng minh điểm G nằm trong, điểm A nằm ngoài đối với đường tròn đường kính BC.

Lời giải



a) Ta có:

Xét tam giác vuông BNC, có NO là đường trung tuyến nên $NO=\frac{1}{2}BC\Rightarrow NO=OB=OC$

$\Rightarrow N\in\left(O;\frac{BC}{2}\right)$

Xét tam giác vuông BMC, có MO là đường trung tuyến nên $MO=\frac{1}{2}BC\Rightarrow MO=OB=OC$

$\Rightarrow M\in\left(O;\frac{BC}{2}\right)$

Vậy B,C,M,N cùng thuộc 1 đường tròn $\left(O;\frac{BC}{2}\right)$

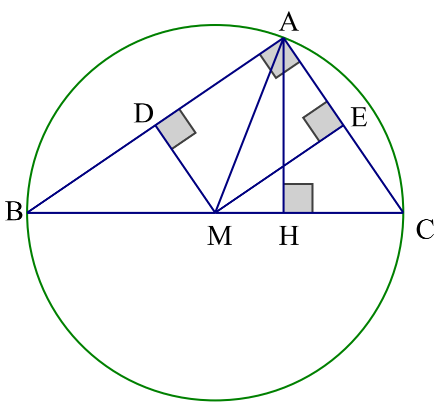
b) Ta có ΔABC đều có G trực tâm đồng thời là trọng tâm

Xét $\Delta AOB(\widehat{O}=90^0), R=ON=\frac{a}{2}.OA=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}R\Rightarrow A$ nằm ngoài đường tròn (O)

Ta lại có: $OG=\frac{1}{3}OA=\frac{a\sqrt{3}}{6}<R\Rightarrow G$ nằm trong (O).

Bài 4. Cho tam giác $ABC\left(\widehat{A}=90^0\right)$, đường cao AH. Từ M là điểm bất kỳ trên cạnh BC. Kẻ $MD\perp AB, ME\perp AC$. Chứng minh 5 điểm A,D,M,H,E cùng nằm trên một đường tròn

Lời giải



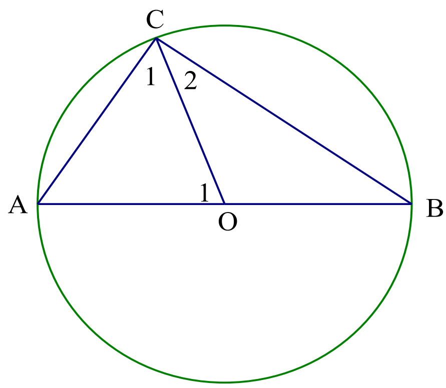
Vì ba tam giác ADM, AEM, AHM có chung cạnh huyền AM nên ba đỉnh góc vuông D,E,H

Nằm trên đường tròn đường kính AM có tâm là trung điểm của AM

Vậy 5 điểm A,D,M,H,E cùng nằm trên một đường tròn

Bài 5. Cho đường tròn tâm (O), đường kính AB và một dây AC bằng bán kính đường tròn. Tính các góc của ΔABC.

Lời giải



Tam giác OAC có ba cạnh bằng nhau $(AC = OA = OC)$ nên là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{C_1} = \widehat{O_1} = 60^0$

Ta có: OAC có $OB = OC$ nên can tại $O \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C_2}$

$\widehat{O_1}$ là góc ngoài của $\Delta OBC \Rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{B} + \widehat{C_2} = 2\widehat{B} = 2\widehat{C_2} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C_2} = \frac{1}{2}\widehat{O_1} = 30^0 \Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 90^0$

Vậy $\widehat{A} = 60^0; \widehat{B} = 30^0; \widehat{C} = 90^0$

Có thể lí giải như sau: ΔCAB có trung tuyến CO bằng nửa cạnh đối xứng AB nên vuông tại C

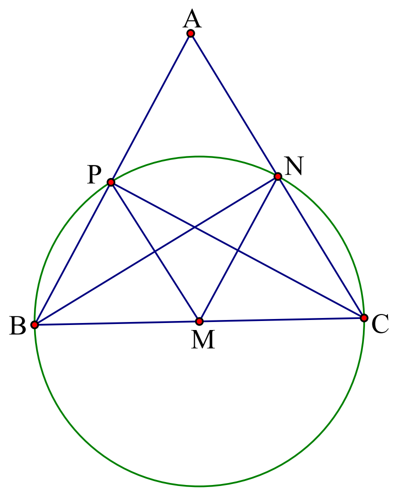
$\widehat{ACB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{A} = 60^0 \Rightarrow \widehat{B} = 30^0$

Vậy ΔABC có $\widehat{C} = 90^0; \widehat{A} = 60^0; \widehat{B} = 30^0$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. $\mathrm{AM}, \mathrm{BN}, \mathrm{CP}$ là các đường trung tuyến. Chứng minh 4 điểm $\mathrm{B}, \mathrm{P}, \mathrm{N}, \mathrm{C}$ cùng thuộc một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

Lời giải



Vì tam giác ABC đều nên các trung tuyến đồng thời cũng là đường cao, Suy ra $\mathrm{AM}, \mathrm{BN}, \mathrm{CP}$ lần lượt vuông góc với $\mathrm{BC}, \mathrm{AC}, \mathrm{AB}$.

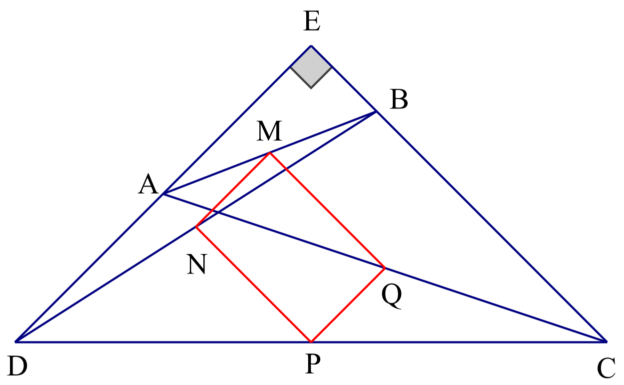
$+$ $\Delta\mathrm{BPC}$ là tam giác vuông, có BC là cạnh huyền nên $\Rightarrow \mathrm{MP} = \frac{1}{2}\mathrm{BC} = \mathrm{BM} = \mathrm{MC}$ (1)

$+ \Delta\mathrm{BNC}$ là tam giác vuông, có BC là cạnh huyền nên $\Rightarrow \mathrm{NM} = \frac{1}{2}\mathrm{BC} = \mathrm{BM} = \mathrm{MC}$ (2)

Từ (1) và (2) $PM = NM = MB = MC$. Hay các điểm B, P, N, C cùng thuộc đường tròn, đường kính $BC = a$, tâm đường tròn là trung điểm M của BC

Bài 7. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^0$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BD, DC, CA. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên 1 đường tròn

Lời giải



Xét tứ giác $MNPQ$, ta có: $\begin{cases} MQ // NP \\ MN // PQ \end{cases} \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành

Kéo dài AD và BC cắt nhau tại E

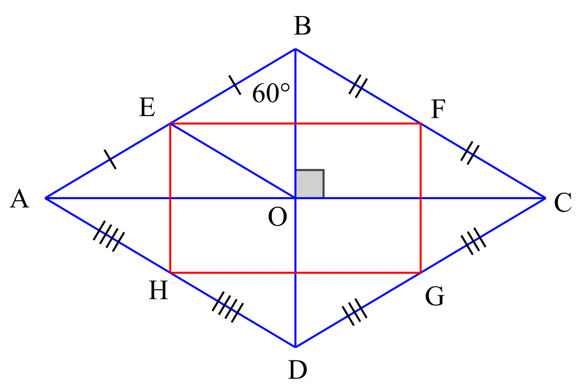
Ta có: $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^0 \Rightarrow \widehat{E} = 90^0$

Lại có: $\begin{cases} MN // ED \\ MQ // EC \end{cases} \Rightarrow MN \perp MQ \Rightarrow MNPQ$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow M, N, P, Q$ nằm trên 1 đường tròn với tâm là giao điểm của 2 đường chéo của hình chữ nhật, bán kính bằng nửa đường chéo.

Bài 8. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 60^0$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng 6 điểm E, F, G, H, B, D cùng nằm trên 1 đường tròn

Lời giải



Xét tứ giác $EFGH$, có: $\begin{cases} EF // GH \\ EH // FG \end{cases} \Rightarrow EFGH$ là hình bình hành

Lại có: $\widehat{HEF} = 90^0 \Rightarrow EFGH$ là hình chữ nhật

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD

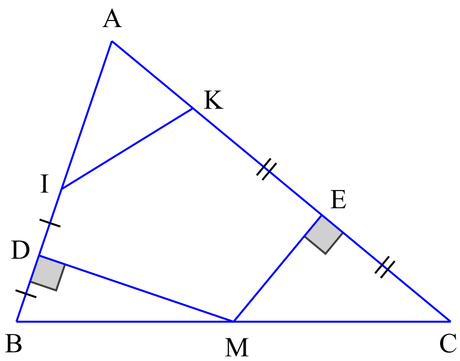
$\Rightarrow OE = OF = OG = OH(1)$

Xét tam giác OBE có: $\begin{cases} OE = BE \\ \widehat{B} = 60^0 \end{cases} \Rightarrow \Delta OBE$ đều $\Rightarrow OE = OB = OD(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OE = OB = OF = OG = OH = OD \Rightarrow E, B, F, G, D, H \in (O)$

Bài 9. Cho tam giác ABC và điểm M là trung điểm của BC. Hạ MD, ME theo thứ tự vuông góc với AB, AC. Trên tia đối của tia DB và EC lần lượt lấy các điểm I, K sao cho D là trung điểm của BI, E là trung điểm của CK. Chứng minh rằng B, I, C, K cùng nằm trên 1 đường tròn.

Lời giải



Cách 1: sử dụng định nghĩa

Ta có: M là trung điểm $BC \Rightarrow MB = MC = \frac{1}{2}BC(1)$

MD là trung trực của $BI \Rightarrow MI = MB(2)$

ME là trung trực của $CK \Rightarrow MC = MK(3)$

Từ (1)(2)(3) $\Rightarrow MB = MC = MI = MK = \frac{1}{2}BC$ (đpcm)

Cách 2:

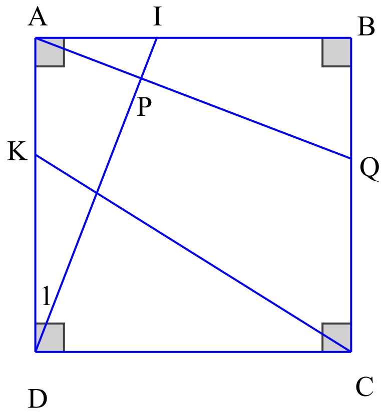
Ta có: MD là trung trực của $BI \Rightarrow MI = MB = \frac{1}{2}BC \Leftrightarrow \Delta BIC$ vuông tại I $\Rightarrow I \in (O; BC)$

ME là trung trực của $CK \Rightarrow MK = MC = \frac{1}{2}BC \Rightarrow \Delta BKC$ vuông tại $K \Rightarrow K \in (O; BC)$

Vậy: $B, I, C, K \in (O; BC)$.

Bài 10. Gọi I, K theo thứ tự là các điểm nằm trên AB, AD của hình vuông $ABCD$ sao cho $AI = AK$. Đường thẳng kẻ qua A vuông góc với DI ở P và cắt BC ở Q. Chứng minh rằng C, D, P, Q cùng thuộc 1 đường tròn.

Lời giải



Ta có $\Delta ADI = \Delta BAQ(g-c-g) \Rightarrow AI = BQ \Rightarrow \begin{cases} KD = CQ \\ KD // CQ \end{cases} \Rightarrow KDCQ$ là hình bình hành, mà $\widehat{C} = 60^0$

$\Rightarrow \lozenge CDKQ$ là hình chữ nhật.

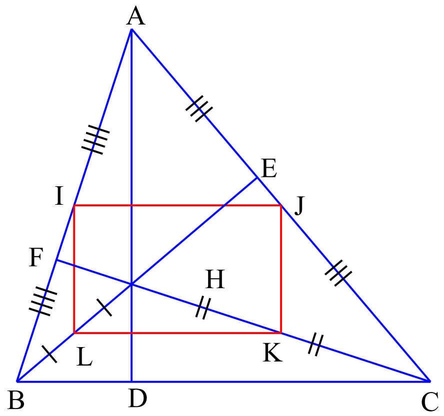
Gọi O là giao điểm của hai đường chéo CK và DQ $\Rightarrow OC = OD = OK = OQ$

ΔPDQ vuông cân tại $P \Rightarrow PQ = OD = OC$

Vậy 5 điểm C, D, K, P, Q cùng thuộc 1 đường tròn.

Bài 11. Cho tam giác ABC, ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm của AB, AC, HC, HB. Chứng minh rằng 5 điểm I, J, K, L, E, F thuộc 1 đường tròn.

Lời giải



Ta có tứ giác $IJKL$ là hình bình hành (dhnb)

Mà $\widehat{ILK} = 90^0 \Rightarrow \lozenge IJKL$ là hình chữ nhật có hai đường chéo là LJ và IK

Xét tam giác vuông ELJ vuông tại $E \Rightarrow OE = \frac{1}{2}LJ = OJ$

Xét tam giác vuông FLK vuông tại $I \Rightarrow OF = \frac{1}{2}IK = OJ$

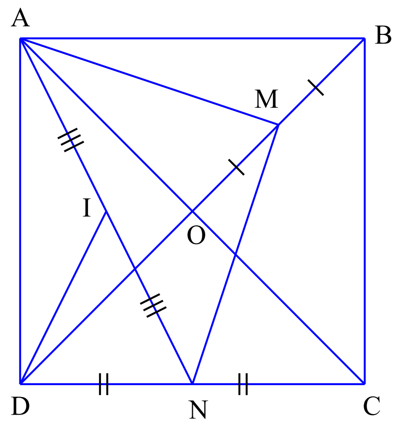
Vậy 6 điểm I, J, K, L, E, F thuộc 1 đường tròn đường kính là đường chéo của hình chữ nhật.

Bài 12. Cho hình vuông $ABCD$, gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OB, CD

a) Chứng minh rằng A, M, N, D thuộc 1 đường tròn.

b) So sánh AN và DM .

Lời giải



a. Kẻ NH vuông góc với BD tại H

Xét tam giác OCD, có: $\begin{cases} DN = NC \\ NH // OC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} HO = HD = \dfrac{1}{2}CD \\ MO = MB = \dfrac{1}{2}OB \end{cases} \Rightarrow MH = \dfrac{1}{2}BD = OA$

Ta có: $\Delta OAM = \Delta HNM\,(cgc) \Rightarrow \begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{M_1} \\ \widehat{A_1} + \widehat{M_2} = 90^0 \end{cases} \Rightarrow \widehat{AMN} = 90^0$

+) Gọi I là trung điểm của $AN \Rightarrow IA = IN = \dfrac{1}{2}AN(1)$

Xét $\Delta ADN(\widehat{D} = 90^0) \Rightarrow ID = \dfrac{1}{2}AN(2); \Delta AMN(\widehat{M} = 90^0) \Rightarrow MI = \dfrac{1}{2}AN(3)$

Từ (1)(2)(3) $\Rightarrow IA = IN = IM = ID \Rightarrow A, M, N, D \in (O)$

b. Xét đường tròn $(I; IA)$ có AN là đường kính, DM là dây không đi qua tâm $\Rightarrow AN > DM$

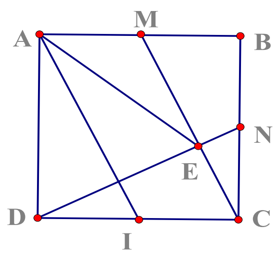
Bài 13. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Gọi E là giao điểm của CM và DN

a) Tính số đo góc CEN

b) Chứng minh A, D, E, M cùng nằm trên 1 đường tròn

c) Xác định tâm của đường tròn đi qua 3 điểm B, D, E

Lời giải



a) Chứng minh $\Delta CMB = \Delta DNC \Rightarrow \widehat{NCE} = \widehat{CDN} \Rightarrow \widehat{CEN} = 90^0$

b) Ta có: A, D, E, M thuộc đường tròn đường kính DM

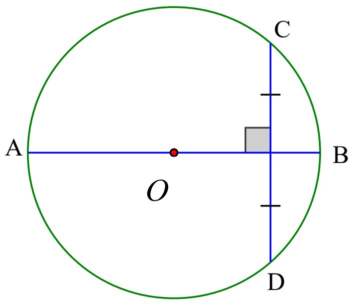
c) Gọi I là trung điểm CD, chứng minh được $AI // MC$

$\Rightarrow \Delta ADE$ cân tại A $\Rightarrow B, D, E \in (A; AB)$

DẠNG 2
LIÊN HỆ GIỮA ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN

- Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn đó.
- Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính của đường tròn đó

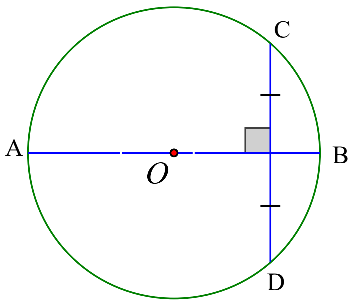
Bổ đề 1: Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy



Chứng minh:

Xét tam giác COD cân tại O ($OC = OD$) và OB là đường cao nên OB là đường trung trực của đoạn thẳng CD, do đó OB là trung tuyến vì vậy OB đi qua trung điểm CD.

Bổ đề 2: Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

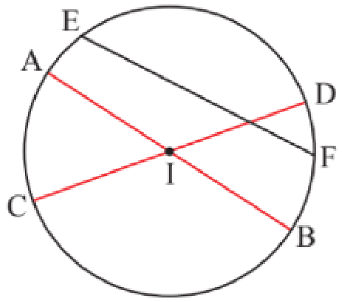


Chứng minh:

Xét tam giác COD cân tại O ($OC = OD$) và OB là đường trung tuyến nên OB là đường trung trực của đoạn thẳng CD, do đó OB vuông góc CD.

Chú ý: Khi dùng 2 bổ đề trên thì phải chứng minh vì trong sách giáo khoa không có nói đến chúng.

Bài 1. Cho đường tròn (I) có các dây cung AB, CD, EF. Cho biết AB và CD đi qua tâm I, EF không đi qua I (Hình vẽ). Hãy so sánh độ dài AB, CD, EF.



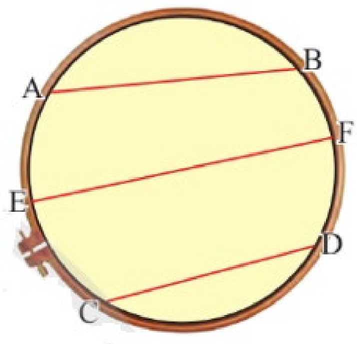
Lời giải

Trong đường tròn (I), AB và CD là đường kính đi qua tâm I, EF là dây cung không đi qua I.

Do đó AB = CD và EF < AB, EF < CD.

Vậy EF < AB = CD.

Bài 2. Bạn Minh Hiền căng ba đoạn chỉ AB, CD, EF có độ dài lần lượt là 32 cm, 28 cm và 40 cm trên một khung thêu hình tròn bán kính 20 cm (Hình vẽ). Trong ba dây trên, dây nào đi qua tâm của đường tròn? Giải thích.



Lời giải

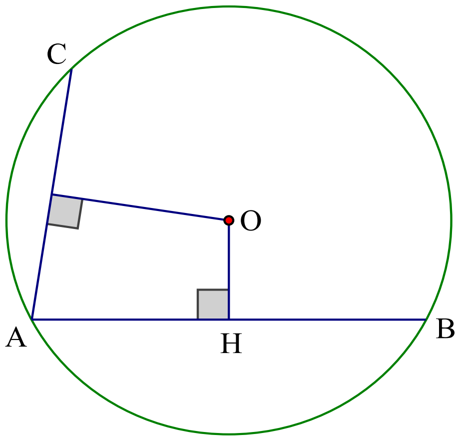
Gọi (O; R) là đường tròn có bán kính R = 20 cm, suy ra đường kính 40 cm.

Ta có EF = 40 cm = 2 . 20 cm = 2R.

Do đó, trong ba dây AB, CD và EF thì có dây EF đi qua tâm của đường tròn.

Bài 3. Cho đường tròn tâm O bán kính $3cm$ và hai dây AB và AC. Cho biết $AB = 5cm$ $AC = 2cm$, hãy tính khoảng cách từ O đến dây AB và dây AC

Lời giải



Gọi OH, OK lần lượt là khoảng cách từ O đến AB, AC

Tính được: $OH = \dfrac{\sqrt{11}}{2}(cm); OK = 2\sqrt{2}(cm)$

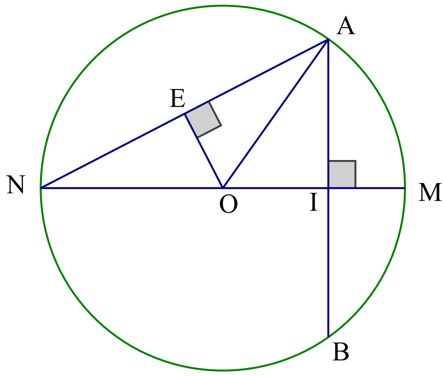
Bài 4. Cho đường tròn tâm $(O;R)$ và một dây cung

AB. Gọi I là trung điểm của AB Tia OI cắt cung AB tại M

a) Cho $R = 5cm, AB = 6cm$. Tính độ dài dây cung MA

b) Gọi N là điểm đối xứng của M qua O, giả sử $MA = 5cm; AB = 6cm$. Tính bán kính R

Lời giải



a) Vì I là trung điểm của dây AB nên: $IA = IB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{6}{2} = 3(cm)$ và $OI \perp AB$

- $\Delta OIA\left(\hat{I} = 90^0\right) \Rightarrow OI^2 = OA^2 - IA^2 = 5^2 - 3^2 = 4^2 \Rightarrow OI = 4cm \Rightarrow IM = 1cm$

- $\Delta AIM\left(\hat{I} = 90^0\right) \Rightarrow AM^2 = AI^2 + IM^2 = 3^2 + 1^2 = 10 \Rightarrow AM = \sqrt{10}$

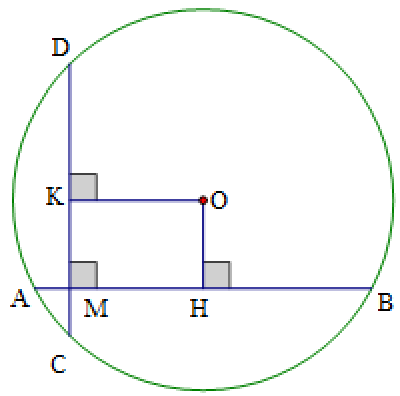
b) Gọi E là trung điểm của dây AN

Ta có: $OE \perp NA; NE = EA = 2,5cm$

- Xét $\Delta NEO\# \Delta NIA(gg) \Rightarrow \dfrac{NE}{NI} = \dfrac{ON}{NA} \Rightarrow ON = \dfrac{NA.NE}{NI} = \dfrac{2,5.5}{4} = 3,125(cm)$.

Bài 5. Cho đường tròn tâm O, hai dây AB và CD vuông góc với nhau ở M. Biết $AB = 18cm, CD = 14cm, MC = 4cm$. Hãy tính khoảng cách từ tâm O đến mỗi dây AB và CD

Lời giải



Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của O trên AB và CD

Ta có: $\begin{cases} OH \perp AB \Rightarrow HA = HB = 9cm \\ OK \perp CD \Rightarrow KD = KC = 7cm \end{cases}$

Mà: $KC = KM + MC \Rightarrow KM = KC - MC = 7 - 4 = 3cm \Rightarrow OH = MK = 3cm$

Xét $\Delta OHB(\widehat{H} = 90^0) \Rightarrow OB^2 = OH^2 + HB^2 \Rightarrow OB = OD = 3\sqrt{10}(cm)$

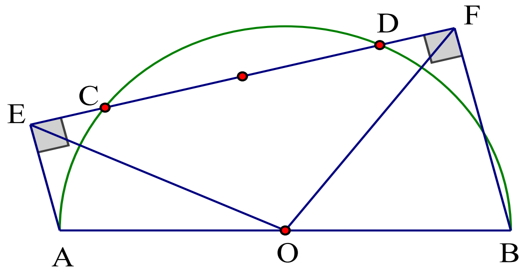
Xét $\Delta OKD(\widehat{K} = 90^0) \Rightarrow OD^2 = OK^2 + DK^2 \Rightarrow OK = \sqrt{41}(cm)$

Bài 6. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB và một dây cung CD. Kẻ AE và BF vuông góc với CD lần lượt tại E và F. Chứng minh:

a) $CE = DF$

b) E và F đều ở ngoài (O)

Lời giải



a) Gọi I là Trung điểm $CD \Rightarrow CI = ID$

Xét hình thang $AEFB$, I là trung điểm $EF \Rightarrow IE = IF \Rightarrow CE = DF$

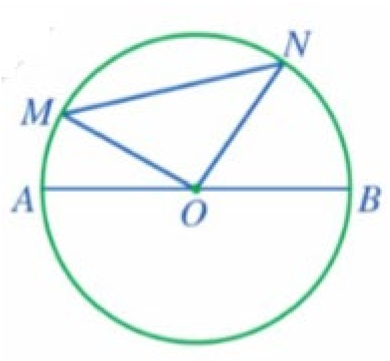
b) Ta có $\widehat{EAB}$ và $\widehat{FBA}$ bù nhau nên có một góc tù và một góc nhọn

Giả sử $\widehat{EAB} > 90^0 \Rightarrow \Delta EAO$ có $OE > OA = R \Rightarrow E$ ở ngoài đường tròn mà $OE = OF$

Nên F cũng ở ngoài đường tròn.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 7. Quan sát hình vẽ bên dưới.



a) So sánh MN và OM + ON.

b) So sánh MN và AB.

Lời giải

a) Xét ΔOMN ta có MN < OM + ON (1) (Bất đẳng thức tam giác).

b) Vì A, M, N, B cùng thuộc đường tròn (O) nên OA = OM = ON = OB.

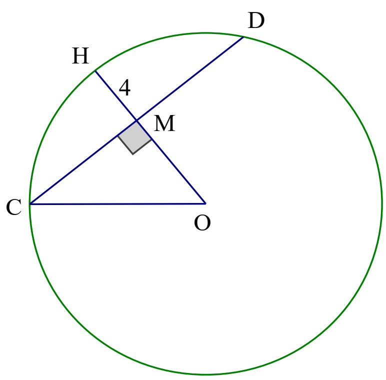
Ta có: OM + ON = OA + OB.

Lại có AB = OA + OB, do đó OM + ON < AB. (2)

Từ (1) và (2) suy ra MN < AB.

Bài 8. Cho đường tròn (O) và dây CD. Từ O kẻ tia vuông góc với CD tại M, cắt (O) tại H. Tính bán kính R của (O) biết: $CD = 16cm, MH = 4cm$

Lời giải



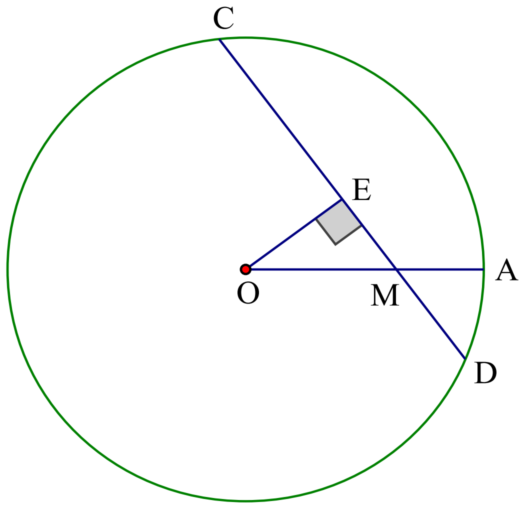
Đặt $OH = x(cm)$.

Ta có $OM = (x-4)(cm)$

Áp dụng định lý Pythagore ta được: $x = 10(cm)$

Bài 9. Cho đường tròn (O) bán kính $OA = 11cm$. Điểm M thộc bán kính AO và cách O khoảng 7cm. Qua M kẻ dây CD có độ dài 18cm. Tính độ dài các đoạn thẳng MC và MD

Lời giải



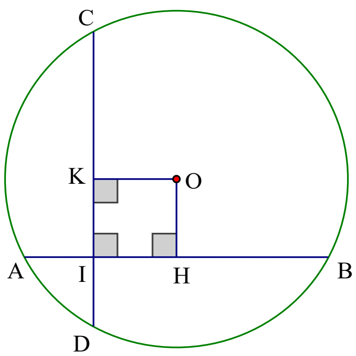
Kẻ $OE \perp CD, E \in CD$. Ta có $OC = 11cm, CE = 9cm \Rightarrow OE = 2\sqrt{10}cm$

$OM = 7cm \Rightarrow ME = 43cm \Rightarrow MC = 6cm, MD = 12cm$

Hoặc: $MD = 6cm, MC = 12cm$

Bài 10. Cho đường tròn $(O;R)$ có hai dây AB, CD bằng nhau và vuông góc với nhau tại I. Giả sử $IA = 2cm, IB = 4cm$. Tính khoảng cách từ tâm O đến mỗi dây

Lời giải



Gọi OH, OK lần lượt là khoảng cách từ O đến AB, CD

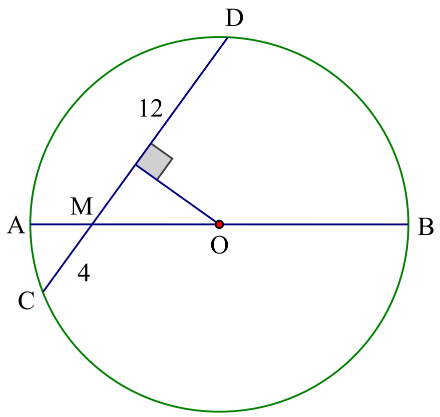
Ta có: $OH = OK = 1(cm)$

Bài 11. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Dây CD cắt AB tại M, biết $MC = 4cm, MD = 12cm$. $\widehat{BMD} = 30^0$. Hãy tính :

a) Khoảng cách từ O đến CD

b) Bán kính của (O)

Lời giải



a. Gọi OH là khoảng cách từ O đến $CD \Rightarrow OH \perp CD \Rightarrow CH = HD = 8 \Rightarrow MH = 4cm$

Xét $\Delta MHO(\widehat{H} = 90^0), \tan 30^0 = \dfrac{OH}{MH} \Rightarrow OH = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}(cm)$

b. Bán kính của đường tròn (O) chính là đoạn OD

Ta đi tính độ dài đoạn thẳng OD dựa vào định lý pytago.

Xét $\Delta OHD(\widehat{H} = 90^0) \Rightarrow OD^2 = OH^2 + HD^2(pytago) \Leftrightarrow OD^2 = 8^2 + \left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow OD = \dfrac{4\sqrt{39}}{3}(cm)$

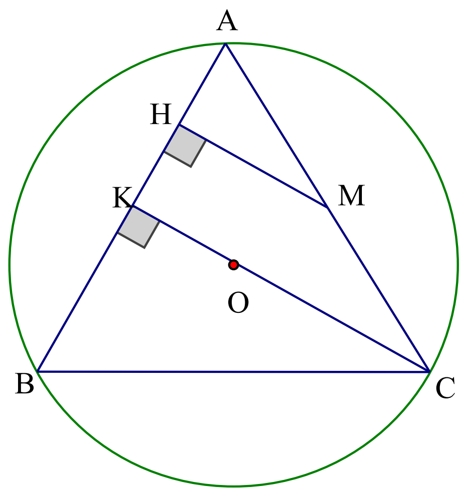
Bài 12. Cho đường tròn (O) có các dây $AB = 24cm, \mathrm{AC} = 20cm, \widehat{BAC} < 90^0$ và O nằm trong góc BAC.

Gọi M là trung điểm của AC. Khoảng cách từ điểm M đến AB bằng 8cm

a) Chứng minh tam giác ABC cân

b) Tính bán kính của (O)

Lời giải



a) Vẽ $MH \perp AB = H; CK \perp AB = K \Rightarrow MH$ là đường trung bình của

$\Delta CAK \Rightarrow AM = 10cm; AH = 6cm \Rightarrow AK = 12cm \Rightarrow AK = \dfrac{1}{2}AB$

Từ đó chứng minh được ΔABC cân tại C

b) Ta có $CK = 2MH = 16cm$

Đặt $OC = x \Rightarrow OK = 16 - x \Rightarrow CO = 12,5cm$

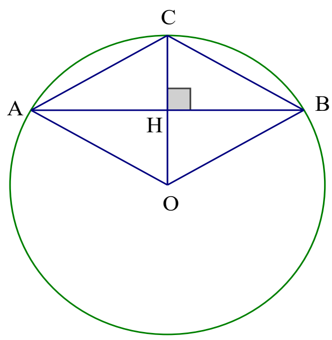
Bài 13. Cho đường tròn tâm $(O;R)$, A và B di động trên đường tròn (O) thỏa mãn $\widehat{AOB} = 120^0$. Vẽ $OH \perp AB = H$

a) Chứng minh H là trung điểm của AB

b) Tính OH, AB và S_{OAB} theo R

c) Tia OH cắt đường tròn $(O;R)$ tại C. Tứ giác $OABC$ là hình gì? Vì sao

Lời giải



a) Ta có AB là dây cung của đường tròn (O); $OH \perp AB \Rightarrow H$ là trung điểm của đoạn thẳng AB

b) ΔOAB cân tại $O(OA = OB = R)$ có: OH là đường trung tuyến nên cũng là đường phân giác

$\Rightarrow \widehat{AOH} = \widehat{HOB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = 60^0$

ΔHAO vuông tại H, có $\widehat{AOH} = 60^0$ nên là nửa tam giác đều

$\Rightarrow OH = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}; AH = \frac{\sqrt{3}}{2}OA = \frac{3}{2}R; AB = 2AH = \sqrt{3}R$

$S_{OAB} = \frac{1}{2}OH.AB = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}R.\sqrt{3}R = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2$ (đvdt)

c) $HC = OC - OH = R - \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}R$

$\lozenge OACB$ có $HA = HB; HO = HC = \frac{1}{2}R \Rightarrow \lozenge OACB$ là hình bình hành

Mà: $OA = OB(= R) \Rightarrow \lozenge OACB$ là hình thoi.

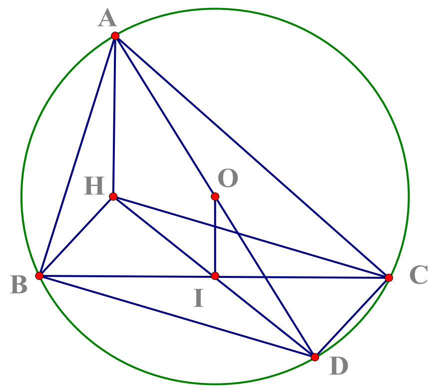
Bài 14. Cho tam giác ABC có trực tâm H và nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD

a) Chứng minh $BHCD$ là hình bình hành

b) Kẻ đường kính OI vuông góc BC tại I. Chứng minh I, H, D thẳng hàng

c) Chứng minh $AH = 2OI$

Lời giải



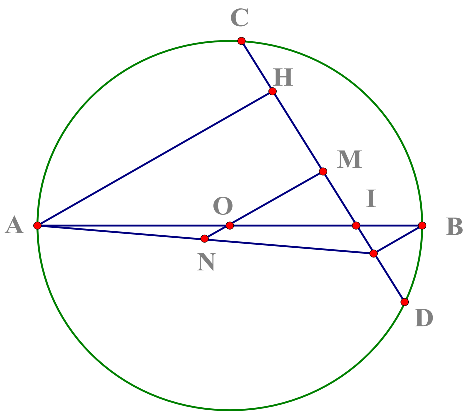
a. Ta có : $\begin{cases} BD//CH \\ BH//CD \end{cases} \Rightarrow BHCD$ là hình bình hành

b. I là trung điểm của $BC \Rightarrow I$ là trung điểm của HD

c. Ta có OI là đường trung bình $\Delta AHD \Rightarrow AH = 2OI$

Bài 15. Cho đường tròn (O) đường kính AB, dây CD cắt AB tại I. Gọi H, K theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ A và B đến CD. Chứng minh rằng: $CH = DK$

Lời giải



Ta kẻ OM vuông góc với CD tại $M \Rightarrow MC = MD$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây)

Gọi N là giao điểm của OM và AK

Xét $\Delta AKB \Rightarrow NA = NK$

Xét $\Delta AHK \Rightarrow MH = MK \Rightarrow MC - MH = MD - MH \Leftrightarrow CH = DK$

Bài 16. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại trực tâm H. Lấy I là trung điểm của BC

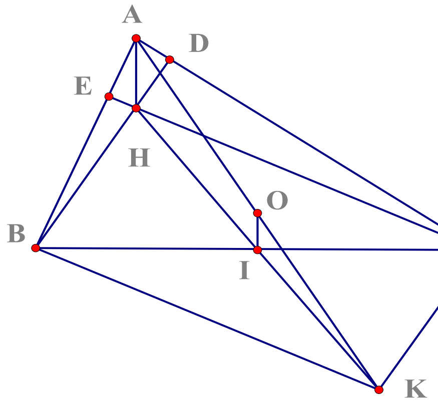
a) Gọi K là điểm đối xứng của H qua I. Chứng minh tứ giác $BHCK$ là hình bình hành

b) Xác định tâm O của đường tròn qua các điểm A, B, K, C

c) Chứng minh: $OI//CH$

d) Chứng minh rằng: $BE.BA + CD.CA = BC^2$

Lời giải



a. Xét $BHCK$ có: $\begin{cases} HI = IK(gt) \\ BI = IC(gt) \end{cases} \Rightarrow BHCK$ là hình bình hành

b. Ta có $\Delta AKB, \Delta ACK$ vuông tại B và C nên bốn điểm A, B, K, C nằm trên đường tròn đường kính AC tâm O.

c. Xét ΔAHB có OI là đường trung bình $\Rightarrow OI // AH$

d. Gọi M là giao điểm của AH và BC

Ta có

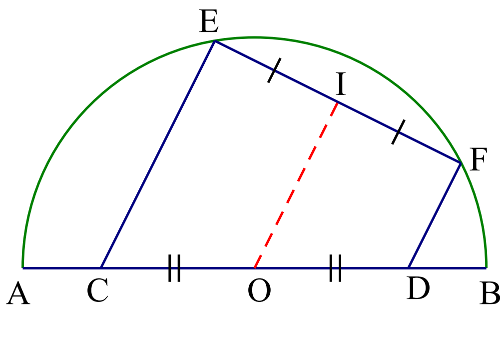
$\Delta BMA\# \Delta BEC(gg) \Rightarrow BE.BA = BM.BC$

$\Delta CMA\# \Delta CDB(gg) \Rightarrow CA.CD = CM.BC$

$\Rightarrow BE.BA + CD.CA = (BM + CM).BC = BC^2$ (đpcm)

Bài 17. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Trên đoạn thẳng OA lấy điểm C và trên đoạn thẳng OB lấy điểm D sao cho $OC = OD$. Từ C và D kẻ hai tia song song cắt nửa đường tròn ở E và F. Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh rằng: $S_{CEF} + S_{DEF} = EF.OI$

Lời giải



Vì I là trung điểm của EF nên $OI \perp EF$

Ta có: $CE // EF$ và O là trung điểm của CD nên $\lozenge CEFD$ là hình thang

Lại có OI là đường trung bình của hình thang $\Rightarrow OI // CE // DF$

Mà $OI \perp EF \Rightarrow CE \perp EF; DF \perp EF \Rightarrow OI = \frac{1}{2}\left(CE + DF\right)$

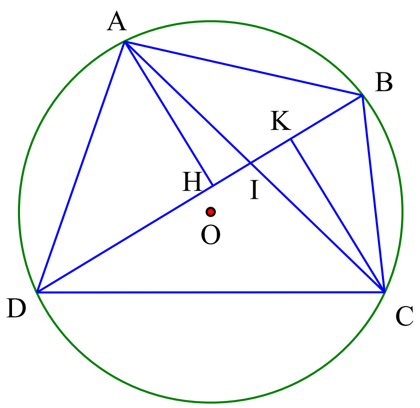
$S_{CEF} = \frac{1}{2}CE.EF$

$S_{DEF} = \frac{1}{2}DE.EF$.

$\Rightarrow S_{CEF} + S_{DEF} = \frac{1}{2}CE.EF + \frac{1}{2}DE.EF = \frac{1}{2}EF\left(CE + DF\right) = EF.OI$

Bài 18. Cho đường tròn $\left(O;R\right)$. Các điểm A,B,C,D thuộc $\left(O;R\right)$. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác $ABCD$

Lời giải



Vẽ $AH \perp BD\left(H \in BD\right), CK \perp BD\left(K \in BD\right)$

Gọi I là giao điểm của AC, BD

Ta có: $AH \perp HI \Rightarrow AH \le AI; CK \perp KI \Rightarrow CK \le CI \Rightarrow AH + CK \le AI + IC = AC$

Mà $AC, BD \le 2R$ (AC, BD là các dây cung của đường tròn $\left(O;R\right)$)

Ta có : $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}BD.AH + \frac{1}{2}BD.CK = \frac{1}{2}BC\left(AH + CK\right) \le \frac{1}{2}BD.AC$

Do vậy $S_{ABCD} \le \frac{1}{2}2R.2R = 2R^2$

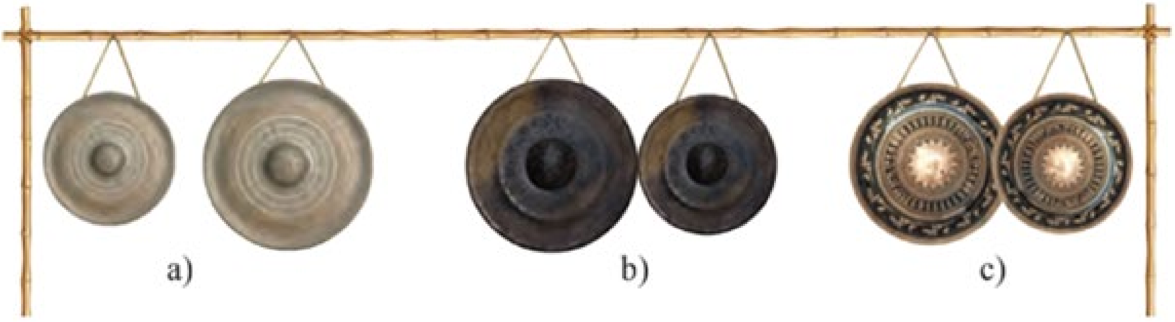
Dấu '='' xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} BD = 2R \\ AC = 2R \\ H \equiv I \equiv K \end{cases} \Leftrightarrow AC, BD$ là hai đường kính vuông góc nhau

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác $ABCD$ là $2R^2$.

DẠNG 3

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

Bài 1. Mô tả vị trí tương đối giữa mỗi cặp đường tròn trong hình chụp bộ cồng chiêng Tây Nguyên trong hình vẽ bên dưới.



Lời giải

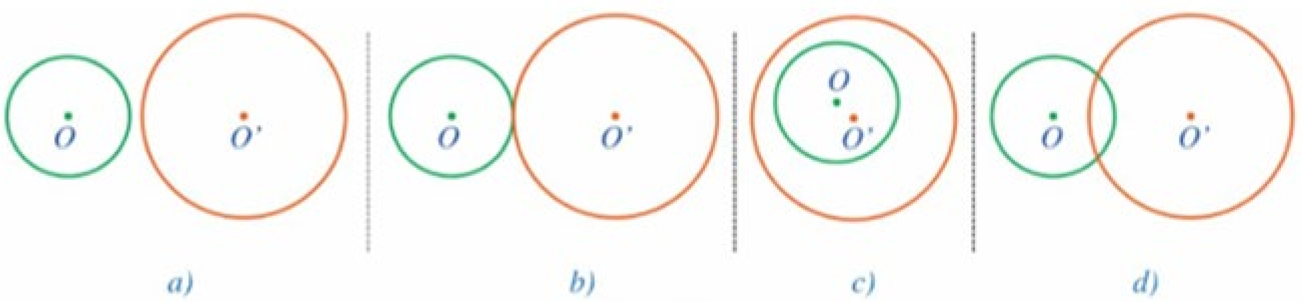
Hình a): Hai đường tròn ở ngoài nhau.

Hình b): Hai đường tròn tiếp xúc ngoài.

Hình c): Hai đường tròn cắt nhau.

d) Một cặp đường tròn không giao nhau: Đường tròn màu vàng và đường tròn màu tím (quả lắc).

Bài 2. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn (O) và (O’) trong mỗi hình a, b, c, d:



Lời giải

a) Hai đường tròn (O; R) và (O’; R’) không có điểm chung và OO’ > R + R’.

Do đó hai đường tròn (O) và (O’) ở ngoài nhau.

b) Hai đường tròn (O; R) và (O’; R’) có 1 điểm chung duy nhất và OO’ = R + R’.

Do đó hai đường tròn (O) và (O’) tiếp xúc ngoài.

c) Hai đường tròn (O; R) và (O’; R’) không có điểm chung và OO’ < R’ – R.

Do đó đường tròn (O’) đựng đường tròn (O).

d) Ta thấy hai đường tròn (O) và (O’) có 2 điểm chung nên hai đường tròn (O) và (O’) cắt nhau.

Bài 3. Xác định vị trí tương đối của (O; R) và (O’; R’) trong mỗi trường hợp sau:

a) OO’ = 18; R = 10; R’ = 6

b) OO’ = 2; R = 9; R’ = 3

c) OO’ = 13; R = 8; R’ = 5

d) OO’ = 17; R = 15; R’ = 4.

Lời giải

a) Ta có 18 > 10 + 6 nên OO’ > R + R’, suy ra hai đường tròn (O; R) và (O’; R’) ở ngoài nhau.

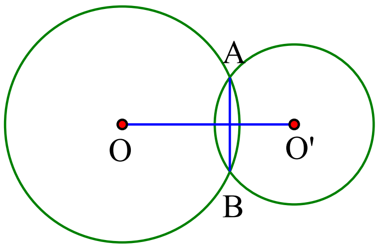
b) Ta có 2 < 9 – 3 nên OO' < R – R', suy ra đường tròn (O; R) đựng đường tròn (O'; R').

c) Ta có 13 = 8 + 5 nên OO' = R + R', suy ra hai đường tròn (O; R) và (O'; R') tiếp xúc ngoài.

d) Ta có 15 – 4 < 17 < 15 + 4 nên R – R' < OO' = R + R', suy ra hai đường tròn (O; R) và (O'; R') cắt nhau.

Bài 4. Cho đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ cắt nhau tại A,B. Chứng minh OO' là đường trung trực của AB.

Lời giải



Ta có:

$OA = OB = R$

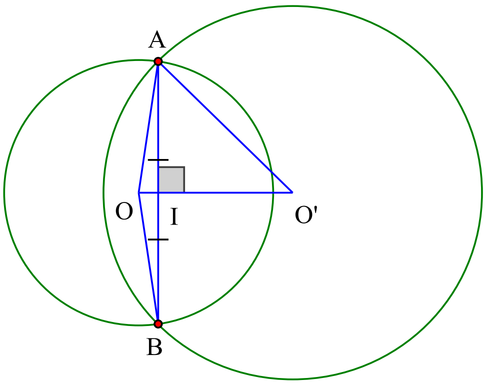
$O'A = O'B = R'$

Do đó O,O' thuộc đường trung trực của AB

Vậy OO' là đường trung trực của dây AB.

Bài 5. Cho hai đường tròn $(O;13cm)$ và $(O';15cm)$ cắt nhau tại A,B sao cho $AB = 24(cm)$. Tính độ dài $O'O$.

Lời giải



Gọi $I = OO' \cap AB \Rightarrow \begin{cases} \widehat{AIO} = \widehat{AIO'} = 90^0 \\ IA = IB = \dfrac{1}{2}AB = 12(cm) \end{cases}$

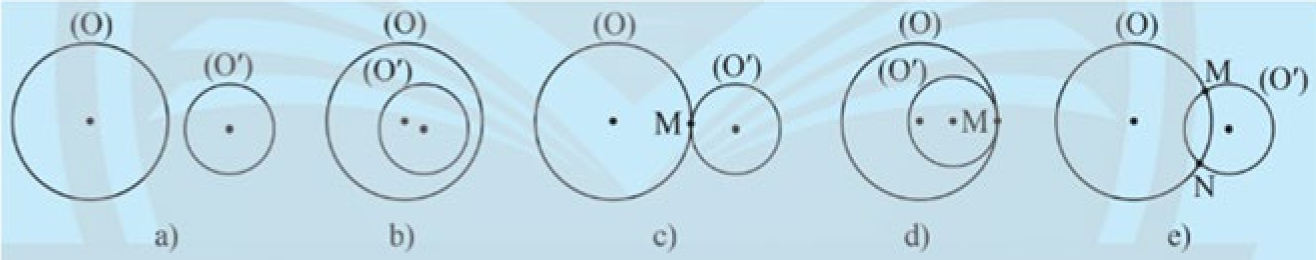
Từ ΔAIO vuông tại I, ta có: $OI = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5(cm)$

Từ $\Delta AIO'$ vuông tại I, ta có: $O'I = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{81} = 9(cm)$

Do đó $OO' = 5 + 9 = 14(cm)$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6. Tìm số điểm chung của hai đường tròn (O) và (O’) trong mỗi trường hợp sau:



Lời giải

Hình a): Hai đường tròn (O) và (O’) không có điểm chung.

Hình b): Hai đường tròn (O) và (O’) không có điểm chung.

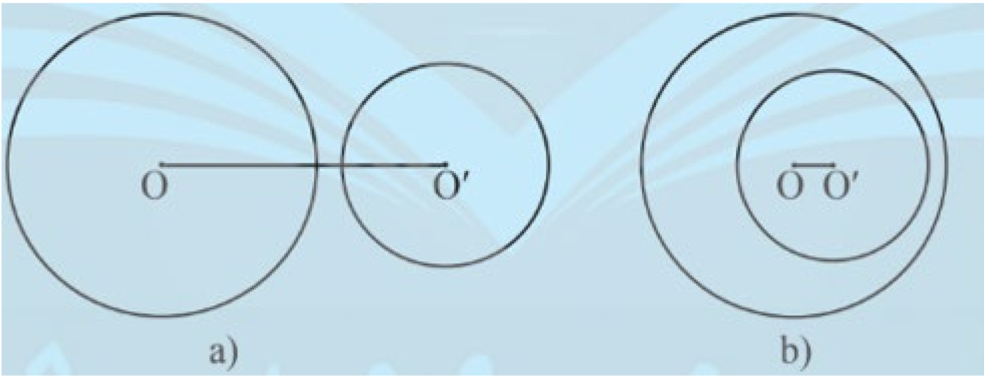
Hình c): Hai đường tròn (O) và (O’) có một điểm chung là điểm M.

Hình d): Hai đường tròn (O) và (O’) có một điểm chung là điểm M.

Hình e): Hai đường tròn (O) và (O’) có hai điểm chung là điểm M và điểm N.

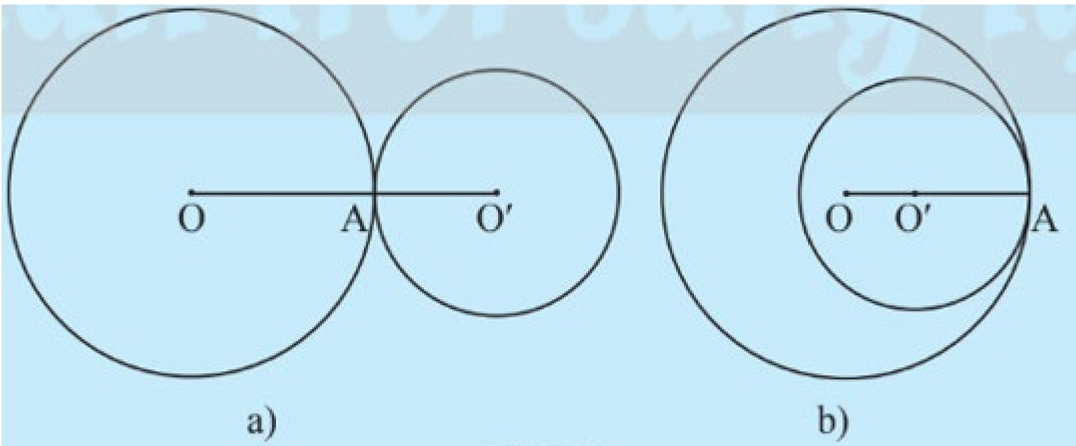
Bài 7. Cho hai đường tròn phân biệt (O; R) và (O’; R’) với R ≥ R’. Hãy so sánh OO’ với R + R’ và R – R’ trong mỗi trường hợp sau:

Trường hợp 1: (O; R) và (O’; R’) không có điểm chung (Hình 1).



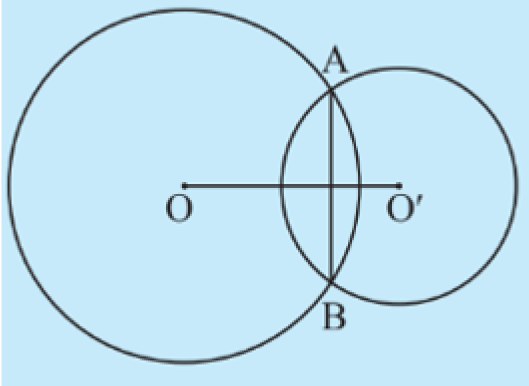
Hình 1

Trường hợp 2: (O; R) và (O’; R’) chỉ có một điểm chung (Hình 2).



Hình 2

Trường hợp 3: (O; R) và (O’; R’) có đúng hai điểm chung (Hình 3).



Hình 3

Lời giải

– *Trường hợp 1:* (O; R) và (O’; R’) không có điểm chung (Hình 1).

Hình 1a): OO’ > R + R’; OO’ > R – R’;

Hình 1b): OO’ < R + R’; OO’ < R – R’.

– *Trường hợp 2:* (O; R) và (O’; R’) chỉ có một điểm chung (Hình 2).

Hình 2a): OO’ = R + R’; OO’ > R – R’;

Hình 2b): OO’ < R + R’; OO’ = R – R’.

– *Trường hợp 3:* (O; R) và (O’; R’) có đúng hai điểm chung (Hình 3).

OO’ < R + R’; OO’ > R – R’.

Bài 8. Cho hai đường tròn (O; 11,5 cm) và (O’; 6,5 cm). Biết rằng OO’ = 4 cm. Xét vị trí tương đối của hai đường tròn đó.

Lời giải

Ta thấy bán kính của hai đường tròn (O) và (O’) lần lượt là R = 11,5 cm và r = 6,5 cm.

Do R – r = 11,5 – 6,5 = 5 (cm) và 4 < 5 nên OO’ < R – r.

Vậy đường tròn (O; 11,5 cm) đựng đường tròn (O’; 6,5 cm).

Bài 9. Xác định vị trí tương đối giữa hai đường tròn (I; R) và (J; R’) trong mỗi trường hợp sau:

a) IJ = 5; R = 3; R’ = 2

b) IJ = 4; R = 11; R’ = 7

c) IJ = 6; R = 9; R’ = 4

d) IJ = 10; R = 4; R’ = 1.

Lời giải

a) Ta có 5 = 3 + 2 nên IJ = R + R’, suy ra hai đường tròn (I; R) và (J; R’) tiếp xúc ngoài.

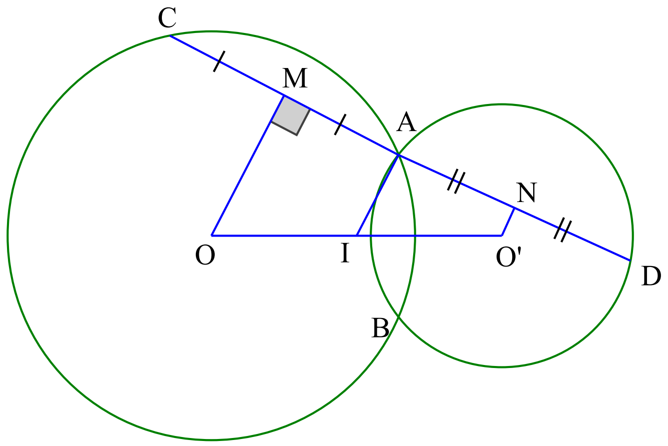
b) Ta có 4 = 11 – 7 nên IJ = R – R’, suy ra hai đường tròn (I; R) và (J; R’) tiếp xúc trong.

c) Ta có: 9 – 4 < 6 < 9 + 4 nên R – R’ < IJ < R + R’, suy ra hai đường tròn (I; R) và (J; R’) cắt nhau.

d) Ta có: 10 > 4 + 1 nên IJ > R + R’, suy ra hai đường tròn (I; R) và (J; R’) ở ngoài nhau.

Bài 10. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A,B. Gọi I là trung điểm của OO'. Qua A vẽ đường thẳng vuông góc với IA cắt (O) tại C và cắt (O') tại D. So sánh AC và AD.

Lời giải



Vẽ $OM \perp AC = M \Rightarrow MA = MC = \frac{1}{2}AC\,(1)$

$O'N \perp AD = N \Rightarrow NA = ND = \frac{1}{2}AD\ (2)$

Hình thang $OO'NM$ có: $IO = IO'$ và $IA//OM//O'N \Rightarrow MA = NA$

Từ $(1)(2) \Rightarrow AC = AD$

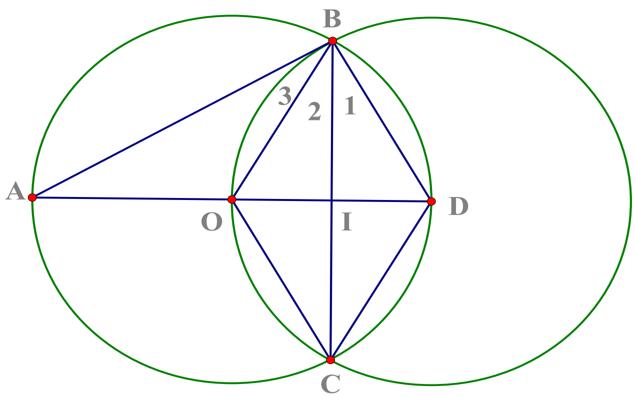
Bài 11. Cho đường tròn (O), đường kính $AD = R$. Vẽ cung tròn tâm D bán kính R cắt (O) ở B và C

a) Tứ giác $OBDC$ là gì ? vì sao ?

b) Tính số đo các góc $\widehat{CBD}; \widehat{CBO}; \widehat{OBA}$

c) Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều

Lời giải



a) Xét $\lozenge OBDC$, có: $OB = OC = DC = R \Rightarrow \lozenge OBDC$ là hình thoi

b) Xét ΔOBD, có: $OB = OD = BD = R \Rightarrow \Delta OBD$ là tam giác đều

$\Rightarrow \widehat{OBD} = 60^0 = \widehat{ODB} \Rightarrow$ BC là tia phân giác $\widehat{OBD}$

$\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{B_2} = \frac{1}{2}\widehat{OBD} = 30^0$

Ta có $B \in (O) \Rightarrow \widehat{ABD} = 90^0 \Rightarrow \widehat{B_3} = 30^0$

c) $OBDC$ là hình thoi $\Rightarrow OD \perp BC \equiv I; IB = IC$

Xét ΔABC, có AI là đường cao đồng thời là đường trung tuyến nên ΔABC cân tại A

Mà $\widehat{ABC} = \widehat{B_2} + \widehat{B_3} = 60^0 \Rightarrow \Delta ABC$ đều.

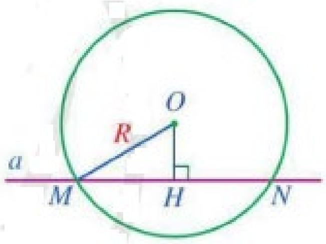
BÀI 2
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

1. Đường thẳng và đường tròn cắt nhau

Khi đường thẳng và đường tròn có hai điểm chung, ta nói đường thẳng và đường tròn cắt nhau.

Nếu đường thẳng và đường tròn cắt nhau thì mỗi điểm chung được gọi là một giao điểm.

Nhận xét: Đường thẳng a cắt đường tròn $(O;R)$ khi khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a nhỏ hơn R và ngược lại.

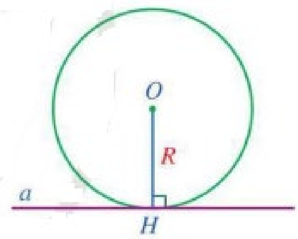


2. Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau

Khi đường thẳng và đường tròn có đúng một điểm chung, ta nói đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau tại điểm chung đó.

Nếu đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau thì đường thẳng được gọi là **tiếp tuyến** của đường tròn, điểm chung được gọi là **tiếp điểm**.

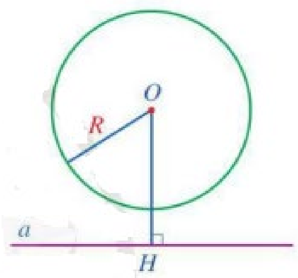
Nhận xét: Đường thẳng a tiếp xúc với đường tròn $(O;R)$ khi khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a bằng R và ngược lại.



3. Đường thẳng và đường tròn không giao nhau

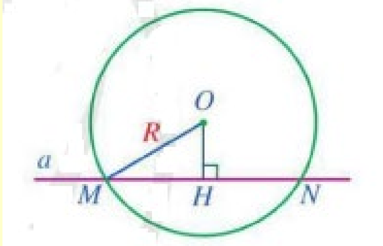
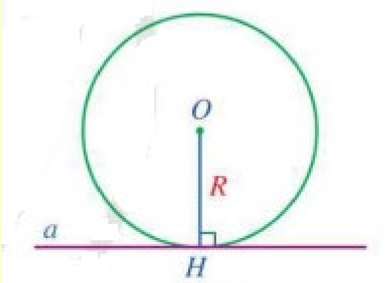
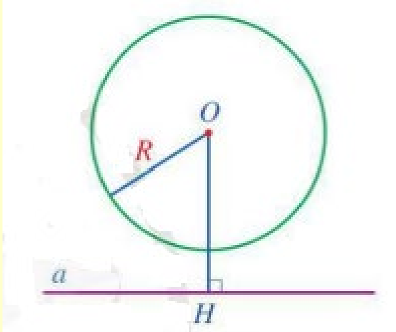
Khi đường thẳng và đường tròn không có điểm chung, ta nói đường thẳng và đường tròn không giao nhau.

Nhận xét: Đường thẳng a và đường tròn $(O;R)$ không giao nhau khi khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a lớn hơn R và ngược lại.



Bảng tóm vị trí tương đối đường thẳng và đường tròn

(d là khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a)

Hệ thức	Số điểm chung	Quan hệ	Hình vẽ
$d < R$	2	Đường thẳng a cắt đường tròn $(O;R)$ tại 2 điểm	
$d = R$	1	Đường thẳng a tiếp xúc đường tròn $(O;R)$	
$d > R$	0	Đường thẳng a không cắt đường tròn $(O;R)$	

Bài 1. Cho ΔABC vuông tại A có $AB = 3cm, AC = 4cm$. Vẽ đường tròn tâm A bán kính $2,8cm$. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng BC với đường tròn tâm A bán kính $2,8cm$.

Bài 2. Cho ΔABC vuông tại A có BD là đường phân giác. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng BC và đường tròn tâm D bán kính DA

Bài 3. Cho hình thang vuông $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^0, AD = 2cm, BC = 6m, CD = 8cm$. Chứng minh rằng AB tiếp xúc với đường tròn đường kính CD

Bài 4. Cho điểm M cách đường thẳng xy một đoạn bằng 6cm, vẽ đường tròn $(M;10cm)$

a. Chứng minh rằng đường tròn tâm M và đường thẳng xy cắt nhau

b. Gọi hai giao điểm là P và Q. Tính PQ

Bài 5. Cho hình vuông $ABCD$, trên đường chéo BD lấy điểm I sao cho $BI = BA$. Đường thẳng kẻ qua I vuông góc với BD cắt AD ở E.

a) So sánh: AE, EI, ID

b) Xác định vị trí tương đối của đường thẳng BD với đường tròn $(E;EA)$

Bài 6. Cho đoạn thẳng AB và trung điểm O của AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ tia Ax, By vuông góc với AB. Trên các tia Ax và By lấy theo thứ tự hai điểm C và D sao cho $\widehat{COD} = 90^0$, kẻ $OH \perp CD$

a) Chứng minh rằng H thuộc đường tròn tâm O đường kính AB

b) Xác định vị trí tương đối của CD với đường tròn (O)

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 7. Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn $(O;8cm)$ sao cho $OA = 12cm$. Kẻ tia Ax tạo với OA một góc 30^0. Gọi H là hình chiếu của O trên tia Ax. Xét vị trí tương đối của tia Ax và đường tròn (O).

Bài 8. Cho điểm A cách đường thẳng xy một khoảng 12 cm

a) Chứng minh $(A;13cm)$ cắt đường thẳng xy tại hai điểm phân biệt

b) Gọi hai giao điểm của $(A;13cm)$ với xy là B, C. Tính độ dài đoạn thẳng BC

Bài 9. Cho ΔABC vuông cân tại A. Vẽ tia phân giác BI

a) Chứng minh rằng đường tròn $(I;IA)$ tiếp xúc với đường thẳng AB, AC

b) Cho biết $AB = a$. Tính IA theo a.

Bài 10. Cho điểm (O) cách đường thẳng a là $6cm$. Vẽ đường tròn $(O,10cm)$

a) Chứng minh rằng (O) có hai giao điểm với đường thẳng d

b) Gọi hai giao điểm nói trên là B và C. Tính độ dài BC

Bài 11. Cho đường thẳng d và đường tròn $(O;R)$ không giao nhau. A là điểm trên (O). Xác định vị trí điểm A để khoảng cách từ A đến đường thẳng d lớn nhất

Bài 12. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$. Đường thẳng d qua A, gọi B và C là giao điểm của đường thẳng d và đường tròn (O). Xác định vị trí của đường thẳng d để tổng $AB+AC$ lớn nhất

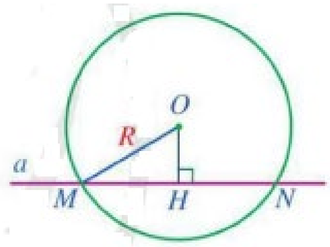
BÀI 2
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

1. Đường thẳng và đường tròn cắt nhau

Khi đường thẳng và đường tròn có hai điểm chung, ta nói đường thẳng và đường tròn cắt nhau.

Nếu đường thẳng và đường tròn cắt nhau thì mỗi điểm chung được gọi là một giao điểm.

Nhận xét: Đường thẳng a cắt đường tròn $(O;R)$ khi khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a nhỏ hơn R và ngược lại.

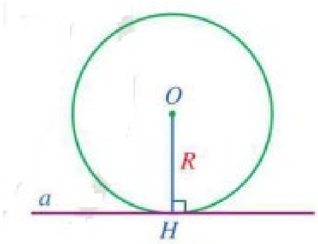


2. Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau

Khi đường thẳng và đường tròn có đúng một điểm chung, ta nói đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau tại điểm chung đó.

Nếu đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau thì đường thẳng được gọi là **tiếp tuyến** của đường tròn, điểm chung được gọi là **tiếp điểm**.

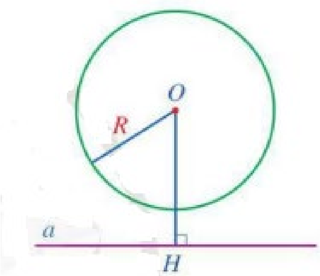
Nhận xét: Đường thẳng a tiếp xúc với đường tròn $(O;R)$ khi khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a bằng R và ngược lại.



3. Đường thẳng và đường tròn không giao nhau

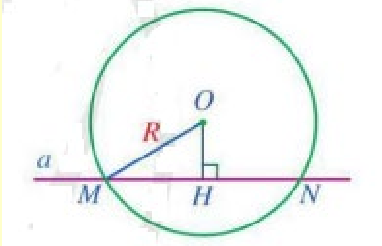
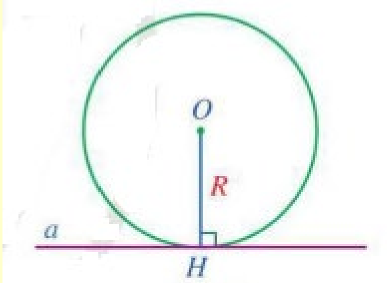
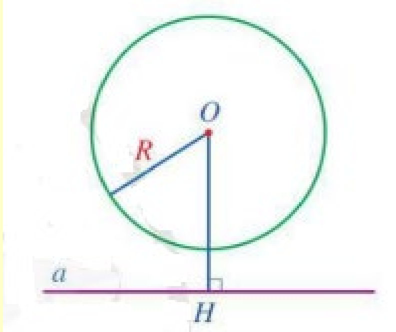
Khi đường thẳng và đường tròn không có điểm chung, ta nói đường thẳng và đường tròn không giao nhau.

Nhận xét: Đường thẳng a và đường tròn $(O;R)$ không giao nhau khi khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a lớn hơn R và ngược lại.



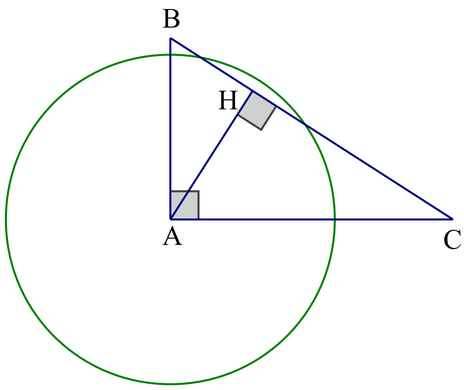
Bảng tóm vị trí tương đối đường thẳng và đường tròn

(d là khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a)

Hệ thức	Số điểm chung	Quan hệ	Hình vẽ
$d < R$	2	Đường thẳng a cắt đường tròn $(O;R)$ tại 2 điểm	
$d = R$	1	Đường thẳng a tiếp xúc đường tròn $(O;R)$	
$d > R$	0	Đường thẳng a không cắt đường tròn $(O;R)$	

Bài 1. Cho ΔABC vuông tại A có $AB = 3cm, AC = 4cm$. Vẽ đường tròn tâm A bán kính $2,8cm$. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng BC với đường tròn tâm A bán kính $2,8cm$.

Lời giải



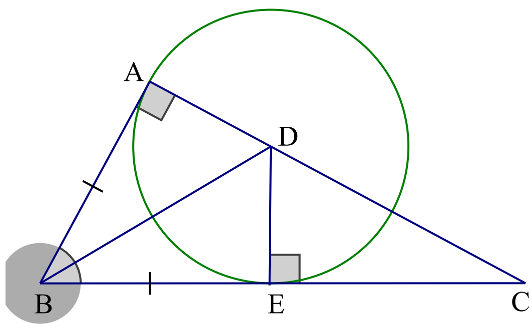
Vẽ AH là đường cao của tam giác vuông ABC

Ta có: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} \Rightarrow AH = 2,4cm < 2,8\left(d < r\right)$

Do đó đường thẳng BC và đường tròn $\left(A; 2,8cm\right)$ cắt nhau.

Bài 2. Cho ΔABC vuông tại A có BD là đường phân giác. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng BC và đường tròn tâm D bán kính DA

Lời giải



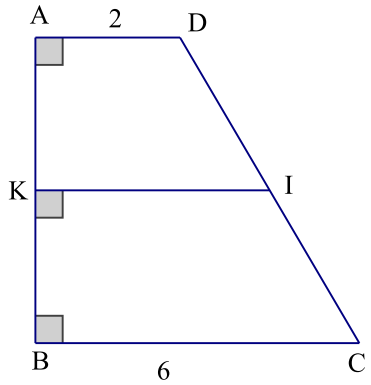
Vẽ $DE \perp BC\left(E \in BC\right)$

D thuộc tia phân giác $\widehat{ABC}; DA \perp AB, DE \perp BC \Rightarrow DE = DA$

Do đó đường thẳng BC và đường tròn tâm D bán kính DA tiếp xúc nhau.

Bài 3. Cho hình thang vuông $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^0, AD = 2cm, BC = 6m, CD = 8cm$. Chứng minh rằng AB tiếp xúc với đường tròn đường kính CD

Lời giải



Gọi I, K lần lượt là trung điểm của CD và AB

Ta có: IK là đường trung bình của hình thang $ABCD \Rightarrow IK = \dfrac{AD+BC}{2} = 4(cm)$

Lại có: $AD//IK, AD \perp AB \Rightarrow IK \perp AB; IK = \dfrac{CD}{2}(=4cm), IK \perp AB$

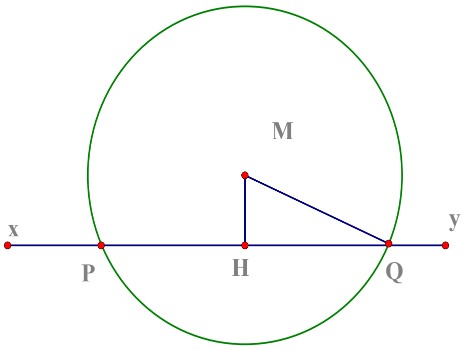
Do đó AB tiếp xúc với đường tròn tâm I đường kính CD.

Bài 4. Cho điểm M cách đường thẳng xy một đoạn bằng 6cm, vẽ đường tròn $(M;10cm)$

a) Chứng minh rằng đường tròn tâm M và đường thẳng xy cắt nhau

b) Gọi hai giao điểm là P và Q. Tính PQ

Lời giải



a) Kẻ $MH \perp xy = H \Rightarrow MH$ là khoảng cách từ M đến xy

$\Rightarrow \begin{cases} MH = 6cm \\ R = 10cm \end{cases} \Rightarrow MH < R \Rightarrow xy$ cắt $(O;10cm)$ tại P và Q

b) Xét tam giác PMQ cân tại M và $MH \perp PQ$ nên MH cũng là đường trung tuyến

$\Rightarrow HP = HQ = \dfrac{1}{2}PQ$

$\Rightarrow PQ = 2.HQ$

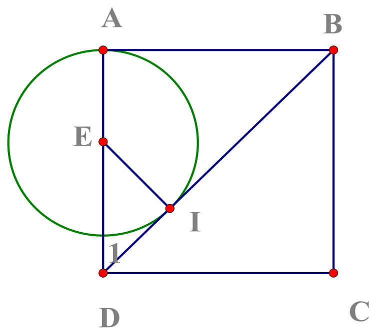
Xét $\Delta MHQ(\widehat{H} = 90^0) \Rightarrow HQ = \sqrt{MQ^2 - MH^2} = 8cm \Rightarrow PQ = 16(cm)$

Bài 5. Cho hình vuông $ABCD$, trên đường chéo BD lấy điểm I sao cho $BI = BA$. Đường thẳng kẻ qua I vuông góc với BD cắt AD ở E.

a) So sánh: AE, EI, ID

b) Xác định vị trí tương đối của đường thẳng BD với đường tròn $(E;EA)$

Lời giải



a) Ta có : $\Delta AEB = \Delta IEB(ch - cgv) \Rightarrow AE = EI(1)$

$\Delta EID(\hat{I} = 90^0), \widehat{D_1} = 45^0 \Rightarrow$ vuông cân $\Rightarrow IE = ID(2)$

Từ (1)(2) $\Rightarrow AE = EI = ID$

b) Ta lại có $EI = EA \Rightarrow I \in (E;EA) \Rightarrow R = EI$

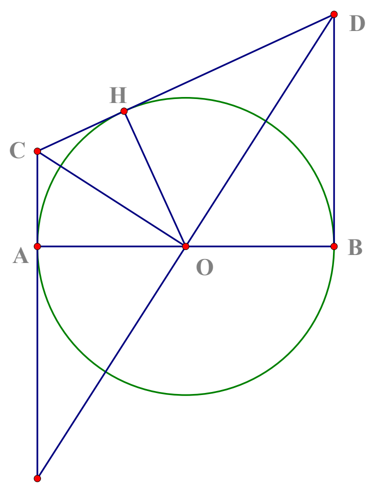
mặt khác: $EI \perp BD \Rightarrow d = EI \Rightarrow d = R \Rightarrow$ đường thẳng BD tiếp xúc với $(E;EA)$

Bài 6. Cho đoạn thẳng AB và trung điểm O của AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ tia Ax, By vuông góc với AB. Trên các tia Ax và By lấy theo thứ tự hai điểm C và D sao cho $\widehat{COD} = 90^0$, kẻ $OH \perp CD$

a) Chứng minh rằng H thuộc đường tròn tâm O đường kính AB

b) Xác định vị trí tương đối của CD với đường tròn (O)

Lời giải



a) Kéo dài DO cắt AC ở E, ta có :

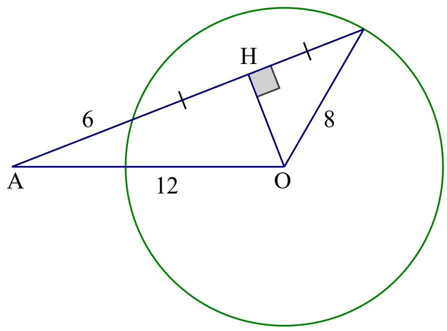
$\Delta AOE = \Delta BOD(gcg) \Rightarrow \widehat{E} = \widehat{D}; OD = OE \Rightarrow \Delta OHD = \Delta OAE(ch - gn) \Rightarrow OH = OA = OB \Rightarrow H \in (O;AB)$

b) Ta có H thuộc đường tròn (O), $CD \perp OH$ tại H $\Rightarrow$ khoảng cách từ O đến CD bằng bán kính của (O). Vậy CD tiếp xúc với (O) tại H.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 7. Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn $(O;8cm)$ sao cho $OA = 12cm$. Kẻ tia Ax tạo với OA một góc 30^0. Gọi H là hình chiếu của O trên tia Ax. Xét vị trí tương đối của tia Ax và đường tròn (O).

Lời giải



Từ ΔAOH vuông tại H, ta có: $OH = OA.sinA = 12.sin30^0 = 12.0,5 = 6(cm)$

$\Rightarrow OH < R$ (bán kính)

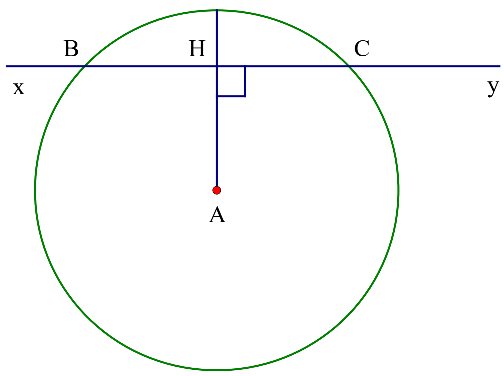
Vậy tia Ax và đường tròn (O) cắt nhau tại hai điểm.

Bài 8. Cho điểm A cách đường thẳng xy một khoảng 12 cm

a) Chứng minh $(A;13cm)$ cắt đường thẳng xy tại hai điểm phân biệt

b) Gọi hai giao điểm của $(A;13cm)$ với xy là B,C. Tính độ dài đoạn thẳng BC

Lời giải



a) Kẻ $AH \perp xy \Rightarrow AH = 12cm < R \Rightarrow (A)$ cắt xy tại hai điểm B và C

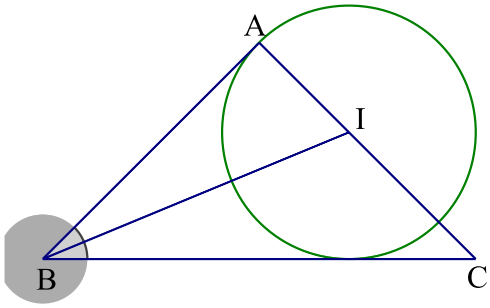
b) Tính được : $BC = 2.HC = 10cm.$

Bài 9. Cho ΔABC vuông cân tại A. Vẽ tia phân giác BI

a) Chứng minh rằng đường tròn $(I;IA)$ tiếp xúc với đường thẳng AB, AC

b) Cho biết $AB = a$. Tính IA theo a.

Lời giải



a) Ta có $IA \perp BA \Leftrightarrow IA = d\left(I, BA\right) \Leftrightarrow \left(I, IA\right)$ tiếp xúc với BA tại A

mặt khác BI là tia phân giác của $\widehat{ABC}$

Do đó đường tròn $\left(I, IA\right)$ tiếp xúc với BC

b) Áp dụng tính chất tia phân giác trong ΔABC, ta có:

$$\frac{IA}{IB} = \frac{IC}{BC} = \frac{AC - IA}{AB.\sqrt{2}}$$

$$\frac{IA}{a} = \frac{a - IA}{a\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2}.IA = a - IA$$

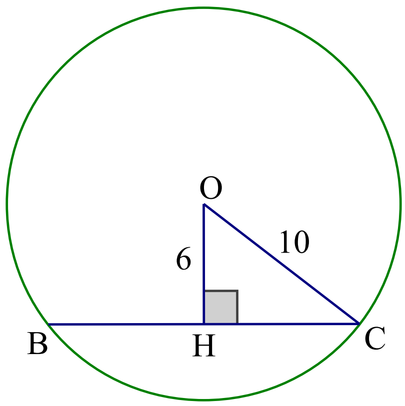
$$IA = \frac{a}{\sqrt{2}+1} = a\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Bài 10. Cho điểm $\left(O\right)$ cách đường thẳng a là $6cm$. Vẽ đường tròn $\left(O, 10cm\right)$

a) Chứng minh rằng $\left(O\right)$ có hai giao điểm với đường thẳng d

b) Gọi hai giao điểm nói trên là B và C. Tính độ dài BC

Lời giải



a) Kẻ $OH \perp a \Rightarrow OH = 6cm$ là khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a

Do $6 < 10 \Rightarrow \left(O\right)$ có hai giao điểm với đường thẳng a

b) Vì $OH \perp a \Rightarrow OH \perp BC \Rightarrow BH = HC = \frac{BC}{2}$

Áp dụng hệ thức pythagore vào ΔOHC vuông tại H có cạnh huyền $OC = 10cm$, ta được:

$OC^2 = CH^2 + HO^2$

$10^2 = CH^2 + 6^2$

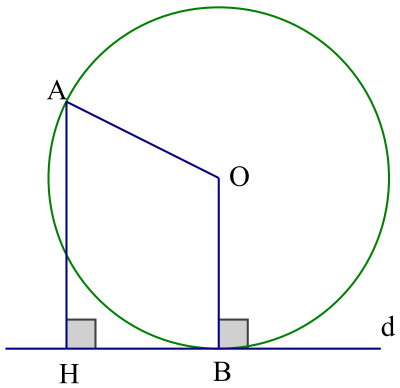
$CH^2 = 8^2$

$CH = 8(cm)(CH > 0)$

Vậy $BC = 16(cm)$.

Bài 11. Cho đường thẳng d và đường tròn $(O;R)$ không giao nhau. A là điểm trên (O). Xác định vị trí điểm A để khoảng cách từ A đến đường thẳng d lớn nhất

Lời giải



Gọi H, B lần lượt là hình chiếu của A, O trên đường thẳng d, ta có: B cố định

$AH \perp HB \Rightarrow AH \le AB$

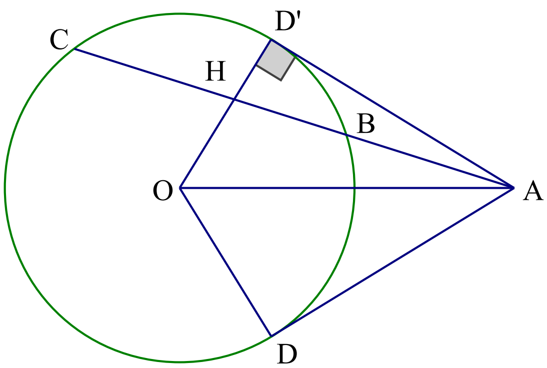
Xét ba điểm OA, B ta có: $AB \le OA + OB \Rightarrow AH \le R + OB, R + OB$ không đổi

Dấu ‘‘=’’ xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} H \equiv B \\ O\, nam\, giua\, A\, va\, B \end{cases}$

Vậy khi A là giao điểm của tia đối tia OB và đường tròn (O) (B là hình chiếu của (O) trên d) thì khoảng cách từ A đến d lớn nhất.

Bài 12. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$. Đường thẳng d qua A, gọi B và C là giao điểm của đường thẳng d và đường tròn (O). Xác định vị trí của đường thẳng d để tổng $AB + AC$ lớn nhất

Lời giải



Vẽ đường thẳng qua A tiếp xúc với đường tròn tại D và D', ta có D và D' cố định

- Nếu d trùng với AD hoặc AD'

Ta có các điểm B, C, D trùng nhau nên: $AB + AC = 2AD = 2AD'$

- Nếu d không trùng với AD hoặc AD'

Vẽ $OH \perp d\left(H \in d\right)$. Ta có H là trung điểm của BC (định lý đường kính vuông góc với dây cung) và có

$OH < R \Rightarrow AB + AC = AH + HB + AH - HC = 2AH$

Xét ΔOAH vuông tại $H \Rightarrow OH^2 + AH^2 = OA^2$

Xét ΔOAD vuông tại $D \Rightarrow OD^2 + AD^2 = OA^2$

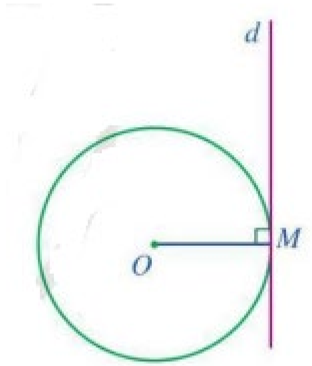
Do đó : $OH^2 + AH^2 = OD^2 + AD^2$, mà $OH < OD = R \Rightarrow AH > AD \Rightarrow AB + AC > 2AD$

Vậy khi đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn thì $AB + AC$ nhỏ nhất.

BÀI 3
TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

1. Nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

Định lí: Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là tiếp tuyến của đường tròn.

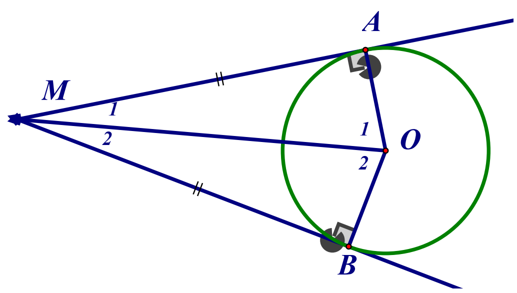


Nhận xét: Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì đường thẳng đó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

2. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

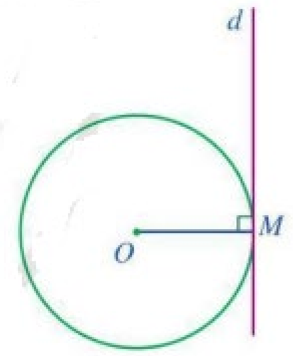
Định lí: Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

- Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.
- Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
- Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.



CHỦ ĐỀ 1
TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

DẠNG 1
CHỨNG MINH MỘT ĐƯỜNG THẲNG LÀ TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN



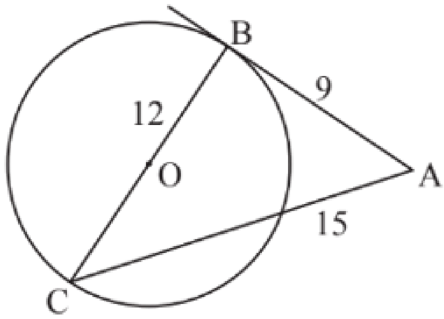
Để chứng minh đường thẳng d là tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$ tại tiếp điểm M, ta có thể làm theo một trong các cách sau:

Cách 1: Chứng minh M nằm trên (O) và OM vuông góc với d tại M.

Cách 2: Kẻ OH vuông góc với d tại H và chứng minh $OH = OM = R$.

Cách 3: Vẽ tiếp tuyến d' của (O) và chứng minh d trùng với d'.

Bài 1. Trong hình vẽ bên dưới, AB = 9, BC = 12, AC = 15 và BC là đường kính của đường tròn (O). Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn (O).



Bài 2. Cho đường tròn tâm (O) có bán kính $OA = R$, dây BC vuông góc với OA tại trung điểm M của OA.

a) Tứ giác $OACB$ là hình gì ? Vì sao ?

b) Kẻ tiếp tuyến với đường tròn tại B, cắt đường thẳng OA tại E. Tính độ dài BE theo R.

Bài 3. Cho $(O;R)$ đường kính AB. Vẽ dây AC sao cho $\widehat{CAB} = 30^0$, trên tia đối của tia BA lấy điểm M sao cho $BM = R$. Chứng minh rằng :

a) MC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) $MC^2 = 3R^2$.

Bài 4. Từ điểm A ở ngoài đường tròn $(O;R)$ vẽ tiếp tuyến AB (B là tiếp điểm), C là điểm trên đường tròn (O) sao cho $AC = AB$.

a) Chứng minh rằng AC là tiếp điểm của đường tròn (O).

b) D là điểm trên AC. Đường thẳng qua C vuông góc với OD tại M cắt đường tròn (O) tại E ($E \neq C$). Chứng minh rằng DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài 5. Cho tam giác ABC có hai đường cao BD, CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh bốn điểm A, D, H, E cùng nằm trên 1 đường tròn.

b) Gọi (O) là đường tròn đi qua bốn điểm A, D, H, E và M là trung điểm của BC. Chứng minh ME là tiếp tuyến của (O).

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6. Cho tam giác ΔABC có $AB = 6cm, AC = 8cm, BC = 10cm.$ Vẽ đường tròn $(B;BA)$. Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (B).

Bài 7. Cho đường tròn (O) và một dây AB. Gọi M là trung điểm của AB, vẽ bán kính OI đi qua M. Từ I vẽ đường thẳng $xy // AB$. Chứng minh rằng xy là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài 8. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB và tiếp tuyến xAy. Trên xy lấy một điểm M, kẻ dây cung BN song song với OM. Chứng minh MN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài 9. Cho ΔABC cân tại A có các đường cao AH và BK cắt nhau tại I. Chứng minh

a) Đường tròn đường kính AI đi qua K.

b) HK là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AI.

Bài 10. Cho ΔABC, hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, D, H, E cùng nằm trên một đường tròn đường kính AH.

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng MD là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH.

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB = 8cm, AC = 15cm$. Vẽ đường cao AH. Gọi D là điểm đối xứng với B qua H. Vẽ đường tròn đường kính CD cắt AC ở E.

a) Chứng minh rằng HE là tiếp tuyến của đường tròn.

b) Tính HE.

Bài 12. Cho đường tròn (O) có dây AB khác đường kính. Qua O kẻ đường vuông góc với AB, cắt tiếp tuyến tại A của (O) ở C.

a) Chứng minh CB là tiếp tuyến của đường tròn .

b) Cho bán kính của (O) bằng $15cm$ và dây $AB = 24cm$. Tính độ dài đoạn thẳng OC.

Bài 13. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Đường tròn tâm I đường kính BH cắt AB tại E, đường tròn tâm J đường kính HC cắt AC tại F. Chứng minh rằng:

a) AH là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (J) tại H.

b) EF là tiếp tuyến của (I) tại E, tiếp tuyến của (J) tại F.

Bài 14. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn tâm (O). Vẽ hình bình hành $ABCD$, tiếp tuyến tại C của đường tròn cắt đường thẳng AD tại N. Chứng minh rằng :

a) Đường thẳng AD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) AC, BD, ON đồng quy.

Bài 15. Cho tam giác ABC cân tại A. Vẽ đường tròn tâm D đường kính BC cắt AC và AB lần lượt ở E và F. Gọi H là giao điểm của BE và CF. Chứng minh rằng :

a) A, E, H, F cùng thuộc 1 đường tròn.

b) DE là tiếp tuyến của đường tròn ở câu a.

Bài 16. Cho ΔABC vuông tại A, AH là đường cao, $AB = 8cm, BC = 16cm$. Gọi D là điểm đối xứng với B qua H. Vẽ đường tròn đường kính CD cắt AC ở E.

a) Chứng minh rằng HE là tiếp tuyến của đường tròn.

b) Tính độ dài đoạn thẳng HE.

DẠNG 2
TÍNH ĐỘ DÀI ĐOẠN THẲNG, GÓC LIÊN QUAN TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Bài 1. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 10cm$ và Bx là tiếp tuyến của (O). Gọi C là một điểm trên (O) sao cho $\widehat{CAB} = 30^0$ và E là giao điểm của các tia AC và Bx.

a) Tính độ dài các đoạn thẳng AC, EC và BC.

b) Tính độ dài đoạn thẳng BE.

Bài 2. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây $AB = \frac{8}{5}R$. Vẽ một tiếp tuyến song song với AB, cắt các tia OA, OB lần lượt tại M và N. Tính diện tích tam giác OMN.

Bài 3. Cho đường tròn $(O;2cm)$ và một điểm A chạy trên đường tròn đó. Từ A vẽ tiếp tuyến xy. Trên xy lấy một điêm M sao cho $AM = 2\sqrt{3}(cm)$. Hỏi điểm M di động trên đường nào khi A chạy trên (O).

Bài 4. Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn $(O;R)$, vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Đường thẳng vuông góc với OB tại O cắt tia AC tại N. Đường thẳng vuông góc với OC tại O cắt tia AB tại M. Xác định hình dạng của tứ giác $AMON$.

Bài 5. Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn $(O;R)$, vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Đường thẳng vuông góc với OB tại O cắt tia AC tại N. Đường thẳng vuông góc với OC tại O cắt tia AB tại M. Điểm A phải cách O một khoảng là bao nhiêu để cho MN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài 6. Cho đường tròn (O) đường kính AB, vẽ $CD \perp OA$ tại trung điểm I của OA. Các tiếp tuyến với đường tròn tại C và D cắt nhau ở M.

a) Chứng minh rằng A, B, M thẳng hàng.

b) Tứ giác $OCAD$ là hình gì ?

c) Tính $\widehat{CMD}$.

d) Chứng minh đường thẳng MC là tiếp tuyến của đường tròn $(B;BI)$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 7. Cho đường tròn $(O;R)$, bán kính OA, dây CD là trung trực của OA. Kẻ tiếp tuyến với đường tròn (O) tại C, tiếp tuyến này cắt đường thẳng OA tại I.

a) Chứng minh ΔOAC là tam giác đều.

b) Chứng minh tứ giác $OCAD$ là hình thoi.

c) Tính CI theo R.

Bài 8. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và M là điểm nằm trên (O). Tiếp tuyến tại M cắt tiếp tuyến tại A và B của (O) lần lượt ở C và D. Đường thẳng AM cắt OC tại E, đường thẳng BM cắt OD tại F.

a) Chứng minh $\widehat{COD} = 90^0$.

b) Tứ giác $MEOF$ là hình gì?

c) Chứng minh OB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.

Bài 9. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Lấy M thuộc (O) sao cho $MA < MB$. Vẽ dây MN vuông góc với AB tại H. Đường thẳng AN cắt BM tại C. Đường thẳng qua C vuông góc với AB tại K và cắt BN tại D.

a) Chứng minh A, M, C, K cùng thuộc 1 đường tròn.

b) Chứng minh BK là tia phân giác của $\widehat{MBN}$.

c) Chứng minh ΔKMC cân và KM là tiếp tuyến của (O).

d) Tìm vị trí của M trên (O) để tứ giác $MNKC$ trở thành hình thoi.

Bài 10. Cho nửa đường tròn tâm $(O;R)$ đường kính AB. Một đường thẳng xy tiếp xúc với đường tròn tại C. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của A và B trên xy. Chứng minh rằng:

a) C là trung điểm của DE.

b) Tổng $AD + BE$ không đổi khi C di động trên nửa đường tròn.

c) Tích $4.AD.BE = DE^2$.

Bài 11. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây $AB = 1,6R$. Vẽ một tiếp tuyến song song với AB, nó cắt các tia OA và OB theo thứ tự tại M và N. Tính diện tích ΔMON.

Bài 12. Cho đoạn thẳng AB và trung điểm O của AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ tia Ax, By vuông góc với AB. Trên các tia Ax và By lấy theo thứ tự hai điểm C và D sao cho $\widehat{COD} = 90^0$, kẻ $OH \perp CD$.

a) Chứng minh rằng H thuộc đường tròn tâm O đường kính AB.

b) Xác định vị trí tương đối của CD với đường tròn (O).

Bài 13. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB, M là 1 điểm thuộc nửa đường tròn, qua M vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn. Gọi D và C theo thứ tự là các hình chiếu của A và B trên tiếp tuyến ấy.

a) Chứng minh rằng M là trung điểm của CD.

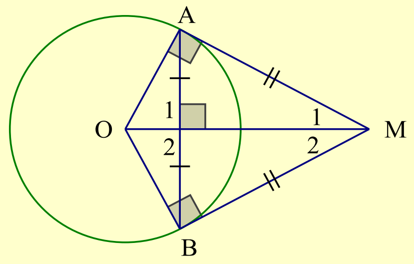
b) Chứng minh: $AB = BC + AD$.

c) Giả sử: $\widehat{AOM} > \widehat{BOM}$, gọi E là giao điểm của AD với nửa đường tròn. Xác định dạng của tứ giác $BDCE$.

d) Xác định vị trí của điểm M trên nửa đường tròn sao cho tứ giác $ABCD$ có diện tích lớn nhất. Tính diện tích đó theo bán kính của nửa đường tròn đã cho.

CHỦ ĐỀ 2
TÍNH CHẤT HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU

Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

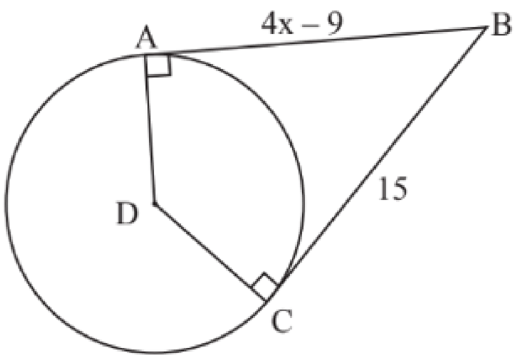
Giả thiết	Tiếp tuyến tại A và B của (O) cắt nhau tại M (A và B là tiếp điểm)	
Kết luận	- $MA = MB$ - $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ - $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ - MO là trung trực của AB	

Chú ý: MO là trung trực của AB thì phải chứng minh chứ không được dùng là giả thiết bài toán nhé. Ta chứng minh như sau:

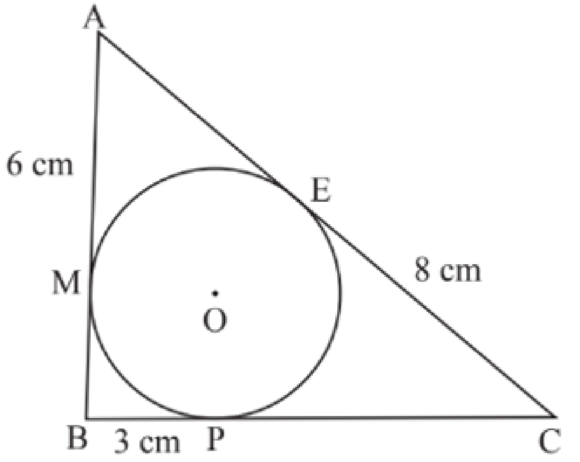
ΔAMB cân tại (do $MA = MB$) và MO là đường phân giác $\widehat{AMB}$ (do $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$) nên là MO là trung trực của AB.

DẠNG 1
TÍNH ĐỘ DÀI, DIỆN TÍCH, GÓC LIÊN QUAN TÍNH CHẤT HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU

Bài 1. Tìm giá trị của x trong hình vẽ bên dưới.

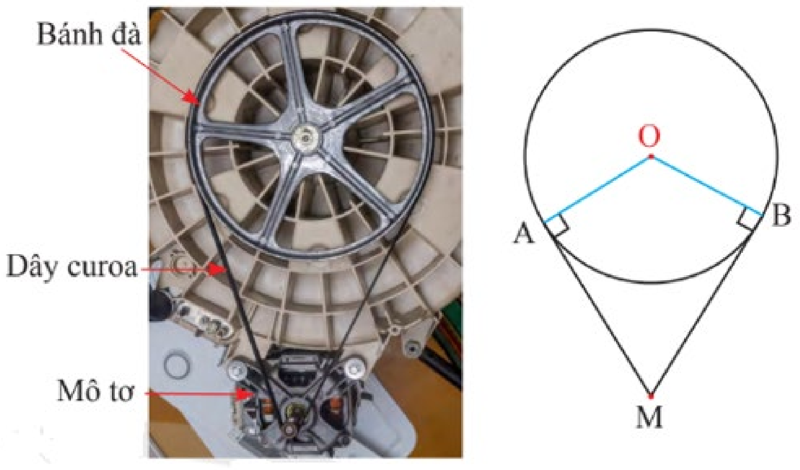


Bài 2. Cho tam giác ABC có đường tròn (O) nằm trong và tiếp xúc với ba cạnh của tam giác. Biết AM = 6 cm, BP = 3 cm, CE = 8 cm (Hình vẽ). Tính chu vi tam giác ABC.



Bài 3. Bánh đà của một động cơ được thiết kế có dạng là một đường tròn tâm O, bán kính 15 cm được kéo bởi một dây curoa. Trục của mô tơ truyền lực được biểu diễn bởi điểm M (Hình vẽ). Cho biết khoảng cách OM là 35 cm.

a) Tính độ dài của hai đoạn dây curoa MA và MB (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



a) b)

b) Tính số đo $\widehat{AMB}$ tạo bởi hai tiếp tuyến AM, BM và số đo $\widehat{AOB}$ (kết quả làm tròn đến phút).

Bài 4. Cho đường tròn (O). Từ một điểm M ở ngoài (O), vẽ hai tiếp tuyến ME, MF (E, F là các tiếp điểm) sao cho $\widehat{EMO} = 30^0$. Biết chu vi tam giác MEF là $30cm$.

a) Tính độ dài dây EF.

b) Tính diện tích ΔMEF.

DẠNG 2
CHỨNG MINH HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU, HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG, VUÔNG GÓC

Bài 1. Hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau ở A.

a) Chứng minh AO là trung trực của đoạn thẳng BC.

b) Vẽ đường kính CD của (O). Chứng minh $BD//AO$.

Bài 2. Từ 1 điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Đường thẳng vuông góc với OB tại O cắt AC tại N. Đường thẳng vuông góc với OC tại O cắt AB tại M.

a) Chứng minh rằng tứ giác $AMON$ là hình thoi.

b) Điểm A cách O một khoảng là bao nhiêu để MN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài 3. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Vẽ các tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn cùng phía đối với AB. Từ điểm M trên nửa đường tròn (M khác A, B) vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt Ax và By lần lượt tại C và D.

a) Chứng minh rằng: $\Delta COD \# \Delta AMB$.

b) Chứng minh $MC.MD$ không đổi khi M di động trên nửa đường tròn.

c) Cho biết $OC = BA = 2R$. Tính AC và BD theo R.

Bài 4. Từ điểm P nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ vẽ hai tiếp tuyến PA, PB với A và B là các tiếp điểm. Gọi H là chân đường vuông góc vẽ từ A đến đường kính BC. Chứng minh rằng PC cắt AH tại trung điểm I của AH.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ (A, AH), kẻ các tiếp tuyến BD và CE với đường tròn (A) (D, E là các tiếp điểm khác H).

a) Chứng minh rằng: D, A, E thẳng hàng.

b) Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn với đường kính BC.

Bài 6. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là các tiếp điểm). Kẻ $BE \perp AC; CF \perp AB\left(E \in AC, F \in AB\right), BE \cap CF = H$.

a) Chứng minh tứ giác $BOCH$ là hình thoi.

b) Chứng minh ba điểm A, O, H thẳng hàng.

c) Xác định vị trí điểm A để H nằm trên (O).

Bài 7. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là các tiếp điểm). Qua điểm M thuộc cung nhỏ BC vẽ tiếp tuyến với đường tròn (O), cắt các tiếp tuyến AB, AC lần lượt tại D và E.

a) Chứng minh chu vi $\Delta ADE = 2AB$.

b) Chứng minh rằng: $\widehat{BOC} = 2\widehat{DOE}$.

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ đường tròn $(A;AH)$. Từ B, C kẻ các tiếp tuyến BD, CE với (A) trong đó D, E là các tiếp điểm.

a) Chứng minh ba điểm A, D, E thẳng hàng.

b) Chứng minh: $BD.CE = \dfrac{DE^2}{4}$.

c) Gọi M là trung điểm của CH. Đường tròn tâm M đường kính CH cắt (A) tại N với N khác H. Chứng minh: $CN // AM$.

Bài 9. Cho đường tròn $(O;2cm)$ các tiếp tuyến MA, MB kẻ từ M đến đường tròn vuông góc với nhau tại M (A, B là các tiếp điểm).

a) Tứ giác $MBOA$ là hình gì? Vì sao?

b) Gọi C là điểm bất kỳ thuộc cung nhỏ AB. Qua C kẻ tiếp tuyến với đường tròn cắt MA, MB tại D và E. Tính chu vi tam giác MDE.

c) Tính $\widehat{DOE}$.

Bài 10. Cho đường tròn (O) và 1 điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với (O) trong đó B, C là các tiếp điểm.

a) Chứng minh đường thẳng OA là trung trực của BC.

b) Gọi H là giao điểm của AO và BC. Biết $OB = 2cm, OH = 1cm$, tính chu vi và diện tích tam giác ABC và diện tích tứ giác $ABOC$.

Bài 11. Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O). Kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn đó (M, N là các tiếp điểm).

a) Chứng minh rằng: $OA \perp MN$.

b) Vẽ đường kính NOC. Chứng minh rằng $MC // AO$.

c) Tính độ dài các cạnh của tam giác AMN biết $OM = 3cm, OA = 5cm$.

Bài 12. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax, lấy P trên Ax ($AP > R$). Từ P kẻ tiếp tuyến PM với (O).

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, P, M, O cùng thuộc 1 đường tròn.

b) Chứng minh: $BM // OP$.

c) Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt tia BM tại N. Chứng minh tứ giác $OBNP$ là hình bình hành.

d) Giả sử AN cắt OP tại K; PM cắt ON tại I; PN cắt OM tại J. Chứng minh I,J,K thẳng hàng.

Bài 13. Cho đường tròn $(O;R)$. Từ A trên (O), kẻ tiếp tuyến d với (O). Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kỳ (M khác A), kẻ cát tuyến MNP, gọi K là trung điểm của NP, kẻ tiếp tuyến MP, kẻ $AC \perp MB, BD \perp AM$. Gọi H là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của OM và AB.

a) Chứng minh bốn điểm A,M,B,O cùng thuộc 1 đường tròn.

b) Chứng minh năm điểm O,K,A,M,B cùng thuộc 1 đường tròn.

c) Chứng minh: $OI.OM = R^2$ và $OI.IM = IA^2$.

d) Chứng minh $OAHB$ là hình thoi.

e) Chứng minh ba điểm O,H,M thẳng hàng.

Bài 14. Cho $(O;R)$ và M là một điểm di động trên đường thẳng d cố định nằm ngoài (O). Từ M kẻ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A,B là các tiếp điểm). Gọi H là hình chiếu vuông góc của (O) trên d, dây cung AB cắt OH, OM lần lượt tại I,K. Chứng minh

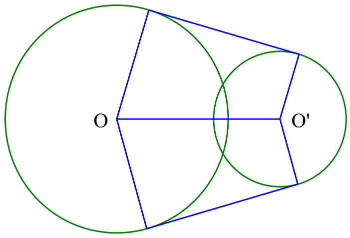
a) $OI.OH = OK.OM = R^2$.

b) AB luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên d.

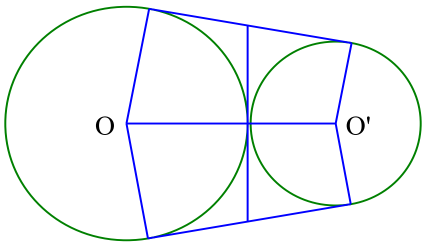
CHỦ ĐỀ 3
BÀI TOÁN LIÊN QUAN VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI VÀ TIẾP TUYẾN CHUNG CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

Tiếp tuyến chung của hai đường tròn là đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn đó. Ta có các trường hợp tiếp tuyến chung của hai đường tròn như sau:

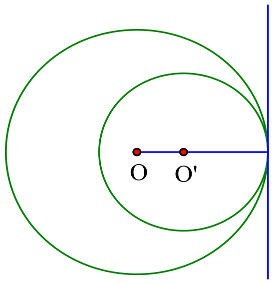
1) Hai đường tròn cắt nhau có hai tiếp tuyến chung ngoài.



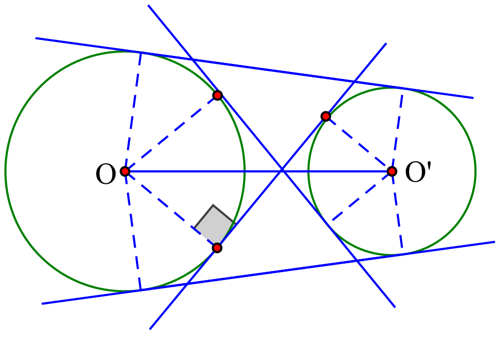
2) Hai đường tròn tiếp xúc ngoài có hai tiếp tuyến chung ngoài và một tiếp tuyến chung.



3) Hai đường tròn tiếp xúc trong chỉ có một tiếp tuyến chung.



4) Hai đường tròn ngoài nhau có hai tiếp tuyến chung ngoài và hai tiếp tuyến chung trong.



Chú ý:

- Hai đường tròn chứa nhau không có tiếp tuyến chung.
- Hai đường tròn đồng tâm không có tiếp tuyến chung.

DẠNG 1
CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN HAI ĐƯỜNG TRÒN TIẾP XÚC NHAU

Bài 1. Cho hai đường tròn $(O;8cm)$ và $(O';5cm)$ tiếp xúc ngoài tại M. Gọi AB là tiếp tuyến chung của hai đường tròn $(A\in(O);B\in(O'))$. Tính độ dài AB (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai)

Bài 2. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ các đường kính AOB, $AO'C$. Gọi DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn. Gọi M là giao điểm của BD và CE.

a) Tính $\widehat{DAE}$.

b) Tứ giác $ADME$ là hình gì ? Vì sao ?

c) Chứng minh rằng MA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

dv Chứng minh: $MD.MB=ME.MC$.

ev Gọi H là trung điểm của BC, chứng minh rằng $MH\perp DE$.

Bài 3. Cho hai đường tròn $(O;5cm)$ và $(O';3cm)$ tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài $BC(B\in(O);C\in(O'))$. Vẽ đường tròn $(I;r)$ tiếp xúc với BC tại M và tiếp xúc ngoài với hai đường tròn (O) và (O') tại N và P. Tính độ dài r (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Bài 4. Cho ba điểm J,I,J' cùng nằm trên 1 đường thẳng theo thứ tự đó. Cho biết $IJ=10cm$, $IJ'=4CM$. Vẽ đường tròn (O) đường kính IJ và đường tròn (O') đường kính IJ'.

a) Chứng minh (O) và (O') tiếp xúc ngoài ở I.

b) Gọi A là 1 điểm trên đường tròn (O), tia AI cắt (O') ở A'. Chứng minh rằng $\Delta AIJ\#\,\Delta A'IJ'$.

c) Qua điểm I kẻ 1 cát tuyến cắt (O) ở B (B và A thuộc hai nửa mặt phẳng bờ IJ), cắt đường tròn (O') ở B'. Chứng minh: $\Delta IAB\#\,\Delta IA'B'$.

d) Chứng minh rằng: $\Delta OAB\#\,\Delta O;A'B'$.

e) Tứ giác $ABA'B'$ là hình gì vì sao ?

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB. Vẽ các đường tròn $(O;OA)$ và $(B;BA)$. Kẻ một đoạn thẳng qua A cắt hai đường tròn (O) và (B) théo thứ tự tại C và D.

a) Chứng minh Hai đường tròn (O) và (B) tiếp xúc tại A.

b) Chứng minh $AB=CD$.

c) Chứng minh $OC//BD$.

Bài 6. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ hai bán kính OM và $O'N$ song song với nhau thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ OO'. Tam giác MAN là tam giác gì?

Bài 7. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R)$ tiếp xúc ngoài tại M. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài AB và CD với $A,C\in(O)$ và $B,D\in(O')$.

a) Chứng minh $\Delta IBD\#\Delta IAC$.

b) Chứng minh $\Delta BO'D\#\Delta AOC$.

c) Chứng minh $BD//AC$.

Bài 8. Cho hai đường tròn tâm O_1 và tâm O_2 tiếp xúc ngoài tại A. Tiếp tuyến chung ngoài có tiếp điểm với hai đường tròn lần lượt ở M và N. Tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn tại A cắt MN tại I.

a) Chứng minh tam giác MAN và OIO' là các tam giác vuông.

b) Xác định vị trí tường đối của đường thẳng MN với đường tròn đường kính OO'.

c) Tính $S_{OIO'}$ biết bán kính của hai đường tròn tâm O và O' lần lượt bằng $48cm$ và $27cm$.

Bài 9. Cho đường tròn (O) đường kính AB và C là điểm nằm giữa A và O. Vẽ đường tròn tâm (I) có đường kính CB.

a) Xét vị trí tương đối của (I) và (O).

b) Kẻ dây DE của (O) vuông góc với AC tại trung điểm H của AC. Tứ giác $ADCE$ là hình gì?

c) Gọi K là giao điểm của đoạn thẳng DB và (I). Chứng minh ba điểm E,C,K thẳng hàng.

d) Chứng minh HK là tiếp tuyến của (I).

Bài 10. Cho đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC với B thuộc (O), C thuộc (O'). Tiếp tuyến chung trong tại A cắt tiếp tuyến chung ngoài BC ở I.

a) Vẽ đường kính BOD và $CO'E$. Chứng minh các bộ ba điểm B,A,E và C,A,D thẳng hàng.

b) Chứng minh $\Delta BAC,\Delta DAE$ có diện tích bằng nhau.

c) Gọi K là trung điểm của DE. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp $\Delta OKO'$ tiếp xúc với BC .

d) Cho $OA=4,5cm;O'A=2cm$. Tính AI,BC,CA.

Bài 11. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài BC với $B\in(O),C\in(O')$. Đường thẳng vuông góc với OO' kẻ từ A cắt BC ở M.

a) Tính MA theo R và r.

b) Tính diện tích tứ giác $BCO'O$ theo R và r.

c) Tính diện tích ΔBAC theo R và r.

d) Gọi I là trung điểm của OO'. Chứng minh rằng BC là tiếp tuyến của đường tròn $(I;IM)$.

Bài 12. Cho 3 điểm A,B,C theo thứ tự đó trên một đường thẳng và $AB=4BC$. Trên cùng một nửa măt phẳng bờ AC vẽ nửa đường tròn tâm O đường kính AB và nửa đường tròn tâm O' có đường kính BC. Tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn có tiếp điểm với đường tròn (O) ở F với nửa đường tròn

(O') ở G, cắt các tiếp tuyến vẽ từ A và C của hai nửa đường tròn đó ở D và E. Tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn ở B cắt DE ở I.

a) Chứng minh các tam giác OIO', OID, $O'IE$ là các tam giác vuông.

b) Đặt $O'C = a$ (a là độ dài cho trước). Tính BI, EG và AD theo a.

c) Tính diện tích tứ giác $ADEC$ theo a.

Bài 13. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài tiếp xúc (O) và (O') lần lượt ở B và C. Tiếp tuyến chung trong cắt BC ở I. Gọi E, F thứ tự là giao điểm của IO với AB của IO' với AC.

a) Chứng minh bốn điểm A, E, I, F cùng thuộc một đường tròn, xác định tâm K của đường tròn này.

b) Chứng minh: $IE.IO + IF.I'O = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2\right)$.

c) Gọi P là trung điểm của OA. Chứng minh PE tiếp xúc với (K).

d) Cho OO' cố định và có độ dài $2a$. Tìm điều kiện của R và R' để diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Bài 14. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB, C là một điểm bất kỳ nằm giữa A và B. Vẽ đường tròn tâm I, đường kính CA; đường tròn tâm (K), đường kính CB.

a) Hai đường tròn (I) và (K) có vị trí như thế nào đối với nhau.

b) Đường vuông góc với AB tại C cắt đường tròn (O) ở D và E. DA cắt đường tròn (I) ở M, DB cắt đường tròn (K) ở N.

c) Xác định vị trí của C trên đường kính AB sao cho MN có độ dài lớn nhất.

d) Xác định vị trí của điểm C trên đường kính AB sao cho tứ giác $DMCN$ có diện tích lớn nhất.

DẠNG 2
CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN HAI ĐƯỜNG TRÒN CẮT NHAU

Bài 1. Cho hai đường tròn $(O;12cm)$ và $(O';5cm)$, $OO'=13cm$.

a) Chứng tỏ rằng hai đưuòng tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

b) Gọi A,B là giao điểm của hai đường tròn (O) và (O'). Chứng minh rằng OA là tiếp tuyến của đường tròn (O'), OA là tiếp tuyến của đường tròn (O). Tính độ dài AB.

Bài 2. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng đi qua A (không đi qua hai tâm) cắt (O) tại C và cắt (O') tại D. Vẽ các đường kính AOE và $AO'F$.

a) Chứng minh ba điểm E,B,F thẳng hàng.

b) Chứng minh $EC//FD$.

c) Chứng minh $OO'=\frac{1}{2}EF$.

Bài 3. Cho hai đường tròn (O) và (O') giao nhau tại M và N. Gọi I là trung điểm của OO'. Đường thẳng kẻ qua M vuông góc MI cắt đường tròn (O) và (O') lần lượt ở A và B. Hai đường thẳng vuông góc với AB tại A và B cắt đường tròn (O) ở P, (O') ở Q.

a) Chứng minh rằng M là trung điểm của AB.

b) MI cắt PQ ở E, chứng minh: $EP=EQ$.

c) Chứng minh: $IH=IK$.

Bài 4. Cho góc vuông xOy. Lấy các điểm I và K lần lượt trên các tia Ox,Oy. Đường tròn $(I;OK)$ cắt tia Ox tại M (I nằm giữa O và M), đường tròn $(K;OI)$ cắt tia Oy tại N (K nằm giữa O và N).

a) Chứng minh (I) và (K) luôn cắt nhau.

b) Tiếp tuyến tại M của (I), tiếp tuyến tại N của (K) cắt nhau tại C. Chứng minh tứ giác $OMCN$ là hình vuông.

c) Gọi A,B là các giao điểm của (I) và (K) trong đó B ở miền trong góc xOy. Chứng minh ba điểm A,B,C thẳng hàng.

d) Giả sử I và K theo thứ tự di động trên các tia Ox và Oy sao cho $OI+OK=a$ không đổi. Chứng minh đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R)$ cắt nhau tại A và B sao cho tâm đường tròn này nằm trên đường tròn kia. Tính theo R diện tích tứ giác $OAO'B$.

Bài 6. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A và B (O và O' thuộc hai nửa mặt phẳng bờ AB). Kẻ các đường kính BOC và $BO'D$.

a) Chứng minh rằng ba điểm C, A, D thẳng hàng.

b) Biết $OO' = 5cm, OB = 4cm, O'B = 3cm$. Tính diện tích tam giác BCD.

Bài 7. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Gọi M là trung điểm của OO'. Đường thẳng qua A cắt các đường tròn (O) và (O') lần lượt ở C và D.

a) Khi $CD \perp AB$. Chứng minh: $AC = AD$.

b) Khi CD đi qua A và không vuông góc với MA. Vẽ đường kính AE của (O), AE cắt (O') ở H. Vẽ đường kính AF của (O'), AF cắt (O) ở G.

- Chứng minh AB, EG, FH đồng quy.
- Tìm vị trí của CD để đoạn CD có độ dài lớn nhất.

DẠNG 3

CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN HAI ĐƯỜNG TRÒN KHÔNG CẮT NHAU

Bài 1. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ ở ngoài nhau. Gọi MN là tiếp tuyến chung ngoài, EF là tiếp tuyến chung trong (M và E thuộc (O), N và F thuộc $(O;)$). Tính bán kính của đường tròn (O) và (O') trong các trường hợp sau:

a) $OO'=10cm, MN=8cm, EF=6cm$.

b) $OO'=13cm, MN=12cm, EF=5cm$.

Bài 2. Cho hai đường tròn (O) và (O') nằm ngoài nhau. Kẻ các tiếp tuyến chung ngoài AB và CD ($A,C\in(O); B,D\in(O')$). Tiếp tuyến chung trong MN cắt AB,CD theo thứ tự tại E,F, $\left(M\in(O), N\in(O')\right)$. Chứng minh:

a) $AB=EF$.

b) $EM=FN$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Cho hai đường tròn $(O;6cm)$ và $(O';2cm)$ nằm ngoài nhau. Gọi AB là tiếp tuyến chung ngoài, CD là tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn ($A,C\in(O); B,D\in(O')$). Biết $AB=2CD$, tính độ dài đoạn nối tâm OO'.

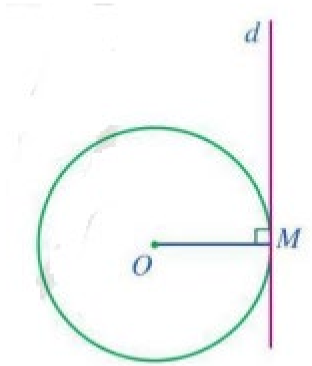
Bài 4. Cho hai đường tròn đồng tâm O, có bán kính lần lượt là R và r. Dây MN của đường tròn lớn cắt đường tròn nhỏ tại A và B. Gọi BC là đường kính của đường tròn nhỏ. Tính giá trị của biểu thức $\left(AC^2+AM^2+AN^2\right)$ theo R và r.

BÀI 3

TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

1. Nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

Định lí: Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là tiếp tuyến của đường tròn.

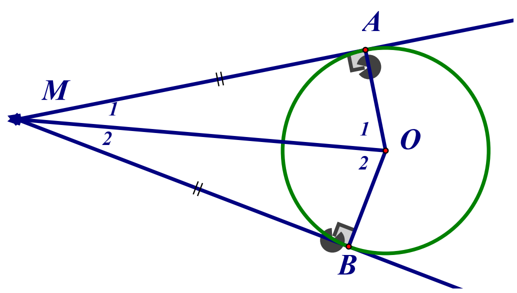


Nhận xét: Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì đường thẳng đó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

2. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

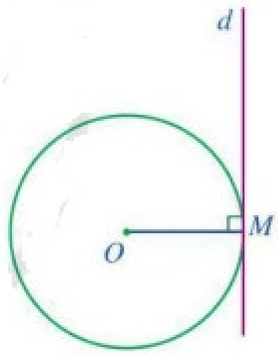
Định lí: Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

- Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.
- Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
- Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.



CHỦ ĐỀ 1
TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

DẠNG 1
CHỨNG MINH MỘT ĐƯỜNG THẲNG LÀ TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN



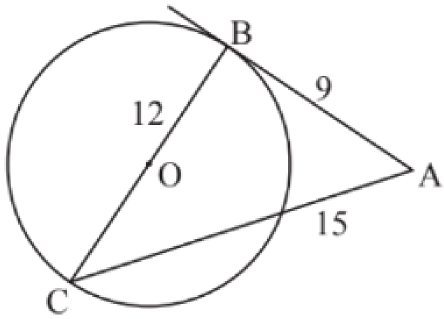
Để chứng minh đường thẳng d là tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$ tại tiếp điểm M, ta có thể làm theo một trong các cách sau:

Cách 1: Chứng minh M nằm trên (O) và OM vuông góc với d tại M.

Cách 2: Kẻ OH vuông góc với d tại H và chứng minh $OH = OM = R$.

Cách 3: Vẽ tiếp tuyến d' của (O) và chứng minh d trùng với d'.

Bài 1. Trong hình vẽ bên dưới, AB = 9, BC = 12, AC = 15 và BC là đường kính của đường tròn (O). Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn (O).



Lời giải

Xét ΔABC có:

$AB^2 + BC^2 = 9^2 + 12^2 = 225$;

$AC^2 = 15^2 = 225$.

Do đó $AB^2 + BC^2 = AC^2$,

Theo định lí Pythagore đảo, ta có ΔABC vuông tại B.

Suy ra $AB \perp BC$ hay $AB \perp OB$.

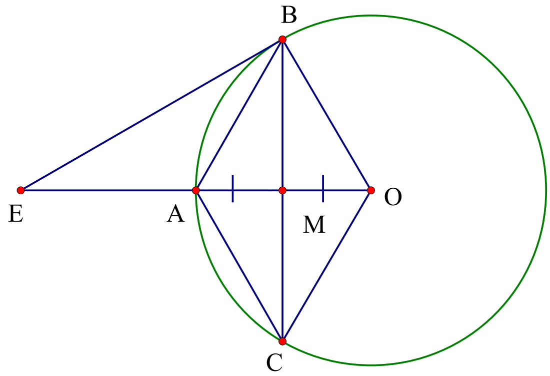
Xét đường tròn (O) có AB $\perp$ OB tại B thuộc đường tròn (O) nên AB là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài 2. Cho đường tròn tâm (O) có bán kính $OA = R$, dây BC vuông góc với OA tại trung điểm M của OA.

a) Tứ giác $OACB$ là hình gì ? Vì sao ?

b) Kẻ tiếp tuyến với đường tròn tại B, cắt đường thẳng OA tại E. Tính độ dài BE theo R.

Lời giải



a) OA vuông góc với BC tại $M \Rightarrow M$ là trung điểm của $BC \Rightarrow \lozenge OCAB$ là hình thoi

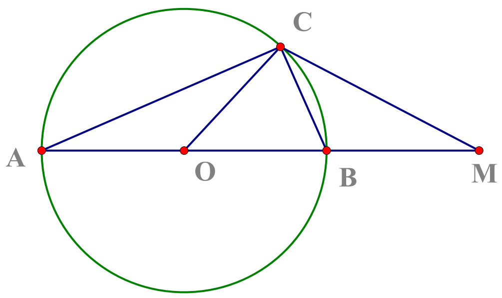
b) Tính được: $BE = R\sqrt{3}$

Bài 3. Cho $(O;R)$ đường kính AB. Vẽ dây AC sao cho $\widehat{CAB} = 30^0$, trên tia đối của tia BA lấy điểm M sao cho $BM = R$. Chứng minh rằng :

a) MC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) $MC^2 = 3R^2$.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{ACB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{ABC} = 60^0 \Rightarrow \Delta BOC$ đều $\Rightarrow BC = OB = BM = R$

Vậy ΔOCM vuông tại C (đường trung tuyến ứng với cạnh huyền) $\Rightarrow OM \perp OC \Rightarrow MC$ là tiếp tuyến của đường tròn (O)

b) ΔBMC cân tại $B \Rightarrow \widehat{BCM} = \widehat{M} = 30^0$

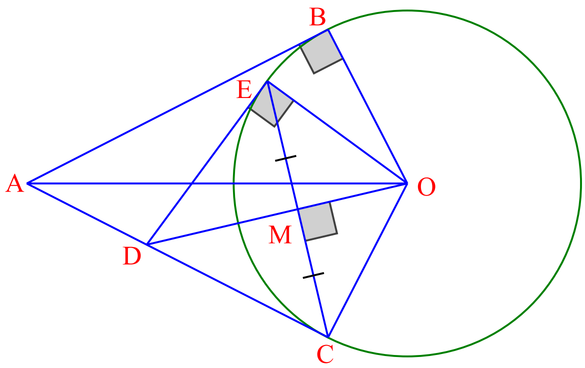
$\Delta BCM \# \Delta CAM (gg) \Rightarrow \dfrac{MC}{MA} = \dfrac{MB}{MC} \Rightarrow MC^2 = MA.MB = 3R^2$

Bài 4. Từ điểm A ở ngoài đường tròn $(O;R)$ vẽ tiếp tuyến AB (B là tiếp điểm), C là điểm trên đường tròn (O) sao cho $AC = AB$.

a) Chứng minh rằng AC là tiếp điểm của đường tròn (O).

b) D là điểm trên AC. Đường thẳng qua C vuông góc với OD tại M cắt đường tròn (O) tại E ($E \neq C$). Chứng minh rằng DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải



a) Xét ΔOAC và ΔOAB, có: $OC = OB(=R); OA : chung; AC = AB(gt) \Rightarrow \Delta OAC = \Delta OAB(ccc)$

$\Rightarrow \widehat{OCA} = \widehat{OBA} = 90^0 \Rightarrow AC$ là tiếp tuyến của đường tròn (O)

b) $OD \perp EC(gt)$ và ΔCOE cân tại $O \Rightarrow M$ là trung điểm của EC

OD là đường trung trực của đoạn thẳng $EC \Rightarrow DE = DC \Rightarrow \widehat{OED} = \widehat{OCD} = 90^0$ (tính chất đối xứng trục)

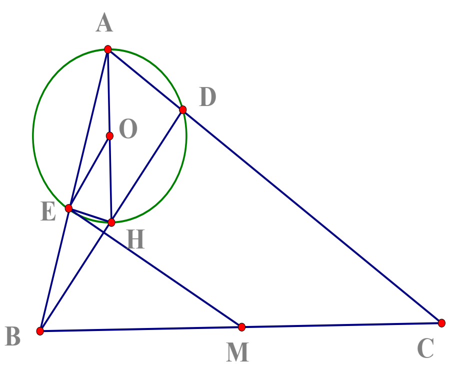
Vậy DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài 5. Cho tam giác ABC có hai đường cao BD, CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh bốn điểm A, D, H, E cùng nằm trên 1 đường tròn.

b) Gọi (O) là đường tròn đi qua bốn điểm A, D, H, E và M là trung điểm của BC. Chứng minh ME là tiếp tuyến của (O).

Lời giải



a) Xét $\Delta ADH(\widehat{H}=90^0) \Rightarrow D \in \left(O;\dfrac{AH}{2}\right); \Delta AEH\left(\widehat{E}=90^0\right) \Rightarrow E \in \left(O;\dfrac{AH}{2}\right)$

. Vậy 4 điểm A, D, H, E cùng thuộc 1 đường tròn

b) Xét $\Delta BEC\left(\widehat{E}=90^0\right)$, M là trung điểm của $BC \Rightarrow EM = MC \Rightarrow \Delta EMC$ cân tại M $\Rightarrow \widehat{CEM} = \widehat{ECM}$

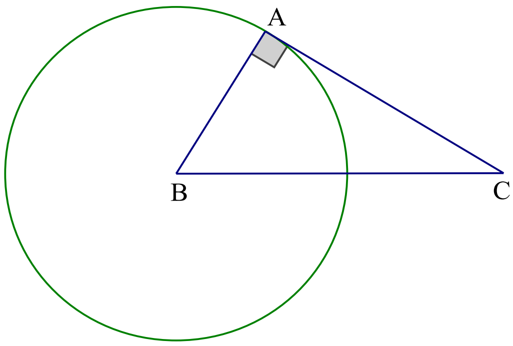
Ta lại có ΔAOE cân tại $O \Rightarrow \widehat{AEO} = \widehat{EAO}$

Mặt khác $\widehat{EAO} = \widehat{EAM}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$) và $\widehat{AEO} + \widehat{OEC} = 90^0 \Rightarrow OE \perp ME \Rightarrow ME$ là tiếp tuyến của đường tròn (O)

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6. Cho tam giác ΔABC có $AB = 6cm, AC = 8cm, BC = 10cm.$ Vẽ đường tròn $(B;BA)$. Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (B).

Lời giải



Xét ΔABC có:

$BC^2 = 100$

$AB^2 + AC^2 = 36 + 64 = 100$

Do đó $BC^2 = AB^2 + AC^2$

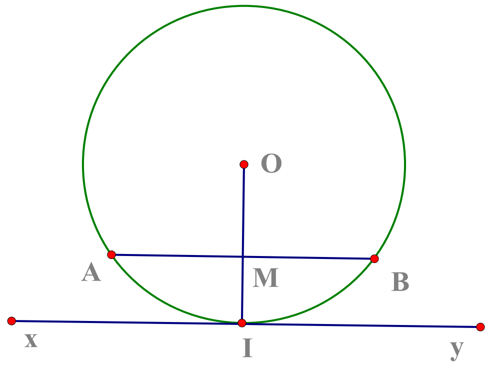
Theo định lí Pythagore đảo, ta có ΔABC vuông tại A.

$\Rightarrow \widehat{BAC} = 90^0 \Rightarrow BA \perp AC$

Vậy AC là tiếp tuyến của đường tròn (B).

Bài 7. Cho đường tròn (O) và một dây AB. Gọi M là trung điểm của AB, vẽ bán kính OI đi qua M. Từ I vẽ đường thẳng $xy // AB$. Chứng minh rằng xy là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải

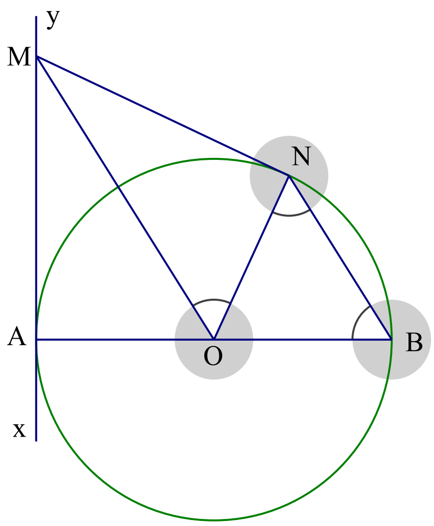


Xét đường tròn (O), ta có $OI \perp AB$ (đường kính đi qua trung điểm của dây thì vuôn góc với dây)

Mà $xy//AB \Rightarrow OI \perp xy \Rightarrow xy$ là tiếp tuyến của đường tròn.

Bài 8. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB và tiếp tuyến xAy. Trên xy lấy một điểm M, kẻ dây cung BN song song với OM. Chứng minh MN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải



Vì $BN//OM \Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{ABN}; \widehat{MON} = \widehat{ONB}$

Mà ΔOBN cân tại $O \Rightarrow \widehat{OBM} = \widehat{ONB} \Rightarrow \widehat{MON} = \widehat{AOM}$

Ta có: $\Delta OAM = \Delta ONM \left(OA = ON = R; \widehat{AOM} = \widehat{MON}; OM: chung\right) \Rightarrow \widehat{ONM} = \widehat{OAM}$

Ta lại có: $\widehat{OAM} = 90^0$ (vì xy là tiếp tuyến tại A), nên ta có: $\widehat{ONM} = 90^0 \Leftrightarrow MN \perp ON$

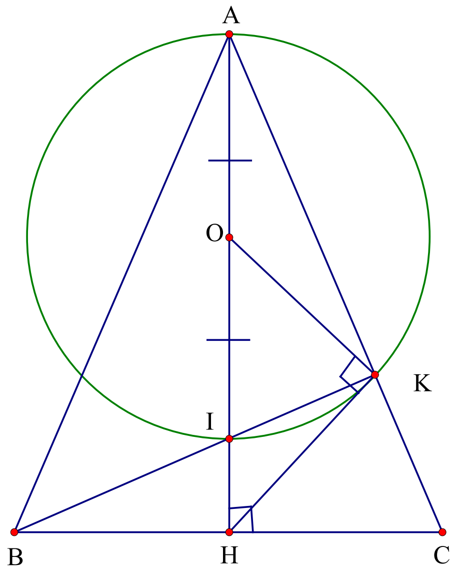
Vậy MN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài 9. Cho ΔABC cân tại A có các đường cao AH và BK cắt nhau tại I. Chứng minh

a) Đường tròn đường kính AI đi qua K.

b) HK là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AI.

Lời giải



a) Chứng minh được: $\widehat{BKA}=90^0$

b) Gọi O là trung điểm của AI. Ta có:

- $OK=OA \Rightarrow \widehat{OKA}=\widehat{OAK}$

- $\widehat{OAK}=\widehat{HBK}$ (cùng phụ với $\widehat{ACB}$)

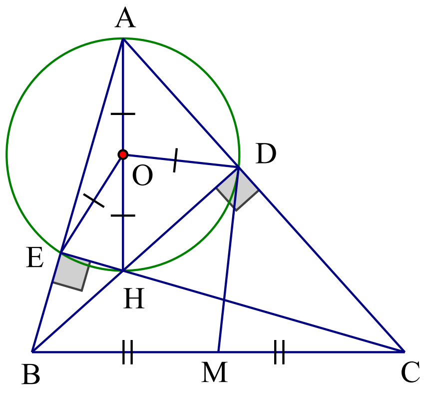
$HB=HK \Rightarrow \widehat{HBK}=\widehat{HKB} \Rightarrow \widehat{OKA}=\widehat{HBK} \Rightarrow \widehat{HKO}=90^0$

Bài 10. Cho ΔABC, hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng bốn điểm A,D,H,E cùng nằm trên một đường tròn đường kính AH.

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng MD là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH.

Lời giải



a) Gọi O là trung điểm của AH

Xét ΔADH và ΔAEH vuông tại D và E ta có: $OD=OE=OA=OH=\frac{1}{2}AH$

Suy ra bốn điểm A,D,H,E cùng nằm trên một đường tròn đường kính AH

b) Tam giác DBC vuông tại D có DM là đường trung tuyến nên $MD=MB=\frac{1}{2}BC$

Ta có: $\widehat{ODA}=\widehat{OAD}$ (ΔOAD cân)

$\widehat{OAD} = \widehat{DBC}$ (phụ với $\widehat{ACB}$)

$\widehat{DBC} = \widehat{BDM}$ (Vì ΔMBD cân)

Do đó: $\widehat{ODA} = \widehat{BDM}$

Ta có: $\widehat{ODA} + \widehat{ODB} = 90^0 \left(BD \perp AC\right) \Rightarrow \widehat{BDM} + \widehat{ODB} = 90^0 \left(\widehat{ODA} = \widehat{BDM}\right)$

Hay $\widehat{ODM} = 90^0 \Rightarrow MD \perp OD$

Vậy MD là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH.

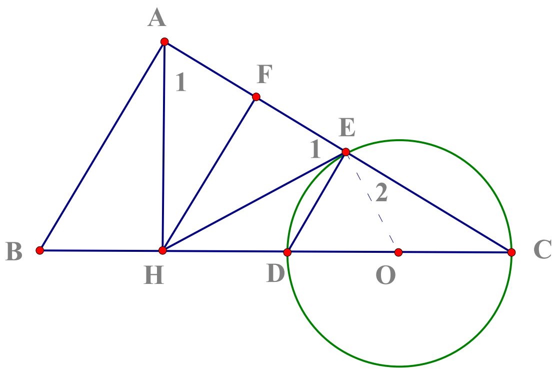
Tương tự ta chứng minh được ME là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH.

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB = 8cm, AC = 15cm$. Vẽ đường cao AH. Gọi D là điểm đối xứng với B qua H. Vẽ đường tròn đường kính CD cắt AC ở E.

a) Chứng minh rằng HE là tiếp tuyến của đường tròn.

b) Tính HE.

Lời giải



a) Ta có E thuộc đường tròn $(O) \Rightarrow \widehat{DEC} = 90^0 \Rightarrow DE // AB$

\+ Gọi F là trung điểm của $AE \Rightarrow HF$ là đường trung bình của hình thang $ABDE \Rightarrow HF \perp AE \Rightarrow \Delta AHE$ cân tại $H \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{E_1}$

+Ta có: c cân tại

$O \Rightarrow \widehat{E_2} = \widehat{C} \Rightarrow \widehat{E_1} + \widehat{E_2} = \widehat{A_1} + \widehat{C} = 90^0 \Rightarrow \widehat{HEO} = 90^0 \Rightarrow HE \perp OE$ (đpcm)

b) Xét $\Delta ABC(\widehat{A} = 90^0) \Rightarrow BC = 17cm$

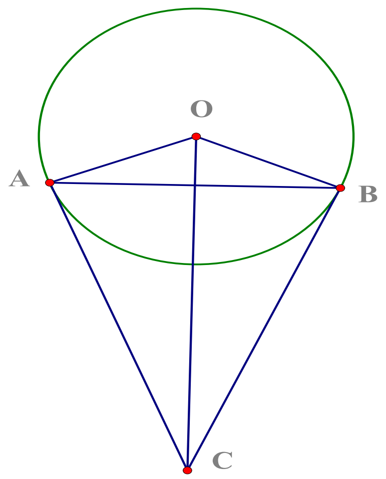
Ta có: $AH.BC = AB.AC \Rightarrow AH = HE = \dfrac{120}{7}(cm)$

Bài 12. Cho đường tròn (O) có dây AB khác đường kính. Qua O kẻ đường vuông góc với AB, cắt tiếp tuyến tại A của (O) ở C.

a) Chứng minh CB là tiếp tuyến của đường tròn .

b) Cho bán kính của (O) bằng $15cm$ và dây $AB = 24cm$. Tính độ dài đoạn thẳng OC.

Lời giải



a) Xét ΔOAC và ΔOBC, có :

$\begin{cases} OA = OC = R \\ OC : chung \end{cases} \Rightarrow \Delta OAC = \Delta OBC(cgc) \Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OAC} = 90^0 \Rightarrow$ đpcm

b) Xét $\widehat{OBC}; \Delta OBI(\hat{I} = 90^0) \Rightarrow OI^2 = OB^2 - BI^2 \Rightarrow OI = 9cm$, áp dụng

Xét $\Delta OBC\left(\widehat{B} = 90^0\right)$, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

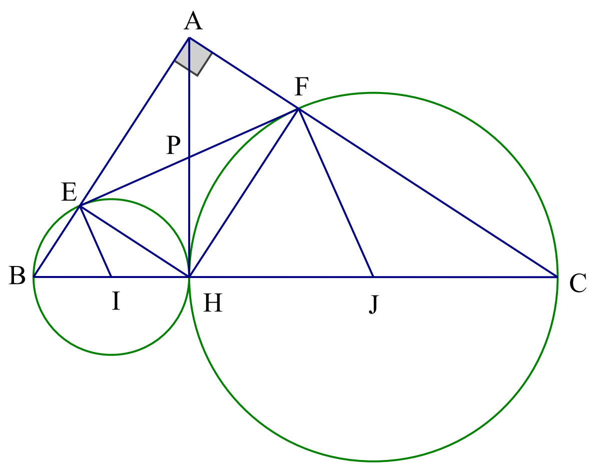
$OB^2 = OI.OC \Rightarrow OC = \dfrac{OB^2}{OI} = \dfrac{225}{9} = 25(cm)$

Bài 13. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Đường tròn tâm I đường kính BH cắt AB tại E, đường tròn tâm J đường kính HC cắt AC tại F. Chứng minh rằng:

a) AH là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (J) tại H.

b) EF là tiếp tuyến của (I) tại E, tiếp tuyến của (J) tại F.

Lời giải



a) Gọi I là trung điểm của BH thì I là tâm của đường tròn đường kính BH

Gọi J là trung điểm của HC thì J là tâm của đường tròn đường kính HC

Ta có: $IH \perp AH \Rightarrow BH$ là tiếp tuyến của đường tròn đường kính BH

Cũng vậy BH là tiếp tuyến của đường tròn đường kính HC

Vậy AH là tiếp tuyến chung của đường tròn (I) và (J)

b) Ta có: $\widehat{A}=\widehat{E}=\widehat{F}=90^0 \Rightarrow \lozenge AFHE$ là hình chữ nhật

Gọi P là giao điểm của AH và EF

Ta có: $PE=PF=PH=PA$

Lại có: $\Delta PEI=\Delta PHI\,(ccc) \Rightarrow \widehat{IEP}=\widehat{IHP}=90^0 \Rightarrow EF$ là tiếp tuyến của đường tròn (I)

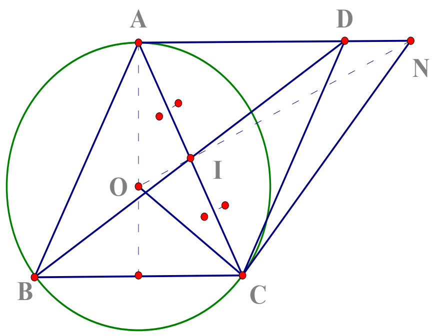
Chứng minh được: $\Delta PEJ=\Delta PHJ\,(ccc) \Rightarrow \widehat{IFJ}=\widehat{PHJ}=90^0 \Rightarrow EF$ là tiếp tuyến của đường tròn (J).

Bài 14. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn tâm (O). Vẽ hình bình hành $ABCD$, tiếp tuyến tại C của đường tròn cắt đường thẳng AD tại N. Chứng minh rằng :

a) Đường thẳng AD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) AC, BD, ON đồng quy.

Lời giải



a) Ta có ΔABC cân tại $A \Rightarrow OA \perp BC$ (1)

Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow AD//BC$ (2)

$\Rightarrow AD // BC(2)$

Từ $(1)(2) \Rightarrow AD \perp OA \Rightarrow$ đpcm

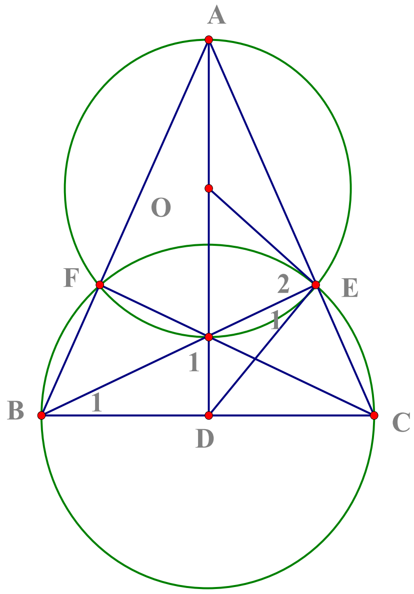
b.) Gọi I là giao điểm của AC và $BD \Rightarrow I$ là trung điểm của $AC \Rightarrow I \in ON$ (NA, NC là tiếp tuyến) $\Rightarrow AC, BD, ON$ đồng quy (đpcm).

Bài 15. Cho tam giác ABC cân tại A. Vẽ đường tròn tâm D đường kính BC cắt AC và AB lần lượt ở E và F. Gọi H là giao điểm của BE và CF. Chứng minh rằng :

a) A, E, H, F cùng thuộc 1 đường tròn.

b) DE là tiếp tuyến của đường tròn ở câu a.

Lời giải



a) Ta có D là tâm đường tròn đường kính $BC \Rightarrow DC = DB = DE = DF \Rightarrow \Delta BEC, \Delta BFC$ vuông.

+) Gọi O là trung điểm của $AH \Rightarrow OF = OE = \dfrac{AH}{2}$

Vậy 4 điểm A, E, H, F cùng thuộc 1 đường tròn

b) Có H là trực tâm $\Delta ABC \Rightarrow AD$ là đường trung trực của $BC \Rightarrow A, H, D$ thẳng hàng

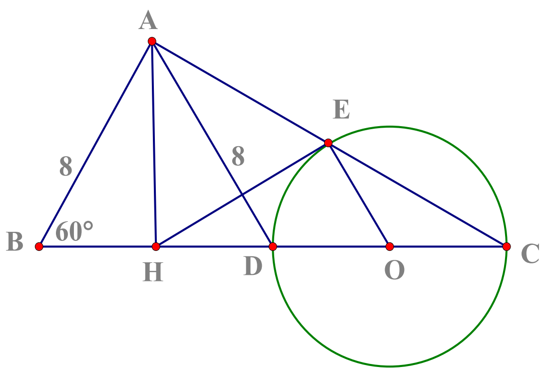
Mà $\widehat{B_1} = \widehat{E_1}; \widehat{E_2} = \widehat{H_2} = \widehat{H_1} \Rightarrow \widehat{E_1} + \widehat{E_2} = \widehat{H_2} + \widehat{H_1} = 90^0 \Rightarrow \widehat{OED} = 90^0 \Rightarrow DE$ là tiếp tuyến (đpcm)

Bài 16. Cho ΔABC vuông tại A, AH là đường cao, $AB = 8cm, BC = 16cm$. Gọi D là điểm đối xứng với B qua H. Vẽ đường tròn đường kính CD cắt AC ở E.

a) Chứng minh rằng HE là tiếp tuyến của đường tròn.

b) Tính độ dài đoạn thẳng HE.

Lời giải



a. Xét $\Delta ABC\left(\widehat{A} = 90^0\right), cos\widehat{B} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{B} = 60^0$

Xét ΔABD có AH là đường cao đồng thời là đường trung tuyến nên ΔABD cân tại A, $\widehat{B} = 60^0 \Rightarrow \Delta ABD$ là tam giác đều.

+) Ta có $OD = OE \Rightarrow \Delta ODE$ cân tại O

Có: $AB//DE \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{EDC} = 60^0 \Rightarrow \Delta ODE$ đều

$\Rightarrow DE = DH = DO = \dfrac{BC}{4} \Rightarrow \widehat{HEO} = 90^0 \Rightarrow HE$ là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.

b. Xét $\Delta HEO(\widehat{E} = 90^0) \Rightarrow HO^2 = HE^2 + EO^2 \Rightarrow HE^2 = 8^2 - 4^2 = 12 \Rightarrow HE = 4\sqrt{3}(cm)$

DẠNG 2

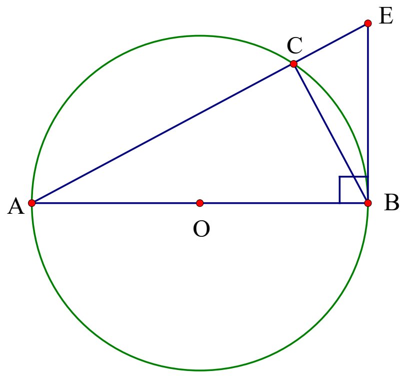
TÍNH ĐỘ DÀI ĐOẠN THẲNG, GÓC LIÊN QUAN TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Bài 1. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 10cm$ và Bx là tiếp tuyến của (O). Gọi C là một điểm trên (O) sao cho $\widehat{CAB} = 30^0$ và E là giao điểm của các tia AC và Bx.

a) Tính độ dài các đoạn thẳng AC, EC và BC.

b) Tính độ dài đoạn thẳng BE.

Lời giải

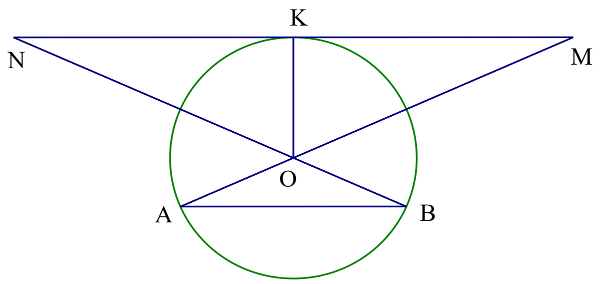


a) Tính được: $AC = 5\sqrt{3}cm, CE = \frac{5\sqrt{3}}{3}cm$

b) Tính được: $BE = \frac{10\sqrt{3}}{3}cm.$

Bài 2. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây $AB = \frac{8}{5}R$. Vẽ một tiếp tuyến song song với AB, cắt các tia OA, OB lần lượt tại M và N. Tính diện tích tam giác OMN.

Lời giải

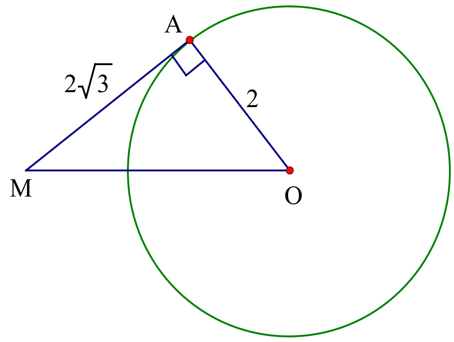


Tiếp tuyến MN, tiếp điểm K. Vì $AB // MN$ nên $OK \perp AB$

Ta tính được: $OK = \frac{3}{5}R \Rightarrow KN = \frac{4}{3}R \Rightarrow S_{OMN} = \frac{4}{3}R^2$

Bài 3. Cho đường tròn $(O;2cm)$ và một điểm A chạy trên đường tròn đó. Từ A vẽ tiếp tuyến xy. Trên xy lấy một điêm M sao cho $AM = 2\sqrt{3}(cm)$. Hỏi điểm M di động trên đường nào khi A chạy trên (O).

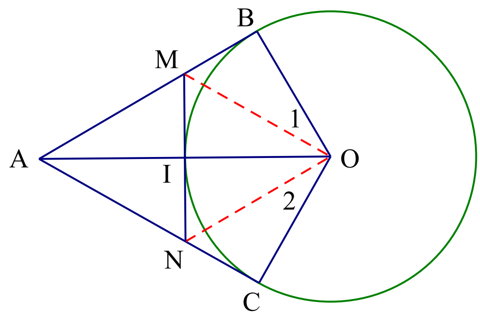
Lời giải



Tính được $OM = 4 \Rightarrow M$ di chuyển trên $(O;4cm)$

Bài 4. Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn $(O;R)$, vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Đường thẳng vuông góc với OB tại O cắt tia AC tại N. Đường thẳng vuông góc với OC tại O cắt tia AB tại M. Xác định hình dạng của tứ giác $AMON$.

Lời giải



Xét tứ giác $AMON$, ta có:

$AM // ON (\perp OB); AN // OM (\perp OC)$

$\Rightarrow AMON$ là hình bình hành

Mặt khác, xét hai tam giác vuông ΔOBM và ΔOCN, ta có:

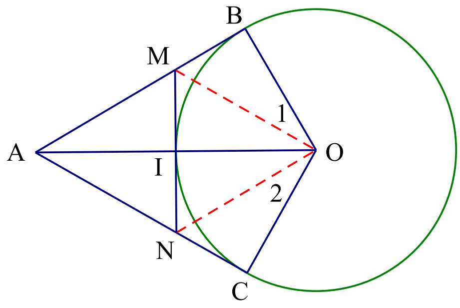
$OB = OC = R$; $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ (phụ với $\widehat{MON}$

Do đó $\Delta OBM = \Delta OCN (ch - gn) \Rightarrow OM = ON$

Vậy $AMON$ là hình thoi (hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau)

Bài 5. Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn $(O;R)$, vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Đường thẳng vuông góc với OB tại O cắt tia AC tại N. Đường thẳng vuông góc với OC tại O cắt tia AB tại M. Điểm A phải cách O một khoảng là bao nhiêu để cho MN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải



Để MN tiếp xúc với $(O;R)$ thì $d(O;MN)=R \Leftrightarrow OI=R \Leftrightarrow OA=2R$

Với $OA=2R \Rightarrow MN$ là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Bài 6. Cho đường tròn (O) đường kính AB, vẽ $CD \perp OA$ tại trung điểm I của OA. Các tiếp tuyến với đường tròn tại C và D cắt nhau ở M.

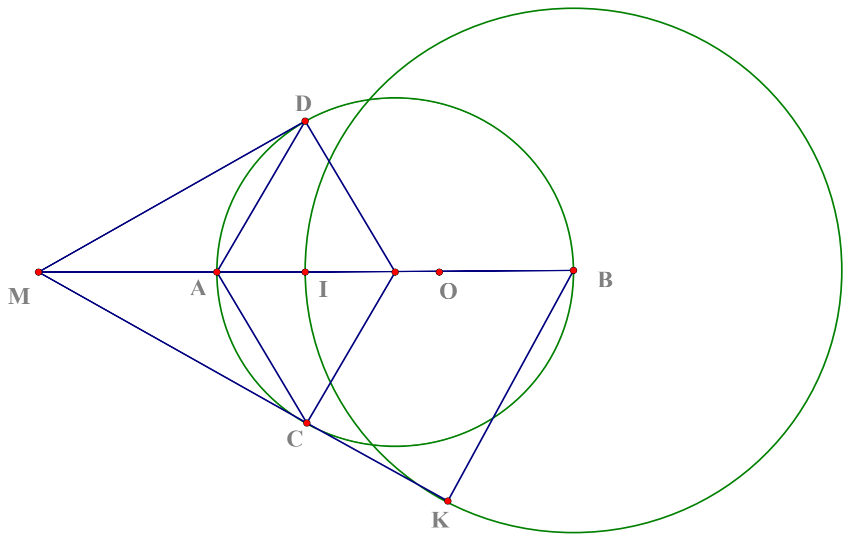
a) Chứng minh rằng A,B,M thẳng hàng.

b) Tứ giác $OCAD$ là hình gì ?

c) Tính $\widehat{CMD}$.

d) Chứng minh đường thẳng MC là tiếp tuyến của đường tròn $(B;BI)$.

Lời giải



a) AB là trung trực của CD, có $MC=MD$ (tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow m$ thuộc đường trung trực của $CD \Rightarrow M \in AB \Rightarrow M, A, B$ thẳng hàng

b) Tứ giác $OCAD$ có hai đường chéo vuông góc tại trung điểm mỗi đường nên là hình thoi

c) ΔAOC có $OA=OC=AC$ nên là tam giác đều

$\Rightarrow \widehat{AOC}=60^0 \Rightarrow \widehat{CMO}=30^0 \Rightarrow \widehat{CMD}=60^0$

d) Hạ BK vuông góc MC, ta có: $\widehat{C_1}=\widehat{C_2}=30^0 \Rightarrow CA$ là phân giác $\widehat{MCD}$

$AC \perp BC \Rightarrow CB$ là phân giác của $\widehat{KCD} \Rightarrow BI=BK \Rightarrow$ đpcm

(dựa vào tính chất hai tia phân giác của hai góc kề bù thì vuông góc với nhau)

Ta có: $\widehat{MCD},\widehat{DCK}$ là hai góc kề bù, CA là phân giác $\widehat{MCD}$

$AC\perp BC\Rightarrow CB$ là phân giác $\widehat{DCK}$ d. $MNKC$ là hình thoi $\Leftrightarrow MN=CK;CM=CK\Leftrightarrow \Delta KCM$ đều $\Leftrightarrow K\hat{B}C=30^0\Leftrightarrow AM=R$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

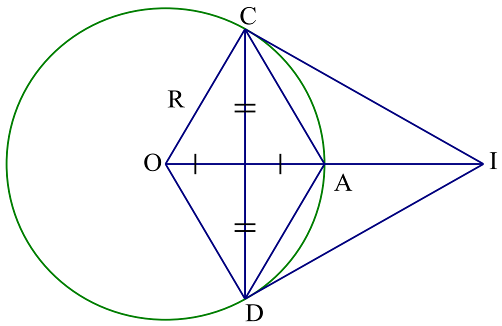
Bài 7. Cho đường tròn $(O;R)$, bán kính OA, dây CD là trung trực của OA. Kẻ tiếp tuyến với đường tròn (O) tại C, tiếp tuyến này cắt đường thẳng OA tại I.

a) Chứng minh ΔOAC là tam giác đều.

b) Chứng minh tứ giác $OCAD$ là hình thoi.

c) Tính CI theo R.

Lời giải



a) Gọi J là giao điểm của OA và CD

Do CD là đường trung trực của OA nên $CA=CO=R\Rightarrow OA=OC=CA=R\ (1)$

Vậy ΔOAC là tam giác đều

b) Chứng minh tương tự: $OA=OD=AD=R(2)$

Từ $(1)(2)\Rightarrow OC=OD=AC=AD=R$

$\Rightarrow \lozenge OCAD$ là hình thoi

c) Xét ΔOCI, ta có: $\widehat{OCI}=90^0;\widehat{COI}=60^0$

$\Rightarrow CI=OC.\tan\widehat{COI}=R.\tan 60^0=R\sqrt{3}$

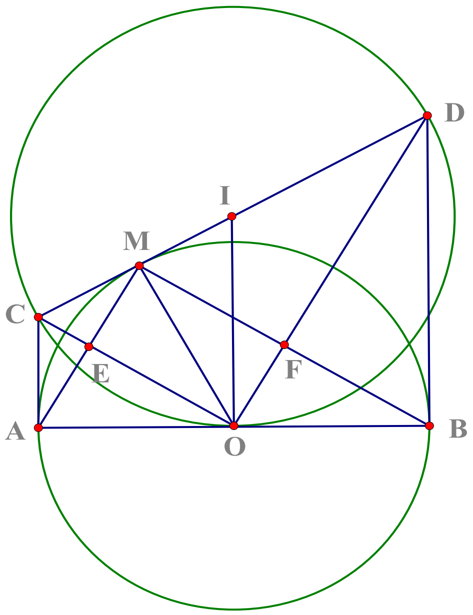
Bài 8. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và M là điểm nằm trên (O). Tiếp tuyến tại M cắt tiếp tuyến tại A và B của (O) lần lượt ở C và D. Đường thẳng AM cắt OC tại E, đường thẳng BM cắt OD tại F.

a) Chứng minh $\widehat{COD}=90^0$.

b) Tứ giác $MEOF$ là hình gì?

c) Chứng minh OB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.

Lời giải



a) Dễ thấy $\widehat{AMB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{EMF} = 90^0$

Có CM, CA là các tiếp tuyến $\Rightarrow OC \perp AM \Rightarrow \widehat{OEM} = 90^0$

Tương tự ta có: $\widehat{OFM} = 90^0$

$\Delta CAO \# \Delta CMO \Rightarrow \widehat{AOC} = \widehat{MCO} \Rightarrow OC$ là phân giác của $\widehat{AMO}$

Tương tự OD là phân giác $\widehat{BOM} \Rightarrow OC \perp OD \Rightarrow \widehat{COD} = 90^0$

b) Do ΔAOM cân tại O nên OE là đường phân giác đồng thời là đường cao $\Rightarrow \widehat{OEM} = 90^0$

Tương tự $\widehat{OFM} = 90^0 \Rightarrow \lozenge MEOF$ là hình chữ nhật.

c) Gọi I là trung điểm của CD thì I là tâm đường tròn đường kính CD và $IO = IC = ID$. Có $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B nên $IO // AC // BD$. Do đó AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD

Bài 9. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Lấy M thuộc (O) sao cho $MA < MB$. Vẽ dây MN vuông góc với AB tại H. Đường thẳng AN cắt BM tại C. Đường thẳng qua C vuông góc với AB tại K và cắt BN tại D.

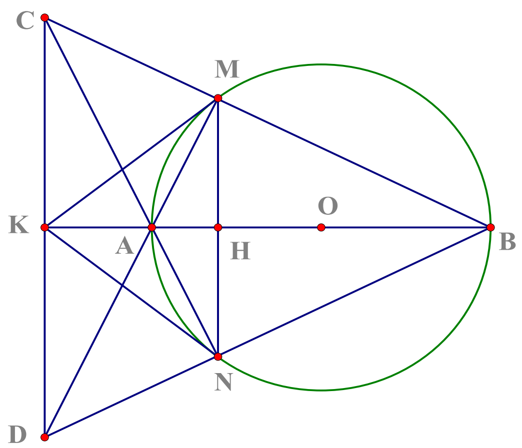
a) Chứng minh A, M, C, K cùng thuộc 1 đường tròn.

b) Chứng minh BK là tia phân giác của $\widehat{MBN}$.

c) Chứng minh ΔKMC cân và KM là tiếp tuyến của (O).

d) Tìm vị trí của M trên (O) để tứ giác $MNKC$ trở thành hình thoi.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{CKA} = \widehat{CMA} = 90^0 \Rightarrow C, K, A, M \in (I; AC)$

b) ΔMBN cân tại B có BA là đường cao, trung tuyến và phân giác

c) ΔBCD có $BK \perp CD; CN \perp BN \Rightarrow H$ là trực tâm $\Delta BCD \Rightarrow D, A, M$ thẳng hàng

Ta có ΔDMC vuông tại M có MK là trung tuyến nên ΔKMC cân tại $K \Rightarrow \widehat{KCM} = \widehat{KMC}$

Lại có: $\widehat{KBC} = \widehat{OMB} \Rightarrow \widehat{KMC} + \widehat{OMB} = \widehat{KCB} + \widehat{KBC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{KMO} = 90^0$

Mà OM là bán kính nên KM là tiếp tuyến của đường tròn (O)

d) $MNKC$ là hình thoi $\Leftrightarrow MN = CK; CM = CK \Leftrightarrow \Delta KCM$ đều $\Leftrightarrow K\hat{B}C = 30^0 \Leftrightarrow AM = R$

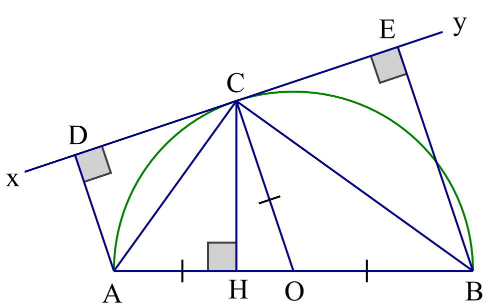
Bài 10. Cho nửa đường tròn tâm $(O;R)$ đường kính AB. Một đường thẳng xy tiếp xúc với đường tròn tại C. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của A và B trên xy. Chứng minh rằng:

a) C là trung điểm của DE.

b) Tổng $AD + BE$ không đổi khi C di động trên nửa đường tròn.

c) Tích $4.AD.BE = DE^2$.

Lời giải



a) Nối OC ta được $OC \perp xy$

Ta có: $AD // BE // OC (\perp xy)$

Mặt khác $OA = OB \Rightarrow CD = CE$

b) Kẻ $CH \perp AB$

Xét hai tam giác vuông ΔDAC và ΔHAC có:

+) $AC: chung$

+) $\widehat{DAC} = \widehat{HAC}\left(=\widehat{ACO}\right) \Rightarrow \Delta DAC = \Delta HAC \Rightarrow \begin{cases} AD = AH \\ CD = CH \end{cases}$

Chứng minh được: $BE = BH; CE = CH \Rightarrow AD.BC = AH.BH$ (1)

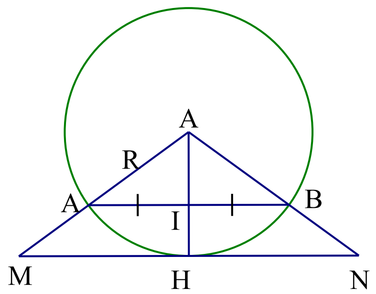
Điểm C nằm trên nửa đường tròn đường kính AB nên ΔCAB vuông tại C

Vậy $AH.BH = CH^2$ (2)

Từ $(1)(2) \Rightarrow AD.BE = CH^2 = CD.CE = \left(\dfrac{DE}{2}\right)^2 = \dfrac{DE^2}{4} \Rightarrow$ đpcm.

Bài 11. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây $AB = 1,6R$. Vẽ một tiếp tuyến song song với AB, nó cắt các tia OA và OB theo thứ tự tại M và N. Tính diện tích ΔMON.

Lời giải



a) Nối OH ta được $OH \perp MN$ (tính chất tiếp tuyến)

Ta lại có $AB//MN \Rightarrow OH \perp AB = I$

Theo tính chất đường kính vuông góc với một dây ta được:

$IA = IB = \dfrac{1,6R}{2} = 0,8R$

Tam giác IOA vuông tại $I \Rightarrow OI^2 = OA^2 - IA^2 = R^2 - (0,8R)^2 = 0,36R^2 \Rightarrow OI = 0,6R$

Xét ΔMON có $AB//MN \Rightarrow \Delta OAB \# \Delta OMN \Rightarrow \dfrac{AB}{MN} = \dfrac{OI}{OH}$ (tỉ số hai đường cao tương ứng bằng tỉ số đồng dạng) $\Rightarrow MN = \dfrac{AB.OH}{OI} = \dfrac{1,6R}{0,6R} = \dfrac{8}{3}R$

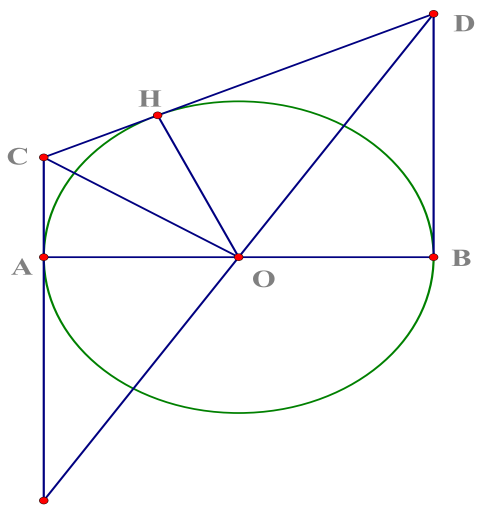
Diện tích tam giác MON là: $S_{MON} = \dfrac{1}{2}.MN.OH = \dfrac{1}{2}.\dfrac{8}{3}R.R = \dfrac{4}{3}R^2$

Bài 12. Cho đoạn thẳng AB và trung điểm O của AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ tia Ax, By vuông góc với AB. Trên các tia Ax và By lấy theo thứ tự hai điểm C và D sao cho $\widehat{COD} = 90^0$, kẻ $OH \perp CD$.

a) Chứng minh rằng H thuộc đường tròn tâm O đường kính AB.

b) Xác định vị trí tương đối của CD với đường tròn (O).

Lời giải



a)Kéo dài DO cắt AC ở E, ta có :

$\Delta AOE = \Delta BOD(gcg) \Rightarrow \widehat{E} = \widehat{D}; OD = OE \Rightarrow \Delta OHD = \Delta OAE(ch - gn) \Rightarrow OH = OA = OB \Rightarrow H \in (O; AB)$

b) Ta có H thuộc đường tròn (O), $CD \perp OH$ tại H $\Rightarrow$ khoảng cách từ O đến CD bằng bán kính của (O). Vậy CD tiếp xúc với (O) tại H.

Bài 13. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB, M là 1 điểm thuộc nửa đường tròn, qua M vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn. Gọi D và C theo thứ tự là các hình chiếu của A và B trên tiếp tuyến ấy.

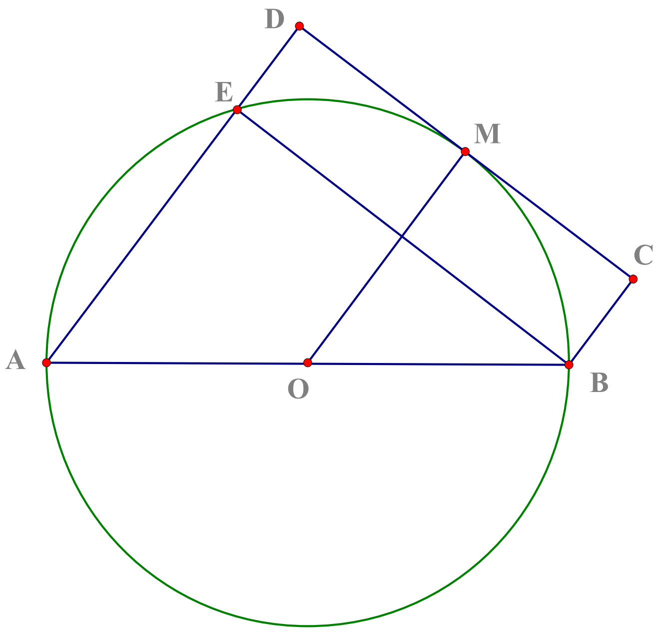
a) Chứng minh rằng M là trung điểm của CD.

b) Chứng minh: $AB = BC + AD$.

c) Giả sử: $\widehat{AOM} > \widehat{BOM}$, gọi E là giao điểm của AD với nửa đường tròn. Xác định dạng của tứ giác $BDCE$.

d) Xác định vị trí của điểm M trên nửa đường tròn sao cho tứ giác $ABCD$ có diện tích lớn nhất. Tính diện tích đó theo bán kính của nửa đường tròn đã cho.

Lời giải



a) Hình thang $ABCD$ có $AO = OB, OM // AD // BC \Rightarrow M$

là trung điểm của CD

b) Ta có: $AB = 2OM = BC + AD$

c) Tứ giác $BDCE$ là hình chữ nhật vì có 3 góc vuông

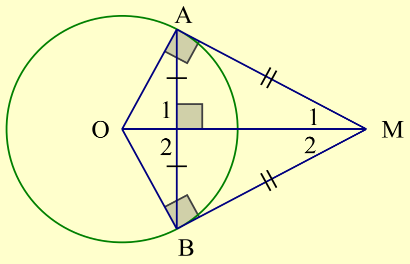
dV $S_{ABCD} = \dfrac{AD + BC}{2}.BE = OM.BE \le OM.AB = 2R^2$

$\Rightarrow maxS_{ABCD} = 2R^2 \Leftrightarrow OM \perp AB$

CHỦ ĐỀ 2

TÍNH CHẤT HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU

Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

Giả thiết	Tiếp tuyến tại A và B của (O) cắt nhau tại M (A và B là tiếp điểm)	
Kết luận	- $MA = MB$ - $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ - $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ - MO là trung trực của AB	

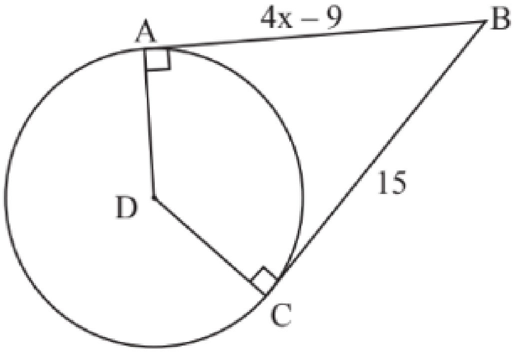
Chú ý: MO là trung trực của AB thì phải chứng minh chứ không được dùng là giả thiết bài toán nhé. Ta chứng minh như sau:

ΔAMB cân tại (do $MA = MB$) và MO là đường phân giác $\widehat{AMB}$ (do $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$) nên là MO là trung trực của AB.

DẠNG 1

TÍNH ĐỘ DÀI, DIỆN TÍCH, GÓC LIÊN QUAN TÍNH CHẤT HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU

Bài 1. Tìm giá trị của x trong hình vẽ bên dưới.



Lời giải

Ta có BA, BC là hai tiếp tuyến của đường tròn (D) cắt nhau tại B nên:

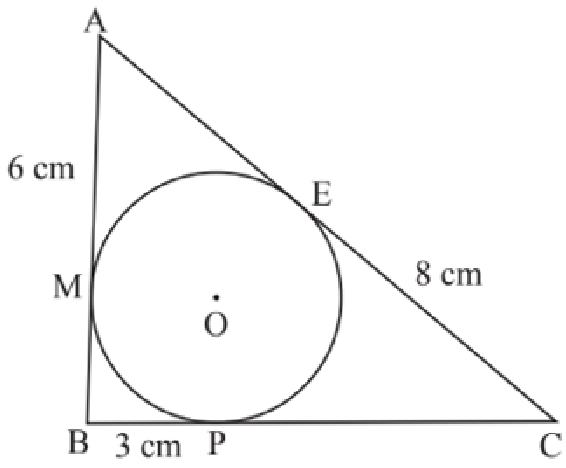
BA = BC

hay 4x – 9 = 15,

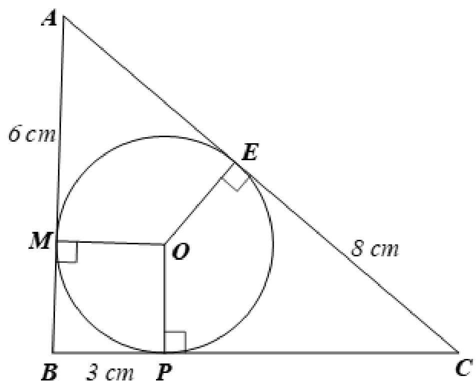
suy ra 4x = 24 hay x = 6.

Vậy x = 6.

Bài 2. Cho tam giác ABC có đường tròn (O) nằm trong và tiếp xúc với ba cạnh của tam giác. Biết AM = 6 cm, BP = 3 cm, CE = 8 cm (Hình vẽ). Tính chu vi tam giác ABC.



Lời giải



Ta có:

AE, AM là hai tiếp tuyến của (O) cắt nhau tại A nên AE = AM = 6 cm (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

BM, BP là hai tiếp tuyến của (O) cắt nhau tại B nên BM = BP = 3 cm (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

CP, CE là hai tiếp tuyến của (O) cắt nhau tại C nên CP = CE = 8 cm (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

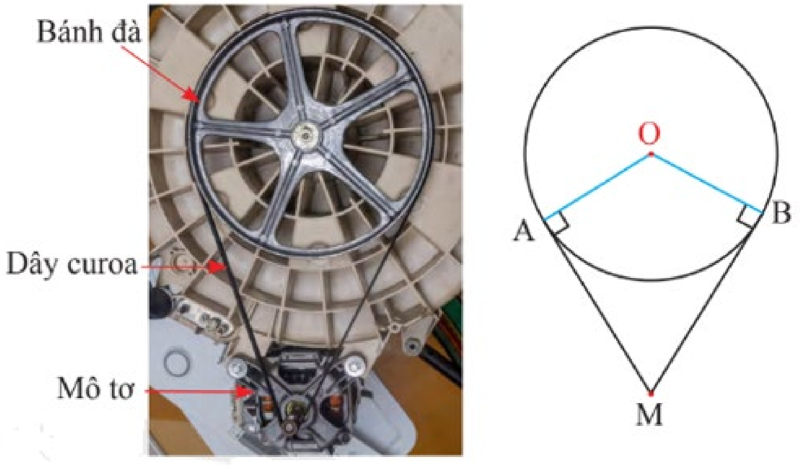
Chu vi tam giác ABC là:

AB + BC + CA = AM + BM + BP + CP + CE + AE = 6 + 3 + 3 + 8 + 8 + 6 = 34 (cm).

Vậy chu vi tam giác ABC bằng 34 (cm).

Bài 3. Bánh đà của một động cơ được thiết kế có dạng là một đường tròn tâm O, bán kính 15 cm được kéo bởi một dây curoa. Trục của mô tơ truyền lực được biểu diễn bởi điểm M (Hình vẽ). Cho biết khoảng cách OM là 35 cm.

a) Tính độ dài của hai đoạn dây curoa MA và MB (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



a) b)

b) Tính số đo $\widehat{AMB}$ tạo bởi hai tiếp tuyến AM, BM và số đo $\widehat{AOB}$ (kết quả làm tròn đến phút).

Lời giải

a) Ta có MA, MB lần lượt là hai tiếp tuyến của đường tròn (O; 15 cm) tại A, B và cắt nhau tại M nên MA ⊥ OA, MB ⊥ OB và MA = MB.

Xét ΔOAM vuông tại A, theo định lí Pythagore ta có: $OM^2 = OA^2 + MA^2$.

Suy ra $MA^2 = OM^2 - OA^2 = 35^2 - 15^2 = 1000$.

Do đó $MA = \sqrt{1000} \approx 31,6(cm)$

Vậy $MA = MB \approx 31,6(cm)$.

b) Xét ΔOAM vuông tại A, ta có: $\sin\widehat{AMO} = \dfrac{OA}{OM} = \dfrac{15}{35} = \dfrac{3}{7}$.

Suy ra $\widehat{AMO} \approx 25^0 23'$

Vì MA, MB là hai tiếp tuyến của đường tròn (O; 15 cm) cắt nhau tại M nên MA là tia phân giác của góc AMB.

Do đó $\widehat{AMB} = 2\widehat{AMO} \approx 2.25^0 23' \approx 50^0 26'$

Xét tứ giác OAMB có: $\widehat{OAM} + \widehat{AMB} + \widehat{OBM} + \widehat{AOB} = 360^0$ (tổng các góc của một tứ giác).

Suy ra $\widehat{AOB} = 360^0 - \left(\widehat{OAM} + \widehat{AMB} + \widehat{OBM}\right) \approx 360^0 - \left(90^0 + 50^0 26' + 90^0\right) \approx 129^0$

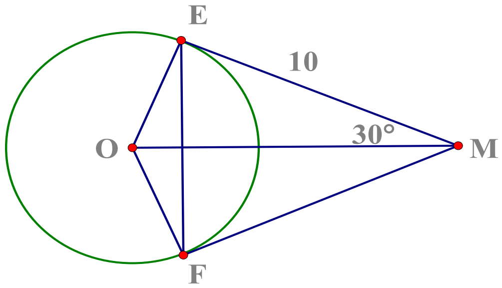
Do đó

Bài 4. Cho đường tròn (O). Từ một điểm M ở ngoài (O), vẽ hai tiếp tuyến ME, MF (E, F là các tiếp điểm) sao cho $\widehat{EMO} = 30^0$. Biết chu vi tam giác MEF là $30cm$.

a) Tính độ dài dây EF.

b) Tính diện tích ΔMEF.

Lời giải



a) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có:

$\widehat{OME} = \widehat{OMF} = 30^0 \Rightarrow \widehat{EMF} = 60^0 \Rightarrow \Delta MEF$ đều $\Rightarrow EF = 10cm$

b) Xét $\Delta MEI(\hat{I} = 90^0) \Rightarrow cos30^0 = \dfrac{MI}{ME} \Rightarrow MI = cos30^0.ME = 8,6cm \Rightarrow S_{MEF} = \dfrac{1}{2}.MI.EF = 25\sqrt{3}(cm^2)$

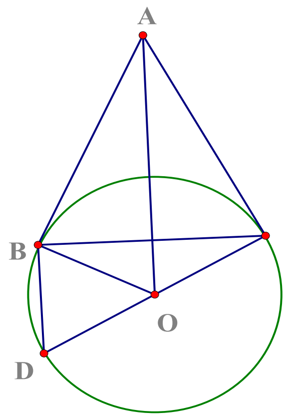
DẠNG 2
CHỨNG MINH HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU, HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG, VUÔNG GÓC

Bài 1. Hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau ở A.

a) Chứng minh AO là trung trực của đoạn thẳng BC.

b) Vẽ đường kính CD của (O). Chứng minh $BD//AO$.

Lời giải



a) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $AB = AC$

$\Rightarrow$ A thuộc đường trung trực của BC

Lại có: $OB = OC \Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của BC

Vậy AO là đường trung trực của đoạn BC

b) Ta có

$AO \perp BC$ (chứng minh trên)

$DB \perp BC$ (giả thiết)

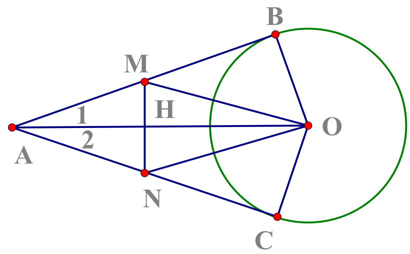
$\Rightarrow BD//AO$ (đpcm).

Bài 2. Từ 1 điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Đường thẳng vuông góc với OB tại O cắt AC tại N. Đường thẳng vuông góc với OC tại O cắt AB tại M.

a) Chứng minh rằng tứ giác $AMON$ là hình thoi.

b) Điểm A cách O một khoảng là bao nhiêu để MN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải



a) Ta có :

$AB \perp OB$ (Tính chất tiếp tuyến)

$NO \perp OB$ (giả thiết)

$\Rightarrow ON//AM \quad (1)$

Tương tự

$AC \perp OC$ (Tính chất tiếp tuyến)

$MO \perp OC$ (giả thiết)

$\Rightarrow AN//OM \quad (2)$

Từ (1) và $(2) \Rightarrow AMON$ là hình bình hành

Lại có $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow AMON$ là hình thoi $\Rightarrow MN \perp OA; HA = HO$

b)

Ta có : $AMON$ là hình thoi $\Rightarrow MN \perp OA; HA = HO$

Để MN là tiếp tuyến của đường tròn (O) thì $OH = R$ hay $OA = 2OH = 2R \Rightarrow OA = 2R$

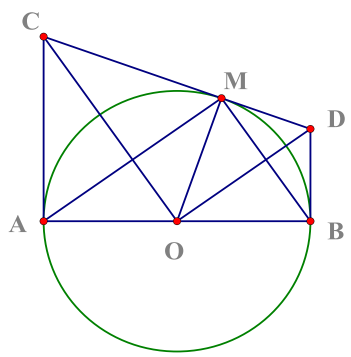
Bài 3. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Vẽ các tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn cùng phía đối với AB. Từ điểm M trên nửa đường tròn (M khác A, B) vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt Ax và By lần lượt tại C và D.

a) Chứng minh rằng: $\Delta COD \# \Delta AMB$.

b) Chứng minh $MC.MD$ không đổi khi M di động trên nửa đường tròn.

c) Cho biết $OC = BA = 2R$. Tính AC và BD theo R.

Lời giải



a) Ta có $\Delta COD \# \Delta AMB (gg)$

b) Theo câu a ta có: $\Delta COD \# \Delta AMB \Rightarrow MC.MD = OM \Rightarrow$ đpcm

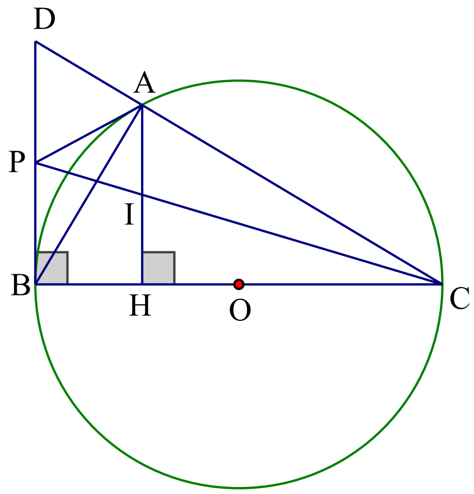
c) Xét $\Delta AOC(\widehat{A} = 90^0) \Rightarrow OC^2 = OA^2 + AC^2 (pytago)$

$\Rightarrow AC = R\sqrt{3}(cm)$

Ta lại có: $AC.BD = MC.MD = R^2 \Rightarrow BD = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}(cm)$.

Bài 4. Từ điểm P nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ vẽ hai tiếp tuyến PA, PB với A và B là các tiếp điểm. Gọi H là chân đường vuông góc vẽ từ A đến đường kính BC. Chứng minh rằng PC cắt AH tại trung điểm I của AH.

Lời giải



CA cắt BP tại D; $\widehat{BAC} = 90^0$ (A thuộc đường tròn đường kính BC)

$PA = PB$ (tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow \widehat{PBA} = \widehat{PAB}$

ΔABD có $\widehat{ABD} + \widehat{ADB} = 90^0; \widehat{BAP} + \widehat{PAD} = \widehat{BAD} = 90^0$, do đó $PB = PD$ (1)

$DB \perp BC, AH \perp BC \Rightarrow DB // AH$

ΔPBC có $IH // PB \Rightarrow \dfrac{IH}{PB} = \dfrac{IC}{PC}$ (2); ΔPDC có $AI // PD \Rightarrow \dfrac{IA}{PD} = \dfrac{IC}{PC}$ (3)

Từ $(1)(2)(3) \Rightarrow IH = IA \Rightarrow$ đpcm.

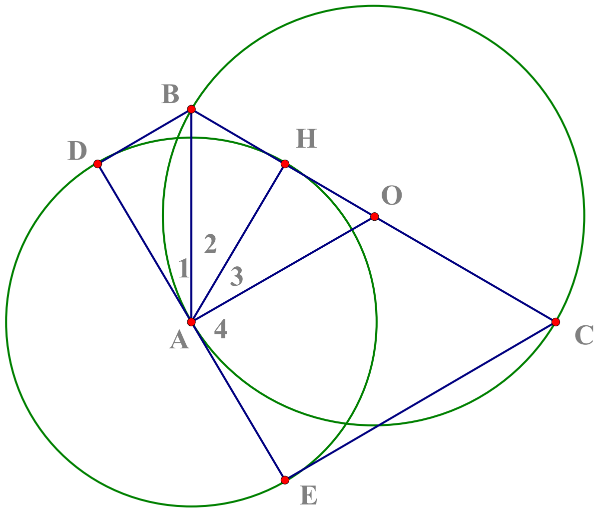
BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ (A, AH), kẻ các tiếp tuyến BD và CE với đường tròn (A) (D, E là các tiếp điểm khác H).

a) Chứng minh rằng: D, A, E thẳng hàng.

b) Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn với đường kính BC.

Lời giải



a. Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có:

$\widehat{A_1} = \widehat{A_2}; \widehat{A_3} = \widehat{A_4} \Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{A_3} + \widehat{A_4} = 3\widehat{BAC} = 180^0 \Rightarrow D, A, E$ thẳng hàng.

b. Gọi O là trung điểm của BC

$\lozenge DBEC$ là hình thang $(DB, CE \perp ED)$

$\Rightarrow OA$ là đường trung bình của hình thang $DBEC$ $\Rightarrow OA // DB // EC \Rightarrow OA \perp DE$

Hay DE là tiếp tuyến của đường tròn $\left(O; \dfrac{BC}{2}\right)$

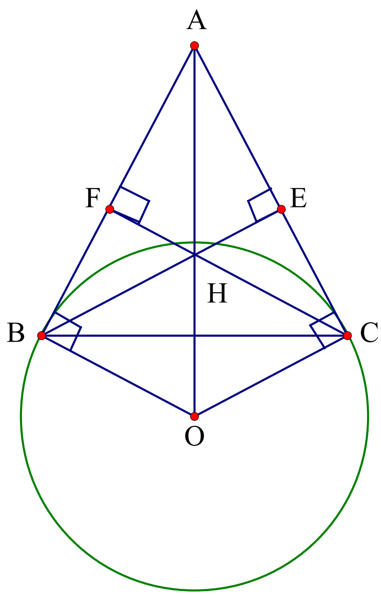
Bài 6. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là các tiếp điểm). Kẻ $BE \perp AC; CF \perp AB\,(E \in AC, F \in AB), BE \cap CF = H$.

a) Chứng minh tứ giác $BOCH$ là hình thoi.

b) Chứng minh ba điểm A, O, H thẳng hàng.

c) Xác định vị trí điểm A để H nằm trên (O).

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $BOCH$ là hình thoi.

b) Ta có A,H,O cùng nằn trên đường vuông góc với BC nên thẳng hàng nhau

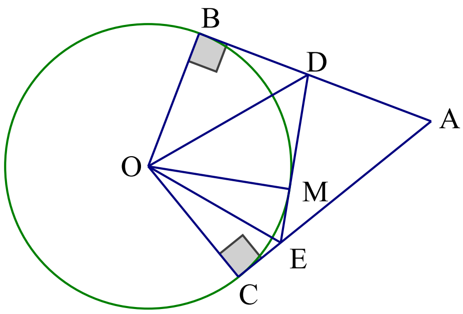
c) Để $H\in(O)$ thì $OH=OC\Rightarrow \widehat{CAO}=60^0$

Bài 7. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ kẻ hai tiếp tuyến AB,AC (với B và C là các tiếp điểm). Qua điểm M thuộc cung nhỏ BC vẽ tiếp tuyến với đường tròn (O), cắt các tiếp tuyến AB,AC lần lượt tại D và E.

a) Chứng minh chu vi $\Delta ADE=2AB$.

b) Chứng minh rằng: $\widehat{BOC}=2\widehat{DOE}$.

Lời giải



a) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $DB=DM;ME=CE;AB=AC$

Do đó chu vi ΔADE là:

$$C_{\Delta ADE}=AD+DM+ME+AE=AD+DB+CE+AE=AB+AC=2AB$$

b) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: OD,OE lần lượt là các tia phân giác của các góc BOM,MOC

Ta có:

$$\widehat{DOM}=\frac{1}{2}\widehat{BOM}$$

$$\widehat{MOE}=\frac{1}{2}\widehat{MOC}$$

$$\Rightarrow \widehat{DOE}=\widehat{DOM}+\widehat{MOE}=\frac{1}{2}\left(\widehat{BOM}+\widehat{MOC}\right)=\frac{1}{2}\widehat{BOC}$$

$$\Rightarrow \widehat{BOC}=2\widehat{DOE}$$

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ đường tròn $(A;AH)$. Từ B,C kẻ các tiếp tuyến BD,CE với (A) trong đó D,E là các tiếp điểm.

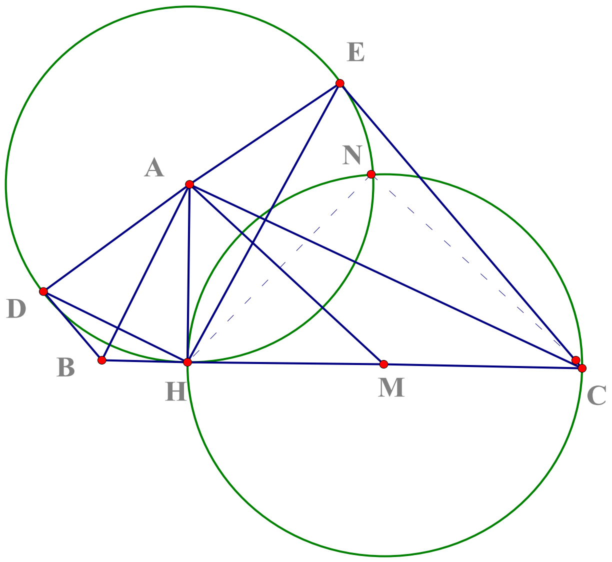
a) Chứng minh ba điểm A,D,E thẳng hàng.

b) Chứng minh: $BD.CE=\dfrac{DE^2}{4}$.

c) Gọi M là trung điểm của CH. Đường tròn tâm M đường kính CH cắt (A) tại N với N khác H.

Chứng minh: $CN // AM$.

Lời giải



a) Ta có: AB là phân giác của $\widehat{DAH}$, AC là phân giác của $\widehat{HAE} \Rightarrow \widehat{DAE} = 180^0$

b) Theo tính chât hai tiếp tuyến cắt nhau và hệ thức lượng về đường cao và hình chiếu cạnh góc vuông lên cạnh huyền tròn tam giác vuông BAC

$\Rightarrow BD.CE = BH.CH = AH^2 = \dfrac{DE^2}{4}$

c) Ta có ΔHNC nội tiếp đường tròn (M) đường kính $HC \Rightarrow HN \perp CN$

Chứng minh AN là tiếp tuyến của (M), do đó $AM \perp HN \Rightarrow AM // NC$

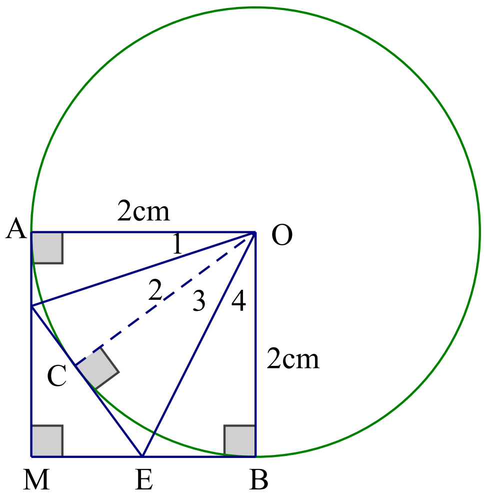
Bài 9. Cho đường tròn $(O;2cm)$ các tiếp tuyến MA, MB kẻ từ M đến đường tròn vuông góc với nhau tại M (A, B là các tiếp điểm) .

a) Tứ giác $MBOA$ là hình gì? Vì sao?

b) Gọi C là điểm bất kỳ thuộc cung nhỏ AB. Qua C kẻ tiếp tuyến với đường tròn cắt MA, MB tại D và E. Tính chu vi tam giác MDE .

c) Tính $\widehat{DOE}$.

Lời giải



a) Xét hình chữ nhật $AMBO$ có: $MA = MB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau $\Rightarrow AMBO$ là hình vuông .

b) Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $\begin{cases} DA = DC \\ EB = EC \end{cases}$

Chu vi $\Delta = MD + ME + ED = MD + ME + EB + DA = 2MA = 4cm$

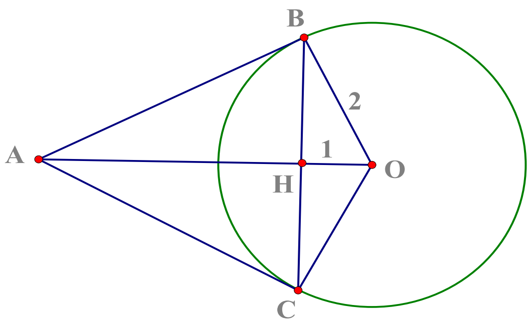
c) $\widehat{DOE} = \widehat{DOC} + \widehat{COE} = 2\widehat{BOC} = 45^0$

Bài 10. Cho đường tròn (O) và 1 điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với (O) trong đó B, C là các tiếp điểm.

a) Chứng minh đường thẳng OA là trung trực của BC.

b) Gọi H là giao điểm của AO và BC. Biết $OB = 2cm, OH = 1cm$, tính chu vi và diện tích tam giác ABC và diện tích tứ giác $ABOC$.

Lời giải



b. Áp dụng định lý pytago ta tính được: $BH = \sqrt{3}(cm)$

Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông, ta được:

$AB = AC = 2\sqrt{3}(cm) \Rightarrow P_{ABC} = 6\sqrt{3}cm; S_{ABC} = 3\sqrt{3}(cm^2)$

+) Ta có: $S_{ABOC} = S_{ABC} + S_{BOC} \Rightarrow S_{ABOC} = 4\sqrt{3}(cm^2)$

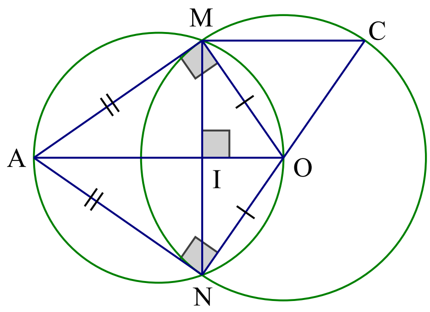
Bài 11. Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O). Kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn đó (M, N là các tiếp điểm) .

a) Chứng minh rằng: $OA \perp MN$.

b) Vẽ đường kính NOC. Chứng minh rằng $MC//AO$.

c) Tính độ dài các cạnh của tam giác AMN biết $OM = 3cm, OA = 5cm$.

Lời giải



a) Vì $AM = AN, OM = ON$ $(1) \Rightarrow OA$ là trung trực của $MN \Rightarrow OA \perp MN; MI = IN = \dfrac{MN}{2}$ (2) (I là giao điểm của OA với MN)

b) Từ $(1)(2) \Rightarrow IO$ là đường trung bình của tam giác $MNC \Rightarrow IO//MC; MC//AO$

c) Vì AM là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow AM \perp MO$ hay ΔAMO vuông tại M có cạnh huyền $AO = 5cm$

thu được: $OM^2 = OI.OA \Leftrightarrow 3^2 = OI.5 \Leftrightarrow OI = 1,8(cm) \Rightarrow AI = 5 - 1,8 = 3,2(cm)$

Áp dụng hệ thức về cạnh ta có: $AM^2 = 3,2.5 = 4^2 \Leftrightarrow AM = 4(cm)(AM > 0)$

Áp dụng hệ thức về đường cao, ta có: $MI^2 = 3,2.1,8 = 2,4^2 \Leftarrow MI = 2,4(cm)(MI > 0)$

Vậy $AM = AN = 4cm, MN = 4,8cm$.

Bài 12. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax, lấy P trên Ax ($AP > R$). Từ P kẻ tiếp tuyến PM với (O).

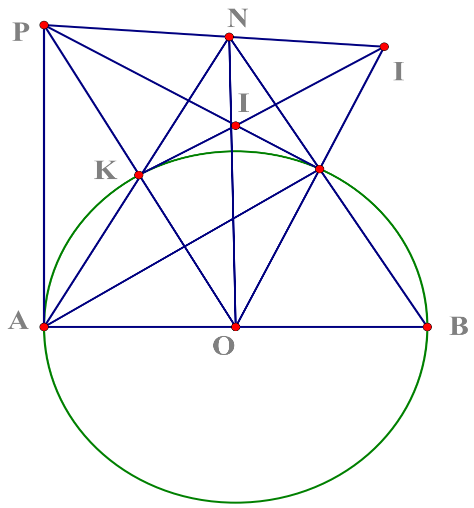
a) Chứng minh rằng bốn điểm A, P, M, O cùng thuộc 1 đường tròn.

b) Chứng minh: $BM//OP$.

c) Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt tia BM tại N. Chứng minh tứ giác $OBNP$ là hình bình hành.

d) Giả sử AN cắt OP tại K; PM cắt ON tại I; PN cắt OM tại J. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

Lời giải



a) A, P, M, O cùng nằm trên đường tròn đường kính PO

b) Ta có: $OP \perp AM; BM \perp AM \Rightarrow BM // OP$

c) $\Delta AOP = \Delta OBN \Rightarrow OP = BN$, ta lại có $BN // OP$ nên $OPNB$ là hình bình hành

d) Ta có: $ON \perp PJ; PM \perp OJ$, mà $PM \cap ON \equiv I \Rightarrow I$ là trực tâm $\Delta POJ \Rightarrow IJ \perp OP$ (1)

Chứng minh được $PAON$ là hình chữ nhật $\Rightarrow K$ là trung điểm OP

Lại có: $\widehat{APO} = \widehat{OPI} = \widehat{IOP} \Rightarrow \Delta IPO$ cân tại $I \Rightarrow IK \perp OP$ (2)

Từ $(1)(2) \Rightarrow I, J, K$ thẳng hàng.

Bài 13. Cho đường tròn $(O; R)$. Từ A trên (O), kẻ tiếp tuyến d với (O). Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kỳ (M khác A), kẻ cát tuyến MNP, gọi K là trung điểm của NP, kẻ tiếp tuyến MP, kẻ $AC \perp MB, BD \perp AM$. Gọi H là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của OM và AB.

a) Chứng minh bốn điểm A, M, B, O cùng thuộc 1 đường tròn.

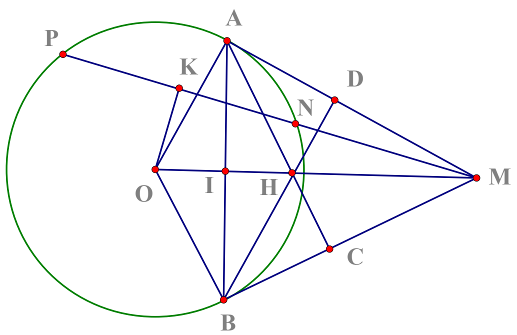
b) Chứng minh năm điểm O, K, A, M, B cùng thuộc 1 đường tròn.

c) Chứng minh: $OI.OM = R^2$ và $OI.IM = IA^2$.

d) Chứng minh $OAHB$ là hình thoi.

e) Chứng minh ba điểm O, H, M thẳng hàng.

Lời giải



a) Chứng minh bốn điểm A, M, B, O cùng thuộc 1 đường tròn.

Gọi E là trung điểm OM .

Tam giác OAM vuông tại A và AE là đường trung tuyến nên $AE = EO = EM$

Tam giác OBM vuông tại B và BE là đường trung tuyến nên $BE = EO = EM$

Do đó $AE = EO = EM = BE$

Nên bốn điểm A, M, B, O cùng thuộc 1 đường tròn đường kính OM

b) Ta có: $\widehat{OKM} = 90^0 \Rightarrow A, M, B, O, K \in \left(\dfrac{OM}{2}\right)$

c. Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OAM (hoặc chứng minh tam giác đồng dạng)

d. Chứng minh $OAHB$ là hình bình hành và chú ý: $A, B \in (O;R) \Rightarrow OAHB$

là hình thoi

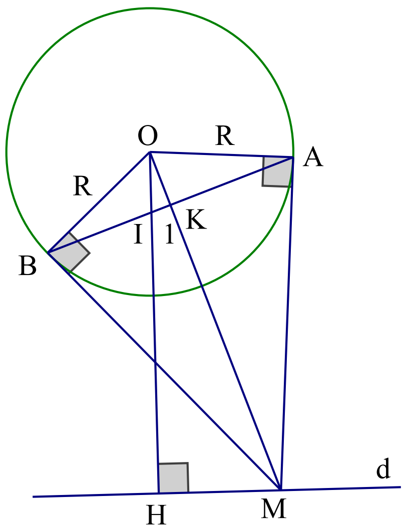
e. Chứng minh: $OH \perp AB, OM \perp AB \Rightarrow O, H, M$ thẳng hàng.

Bài 14. Cho $(O;R)$ và M là một điểm di động trên đường thẳng d cố định nằm ngoài (O). Từ M kẻ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm). Gọi H là hình chiếu vuông góc của (O) trên d, dây cung AB cắt OH, OM lần lượt tại I, K. Chứng minh

a) $OI.OH = OK.OM = R^2$.

b) AB luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên d.

Lời giải



a) Xét ΔOIK và ΔOMH có:

$\widehat{O_1} : chung$; $\widehat{H} = \widehat{K} = 90^0 \Rightarrow \Delta OIK \# \Delta OMH\,(gg) \Rightarrow \dfrac{OI}{OM} = \dfrac{OK}{OH} \Leftrightarrow OI.OH = OM.OK$

Mà ΔOAM vuông tại A, nên theo hệ thức lượng ta có: $OA^2 = OK.OM \Rightarrow OI.OH = OK.OM = R^2$

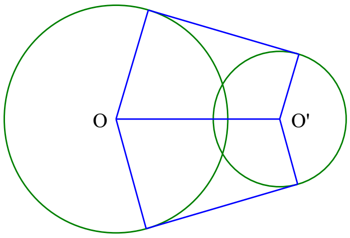
b) Ta có (O) cố định và đường thẳng d cố định $\Rightarrow$ điểm H cố định

Ta lại có $OI = \dfrac{R^2}{OH} \Rightarrow I$ cố định, nên AB qua I cố định.

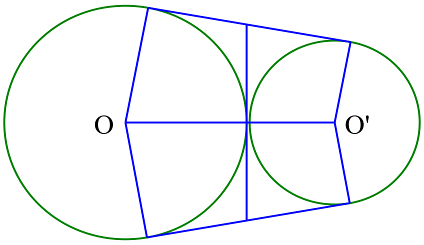
CHỦ ĐỀ 3
BÀI TOÁN LIÊN QUAN VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI VÀ TIẾP TUYẾN CHUNG CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

Tiếp tuyến chung của hai đường tròn là đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn đó. Ta có các trường hợp tiếp tuyến chung của hai đường tròn như sau:

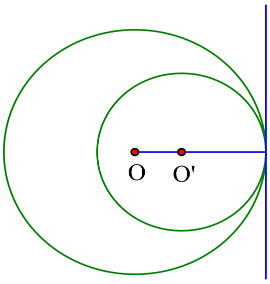
1) Hai đường tròn cắt nhau có hai tiếp tuyến chung ngoài.



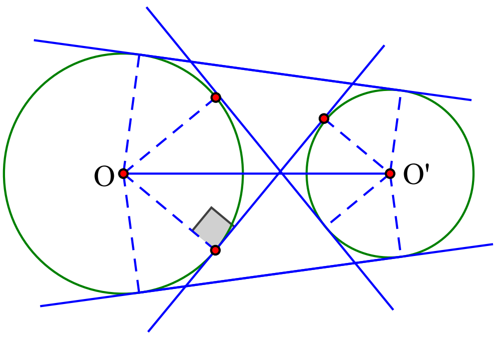
2) Hai đường tròn tiếp xúc ngoài có hai tiếp tuyến chung ngoài và một tiếp tuyến chung.



3) Hai đường tròn tiếp xúc trong chỉ có một tiếp tuyến chung.



4) Hai đường tròn ngoài nhau có hai tiếp tuyến chung ngoài và hai tiếp tuyến chung trong.



Chú ý:

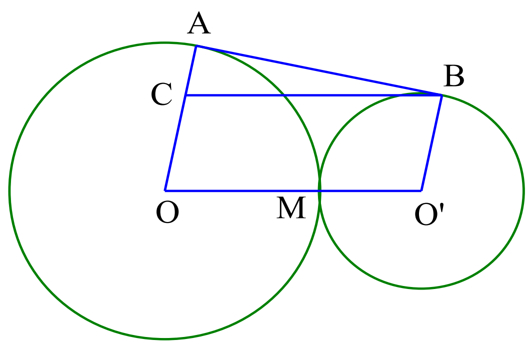
- Hai đường tròn chứa nhau không có tiếp tuyến chung.
- Hai đường tròn đồng tâm không có tiếp tuyến chung.

DẠNG 1

CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN HAI ĐƯỜNG TRÒN TIẾP XÚC NHAU

Bài 1. Cho hai đường tròn $(O;8cm)$ và $(O';5cm)$ tiếp xúc ngoài tại M. Gọi AB là tiếp tuyến chung của hai đường tròn $\left(A\in(O);B\in(O')\right)$. Tính độ dài AB (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai)

Lời giải



Vẽ $BC//OO'(C\in OA)$ (1)

Ta có: $OA//O'B(\perp AB)$ (2)

Từ $(1)(2)\Rightarrow OCBO'$ là hình bình hành

Do đó $OC=O'B=5(cm);BC=OO'=13(cm)$

Có: $AC=OA-OC=8-5=3(cm)$

ΔABC vuông tại $A\Rightarrow AB=\sqrt{BC^2-AC^2}$

$=\sqrt{13^2-3^2}\approx 12,65(cm)$

Bài 2. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ các đường kính AOB, $AO'C$. Gọi DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn. Gọi M là giao điểm của BD và CE.

a) Tính $\widehat{DAE}$.

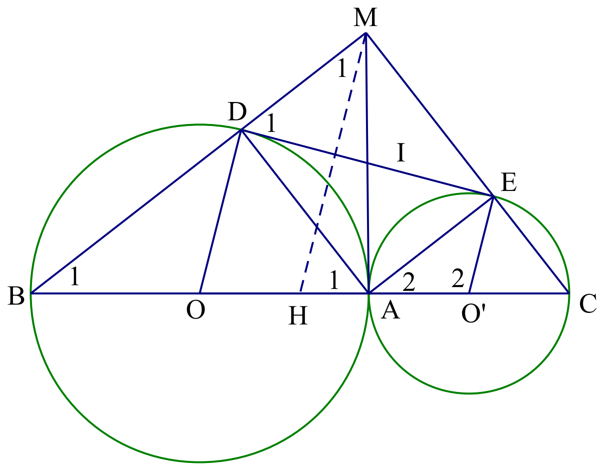
b) Tứ giác $ADME$ là hình gì ? Vì sao ?

c) Chứng minh rằng MA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

dv Chứng minh: $MD.MB=ME.MC$.

ev Gọi H là trung điểm của BC, chứng minh rằng $MH\perp DE$.

Lời giải



a) Ta có: $\begin{cases}\widehat{A_1}=\left(180^0-\widehat{O_1}\right):2\\ \widehat{A_2}=\left(180^0-\widehat{O_2}\right):2\end{cases} \Rightarrow \widehat{A_1}+\widehat{A_2}=90^0 \Rightarrow \widehat{DAE}=90^0$

b) Có $ADME$ là hình chữ nhật (tứ giác có 3 góc vuông là hình chữ nhật)

c) Gọi I là giao điểm của DE và $AM \Rightarrow ID = IA$

$\Delta IAO = \Delta IDO(ccc) \Rightarrow \widehat{IAO} = \widehat{IDO} = 90^0 \Rightarrow MA \perp OA \equiv A \in (O)$

Chứng minh tương tự: $MA \perp O'A \equiv A \in (O')$

Vậy MA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn

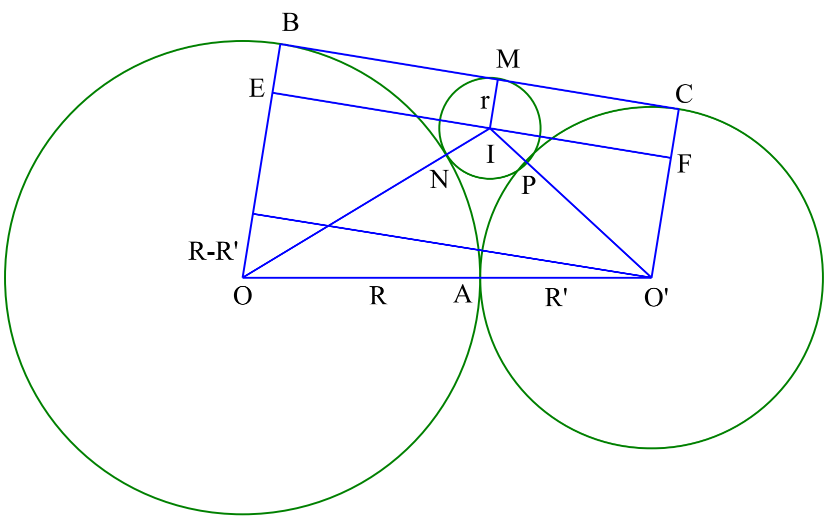
d. Ta có: $\Delta MAB(\widehat{A}=90^0), AD \perp MB \Rightarrow MA^2 = MD.MB$

$\Delta MAC(\widehat{A}=90^0), AE \perp MC \Rightarrow MA^2 = ME.MC \Rightarrow MB.MD = ME.MC$

e) $\widehat{M_1}+\widehat{D_1}=\widehat{B_1}+\widehat{BMA}=90^0 \Rightarrow MH \perp DE$

Bài 3. Cho hai đường tròn $(O;5cm)$ và $(O';3cm)$ tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài $BC\left(B\in(O);C\in(O')\right)$. Vẽ đường tròn $(I;r)$ tiếp xúc với BC tại M và tiếp xúc ngoài với hai đường tròn (O) và (O') tại N và P. Tính độ dài r (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải



Qua I vẽ $EF//BC$

$$\Rightarrow BC = EF = \sqrt{(R+R')^2-(R-R')^2} = 2\sqrt{RR'}\ (1)$$

$$IE = \sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}\ (2)$$

$$IF = \sqrt{(R'+r)^2-(R'-r)^2} = 2\sqrt{R'r}\ (3)$$

Cộng vế theo vế của $(1)(2)(3)$ ta được:

$$IE + IF = EF \Leftrightarrow 2\sqrt{Rr} + 2\sqrt{R'r} = 2\sqrt{RR'}$$

$$\Rightarrow \sqrt{r}\left(\sqrt{R}+\sqrt{R'}\right) = \sqrt{RR'} \Rightarrow r\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2 = 5.3$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{15}{8+2\sqrt{15}} = \frac{15}{15,75} = 0,95(cm)$$

Vậy $r = 0,95(cm)$.

Bài 4. Cho ba điểm J, I, J' cùng nằm trên 1 đường thẳng theo thứ tự đó. Cho biết $IJ = 10cm$, $IJ' = 4CM$. Vẽ đường tròn (O) đường kính IJ và đường tròn (O') đường kính IJ'.

a) Chứng minh (O) và (O') tiếp xúc ngoài ở I.

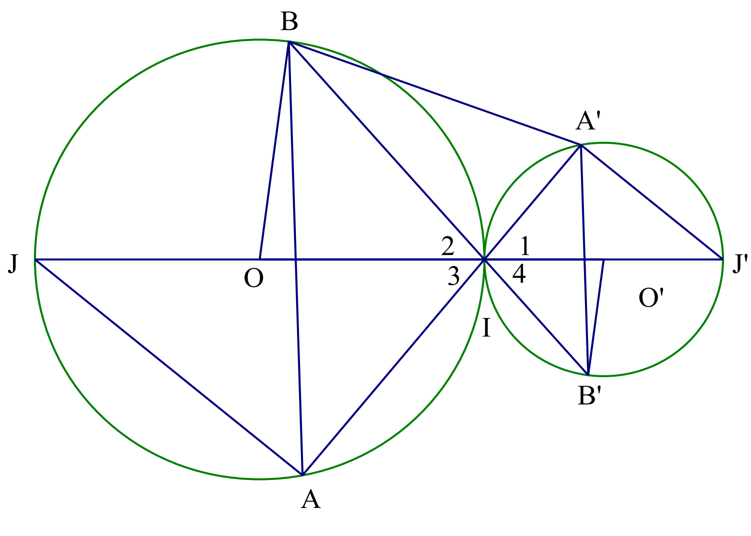
b) Gọi A là 1 điểm trên đường tròn (O), tia AI cắt (O') ở A'. Chứng minh rằng $\Delta AIJ \# \Delta A'IJ'$.

c) Qua điểm I kẻ 1 cát tuyến cắt (O) ở B (B và A thuộc hai nửa mặt phẳng bờ IJ), cắt đường tròn (O') ở B'. Chứng minh: $\Delta IAB \# \Delta IA'B'$.

d) Chứng minh rằng: $\Delta OAB \# \Delta O; A'B'$.

e) Tứ giác $ABA'B'$ là hình gì vì sao ?

Lời giải



a) Ta có: $OO' = OI + O'I$. Vậy Hai đường tròn tiếp xúc ngoài tại I

b) Xét ΔAIJ và $\Delta A'IJ'$ có: $\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'} = 90^0 \\ \widehat{I_1} = \widehat{I_2} \end{cases} \Rightarrow \Delta AII \# \Delta A'IJ'$

c) $\Delta AII \# \Delta A'IJ'(gg) \Rightarrow \dfrac{IA}{IA'} = \dfrac{IJ}{JI'} = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2}\ (1)$

$\Delta OIB \# \Delta O'IB'(gg) \Rightarrow OB // O'B' \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{B_1'} \Rightarrow \dfrac{IB}{IB'} = \dfrac{OB}{O'B'} = \dfrac{5}{2}\ (2)$

Từ $(1)(2) \Rightarrow \dfrac{IA}{IA'} = \dfrac{IB}{IB'} = \dfrac{5}{2}; \widehat{AIB} = \widehat{A'IB} \Rightarrow \Delta IAB \# \Delta IA'B'(cgc)$

d)

$\Delta IAB \sim \Delta IA'B'(cgc) \Rightarrow \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{IA}{IA'} = \dfrac{5}{2}; \dfrac{OA}{O'A'} = \dfrac{OB}{O'B'} = \dfrac{5}{2} \Rightarrow \dfrac{OA}{O'A'} = \dfrac{OB}{O'B'} = \dfrac{AB}{A'B'} \Rightarrow \Delta AOB \sim \Delta A'O'B'$

e) $\Delta AOB \# \Delta A'O'B' \Rightarrow \widehat{OBA} = \widehat{O'B'A'}; \widehat{OBI} = \widehat{O'B'I'} \Rightarrow \widehat{ABI} = \widehat{AB'I'} \Rightarrow AB // A'B'$

Tứ giác $ABA'B'$ có hai cạnh đối song song vậy là hình thang.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

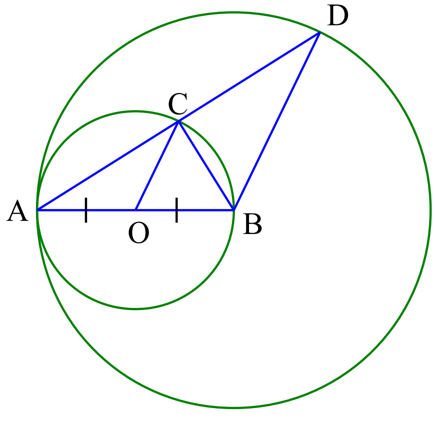
Bài 5. Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB. Vẽ các đường tròn $(O;OA)$ và $(B;BA)$. Kẻ một đoạn thẳng qua A cắt hai đường tròn (O) và (B) théo thứ tự tại C và D.

a) Chứng minh Hai đường tròn (O) và (B) tiếp xúc tại A.

b) Chứng minh $AB = CD$.

c) Chứng minh $OC // BD$.

Lời giải



a) Ta có A, O, B thẳng hàng (1)

$OB = AB - OA\ (2)$

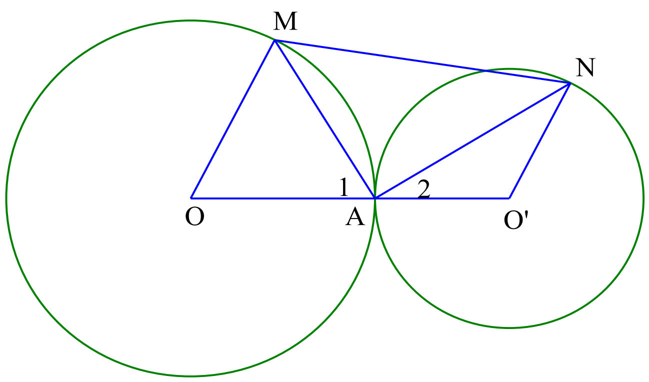
Từ $(1)(2) \Rightarrow (O;OA)$ và $(B;BA)$ tiếp xúc tại A

b) ΔABC nội tiếp đường tròn (O) có cạnh AB là đường kính nên tam giác này vuông tại $C \Rightarrow BC \perp AD \Rightarrow AC = CD$

c) OC là đường trung bình của $\Delta ABD \Rightarrow OC // BD$

Bài 6. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ hai bán kính OM và $O'N$ song song với nhau thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ OO'. Tam giác MAN là tam giác gì?

Lời giải



Ta có ΔOAM cân tại $O \Rightarrow \widehat{AOM} = 180^0 - 2\widehat{A_1}$ (1)

$\Delta O'AN$ cân tại $O' \Rightarrow \widehat{AO'N} = 180^0 - 2\widehat{A_2}$ (2)

Cộng $(1)(2)$ theo vế, ta được:

$\widehat{AOM} + \widehat{AO'N} = 360^0 - 2\left(\widehat{A_1} + \widehat{A_2}\right)$

$\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \dfrac{360^0 - \left(\widehat{AOM} + \widehat{AO'N}\right)}{2}$ (3)

Mà $\widehat{AOM} + \widehat{AO'N} = 180^0$

Từ $(3) \Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \dfrac{360^0 - 180^0}{2} = 90^0$

Ta có: $\widehat{MAN} = 180^0 - \left(\widehat{A_1} + \widehat{A_2}\right) = 90^0$

Vậy ΔMAN vuông tại A

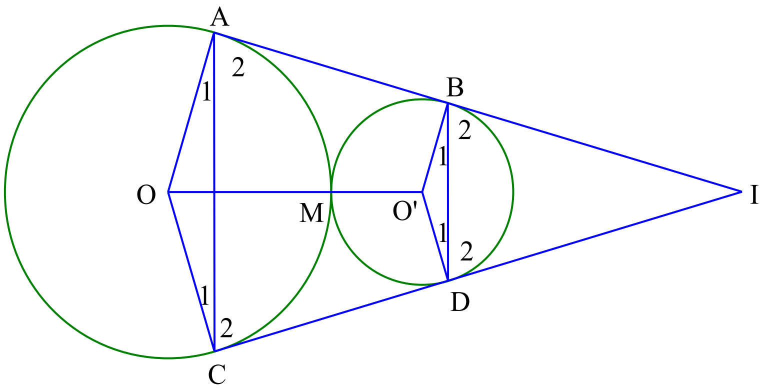
Bài 7. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R)$ tiếp xúc ngoài tại M. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài AB và CD với $A, C \in (O)$ và $B, D \in (O')$.

a) Chứng minh $\Delta IBD \# \Delta IAC$.

b) Chứng minh $\Delta BO'D \# \Delta AOC$.

c) Chứng minh $BD // AC$.

Lời giải



a) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có: $IB = ID; IA = IC$

Hai tam giác IBD và IAC cùng cân tại I

Hai tam giác này có góc ở đỉnh chung là góc

$\widehat{AIC} \Rightarrow \Delta IBD \# \Delta IAC$

b) Do $\Delta IBD \# \Delta IAC \Rightarrow \widehat{B_2} = \widehat{A_2}$

$$\Rightarrow \underbrace{90^0 - \widehat{B_2}}_{\widehat{B_1}} = \underbrace{90^0 - \widehat{A_2}}_{\widehat{A_1}} \left(\widehat{B} = \widehat{A} = 90^0\right)$$

Hai tam giác cân $BO'D$ và AOC có một góc ở đáy bằng nhau ($\widehat{B_1} = \widehat{A_1}$) nên $\Delta BO'D \# \Delta AOC$

c) Ta có: $\widehat{B_2} = \widehat{A_2}$, hai góc này ở vị trí đồng vị và bằng nhau nên $BD // AC$

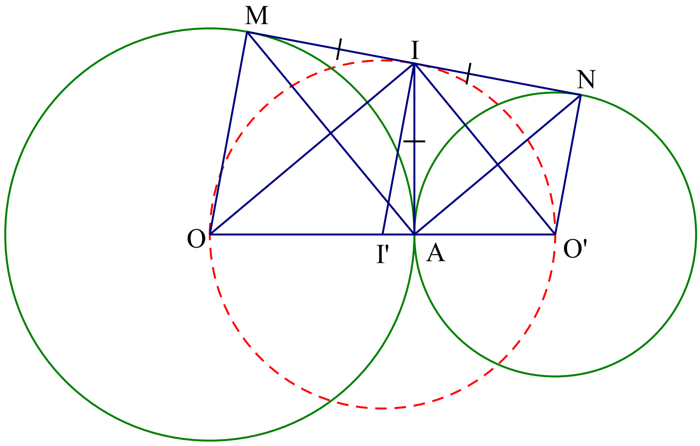
Bài 8. Cho hai đường tròn tâm O_1 và tâm O_2 tiếp xúc ngoài tại A. Tiếp tuyến chung ngoài có tiếp điểm với hai đường tròn lần lượt ở M và N. Tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn tại A cắt MN tại I.

a) Chứng minh tam giác MAN và OIO' là các tam giác vuông.

b) Xác định vị trí tường đối của đường thẳng MN với đường tròn đường kính OO'.

c) Tính $S_{OIO'}$ biết bán kính của hai đường tròn tâm O và O' lần lượt bằng $48cm$ và $27cm$.

Lời giải



a) Ta có: $IM = IA$ và $IN = IA$ nên $IM = IA = IN$

Tam giác MAN là tam giác vuông ở đỉnh A

Do đó OI và OI' lần lượt là phân giác của hai góc kề bù $\widehat{MIA}$ và $\widehat{AIN}$ nên $OI \perp IO' = I$

Tam giác IOO' vuông tại đỉnh I

b) Gọi I' là trung điểm của OO' thì $II' = IO' = I'O'$, nên II' là bán kính của đường tròn qua ba điểm O, I, O'

Mặt khác tứ giác $OMNO'$ là hình thang, II' là đường trung bình của hình thang này, do đó $II'//OM; OM \perp MN \Rightarrow II' \perp MN = I$

Vậy đường thẳng MN là tiếp tuyến của đường tròn qua ba điểm O, I, O' tại điểm I

c) Tam giác OIO' vuông tại I ta có đường cao IA, nên ta có:

$IA^2 = OA.O'A = 48.27 \Longrightarrow IA = 36(cm)$

Diện tích tam giác OIO' là: $S_{OIO'} = \dfrac{OO'.IA}{2} = \dfrac{75.36}{2} = 1350\left(cm^2\right)$.

Bài 9. Cho đường tròn (O) đường kính AB và C là điểm nằm giữa A và O. Vẽ đường tròn tâm (I) có đường kính CB.

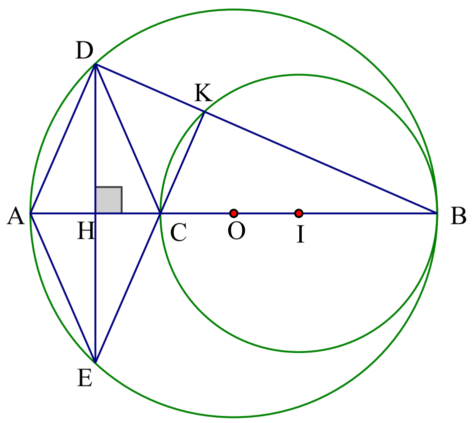
a) Xét vị trí tương đối của (I) và (O).

b) Kẻ dây DE của (O) vuông góc với AC tại trung điểm H của AC. Tứ giác $ADCE$ là hình gì?

c) Gọi K là giao điểm của đoạn thẳng DB và (I). Chứng minh ba điểm E, C, K thẳng hàng.

d) Chứng minh HK là tiếp tuyến của (I).

Lời giải



a) Ta có (O) và (I) tiếp xúc trong với nhau

b) Tứ giác $ADCE$ là hình thoi

c) Có: $CK \perp AB, AD \perp DB \Rightarrow CK // AD$, mà $CE // AD \Rightarrow B, K, D$ thẳng hàng

d) Ta có: $\widehat{HKD} = \widehat{HDK}; \widehat{IKB} = \widehat{IBK} \Rightarrow \widehat{HKD} + \widehat{IKB} = \widehat{HDK} + \widehat{IBK} = 90^0 \Rightarrow \widehat{IKH} = 90^0$ đpcm

Bài 10. Cho đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC với B thuộc (O), C thuộc (O'). Tiếp tuyến chung trong tại A cắt tiếp tuyến chung ngoài BC ở I.

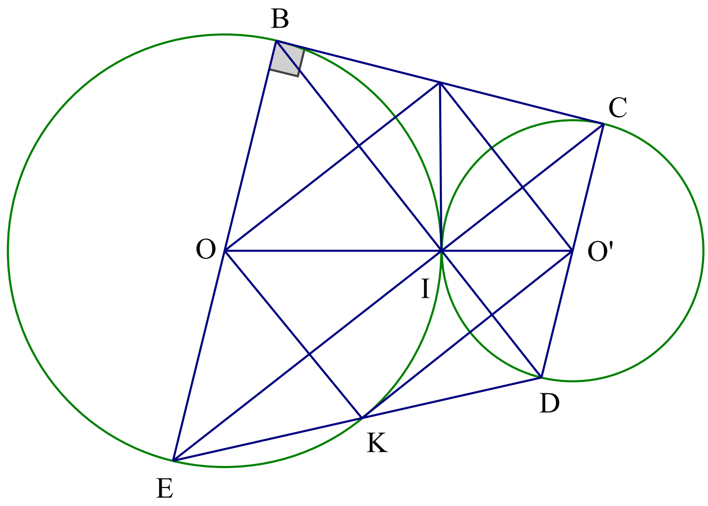
a) Vẽ đường kính BOD và $CO'E$. Chứng minh các bộ ba điểm B, A, E và C, A, D thẳng hàng.

b) Chứng minh $\Delta BAC, \Delta DAE$ có diện tích bằng nhau.

c) Gọi K là trung điểm của DE. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp $\Delta OKO'$ tiếp xúc với BC .

d) Cho $OA = 4,5cm; O'A = 2cm$. Tính AI, BC, CA.

Lời giải



a) Xét ΔABC, có $BI = IC = AI \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại $A \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^0$

Lại có: $\widehat{BAD} = \widehat{CAE} = 90^0 \Rightarrow$ đpcm

b) Ta có: $\Delta BAD \# \Delta EAC(gg) \Rightarrow AD.AE = AB.AC \Rightarrow S_{ABC} = S_{DAE}$

c) Có $\lozenge OIO'K$ là hình chữ nhật (hình bình hành có 1 góc vuông)

Vậy đường tròn ngoại tiếp $\Delta OKO'$ chính là đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật, có đường kính là IK mà: $IK \perp BC \equiv I$

d) Ta có: $AI^2 = OA.O'A = 4,5.2 = 9 \Rightarrow AI = 3cm$

Xét $\Delta BCD(\widehat{B} = 90^0) \Rightarrow \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{BC^2} + \dfrac{1}{BD^2} = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{36} = \dfrac{5}{36} \Rightarrow AB = 2,68cm$

Xét $\Delta ABC(\widehat{A} = 90^0) \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow CA^2 = BC^2 - AB^2 = 36 - 7,2 \Rightarrow AC = 5,4cm$

Bài 11. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài BC với $B \in (O), C \in (O')$. Đường thẳng vuông góc với OO' kẻ từ A cắt BC ở M.

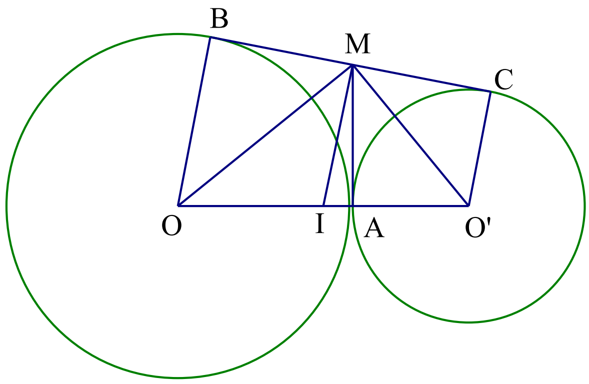
a) Tính MA theo R và r.

b) Tính diện tích tứ giác $BCO'O$ theo R và r.

c) Tính diện tích ΔBAC theo R và r.

d) Gọi I là trung điểm của OO'. Chứng minh rằng BC là tiếp tuyến của đường tròn $(I;IM)$.

Lời giải



a) Chứng minh được: $\widehat{O'MO} = 90^0$

tính được: $MA = \sqrt{Rr}$

b) Chứng minh $S_{BCOO'} = (R+r)\sqrt{Rr}$

c) Chứng minh được: $\Delta BAC \# \Delta OMO' \Rightarrow \frac{S_{BAC}}{S_{OMO'}} = \left(\frac{BC}{OO'}\right)^2 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{S_{OMO'}.BC^2}{(OO')^2} = \frac{4Rr\sqrt{Rr}}{R+r}$

d) Tứ giác $OBCO'$ là hình thang vuông tại B và C có IM là đường trung bình $\Rightarrow IM \perp BC = \{M\}$.

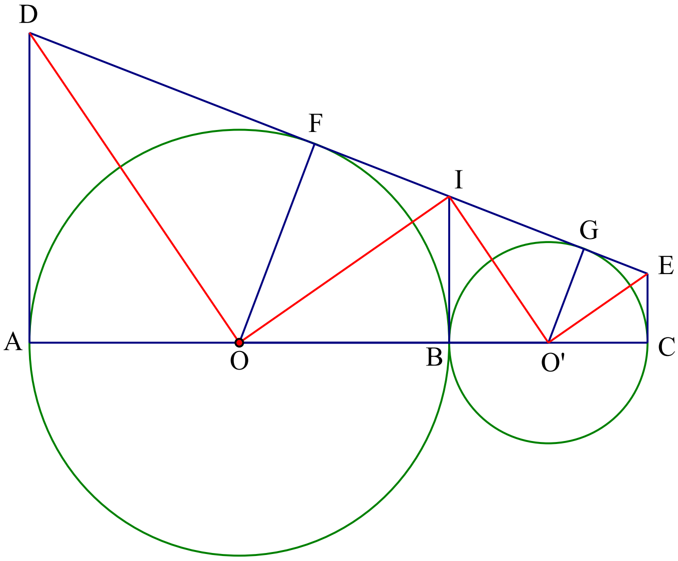
Bài 12. Cho 3 điểm A, B, C theo thứ tự đó trên một đường thẳng và $AB = 4BC$. Trên cùng một nửa măt phẳng bờ AC vẽ nửa đường tròn tâm O đường kính AB và nửa đường tròn tâm O' có đường kính BC. Tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn có tiếp điểm với đường tròn (O) ở F với nửa đường tròn (O') ở G, cắt các tiếp tuyến vẽ từ A và C của hai nửa đường tròn đó ở D và E. Tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn ở B cắt DE ở I.

a) Chứng minh các tam giác OIO', OID, $O'IE$ là các tam giác vuông.

b) Đặt $O'C = a$ (a là độ dài cho trước). Tính BI, EG và AD theo a.

c) Tính diện tích tứ giác $ADEC$ theo a.

Lời giải



a) Theo tính chất hai tia phân giác của hai góc kề bù ta có: $\Delta IOO'$ vuông tại I , ΔOID vuông tại $O, \Delta IO'E$ vuông tại O'

b) Ta có: $OB = 2BC = 4a$

$\Delta IOO'(\hat{I} = 90^0) \Rightarrow IB \perp OO' \Rightarrow IB^2 = OB.O'B = 4a^2 \Rightarrow IB = 2a$

$\Delta IO'E(\widehat{O'} = 90^0) \Rightarrow O'G^2 = EG.GI \Rightarrow GE = \dfrac{O'G^2}{GI} = \dfrac{a^2}{2a} = \dfrac{a}{2}\left(IG = IB = IF = 2a\right) \Rightarrow AD = 8a$

c) Ta có: $S_{ACED} = \dfrac{1}{2}(EC + AD).AC = \dfrac{1}{2}(8a + \dfrac{a}{2}).10a = 42,5a^2$

Bài 13. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài tiếp xúc (O) và (O') lần lượt ở B và C. Tiếp tuyến chung trong cắt BC ở I. Gọi E,F thứ tự là giao điểm của IO với AB của IO' với AC.

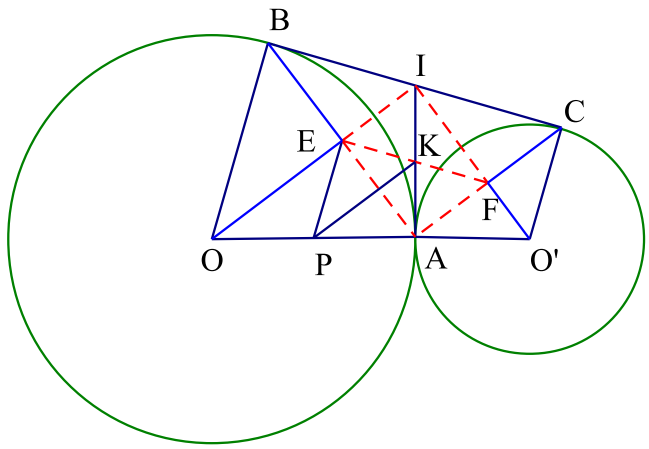
a) Chứng minh bốn điểm A,E,I,F cùng thuộc một đường tròn, xác định tâm K của đường tròn này.

b) Chứng minh: $IE.IO + IF.I'O = \dfrac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2\right)$.

c) Gọi P là trung điểm của OA. Chứng minh PE tiếp xúc với (K).

d) Cho OO' cố định và có độ dài $2a$. Tìm điều kiện của R và R' để diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Lời giải



a) Chứng minh được tứ giác $AEIF$ là hình chữ nhật và K là trung điểm của AI

b) Có: $IE.IO = IB^2 = \dfrac{BC^2}{4}; IF.IO' = IC^2 = \dfrac{BC^2}{4} \Rightarrow 2\left(IE.IO + IF.IO'\right) = AB^2 + AC^2$

c) PK là đường trung bình của ΔAOI và trung trực của EA

Ta có: $\Delta PEK = \Delta PAK \Rightarrow \widehat{PEK} = \widehat{PAK} \Rightarrow \widehat{PEK} = 90^0 \Rightarrow$ đpcm

d) $\Delta ABC \# \Delta IOO' \Rightarrow \dfrac{S_{ABC}}{S_{IOO'}} = \left(\dfrac{BC}{OO'}\right)^2 \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{S_{IOO'}.BC^2}{O'O^2}$

mà $BC = 2IA; O'O = 2a; S_{OIO'} = \dfrac{1}{2}.2a.IA = a.IA \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{IA^2}{a}$

$IA^2 = R.R' \le \left(\dfrac{R+R'}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow IA$ lớn nhất bằng a khi $R = R'$.

Bài 14. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB, C là một điểm bất kỳ nằm giữa A và B. Vẽ đường tròn tâm I, đường kính CA; đường tròn tâm (K), đường kính CB.

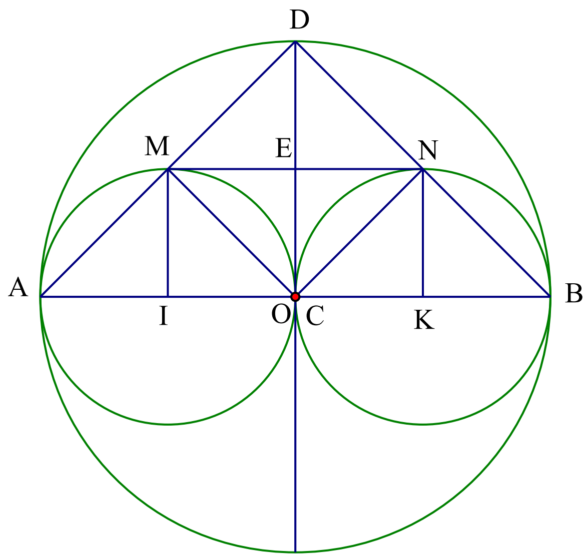
a) Hai đường tròn (I) và (K) có vị trí như thế nào đối với nhau.

b) Đường vuông góc với AB tại C cắt đường tròn (O) ở D và E. DA cắt đường tròn (I) ở M, DB cắt đường tròn (K) ở N.

c) Xác định vị trí của C trên đường kính AB sao cho MN có độ dài lớn nhất.

d) Xác định vị trí của điểm C trên đường kính AB sao cho tứ giác $DMCN$ có diện tích lớn nhất.

Lời giải



a) Đường tròn (I) và đường tròn (K) tiếp xúc ngoài nhau tại C (vì $IK = IC + CK$)

b) Vì AC là đường kính của (I) nên ΔAMC vuông tại M

Tương tự ta có ΔBNC vuông tại N; ΔDAB vuông tại D

Suy ra tứ giác $DMCN$ là hình chữ nhật

Gọi E là giao điểm của MN và DC. Ta có $\Delta EMC, \Delta IMC$ cân

$\Rightarrow \widehat{EMC} = \widehat{ECM}; \widehat{IMC} = \widehat{ICM}$

Mà $\widehat{ICM} + \widehat{ECM} = \widehat{ACD} = 90^0$, do đó $\widehat{IMN} = 90^0 \Rightarrow MN \perp IM$

Tương tự ta cũng có $MN \perp NK \Rightarrow MN$ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K).

c) Vì $DMCN$ là hình chữ nhật nên $MN = CD \Rightarrow MN$ có độ dài lớn nhất khi CD có độ dài lớn nhất

Ta có $CD \le OD = R$ (không đổi), dấu "=" xảy ra khi $C \equiv O$

Vậy khi $C \equiv O$ thì MN có độ dài lớn nhất là R

d) $S_{DMCN} = DM.CN$, ΔCAD có $\widehat{ACD} = 90^0; CM \perp AD; DC^2 = DM.DA \Rightarrow DM = \dfrac{DC^2}{DA}$

ΔDCB có $DN=\dfrac{DC^2}{DB}$. Do đó $S_{DMCN}=\dfrac{DC^2}{DA}.\dfrac{DC^2}{DB}=\dfrac{DC^4}{DA.DB}$

Lại có $DA.DB=DC.AB\left(=2S_{ADB}\right)\Rightarrow S_{DMCN}=\dfrac{DC^4}{DC.DB}=\dfrac{DC^3}{2R}\le\dfrac{R^3}{2R}=\dfrac{R^2}{2}\left(CD\le R\right)$

Vậy diện tích tứ giác $DMCN$ lớn nhất khi điểm C trùng với điểm O.

DẠNG 2

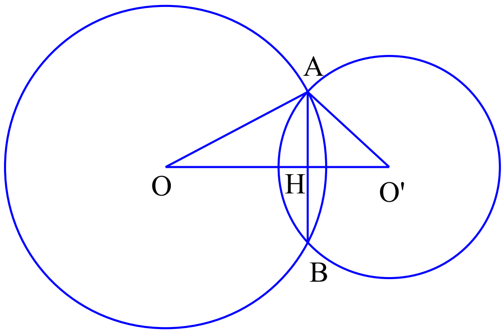
CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN HAI ĐƯỜNG TRÒN CẮT NHAU

Bài 1. Cho hai đường tròn $(O;12cm)$ và $(O';5cm)$, $OO'=13cm$.

a) Chứng tỏ rằng hai đưuòng tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

b) Gọi A,B là giao điểm của hai đường tròn (O) và (O'). Chứng minh rằng OA là tiếp tuyến của đường tròn (O'), OA là tiếp tuyến của đường tròn (O). Tính độ dài AB.

Lời giải



a) Ta có: $12-5<13<12+5\left(R-R'<d<R+R'\right)$ nên hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm phân biệt

b) $OA^2+O'A^2=12^2+5^2=169; O'O^2=13^2=169$

$\Delta OAO'$ có: $OA^2+O'A^2=O'O^2$, theo định lý Pytago đảo tam giác $\Delta OAO'$ vuông tại A

Có $OA\perp O'A$ do đó OA là tiếp tuyến của đường tròn (O') và $O'A$ là tiếp tuyến của đường tròn (O)

$O'O$ là đường trung trực của đoạn AB

Gọi H là giao điểm của $O'O$ và AB nên $AH.O'O=OA.O'A\Rightarrow AH=\dfrac{OA.O'A}{O'O}=\dfrac{12.5}{13}=\dfrac{60}{13}(cm)$

Vậy $AB=2AH=\dfrac{120}{13}(cm)$.

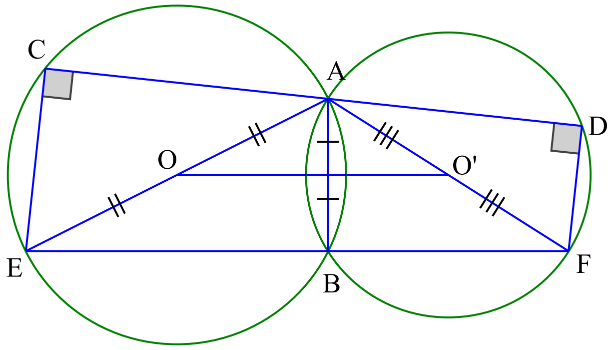
Bài 2. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng đi qua A (không đi qua hai tâm) cắt (O) tại C và cắt (O') tại D. Vẽ các đường kính AOE và $AO'F$.

a) Chứng minh ba điểm E,B,F thẳng hàng.

b) Chứng minh $EC//FD$.

c) Chứng minh $OO'=\dfrac{1}{2}EF$.

Lời giải



a) ΔABE nội tiếp đường tròn (O) có cạnh AE là đường kính nên $\widehat{ABE}=90^0$

Tương tự: $\widehat{ABF}=90^0$

$\Rightarrow \widehat{EBF}=\widehat{ABE}+\widehat{ABF}=180^0$

Vậy E,B,F thẳng hàng.

b) Tương tự ta có:

$\widehat{ACE}=\widehat{ADF}=90^0 \Rightarrow EC\perp CD; FD\perp CD$

$\Rightarrow EC//FD(\perp CD)$

c) Ta có: $OA=OE;O'A=O'F$

$\Rightarrow OO'$ là đường trung bình của $\Delta AEF \Rightarrow OO'=\dfrac{1}{2}EF$

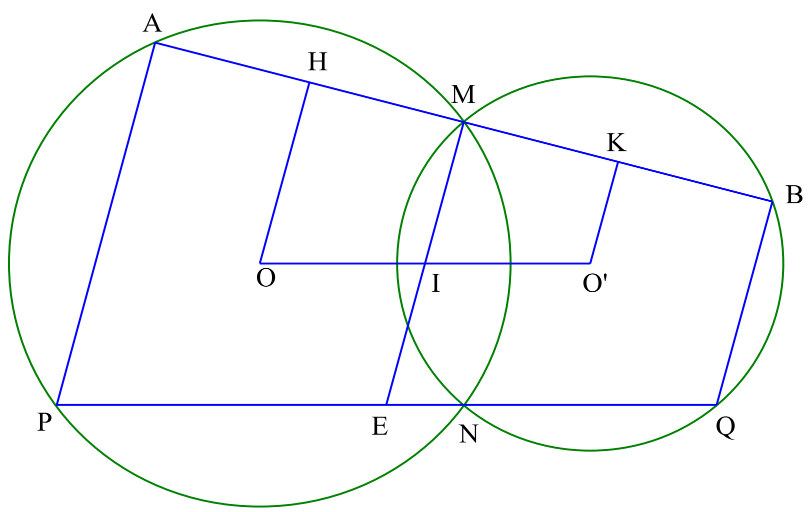
Bài 3. Cho hai đường tròn (O) và (O') giao nhau tại M và N. Gọi I là trung điểm của OO'. Đường thẳng kẻ qua M vuông góc MI cắt đường tròn (O) và (O') lần lượt ở A và B. Hai đường thẳng vuông góc với AB tại A và B cắt đường tròn (O) ở P, (O') ở Q.

a) Chứng minh rằng M là trung điểm của AB.

b) MI cắt PQ ở E, chứng minh: $EP=EQ$.

c) Chứng minh: $IH=IK$.

Lời giải



a) Kẻ: $OH \perp AM; O'K \perp MB \Rightarrow OH // O'K$

Tứ giác $HKOO'$ là hình thang, $MI \perp AB \Rightarrow \begin{cases} MI // OH \\ IO // IO' \end{cases} \Rightarrow MH = MK$

Ta lại có: $OH \perp AM \Rightarrow HA = HM = MK = KB \Rightarrow$ đpcm

b) Ta có ME là đường trung bình của hình thang $ABQP \Rightarrow EP = EQ$

c) Xét ΔHIK, có IM là đường trung tuyến, đường cao $\Rightarrow \Delta HIK$ cân tại I (đpcm).

Bài 4. Cho góc vuông xOy. Lấy các điểm I và K lần lượt trên các tia Ox, Oy. Đường tròn $(I; OK)$ cắt tia Ox tại M (I nằm giữa O và M), đường tròn $(K; OI)$ cắt tia Oy tại N (K nằm giữa O và N).

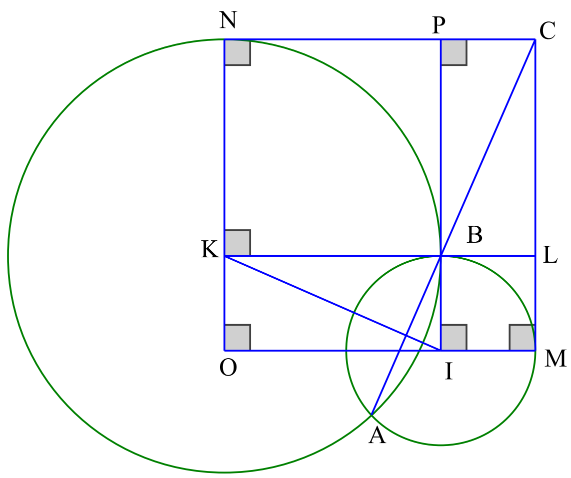
a) Chứng minh (I) và (K) luôn cắt nhau.

b) Tiếp tuyến tại M của (I), tiếp tuyến tại N của (K) cắt nhau tại C. Chứng minh tứ giác $OMCN$ là hình vuông.

c) Gọi A, B là các giao điểm của (I) và (K) trong đó B ở miền trong góc xOy. Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

d) Giả sử I và K theo thứ tự di động trên các tia Ox và Oy sao cho $OI + OK = a$ không đổi. Chứng minh đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



a) $|OI - OK| < IK < OI + OK \Rightarrow$ Ta có (I) và (K) luôn cắt nhau

b) Do $OI = NK; OK = IM \Rightarrow OM = ON$

Mặt khác $OMCN$ là hình chữ nhật $OMCN$ là hình vuông

c) Gọi L là giao điểm của KB và MC; P là giao điểm của IB và $NC \Rightarrow OBKI$ là hình chữ nhật và $BLMI$ là hình vuông $\Rightarrow \Delta BLC = \Delta KIO \Rightarrow \widehat{LBC} = \widehat{OKI} = \widehat{BIK}$

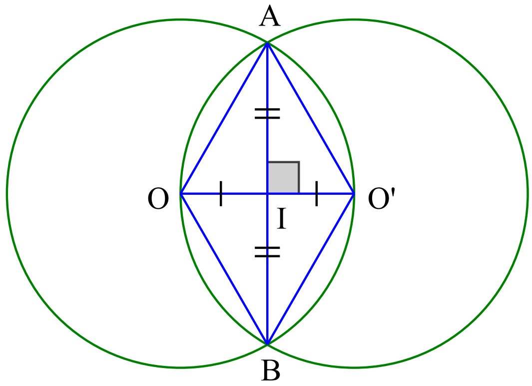
Mà: $\widehat{BIK} + \widehat{IBA} = 90^0 \Rightarrow \widehat{LBC} + \widehat{IBA} = 90^0$, có: $\widehat{LBC} + \widehat{LBI} + \widehat{IBA} = 180^0$

d) Có $OMCN$ là hình vuông cạnh a cố định $\Rightarrow C$ cố định và AB luôn đi qua C

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R)$ cắt nhau tại A và B sao cho tâm đường tròn này nằm trên đường tròn kia. Tính theo R diện tích tứ giác $OAO'B$.

Lời giải



Ta có: $OA = OB = O'A = O'B = R$

$\lozenge OAO'B$ là hình thoi $\Rightarrow S_{OAO'B} = \dfrac{OO'.AB}{2}$

$\Delta OAO'$ là tam giác đều có AI là đường cao

$AI = \dfrac{OA.\sqrt{3}}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}; AB = 2AI = R\sqrt{3}$

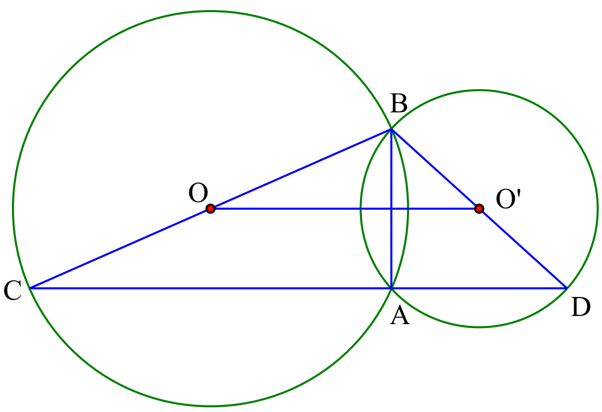
Do đó: $S_{OAO'B} = \dfrac{R.R\sqrt{3}}{2} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{2}$.

Bài 6. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A và B (O và O' thuộc hai nửa mặt phẳng bờ AB). Kẻ các đường kính BOC và $BO'D$.

a) Chứng minh rằng ba điểm C, A, D thẳng hàng.

b) Biết $OO' = 5cm, OB = 4cm, O'B = 3cm$. Tính diện tích tam giác BCD.

Lời giải



a) Cách 1: $\Delta BAC(AO = \frac{1}{2}BC) \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 90^0 \Rightarrow$ đpcm

Cách 2: ΔBCD có OO' là đường trung bình $\Rightarrow OO'//CD$ (1)

ΔABC có OI là đường trung bình $\Rightarrow OO'//CA$ (2)

Từ $(1)(2) \Rightarrow C, A, D$ thẳng hàng.

b) Ta có: $\Delta OBO'$ vuông tại $B \Rightarrow \Delta BCD$ vuông tại $B \Rightarrow S_{BCD} = \frac{1}{2}.BC.BD = \frac{1}{2}.8.6 = 24(cm^2)$

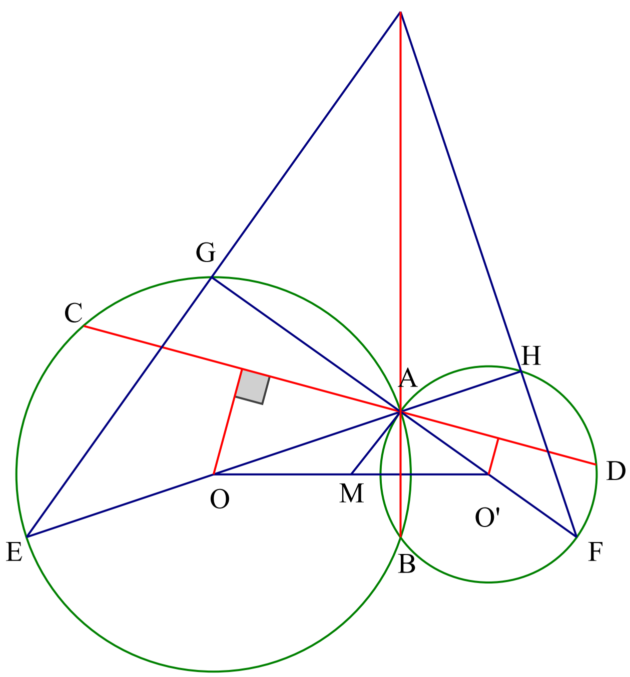
Bài 7. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Gọi M là trung điểm của OO'. Đường thẳng qua A cắt các đường tròn (O) và (O') lần lượt ở C và D.

a) Khi $CD \perp AB$. Chứng minh: $AC = AD$.

b) Khi CD đi qua A và không vuông góc với MA. Vẽ đường kính AE của (O), AE cắt (O') ở H. Vẽ đường kính AF của (O'), AF cắt (O) ở G.

- Chứng minh AB, EG, FH đồng quy.
- Tìm vị trí của CD để đoạn CD có độ dài lớn nhất.

Lời giải



Vẽ $OP \perp AC; O'Q \perp AD \Rightarrow \lozenge OPO'Q$ là hình thang vuông tại P và Q

a) Kẻ $OP, O'Q \perp CD \Rightarrow MA \perp CD$ và M là trung điểm của OO'

b) Xét ΔEAF có AB, FG, EH là ba đường cao nên đồng quy tại 1 điểm .

Ta có: $CD = 2PQ$

Hình thang $OPQO'$ vuông tại P và Q nên $OO' > PQ$

Vậy PQ lớn nhất khi $PQ//OO'$ hay tứ giác $OPQO'$ là hình chữ nhật.

DẠNG 3

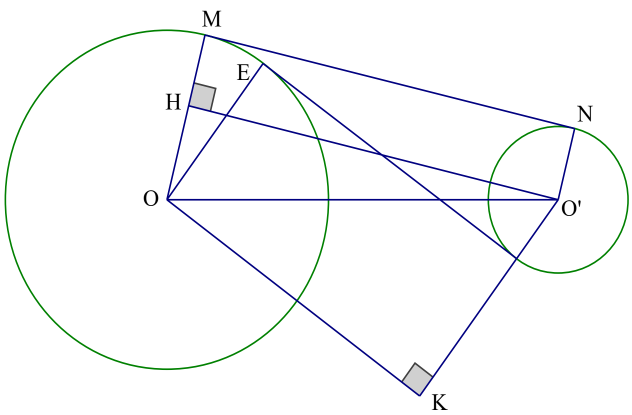
CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN HAI ĐƯỜNG TRÒN KHÔNG CẮT NHAU

Bài 1. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ ở ngoài nhau. Gọi MN là tiếp tuyến chung ngoài, EF là tiếp tuyến chung trong (M và E thuộc (O), N và F thuộc $(O;)$). Tính bán kính của đường tròn (O) và (O') trong các trường hợp sau:

a) $OO'=10cm, MN=8cm, EF=6cm$.

b) $OO'=13cm, MN=12cm, EF=5cm$.

Lời giải



a) Kẻ $O'H \perp OM; OK \perp O'F$

Ta có: $OH = R - r; O'K = R + r$,

mà $OH^2 = O'O^2 - MN^2 = 36; O'K^2 = O'O^2 - EF^2 = 64 \Rightarrow OH = 6; O'K = 8 \Rightarrow R = 7cm; r = 1cm$

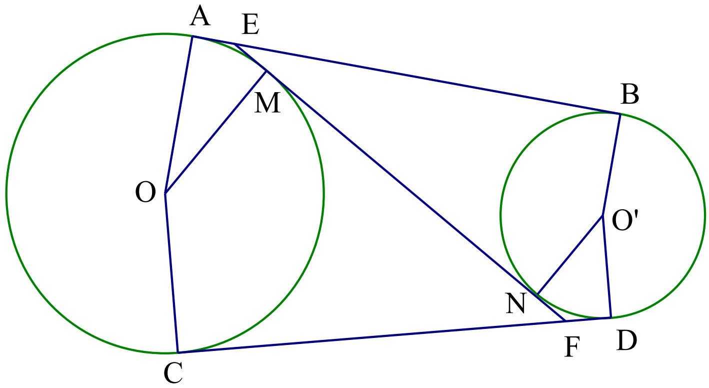
b) Tương tự tính được: $R = \dfrac{17}{2}cn, r = \dfrac{7}{2}cm$

Bài 2. Cho hai đường tròn (O) và (O') nằm ngoài nhau. Kẻ các tiếp tuyến chung ngoài AB và CD ($A, C \in (O); B, D \in (O')$). Tiếp tuyến chung trong MN cắt AB, CD theo thứ tự tại E, F, $(M \in (O), N \in (O'))$. Chứng minh:

a) $AB = EF$.

b) $EM = FN$.

Lời giải



a) Ta có: $AB = AE + BE = EM + EN$ và $CD = FD + FC = NF + NE$

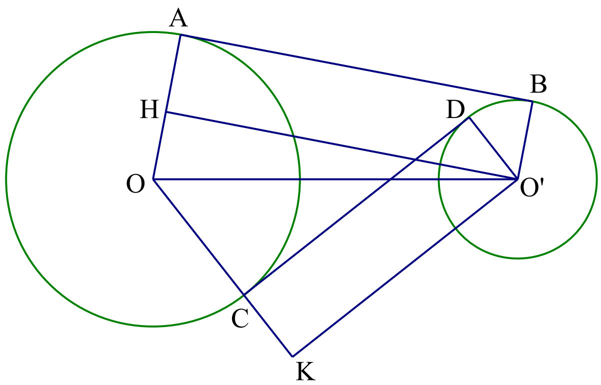
$\Rightarrow AB + CD = 2EF \Rightarrow AB = EF$

b) Ta có: $EM = AB - EB = EF - EN = NF$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Cho hai đường tròn $(O;6cm)$ và $(O';2cm)$ nằm ngoài nhau. Gọi AB là tiếp tuyến chung ngoài, CD là tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn ($A,C \in (O); B,D \in (O')$). Biết $AB = 2CD$, tính độ dài đoạn nối tâm OO'.

Lời giải



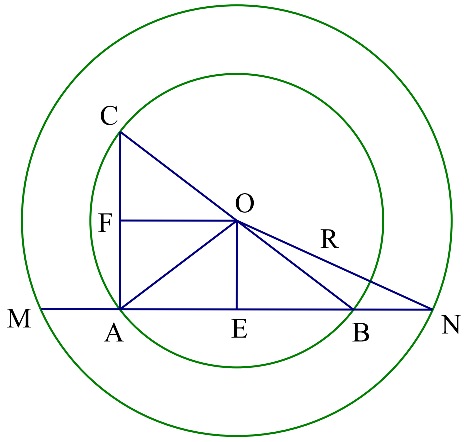
a) Kẻ $O'H \perp OA; O'K \perp OC$

Tính được: $OH = 4cm, OK = 8cm$,

Đặt $CD = x \Rightarrow AB = 2x; O'O^2 = 64 + x^2$ và $O'O^2 = 16 + 4x^2 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow OO' = \sqrt{80}cm$.

Bài 4. Cho hai đường tròn đồng tâm O, có bán kính lần lượt là R và r. Dây MN của đường tròn lớn cắt đường tròn nhỏ tại A và B. Gọi BC là đường kính của đường tròn nhỏ. Tính giá trị của biểu thức $\left(AC^2 + AM^2 + AN^2\right)$ theo R và r.

Lời giải



Kẻ $OE \perp AB; OF \perp AC$. Đặt $AC = a, AM = b, AN = c$

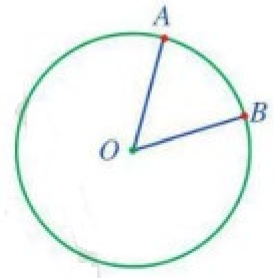
Ta có: $r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-b}{2}\right)^2 ; R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c+b}{2}\right)^2$

Chứng minh được: $a^2 + b^2 + c^2 = 2\left(r^2 + R^2\right)$

BÀI 4
GÓC Ở TÂM
GÓC NỘI TIẾP

1. Góc ở tâm

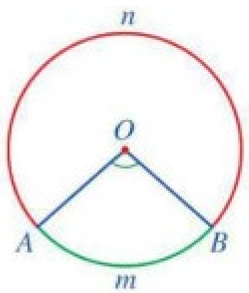
Góc ở tâm là góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn.



2. Cung. Số đo của cung

a. Cung

Mỗi phần đường tròn giới hạn bởi hai điểm A, B trên đường tròn gọi là cung AB, kí hiệu là $\overset{\frown}{AB}$.



Chú ý:

• Cung nằm bên trong góc ở tâm AOB được gọi là cung nhỏ, kí hiệu là $\overset{\frown}{AmB}$. Ta còn nói $\overset{\frown}{AmB}$ là cung bị chắn bởi góc AOB hay góc AOB chắn cung nhỏ AmB.

• Cung nằm bên ngoài góc ở tâm AOB gọi là cung lớn, kí hiệu là $\overset{\frown}{AnB}$.

b. Số đo của cung

• Số đo của cung nhỏ bằng số đo góc ở tâm chắn cung đó.

• Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa 360^0 và số đo cung nhỏ (có chung hai đầu mút với cung lớn)

• Số đo của nửa đường tròn bằng 180^0.

• Số đo cung AB, kí hiệu là sđ $\overset{\frown}{AB}$

Nhận xét:

• Khi hai mút của cung trùng nhau ta có "cung không" với số đo 0^0 và cung cả đường tròn có số đo bằng 360^0.

• Cung nhỏ có số đo nhỏ hơn 180^0, cung lớn có số đo lớn hơn 180^0. Cung nửa đường tròn có số đo bằng 180^0.

- Góc ở tâm chắn một cung mà cung đó là nửa đường tròn thì có số đo bằng 180^0.
- Trong một đường tròn (hay hai đường tròn bằng nhau), hai cung bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau. Trong hai cung, cung nào có số đo lớn hơn được gọi là cung lớn hơn.
- Nếu C là điểm nằm trên cung AB thì sđ$\overset{\frown}{ACB} =$ sđ$\overset{\frown}{ACB} +$ sđ$\overset{\frown}{CB}$

3. Góc nội tiếp

a. Định nghĩa:

Góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn gọi là góc nội tiếp.

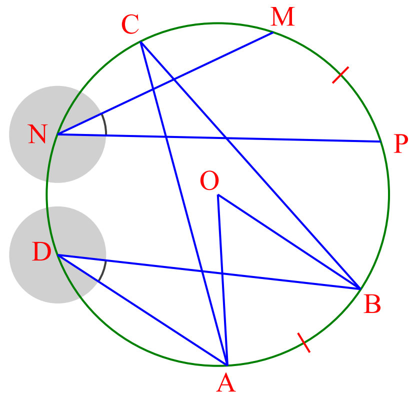
Cung nằm bên trong góc nội tiếp được gọi là cung bị chắn.

Định lí: Mỗi góc ở tâm có số đo gấp hai lần số đo góc nội tiếp cùng chắn một cung.

Hệ quả: Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn. Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn có số đo bằng 90^0.

Nhận xét:

- Số đo góc nội tiếp bằng nửa số đo góc ở tâm cùng chắn một cung.
- Trong một đường tròn, các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau và ngược lại.



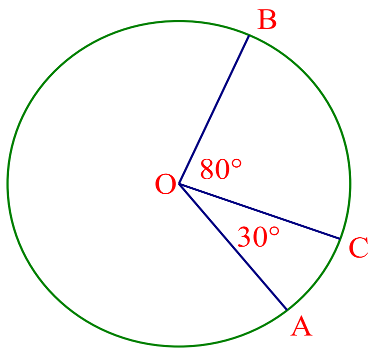
CHỦ ĐỀ 1
GÓC Ở TÂM

DẠNG 1
TÍNH SỐ ĐO GÓC Ở TÂM VÀ SỐ ĐO CUNG BỊ CHẮN

Phương pháp

- Đưa về cách tính số đo một góc của tam giác, tam giác.
- Để tính số đo của cung nhỏ, ta tính số đo của góc ở tâm tương ứng.
- Để tính số đo của cung lớn ta lấy 360^0 trừ đi số đo của cung nhỏ.
- Sử dụng tỉ số lượng giác của một góc nhọn để tính góc.

Bài 1. Tính số đo cung AB nhỏ trong hình vẽ dưới đây, biết rằng $\widehat{AOC}=30^0$ và $\widehat{BOC}=80^0$.



Bài 2. Cho đường tròn $(O;R)$. Vẽ dây $AB=R\sqrt{2}$. Tính số đo của hai cung AB.

Bài 3. Cho đường tròn O, hai tiếp tuyến của đường tròn tại A và B cắt nhau ở M, biết $\widehat{AMB}=65^0$.

a) Tính số đo $\widehat{AMO};\widehat{AOM}$.

b) Tính số đo góc ở tâm tạo bởi hai bán kính OA,OB.

c)Tính số đo cung nhỏ AB và số đo cung lớn AB.

Bài 4. Trên cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ của (O), cho hai điểm C và D sao cho cung $\overset{\frown}{AB}$ được chia thành ba cung bằng nhau ($\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DB}$). Bán kính OC và OD cắt dây AB lần lượt tại E và F.

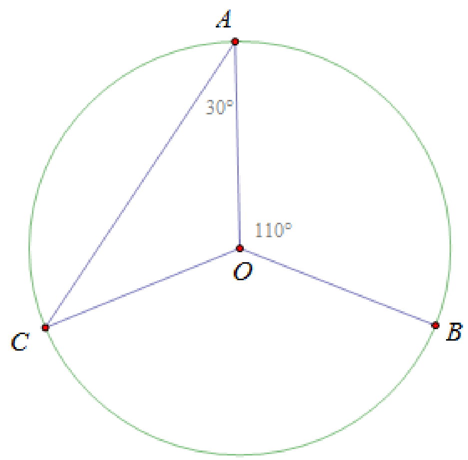
a) So sánh các đoạn thẳng AE và BF.

b) Chứng minh đường thẳng AB song song với đường thẳng CD.

Bài 5. Cho $(O;R)$ các dây AB,CD,EF có độ dài như sau $AB=R,CD=R\sqrt{2},EF=R\sqrt{3}$. Tính số đo các cung AB,CD,EF.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6. Cho hình vẽ sau:



a) Tính số đo cung nhỏ AB

b) Tính số đo cung nhỏ AC

c) Tính số đo cung lớn BC

Bài 7. Cho hai tiếp tuyến tại A và B cuả đường tròn (O) cắt nhau tại M , biết $\widehat{AMB} = 50^0$. Tính số đo cung AB nhỏ và số đo cung AB.

Bài 8. Cho đường tròn $(O;R)$. Vẽ dây AB sao cho số đo cung nhỏ AB bằng nửa số đo cung lớn AB. Tính diện tích tam giác ABC.

Bài 9. Cho $(O;R)$ và dây cung $MN = R\sqrt{3}$. Kẻ OK vuông góc với MN tại K. Tính:

a) Độ dài OK theo R.

b) Số đo các góc $\widehat{MOK}; \widehat{MON}$.

c) Số đo cung nhỏ và cung lớn $\overset{\frown}{MN}$.

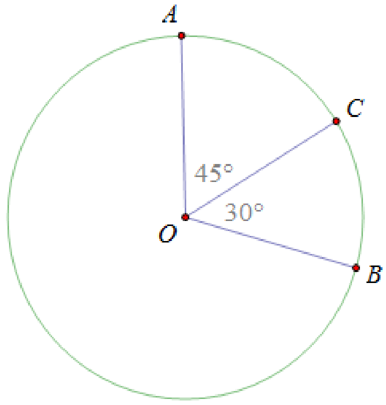
Bài 10. Cho đường tròn $(O;R)$, lấy điểm M nằm ngoài (O) sao cho $OM = 2R$. Từ M kẻ tiếp tuyến MA và MB với đường tròn (O) (A và B là các tiếp điểm) .

a) Tính $\widehat{AOM}$.

b) Tính $\widehat{AOB}$ và số đo cung nhỏ AB.

c) Biết đoạn thẳng OM cắt (O) tại C. Chứng minh C là điểm chính giữa của cung nhỏ AB.

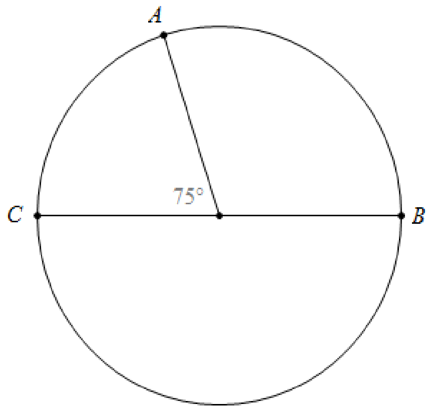
Bài 11. Cho hình vẽ sau:



a) Tính số đo cung nhỏ BC.

b) Tính số đo cung lớn AB.

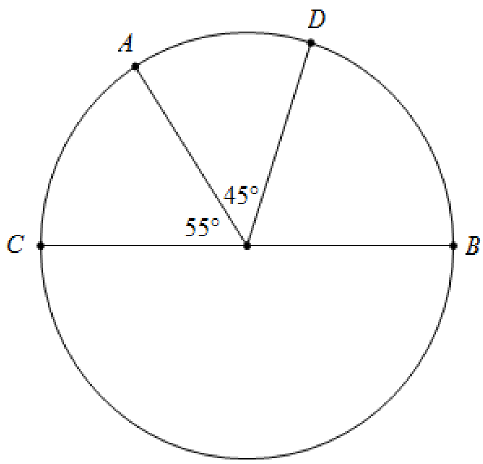
Bài 12. Cho đường tròn tâm O, đường kính BC. A là điểm trên đường tròn sao cho $\widehat{AOC} = 75^0$.



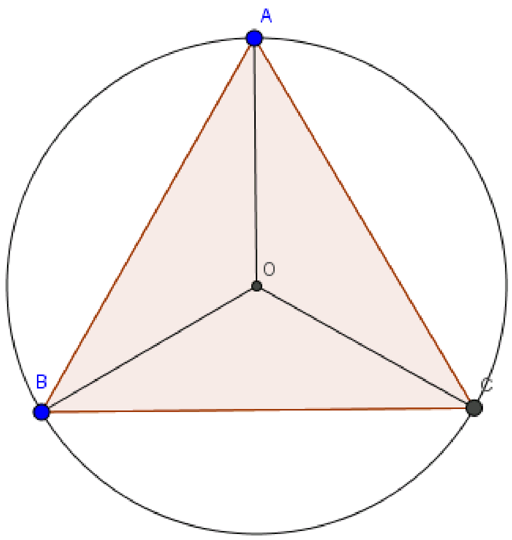
a) Tính số đo cung lớn BC

b) So sánh hai cung nhỏ AC và AB.

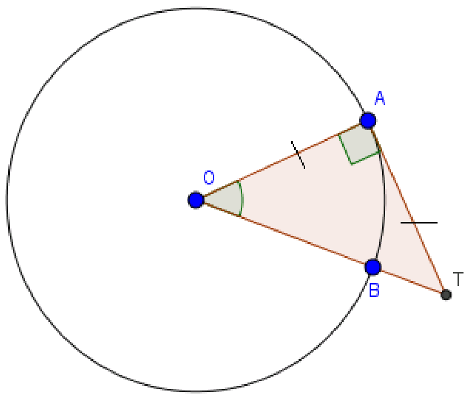
Bài 13. Cho hình vẽ sau, so sánh hai cung nhỏ CD và AB.



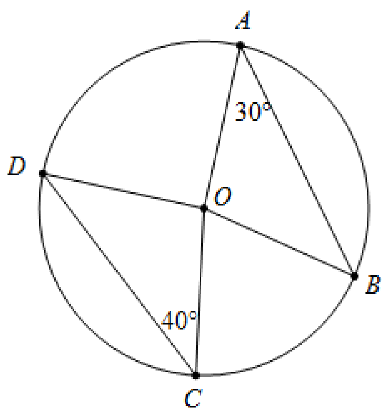
Bài 14. Cho hình vẽ sau, với ABC là tam giác đều, O là tâm đường tròn đi qua 3 điểm A, B, C. Tính số đo các cung tạo ra trong 3 điểm A, B, C.



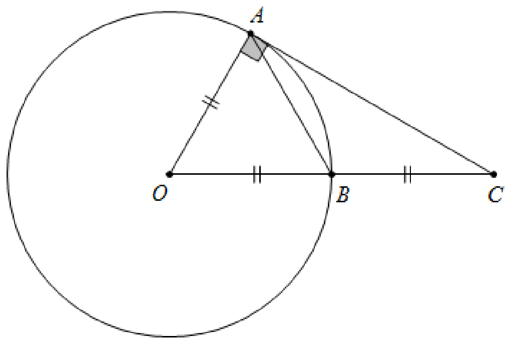
Bài 15. Cho hình vẽ sau, tính số đo cung lớn AB và góc $\widehat{ABO}$.



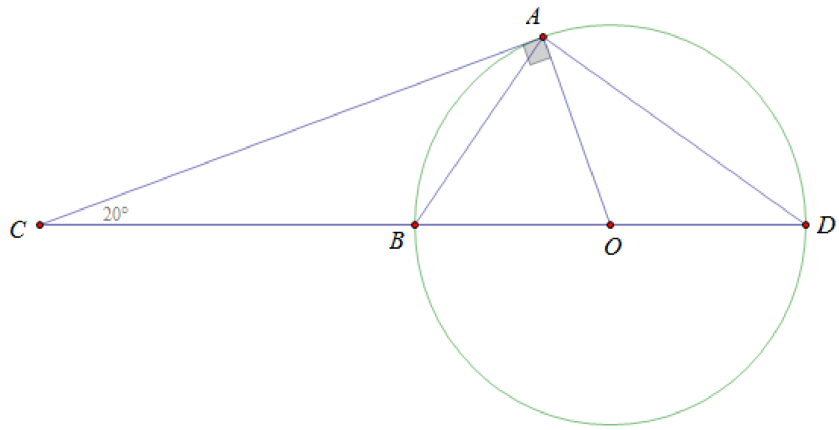
Bài 16. Cho hình vẽ sau, tính số đo cung nhỏ AB và cung lớn CD.



Bài 17. Cho hình vẽ sau, tính số đo cung lớn AB.



Bài 18. Cho hình vẽ sau:



a) Tính số đo cung nhỏ AB.

b) Tính góc $\widehat{ADC}$.

c) So sánh hai cung nhỏ AC và AD.

Bài 19. Cho đường tròn (O) đường kính AB, vẽ góc ở tâm $\widehat{AOC}=50^0$ với C nằm trên (O). Vẽ dây CD vuông góc với AB và dây DE song song với AB.

a) Tính số đo cung nhỏ $\overset{\frown}{BE}$.

b) Tính số đo cung $\overset{\frown}{CBE}$. Từ đó suy ra ba điểm C,O,E thẳng hàng.

Bài 20. Cho đường tròn $(O;R)$. Trên đường tròn lấy lần lượt các điểm A,B,C,D sao cho các cung AB,BC,CD có số đo lần lượt là $60^0;90^0;120^0$.

a) Tính số đo các góc ở tâm chắn các cung ấy và số đo các cung sau $\overset{\frown}{ABC}$; $\overset{\frown}{BCD}$; $\overset{\frown}{ACD}$.

b) Tính độ dài các dây cung AB,BC,CD theo R.

DẠNG 2
CHỨNG MINH HAI CUNG BẰNG NHAU

Phương pháp

Để chứng minh hai cung (của một đường tròn) bằng nhau ta chứng minh hai cung này có cùng một số đo

Chú ý: Trong một đường tròn, hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau

Ta có: $AB//CD \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$

Bài 1. So sánh các cung nhỏ trong hình vẽ dưới đây. Biết rằng $\widehat{MON} = 100^0; \widehat{ONP} = 20^0; \widehat{POQ} = 100^0$ $\widehat{MOQ} = 140^0$.

Bài 2. Cho tam giác ABC cân tại A. Vẽ dường tròn tâm O, đường kính BC. Đường tròn (O) cắt AB và AC lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh các cung nhỏ $\overset{\frown}{BM}$ và $\overset{\frown}{CN}$ có số đo bằng nhau.

b) Tính $\widehat{MON}$, biết $\widehat{BAC} = 40^0$.

Bài 3. Cho hai đường tròn đồng tâm $(O;R)$ và $\left(O;\dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right)$ trên đường tròn nhỏ lấy một điểm M. Tiếp tuyến tại M của đường tròn nhỏ cắt đường tròn lớn tại A và B. Tia OM cắt đường tròn lớn tại C.

a) Chứng minh rằng: $\overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{CB}$.

b) Tính số đo hai cung AB.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB và C là điểm chính giữa của nửa đường tròn. Trên các cung CA và CB lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\overset{\frown}{CM} = \overset{\frown}{BN}$. Chứng minh:

a) $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{CN}$.

b) $\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{CB}$.

Bài 5. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên nửa đường tròn lấy hai điểm C và D. Kẻ CH vuông góc với AB tại H, CH cắt (O) tại điểm thứ hai E. Kẻ AK vuông góc với CD tại K, AK cắt (O) tại điểm thứ hai F. Chứng minh:

a) Hai cung nhỏ $\overset{\frown}{CF}$ và $\overset{\frown}{DB}$ bằng nhau.

b) Hai cung nhỏ $\overset{\frown}{BF}$ và $\overset{\frown}{DE}$ bằng nhau.

Bài 6. Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O’) cắt nhau tại hai điểm A và B. Vẽ các đường kính AOE, AOF và BOC. Đường thẳng AF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D. Chứng minh rằng các cung nhỏ AB, CD, CE bằng nhau.

Bài 7. Cho đường tròn (O) đường kính AB và đường tròn (O’) đường kính AO. Các điểm C, D thuộc đường tròn (O) sao cho $B \in \overset{\frown}{CD}$ và $\overset{\frown}{BC} < \overset{\frown}{BD}$. Các dây AC và AD cắt đường tròn (O’) theo thứ tự tại E và F. Hãy so sánh:

a) Độ dài các đoạn thẳng OE và OF.

b) Số đo các cung $\overset{\frown}{AE}$ và $\overset{\frown}{AF}$ của đường tròn (O’) .

Bài 8. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AE. Gọi B, C, D là ba điểm trên nửa đường tròn, biết $\overset{\frown}{AC} = 2\overset{\frown}{AB}; \overset{\frown}{AD} = 3\overset{\frown}{AB}$

a) Chứng minh rằng: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD}$.

b) Chứng minh rằng: $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$.

c) Chứng minh cung AD và BC có chung điểm chính giữa.

Bài 9. Cho đường tròn O, trên nửa đường tròn đường kính AB lấy hai điểm C và D. Kẻ $CH \perp AB$ nó cắt đường tròn tại E. Kẻ $AK \perp DC$ nó cắt đường tròn tại F. Chứng minh rằng

a) $\overset{\frown}{CF} = \overset{\frown}{DB}$.

b) $\overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{DE}$.

Bài 10. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Qua trung điểm I của bán kính OB kẻ dây $CD \perp AB$. Kẻ dây CE song song với AB. Chứng minh rằng:

a) $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD}$.

b) E, O, D thẳng hàng.

c) ADBE là hình chữ nhật .

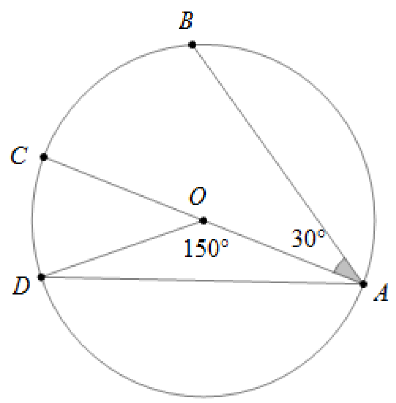
CHỦ ĐỀ 2
GÓC NỘI TIẾP

DẠNG 1
TÍNH SỐ ĐO GÓC, CUNG

Trong một đường tròn:

- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau và ngược lại.
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau
- Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90^0) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

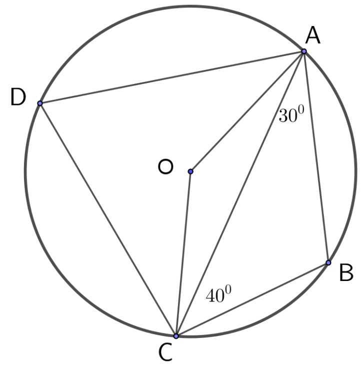
Bài 1. Dựa vào hình vẽ sau:



a) Tính số đo cung nhỏ CD.

b) Tính số đo cung nhỏ BD.

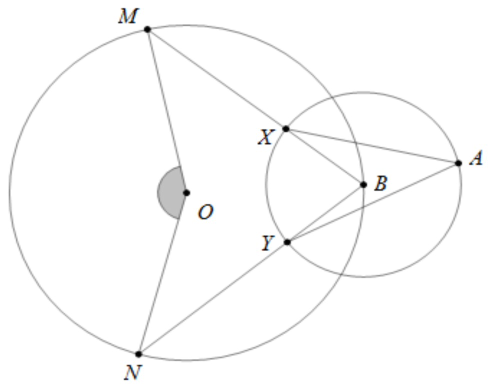
Bài 2. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O), biết $\widehat{BAC}=30^0, \widehat{BCA}=40^0$ (như hình vẽ bên).



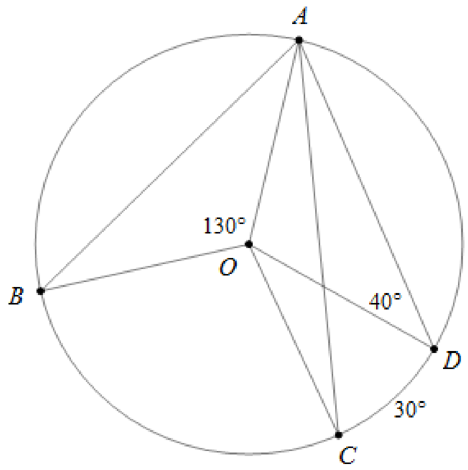
Tính số đo các góc $\widehat{ABC}, \widehat{ADC}, \widehat{AOC}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

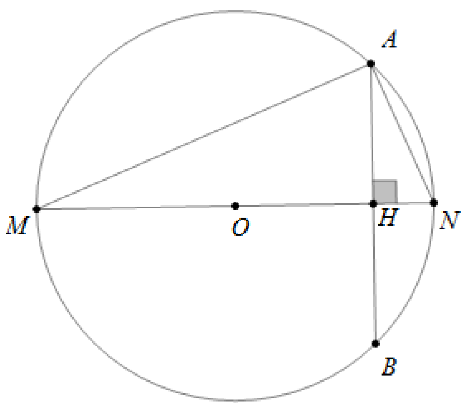
Bài 3. Dựa vào hình vẽ sau, biết cung nhỏ XY của đường tròn tâm B là 70^0. Tính $\widehat{MON}$



Bài 4. Dựa vào hình vẽ sau, hãy tính $\widehat{BAC}$.



Bài 5. Dựa vào hình vẽ sau, biết $HN = 5cm$, $AB = 10\sqrt{5}cm$. Tính bán kính đường tròng tâm O.



DẠNG 2
CHỨNG MINH CÁC GÓC BẰNG NHAU, CÁC CUNG BẰNG NHAU

Trong một đường tròn:

- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau và ngược lại.
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau
- Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90^0) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

Bài 1. Cho ΔABC cân tại A ($\widehat{A} < 90^0$). Vẽ đường tròn đường kính AB cắt BC tại D, cắt AC tại E.

a) Chứng minh $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DE}$.

b) Chứng minh $\widehat{CBE} = \dfrac{1}{2}\widehat{BAC}$.

Bài 2. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao AH và nội tiếp đường tròn tâm O, đường kính AM

a) Tính $\widehat{ACM}$.

b) Chứng minh $\widehat{BAH} = \widehat{OCA}$.

c) Gọi N là giao điểm của AH với (O). Tứ giác $BCMN$ là hình gì? Vì sao?

Bài 3. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Từ đỉnh A ta kẻ đường cao AH (H thuộc BC). Chứng minh rằng $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$.

Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$, AH là đường cao $(H \in BC)$. Chứng minh rằng: $AB.AC = 2R.AH$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và dây AC căng cung AC có số đo bằng 60^0.

a) So sánh các góc của ΔABC.

b) Gọi M và N lần lượt là điểm chính giữa của các cung AC và BC, hai dây AN và BM cắt nhau tại I. Chứng minh rằng CI là tia phân giác của $\widehat{ACB}$.

Bài 6. Trên cạnh huyền BC của tam giác vuông ABC về phía ngoài ta dựng hình vuông với tâm tại điểm O. Chứng minh rằng AO là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$.

Bài 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Vẽ AD là đường cao của tam giác ABC. Chứng minh rằng $\widehat{BAD} = \widehat{OAC}$.

Bài 8. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Đường phân giác trong góc A cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại D. Gọi I là tâm vòng tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh $DB = DC = DI$

Bài 9. Cho tam giác ABC $\left(\widehat{A} = 90^0\right)$ và $AB < AC$. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AB cắt BC tại D, cắt AC tại E. Chứng minh rằng $DB.CB = EB^2$.

Bài 10. Cho tam giác ABC có $\widehat{A}$ nhọn nội tiếp trong đường tròn $\left(O;R\right)$. Chứng minh rằng: $BC = 2R\sin\widehat{BAC}$.

Bài 11. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Lấy M là điểm tùy ý trên nửa đường tròn (M khác A và B). Kẻ MH vuông góc với AB ($H \in AB$). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn (O) vẽ hai nửa đường tròn tâm O_1, đường kính AH và tâm O_2, đường kính BH. Đoạn MA và MB cắt hai nửa đường tròn (O_1) và (O_2) lần lượt tại P và Q. Chứng minh rằng:

a) $MH = PQ$.

b) $\Delta MPQ \sim \Delta MBA$.

c) PQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O_1) và (O_2).

DẠNG 3
CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG, VUÔNG GÓC, BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

Bài 1. Cho đường tròn (O) đường kính AB, điểm D thuộc (O). Gọi E là điểm đối xứng với A qua D

a) ΔABE là tam giác gì?

b) Gọi K là giao điểm của EB với (O), Chứng minh rằng: $OD \perp AK$.

Bài 2. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R và điểm C nằm ngoài nửa đường tròn. CA cắt nửa đường tròn tại M, CB cắt nửa đường tròn tại N. Gọi H là giao điểm của AN và BM.

a) Chứng minh rằng $CH \perp AB$.

b) Gọi I là trung điểm của CH. Chứng minh rằng MI là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) .

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Cho đường tròn (O), đường kính AB, điểm D thuộc đường tròn. Gọi E là điểm đối xứng với A qua D.

a) Tam giác ABE là tam giác gì?

b) Gọi K là giao điểm của EB với (O). Chứng minh $OD \perp AK$.

Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Vẽ đường kính AF.

a) Tứ giác BFCH là hình gì?

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ba điểm H, M, F thẳng hàng.

c) Chứng minh $OM = \frac{1}{2}AH$.

Bài 5. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và điểm C di động trên nửa đường tròn đó. Vẽ đường tròn (I) tiếp xúc với đường tròn (O) tại C và tiếp xúc với đuuòng kính AB tại D, đường tròn này cắt CA, CB lần lượt tại các điểm thứ hai là M và N. Chứng minh rằng:

a) M, N, I thẳng hàng.

b) $ID \perp MN$.

Bài 6. Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường cao BM, CN cắt nhau tại H và cắt đường tròn lần lượt tại E và F.

a) Chứng minh rằng A là điểm chính giữa cung FE.

b) Chứng minh rằng EF // MN.

c) Chứng minh rằng $OA \perp MN$.

d) Chứng minh rằng AH không đổi khi A di động trên cung lớn BC.

e) Chứng minh rằng F đối xứng với H qua AB.

Bài 7. *Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Trên cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A ta lấy điểm P bất kỳ (P khác B và P khác C). Các đoạn PA và BC cắt nhau tại Q.

a) Giả sử D là một điểm trên đoạn PA sao cho $PD = PB$. Chứng minh rằng ΔPDB đều.

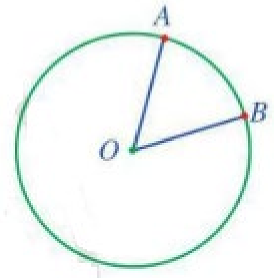
b) Chứng minh rằng $PA = PB + PC$.

c) Chứng minh hệ thức $\dfrac{1}{PQ} = \dfrac{1}{PB} + \dfrac{1}{PC}$.

BÀI 4
GÓC Ở TÂM
GÓC NỘI TIẾP

1. Góc ở tâm

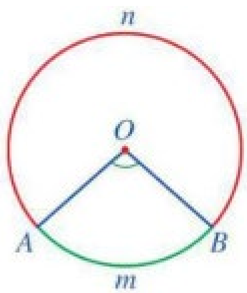
Góc ở tâm là góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn.



2. Cung. Số đo của cung

a. Cung

Mỗi phần đường tròn giới hạn bởi hai điểm A, B trên đường tròn gọi là cung AB, kí hiệu là $\overset{\frown}{AB}$.



Chú ý:

• Cung nằm bên trong góc ở tâm AOB được gọi là cung nhỏ, kí hiệu là $\overset{\frown}{AmB}$. Ta còn nói $\overset{\frown}{AmB}$ là cung bị chắn bởi góc AOB hay góc AOB chắn cung nhỏ AmB.

• Cung nằm bên ngoài góc ở tâm AOB gọi là cung lớn, kí hiệu là $\overset{\frown}{AnB}$.

b. Số đo của cung

• Số đo của cung nhỏ bằng số đo góc ở tâm chắn cung đó.

• Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa 360^0 và số đo cung nhỏ (có chung hai đầu mút với cung lớn)

• Số đo của nửa đường tròn bằng 180^0.

• Số đo cung AB, kí hiệu là sđ $\overset{\frown}{AB}$

Nhận xét:

• Khi hai mút của cung trùng nhau ta có "cung không" với số đo 0^0 và cung cả đường tròn có số đo bằng 360^0.

• Cung nhỏ có số đo nhỏ hơn 180^0, cung lớn có số đo lớn hơn 180^0. Cung nửa đường tròn có số đo bằng 180^0.

- Góc ở tâm chắn một cung mà cung đó là nửa đường tròn thì có số đo bằng 180^0.

- Trong một đường tròn (hay hai đường tròn bằng nhau), hai cung bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau. Trong hai cung, cung nào có số đo lớn hơn được gọi là cung lớn hơn.

- Nếu C là điểm nằm trên cung AB thì sđ$\overset{\frown}{ACB} =$ sđ$\overset{\frown}{ACB} +$ sđ$\overset{\frown}{CB}$

3. Góc nội tiếp

a. Định nghĩa:

Góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn gọi là góc nội tiếp.

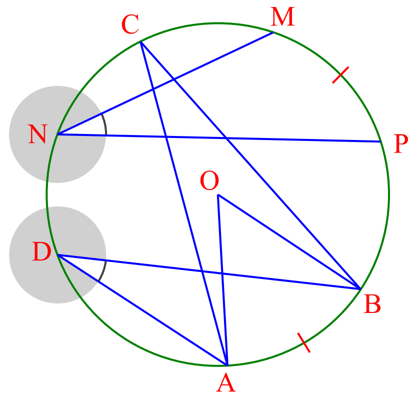
Cung nằm bên trong góc nội tiếp được gọi là cung bị chắn.

Định lí: Mỗi góc ở tâm có số đo gấp hai lần số đo góc nội tiếp cùng chắn một cung.

Hệ quả: Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn. Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn có số đo bằng 90^0.

Nhận xét:

- Số đo góc nội tiếp bằng nửa số đo góc ở tâm cùng chắn một cung.
- Trong một đường tròn, các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau và ngược lại.



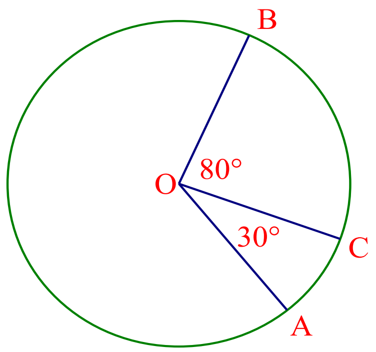
CHỦ ĐỀ 1
GÓC Ở TÂM

DẠNG 1
TÍNH SỐ ĐO GÓC Ở TÂM VÀ SỐ ĐO CUNG BỊ CHẮN

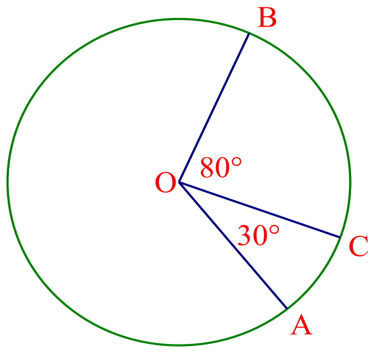
Phương pháp

- Đưa về cách tính số đo một góc của tam giác, tam giác.
- Để tính số đo của cung nhỏ, ta tính số đo của góc ở tâm tương ứng.
- Để tính số đo của cung lớn ta lấy 360^0 trừ đi số đo của cung nhỏ.
- Sử dụng tỉ số lượng giác của một góc nhọn để tính góc.

Bài 1. Tính số đo cung AB nhỏ trong hình vẽ dưới đây, biết rằng $\widehat{AOC} = 30^0$ và $\widehat{BOC} = 80^0$.



Lời giải



Điểm C nằm trên cung nhỏ AB nên ta có: $sd\,\overset{\frown}{AB} = sd\,\overset{\frown}{AC} + sd\,\overset{\frown}{BC} \quad (1)$

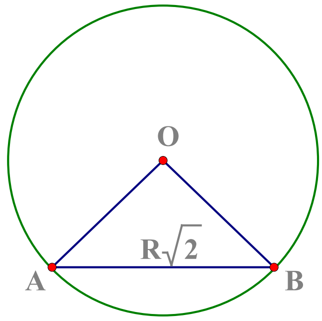
Góc ở tâm $\widehat{AOC}$ chắn cung AC nên $sd\,\overset{\frown}{AC} = \widehat{AOC} = 30^0$

Góc ở tâm $\widehat{BOC}$ chắn cung BC nên $sd\,\overset{\frown}{BC} = \widehat{BOC} = 80^0$

Thay vào (1) ta được: $sd\,\overset{\frown}{AB} = sd\,\overset{\frown}{AC} + sd\,\overset{\frown}{BC} = \widehat{AOC} + \widehat{BOC} = 30^0 + 80^0 = 110^0$

Bài 2. Cho đường tròn $(O;R)$. Vẽ dây $AB = R\sqrt{2}$. Tính số đo của hai cung AB.

Lời giải



Xét ΔAOB có: $OA^2 + OB^2 = R^2 + R^2 = 2R^2 = AB^2 \Rightarrow \Delta AOB$ vuông tại O

$\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{AB} = 90^0$

Vậy số đo cung lớn là $360^0 - 90^0 = 270^0$

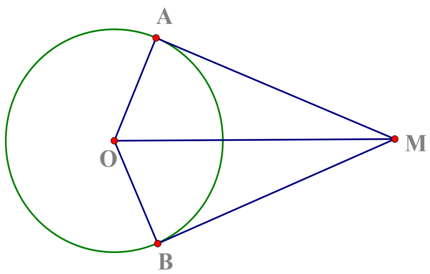
Bài 3. Cho đường tròn O, hai tiếp tuyến của đường tròn tại A và B cắt nhau ở M, biết $\widehat{AMB} = 65^0$.

a) Tính số đo $\widehat{AMO}; \widehat{AOM}$.

b) Tính số đo góc ở tâm tạo bởi hai bán kính OA, OB.

c)Tính số đo cung nhỏ AB và số đo cung lớn AB.

Lời giải



a) Chứng minh được OM là tia phân giác của $\widehat{AMB}$

$\Rightarrow \widehat{AMO} = 32,5^0 \Rightarrow \widehat{AOM} = 180^0 - 90^0 - 32,5^0 = 57,5^0$

b) $\widehat{AOB} = 360^0 - 180^0 - 65^0 = 115^0$

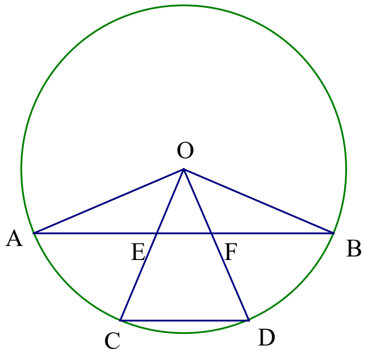
c) sđ $\overset{\frown}{AB}_{nho} =$ sđ $\widehat{AOB} = 115^0$; sđ $\overset{\frown}{AB}_{lon} = 360^0 - 115^0 = 245^0$

Bài 4. Trên cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ của (O), cho hai điểm C và D sao cho cung $\overset{\frown}{AB}$ được chia thành ba cung bằng nhau ($\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DB}$). Bán kính OC và OD cắt dây AB lần lượt tại E và F.

a) So sánh các đoạn thẳng AE và BF.

b) Chứng minh đường thẳng AB song song với đường thẳng CD.

Lời giải

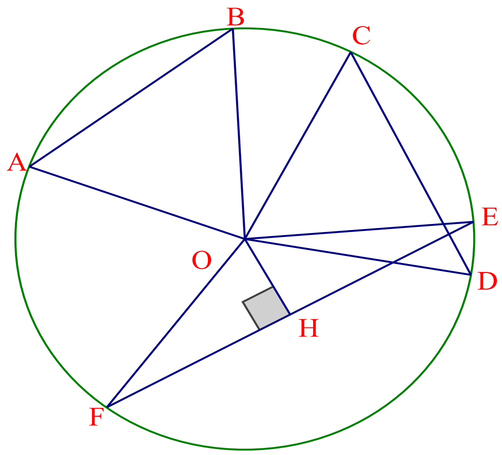


a) Chứng minh được: $\Delta OEA = \Delta OFB \Rightarrow AE = FB$

b) Chứng minh được: $\widehat{OEF} = \widehat{OCD}$, mà hai góc nằm ở vị trí đồng vị nên $AB // CD$

Bài 5. Cho $(O;R)$ các dây AB, CD, EF có độ dài như sau $AB = R, CD = R\sqrt{2}, EF = R\sqrt{3}$. Tính số đo các cung AB, CD, EF.

Lời giải



Ta có $OA = OB = AB (= R) \Rightarrow \Delta OAB$ đều $\Rightarrow \widehat{AOB} = 60^0 \Rightarrow sd\,\overset{\frown}{AB} = 60^0$

Lại có $OC^2 + OD^2 = R^2 + R^2 = 2R^2; CD^2 = \left(R\sqrt{2}\right)^2 = 2R^2$

ΔOCD có $OC^2 + OD^2 = CD^2$

Theo định lí Pitago đảo ta có ΔOCD vuông tại $O \Rightarrow sd\,\overset{\frown}{CD} = sd\,\widehat{COD} = 90^0$

Vẽ $OH \perp EF$ tại H, suy ra $EH = \dfrac{EF}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Xét ΔOHE vuông tại H, ta có $EH = \dfrac{OE\sqrt{3}}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \Delta OHE$ là nửa tam giác đều $\Rightarrow \widehat{EOH} = 60^0$

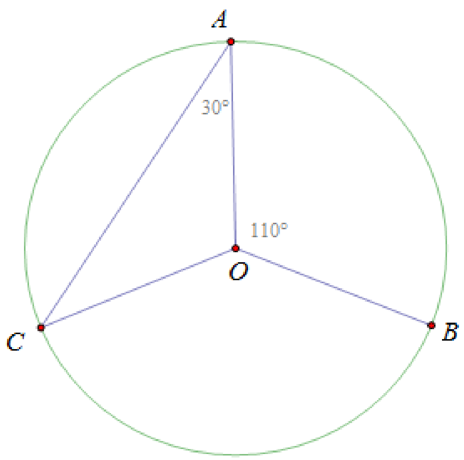
ΔOEF cân tại O (vì $OE = OF$) có OH là đường cao nên cũng là đường phân giác

Do đó $\widehat{EOH} = \dfrac{1}{2}\widehat{EOF} \Rightarrow \widehat{EOF} = 2.60^0 = 120^0$

sđ $\overset{\frown}{EF}$ = sđ $\widehat{EOF}$ = 120^0

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6. Cho hình vẽ sau:



a) Tính số đo cung nhỏ AB

b) Tính số đo cung nhỏ AC

c) Tính số đo cung lớn BC

Lời giải

a) Tính số đo cung nhỏ AB

Ta có $sd\,\overset\frown{AB}=\widehat{AOB}=110^0$ (góc ở tâm chắn cung AB)

b) Tính số đo cung nhỏ AC

Xét tam giác AOB có $OA=OB$ (bán kính)

$\Rightarrow \Delta AOB$ cân tại O $\Rightarrow \widehat{ACO}=\widehat{CAO}=30^0$

$\widehat{AOC}+\widehat{ACO}+\widehat{CAO}=180^0$ (tổng 3 góc của tam giác)

$\widehat{AOC}+30^0+30^0=180^0 \Rightarrow \widehat{AOC}=180^0-\left(30^0+30^0\right)=120^0$

$\Rightarrow sd\,\overset\frown{AC}=\widehat{AOB}=120^0$ (góc ở tâm chắn cung AC)

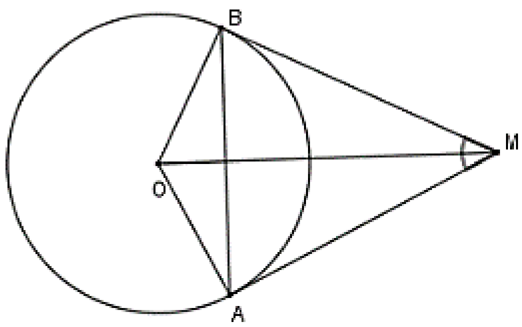
c) Tính số đo cung lớn BC

Ta có $\widehat{BOC}+\widehat{AOC}+\widehat{AOB}=360^0$

$\Rightarrow \widehat{BOC}+120^0+110^0=360^0 \Rightarrow \widehat{BOC}=130^0$

Bài 7. Cho hai tiếp tuyến tại A và B cuả đường tròn (O) cắt nhau tại M , biết $\widehat{AMB}=50^0$. Tính số đo cung AB nhỏ và số đo cung AB.

Lời giải



Vì MA, MB là hai tiếp tuyến của đường tròn (O)

nên OM là tia phân giác của $\widehat{AOB}$;

MO là tia phân giác của $\widehat{AMB}$

hay $\widehat{AMO} = \frac{1}{2}\widehat{AMB} = \frac{50^0}{2} = 25^0$

Mà tam giác OAM vuông tại A (do MA là tiếp tuyến)

nên $\widehat{MOA} = 90^0 - \widehat{AMO} = 65^0$

Mà OM là tia phân giác của $\widehat{AOB}$

Nên $\widehat{MOB} = \widehat{MOA} = 65^0$

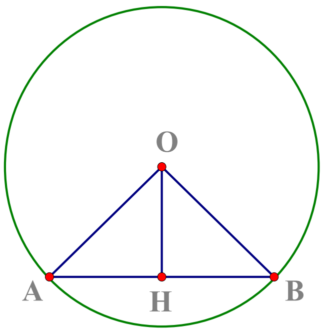
Suy ra $\widehat{AOB} = \widehat{MOB} + \widehat{MOA} = 65^0 + 65^0 = 130^0$

Nên số đo cung nhỏ AB là 130^0

Số đo cung lớn AB là $360^0 - 130^0 = 230^0$

Bài 8. Cho đường tròn $(O;R)$. Vẽ dây AB sao cho số đo cung nhỏ AB bằng nửa số đo cung lớn AB. Tính diện tích tam giác ABC.

Lời giải



Vì số đo cung nhỏ bằng nửa số đo cung lớn

$\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{AB}_{nho} = 360^0 : 3 = 120^0 \Rightarrow \widehat{AOB} = 120^0$

ΔAOB cân tại $O \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B} = 30^0$

Kẻ OH vuông góc với AB, ta được: $OH = OA.\sin A = R.\sin 30^0 = \frac{1}{2}R$

$\Rightarrow S_{AOB} = \frac{1}{2}AB.OH = \frac{1}{2}R\sqrt{3}.\frac{1}{2}R = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$

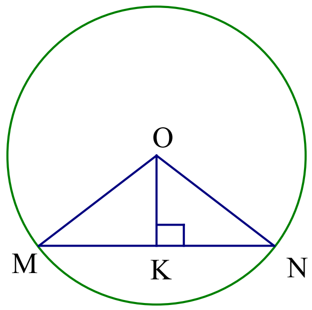
Bài 9. Cho $(O;R)$ và dây cung $MN = R\sqrt{3}$. Kẻ OK vuông góc với MN tại K. Tính:

a) Độ dài OK theo R.

b) Số đo các góc $\widehat{MOK}; \widehat{MON}$.

c) Số đo cung nhỏ và cung lớn $\overset{\frown}{MN}$.

Lời giải



a) Xét tam giác vuông OMK, tính được $OK = \dfrac{R}{2}$

b) Tính được $\widehat{MOK} = 60^0; \widehat{MON} = 120^0$

c) Số đo cung nhỏ $\overset{\frown}{MN}$ là: $120^0 \Rightarrow$ số đo cung lớn $\overset{\frown}{MN}$ là: 240^0

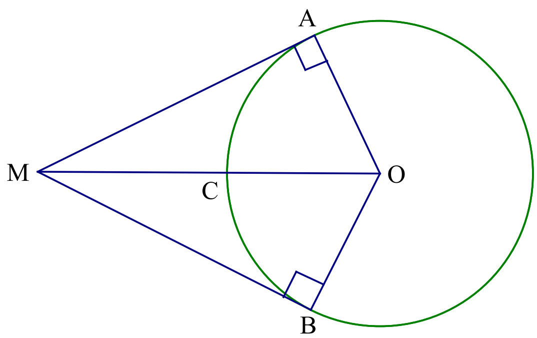
Bài 10. Cho đường tròn $(O;R)$, lấy điểm M nằm ngoài (O) sao cho $OM = 2R$. Từ M kẻ tiếp tuyến MA và MB với đường tròn (O) (A và B là các tiếp điểm) .

a) Tính $\widehat{AOM}$.

b) Tính $\widehat{AOB}$ và số đo cung nhỏ AB .

c) Biết đoạn thẳng OM cắt (O) tại C. Chứng minh C là điểm chính giữa của cung nhỏ AB .

Lời giải



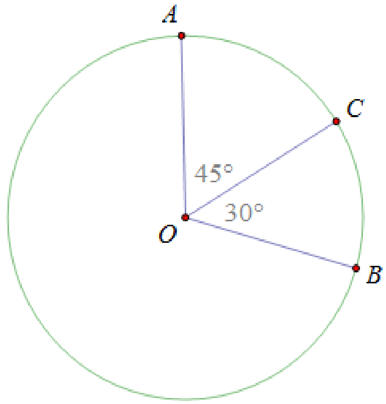
a) Xét tam giác vuông AMO, ta có: $\widehat{AOM} = 60^0$

(Sử dụng tỉ số lượng giác)

b) Tính được: $\widehat{AOB} = 120^0$, sđ $\overset{\frown}{ACB} = 120^0$

c) Ta có: $\widehat{AOC} = \widehat{BOC} \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$.

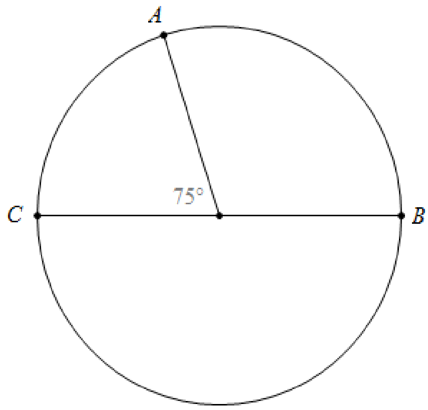
Bài 11. Cho hình vẽ sau:



a) Tính số đo cung nhỏ BC.

b) Tính số đo cung lớn AB.

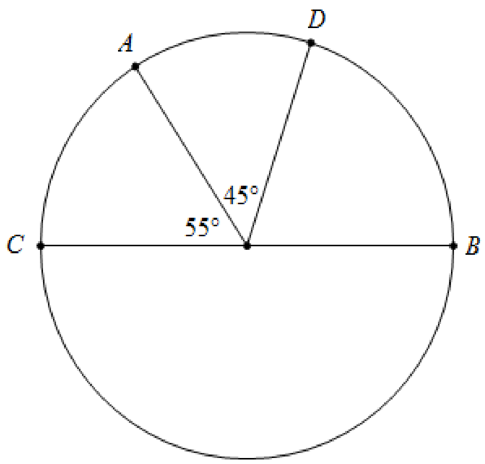
Bài 12. Cho đường tròn tâm O, đường kính BC. A là điểm trên đường tròn sao cho $\widehat{AOC} = 75^0$.



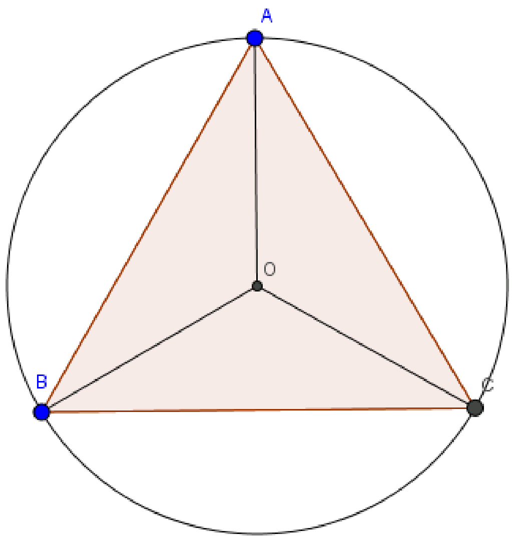
a) Tính số đo cung lớn BC

b) So sánh hai cung nhỏ AC và AB.

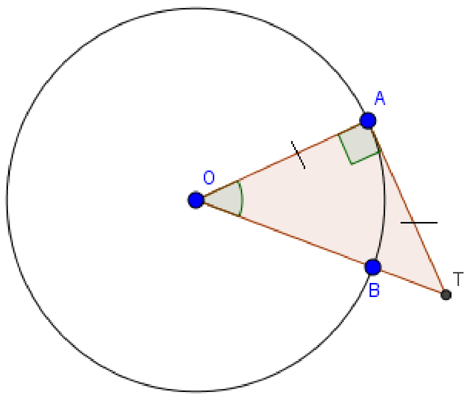
Bài 13. Cho hình vẽ sau, so sánh hai cung nhỏ CD và AB.



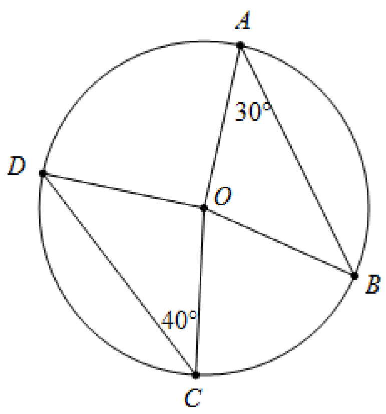
Bài 14. Cho hình vẽ sau, với ABC là tam giác đều, O là tâm đường tròn đi qua 3 điểm A, B, C. Tính số đo các cung tạo ra trong 3 điểm A, B, C.



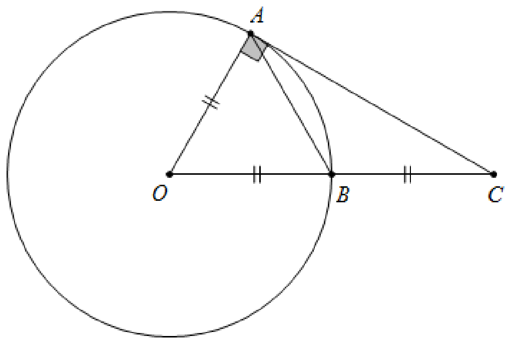
Bài 15. Cho hình vẽ sau, tính số đo cung lớn AB và góc $\widehat{ABO}$.



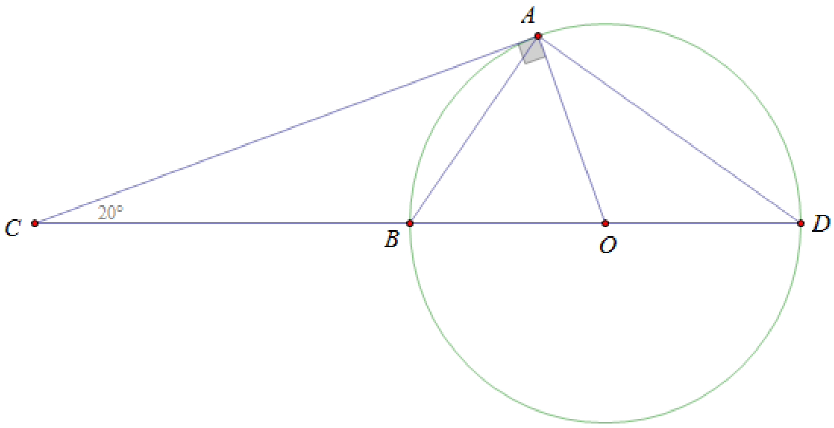
Bài 16. Cho hình vẽ sau, tính số đo cung nhỏ AB và cung lớn CD.



Bài 17. Cho hình vẽ sau, tính số đo cung lớn AB.



Bài 18. Cho hình vẽ sau:



a) Tính số đo cung nhỏ AB.

b) Tính góc $\widehat{ADC}$.

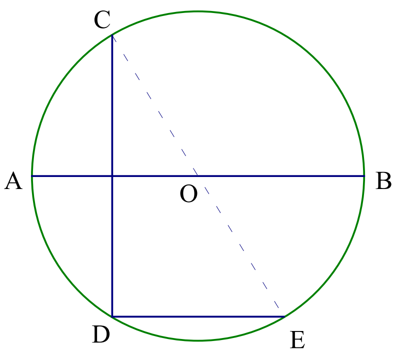
c) So sánh hai cung nhỏ AC và AD.

Bài 19. Cho đường tròn (O) đường kính AB, vẽ góc ở tâm $\widehat{AOC} = 50^0$ với C nằm trên (O). Vẽ dây CD vuông góc với AB và dây DE song song với AB.

a) Tính số đo cung nhỏ $\overset{\frown}{BE}$.

b) Tính số đo cung $\overset{\frown}{CBE}$. Từ đó suy ra ba điểm C, O, E thẳng hàng.

Lời giải



a) Tính được sđ $\overset{\frown}{BE} = 50^0$

b) Chứng minh được: sđ $\overset{\frown}{CBE} = 180^0 \Rightarrow C, O, E$ thẳng hàng (đpcm)

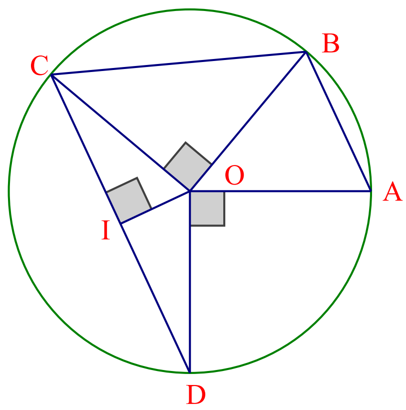
***) Cách khác:** Sử dụng $\widehat{CDE} = 90^0 \Rightarrow$ đpcm

Bài 20. Cho đường tròn $(O;R)$. Trên đường tròn lấy lần lượt các điểm A, B, C, D sao cho các cung AB, BC, CD có số đo lần lượt là $60^0; 90^0; 120^0$.

a) Tính số đo các góc ở tâm chắn các cung ấy và số đo các cung sau $\overset{\frown}{ABC}$; $\overset{\frown}{BCD}$; $\overset{\frown}{ACD}$.

b) Tính độ dài các dây cung AB, BC, CD theo R.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{AOB} = 60^0; \widehat{BOC} = 90^0; \widehat{COD} = 120^0$

$sd\,\overset{\frown}{ABC} = sd\,\overset{\frown}{AB} + sd\,\overset{\frown}{BC} = 60^0 + 90^0 = 150^0$

$sd\,\overset{\frown}{BCD} = sd\,\overset{\frown}{BC} + sd\,\overset{\frown}{CD} = 90^0 + 120^0 = 210^0$

$sd\,\overset{\frown}{ACD} = sd\,\overset{\frown}{AB} + sd\,\overset{\frown}{BC} + sd\,\overset{\frown}{CD} = 60^0 + 90^0 + 120^0 = 270^0$

b) Ta có ΔAOB cân lại có $\widehat{AOB} = 60^0 \Rightarrow \Delta AOB$ đều $\Rightarrow AB = OA = R$

Theo định lí Pitago ta có: $BC^2 = BD^2 + OC^2 = 2R^2 \Rightarrow BC = R\sqrt{2}$

$\widehat{AOD} = 360^0 - 270^0 = 90^0 \Rightarrow AD = BC = R\sqrt{2}$

Vậy $OI \perp CD$

Tam giác vuông COI có $\widehat{COI} = 60^0$ nên là nửa tam giác đều

$\Rightarrow OI = \frac{1}{2}OC = \frac{R}{2} \Rightarrow CI = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

Do đó $CD = 2CI = R\sqrt{3}$.

DẠNG 2
CHỨNG MINH HAI CUNG BẰNG NHAU

Phương pháp

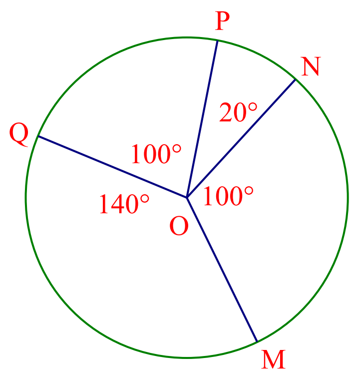
Để chứng minh hai cung (của một đường tròn) bằng nhau ta chứng minh hai cung này có cùng một số đo

Chú ý: Trong một đường tròn, hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau

Ta có: $AB//CD \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$

Bài 1. So sánh các cung nhỏ trong hình vẽ dưới đây. Biết rằng $\widehat{MON} = 100^0; \widehat{ONP} = 20^0; \widehat{POQ} = 100^0$ $\widehat{MOQ} = 140^0$.

Lời giải



Ta có sđ$\overset{\frown}{MQ} = \widehat{MOQ} = 140^0$ (góc ở tâm $\widehat{MOQ}$ chắn cung $\overset{\frown}{MQ}$)

sđ$\overset{\frown}{MN} = \widehat{MON} = 100^0$ (góc ở tâm $\widehat{MON}$ chắn cung $\overset{\frown}{MN}$)

sđ$\overset{\frown}{NP} = \widehat{NOP} = 20^0$ (góc ở tâm $\widehat{NOP}$ chắn cung $\overset{\frown}{NP}$)

sđ$\overset{\frown}{PQ} = \widehat{POQ} = 100^0$ (góc ở tâm $\widehat{POQ}$ chắn cung $\overset{\frown}{PQ}$)

Lại có: $\widehat{MON} = \widehat{POQ} = 100^0 \Leftrightarrow sd\,\overset{\frown}{MN} = sd\,\overset{\frown}{PQ} \Leftrightarrow \overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{PQ}$

+ $100^0 < 140^0 \Leftrightarrow \widehat{MON} < \widehat{MOQ} \Leftrightarrow sd\,\overset{\frown}{MN} < sd\,\overset{\frown}{MQ} \Leftrightarrow \overset{\frown}{MN} < \overset{\frown}{MQ}$

+ $20^0 < 100^0 \Leftrightarrow \widehat{NOP} < \widehat{MPN} \Leftrightarrow sd\,\overset{\frown}{NP} < sd\,\overset{\frown}{MN} \Leftrightarrow \overset{\frown}{NP} < \overset{\frown}{MN}$

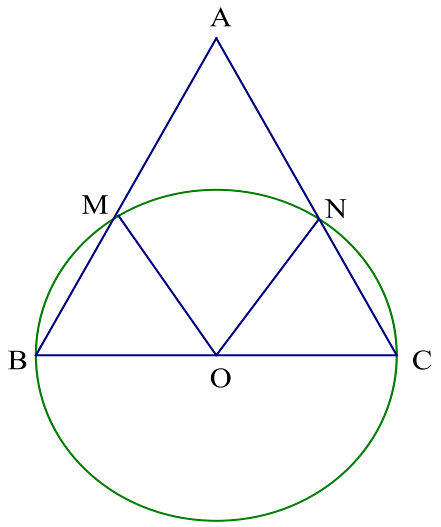
Vậy $\overset{\frown}{NP} < \overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{PQ} < \overset{\frown}{MQ}$.

Bài 2. Cho tam giác ABC cân tại A. Vẽ đường tròn tâm O, đường kính BC. Đường tròn (O) cắt AB và AC lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh các cung nhỏ $\overset{\frown}{BM}$ và $\overset{\frown}{CN}$ có số đo bằng nhau.

b) Tính $\widehat{MON}$, biết $\widehat{BAC} = 40^0$.

Lời giải



a) Chứng minh được: $\Delta BOM = \Delta CON\left(cgc\right) \Rightarrow \overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{CN}$

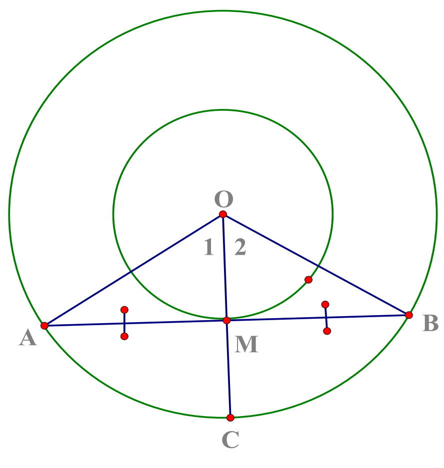
b) Tính được: $\widehat{MON} = 100^0$

Bài 3. Cho hai đường tròn đồng tâm $(O;R)$ và $\left(O;\dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right)$ trên đường tròn nhỏ lấy một điểm M. Tiếp tuyến tại M của đường tròn nhỏ cắt đường tròn lớn tại A và B. Tia OM cắt đường tròn lớn tại C.

a) Chứng minh rằng: $\overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{CB}$.

b) Tính số đo hai cung AB.

Lời giải



a) Ta có: $AM \perp OB$ (tính chất hai tiếp tuyến)

ΔAOB cân tại O $\Rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{O_2} \Rightarrow \overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{CB}$ (hai góc ở tâm bằng nhau thì hai cung bị chắn bằng nhau)

b) Ta có: $MA = MB$ (đường kính vuông góc với dây)

$$MA^2 = OA^2 - OM^2 = R^2 - \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{4} \Rightarrow MA = \frac{R}{2} \Rightarrow AB = R$$

ΔAOB có ba cạnh bằng nhau $\Rightarrow \widehat{AOB} = 60^0 \Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{AB} = 60^0 \Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{AB}_{lon} = 300^0$.

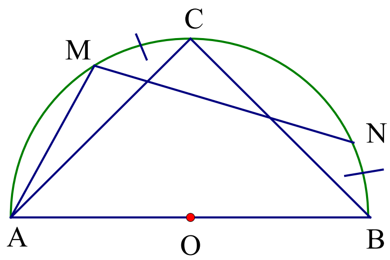
BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB và C là điểm chính giữa của nửa đường tròn. Trên các cung CA và CB lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\overset{\frown}{CM} = \overset{\frown}{BN}$. Chứng minh:

a) $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{CN}$.

b) $\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{CB}$.

Lời giải



a) Ta có C là điểm chính giữa nửa đường tròn $\Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$

mà $\overset{\frown}{CM} = \overset{\frown}{BN} \Rightarrow \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{CN}$

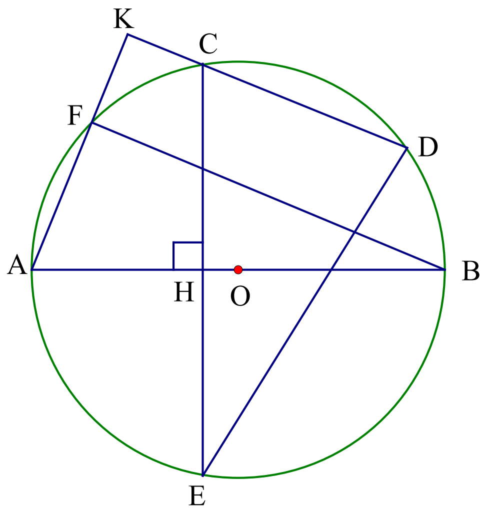
b) Chứng minh được $\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{CB}$

Bài 5. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên nửa đường tròn lấy hai điểm C và D. Kẻ CH vuông góc với AB tại H, CH cắt (O) tại điểm thứ hai E. Kẻ AK vuông góc với CD tại K, AK cắt (O) tại điểm thứ hai F. Chứng minh:

a) Hai cung nhỏ $\overset{\frown}{CF}$ và $\overset{\frown}{DB}$ bằng nhau.

b) Hai cung nhỏ $\overset{\frown}{BF}$ và $\overset{\frown}{DE}$ bằng nhau.

Lời giải

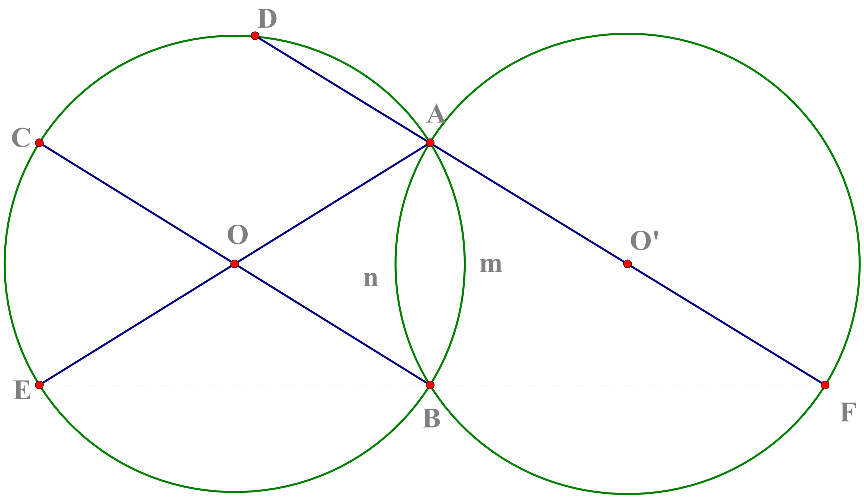


a) Ta có: $\left.\begin{matrix} DK \perp AK \\ BF \perp AK \end{matrix}\right\} \Rightarrow DK // BF \Rightarrow \overset{\frown}{CF} = \overset{\frown}{DB} \Rightarrow$ đpcm

b) Từ giả thiết ta có AB là đường trung trực của CE $\Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BE} \Rightarrow \overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{DE}$

Bài 6. Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O’) cắt nhau tại hai điểm A và B. Vẽ các đường kính AOE, AOF và BOC. Đường thẳng AF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D. Chứng minh rằng các cung nhỏ AB, CD, CE bằng nhau.

Lời giải



+) Dây AB là dây chung của hai đường tròn nên AB căng hai cung nhỏ bằng nhau $\to \overset{\frown}{AmB} = \overset{\frown}{AnB}(1)$

Lại có: $\widehat{AOB} = \widehat{COE} \Rightarrow \overset{\frown}{AmB} = \overset{\frown}{CE}(2)$

+) Chứng minh được:

$\widehat{ABE} = \widehat{ABF} = 90^0 \Rightarrow E, B, F$ thẳng hàng

+) $\Delta EAB = \Delta FAB \Rightarrow EB = FB \Rightarrow BO$ là đường trung bình của $\Delta FEA \Rightarrow BC // AD \Rightarrow \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AmB}(3)$

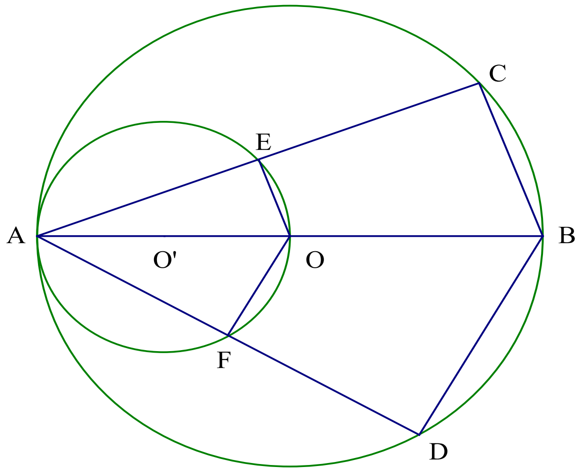
(Hai cung bị chắn giữa hai dây song song). Từ (1)(2)(3) $\Rightarrow \overset{\frown}{AmB} = \overset{\frown}{AnB} = \overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{CD}$.

Bài 7. Cho đường tròn (O) đường kính AB và đường tròn (O') đường kính AO. Các điểm C, D thuộc đường tròn (O) sao cho $B \in \overset{\frown}{CD}$ và $\overset{\frown}{BC} < \overset{\frown}{BD}$. Các dây AC và AD cắt đường tròn (O') theo thứ tự tại E và F. Hãy so sánh:

a) Độ dài các đoạn thẳng OE và OF.

b) Số đo các cung $\overset{\frown}{AE}$ và $\overset{\frown}{AF}$ của đường tròn (O') .

Lời giải



a) Ta có: $OE \perp AC; BC \perp AC \Rightarrow OE//BC$

Xét ΔABC có $OE//BC, AO = OB$

$\Rightarrow E$ là trung điểm của $AC \Rightarrow OE = \frac{1}{2}BC$

Tương tự: $OF = \frac{1}{2}BD$

Mà $BC < BD \Rightarrow OE < OF$

b) Xét tam giác vuông OEA, AFO ta có: $AE^2 = AO^2 - OE^2$ và $AF^2 = AO^2 - OF^2$

$\Rightarrow AE^2 > AF^2 \Rightarrow AE > AF \Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{AE} >$ sđ $\overset{\frown}{AF}$.

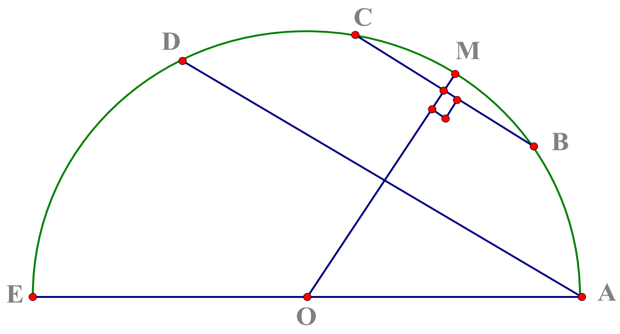
Bài 8. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AE. Gọi B, C, D là ba điểm trên nửa đường tròn, biết $\overset{\frown}{AC} = 2\overset{\frown}{AB}; \overset{\frown}{AD} = 3\overset{\frown}{AB}$

a) Chứng minh rằng: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD}$.

b) Chứng minh rằng: $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$.

c) Chứng minh cung AD và BC có chung điểm chính giữa.

Lời giải



a) $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AB}; \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{AC} = 3\overset{\frown}{AB} - 2\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AB} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD}$

b) $\left.\begin{array}{l} \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} \\ \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} \\ \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$

c) Gọi M là điểm chính giữa cả cung BC $\Rightarrow \overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{MC}$

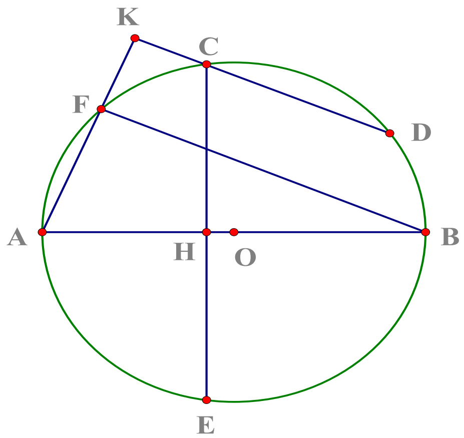
Có: $\left.\begin{array}{l} \overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB} + \overset{\frown}{AB} \\ \overset{\frown}{MD} = \overset{\frown}{MC} + \overset{\frown}{CD} \end{array}\right\} \rightarrow \overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MD} \Rightarrow dpcm$

Bài 9. Cho đường tròn O, trên nửa đường tròn đường kính AB lấy hai điểm C và D. Kẻ $CH \perp AB$ nó cắt đường tròn tại E. Kẻ $AK \perp DC$ nó cắt đường tròn tại F. Chứng minh rằng

a) $\overset{\frown}{CF} = \overset{\frown}{DB}$.

b) $\overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{DE}$.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{AFB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \begin{cases} BF \perp AK \equiv F \\ CD \perp AK \equiv K \end{cases} \Rightarrow BF // CD$

Xét đường tròn (O) có BF // CD $\Rightarrow \overset{\frown}{CF} = \overset{\frown}{DB}$ (chắn bởi hai dây song song)

b) Ta có: $AB \perp CE \Rightarrow B$ là điểm chính giữa $\overset{\frown}{CBE}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BE} \Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{BC}$ = sđ $\overset{\frown}{BE}$

mà $\overset{\frown}{CF}=\overset{\frown}{BD} \Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{CF}$ = sđ $\overset{\frown}{BD}$ $\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{BC}$ + sđ $\overset{\frown}{CF}$ = sđ $\overset{\frown}{BE}$ + sđ $\overset{\frown}{DB}$

$\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{BF}$ = sđ $\overset{\frown}{DE}$ $\Rightarrow \overset{\frown}{BF}=\overset{\frown}{DE} \Rightarrow BF = DE$.

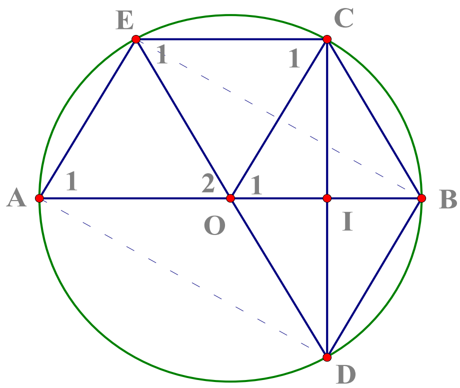
Bài 10. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Qua trung điểm I của bán kính OB kẻ dây $CD \perp AB$. Kẻ dây CE song song với AB. Chứng minh rằng:

a) $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}$.

b) E, O, D thẳng hàng.

c) ADBE là hình chữ nhật .

Lời giải



a) AB là trung trực của CD $\Rightarrow \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}(1)$

$$+)\left.\begin{array}{l}\hat{O}_2=\hat{E}_1(slt)\\ \hat{O}_1=\hat{C}_1(slt)\\ \hat{E}_1=\hat{C}_1(tamgiaccan)\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{O}_2=\hat{O}_1 \Rightarrow \overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BC}(2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}$

b) ΔCOD cân tại O, OI là đường cao nên là đường phân giác COD

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\widehat{COB}=\widehat{DOB}\\ \widehat{BOC}=\widehat{AOE}\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\widehat{BOD}=\widehat{AOE}\\ \widehat{BOD}+\widehat{DOA}=180^0\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{DOA}+\widehat{AOE}=180^0 \Rightarrow E,O,D \text{ thẳng hàng (đpcm)}$$

c) Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau nên là hình chữ nhật.

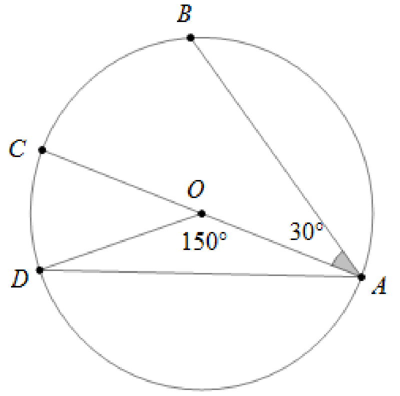
CHỦ ĐỀ 2
GÓC NỘI TIẾP

DẠNG 1
TÍNH SỐ ĐO GÓC, CUNG

Trong một đường tròn:

- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau và ngược lại.
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau
- Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90^0) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

Bài 1. Dựa vào hình vẽ sau:



a) Tính số đo cung nhỏ CD.

b) Tính số đo cung nhỏ BD.

Lời giải

a)

Ta có: $\widehat{COD}=180^0-\widehat{AOC}$ (hai góc bù nhau)

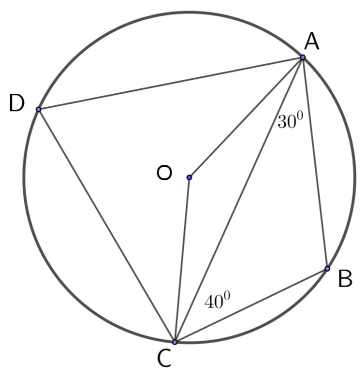
$\widehat{COD}=180^0-\widehat{AOC}=180^0-150^0=30^0$

số đo cung nhỏ CD là: $sđ\overset{\frown}{CD}=\widehat{COD}=30^0$ (góc ở tâm)

b) số đo cung nhỏ BC là $sđ\overset{\frown}{BC}=2\widehat{CAB}=2.30^0=60^0$ (góc nội tiếp)

số đo cung nhỏ BD là: $sđ\overset{\frown}{BD}=sđ\overset{\frown}{BC}+sđ\overset{\frown}{CD}=60^0+30^0=90^0$

Bài 2. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O), biết $\widehat{BAC}=30^0,\widehat{BCA}=40^0$ (như hình vẽ bên).



Tính số đo các góc $\widehat{ABC},\widehat{ADC},\widehat{AOC}$.

Lời giải

Xét tam giác ABC có : $\widehat{BAC}+\widehat{BCA}+\widehat{ABC}=180^0$ (tổng 3 góc trong tam giác)

Hay $30^0+40^0+\widehat{ABC}=180^0\Rightarrow\widehat{ABC}=110^0$

$\widehat{ADC}=\frac{1}{2}\left(sd\,\overset{\frown}{AB}+sd\,\overset{\frown}{AB}\right)=\frac{1}{2}\left(2\widehat{ACB}+2\widehat{CAB}\right)=\widehat{ACB}+\widehat{CAB}=40^0+30^0=70^0$ (góc nội tiếp)

Hay $110^0+\widehat{ADC}=180^0 \Rightarrow \widehat{ADC}=70^0$

Ta có : $\widehat{AOC}=2\widehat{ADC}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung AC)

$\Rightarrow \widehat{AOC}=2.70^0=140^0$.

Vậy $\widehat{ABC}=110^0, \widehat{ADC}=70^0, \widehat{AOC}=140^0$

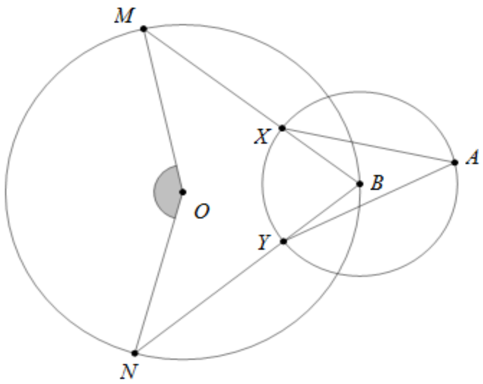
Chú ý : Có thể dùng tính chất Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) nên để tính $\widehat{ADC}$

Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) nên $\widehat{ABC}+\widehat{ADC}=180^0$ (tổng 2 góc đối diện của tứ giác nội tiếp)

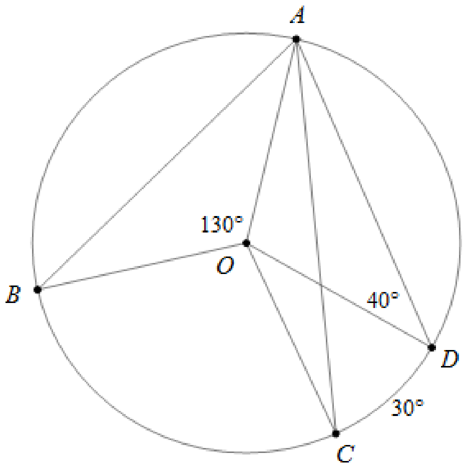
Hay $110^0+\widehat{ADC}=180^0 \Rightarrow \widehat{ADC}=70^0$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

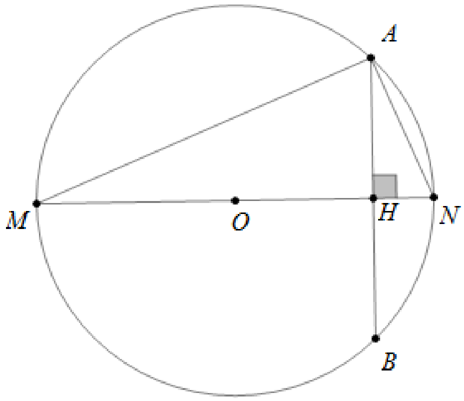
Bài 3. Dựa vào hình vẽ sau, biết cung nhỏ XY của đường tròn tâm B là 70^0. Tính $\widehat{MON}$



Bài 4. Dựa vào hình vẽ sau, hãy tính $\widehat{BAC}$.



Bài 5. Dựa vào hình vẽ sau, biết $HN=5cm$, $AB=10\sqrt{5}cm$. Tính bán kính đường tròng tâm O.



DẠNG 2
CHỨNG MINH CÁC GÓC BẰNG NHAU, CÁC CUNG BẰNG NHAU

Trong một đường tròn:

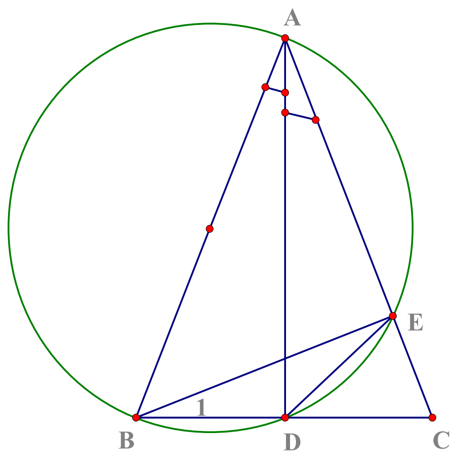
- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau và ngược lại.
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau
- Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90^0) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

Bài 1. Cho ΔABC cân tại A ($\widehat{A} < 90^0$). Vẽ đường tròn đường kính AB cắt BC tại D, cắt AC tại E.

a) Chứng minh $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DE}$.

b) Chứng minh $\widehat{CBE} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BAC}$.

Lời giải



a) $\widehat{ADB} = 90^0 \Rightarrow AD \perp BC \Rightarrow AD$ là phân giác của $\widehat{A}$

$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DE}$

b) Ta có $\widehat{B_1} = \widehat{A_2} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{DE} \Rightarrow \widehat{B_1} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BAC}$.

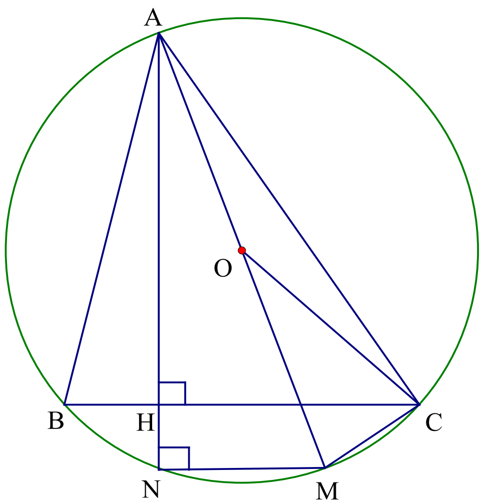
Bài 2. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao AH và nội tiếp đường tròn tâm O, đường kính AM

a) Tính $\widehat{ACM}$.

b) Chứng minh $\widehat{BAH} = \widehat{OCA}$.

c) Gọi N là giao điểm của AH với (O). Tứ giác $BCMN$ là hình gì? Vì sao?

Lời giải



a) Ta có $\widehat{ACM} = 90^0$ (góc nội tiếp)

b) Ta có $\Delta ABH \backsim \Delta AMC(gg)$

$\Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{OAC}; \widehat{OCA} = \widehat{OAC} \Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{OCA}$

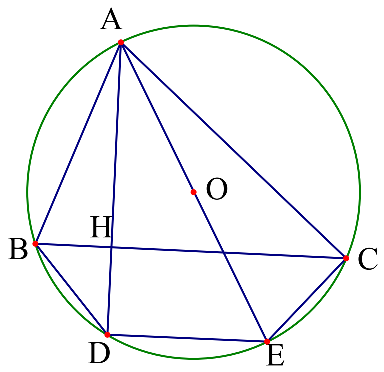
c) $\widehat{ANM} = 90^0 \Rightarrow MNBC$ là hình thang

$\Rightarrow BC//MN \Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{BN}$ = sđ $\overset{\frown}{CM}$

$\Rightarrow \widehat{CBN} = \widehat{BCM} \Rightarrow BCMN$ hình thang cân.

Bài 3. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Từ đỉnh A ta kẻ đường cao AH (H thuộc BC). Chứng minh rằng $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$.

Lời giải



Kẻ đường kính AE của đường tròn (O).

Ta thấy $\widehat{ACE} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Từ đó $\widehat{OAC} + \widehat{AEC} = 90^0$ (1).

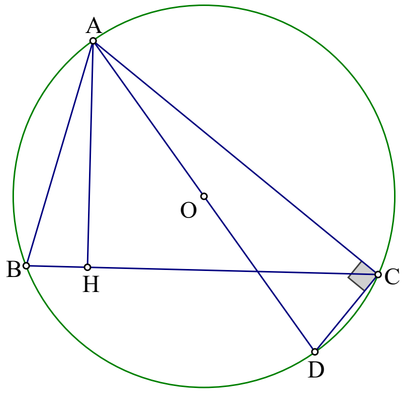
Theo giả thiết bài ra, ta có: $\widehat{BAH} + \widehat{ABC} = 90^0$ (2).

Mặt khác $\widehat{AEC} = \widehat{ABC}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$) (3).

Từ (1),(2) và (3) suy ra $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$ (đpcm).

Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$, AH là đường cao $(H \in BC)$. Chứng minh rằng: $AB.AC = 2R.AH$.

Lời giải



Vẽ đường kính AD của đường tròn (O), suy ra $\widehat{ACD} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Xét ΔHBA và ΔCDA có:

$\widehat{AHB} = \widehat{ACD}\left(= 90^0\right); \widehat{HBA} = \widehat{CDA}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$),

Do đó $\Delta HBA \sim \Delta CDA \Rightarrow \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AB}{AD} \Rightarrow AB.AC = AD.AH$.

Mà $AD = 2R$.

Do đó $AB.AC = 2R.AH$.

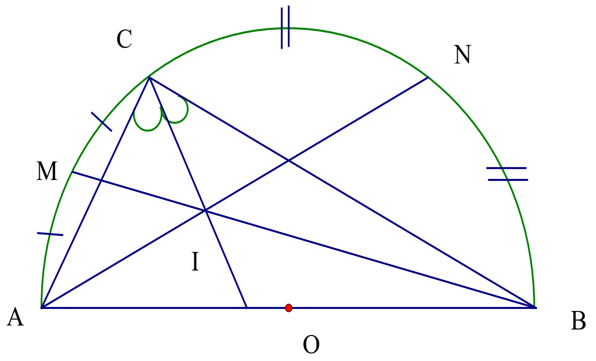
BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và dây AC căng cung AC có số đo bằng 60^0.

a) So sánh các góc của ΔABC.

b) Gọi M và N lần lượt là điểm chính giữa của các cung AC và BC, hai dây AN và BM cắt nhau tại I. Chứng minh rằng CI là tia phân giác của $\widehat{ACB}$.

Lời giải

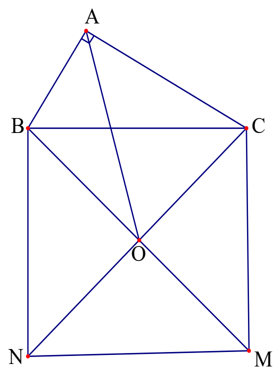


a) Ta có: $\overset{\frown}{AC} = 60^0 \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = 120^0 \Rightarrow \hat{B} < \hat{A} < \hat{C}$

b) AN là phân giác của góc A, BM là phân giác của góc B nên CI là phân giác của góc C (đpcm)

Bài 6. Trên cạnh huyền BC của tam giác vuông ABC về phía ngoài ta dựng hình vuông với tâm tại điểm O. Chứng minh rằng AO là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$.

Lời giải



Vì O là tâm của hình vuông nên $\widehat{BOC} = 90^0$.

Lại có $\widehat{BAC}=90^0$ suy ra bốn điểm A,B,O,C cùng nằm trên đường tròn đường kính BC.

Đối với đường tròn này ta thấy $\widehat{BAO}=\widehat{BCO}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BO}$).

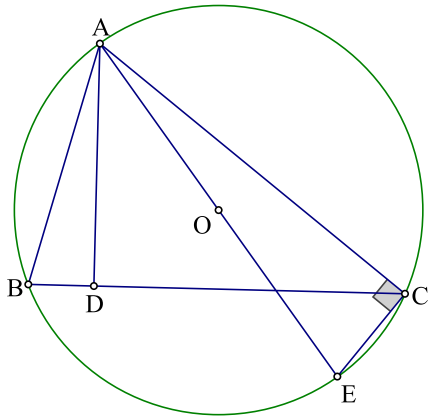
Mà $\widehat{BCO}=45^0 \Rightarrow \widehat{BAO}=45^0$.

Do $\widehat{BAC}=90^0$, nên $\widehat{CAO}=\widehat{BAC}-\widehat{BAO}=45^0$.

Vậy $\widehat{BAO}=\widehat{CAO}$, nghĩa là AO là tia phân giác của góc vuông $\widehat{BAC}$ (đpcm).

Bài 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Vẽ AD là đường cao của tam giác ABC. Chứng minh rằng $\widehat{BAD}=\widehat{OAC}$.

Lời giải



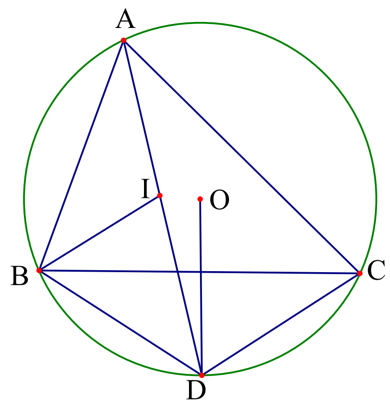
Dựng đường kính AE của đường tròn $(O;R)$.

Ta có $\widehat{AEC}=\widehat{ABD}$ (cùng chắn cung AC)

suy ra $\Delta DBA \sim \Delta CEA$, từ đó suy ra $\widehat{BAD}=\widehat{OAC}$.

Bài 8. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Đường phân giác trong góc A cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại D. Gọi I là tâm vòng tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh $DB=DC=DI$

Lời giải



Ta luôn có $DB = DC$ do AD là phân giác trong góc A. Ta sẽ chứng minh tam giác DIB cân tại D.

Thật vậy ta có: $\widehat{IBD} = \widehat{IBC} + \widehat{CBD}$.

Mặt khác $\widehat{CBD} = \widehat{CAD}$ (Góc nội tiếp chắn cung CD)

mà $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$, $\widehat{IBC} = \widehat{IBA}$ (Tính chất phân giác)

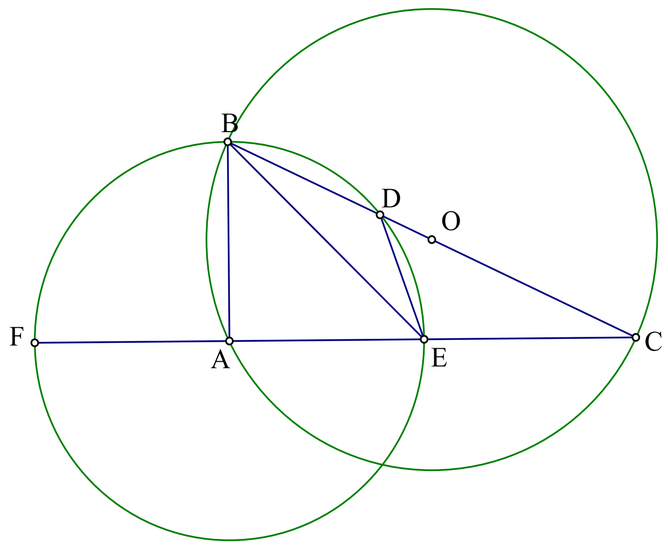
suy ra $\widehat{IBD} = \widehat{ABI} + \widehat{BAI}$.

Nhưng $\widehat{BID} = \widehat{ABI} + \widehat{BAI}$ (Tính chất góc ngoài).

Như vậy tam giác BDI cân tại $D \Rightarrow DB = DI = DC$

Bài 9. Cho tam giác ABC $\left(\widehat{A} = 90^0\right)$ và $AB < AC$. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AB cắt BC tại D, cắt AC tại E. Chứng minh rằng $DB.CB = EB^2$.

Lời giải



Giả sử CA cắt (O) tại F thì EF là đường kính của $(A; AB)$,

ta có $\overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{BE}$ (vì $BA \perp EF$) $\Rightarrow \widehat{BED} = \widehat{BFD}$,

$$\widehat{BCF} \equiv \widehat{BCE} = \frac{1}{2}\text{sđ}\left(\overset{\frown}{BF} - \overset{\frown}{DE}\right) = \frac{1}{2}\text{sđ}\left(\overset{\frown}{BE} - \overset{\frown}{DE}\right) = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BD} = \widehat{BFD}$$

Từ đó suy ra $\widehat{BED} = \widehat{ECB}$.

Xét tam giác $\Delta BCE, \Delta BED$ có

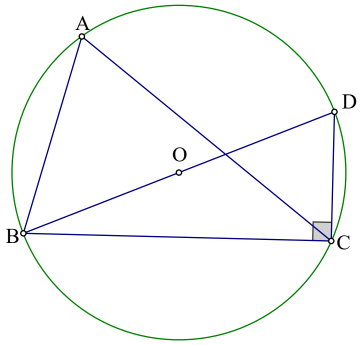
$\widehat{B}$ chung,

$\widehat{BED} = \widehat{ECB}$

$$\Rightarrow \Delta BCE \sim \Delta BED \Leftrightarrow \frac{BC}{BE} = \frac{BE}{BD} \Rightarrow DB.CB = EB^2.$$

Bài 10. Cho tam giác ABC có $\widehat{A}$ nhọn nội tiếp trong đường tròn $\left(O;R\right)$. Chứng minh rằng: $BC = 2R\sin\widehat{BAC}$.

Lời giải



Vẽ đường kính BD của đường tròn $\left(O;R\right) \Rightarrow \widehat{BCD} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

ΔBCD có $\widehat{C} = 90^0$ nên $BC = BD\sin\widehat{BDC}$.

Ta lại có $BD = 2R; \widehat{BDC} = \widehat{BAC}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BC}$) nên $BC = 2R\sin\widehat{BAC}$.

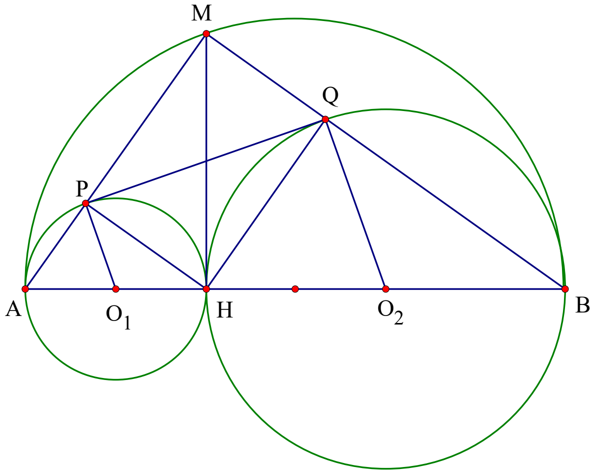
Bài 11. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Lấy M là điểm tùy ý trên nửa đường tròn (M khác A và B). Kẻ MH vuông góc với AB ($H \in AB$). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn (O) vẽ hai nửa đường tròn tâm O_1, đường kính AH và tâm O_2, đường kính BH. Đoạn MA và MB cắt hai nửa đường tròn (O_1) và (O_2) lần lượt tại P và Q. Chứng minh rằng:

a) $MH = PQ$.

b) $\Delta MPQ \sim \Delta MBA$.

c) PQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O_1) và (O_2).

Lời giải



a) Ta có: $\lozenge MPHQ$ là hình chữ nhật $\Rightarrow MH = PQ$

b) Xét các tam giác vuông AHM và BHM ta có: $MP.MA = MQ.MB \Rightarrow \Delta MPQ \sim \Delta MBA\left(cgc\right)$

c) $\widehat{PMH} = \widehat{MBH} \Rightarrow \widehat{PQH} = \widehat{O_2QB} \Rightarrow PQ$ là tiếp tuyến của O_2

Chứng minh tương tự ta có PQ là tiếp tuyến của O_1.

DẠNG 3

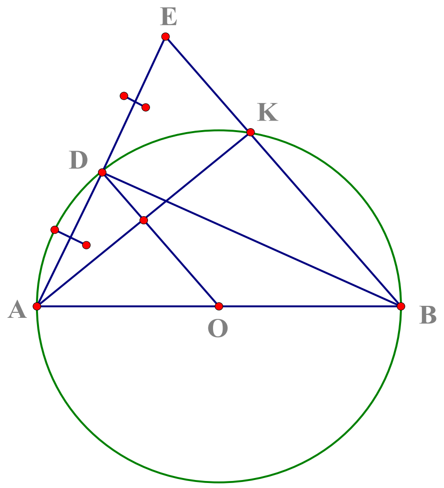
CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG, VUÔNG GÓC, BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

Bài 1. Cho đường tròn (O) đường kính AB, điểm D thuộc (O). Gọi E là điểm đối xứng với A qua D

a) ΔABE là tam giác gì?

b) Gọi K là giao điểm của EB với (O), Chứng minh rằng: $OD \perp AK$.

Lời giải



a) $\widehat{ADB}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \begin{cases} BD\perp AE \\ AD=DE \end{cases} \Rightarrow \Delta ABE$ cân tại B

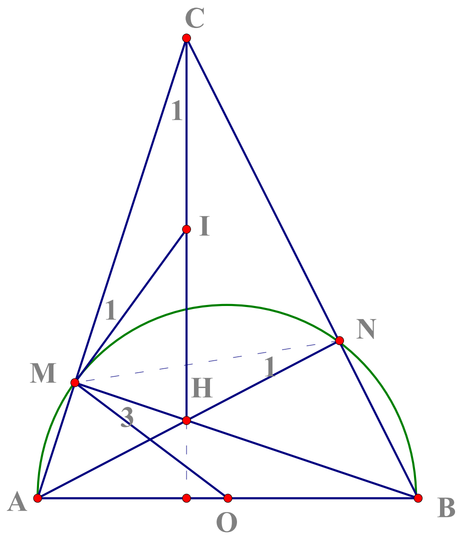
b) $\begin{cases} OD//EB \\ AK\perp EB \end{cases} \Rightarrow OD\perp AK$

Bài 2. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R và điểm C nằm ngoài nửa đường tròn. CA cắt nửa đường tròn tại M, CB cắt nửa đường tròn tại N. Gọi H là giao điểm của AN và BM.

a) Chứng minh rằng $CH\perp AB$.

b) Gọi I là trung điểm của CH. Chứng minh rằng MI là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) .

Lời giải



a) Ta có H là trực tâm của tam giác $\Rightarrow CH\perp AB$

b) Cần chứng minh $MI\perp MO$

Ta có: $C,M,H,N\in\left(I;\dfrac{CH}{2}\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{C_1}=\widehat{N_1}(=\frac{1}{2}sd\,\widehat{MH})\\ \widehat{N_1}=\widehat{B_1}(=\frac{1}{2}sd\,\widehat{AM})\\ \widehat{B_1}=\widehat{B_3}(\Delta.can)\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{l}\widehat{M_1}=\widehat{M_3}\\ \widehat{M_1}+\widehat{IMB}=90^0\end{array}\right\}\rightarrow \widehat{M_3}+\widehat{IMB}=90^0\rightarrow \widehat{OMI}=90^0$$

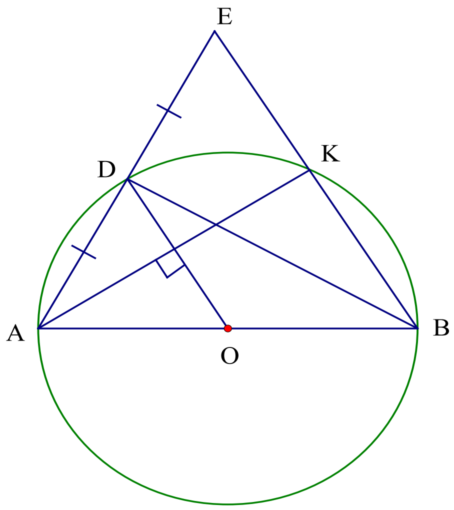
BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Cho đường tròn (O), đường kính AB, điểm D thuộc đường tròn. Gọi E là điểm đối xứng với A qua D.

a) Tam giác ABE là tam giác gì?

b) Gọi K là giao điểm của EB với (O). Chứng minh $OD \perp AK$.

Lời giải



a) Xét ΔABE có BD đồng thời là đường cao, đường trung tuyến nên ΔABE cân tại B.

b) Xét ΔABE có OD là đường trung tuyến $\Rightarrow OD // BE$

mà: $AK \perp BE$ ($\widehat{AKB}=90^0$) $\Rightarrow AK \perp OD$

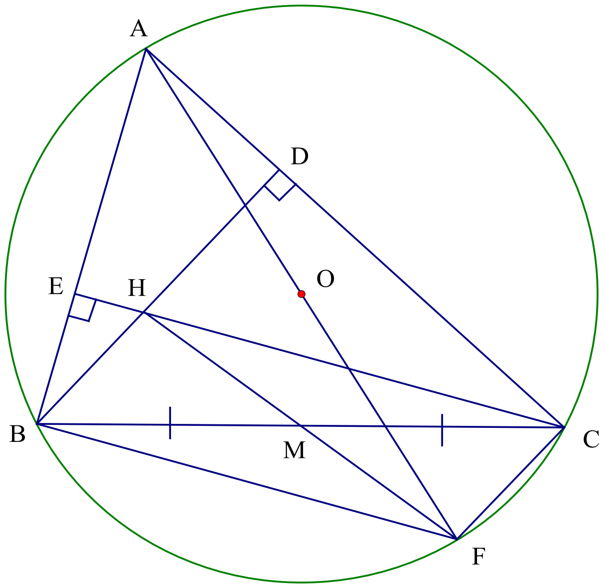
Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Vẽ đường kính AF.

a) Tứ giác BFCH là hình gì?

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ba điểm H, M, F thẳng hàng.

c) Chứng minh $OM = \frac{1}{2}AH$.

Lời giải



a) Tứ giác BFCH có các cạnh đối song song nên là hình bình hành.

b) Tứ giác BHCF là hình bình hành mà M là trung điểm của BC nên M là trung điểm của HF $\Rightarrow H, M, F$ thẳng hàng.

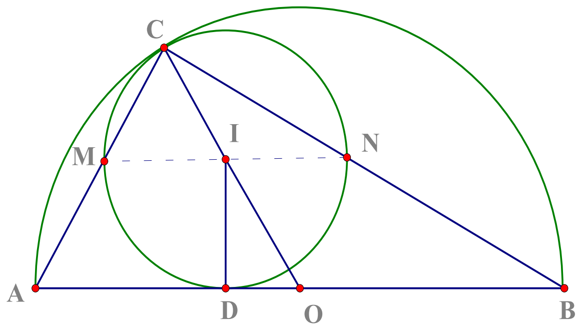
c) Xét ΔAHF có OM là đường trung bình của $\Delta AHF \Rightarrow OM = \frac{1}{2}AH$.

Bài 5. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và điểm C di động trên nửa đường tròn đó. Vẽ đường tròn (I) tiếp xúc với đường tròn (O) tại C và tiếp xúc với đưuòng kính AB tại D, đường tròn này cắt CA, CB lần lượt tại các điểm thứ hai là M và N. Chứng minh rằng:

a) M, N, I thẳng hàng.

b) $ID \perp MN$.

Lời giải



a) $\widehat{ACB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{MCN} = 90^0$

Xét (I), có: $\widehat{ACB} = 90^0 \Rightarrow N, M, I$ thẳng hàng

b) Đường tròn (O) và (I) tiếp xúc với nhau tại C nên O, I, C thẳng hàng

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ICN \to \widehat{INC} = \widehat{ICN} \\ \Delta OCB \to \widehat{OBC} = \widehat{OCB} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \widehat{INC} = \widehat{OBC} \\ dong.vi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} MN // AB \\ ID \perp AB (t.c.tiep.tuyen) \end{array}\right\} \Rightarrow ID \perp MN$$

Bài 6. Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường cao BM, CN cắt nhau tại H và cắt đường tròn lần lượt tại E và F.

a) Chứng minh rằng A là điểm chính giữa cung FE.

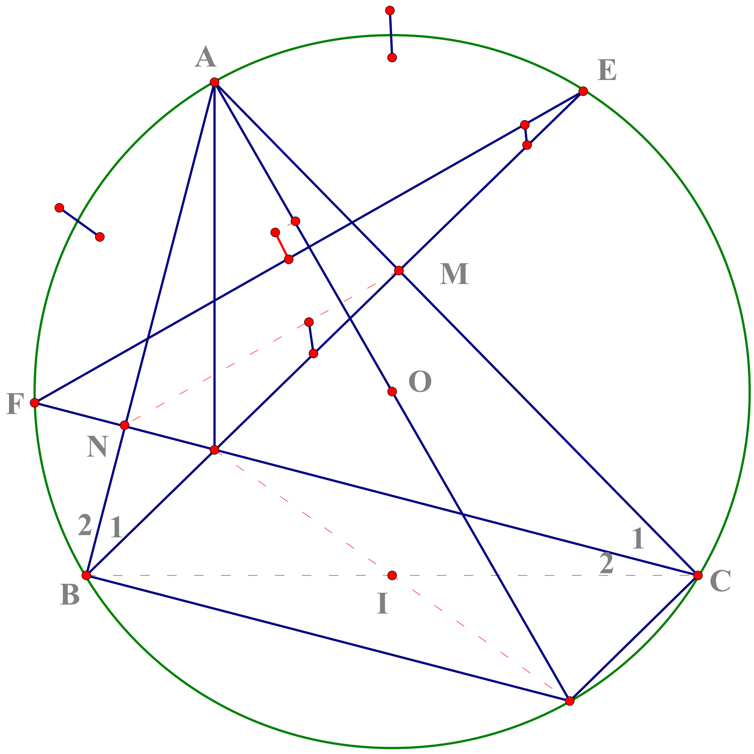
b) Chứng minh rằng EF // MN.

c) Chứng minh rằng $OA \perp MN$.

d) Chứng minh rằng AH không đổi khi A di động trên cung lớn BC.

e) Chứng minh rằng F đối xứng với H qua AB.

Lời giải



a) $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$ (phụ góc $\widehat{BAC}$) $\Rightarrow \overset{\frown}{EA} = \overset{\frown}{FA}$ (chắn bởi hai góc nội tiếp bằng nhau) $\Rightarrow A$ là điểm chính giữa $\overset{\frown}{FE} \Rightarrow OA \perp FE(1)$

b) $\left.\begin{matrix} \widehat{E} = \widehat{C_2} \\ \widehat{NMB} = \widehat{C_2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \widehat{E} = \widehat{NMB} \\ d.vi \end{matrix}\right\} \Rightarrow MN//FE(2)$

$\Rightarrow OA \perp MN$

d) Kẻ đường kính AD và gọi I là trung điểm của BC $\Rightarrow IO \perp BC \equiv I$

Ta có:

$\widehat{ACD} = 90 \Rightarrow \left.\begin{matrix} CD \perp AC \\ BH \perp AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} BH//CD \\ t.tu: CH//BD \end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow \lozenge BHCD$ là hình bình hành.

Mà I là trung điểm của BC nên I là trung điểm của HD

+ Xét $\Delta AHD, OI = \dfrac{1}{2}AH \Leftrightarrow AH = 2OI$ (không đổi)

e. Ta có: $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{FA} \Rightarrow \widehat{ABF} = \widehat{ABE}$ (chắn hai cung bằng nhau)

Xét ΔBHF có BN là đường cao, đường phân giác nên cân tại B $\Rightarrow BN$ là đường trung tuyến $\Rightarrow N$ là trung điểm của FH hay F đối xứng với H qua AB.

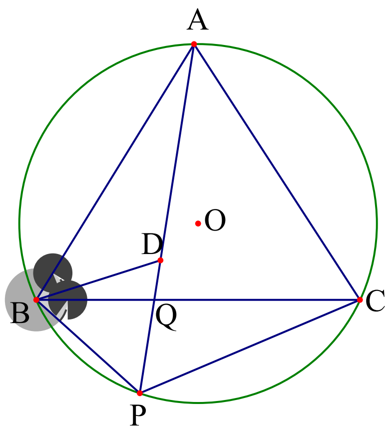
Bài 7. *Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Trên cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A ta lấy điểm P bất kỳ (P khác B và P khác C). Các đoạn PA và BC cắt nhau tại Q.

a) Giả sử D là một điểm trên đoạn PA sao cho $PD = PB$. Chứng minh rằng ΔPDB đều.

b) Chứng minh rằng $PA = PB + PC$.

c) Chứng minh hệ thức $\dfrac{1}{PQ} = \dfrac{1}{PB} + \dfrac{1}{PC}$.

Lời giải



a) Trước tiên ta nhận thấy rằng tam giác PBD cân tại P.

Mặt khác, $\widehat{BPD} = \widehat{BPA} = \widehat{BCA} = 60^0$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn (O)).

Vậy nên tam giác PDB đều.

b) Ta đã có $PB = PD$, vậy để chứng minh $PA = PB + PC$ ta sẽ chứng minh $DA = PC$.

Thật vậy, xét hai tam giác BPC và BDA có: $BA = BC$ (giả thiết), $BD = BP$ (do tam giác BPD đều).

Lại vì $\widehat{ABD} + \widehat{DBC} = 60^0$, $\widehat{PBC} + \widehat{DBC} = 60^0$ nên $\widehat{ABD} = \widehat{PBC}$.

Từ đó $\Delta BPC = \Delta BDA$ (c.g.c), dẫn đến $DA = PC$ (đpcm).

c) Xét hai tam giác PBQ và PAC ta thấy $\widehat{BPQ} = 60^0$, $\widehat{APC} = \widehat{ABC} = 60^0$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AC}$) suy ra $\widehat{BPQ} = \widehat{APC}, \widehat{PBQ} = \widehat{PBC} = \widehat{PAC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{PC}$).

Từ đó $\Delta PBQ \sim \Delta PAC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{PQ}{PB} = \dfrac{PC}{PA}$, hay $PQ.PA = PB.PC$.

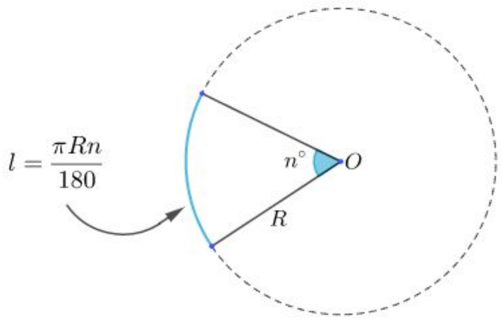
Theo kết quả câu b, ta có $PA = PB + PC$ nên $PQ\left(PB + PC\right) = PB.PC$.

Hệ thức này tương đương với $\dfrac{1}{PQ} = \dfrac{1}{PB} + \dfrac{1}{PC}$ (đpcm).

BÀI 5
ĐỘ DÀI CUNG TRÒN
DIỆN TÍCH HÌNH QUẠT
DIỆN TÍCH HÌNH VÀNH KHĂN

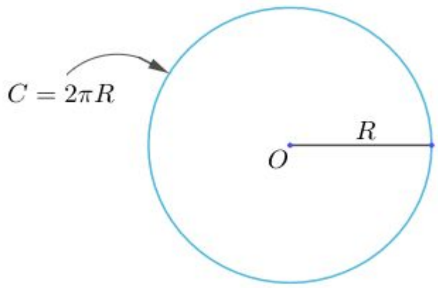
1. Độ dài cung tròn

Trong một đường tròn bán kính R, độ dài l của một cung n^0 được tính theo công thức: $l = \dfrac{\pi R.n}{180}$.



Chú ý:

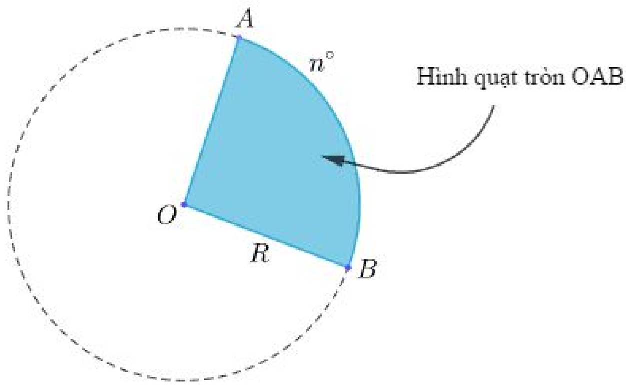
- Chu vi đường tròn đường kính d là $C = \pi d$
- Chu vi đường tròn bán kính R là $C = 2\pi R$



2. Diện tích hình quạt tròn

Hình quạt tròn (hay còn gọi tắt là hình quạt) là một phần hình tròn giới hạn bởi cung tròn và hai bán kính đi qua hai mút của cung đó.

Diện tích hình quạt tròn bán kính R, cung n^0 là: $S = \dfrac{\pi R^2 n}{360}$

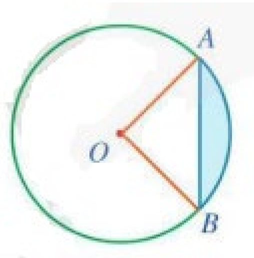


Chú ý:

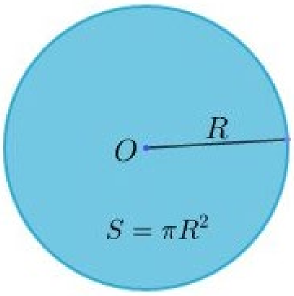
- Gọi l là độ dài cung tròn có số đo n^0 thì diện tích hình quạt tròn bán kính R, cung có số đo n^0 là:

$$S=\frac{\pi R^2 n}{360}=\frac{\pi Rn}{180}=\frac{l.R}{2}$$

- Hình viên phân là hình giới hạn bởi một cung tròn và dây cung của đường tròn.



- Diện tích của một hình tròn bán kính R là: $S=\pi R^2$

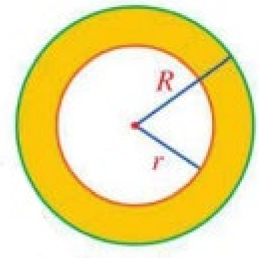


3. Diện tích hình vành khuyên

Hình giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm được gọi là hình vành khuyên.

Hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn $(O;R)$ và $(O;r)$ (với $R>r$) có diện tích là:

$$S=\pi\left(R^2-r^2\right)$$



DẠNG 1

TÍNH ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN, CUNG TRÒN

TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN, HÌNH QUẠT TRÒN

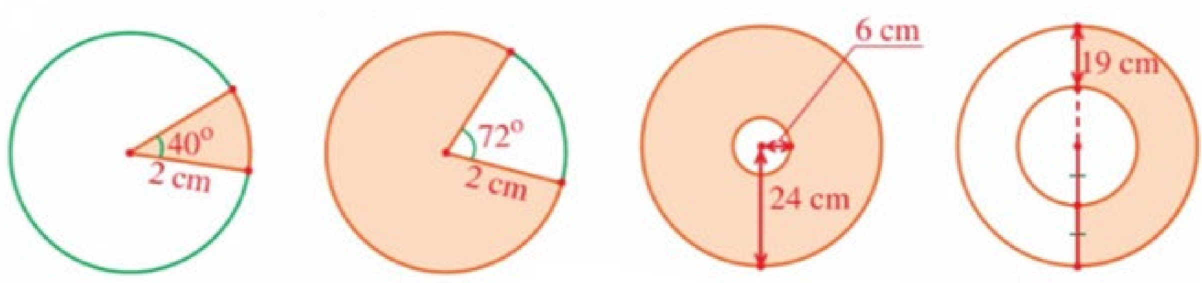
TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH VÀNH KHĂN

- Chu vi đường tròn bán kính R là $C = 2\pi R$
- Trong một đường tròn bán kính R, độ dài l của một cung n^0 là: $l = \dfrac{\pi R.n}{180}$.
- Diện tích của một hình tròn bán kính R là: $S = \pi R^2$
- Diện tích hình quạt tròn bán kính R, cung n^0 là: $S = \dfrac{\pi R^2 n}{360}$
- Diện tích hình quạt tròn bán kính R, l là độ dài cung tròn có số đo n^0 là: $S = \dfrac{l.R}{2}$
- Hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn $(O;R)$ và $(O;r)$ có diện tích là: $S = \pi\left(R^2 - r^2\right)$

Bài 1. Tính chu vi của đường tròn bán kính 5 cm (theo đơn vị centimet và làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Bài 2. Tính diện tích của hình vành khuyên đó giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm và có bán kính lần lượt là 2,5 cm; 2 cm.

Bài 3. Quan sát các hình 1, 2, 3, 4.



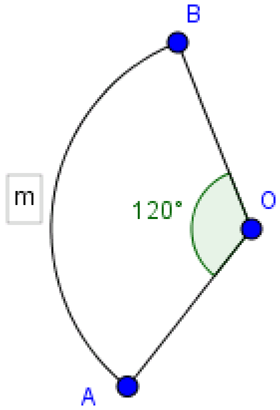
Hình 1 Hình 2 Hình 3 Hình 4

a) Tính diện tích phần được tô màu mỗi hình đó.

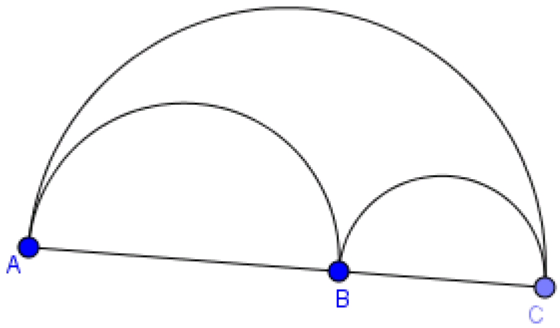
b) Tính độ dài cung tròn được tô màu xanh ở mỗi hình 1, 2

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

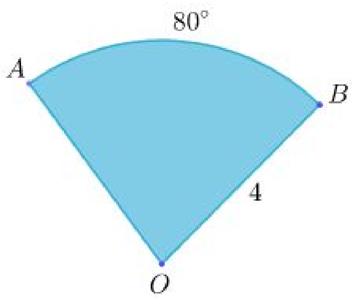
Bài 4. Dựa vào hình vẽ sau, So sánh độ dài cung $\overset{\frown}{AmB}$ và đường gấp khúc AOB.



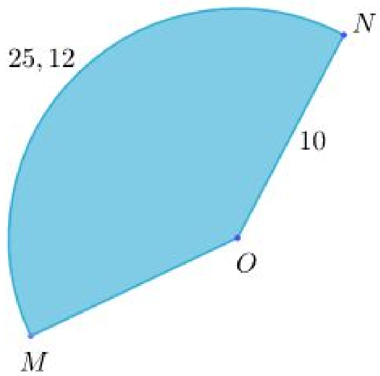
Bài 5. Dựa vào hình vẽ sau, chứng minh độ dài nửa đường tròn đường kính AC bằng tổng độ dài nửa đường tròn đường kính AB và BC.



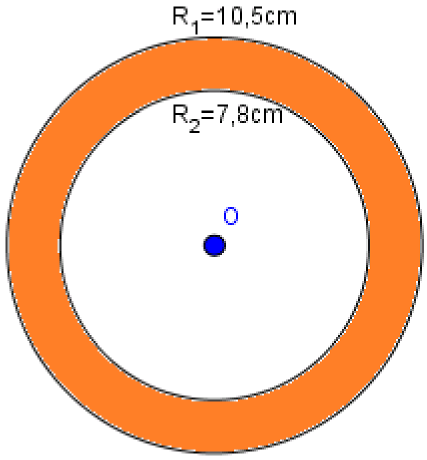
Bài 6. Tính diện tích hình quạt trong hình vẽ sau:



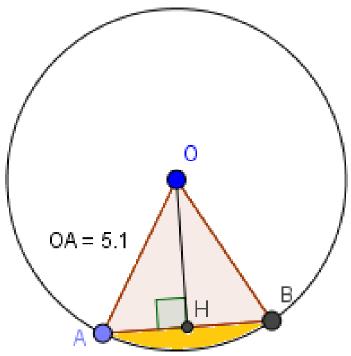
Bài 7. Tính diện tích hình quạt trong hình vẽ sau:



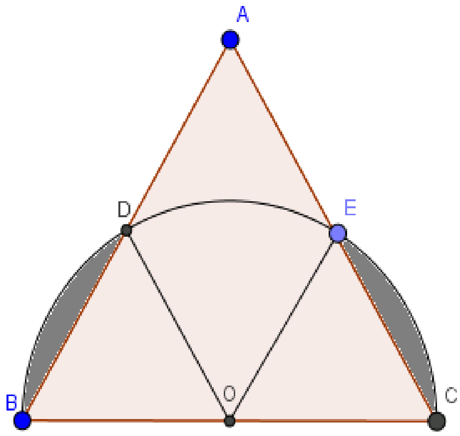
Bài 8. Dựa vào hình vẽ sau, tính diện hình vành khăn tạo thành từ hai đường tròn đồng tâm có bán kính R_1, R_2.



Bài 9. Dựa vào hình vẽ sau, tính diện tích hình viên phân, biết $\widehat{AOB} = 60^0; OA = 5,1(cm)$



Bài 10. Dựa vào hình vẽ sau, tính diện tích hình viên phân tạo thành từ tam giác đều cạnh 10cm với đường tròn tâm O.



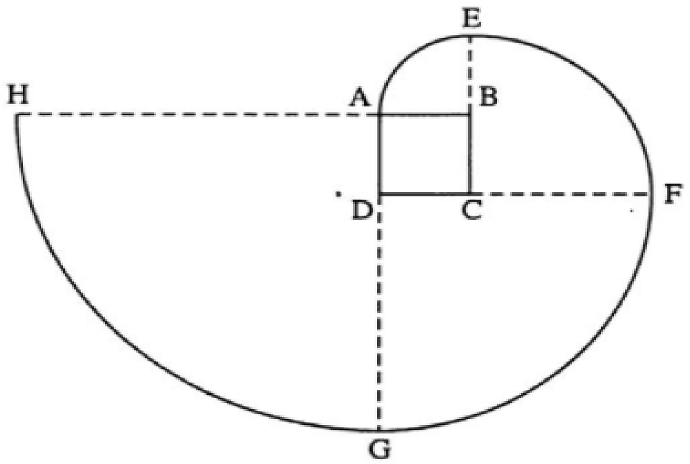
Bài 11. Cho (O) đường kính $AB = 4\sqrt{3}(cm)$, điểm C thuộc (O) sao cho $\widehat{ABC} = 30^0$. Tính diện tích viên phân AC.

Bài 12. Cho đường tròn (O; R) và một điểm M sao cho OM = 2R. Từ M vẽ các tiếp tuyến MA và MB với A, B là các tiếp điểm.

a) Tính độ dài cung nhỏ AB.

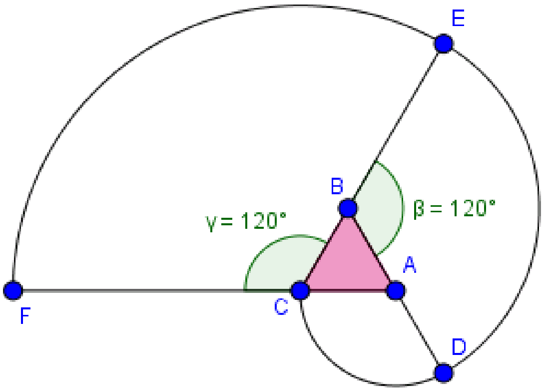
b) Tính diện tích giới hạn bởi hai tiếp tuyến AM; BM và cung nhỏ AB.

Bài 13. Cho hình vẽ:

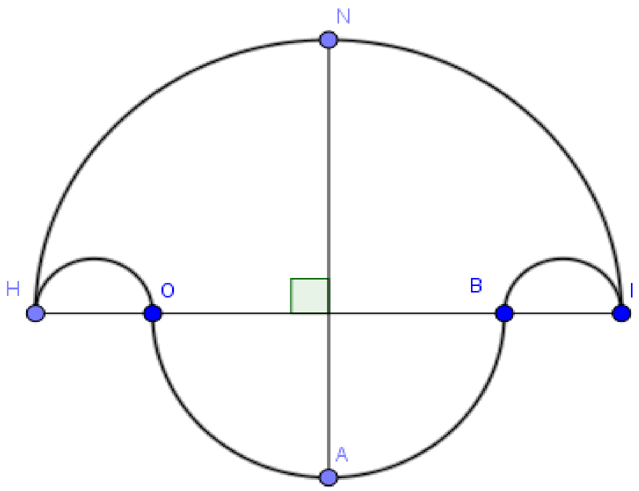


Biết AB = 1cm Tính độ dài đường cong AEFGH.

Bài 14. Dựa vào hình vẽ sau, tính diện tích hình quạt ACD, biết $AB = 5(cm)$.



Bài 15. Hình vẽ sau tạo thành từ các cung tròn của các đường tròn đường kính HI, HO, OB. Tính diện tích hình HOABINH, biết $HI = 20(cm), BI = 2(cm)$.



DẠNG 2

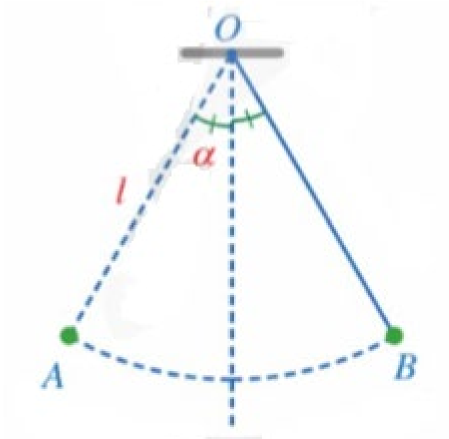
ỨNG DỤNG THỰC TIỄN

Bài 1. Hình quạt tô màu đỏ ở hình vẽ bên dưới có bán kính bằng 2 dm và góc ở tâm bằng 150°.

a) Tính diện tích của hình quạt đó.

b) Tính chiều dài cung tương ứng với hình quạt tròn đó.

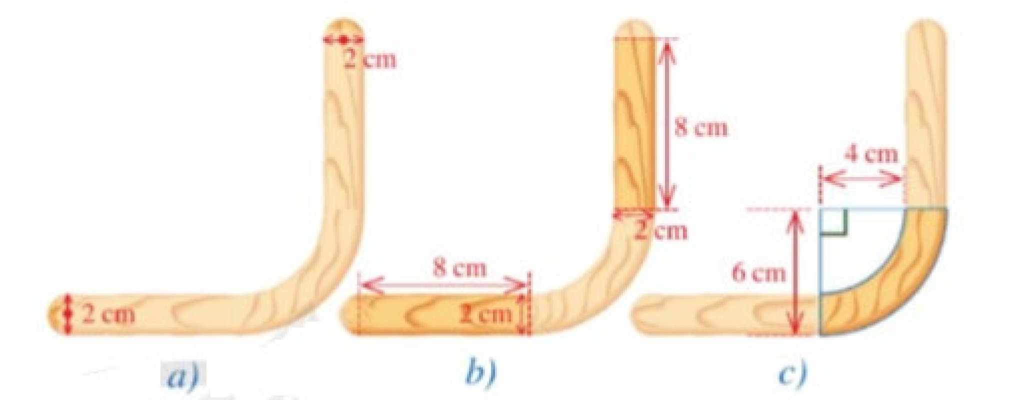
Bài 2. Một con lắc di chuyển từ vị trí A đến vị trí B *(Hình vẽ)*. Tính độ dài quãng đường AB mà con lắc đó đã di chuyển, biết rằng sợi dây OA có độ dài bằng $l = 2(cm)$ và tia OA tạo với phương thẳng đứng góc $\alpha = 15^0$.



Bài 3. Bánh xe (khi bơm căng) của một chiếc xe đạp có đường kính 650 mm. Biết rằng khi giò đĩa quay một vòng thì bánh xe đạp quay được khoảng 3,3 vòng (hình vẽ). Hỏi chiếc xe đạp di chuyển được quãng đường dài bao nhiêu mét sau khi người đi xe đạp 10 vòng liên tục?

Bài 4. Hình vẽ bên dưới mô tả mặt cắt của chiếc đèn led có dạng hình vành khuyên màu trắng với bán kính các đường tròn lần lượt là 15 cm, 18 cm, 21 cm, 24 cm. Tính diện tích hai hình vành khuyên đó.

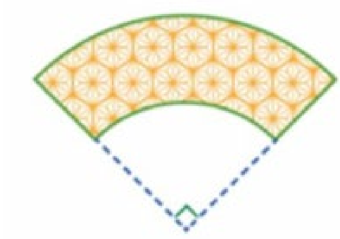
Bài 5. Hình vẽ bên dưới mô tả mặt cắt của một khung gỗ có dạng ghép của năm hình: hai nửa hình tròn đường kính 2 cm; hai hình chữ nhật kích thước 2 cm × 8 cm (*Hình b*); một phần tư hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm có bán kính lần lượt là 4 cm và 6 cm. Tính diện tích của mặt cắt của khung gỗ đó.



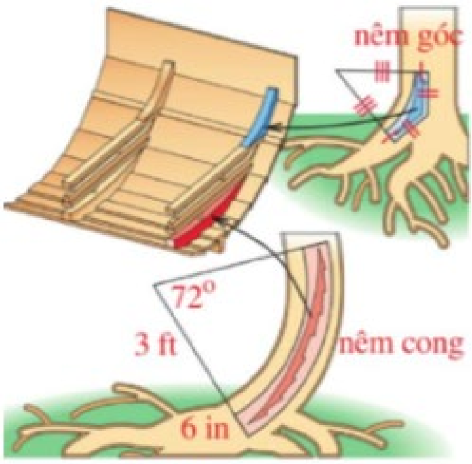
BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6. Mặt đĩa CD ở *Hình 93* có dạng hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn có bán kính lần lượt là 1,5 cm và 6 cm. Hình vành khuyên đó có diện tích bằng bao nhiêu centimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

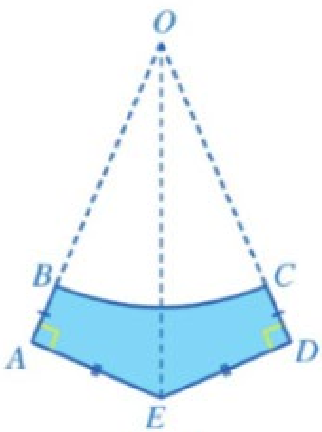
Bài 7. Hình vẽ bên dưới mô tả mảnh vải có dạng một phần tư hình vành khuyên, trong đó hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm và có bán kính lần lượt là 3 dm và 5 dm. Diện tích của mảnh vải đó bằng bao nhiêu decimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



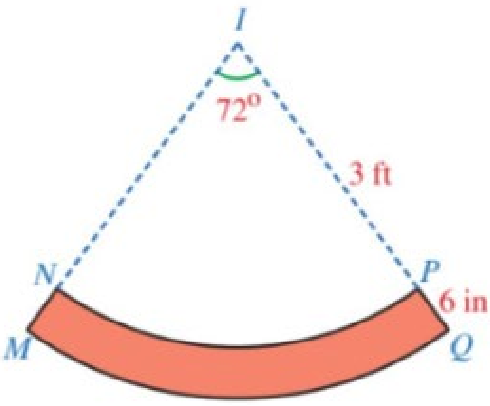
Bài 8. Khi đóng đáy thuyền cho những con thuyền vượt biển, người Vikings sử dụng hai loại nêm: nêm góc và nêm cong (lần lượt tô màu xanh, màu đỏ trong *Hình 1*). Mặt cắt ABCD của nêm góc có dạng hai tam giác vuông OAE, ODE bằng nhau với cạnh huyền chung và bỏ đi hình quạt tròn OBC (*Hình 2*), được làm từ những thân cây mọc thẳng. Mặt cắt MNPQ của nêm cong có dạng một phần của hình vành khuyên (*Hình 3*), được làm từ những thân cây cong. Kích thước của nêm cong được cho như ở *Hình 3*.



Hình 1



Hình 2

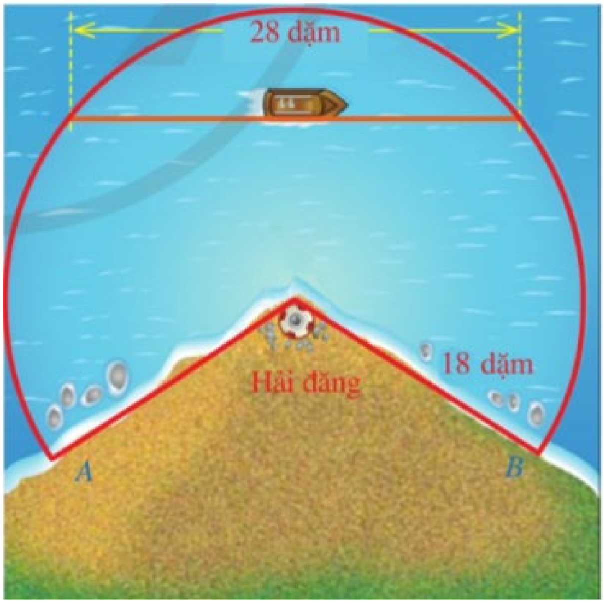


Hình 3

a) Diện tích của nêm cong là bao nhiêu centimét vuông (lấy 1 ft = 30,48 cm, 1 in = 2,54 cm và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

b) Cần phải biết những kích thước nào của nêm góc để tính được diện tích của nêm đó?

Bài 9. Hình vẽ bên dưới biểu diễn vùng biển được chiếu sáng bởi một hải đăng có dạng một hình quạt tròn với bán kính 18 dặm, cung AmB có số đo 245°.



a) Hãy tính diện tích vùng biển có thể nhìn thấy ánh sáng từ hải đăng theo đơn vị kilômét vuông (lấy 1 dặm = 1 609 m và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

b) Giả sử một con thuyền di chuyển dọc theo dây cung có độ dài 28 dặm của đường tròn với tâm là tâm của hình quạt tròn, bán kính là 18 dặm. Tính khoảng cách nhỏ nhất từ con thuyền đến hải đăng (theo đơn vị dặm và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

BÀI 5

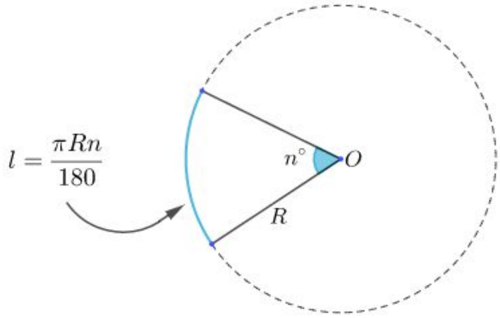
ĐỘ DÀI CUNG TRÒN

DIỆN TÍCH HÌNH QUẠT

DIỆN TÍCH HÌNH VÀNH KHĂN

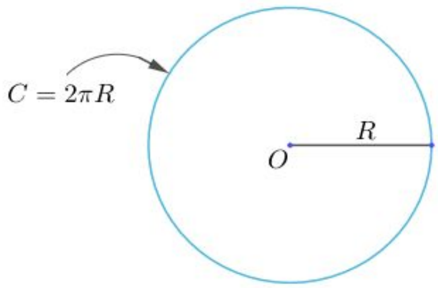
1. Độ dài cung tròn

Trong một đường tròn bán kính R, độ dài l của một cung n^0 được tính theo công thức: $l=\dfrac{\pi R.n}{180}$.



Chú ý:

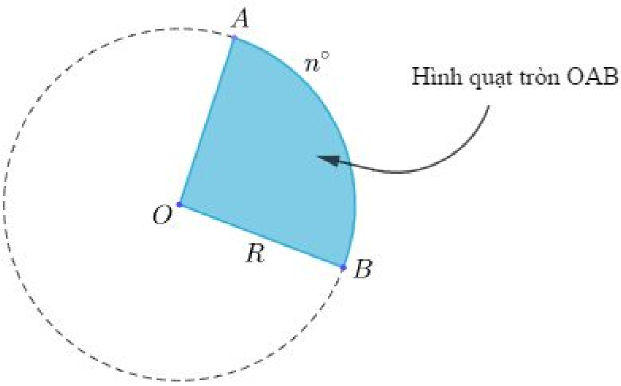
- Chu vi đường tròn đường kính d là $C=\pi d$
- Chu vi đường tròn bán kính R là $C=2\pi R$



2. Diện tích hình quạt tròn

Hình quạt tròn (hay còn gọi tắt là hình quạt) là một phần hình tròn giới hạn bởi cung tròn và hai bán kính đi qua hai mút của cung đó.

Diện tích hình quạt tròn bán kính R, cung n^0 là: $S=\dfrac{\pi R^2 n}{360}$

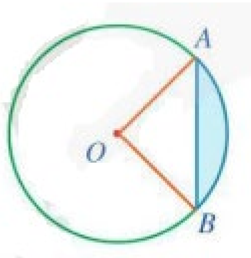


Chú ý:

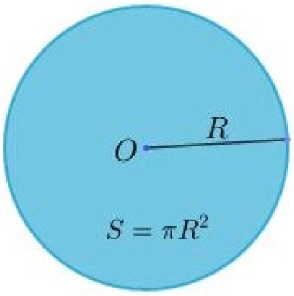
- Gọi l là độ dài cung tròn có số đo n^0 thì diện tích hình quạt tròn bán kính R, cung có số đo n^0 là:

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi R n}{180} = \frac{l.R}{2}$$

- Hình viên phân là hình giới hạn bởi một cung tròn và dây cung của đường tròn.



- Diện tích của một hình tròn bán kính R là: $S = \pi R^2$

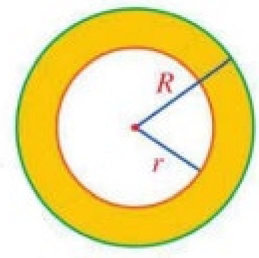


3. Diện tích hình vành khuyên

Hình giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm được gọi là hình vành khuyên.

Hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn $(O;R)$ và $(O;r)$ (với $R > r$) có diện tích là:

$$S = \pi\left(R^2 - r^2\right)$$



DẠNG 1
TÍNH ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN, CUNG TRÒN
TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN, HÌNH QUẠT TRÒN
TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH VÀNH KHĂN

- Chu vi đường tròn bán kính R là $C = 2\pi R$
- Trong một đường tròn bán kính R, độ dài l của một cung n^0 là: $l = \dfrac{\pi R.n}{180}$.
- Diện tích của một hình tròn bán kính R là: $S = \pi R^2$
- Diện tích hình quạt tròn bán kính R, cung n^0 là: $S = \dfrac{\pi R^2 n}{360}$
- Diện tích hình quạt tròn bán kính R, l là độ dài cung tròn có số đo n^0 là: $S = \dfrac{l.R}{2}$
- Hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn $(O;R)$ và $(O;r)$ có diện tích là: $S = \pi\left(R^2 - r^2\right)$

Bài 1. Tính chu vi của đường tròn bán kính 5 cm (theo đơn vị centimet và làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

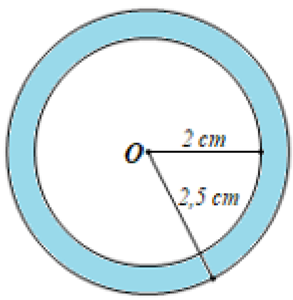
Lời giải

Chu vi của đường tròn là: C = 2π.5 = 10π ≈ 31,4 (cm).

Bài 2. Tính diện tích của hình vành khuyên đó giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm và có bán kính lần lượt là 2,5 cm; 2 cm.

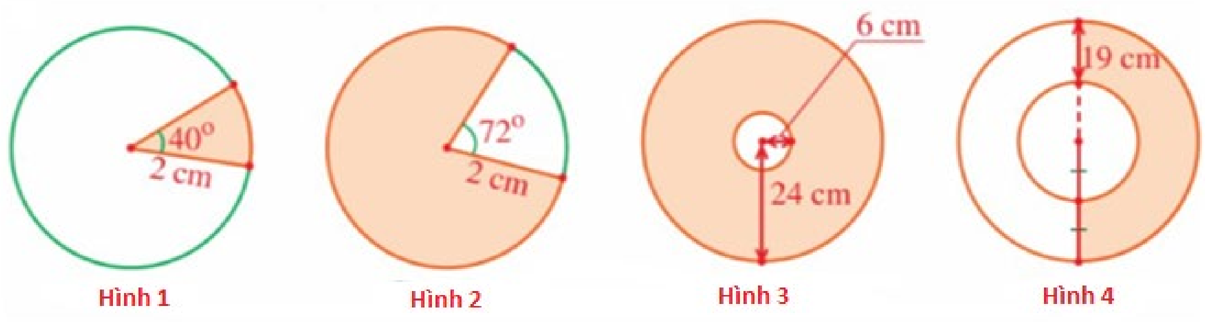
Lời giải

Hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm O và có bán kính lần lượt là 2,5 cm; 2 cm được tô màu xanh như hình vẽ dưới đây:



Diện tích của hình vành khuyên tô màu xanh là: $S = \pi\left(R^2 - r^2\right) = \pi\left(2,5^2 - 2^2\right) = \dfrac{9\pi}{4}\left(cm^2\right)$

Bài 3. Quan sát các hình 1, 2, 3, 4.



a) Tính diện tích phần được tô màu mỗi hình đó.

b) Tính độ dài cung tròn được tô màu xanh ở mỗi hình 1, 2

Lời giải

a)

- Hình 1: Diện tích hình quạt tròn có bán kính 2 cm, số đo cung 40° là: $S=\frac{\pi.2^2.40}{360}=\frac{4\pi}{9}\left(cm^2\right)$

Vậy diện tích phần được tô màu là: $S=\frac{4\pi}{9}\left(cm^2\right)$

- Hình 2: Diện tích hình tròn có bán kính 2 cm là $S_1=\pi.2^2=4\pi\left(cm^2\right)$

Diện tích hình quạt tròn có bán kính 2 cm, số đo cung 72° là: $S_2=\frac{\pi.2^2.72}{360}=\frac{4\pi}{5}\left(cm^2\right)$

Vậy diện tích phần được tô màu là: $S=S_1-S_2=4\pi-\frac{4\pi}{5}=\frac{16\pi}{5}\left(cm^2\right)$

- Hình 3: Diện tích phần được tô màu chính là diện tích hình vành khuyên được giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm bán kính 24 cm và 6 cm, và bằng: $S=\pi\left(24^2-6^2\right)=540\pi\left(cm^2\right)$

- Hình 4: Đường tròn nhỏ bên trong có bán kính là 19 cm. Đường tròn to bên ngoài có bán kính là 2.19 = 38 cm.

Diện tích phần được tô màu chính là nửa diện tích hình vành khuyên được giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm có bán kính 38 cm và 19 cm, và bằng: $S=\frac{1}{2}\pi\left(38^2-19^2\right)=\frac{1083\pi}{2}\left(cm^2\right)$

b) Tính độ dài cung tròn theo công thức $l=\frac{\pi R.n}{180}$.

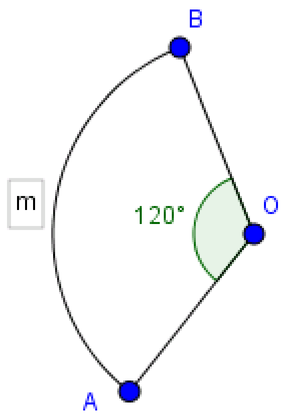
- Hình 1: Số đo cung tròn được tô màu xanh là: 360° – 40° = 320°.

Độ dài cung tròn được tô màu xanh là: $l=\frac{\pi.2.320}{180}=\frac{32\pi}{9}(cm)$

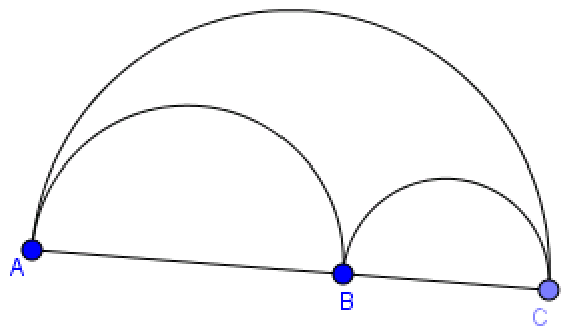
- Hình 2: Độ dài cung tròn được tô màu xanh là: $l=\frac{\pi.2.72}{180}=\frac{4\pi}{5}(cm)$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

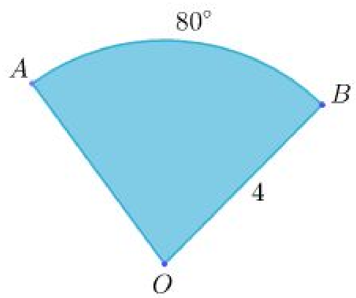
Bài 4. Dựa vào hình vẽ sau, So sánh độ dài cung $\overset\frown{AmB}$ và đường gấp khúc AOB.



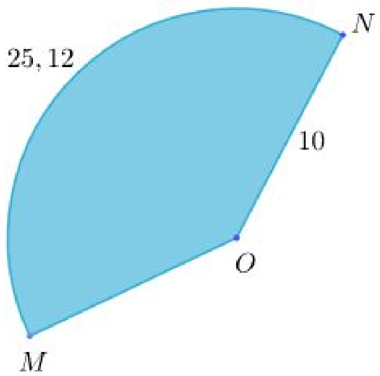
Bài 5. Dựa vào hình vẽ sau, chứng minh độ dài nửa đường tròn đường kính AC bằng tổng độ dài nửa đường tròn đường kính AB và BC.



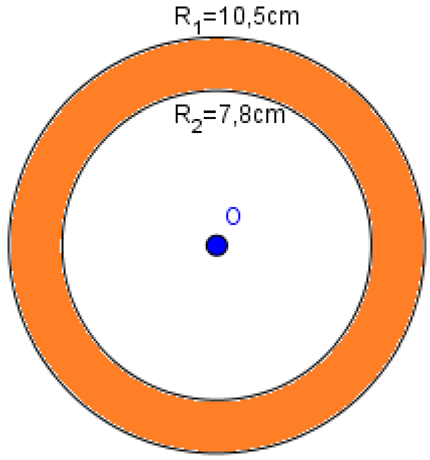
Bài 6. Tính diện tích hình quạt trong hình vẽ sau:



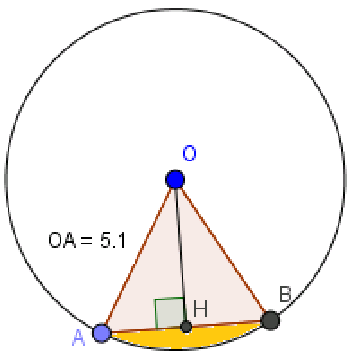
Bài 7. Tính diện tích hình quạt trong hình vẽ sau:



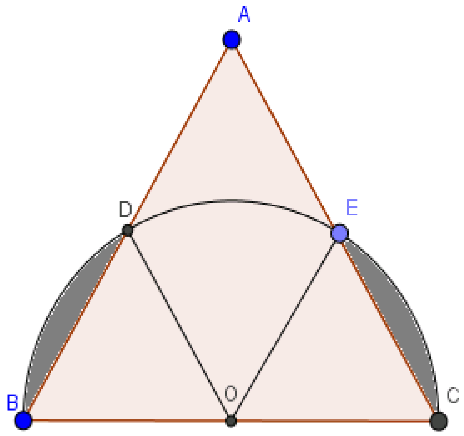
Bài 8. Dựa vào hình vẽ sau, tính diện hình vành khăn tạo thành từ hai đường tròn đồng tâm có bán kính R_1, R_2.



Bài 9. Dựa vào hình vẽ sau, tính diện tích hình viên phân, biết $\widehat{AOB}=60^0; OA=5,1(cm)$

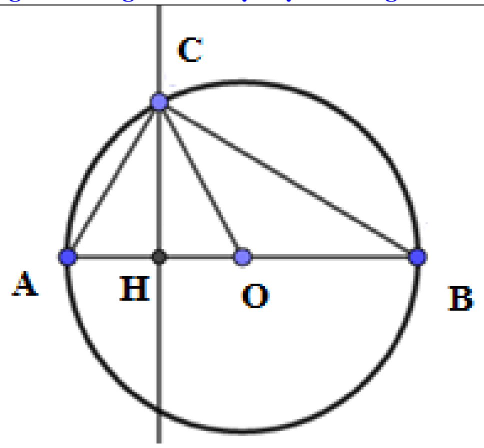


Bài 10. Dựa vào hình vẽ sau, tính diện tích hình viên phân tạo thành từ tam giác đều cạnh 10cm với đường tròn tâm O.



Bài 11. Cho (O) đường kính $AB=4\sqrt{3}(cm)$, điểm C thuộc (O) sao cho $\widehat{ABC}=30^0$. Tính diện tích viên phân AC.

Lời giải



Xét đường tròn (O) có: $\widehat{ABC}, \widehat{AOC}$ là góc nội tiếp và góc ở tâm chắn cung $\overset{\frown}{AC}$

$\Rightarrow \widehat{AOC} = 2.\widehat{ABC} = 2.30^0 = 60^0$

Diện tích hình quạt tròn AOC là: $S_{quatAOC} = \dfrac{\pi R^2.60^0}{360} = \dfrac{\pi R^2}{6}$

Xét tam giác AOC có:

$\widehat{AOC} = 60^0$

OA = OC = R

Do đó tam giác AOC là tam giác đều cạnh bằng R.

Gọi CH là đường cao của tam giác AOC

Ta có: $\sin 60^0 = \dfrac{HC}{OC}$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

$\Rightarrow CH = OC.\sin 60^0 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}(cm)$

Diện tích tam giác AOC là: $S_{AOC} = \dfrac{1}{2}HC.AO = \dfrac{1}{2}\dfrac{R\sqrt{3}}{2}.R = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}(cm^2)$

Diện tích viên phân AC là :

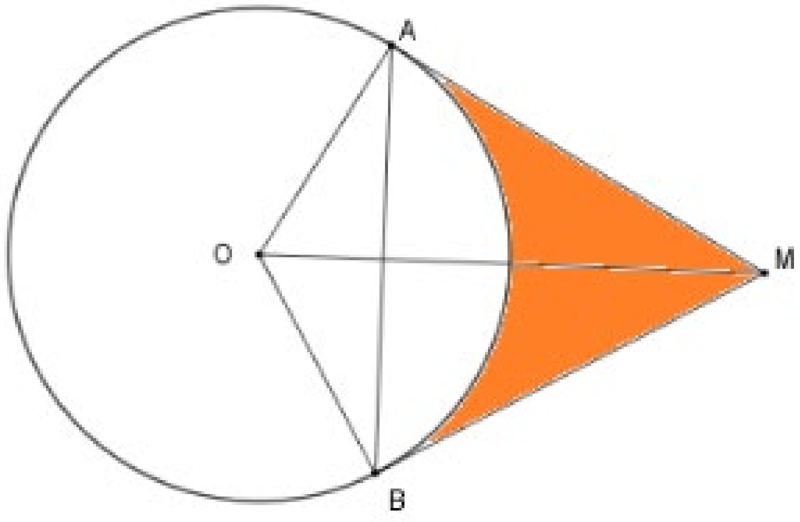
$$S_{quatAOC} - S_{AOC} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).R^2 = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).\left(2\sqrt{3}\right)^2 = \left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)\left(cm^2\right)$$

Bài 12. Cho đường tròn (O; R) và một điểm M sao cho OM = 2R. Từ M vẽ các tiếp tuyến MA và MB với A, B là các tiếp điểm.

a) Tính độ dài cung nhỏ AB.

b) Tính diện tích giới hạn bởi hai tiếp tuyến AM; BM và cung nhỏ AB.

Lời giải



a) Vì AM là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên AM vuông góc với OA.

Xét tam giác OAM vuông tại A ta có:

$\cos \widehat{AOM} = \dfrac{AO}{MO} = \dfrac{R}{2R} = \dfrac{1}{2}$ (tỉ số lượng giác trong tam giác vuông)

$\Rightarrow \widehat{AOM} = 60^0$.

Mà OM là tia phân giác của góc $\widehat{AOB}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow \widehat{AOB} = 120^0$

Độ dài cung $\overset{\frown}{AB}$ là: $l = \dfrac{120.\pi R}{180} = \dfrac{2\pi R}{3}(cm)$

b) Xét tam giác OAM vuông tại A ta có:

$AM^2 + AO^2 = OM^2$ (định lý Py – ta – go)

$\Leftrightarrow AM^2 + R^2 = (2R)^2$

$\Leftrightarrow AM = R\sqrt{3}$

Diện tích tam giác OAM là: $S = \dfrac{1}{2}AM.OA = \dfrac{1}{2}R.\sqrt{3}R = \dfrac{R^2.\sqrt{3}}{2}$ (đơn vị diện tích)

Xét tam giác AOM và tam giác BOM có:

OM chung

AO = BO = R

AM = BM (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Do đó ΔAOM = ΔBOM (c – c – c)

$\Rightarrow S_{\Delta AOM} = S_{\Delta BOM} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{2}$

$S_{AMBO} = S_{\Delta AOM} + S_{\Delta BOM} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{2} + \dfrac{R^2\sqrt{3}}{2} = R^2\sqrt{3}$

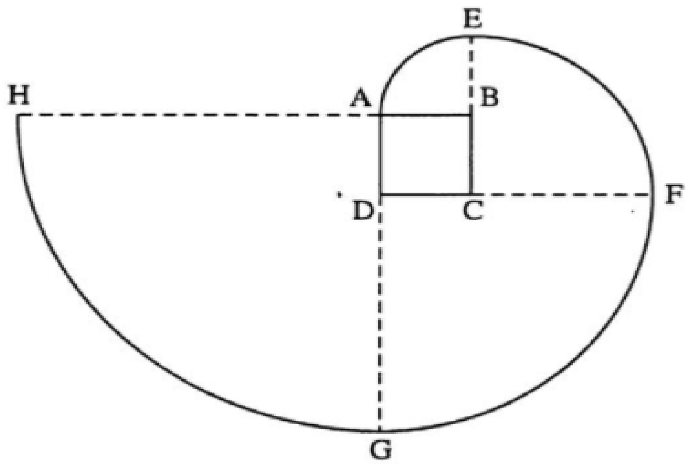
Diện tích quạt tròn $\overset{\frown}{AB}$ là:

$S_{quat}=\dfrac{\pi R^2.120^0}{360^0}=\dfrac{\pi R^2}{3}$ (đơn vị diện tích)

Diện tích phần giới hạn bởi tiếp tuyến MA; MB và cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ là:

$S=S_{AMBO}-S_{quat}=R^2\sqrt{3}-\dfrac{\pi R^2}{3}=\left(\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)R^2$ (đơn vị diện tích)

Bài 13. Cho hình vẽ:



Biết AB = 1cm Tính độ dài đường cong AEFGH.

Lời giải

Đường cong AE là cung của đường tròn bán kính AB = 1cm.

Độ dài đường cong AE là: $l_1=\dfrac{1.90.\pi}{180}=\dfrac{\pi}{2}(cm)$

Đường cong EF là cung của đường tròn bán kính CE = CB + BE = 1 + 1 = 2cm.

Độ dài đường cong EF là: $l_2=\dfrac{2.90.\pi}{180}=\pi(cm)$

Đường cong FG là cung của đường tròn bán kính DF = DC + CF = 1 + 2 = 3cm.

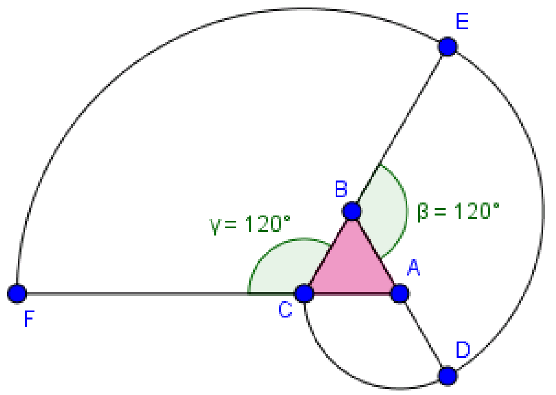
Độ dài đường cong FG là: $l_3=\dfrac{3.90.\pi}{180}=\dfrac{3\pi}{2}(cm)$

Đường cong GH là cung của đường tròn bán kính AG = AD + DG = 1 + 3 = 4cm

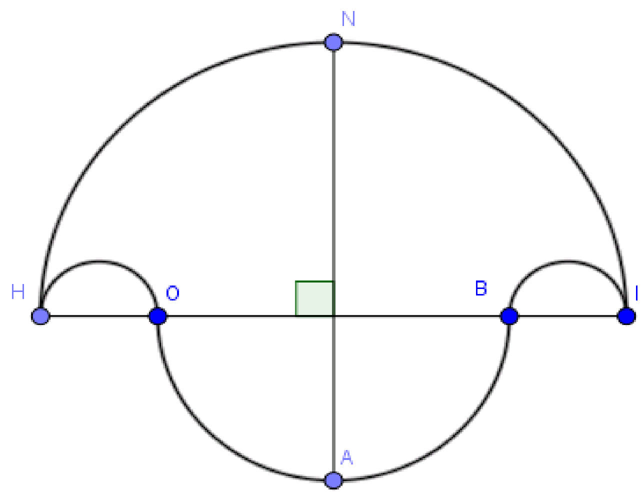
Độ dài đường cong HG là: $l_4=\dfrac{4.90.\pi}{180}=2\pi(cm)$

Độ dài đường cong AEFGH là: $l_1+l_2+l_3+l_4=5\pi(cm)$

Bài 14. Dựa vào hình vẽ sau, tính diện tích hình quạt ACD, biết $AB=5(cm)$.



Bài 15. Hình vẽ sau tạo thành từ các cung tròn của các đường tròn đường kính HI, HO, OB. Tính diện tích hình HOABINH, biết $HI = 20(cm), BI = 2(cm)$.



DẠNG 2
ỨNG DỤNG THỰC TIỄN

Bài 1. Hình quạt tô màu đỏ ở hình vẽ bên dưới có bán kính bằng 2 dm và góc ở tâm bằng 150°.

a) Tính diện tích của hình quạt đó.

b) Tính chiều dài cung tương ứng với hình quạt tròn đó.

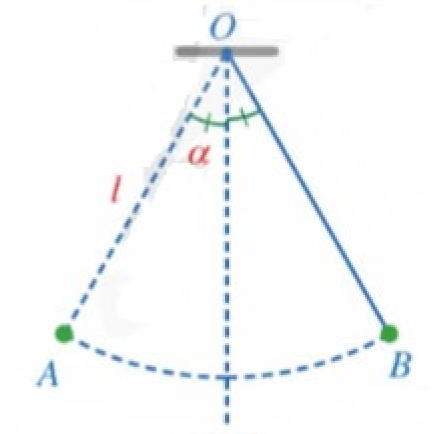
Lời giải

a) Diện tích hình quạt đó là: $l=\dfrac{\pi.2^2.150}{360}=\dfrac{5\pi}{3}(dm)$

b) Ta có $S=\dfrac{lR}{2}\Rightarrow l=\dfrac{2S}{R}=\dfrac{2.\dfrac{5\pi}{3}}{2}=\dfrac{5\pi}{3}(dm)$

Vậy độ dài cung tương ứng với hình quạt tròn đó là: $\dfrac{5\pi}{3}(dm)$.

Bài 2. Một con lắc di chuyển từ vị trí A đến vị trí B *(Hình vẽ)*. Tính độ dài quãng đường AB mà con lắc đó đã di chuyển, biết rằng sợi dây OA có độ dài bằng $l=2(cm)$ và tia OA tạo với phương thẳng đứng góc $\alpha=15^0$.



Lời giải

Ta có $\widehat{AOB}=2.\alpha=2.15^0=30^0$ là số đo của cung AB.

Độ dài quãng đường AB mà con lắc đó đã di chuyển là: $l=\dfrac{\pi R.n}{180}=\dfrac{\pi.2.30}{180}=\dfrac{\pi}{3}(cm)$

Bài 3. Bánh xe (khi bơm căng) của một chiếc xe đạp có đường kính 650 mm. Biết rằng khi giò đĩa quay một vòng thì bánh xe đạp quay được khoảng 3,3 vòng (hình vẽ). Hỏi chiếc xe đạp di chuyển được quãng đường dài bao nhiêu mét sau khi người đi xe đạp 10 vòng liên tục?

Lời giải

Chu vi của bánh xe là: $C = 650\pi$ (mm).

Khi người đi xe đạp 10 vòng thì xe đạp di chuyển được quãng đường bằng:

$C = 650\pi \,.\, 3{,}3 \,.\, 10 = 21\,450\pi \approx 6\,738{,}72$ (mm) $= 6{,}738$ (m).

Vậy chiếc xe đạp di chuyển được quãng đường dài khoảng 6,738 mét sau khi người đi xe đạp 10 vòng liên tục.

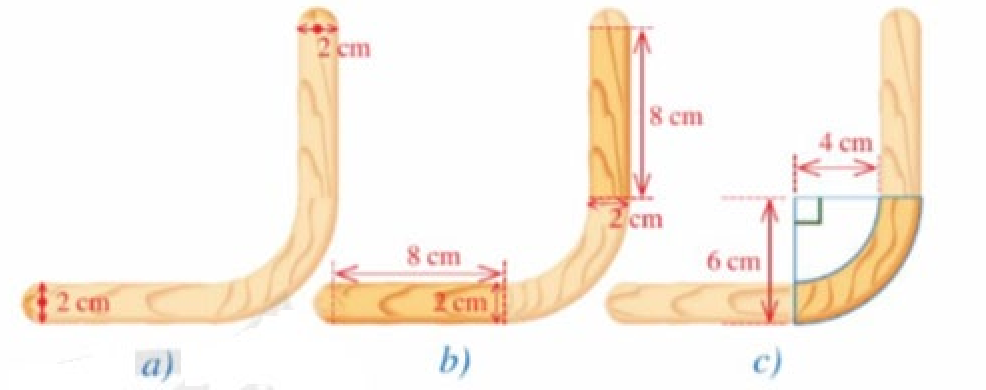
Bài 4. Hình vẽ bên dưới mô tả mặt cắt của chiếc đèn led có dạng hình vành khuyên màu trắng với bán kính các đường tròn lần lượt là 15 cm, 18 cm, 21 cm, 24 cm. Tính diện tích hai hình vành khuyên đó.

Lời giải

Diện tích hình vành khuyên bên trong là: $S_1 = \pi(18^2 - 15^2) = 99\pi$ (cm^2).

Diện tích hình vành khuyên bên ngoài là $S_1 = \pi(24^2 - 21^2) = 135\pi$ (cm^2).

Bài 5. Hình vẽ bên dưới mô tả mặt cắt của một khung gỗ có dạng ghép của năm hình: hai nửa hình tròn đường kính 2 cm; hai hình chữ nhật kích thước 2 cm × 8 cm (*Hình b*); một phần tư hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm có bán kính lần lượt là 4 cm và 6 cm. Tính diện tích của mặt cắt của khung gỗ đó.



Lời giải

Tổng diện tích hai nửa hình tròn đường kính 2 cm (bán kính 1 cm) chính là diện tích của một hình tròn bán kính 1 cm, và bằng: $S_1 = \pi.1^2 = \pi\left(cm^2\right)$

Tổng diện tích hai hình chữ nhật kích thước 2 cm × 8 cm là: $S_2 = 2.2.8 = 32\left(cm^2\right)$

Diện tích một phần tư hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm có bán kính lần lượt là 4 cm và 6 cm là: $S_3 = \dfrac{1}{4}\pi\left(6^2 - 4^2\right) = 5\pi\left(cm^2\right)$

Diện tích của mặt cắt của khung gỗ đó là: $S = S_1 + S_2 + S_3 = \pi + 32 + 54 = 32 + 6\pi\left(cm^2\right)$

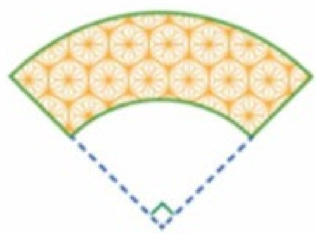
BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6. Mặt đĩa CD ở *Hình 93* có dạng hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn có bán kính lần lượt là 1,5 cm và 6 cm. Hình vành khuyên đó có diện tích bằng bao nhiêu centimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Diện tích mặt đĩa CD có dạng hình vành khuyên là: $S = \pi(6^2 - 1{,}5^2) = 33{,}75\pi \approx 106$ (cm^2).

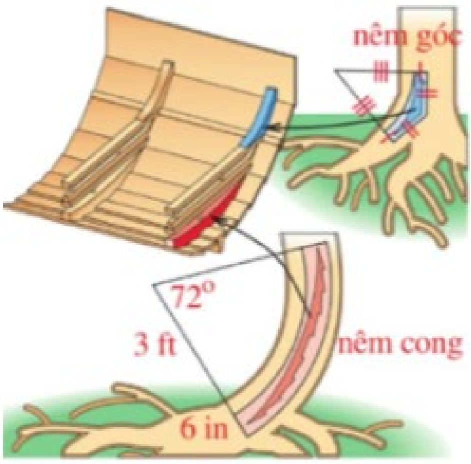
Bài 7. Hình vẽ bên dưới mô tả mảnh vải có dạng một phần tư hình vành khuyên, trong đó hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm và có bán kính lần lượt là 3 dm và 5 dm. Diện tích của mảnh vải đó bằng bao nhiêu decimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



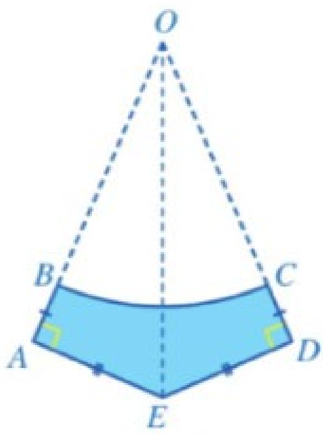
Lời giải

Diện tích mảnh vải có dạng một phần tư hình vành khuyên là: $S_3 = \frac{1}{4}\pi\left(5^2 - 3^2\right) = 4\pi \approx 12,6\left(dm^2\right)$

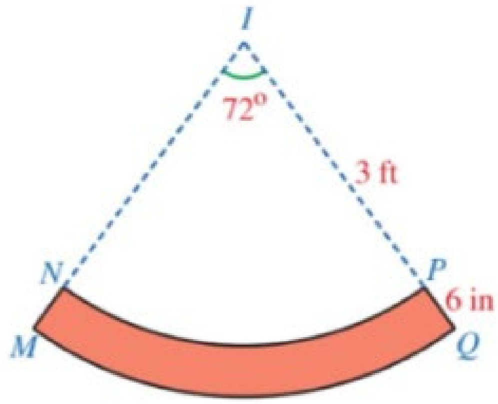
Bài 8. Khi đóng đáy thuyền cho những con thuyền vượt biển, người Vikings sử dụng hai loại nêm: nêm góc và nêm cong (lần lượt tô màu xanh, màu đỏ trong *Hình 1*). Mặt cắt ABCD của nêm góc có dạng hai tam giác vuông OAE, ODE bằng nhau với cạnh huyền chung và bỏ đi hình quạt tròn OBC (*Hình 2*), được làm từ những thân cây mọc thẳng. Mặt cắt MNPQ của nêm cong có dạng một phần của hình vành khuyên (*Hình 3*), được làm từ những thân cây cong. Kích thước của nêm cong được cho như ở *Hình 3*.



Hình 1



Hình 2



Hình 3

a) Diện tích của nêm cong là bao nhiêu centimét vuông (lấy 1 ft = 30,48 cm, 1 in = 2,54 cm và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

b) Cần phải biết những kích thước nào của nêm góc để tính được diện tích của nêm đó?

Lời giải

Đổi 3ft = 91,44 cm; 6 in = 15,24 cm.

a) Bán kính IQ là 91,44 + 15,24 = 106,68 (cm).

Diện tích của nêm cong MNPQ là: S = π(106,68^2 – 15,24^2) = 11148,3648π (cm^2) ≈ 35 024 (cm^2).

b) Diện tích nêm góc ABCD là:

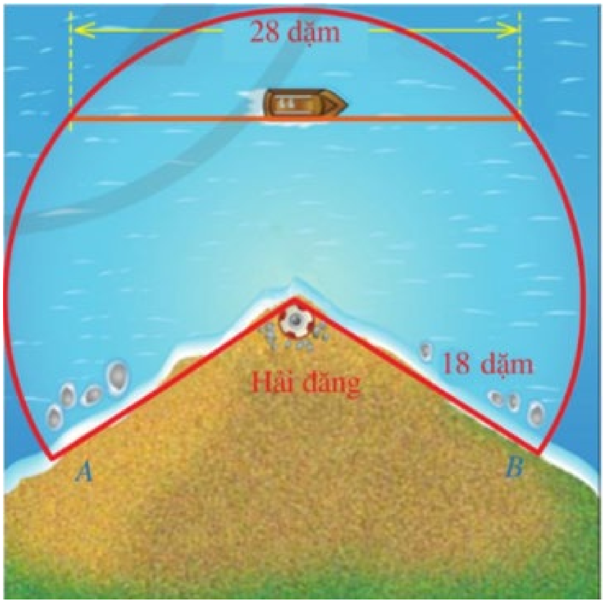
$$S = 2S_{\Delta AOE} - S_{hinhquatOBC} = 2.\frac{1}{2}OA.AE - \frac{\pi.OB^2.sđ\,\overset{\frown}{BC}}{360} = OA.AE - \frac{\pi.OB^2.\widehat{BOC}}{360} = OA.AE - \frac{\pi.OB^2.2\widehat{AOE}}{360}$$

Xét ΔOAE vuông tại A, ta có: $AE = OA.\tan\widehat{AOE}$

Do đó $S = OA.OA.\tan\widehat{AOE} - \frac{\pi.OB^2.2\widehat{AOE}}{360} = OA^2.\tan\widehat{AOE} - \frac{\pi.OB^2.2\widehat{AOE}}{360}$

Vậy để tính được diện tích của nêm góc ABCD, ta cần biết những kích thước: OB, OA và số đo $\widehat{AOE}$.

Bài 9. Hình vẽ bên dưới biểu diễn vùng biển được chiếu sáng bởi một hải đăng có dạng một hình quạt tròn với bán kính 18 dặm, cung AmB có số đo 245°.



a) Hãy tính diện tích vùng biển có thể nhìn thấy ánh sáng từ hải đăng theo đơn vị kilômét vuông (lấy 1 dặm = 1 609 m và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

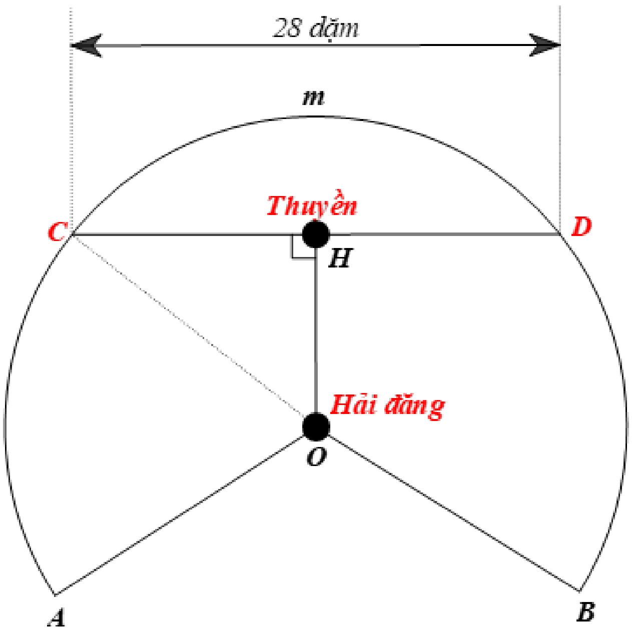
b) Giả sử một con thuyền di chuyển dọc theo dây cung có độ dài 28 dặm của đường tròn với tâm là tâm của hình quạt tròn, bán kính là 18 dặm. Tính khoảng cách nhỏ nhất từ con thuyền đến hải đăng (theo đơn vị dặm và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Đổi 1 dặm = 1 609 m = 1,609 km.

a) Diện tích vùng biển có thể nhìn thấy ánh sáng từ hải đăng là: $S = \dfrac{\pi.(18.1,609)^2.245}{360} \approx 1793\left(km^2\right)$

b) Khoảng cách nhỏ nhất từ con thuyền đến ngọn hải đăng chính là đoạn thẳng vuông góc OH từ ngọn hải đăng (điểm O) đến dây cung CD được mô tả bởi hình vẽ sau:



Xét đường tròn (O) có OH $\perp$ CD tại H nên H là trung điểm của CD.

Khi đó $CH = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}.28 = 14\left(km^2\right)$ (dặm).

Xét ΔOHC vuông tại H, theo định lí Pythagore, ta có: $OC^2 = OH^2 + CH^2$

Suy ra $OH^2 = OC^2 - CH^2 = 18^2 - 14^2 = 128$.

Do đó $OH = \sqrt{128} \approx 11$ (dặm).

Vậy khoảng cách nhỏ nhất từ thuyền đến ngọn hải đăng khoảng 11 dặm.