

CHƯƠNG 7

HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

BÀI 1

HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

1. Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

Hàm số xác định với mọi giá trị x thuộc \mathbb{R} .

2. Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

Để vẽ đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$), ta thực hiện các bước sau:

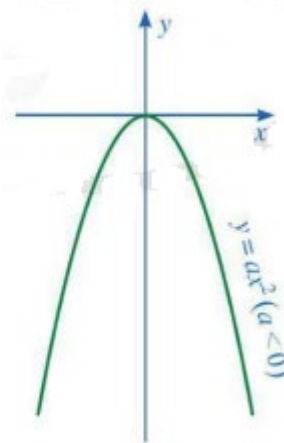
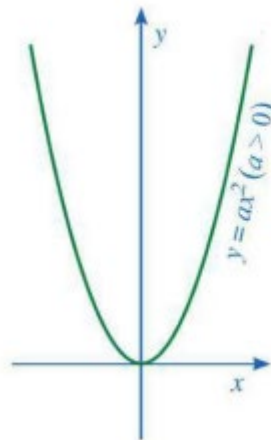
Bước 1. Lập bảng giá trị để tìm giá trị của y tương ứng với một số giá trị cụ thể của x .

Bước 2. Căn cứ vào bảng giá trị, vẽ một số điểm thuộc đồ thị của hàm số đó.

Bước 3. Vẽ parabol đi qua gốc tọa độ và các điểm đã xác định ở bước 2, ta nhận được đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$).

Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) là một đường cong luôn đi qua gốc tọa độ và nhận Oy làm trục đối xứng. Đường cong đó được gọi là Parabol với đỉnh O

- Nếu $a > 0$ thì $y = ax^2$ nằm phía trên trục hoành và O là điểm thấp nhất.
- Nếu $a < 0$ thì $y = ax^2$ nằm phía dưới trục hoành và O là điểm cao nhất.



DẠNG 1**TÍNH GIÁ TRỊ HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM CHO TRƯỚC**

Bài 1. Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$.

a) Tìm giá trị của y tương ứng với giá trị của x trong bảng như sau:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = -\frac{1}{2}x^2$							

b) Tìm những điểm thuộc đồ thị của hàm số có hoành độ lần lượt là $-5, 5, 7$

c) Tìm những điểm thuộc đồ thị của hàm số có tung độ là -18 .

Bài 2. Cho hàm số $y = f(x) = 3x^2$

a) Tìm giá trị của hàm số khi x nhận các giá trị lần lượt là $-3; 2\sqrt{2}; 3 - 2\sqrt{2}$

b) Tìm các giá trị của a , biết rằng $f(a) = 12 + 6\sqrt{3}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$.

a) Tìm giá trị của y tương ứng với giá trị của x trong bảng như sau:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \frac{1}{4}x^2$							

b) Tìm những điểm thuộc đồ thị của hàm số có hoành độ lần lượt là $-8, -6, 5$.

c) Tìm những điểm thuộc đồ thị của hàm số có tung độ là 4 .

d) Tìm những điểm thuộc đồ thị của hàm số có tung độ là -6 .

Bài 4. Cho hàm số $y = f(x) = -2x^2$

a) Tìm giá trị của hàm số khi x nhận các giá trị lần lượt là $-2; 0$ và $3 - 2\sqrt{2}$

b) Tìm các giá trị của a , biết rằng $f(a) = -10 + 4\sqrt{6}$

c) Tìm điều kiện của b biết rằng $f(b) \geq 4b + 6$.

DẠNG 2**VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$)****Bài 1.** Cho hàm số $y = 2x^2$.a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = 2x^2$.b) Các điểm $M(-4; 32)$, $N\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $Q\left(\frac{3}{4}; \frac{9}{16}\right)$ có thuộc đồ thị hàm số hay không?**Bài 2.** Cho hàm số: $y = -\frac{1}{4}x^2$ có đồ thị (P) .a) Vẽ đồ thị (P) .b) Các điểm $E(-8; -16)$, $F\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{36}\right)$, $Q\left(\frac{2}{5}; \frac{4}{100}\right)$ có thuộc đồ thị hàm số hay không?**BÀI TẬP RÈN LUYỆN****Bài 3.** Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$.a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$.b) Các điểm $M\left(-5; -\frac{25}{2}\right)$, $N\left(-\frac{3}{2}; \frac{9}{8}\right)$, $Q\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ có thuộc đồ thị hàm số hay không?**Bài 4.** Cho hàm số $y = 3x^2$.a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = 3x^2$.b) Các điểm $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$, $N\left(\frac{3}{4}; \frac{27}{16}\right)$, $Q\left(\frac{5}{2}; \frac{75}{2}\right)$ có thuộc đồ thị hàm số hay không?c) Tìm những điểm thuộc đồ thị của hàm số có hoành độ là $-\frac{2}{3}$.

d) Tìm những điểm thuộc đồ thị của hàm số có tung độ là 9.

Bài 5. Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^2$.a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{3}x^2$.b) Tìm những điểm thuộc đồ thị của hàm số có tung độ là $-\frac{1}{27}$.**Bài 6.** Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$.a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$.

b) Tìm những điểm thuộc đồ thị của hàm số có tung độ là $\frac{1}{64}$.

Bài 7. Cho hàm số $y = -x^2$ và $y = x - 2$.

a) Vẽ đồ thị hai hàm số $y = -x^2$ và $y = x - 2$ trên cùng hệ trục

b) Các điểm $M(1; -1)$, $N(-2; -4)$, $Q(2; -4)$ có cùng thuộc hai đồ thị hàm số trên hay không?

Bài 8. Cho đồ thị hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P) .

a) Vẽ đồ thị (P) .

b) Tìm các điểm trên Parabol có tung độ bằng 16.

c) Tìm các điểm trên Parabol (khác gốc tọa độ) cách đều hai trục tọa độ.

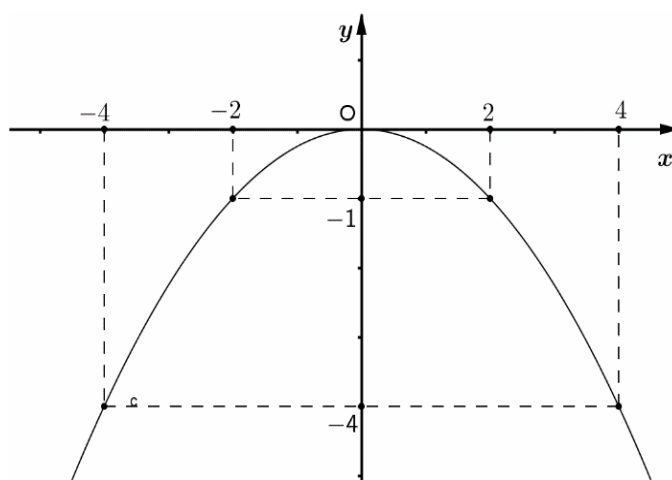
DẠNG 3
XÁC ĐỊNH HỆ SỐ CỦA HÀM SỐ
XÁC ĐỊNH ĐIỂM THUỘC ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Bài 1. Cho đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^2$ (P).

a) Hãy xác định hàm số (P) biết rằng đồ thị của nó đi qua điểm $A(2;4)$.

b) Tìm m sao cho $B(m;m^3)$ thuộc Parabol.

Bài 2. Biết rằng đường cong trong hình bên dưới là một parabol $y = ax^2$



a) Xác định hệ số a .

b) Tìm các điểm trên parabol có hoành độ bằng 6.

c) Tìm các điểm trên parabol có tung độ bằng -25 .

Bài 3. Cho hàm số $y = (2m-1)x^2$ (m là tham số).

a) Tìm các giá trị của m để $y = -2$ khi $x = -1$

b) Tìm giá trị của m biết $(x; y)$ thỏa mãn:
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

Bài 4. Cho hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) có đồ thị là Parabol (P).

a) Xác định a để (P) đi qua điểm $A(-\sqrt{2}; 4)$

b) Với giá trị a vừa tìm được, hãy:

+ Vẽ (P) trên mặt phẳng tọa độ

+ Tìm các điểm trên (P) có tung độ bằng 2

+ Tìm các điểm trên (P) cách đều hai trục tọa độ.

Bài 5. Cho hàm số $y = ax^2$.

a) Xác định hệ số a biết rằng đồ thị của hàm số cắt đường thẳng $y = 2x$ tại điểm A có hoành độ bằng 1.

b) Vẽ đồ thị của hàm số $y = 2x$ và đồ thị hàm số $y = ax^2$ với giá trị của a vừa tìm được ở câu a) trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

c) Dựa vào đồ thị, hãy xác định tọa độ giao điểm thứ hai (khác A) của hai đồ thị vừa vẽ trong câu b).

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$. Xác định giá trị của tham số m để các điểm sau thuộc đồ thị hàm số

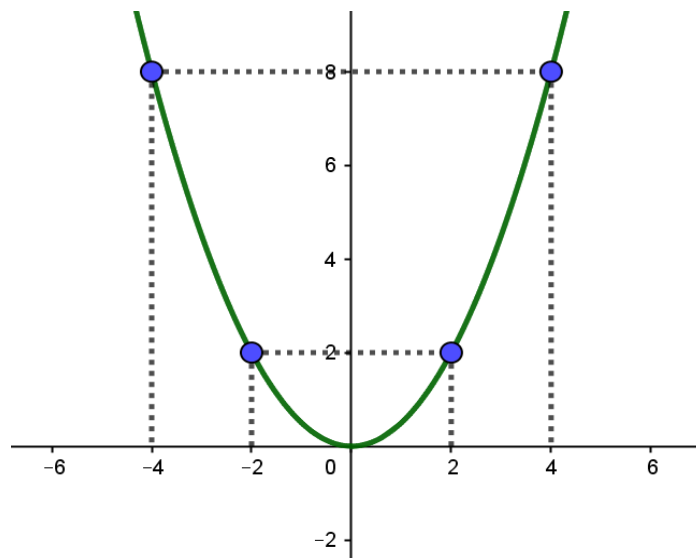
a) $A(2; m)$

b) $B(-\sqrt{2}; m)$

c) $C\left(m; \frac{3}{4}\right)$

Bài 7. Xác định a để parabol $(P): y = (2a + 1)x^2$ đi qua điểm $M(2; -1)$

Bài 8. Biết rằng đường cong trong hình bên dưới là một parabol $y = ax^2$



a) Xác định hệ số a .

b) Tìm các điểm trên parabol có hoành độ bằng -8 .

c) Tìm các điểm trên parabol có tung độ bằng $\frac{81}{2}$.

Bài 9. Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị là Parabol (P) .

a) Vẽ (P) trên hệ trục tọa độ

b) Trong các điểm $A(1; 2); B(-1; -1); C(10; -200)$, điểm nào thuộc (P) , điểm nào không thuộc (P) .

Bài 10. Cho hàm số $y = (3m + 1)x^2$ với $m \neq \frac{-1}{3}$. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số:

a) Đi qua điểm $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$

b) Đi qua điểm $B(x_0; y_0)$ với $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ -4x + 3y = -5 \end{cases}$$

Bài 11. Cho hàm số $y = (2m + 1)x^2$ (m là tham số). Tìm các giá trị của tham số m để:

a) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$

b) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(x_0; y_0)$ với $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x^2 - 2y = 2 \end{cases}$

Bài 12. Tìm tọa độ của tất cả các điểm thuộc parabol $y = -2x^2$ có tung độ bằng -8 .

Bài 13. Cho hàm số $y = (m - 1)x^2$ ($m \neq 1$) có đồ thị là Parabol (P).

a) Xác định m để (P) đi qua điểm $A(-\sqrt{3}; 1)$

b) Với giá trị m vừa tìm được, hãy:

- Vẽ (P) trên mặt phẳng tọa độ
- Tìm các điểm trên (P) có hoành độ bằng 1
- Tìm các điểm trên (P) có tung độ gấp đôi hoành độ.

DẠNG 4

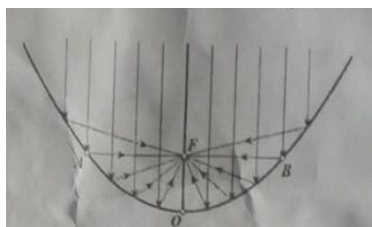
ỨNG DỤNG THỰC TẾ CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = ax^2$

Bài 1. Một xe tải có chiều rộng là 2,4 m chiều cao là 2,5 m muốn đi qua một cái cổng hình parabol. Biết khoảng cách giữa hai chân cổng là 4m và khoảng cách từ đỉnh cổng tới mỗi chân cổng là $2\sqrt{5}$ m (Bỏ qua độ dày của cổng).

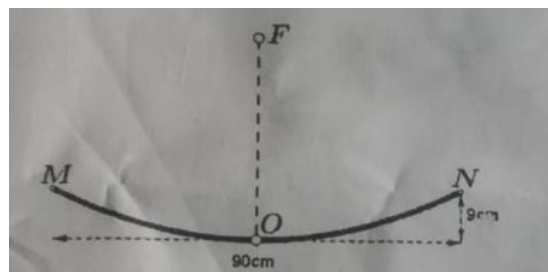
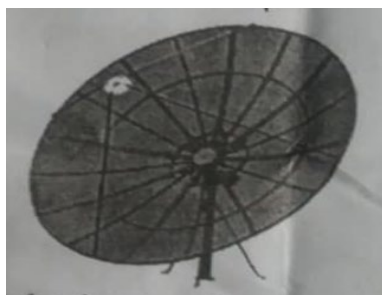
a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy gọi Parabol $(P): y = ax^2$ với $a < 0$ là hình biểu diễn cổng mà xe tải muốn đi qua. Chứng minh $a = -1$.

b) Hỏi xe tải có đi qua cổng được không? Tại sao?

Bài 2. Các ăng ten parabol thu sóng hoạt động dựa theo nguyên lý: mọi tia sóng song song với trục của parabol đều có tia phản xạ đi qua tiêu điểm F của parabol (vì vậy nếu ta đặt thiết bị thu sóng tại F thì sẽ thu sóng được tốt nhất). Người ta chứng minh được rằng: Nếu đường thẳng vuông góc với trục của parabol tại F cắt parabol tại 2 điểm A, B thì $OF = \frac{1}{4}AB$ với O là đỉnh của parabol (tham khảo hình vẽ).



Các tia sáng đều tập trung tại F



Mô hình parabol của một mặt cắt qua trục của một ăng ten parabol

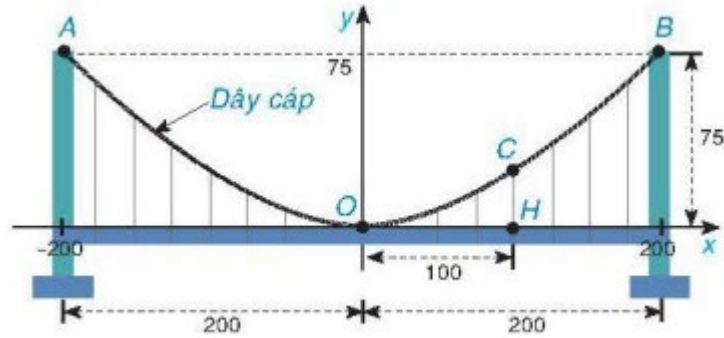
Tính độ dài đoạn OF ứng với mô hình trên của một ăng ten parabol (ngang 90cm và cao 9cm).

BÀI TẬP TỰ RÈN LUYỆN

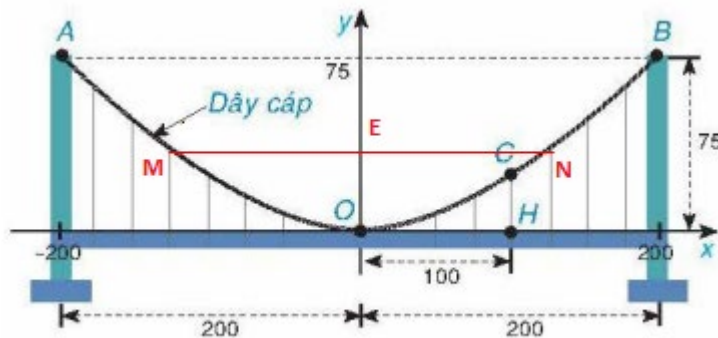
Bài 3. Một cái cổng vòm hình parabol có phương trình $y = -\frac{1}{2}x^2$. Biết chiều rộng là 5m. Hỏi xe tải có chiều rộng là 2,5m và chiều cao là 3m có đi qua được cái cổng trên không?



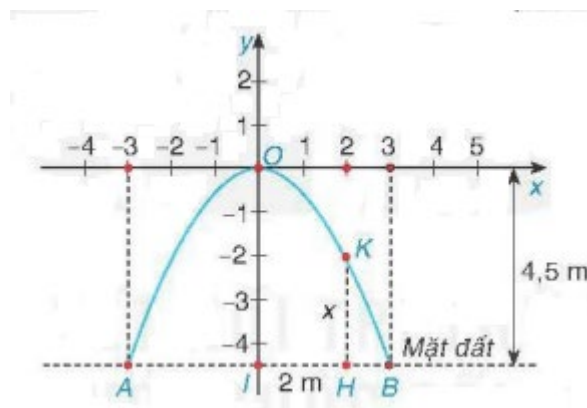
Bài 4. Một cây cầu treo có trụ tháp đôi cao $75m$ so với mặt của cây cầu và cách nhau $400m$. Các dây cáp có dạng đồ thị của hàm số $y = ax^2$ và được treo trên các đỉnh tháp như hình vẽ.



- a) Tính độ dài đoạn CH của dây cáp, biết điểm H cách tâm O của cây cầu là $100m$ (giả sử mặt cầu của cây cầu bằng phẳng).
- b) Nếu có đường thẳng vuông góc với trục Oy tại điểm $E(0;27)$ và đồng thời cắt parabol tại 2 điểm M, N (như hình vẽ) thì khoảng cách hai điểm M, N lần lượt đến tâm O là bao nhiêu?

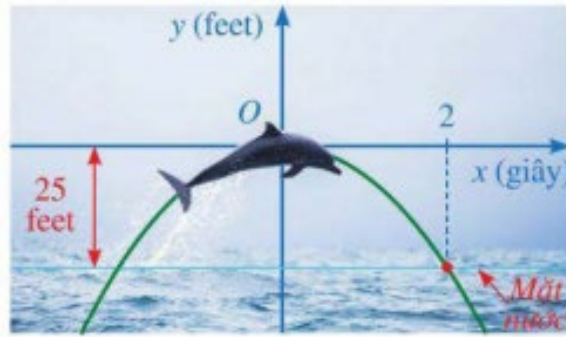


Bài 5. Một cái cổng vòm hình parabol $y = ax^2$ như hình vẽ. Biết chiều rộng của chân cổng là $AB = 6m$ và chiều cao của cổng là $OI = 4,5m$.



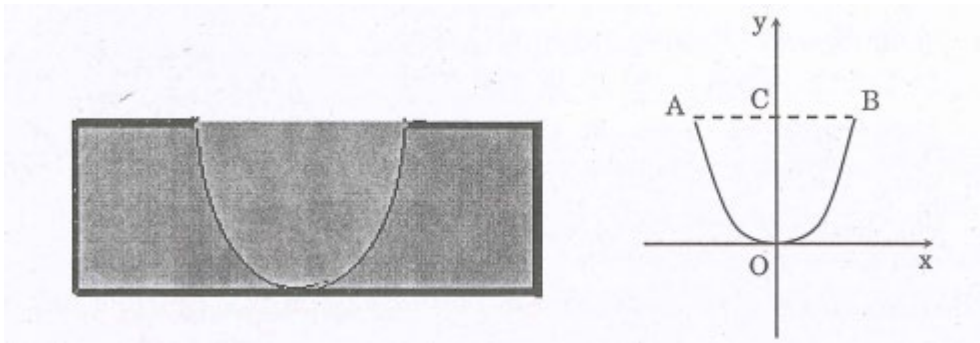
- a) Tính độ dài đoạn HK biết cách điểm H cách điểm chính giữa cổng là $2m$.
- b) Một xe tải có chiều rộng là $2m$ và chiều cao là $3m$ có đi qua được cái cổng trên không?

Bài 6. Cá heo có thể nhảy cao tới 25 feet và thực hiện các thủ thuật như nhảy qua vòng, lộn nhào trong không trung. Giả sử quỹ đạo nhảy của cá heo là parabol $y = ax^2$, với gốc tọa độ là vị trí cao nhất mà cá heo đạt được, cách mặt nước 25 feet, trong đó y được tính theo đơn vị feet và x được tính theo đơn vị giây. Biết rằng sau 2 giây kể từ vị trí cao nhất đó, cá heo rơi chạm mặt nước (như hình vẽ).



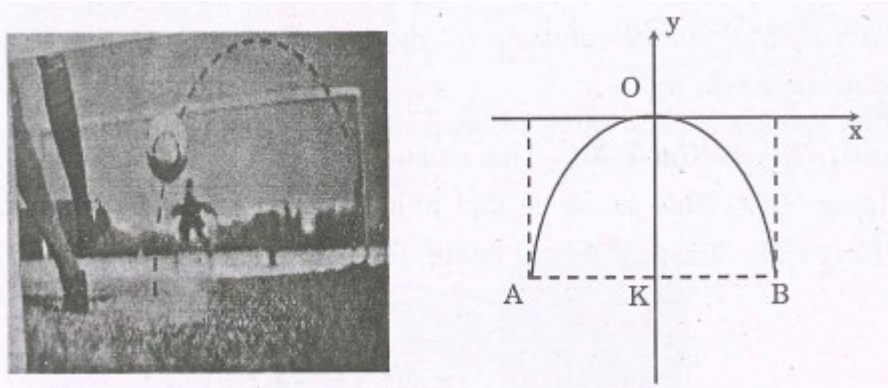
- a) Tìm hàm số biểu thị quỹ đạo nhảy của cá heo.
b) Tìm vị trí cá heo rơi sau 1,5 giây kể từ vị trí cao nhất.

Bài 7. Thiết diện của một cái hồ nước là Parabol $y = ax^2$ (chọn hệ trục tọa độ vuông góc Oxy (hình vẽ), biết rằng bề ngang của thiết diện là $AB = 8\text{m}$, bề sâu của thiết diện $OC = 4\text{m}$).



- a) Xác định hệ số a .
b) Vẽ đồ thị hàm số trên (với hệ số a tìm được) trong mặt phẳng Oxy.

Bài 8. Đường đi của quả bóng theo quỹ đạo là một parabol $y = ax^2$. Một cầu thủ ở vị trí A (hình vẽ), đá một quả bóng bay bổng lên cao đến vị trí O cách mặt đất 15m và rơi xuống vị trí B cách A 30m. Chọn hệ thống trục tọa độ vuông góc Oxy (như hình vẽ)



Xác định tọa độ các điểm A và B trong hệ trục Oxy này. Tính giá trị của hệ số a .

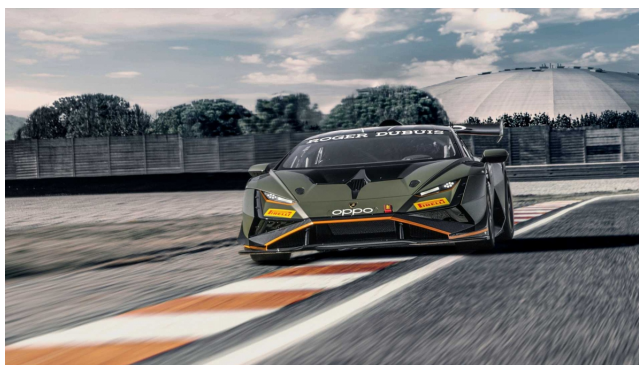
Bài 9. Quỹ đạo đi của một vật rơi tự do không vận tốc đầu cho bởi công thức $y = \frac{1}{2}g.t^2$ (trong đó g là gia tốc trọng trường $g = 10 \text{ m/giây}^2$, t (giây) là thời gian rơi tự do, S là quãng đường rơi tự do). Một vận động viên nhảy dù, nhảy khỏi máy bay ở độ cao 3200 mét (vận tốc ban đầu không đáng kể, bỏ qua các lực cản). Hỏi sau thời gian bao nhiêu giây, vận động viên phải mở dù để khoảng cách đến mặt đất là 1200 mét?



Bài 10. Quãng đường đi (đơn vị là mét) của một xe ô tô đi được trong thời gian t giây được cho bởi công thức $y = at^2$. Giả sử xe ô tô trên đi được quãng đường 216 m sau khoảng thời gian 5 giây

a) Xác định hệ số a .

b) Hỏi xe ô tô trên đi trong bao lâu thì được quãng đường 3,6 km so với vị trí ban đầu?



CHƯƠNG 7

HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

BÀI 1

HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

1. Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

Hàm số xác định với mọi giá trị x thuộc \mathbb{R} .

2. Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

Để vẽ đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$), ta thực hiện các bước sau:

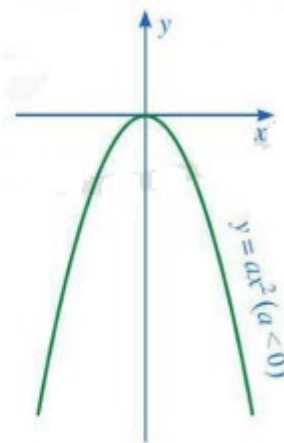
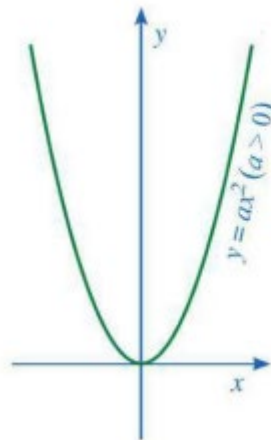
Bước 1. Lập bảng giá trị để tìm giá trị của y tương ứng với một số giá trị cụ thể của x .

Bước 2. Căn cứ vào bảng giá trị, vẽ một số điểm thuộc đồ thị của hàm số đó.

Bước 3. Vẽ parabol đi qua gốc tọa độ và các điểm đã xác định ở bước 2, ta nhận được đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$).

Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) là một đường cong luôn đi qua gốc tọa độ và nhận Oy làm trục đối xứng. Đường cong đó được gọi là Parabol với đỉnh O

- Nếu $a > 0$ thì $y = ax^2$ nằm phía trên trục hoành và O là điểm thấp nhất.
- Nếu $a < 0$ thì $y = ax^2$ nằm phía dưới trục hoành và O là điểm cao nhất.



DẠNG 1**TÍNH GIÁ TRỊ HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM CHO TRƯỚC**

Bài 1. Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$.

a) Tìm giá trị của y tương ứng với giá trị của x trong bảng như sau:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = -\frac{1}{2}x^2$							

b) Tìm những điểm thuộc đồ thị của hàm số có hoành độ lần lượt là $-5, 5, 7$

c) Tìm những điểm thuộc đồ thị của hàm số có tung độ là -18 .

Lời giải

a) Giá trị của y tương ứng với giá trị của x trong bảng như sau:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = -\frac{1}{2}x^2$	$-\frac{9}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{9}{2}$

b)

Thay $x = -5$ vào đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ ta được: $y = -\frac{1}{2} \cdot (-5)^2 = -\frac{25}{2}$

Thay $x = 5$ vào đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ ta được: $y = -\frac{1}{2} \cdot 5^2 = -\frac{25}{2}$

Thay $x = 7$ vào đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ ta được: $y = -\frac{1}{2} \cdot 7^2 = -\frac{49}{2}$

c) Thay $y = -18$ vào đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ ta được:

$$-18 = -\frac{1}{2}x^2$$

$$x^2 = 36$$

$$x = -6 \text{ và } x = 6$$

Vậy có hai điểm $(-6; -18), (6; -18)$ thuộc đồ thị hàm số có tung độ bằng -18

Bài 2. Cho hàm số $y = f(x) = 3x^2$

a) Tìm giá trị của hàm số khi x nhận các giá trị lần lượt là $-3; 2\sqrt{2}; 3 - 2\sqrt{2}$

b) Tìm các giá trị của a , biết rằng $f(a) = 12 + 6\sqrt{3}$

Lời giải

a) Ta có: $f(-3) = 27$; $f(2\sqrt{2}) = 24$; $f(1-2\sqrt{3}) = 39 - 12\sqrt{3}$

b) Ta có: $f(a) = 12 + 6\sqrt{3} \Leftrightarrow 3a^2 = 12 + 6\sqrt{3} \Leftrightarrow a = \pm(\sqrt{3} + 1)$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN**Bài 3.** Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$.a) Tìm giá trị của y tương ứng với giá trị của x trong bảng như sau:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \frac{1}{4}x^2$							

b) Tìm những điểm thuộc đồ thị của hàm số có hoành độ lần lượt là $-8, -6, 5$.c) Tìm những điểm thuộc đồ thị của hàm số có tung độ là 4 .d) Tìm những điểm thuộc đồ thị của hàm số có tung độ là -6 .**Bài 4.** Cho hàm số $y = f(x) = -2x^2$ a) Tìm giá trị của hàm số khi x nhận các giá trị lần lượt là $-2; 0$ và $3 - 2\sqrt{2}$ b) Tìm các giá trị của a , biết rằng $f(a) = -10 + 4\sqrt{6}$ c) Tìm điều kiện của b biết rằng $f(b) \geq 4b + 6$.**Lời giải**

a) Ta có: $f(-2) = -8$; $f(0) = 0$; $f(3 - 2\sqrt{2}) = -34 + 24\sqrt{2}$

b) Ta có: $f(a) = -10 + 4\sqrt{6} \Leftrightarrow a = \pm(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

c) Ta có: $f(b) \geq 4b + 6 \Rightarrow -2b^2 \geq 4b + 6 \Leftrightarrow b^2 + 2b + 3 \leq 0 \Leftrightarrow (b+1)^2 + 2 \leq 0 \Rightarrow b \in \emptyset$

DẠNG 2**VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$)**

Bài 1. Cho hàm số $y = 2x^2$.

a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = 2x^2$.

b) Các điểm $M(-4;32), N\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right), Q\left(\frac{3}{4};\frac{9}{16}\right)$ có thuộc đồ thị hàm số hay không?

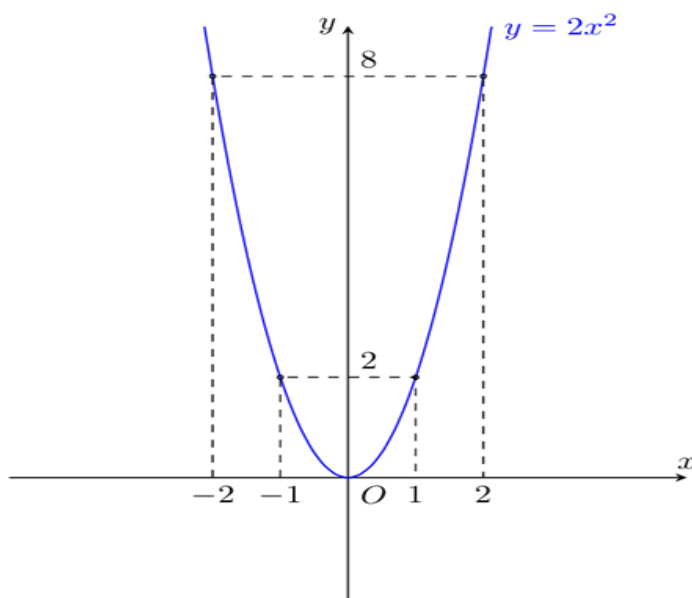
Lời giải

- Bảng giá trị của y tương ứng với giá trị của x như sau:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8

- Vẽ các điểm $A(-2;8), B(-1;2), O(0;0), C(1;2), D(2;8)$ thuộc đồ thị hàm số $y = 2x^2$ trong mặt phẳng Oxy .

- Vẽ đường parabol đi qua các điểm trên, ta nhận được đồ thị của hàm số $y = 2x^2$



b)

- Thay $x = -4$ vào đồ thị của hàm số $y = 2x^2$ ta được: $y = 2 \cdot (-4)^2 = 32$, do đó điểm $M(-4;32)$ thuộc đồ thị hàm số đã cho.

- Thay $x = -\frac{1}{2}$ vào đồ thị của hàm số $y = 2x^2$ ta được: $y = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$, do đó điểm $N\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ thuộc đồ thị hàm số đã cho.

- Thay $x = \frac{3}{4}$ vào đồ thị của hàm số $y = 2x^2$ ta được: $y = 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{8} \neq \frac{9}{16}$, do đó điểm $Q\left(\frac{3}{4}; \frac{9}{16}\right)$

không thuộc đồ thị hàm số đã cho.

Bài 2. Cho hàm số: $y = -\frac{1}{4}x^2$ có đồ thị (P).

a) Vẽ đồ thị (P) .

b) Các điểm $E(-8; -16), F\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{36}\right), Q\left(\frac{2}{5}; \frac{4}{100}\right)$ có thuộc đồ thị hàm số hay không?

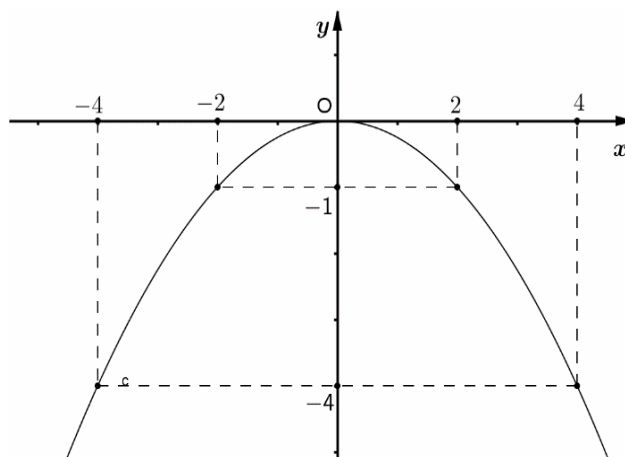
Lời giải

- Bảng giá trị của y tương ứng với giá trị của x như sau:

x	-4	-2	0	2	4
$y = -\frac{1}{4}x^2$	-4	-1	0	-1	-4

- Vẽ các điểm $A(-4; -4), B(-2; -1), O(0; 0), C(2; -1), D(4; -4)$ thuộc đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{4}x^2$ trong mặt phẳng Oxy .

- Vẽ đường parabol đi qua các điểm trên, ta nhận được đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{4}x^2$



b) Các điểm $E(-8; -16), F\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{36}\right), Q\left(\frac{2}{5}; \frac{4}{100}\right)$ có thuộc đồ thị hàm số hay không?

- Thay $x = -8$ vào đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{4}x^2$ ta được: $y = -\frac{1}{4}(-8)^2 = -16$, do đó điểm $E(-8; -16)$ thuộc đồ thị hàm số đã cho.

- Thay $x = -\frac{1}{3}$ vào đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{4}x^2$ ta được: $y = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{1}{36}$, do đó điểm

$F\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{36}\right)$ thuộc đồ thị hàm số đã cho.

- Thay $x = \frac{2}{5}$ vào đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{4}x^2$ ta được: $y = -\frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}\right)^2 = -\frac{4}{100} \neq \frac{4}{100}$, do đó điểm

$Q\left(\frac{2}{5}; \frac{4}{100}\right)$ không thuộc đồ thị hàm số đã cho.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$.

a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$.

b) Các điểm $M\left(-5; -\frac{25}{2}\right)$, $N\left(-\frac{3}{2}; \frac{9}{8}\right)$, $Q\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ có thuộc đồ thị hàm số hay không?

Lời giải

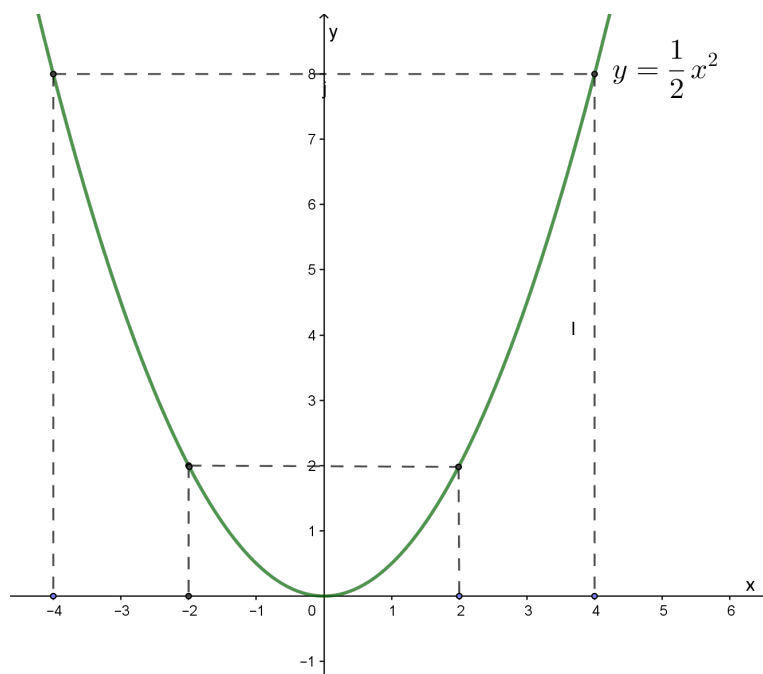
a)

- Bảng giá trị của y tương ứng với giá trị của x như sau:

x	-4	-2	0	2	4
$y = \frac{1}{2}x^2$	8	2	0	2	8

- Vẽ các điểm $A(-4; 8)$, $B(-2; 2)$, $O(0; 0)$, $C(2; 2)$, $D(4; 8)$ thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ trong mặt phẳng Oxy .

- Vẽ đường parabol đi qua các điểm trên, ta nhận được đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$



b)

- Thay $x = -5$ vào đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ ta được: $y = \frac{1}{2} \cdot (-5)^2 = \frac{25}{2} \neq -\frac{25}{2}$, do đó điểm

$M\left(-5; -\frac{25}{2}\right)$ không thuộc đồ thị hàm số đã cho.

- Thay $x = -\frac{3}{2}$ vào đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ ta được: $y = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{8}$, do đó điểm $N\left(-\frac{3}{2}; \frac{9}{8}\right)$ thuộc đồ thị hàm số đã cho.

- Thay $x = \frac{1}{2}$ vào đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ ta được: $y = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} \neq 2$, do đó điểm $Q\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ không thuộc đồ thị hàm số đã cho.

Bài 4. Cho hàm số $y = 3x^2$.

a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = 3x^2$.

b) Các điểm $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right), N\left(\frac{3}{4}; \frac{27}{16}\right), Q\left(\frac{5}{2}; \frac{75}{2}\right)$ có thuộc đồ thị hàm số hay không?

c) Tìm những điểm thuộc đồ thị của hàm số có hoành độ là $-\frac{2}{3}$.

d) Tìm những điểm thuộc đồ thị của hàm số có tung độ là 9.

Bài 5. Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^2$.

a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{3}x^2$.

b) Tìm những điểm thuộc đồ thị của hàm số có tung độ là $-\frac{1}{27}$.

Bài 6. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$.

a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$.

b) Tìm những điểm thuộc đồ thị của hàm số có tung độ là $\frac{1}{64}$.

Bài 7. Cho hàm số $y = -x^2$ và $y = x - 2$.

a) Vẽ đồ thị hai hàm số $y = -x^2$ và $y = x - 2$ trên cùng hệ trục

b) Các điểm $M(1; -1), N(-2; -4), Q(2; -4)$ có cùng thuộc hai đồ thị hàm số trên hay không?

Bài 8. Cho đồ thị hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P) .

a) Vẽ đồ thị (P) .

b) Tìm các điểm trên Parabol có tung độ bằng 16.

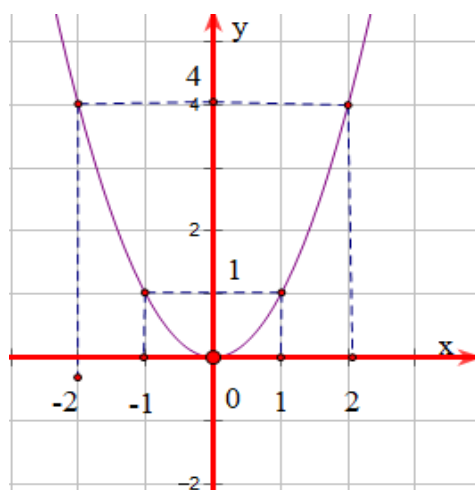
c) Tìm các điểm trên Parabol (khác gốc tọa độ) cách đều hai trục tọa độ.

Lời giải

a)

- Bảng giá trị của y tương ứng với giá trị của x như sau:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

- Vẽ các điểm $A(-2;4), B(-1;1), O(0;0), C(1;1), D(2;4)$ thuộc đồ thị hàm số $y = x^2$ trong mặt phẳng Oxy .- Vẽ đường parabol đi qua các điểm trên, ta nhận được đồ thị của hàm số $y = x^2$ b) Gọi C là điểm thuộc (P) có tung độ bằng 16.Ta có: $y_C = 16 \Leftrightarrow x_C^2 = 16 \Leftrightarrow x_C = \pm 4$. Vậy $C(4;16)$ hoặc $C(-4;16)$.c) Gọi D là điểm thuộc (P) cách đều hai trục tọa độ.Ta có: $d(D, Ox) = |y_D| = x_D^2; d(D, Oy) = |x_D|$.Theo giả thiết ta có: $x_D^2 = |x_D| \Leftrightarrow |x_D| = 0$ (loại) hoặc $|x_D| = 1$.Vậy $D(1;1)$ hoặc $D(-1;1)$.

DẠNG 3
XÁC ĐỊNH HỆ SỐ CỦA HÀM SỐ
XÁC ĐỊNH ĐIỂM THUỘC ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Bài 1. Cho đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^2$ (P).

- a) Hãy xác định hàm số (P) biết rằng đồ thị của nó đi qua điểm $A(2;4)$.
 b) Tìm m sao cho $B(m;m^3)$ thuộc Parabol.

Lời giải

a) Ta có $A \in (P)$ nên thay điểm $A(2;4)$ vào đồ thị ta có

$$4 = a \cdot 2^2$$

$$a = 1$$

Vậy $a = 1$ là giá trị cần tìm.

b) Thay tọa độ điểm B vào (P) ta được:

$$m^3 = m^2$$

$$m^3 - m^2 = 0$$

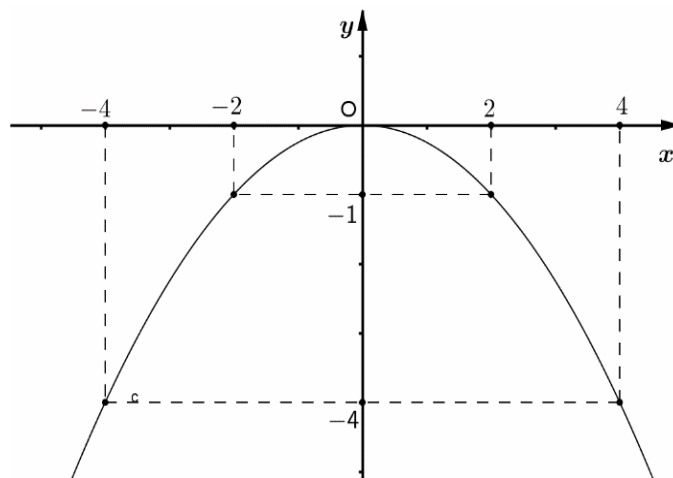
$$m^2(m-1) = 0$$

$$m^2 = 0 \text{ hoặc } m-1 = 0.$$

$$m = 0 \text{ hoặc } m = 1.$$

Vậy $m = 0$ và $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Bài 2. Biết rằng đường cong trong hình bên dưới là một parabol $y = ax^2$



- a) Xác định hệ số a .
 b) Tìm các điểm trên parabol có hoành độ bằng 6.
 c) Tìm các điểm trên parabol có tung độ bằng -25 .

Lời giải

a) Từ đồ thị ta có điểm $(2; -1)$ thuộc parabol $y = ax^2$ nên

$$-1 = a \cdot 2^2$$

$$a = -\frac{1}{4}$$

b) Từ câu a, ta có parabol $y = -\frac{1}{4}x^2$

Với $x = 6$ nên $y = -\frac{1}{4} \cdot 6^2 = -9$

Vậy điểm cần tìm là $(6; -9)$

c) Thay $y = -25$ vào parabol $y = -\frac{1}{4}x^2$ ta có:

$$-25 = -\frac{1}{4}x^2$$

$$x^2 = 100$$

$$x = -10 \text{ hoặc } x = 10$$

Vậy các điểm cần tìm là $(-10; -25); (10; -25)$

Bài 3. Cho hàm số $y = (2m - 1)x^2$ (m là tham số).

a) Tìm các giá trị của m để $y = -2$ khi $x = -1$

b) Tìm giá trị của m biết $(x; y)$ thỏa mãn: $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

Lời giải

a) Thay $y = -2$ và $x = -1$ vào hàm số $y = (2m - 1)x^2$ ta được:

$$-2 = (2m - 1)(-1)^2$$

$$m = \frac{-1}{2}$$

Vậy $m = \frac{-1}{2}$ là giá trị cần tìm.

b) Ta đi giải các hệ phương trình $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ ta được nghiệm $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Thay $x = 2; y = 1$ vào hàm số $y = (2m - 1)x^2$ ta có:

$$1 = (2m - 1) \cdot 2^2$$

$$1 = 8m - 4$$

$$m = \frac{5}{8}$$

Vậy $m = \frac{5}{8}$ là giá trị cần tìm.

Bài 4. Cho hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) có đồ thị là Parabol (P).

a) Xác định a để (P) đi qua điểm $A(-\sqrt{2}; 4)$

b) Với giá trị a vừa tìm được, hãy:

- + Vẽ (P) trên mặt phẳng tọa độ
- + Tìm các điểm trên (P) có tung độ bằng 2
- + Tìm các điểm trên (P) cách đều hai trục tọa độ.

Lời giải

$$\text{a) } A(-\sqrt{2}; 4) \in (P) \Rightarrow 4 = a(-\sqrt{2})^2 \Rightarrow a = 2$$

Vậy $a = 2$ là giá trị cần tìm.

$$\text{b) Ta có } y = 2x^2$$

- + Vẽ (P) : Học sinh tự vẽ nhé
- + Thay $y = 2$ vào hàm số $y = 2x^2$ ta có:

$$2 = 2x^2$$

$$x = \pm 1$$

$$\Rightarrow (1; 2); (-1; 2)$$

$$\text{+ Gọi } M(x_0; y_0) \in (P) \Rightarrow y_0 = 2x_0^2.$$

M cách đều Ox, Oy nên ta có:

$$|x_0| = |y_0|$$

$$|x_0| = |2x_0^2|$$

$$2x_0^2 = |x_0|$$

$$2x_0^2 = -x_0 \text{ hoặc } 2x_0^2 = x_0$$

$$2x_0^2 + x_0 = 0 \text{ hoặc } 2x_0^2 - x_0 = 0$$

$$x_0(2x_0 + 1) = 0 \text{ hoặc } x_0(2x_0 - 1) = 0$$

$$\text{Giải } x_0(2x_0 + 1) = 0$$

$$x_0 = 0 \text{ hoặc } x_0 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Giải } x_0(2x_0 - 1) = 0$$

$$x_0 = 0 \text{ hoặc } x_0 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Do đó } x_0 \in \left\{ -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2} \right\}$$

$$\Rightarrow M_1(0; 0); M_2\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right); M_3\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

Bài 5. Cho hàm số $y = ax^2$.

a) Xác định hệ số a biết rằng đồ thị của hàm số cắt đường thẳng $y = 2x$ tại điểm A có hoành độ bằng 1.

b) Vẽ đồ thị của hàm số $y = 2x$ và đồ thị hàm số $y = ax^2$ với giá trị của a vừa tìm được ở câu a) trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

c) Dựa vào đồ thị, hãy xác định tọa độ giao điểm thứ hai (khác A) của hai đồ thị vừa vẽ trong câu b).

Lời giải

a) Xét phương trình hoành độ giao điểm: $ax^2 = 2x \Leftrightarrow ax^2 - 2x = 0$ (1)

Do đồ thị hàm số $y = ax^2$ cắt đường thẳng $y = 2x$ tại điểm có hoành độ bằng 1 nên ta có $x = 1$ là một nghiệm của phương trình (1).

Thay $x = 1$ vào phương trình (1), ta có: $a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$.

Vậy $a = 2$.

b) Vẽ đồ thị hàm số $y = 2x$

Ta có bảng giá trị:

x	0	1
$y = 2x$	0	2

Do đó, đồ thị hàm số $y = 2x$ là đường thẳng đi qua hai điểm $(0;0)$ và $(1;2)$

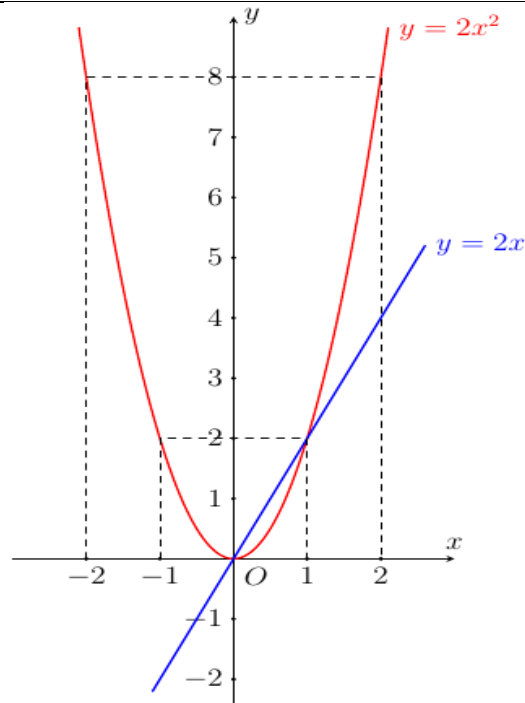
Vẽ đồ thị hàm số $y = 2x^2$

Ta có bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8

Do đó, đồ thị hàm số $y = 2x^2$ là đường cong đi qua các điểm $(-2;8)$, $(-1,2)$, $(0;0)$, $(1;2)$ và $(2,8)$

Vẽ đồ thị hàm số



c) Dựa vào đồ thị trên, ta nhận thấy đồ thị hàm số $y = 2x^2$ cắt đồ thị hàm số $y = 2x$ tại hai điểm có hoành độ $x = 0$ và $x = 1$.

Vậy giao điểm thứ hai khác A của hai đồ thị hàm số là $B(0,0)$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$. Xác định giá trị của tham số m để các điểm sau thuộc đồ thị hàm số

- a) $A(2; m)$ b) $B(-\sqrt{2}; m)$ c) $C\left(m; \frac{3}{4}\right)$

Lời giải

a) Ta có $A(2; m)$ thuộc đồ thị hàm số $\Rightarrow m = \frac{1}{4} \cdot 2^2 \Leftrightarrow m = 1$. Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

b) Ta có $B(-\sqrt{2}; m)$ thuộc đồ thị hàm số $\Rightarrow m = \frac{1}{4} \cdot 2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$. Vậy $m = \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

c) Ta có $C\left(m; \frac{3}{4}\right)$ thuộc đồ thị hàm số $\Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \cdot m^2 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{3}$. Vậy $\pm\sqrt{3}$ là giá trị cần tìm

Bài 7. Xác định a để parabol $(P): y = (2a+1)x^2$ đi qua điểm $M(2; -1)$

Lời giải

Parabol $(P): y = (2a+1)x^2$ đi qua điểm $M(2; -1)$ thì thay $x = 2, y = -1$ vào $y = (2a+1)x^2$ ta có :

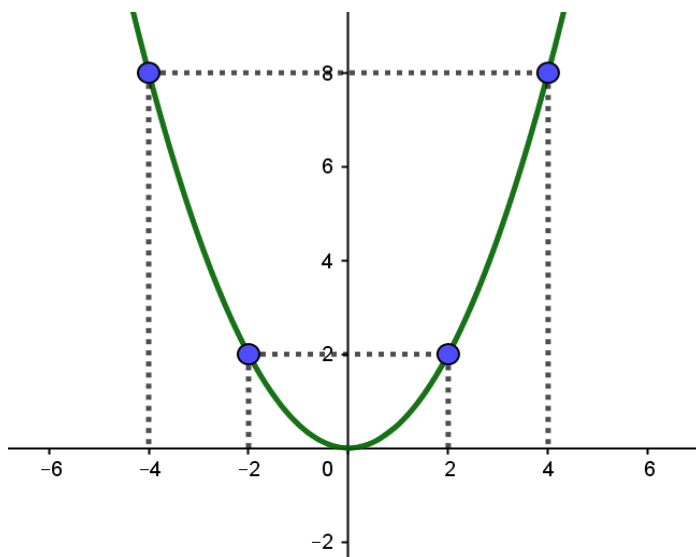
$$-1 = (2a+1) \cdot 4$$

$$2a+1 = \frac{-1}{4}$$

$$a = -\frac{5}{8}$$

Vậy $a = -\frac{5}{8}$ là giá trị cần tìm.

Bài 8. Biết rằng đường cong trong hình bên dưới là một parabol $y = ax^2$



- Xác định hệ số a .
- Tìm các điểm trên parabol có hoành độ bằng -8 .
- Tìm các điểm trên parabol có tung độ bằng $\frac{81}{2}$.

Bài 9. Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị là Parabol (P).

- Vẽ (P) trên hệ trục tọa độ
- Trong các điểm $A(1;2); B(-1;-1); C(10;-200)$, điểm nào thuộc (P), điểm nào không thuộc (P).

Lời giải

- Học sinh tự vẽ
- Thay $x = 1; y = 1$ vào (P), ta được đẳng thức luôn đúng do đó điểm A thuộc (P)
- Tương tự ta có điểm B, C không thuộc vào (P).

Bài 10. Cho hàm số $y = (3m+1)x^2$ với $m \neq -\frac{1}{3}$. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số:

- Đi qua điểm $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$
- Đi qua điểm $B(x_0; y_0)$ với $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ -4x + 3y = -5 \end{cases}$$

Lời giải

- Hàm số đi qua điểm $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow m = 0$

b)

$$\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ -4x + 3y = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x - 16y = 8 \\ -12x + 9y = -15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -7y = -7 \\ -4x + 3y = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Hàm số $y = (3m + 1)x^2$ đi qua điểm có tọa độ $(2; 1)$ nên

$$1 = (3m + 1) \cdot 2^2$$

$$1 = 12m + 4$$

$$m = -\frac{1}{4}$$

Vậy $m = -\frac{1}{4}$ là giá trị cần tìm.

Bài 11. Cho hàm số $y = (2m + 1)x^2$ (m là tham số). Tìm các giá trị của tham số m để:

a) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$

b) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(x_0; y_0)$ với $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x^2 - 2y = 2 \end{cases}$

Lời giải

a) Thay $A\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$ vào phương trình $y = (2m + 1)x^2$ ta có:

$$\frac{4}{3} = (2m + 1)\left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow m = 1$$

b) $\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x^2 - 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow (-2; 1)$ là nghiệm của hệ phương trình $\Rightarrow m = \frac{-3}{8}$

Thay $(-2; 1)$ vào hàm số: $1 = (2m + 1)(-2)^2 \Rightarrow m = \frac{-3}{8}$

Bài 12. Tìm tọa độ của tất cả các điểm thuộc parabol $y = -2x^2$ có tung độ bằng -8 .

Lời giải.

Thay $y = -8$ vào phương trình parabol: $y = -2x^2$, ta có:

$$-2x^2 = -8$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

Vậy tọa độ tất cả các điểm thỏa mãn đề bài là: $(2; -8)$ và $(-2; -8)$.

Bài 13. Cho hàm số $y = (m-1)x^2$ ($m \neq 1$) có đồ thị là Parabol (P).

a) Xác định m để (P) đi qua điểm $A(-\sqrt{3}; 1)$

b) Với giá trị m vừa tìm được, hãy:

- Vẽ (P) trên mặt phẳng tọa độ
- Tìm các điểm trên (P) có hoành độ bằng 1
- Tìm các điểm trên (P) có tung độ gấp đôi hoành độ.

Lời giải

a) Ta có (P) đi qua điểm $A(-\sqrt{3}; 1) \Rightarrow 1 = (m-1) \cdot (-\sqrt{3})^2 \Rightarrow m = \frac{4}{3}$

b) Ta có $y = \frac{1}{3}x^2$

- Vẽ (P): học sinh tự vẽ

Vì các điểm có hoành độ bằng 1 nên ta có: $y = \left(\frac{4}{3} - 1\right) \cdot 1^2 \Rightarrow y = \frac{1}{3} \Rightarrow$ điểm cần tìm $\left(1; \frac{1}{3}\right)$

+

Gọi $M(x_0; y_0) \in (P) \Rightarrow y_0 = \frac{1}{3}x_0^2$.

tung độ gấp đôi hoành độ là: $y_0 = 2x_0$

hay

$$\frac{1}{3}x_0^2 = 2x_0$$

$$\frac{1}{3}x_0^2 - 2x_0 = 0$$

$$x_0 \left(\frac{1}{3}x_0 - 2 \right) = 0$$

$$x_0 = 0 \text{ hoặc } \frac{1}{3}x_0 - 2 = 0$$

$$x_0 = 0 \text{ hoặc } x_0 = 6$$

$$\Rightarrow (0; 0); (6; 12)$$

Vậy các điểm trên (P) có tung độ gấp đôi hoành độ là: $(0; 0); (6; 12)$

DẠNG 4**ỨNG DỤNG THỰC TẾ CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = ax^2$**

Bài 1. Một xe tải có chiều rộng là 2,4 m chiều cao là 2,5 m muốn đi qua một cái cổng hình parabol. Biết khoảng cách giữa hai chân cổng là 4m và khoảng cách từ đỉnh cổng tới mỗi chân cổng là $2\sqrt{5}$ m (Bỏ qua độ dày của cổng).

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy gọi Parabo $(P): y = ax^2$ với $a < 0$ là hình biểu diễn cổng mà xe tải muốn đi qua. Chứng minh $a = -1$.

b) Hỏi xe tải có đi qua cổng được không? Tại sao?

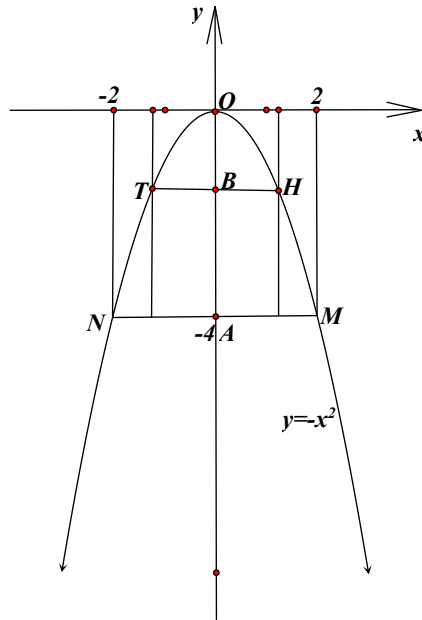
Lời giải

a) Giả sử trên mặt phẳng tọa độ, độ dài các đoạn thẳng được tính theo đơn vị mét.

Do khoảng cách giữa hai chân cổng là 4 m nên $MA = NA = 2m$.

Theo giả thiết ta có $OM = ON = 2\sqrt{5}$, áp dụng định lý Pythagore ta tính được: $OA = 4$ vậy $M(2; -4), N(-2; -4)$.

Do $M(2; -4)$ thuộc parabol nên tọa độ điểm M thỏa mãn phương trình: $(P): y = ax^2$ hay $-4 = a.2^2 \Rightarrow a = -1$ và $(P): y = -x^2$.



b) Để đáp ứng chiều cao trước hết xe tải phải đi vào chính giữa công.

Xét đường thẳng $(d): y = -\frac{3}{2}$

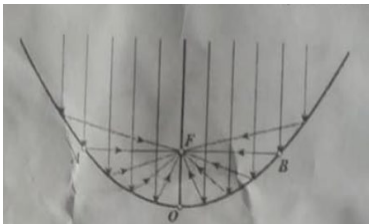
(ứng với chiều cao của xe). Đường thẳng này cắt Parabol tại 2 điểm có tọa độ thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} y = -x^2 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{2}}{2}; y = -\frac{3}{2} \\ x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}; y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

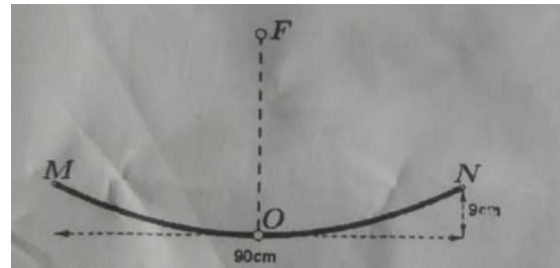
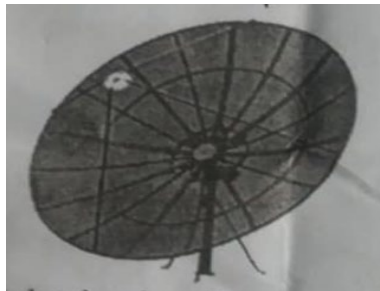
suy ra tọa độ hai giao điểm là $T\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{3}{2}\right); H\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{3}{2}\right) \Rightarrow HT = 3\sqrt{2} > 2,4$.

Vậy xe tải có thể đi qua công.

Bài 2. Các ăng ten parabol thu sóng hoạt động dựa theo nguyên lý: mọi tia sóng song song với trục của parabol đều có tia phản xạ đi qua tiêu điểm F của parabol (vì vậy nếu ta đặt thiết bị thu sóng tại F thì sẽ thu sóng được tốt nhất). Người ta chứng minh được rằng: Nếu đường thẳng vuông góc với trục của parabol tại F cắt parabol tại 2 điểm A, B thì $OF = \frac{1}{4}AB$ với O là đỉnh của parabol (tham khảo hình vẽ).



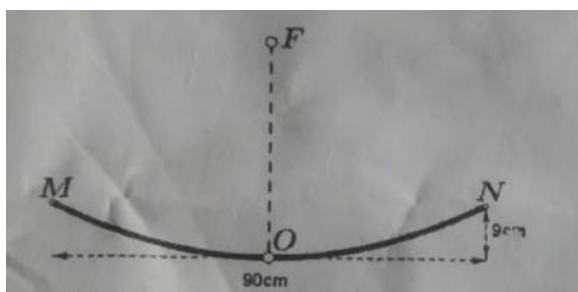
Các tia sáng đều tập trung tại F



Mô hình parabol của một mặt cắt qua trục của một ăng ten parabol

Tính độ dài đoạn OF ứng với mô hình trên của một ăng ten parabol (ngang 90cm và cao 9cm).

Lời giải



Ta có $(P): y = ax^2$ đi qua điểm $N(45;9)$

Do đó $9 = a \cdot 45^2$

Nên $a = \frac{1}{225}$. Suy ra $y = \frac{1}{225}x^2$

Đường thẳng vuông góc Oy tại F cắt (P) tại A, B với $x_B > 0$

Vì $y_B = OF = \frac{1}{4}AB = \frac{1}{2}FB = \frac{1}{2}x_B$ và $B \in (P)$ nên $\frac{1}{2}x_B = \frac{x_B^2}{225} \Leftrightarrow x_B = \frac{225}{2}$

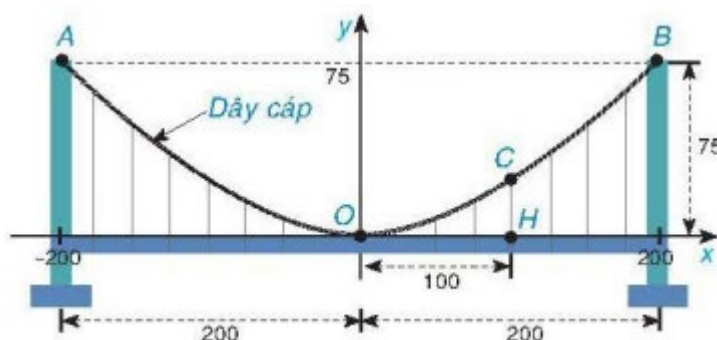
Vì vậy $OF = \frac{1}{2}x_B = \frac{225}{4} = 56,25(cm)$

BÀI TẬP TỰ RÈN LUYỆN

Bài 3. Một cái cổng vòm hình parabol có phương trình $y = -\frac{1}{2}x^2$. Biết chiều rộng là $5m$. Hỏi xe tải có chiều rộng là $2,5m$ và chiều cao là $3m$ có đi qua được cái cổng trên không?

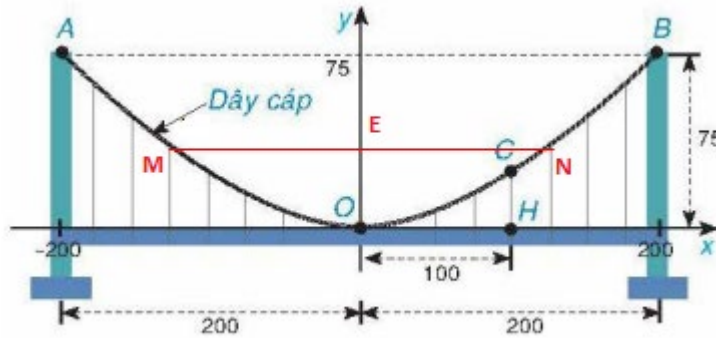


Bài 4. Một cây cầu treo có trụ tháp đôi cao $75m$ so với mặt của cây cầu và cách nhau $400m$. Các dây cáp có dạng đồ thị của hàm số $y = ax^2$ và được treo trên các đỉnh tháp như hình vẽ.

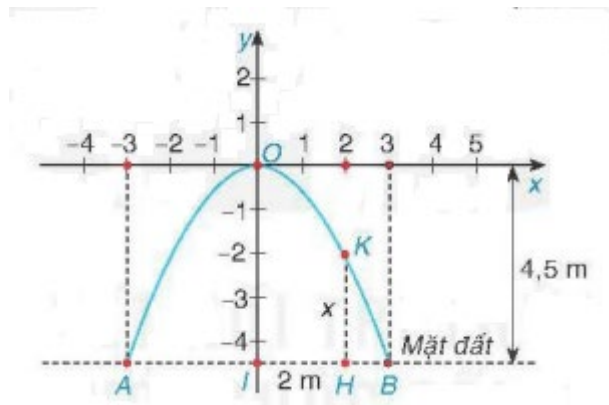


a) Tính độ dài đoạn CH của dây cáp, biết điểm H cách tâm O của cây cầu là $100m$ (giả sử mặt cầu của cây cầu bằng phẳng).

b) Nếu có đường thẳng vuông góc với trục Oy tại điểm $E(0;27)$ và đồng thời cắt parabol tại 2 điểm M, N (như hình vẽ) thì khoảng cách hai điểm M, N lần lượt đến tâm O là bao nhiêu?



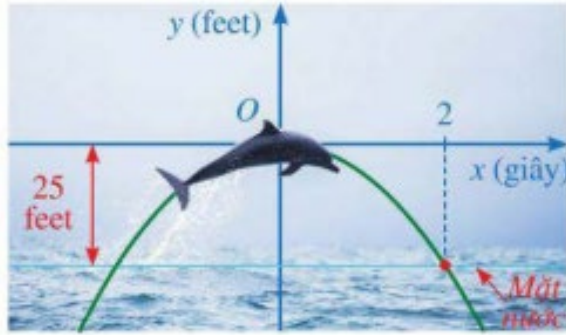
Bài 5. Một cái cổng vòm hình parabol $y = ax^2$ như hình vẽ. Biết chiều rộng của chân cổng là $AB = 6m$ và chiều cao của cổng là $OI = 4,5m$.



a) Tính độ dài đoạn HK biết cách điểm H cách điểm chính giữa cổng là $2m$.

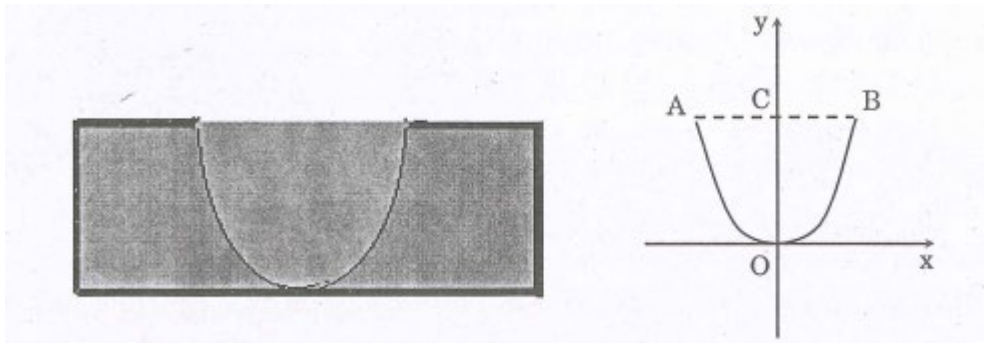
b) Một xe tải có chiều rộng là $2m$ và chiều cao là $3m$ có đi qua được cái cổng trên không?

Bài 6. Cá heo có thể nhảy cao tới 25 feet và thực hiện các thủ thuật như nhảy qua vòng, lộn nhào trong không trung. Giả sử quỹ đạo nhảy của cá heo là parabol $y = ax^2$, với gốc tọa độ là vị trí cao nhất mà cá heo đạt được, cách mặt nước 25 feet, trong đó y được tính theo đơn vị feet và x được tính theo đơn vị giây. Biết rằng sau 2 giây kể từ vị trí cao nhất đó, cá heo rơi chạm mặt nước (như hình vẽ).



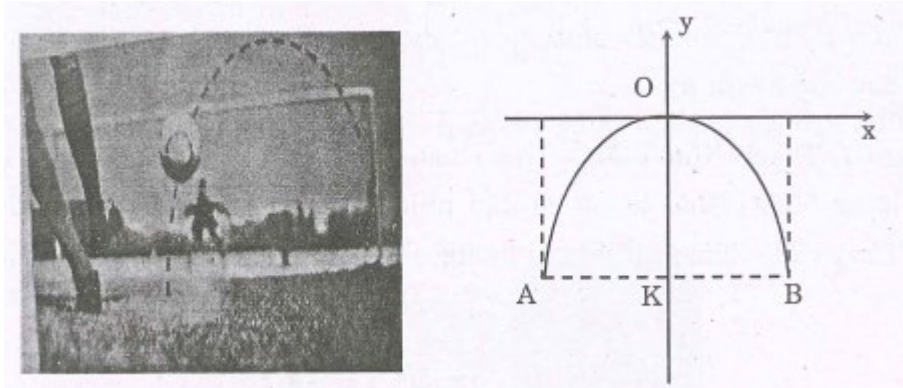
- a) Tìm hàm số biểu thị quỹ đạo nhảy của cá heo.
- b) Tìm vị trí cá heo rơi sau 1,5 giây kể từ vị trí cao nhất.

Bài 7. Thiết diện của một cái hồ nước là Parabol $y = ax^2$ (chọn hệ trục tọa độ vuông góc Oxy (hình vẽ), biết rằng bề ngang của thiết diện là $AB = 8m$, bề sâu của thiết diện $OC = 4m$.



- a) Xác định hệ số a .
- b) Vẽ đồ thị hàm số trên (với hệ số a tìm được) trong mặt phẳng Oxy.

Bài 8. Đường đi của quả bóng theo quỹ đạo là một parabol $y = ax^2$. Một cầu thủ ở vị trí A (hình vẽ), đá một quả bóng bay bổng lên cao đến vị trí O cách mặt đất 15m và rơi xuống vị trí B cách A 30m. Chọn hệ thống trục tọa độ vuông góc Oxy (như hình vẽ)



Xác định tọa độ các điểm A và B trong hệ trục Oxy này. Tính giá trị của hệ số a .

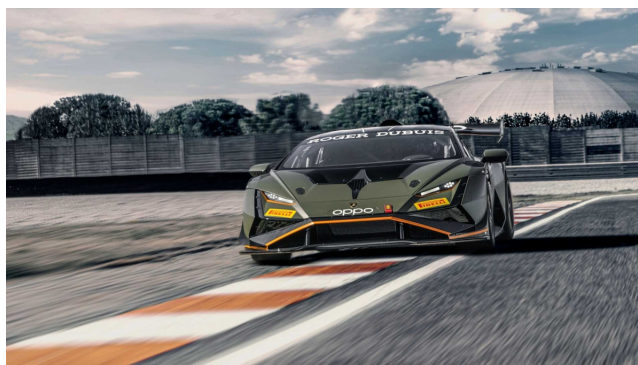
Bài 9. Quỹ đạo đi của một vật rơi tự do không vận tốc đầu cho bởi công thức $y = \frac{1}{2}gt^2$ (trong đó g là gia tốc trọng trường $g = 10 \text{ m/giây}^2$, t (giây) là thời gian rơi tự do, S là quãng đường rơi tự do). Một vận động viên nhảy dù, nhảy khỏi máy bay ở độ cao 3200 mét (vận tốc ban đầu không đáng kể, bỏ qua các lực cản). Hỏi sau thời gian bao nhiêu giây, vận động viên phải mở dù để khoảng cách đến mặt đất là 1200 mét?



Bài 10. Quãng đường đi (đơn vị là mét) của một xe ô tô đi được trong thời gian t giây được cho bởi công thức $y = a.t^2$. Giả sử xe ô tô trên đi được quãng đường 216 m sau khoảng thời gian 5 giây

a) Xác định hệ số a .

b) Hỏi xe ô tô trên đi trong bao lâu thì được quãng đường 3,6 km so với vị trí ban đầu?



BÀI 2**PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN****1. Định nghĩa**

Phương trình bậc hai một ẩn (hay còn gọi là phương trình bậc hai) là phương trình có dạng: $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, trong đó a, b, c là các số thực cho trước và x là ẩn số.

2. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai

Xét phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ và biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.
- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Nhận xét:

Xét phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ với $b = 2b'$. Gọi biệt thức $\Delta' = b'^2 - ac$.

- Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$; $x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$
- Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}$.
- Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Công thức nghiệm vừa viết ở trên được gọi là công thức nghiệm thu gọn của phương trình bậc hai.

Chú ý:

- Trong trường hợp hệ số b có dạng $2b'$ ta nên sử dụng Δ' để giải phương trình sẽ cho lời giải ngắn gọn hơn.

- Nếu a, c trái dấu thì phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

- Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ bị khuyết c hay $ax^2 + bx = 0$ thì ta có thể giải cách sau:

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0$$

$$x = 0 \text{ hoặc } ax + b = 0$$

$$x = 0 \text{ hoặc } x = -\frac{b}{a}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = -\frac{b}{a}$

• Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) bị khuyết b hay $ax^2 + c = 0$ (1) thì ta có thể giải cách sau:

+ Với $c > 0$, phương trình (1) vô nghiệm.

+ Với $c = 0$, phương trình (1) có nghiệm $x = 0$.

+ Với $c < 0$, ta có:

$$ax^2 + c = 0$$

$$x^2 = \frac{-c}{a}$$

$$x = -\sqrt{\frac{-c}{a}} \text{ hoặc } x = \sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$ và $x = \sqrt{\frac{-c}{a}}$

3. Ứng dụng của phương trình bậc hai một ẩn

Để giải bài toán bằng cách lập phương trình bậc hai, ta có thể làm các bước sau:

• **Bước 1:** Lập phương trình bậc hai:

- + Chọn ẩn và đặt điều kiện thích hợp cho chúng.
- + Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.
- + Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

• **Bước 2:** Giải phương trình bậc hai.

• **Bước 3:** Trả lời: Kiểm tra xem trong các nghiệm của hệ phương trình, nghiệm nào thích hợp với bài toán (thoả mãn điều kiện ở bước 1) và kết luận.

CHỦ ĐỀ 1**GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN****DẠNG 1****GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI DẠNG ĐẶC BIỆT
(PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI BỊ KHUYẾT HỆ SỐ b HOẶC c)**

- Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ bị khuyết c hay $ax^2 + bx = 0$ thì ta có thể giải cách sau:

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0$$

$$x = 0 \text{ hoặc } ax + b = 0$$

$$x = 0 \text{ hoặc } x = -\frac{b}{a}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = -\frac{b}{a}$

- Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ bị khuyết b hay $ax^2 + c = 0$ (1) thì ta có thể giải cách sau:

+ Với $c > 0$, phương trình (1) vô nghiệm.

+ Với $c = 0$, phương trình (1) có nghiệm $x = 0$.

+ Với $c < 0$, ta có:

$$ax^2 + c = 0$$

$$x^2 = \frac{-c}{a}$$

$$x = -\sqrt{\frac{-c}{a}} \text{ hoặc } x = \sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$ và $x = \sqrt{\frac{-c}{a}}$

Bài 1. Giải các phương trình sau

a) $5x^2 - 7x = 0$

b) $-3x^2 + 9 = 0$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 2. Giải các phương trình sau

a) $-\sqrt{3}x^2 - 7x = 0$

b) $\frac{-3}{5}x^2 - \frac{7}{2} = 0$

Bài 3. Giải các phương trình sau

a) $(x+1)^2 = 4$

b) $(x-3)^2 = 7$

c) $(x+2)^2 - 5 = 0$

d) $(x-5)^2 - 11 = 0$

DẠNG 2

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI DÙNG CÔNG THỨC NGHIỆM

Bài 1. Xác định hệ số a, b, c ; Tính biệt thức Δ (hoặc Δ' nếu $b = 2b'$) rồi tìm nghiệm của các phương trình sau

a) $x^2 - x - 11 = 0$

b) $x^2 - 4x + 4 = 0$

c) $-5x^2 - 4x + 1 = 0$

d) $-2x^2 + x - 3 = 0$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $3x^2 - 5x - 2 = 0$

b) $x^2 + 3x - 10 = 0$

c) $4x^2 + 7x - 2 = 0$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) $x^2 + 2\sqrt{5}x + 4 = 0$

b) $\sqrt{2}x^2 - 3x + 5 = 0$

c) $x^2 - (2 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} = 0$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Xác định hệ số a, b, c ; Tính biệt thức Δ (hoặc Δ' nếu $b = 2b'$) rồi tìm nghiệm của các phương trình sau

a) $2x^2 - 3x - 5 = 0$

b) $x^2 - 6x + 8 = 0$

c) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

d) $-3x^2 + 4x - 4 = 0$

Bài 5. Giải các phương trình sau

a) $2x^2 + 2\sqrt{11}x - 7 = 0$

b) $152x^2 - 5x + 1 = 0$

c) $x^2 - (2 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} = 0$

d) $3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$

Bài 6. Giải các phương trình sau

a) $x^2 + \sqrt{5}x - 1 = 0$

b) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

c) $\sqrt{3}x^2 - (1 - \sqrt{3})x - 1 = 0$

d) $-3x^2 + 4\sqrt{6}x + 4 = 0$

Bài 7. Giải các phương trình sau:

a) $(x+1)^2 - 4(x^2 - 2x + 1) = 0$

b) $x^2 + 7x - 3 = x(x-1) - 1$

c) $2x^2 - 5x - 3 = (x+1)(x-1) + 3$

d) $5x^2 - x - 3 = 2x(x-1) - 1 + x^2$

DẠNG 3**XÁC ĐỊNH SỐ NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI CHỨA THAM SỐ**

Xét phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$ (1)

1. Phương trình (1) có nghiệm kép khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$

2. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

3. Phương trình (1) có đúng một nghiệm khi $\begin{cases} a = 0; b \neq 0 \\ a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$

4. Phương trình vô nghiệm khi $\begin{cases} a = 0; b = 0; c \neq 0 \\ a \neq 0; \Delta < 0 \end{cases}$

Chú ý: Nếu $b = 2b'$ ta có thể thay thế điều kiện của Δ tương ứng bằng Δ'

Bài 1. Cho phương trình $4x^2 + 4mx + m + 6 = 0$ (1). Tìm m để phương trình (1) có nghiệm kép

Bài 2. Cho phương trình $mx^2 + (2m - 5)x + m - 2 = 0$ (1) với $m \in \mathbb{R}$ là tham số.

a) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

Bài 3. Cho phương trình $x^2 + (2m + 3)x + 3m = 0$ (m là tham số) (1)

a) Tìm giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm $x = 3$

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m phương trình (1) luôn có nghiệm.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Cho phương trình $mx^2 - 3(m + 1)x + m^2 - 13m - 4 = 0$ (với m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình có một nghiệm là $x = -2$. Tìm nghiệm còn lại

Bài 5. Cho phương trình $(2m - 3)x^2 - 2(m - 2)x - 1 = 0$ với m là tham số. Khi nào

a) Giải phương trình với $m = 2$

b) Chứng minh rằng với mọi $m \in \mathbb{R}$, phương trình luôn có nghiệm.

c) Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài 6. Cho phương trình $mx^2 - 2(m - 1)x + m - 3 = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình:

a) Có hai nghiệm phân biệt

- b) Có nghiệm kép
- c) Vô nghiệm
- d) Có đúng một nghiệm
- e) Có nghiệm

Bài 7. Cho phương trình $(m-2)x^2 - 2(m+1)x + m = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình:

- a) Có hai nghiệm phân biệt
- b) Có nghiệm kép
- c) Vô nghiệm
- d) Có đúng một nghiệm
- e) Có nghiệm

Bài 8. Chứng minh rằng với $\forall m$ các phương trình sau luôn có nghiệm:

a) $x^2 - 2(m+2)x - m - 7 = 0$

b) $x^2 - 4m^2x - 4m - 2 = 0$

Bài 9. Cho phương trình $x^2 + (m-5)x - 3(m-2) = 0$ với $m \in \mathbb{R}$ là tham số

- a) Chứng minh rằng phương trình trên luôn có nghiệm $x = 3$ với mọi $m \in \mathbb{R}$
- b) Tìm m để phương trình có nghiệm kép

Bài 10. Cho phương trình: $x^2 - 2(3m+2)x + 2m^2 - 3m + 5 = 0$.

- a) Giải phương trình với $m = -2$.
- b) Tìm các giá trị của m để phương trình có một trong các nghiệm bằng -1 .
- c) Tìm các giá trị của m để phương trình trên có nghiệm kép.

Bài 11. Cho phương trình: $x^2 - 2(m-2)x + m^2 - 3m + 5 = 0$.

- a) Giải phương trình với $m = 3$.
- b) Tìm các giá trị của m để phương trình có một trong các nghiệm bằng -4 .
- c) Tìm các giá trị của m để phương trình trên có nghiệm kép.

Bài 12. Cho phương trình: $x^2 - 2(m+3)x + m^2 + 3 = 0$.

- a) Giải phương trình với $m = -1$ và $m = 3$.
- b) Tìm m để phương trình có một trong các nghiệm bằng 4 .
- c) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

CHỦ ĐỀ 2**SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ****DẠNG 1****SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ**

Cho $(P): y = ax^2$ và $(d): y = mx + n (m \neq 0)$. Để tìm tọa độ giao điểm (nếu có) của (P) và d ta làm như sau:

Bước 1: Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và $d: ax^2 = mx + n (*)$

Bước 2: Giải phương trình $(*)$ ta tìm được nghiệm (nếu có). Từ đó ta tìm được tọa độ giao điểm của (P) và d

Chú ý:

Số nghiệm của $(*)$ đúng bằng số giao điểm của (P) và d , cụ thể

- Nếu $(*)$ vô nghiệm thì d không cắt (P)
- Nếu $(*)$ có nghiệm kép thì d tiếp xúc với (P)
- Nếu $(*)$ có hai nghiệm phân biệt thì d cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng

$$(d): y = -\frac{1}{2}x + 2.$$

- Vẽ đồ thị (P) và (d) trên cùng mặt phẳng tọa độ.
- Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Bài 2. Cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + 1$.

- Vẽ parabol (P) và đường thẳng d trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy
- Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Bài 3. Cho Parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = 5x + 6$

- Vẽ đồ thị (P) .
- Tìm tọa độ các giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Cho hàm số $y = -2x^2$ có đồ thị (P)

a) Vẽ (P)

b) Bằng phép tính, tìm tọa độ các giao điểm của (P) với đường thẳng (d): $y = x - 3$

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol (P): $y = 2x^2$.

a) Vẽ đồ thị parabol (P).

b) Bằng phép tính, tìm tất cả các điểm thuộc parabol (P) (khác gốc tọa độ O) có tung độ gấp hai lần hoành độ.

Bài 6. Cho hàm số: $y = -\frac{1}{4}x^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng (d): $y = \frac{1}{2}x - 2$. Vẽ đồ thị (P) và tìm tọa độ giao điểm của (P) với đường thẳng (d) bằng phép tính.

Bài 7. Cho Parabol (P): $y = -x^2$ và đường thẳng (d): $y = 5x + 6$

a) Vẽ đồ thị (P).

b) Tìm tọa độ các giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Bài 8. Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P).

a) Vẽ (P)

b) Bằng phép tính, tìm tọa độ các giao điểm của (P) và đường thẳng (d): $y = -x + 2$.

Bài 9. Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = x + 2$

a) Vẽ parabol (P) và đường thẳng (d) trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy .

b) Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d) bằng phép tính.

Bài 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol (P): $y = 2x^2$.

a) Vẽ đồ thị parabol (P).

b) Bằng phép tính, tìm tất cả các điểm thuộc parabol (P) (khác gốc tọa độ O) có tung độ gấp hai lần hoành độ.

Bài 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol (P): $y = x^2$, trên (P) lấy hai điểm $A(-1;1), B(3;9)$.

a) Tính diện tích tam giác OAB .

b) Xác định điểm C thuộc cung nhỏ AB của (P) sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.

DẠNG 2**SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ CHỨA THAM SỐ**

Bài 1. Cho hàm số $y = (1-m)x^2$. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y = (1-m)x^2$ cắt đường thẳng $y = -x + 3$ tại điểm có tung độ bằng 2?

Bài 2. Cho hàm số $y = x - 1$ có đồ thị là (d) .

a) Vẽ đồ thị (d) trên mặt phẳng tọa độ.

b) Tìm a để (d) tiếp xúc với Parabol $(P): y = ax^2$.

Bài 3. Tìm tham số m để đường thẳng $(d): y = 2x + m$ cắt $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ tại hai điểm phân biệt.

Bài 4. Cho Parabol là đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng d là đồ thị hàm số $y = mx + m - 1$ (với m là tham số).

a. Vẽ Parabol là đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$.

b. Chứng minh Parabol luôn cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của tham số m .

Bài 5. Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = (m-1)x + m + 4$ (m là tham số). Tìm điều kiện của tham số m để d cắt (P) tại hai điểm nằm về hai phía của trục tung.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -x + m + 2$ (m là tham số).

a) Vẽ parabol (P) .

b) Khi $m = 0$, tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép toán.

c) Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) và parabol (P) có một điểm chung duy nhất.

Bài 7. Cho đường thẳng $(d): y = 2mx + 2m - 3$ và Parabol $(P): y = x^2$

a) Tìm m để đường thẳng (d) đi qua $A(1;5)$.

b) Tìm m để đường thẳng (d) tiếp xúc với Parabol (P)

Bài 8. Cho hàm số $y = 2x^2$ có đồ thị là parabol (P) và hàm số $y = 2x + \sqrt{m}$ có đồ thị là đường thẳng (d) (với m là tham số và $m \geq 0$)

a) Vẽ đồ thị (P) trên mặt phẳng tọa độ Oxy

b) Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt

Bài 9. Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy , cho parabol (P) : $y = x^2$.

a) Vẽ (P) .

b) Tìm m để đường thẳng (d) : $y = (m - 1)x + m + 4$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt nằm về hai phía của trục tung.

CHỦ ĐỀ 3**GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI**

Để giải bài toán bằng cách lập phương trình bậc hai, ta có thể làm các bước sau:

• **Bước 1:** Lập phương trình bậc hai:

- + Chọn ẩn và đặt điều kiện thích hợp cho chúng.
- + Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.
- + Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

• **Bước 2:** Giải phương trình bậc hai.

• **Bước 3:** Trả lời: Kiểm tra xem trong các nghiệm của hệ phương trình, nghiệm nào thích hợp với bài toán (thỏa mãn điều kiện ở bước 1) và kết luận.

DẠNG 1**TOÁN LIÊN QUAN HÌNH HỌC**

Thuộc công thức tính chu vi; diện tích của tam giác, hình thang, hình chữ nhật, hình vuông, định lý Pi-ta-go.

Bài 1. Sân vận động Quốc gia Mỹ Đình (Quận Nam Từ Liêm – Hà Nội) có mặt sân bóng hình chữ nhật với chiều dài hơn chiều rộng $37m$ và có diện tích là $7140m^2$. Hãy tính chiều dài và chiều rộng của mặt sân bóng đá này

Bài 2. Một người nông dân trồng hoa trên một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng $15m$. Cuối mỗi vụ thu hoạch, bình quân người đó bán được 20.000 đồng tiền hoa trên mỗi mét vuông đất. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn đó. Biết tổng số tiền bán hoa cuối vụ từ mảnh vườn người đó thu được là 252 triệu đồng.

Bài 3. Một mảnh đất hình chữ nhật có độ dài đường chéo là $13m$. Biết chiều dài mảnh đất lớn hơn chiều rộng là $7m$. Hãy tính diện tích mảnh đất hình chữ nhật đó.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài lớn hơn chiều rộng là $6m$. Tính chiều rộng và chiều dài khu vườn, biết diện tích khu vườn là $280m^2$.

Bài 5. Bác Bình trồng cam trên một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng $4m$, chu vi của mảnh vườn là $40m$. Biết rằng cứ $3m^2$ bác Bình trồng được 1 cây cam, hỏi bác Bình trồng được bao nhiêu cây cam trên mảnh vườn đó

Bài 6. Một tam giác vuông có độ dài hai cạnh góc vuông hơn kém nhau $7cm$, độ dài cạnh huyền bằng $17cm$. Tính độ dài hai cạnh góc vuông

Bài 7. Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng. Người ta làm một lối đi xung quanh vườn (thuộc đất trong vườn) rộng 1,5 m. Tính kích thước của vườn, biết rằng đất còn lại trong vườn để trồng trọt là $4329m^2$.

Bài 8. Nhà bạn Hoàng có một mảnh vườn hình chữ nhật, rộng 6m. Diện tích của mảnh vườn bằng $216 m^2$. Tính chiều rộng và chiều dài của mảnh vườn nhà bạn Hoàng.

Bài 9. Một hình chữ nhật có chu vi bằng 68cm. Nếu tăng chiều rộng 6cm và giảm chiều dài 10cm thì được một hình vuông có cùng diện tích với hình chữ nhật ban đầu. Tìm kích thước của hình chữ nhật ban đầu.

DẠNG 2

TOÁN LIÊN QUAN CHUYỂN ĐỘNG

Kiến thức cần nhớ:

- ◆ Quãng đường = Vận tốc . Thời gian.
- ◆ Vận tốc tỷ lệ nghịch với thời gian và tỷ lệ thuận với quãng đường đi được:
- ◆ Nếu hai xe đi ngược chiều nhau khi gặp nhau lần đầu: Thời gian hai xe đi được là như nhau, Tổng quãng đường 2 xe đi được bằng đúng quãng đường cần đi của 2 xe.
- ◆ Nếu hai phương tiện chuyển động cùng chiều từ hai địa điểm khác nhau là A và B, xe từ A chuyển động nhanh hơn xe từ B thì khi xe từ A đuổi kịp xe từ B ta luôn có hiệu quãng đường đi được của xe từ A với quãng đường đi được của xe từ B bằng quãng đường AB
- ◆ Đối với (Ca nô, tàu xuồng) chuyển động trên dòng nước: Ta cần chú ý:
 - + Khi đi xuôi dòng: Vận tốc ca nô= Vận tốc riêng + Vận tốc dòng nước.
 - + Khi đi ngược dòng: Vận tốc ca nô= Vận tốc riêng - Vận tốc dòng nước.
 - + Vận tốc của dòng nước là vận tốc của một vật trôi tự nhiên theo dòng nước (Vận tốc riêng của vật đó bằng 0)

Bài 1. Quãng đường AB dài 100km . Một ô tô dự định đi từ A đến B với vận tốc và thời gian dự định. Trên thực tế xe đi với vận tốc chậm hơn dự định 10km/h nên xe đến B chậm hơn dự định 30 phút. Tính vận tốc và thời gian ô tô dự định đi trên quãng đường AB

Bài 2. Một ô tô và một xe máy khởi hành cùng một lúc từ thành phố Cao Bằng đến huyện Bảo Lạc, quãng đường dài 135 km . Biết rằng vận tốc của ô tô lớn hơn vận tốc của xe máy 9 km/h và ô tô đến huyện Bảo Lạc trước xe máy 45 phút. Tính vận tốc của mỗi xe.

Bài 3. Một người dự định đi xe máy từ A đến B với vận tốc không đổi. Nhưng sau khi đi được 2 giờ thì xe bị hỏng phải dừng lại 20 phút để sửa chữa. Do đó, để kịp đến B đúng thời gian dự định, người đó phải tăng vận tốc thêm 8km/h . Tính vận tốc ban đầu của xe máy. Biết rằng quãng đường AB dài 160km

$$20' = \frac{1}{3}h$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Một xe khách và một xe tải xuất phát cùng một lúc từ thành phố A đến thành phố B trên quãng đường dài 180 km . Vận tốc xe khách lớn hơn vận tốc xe tải là 10km/h nên xe khách đã đến B sớm hơn xe tải 36 phút. Tính vận tốc mỗi xe.

Bài 5. Một người đi xe máy từ địa điểm A đến địa điểm B trên quãng đường 100km . Khi từ B về A người đó đã giảm vận tốc 10km/h so với lúc đi nên thời gian về nhiều hơn thời gian lúc đi là 30 phút. Tính vận tốc của người lúc đi.

Bài 6. Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 15km . Khi từ B trở về A người đó tăng vận tốc thêm 3km/h . Vì vậy, thời gian về ít hơn thời gian đi là 15 phút. Tính vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ A đến B.

Bài 7. Một ô tô và một xe máy cùng khởi hành từ địa điểm A và đi đến địa điểm B. Do vận tốc của ô tô lớn hơn vận tốc của xe máy là 20km/h nên ô tô đến B sớm hơn xe máy 30 phút. Biết quãng đường AB dài 60km , tính vận tốc của mỗi xe (Giả định rằng vận tốc mỗi xe là không đổi trên toàn bộ quãng đường AB)

Bài 8. Năm 2021, Thủ tướng chính phủ đã phê duyệt dự án xây dựng công trình đường cao tốc Châu Đốc – Cần Thơ- Sóc Trăng, dự án này có ý nghĩa đặc biệt quan trọng, sẽ góp phần phát triển kinh tế xã hội của tỉnh Sóc Trăng nói riêng và khu vực đồng bằng Sông Cửu Long nói chung. Theo ước tính chiều dài toàn tuyến cao tốc từ Châu Đốc đến Sóc Trăng là 188km . Biết rằng vận tốc ô tô đi trên đường cao tốc lớn hơn vận tốc ô tô đi trên đường quốc lộ là 34km/h . Vì vậy nếu ô tô đi chuyển trên quãng đường 188km thì việc di chuyển trên đường cao tốc sẽ rút ngắn được 68 phút so với việc di chuyển trên đường quốc lộ. tính vận tốc của ô tô khi di chuyển trên đường cao tốc

Bài 9. Quãng đường AB dài 150 km . Một xe tải khởi hành đi từ A đến B, cùng lúc đó một ô tô cũng đi trên quãng đường đó từ A đến B với vận tốc lớn hơn vận tốc xe tải 5 km/h , nên ô tô đến B sớm hơn xe tải 20 phút. Tính vận tốc xe tải.

Bài 10. Hằng ngày bạn Mai đi học bằng xe đạp, quãng đường từ nhà đến trường dài 3km . Hôm nay, xe đạp hư nên Mai nhờ mẹ chở đi đến trường bằng xe máy với vận tốc lớn hơn vận tốc khi đi xe đạp là 24 km/h , cùng thời điểm khởi hành như mọi ngày nhưng Mai đã đến trường sớm hơn 10 phút. tính vận tốc của bạn Mai khi đi học bằng xe đạp.

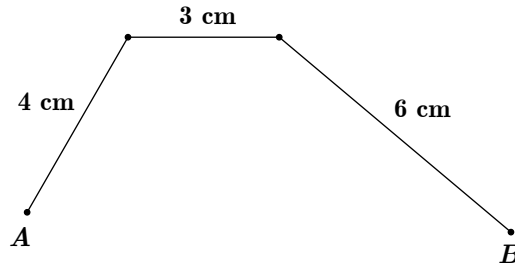
Bài 11. Hai ô tô khởi hành cùng một lúc từ địa điểm A đến địa điểm B cách nhau 120 km . Vận tốc ô tô thứ hai lớn hơn vận tốc ô tô thứ nhất là 10 km/h nên ô tô thứ hai đến B trước ô tô thứ nhất 24 phút. Tính vận tốc của mỗi ô tô.

Bài 12. Lúc 9 giờ sáng, một xe ô tô khởi hành từ A đến B với vận tốc không đổi trên cả quãng đường là 55 km/h . Sau khi xe ô tô này đi được 20 phút thì cũng trên quãng đường đó, một xe ô tô khác bắt đầu đi từ B về A với vận tốc không đổi trên cả quãng đường là 45 km/h . Hỏi hai xe ô tô gặp nhau lúc mấy giờ? Biết quãng đường AB dài 135 km .

Bài 13. Một ô tô khách và một ô tô tải chở vật liệu xây dựng khởi hành cùng một lúc từ bến xe khách Lai Châu đến trung tâm thị trấn Mường Tè. Do trọng tải lớn nên xe tải chở vật liệu xây dựng đi với vận tốc chậm hơn xe khách 10 km/h . Xe khách đến trung tâm thị trấn Mường Tè sớm hơn xe tải 1 giờ 6 phút. Tính vận tốc mỗi xe biết quãng đường từ bến xe khách thành phố Lai Châu đến trung tâm thị trấn Mường Tè là 132 km .

Bài 14. Một xe máy khởi hành tại địa điểm A đi đến địa điểm B cách A 160 km , sau đó 1 giờ, một ô tô đi từ B đến A . Hai xe gặp nhau tại địa điểm C cách B 72 km . Biết vận tốc của ô tô lớn hơn vận tốc của xe máy 20 km/giờ . Tính vận tốc của mỗi xe.

Bài 15. Quãng đường AB gồm một đoạn lên dốc dài 4 km , một đoạn bằng phẳng dài 3 km và một đoạn xuống dốc dài 6 km (như hình vẽ). Một người đi xe đạp từ A đến B và quay về A ngay hết tổng cộng 130 phút. Biết rằng vận tốc người đó đi trên đoạn đường bằng phẳng là 12 km/h và vận tốc xuống dốc lớn hơn vận tốc lên dốc 5 km/h (vận tốc lên dốc, xuống dốc lúc đi và về như nhau). Tính vận tốc lúc lên dốc và lúc xuống dốc của người đó.



Bài 16. Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 24 km . Khi đi từ B trở về A người đó tăng vận tốc thêm 4 km/h so với lúc đi, nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 30 phút. Tính vận tốc của xe đạp khi đi từ A đến B.

DẠNG 3**TOÁN LIÊN QUAN THỰC TẾ**

Bài 1. Một phân xưởng theo kế hoạch phải may 900 bộ quần áo trong một thời gian quy định, mỗi ngày phân xưởng may được số bộ quần áo là như nhau. Khi thực hiện, do cải tiến kỹ thuật nên mỗi ngày phân xưởng may thêm được 10 bộ quần áo và hoàn thành kế hoạch trước 3 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày phân xưởng may được bao nhiêu bộ quần áo?

Bài 2. Hai đội công nhân cùng làm một công việc thì hoàn thành tròn 12 ngày. Nếu họ làm riêng thì đội II hoàn thành công việc hết nhiều thời gian hơn đội I là 10 ngày. Hỏi nếu làm riêng, mỗi đội phải làm trong bao nhiêu ngày để xong công việc.

Bài 3. Trong kỳ SEA Games 31 tổ chức tại Việt Nam, thú Sao La được chọn làm linh vật. Một phân xưởng được giao sản xuất 420 thú nhồi bông Sao La trong một thời gian dự định để làm quà tặng. Biết rằng nếu mỗi giờ phân xưởng sản xuất thêm 5 thú nhồi bông Sao La thì sẽ rút ngắn được thời gian hoàn thành công việc là 2 giờ. Tính thời gian dự định của phân xưởng.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Theo kế hoạch, một xưởng may phải may 280 bộ quần áo. Khi thực hiện, mỗi ngày xưởng may được nhiều hơn 5 bộ quần áo so với số bộ phải may trong một ngày theo kế hoạch. Vì thế xưởng đã hoàn thành công việc sớm một ngày so với kế hoạch. Hỏi theo kế hoạch ban đầu, mỗi ngày xưởng phải may bao nhiêu bộ quần áo?

Bài 5. Một cửa hàng kinh doanh điện máy sau khi nhập về chiếc tivi, đã bán chiếc tivi đó; cửa hàng thu được tiền lãi là 10% của giá nhập về. Giả sử cửa hàng tiếp tục nâng giá bán chiếc tivi đó thêm 5% của giá đã bán, nhưng bớt cho khách hàng 245000 đồng, khi đó cửa hàng sẽ thu được tiền lãi là 12% của giá nhập về. Tìm giá tiền khi nhập về của chiếc tivi đó.

Bài 6. Một người dự định trồng 210 cây theo thời gian định trước. Nhưng do thời tiết xấu nên theo thực tế mỗi ngày người đó trồng được ít hơn dự định 5 cây, vì thế hoàn thành công việc chậm mất 7 ngày so với dự kiến. Hỏi theo dự định ban đầu, mỗi ngày người đó trồng được bao nhiêu cây ?

Bài 7. Thành phố Gia Nghĩa lên kế hoạch xét nghiệm Covid-19 cho 1000 người trong một thời gian quy định. Nhờ cải tiến phương pháp nên mỗi giờ xét nghiệm được thêm 50 người. Vì thế, việc xét nghiệm hoàn thành sớm hơn kế hoạch 1 giờ. Hỏi theo kế hoạch mỗi giờ thành phố Gia Nghĩa xét nghiệm được bao nhiêu người

Bài 8. Theo kế hoạch, một tổ công nhân dự định phải may 120 kiện khẩu trang để phục vụ công tác phòng chống dịch Covid – 19. Nhưng khi thực hiện nhờ cải tiến kỹ thuật nên mỗi ngày tổ đã làm tăng thêm 5 kiện so với dự định. Do đó tổ đã hoàn thành công việc sớm hơn dự định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày tổ phải làm bao nhiêu kiện khẩu trang?

Bài 9. Một phân xưởng phải may 1200 bộ quần áo trong một thời gian quy định. Khi thực hiện, do cải tiến kỹ thuật nên mỗi ngày phân xưởng may thêm được 10 bộ quần áo và hoàn thành kế hoạch trước 4 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày phân xưởng may bao nhiêu bộ quần áo?

Bài 10. Theo kế hoạch, Công an tỉnh Khánh Hòa sẽ cấp 7200 thẻ căn cước công dân cho địa phương A. Một tổ công tác được điều động đến địa phương A để cấp thẻ căn cước công dân trong một thời gian nhất định. Khi thực hiện nhiệm vụ, tổ chức công tác đã cải tiến kỹ thuật nên mỗi ngày đã cấp tăng thêm được 40 thẻ Căn cước so với kế hoạch. Vì vậy, tổ công tác đã hoàn thành nhiệm vụ sớm hơn kế hoạch 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch ban đầu, mỗi ngày tổ công tác sẽ cấp được bao nhiêu thẻ Căn cước?

Bài 11. Trong giai đoạn phòng chống đại dịch Covid-19, Bộ Y tế khuyến cáo người dân thực hiện nghiêm túc thông điệp 5K, trong đó có yêu cầu giữ vệ sinh và “Khử khuẩn”.

Theo kế hoạch một công ty phải sản xuất 4000 chai dung dịch khử khuẩn trong một thời gian quy định (số chai dung dịch khử khuẩn sản xuất trong mỗi ngày là bằng nhau). Để tăng cường phòng chống dịch, mỗi ngày công ty đã sản xuất nhiều hơn dự định 100 chai dung dịch khử khuẩn. Do đó, công ty đã hoàn thành công việc trước thời hạn 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày công ty sản xuất bao nhiêu chai dung dịch khử khuẩn?

Bài 12. Theo kế hoạch công an tỉnh Kiên Giang điều hai tổ công tác đến làm thẻ Căn cước công dân cho một phường trên địa bàn thành phố Rạch Giá. Nếu cả hai tổ cùng làm thì trong 4 ngày hoàn thành công việc. Nếu mỗi tổ làm riêng thì thời gian hoàn thành của tổ I ít hơn thời gian hoàn thành của tổ II là 6 ngày. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi tổ phải làm trong bao nhiêu ngày để hoàn thành công việc?

Bài 13. Theo kế hoạch, một tổ trong xưởng may phải may xong 8400 chiếc khẩu trang trong một thời gian quy định. Do tình hình dịch bệnh Covid-19 diễn biến phức tạp, tổ đã quyết định tăng năng suất nên mỗi ngày tổ đã may được nhiều hơn 102 chiếc khẩu trang so với số khẩu trang phải may trong một ngày theo kế hoạch. Vì vậy, trước thời gian quy định 4 ngày, tổ đã may được 6416 chiếc khẩu trang. Hỏi số khẩu trang mà tổ phải may mỗi ngày theo kế hoạch là bao nhiêu?

Bài 14. Một nhóm học sinh dự định làm 360 chiếc mũ chắn giọt bắn trong một thời gian nhất định để ủng hộ các địa phương trong công tác phòng, chống dịch bệnh COVID-19. Thực tế, mỗi ngày nhóm học sinh làm vượt mức 12 chiếc mũ so với dự định. Vì vậy, nhóm đã làm xong trước dự định hai ngày và làm thêm được 4 chiếc mũ. Hỏi theo dự định, mỗi ngày nhóm học sinh làm được bao nhiêu chiếc mũ?

Bài 15. Một địa phương lên kế hoạch xét nghiệm SARS-COV-2 cho 12000 người trong một thời gian quy định. Nhờ cải tiến phương pháp nên mỗi giờ xét nghiệm được thêm 1000 người. Vì thế, địa phương này hoàn thành sớm hơn kế hoạch là 16 giờ. Hỏi theo kế hoạch, địa phương này phải xét nghiệm trong thời gian bao nhiêu giờ?

Bài 16. Để phục vụ công tác phòng chống dịch COVID-19, một Công ty A lên kế hoạch trong một thời gian quy định làm 20000 tấm chắn bảo hộ để tặng các chốt chống dịch. Do ý thức khẩn trương trong công tác hỗ trợ chống dịch và nhờ cải tiến quy trình làm việc nên mỗi ngày Công ty A làm được nhiều hơn 300 tấm so với kế hoạch ban đầu. Vì thế, Công ty A đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn đúng một ngày so với thời gian quy định và làm được nhiều hơn 700 tấm so với kế hoạch ban đầu. Biết rằng số tấm làm ra trong mỗi ngày là bằng nhau và nguyên cái. Hỏi theo kế hoạch ban đầu, mỗi ngày Công ty A cần làm bao nhiêu tấm chắn bảo hộ ?

Bài 17. Một tổ sản xuất phải làm xong 4800 bộ đồ bảo hộ y tế trong một số ngày quy định. Thực tế, mỗi ngày tổ đó làm được nhiều hơn 100 bộ đồ bảo hộ y tế so với số bộ đồ bảo hộ y tế phải làm trong một ngày theo kế hoạch. Vì thế 8 ngày trước khi hết hạn, tổ sản xuất đã làm xong 4800 bộ đồ bảo hộ y tế đó. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày tổ sản xuất phải làm bao nhiêu bộ đồ bảo hộ y tế? (Giả định rằng số bộ đồ bảo hộ y tế mà tổ đó làm xong trong mỗi ngày là bằng nhau.)

BÀI 2**PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN****1. Định nghĩa**

Phương trình bậc hai một ẩn (hay còn gọi là phương trình bậc hai) là phương trình có dạng: $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, trong đó a, b, c là các số thực cho trước và x là ẩn số.

2. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai

Xét phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ và biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.
- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Nhận xét:

Xét phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ với $b = 2b'$. Gọi biệt thức $\Delta' = b'^2 - ac$.

- Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$; $x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$
- Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}$.
- Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Công thức nghiệm vừa viết ở trên được gọi là công thức nghiệm thu gọn của phương trình bậc hai.

Chú ý:

- Trong trường hợp hệ số b có dạng $2b'$ ta nên sử dụng Δ' để giải phương trình sẽ cho lời giải ngắn gọn hơn.

- Nếu a, c trái dấu thì phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

- Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ bị khuyết c hay $ax^2 + bx = 0$ thì ta có thể giải cách sau:

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0$$

$$x = 0 \text{ hoặc } ax + b = 0$$

$$x = 0 \text{ hoặc } x = -\frac{b}{a}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = -\frac{b}{a}$

• Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) bị khuyết b hay $ax^2 + c = 0$ (1) thì ta có thể giải cách sau:

+ Với $c > 0$, phương trình (1) vô nghiệm.

+ Với $c = 0$, phương trình (1) có nghiệm $x = 0$.

+ Với $c < 0$, ta có:

$$ax^2 + c = 0$$

$$x^2 = \frac{-c}{a}$$

$$x = -\sqrt{\frac{-c}{a}} \text{ hoặc } x = \sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$ và $x = \sqrt{\frac{-c}{a}}$

3. Ứng dụng của phương trình bậc hai một ẩn

Để giải bài toán bằng cách lập phương trình bậc hai, ta có thể làm các bước sau:

• **Bước 1:** Lập phương trình bậc hai:

+ Chọn ẩn và đặt điều kiện thích hợp cho chúng.

+ Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.

+ Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

• **Bước 2:** Giải phương trình bậc hai.

• **Bước 3:** Trả lời: Kiểm tra xem trong các nghiệm của hệ phương trình, nghiệm nào thích hợp với bài toán (thoả mãn điều kiện ở bước 1) và kết luận.

CHỦ ĐỀ 1**GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN****DẠNG 1****GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI DẠNG ĐẶC BIỆT
(PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI BỊ KHUYẾT HỆ SỐ b HOẶC c)**

- Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ bị khuyết c hay $ax^2 + bx = 0$ thì ta có thể giải cách sau:

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0$$

$$x = 0 \text{ hoặc } ax + b = 0$$

$$x = 0 \text{ hoặc } x = -\frac{b}{a}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = -\frac{b}{a}$

- Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ bị khuyết b hay $ax^2 + c = 0$ (1) thì ta có thể giải cách sau:

+ Với $c > 0$, phương trình (1) vô nghiệm.

+ Với $c = 0$, phương trình (1) có nghiệm $x = 0$.

+ Với $c < 0$, ta có:

$$ax^2 + c = 0$$

$$x^2 = \frac{-c}{a}$$

$$x = -\sqrt{\frac{-c}{a}} \text{ hoặc } x = \sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$ và $x = \sqrt{\frac{-c}{a}}$

Bài 1. Giải các phương trình sau

a) $5x^2 - 7x = 0$

b) $-3x^2 + 9 = 0$

Lời giải

a) Ta có:

$$5x^2 - 7x = 0$$

$$x(5x - 7) = 0$$

$$x = 0 \text{ hoặc } 5x - 7 = 0$$

$$x = 0 \text{ hoặc } x = \frac{7}{5}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = \frac{7}{5}$

b) Ta có:

$$-3x^2 + 9 = 0$$

$$3x^2 - 9 = 0$$

$$3(x^2 - 3) = 0$$

$$x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = 3$$

$$x = -\sqrt{3} \text{ hoặc } x = \sqrt{3}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = -\sqrt{3}$ và $x = \sqrt{3}$ **BÀI TẬP RÈN LUYỆN****Bài 2.** Giải các phương trình sau

a) $-\sqrt{3}x^2 - 7x = 0$

b) $\frac{-3}{5}x^2 - \frac{7}{2} = 0$

Bài 3. Giải các phương trình sau

a) $(x+1)^2 = 4$

b) $(x-3)^2 = 7$

c) $(x+2)^2 - 5 = 0$

d) $(x-5)^2 - 11 = 0$

DẠNG 2**GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI DÙNG CÔNG THỨC NGHIỆM**

Bài 1. Xác định hệ số a, b, c ; Tính biệt thức Δ (hoặc Δ' nếu $b = 2b'$) rồi tìm nghiệm của các phương trình sau

a) $x^2 - x - 11 = 0$

b) $x^2 - 4x + 4 = 0$

c) $-5x^2 - 4x + 1 = 0$

d) $-2x^2 + x - 3 = 0$

Lời giải

a) $x^2 - x - 11 = 0$

Ta có: $a = 1; b = -1; c = -11$

$$\Delta = (-1)^2 - 4.1.(-11) = 45 > 0$$

Do $\Delta > 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{45}}{2.1} = \frac{1 + 3\sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{1 - \sqrt{45}}{2.1} = \frac{1 - 3\sqrt{5}}{2}$$

b) Ta có: $a = 1; b = -4 \Rightarrow b' = -2; c = 4$

$$\Delta' = (-2)^2 - 1.4 = 0$$

Do $\Delta' = 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm kép là: $x_1 = x_2 = -\frac{-2}{1} = 2$ c) Ta có: $a = -5; b = -4 \Rightarrow b' = -2; c = 1$

$$\Delta' = (-2)^2 - (-5).1 = 9 > 0$$

Do $\Delta' > 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{9}}{-5} = -1; x_2 = \frac{2 - \sqrt{9}}{-5} = \frac{1}{5}$$

d) Ta có: $a = -2; b = 1; c = -3$;

$$\Delta = 1^2 - 4.(-2).(-3) = -23 < 0$$

Do $\Delta < 0$ nên phương trình đã cho vô nghiệm.**Bài 2.** Giải các phương trình sau:

a) $3x^2 - 5x - 2 = 0$

b) $x^2 + 3x - 10 = 0$

c) $4x^2 + 7x - 2 = 0$

Lời giải

a) $3x^2 - 5x - 2 = 0$.

Ta có $\Delta = (-5)^2 - 4.3(-2) = 49 > 0$

Do $\Delta > 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là

$$x_1 = 2; x_2 = \frac{-1}{3}$$

$$\text{b) } x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 49 > 0$$

Do $\Delta > 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 7}{2} = 2; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 7}{2} = -5$$

$$\text{c) } 4x^2 + 7x - 2 = 0.$$

$$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-2) = 81 > 0$$

Do $\Delta > 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là

$$x_1 = \frac{-7 + \sqrt{81}}{2 \cdot 4} = \frac{1}{4}; x_2 = \frac{-7 - \sqrt{81}}{2 \cdot 4} = -2.$$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } x^2 + 2\sqrt{5}x + 4 = 0$$

$$\text{b) } \sqrt{2}x^2 - 3x + 5 = 0$$

$$\text{c) } x^2 - (2 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} = 0$$

Lời giải

$$\text{a) } x^2 + 2\sqrt{5}x + 4 = 0$$

$$\text{Ta có } \Delta' = (\sqrt{5})^2 - 4 = 1 > 0$$

Do $\Delta' > 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là

$$x_1 = \frac{-\sqrt{5} - 1}{2} \text{ và } x_2 = \frac{-\sqrt{5} + 1}{2}$$

$$\text{b) } \sqrt{2}x^2 - 3x + 5 = 0$$

$$\text{Ta có } \Delta = 3^2 - 4 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} = 9 - 20\sqrt{2} < 0$$

Do $\Delta < 0$ nên phương trình đã cho vô nghiệm.

$$\text{c) } x^2 - (2 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} = 0$$

$$\text{Ta có: } \Delta = (2 + \sqrt{3})^2 - 4 \cdot 2\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2 - \sqrt{3}.$$

Do $\Delta > 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}}{2} = 2; x_2 = \frac{2 + \sqrt{3} - (2 - \sqrt{3})}{2} = \sqrt{3},$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Xác định hệ số a, b, c ; Tính biệt thức Δ (hoặc Δ' nếu $b = 2b'$) rồi tìm nghiệm của các phương trình sau

$$\text{a) } 2x^2 - 3x - 5 = 0$$

$$\text{b) } x^2 - 6x + 8 = 0$$

c) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

d) $-3x^2 + 4x - 4 = 0$

Bài 5. Giải các phương trình sau

a) $2x^2 + 2\sqrt{11}x - 7 = 0$

b) $152x^2 - 5x + 1 = 0$

c) $x^2 - (2 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} = 0$

d) $3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$

Bài 6. Giải các phương trình sau

a) $x^2 + \sqrt{5}x - 1 = 0$

b) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

c) $\sqrt{3}x^2 - (1 - \sqrt{3})x - 1 = 0$

d) $-3x^2 + 4\sqrt{6}x + 4 = 0$

Bài 7. Giải các phương trình sau:

a) $(x+1)^2 - 4(x^2 - 2x + 1) = 0$

b) $x^2 + 7x - 3 = x(x-1) - 1$

c) $2x^2 - 5x - 3 = (x+1)(x-1) + 3$

d) $5x^2 - x - 3 = 2x(x-1) - 1 + x^2$

DẠNG 3**XÁC ĐỊNH SỐ NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI CHỨA THAM SỐ**

Xét phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$ (1)

1. Phương trình (1) có nghiệm kép khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$

2. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

3. Phương trình (1) có đúng một nghiệm khi $\begin{cases} a = 0; b \neq 0 \\ a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$

4. Phương trình vô nghiệm khi $\begin{cases} a = 0; b = 0; c \neq 0 \\ a \neq 0; \Delta < 0 \end{cases}$

Chú ý: Nếu $b = 2b'$ ta có thể thay thế điều kiện của Δ tương ứng bằng Δ'

Bài 1. Cho phương trình $4x^2 + 4mx + m + 6 = 0$ (1). Tìm m để phương trình (1) có nghiệm kép

Lời giải

Ta có: $\Delta' = 4m^2 - 4m - 24$

Phương trình (1) có nghiệm kép khi $\Delta' = 0$

$$4m^2 - 4m - 24 = 0$$

$$m^2 - m - 6 = 0$$

$$(m+2)(m-3) = 0$$

$$m+2 = 0 \text{ hoặc } m-3 = 0$$

$$m = -2 \text{ hoặc } m = 3$$

Vậy $m \in \{-2; 3\}$.

Bài 2. Cho phương trình $mx^2 + (2m-5)x + m-2 = 0$ (1) với $m \in \mathbb{R}$ là tham số.

a) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

Lời giải

a) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm

Xét 2 trường hợp

TH1: Với $m = 0$ phương trình trở thành:

$$-5x - 2 = 0$$

$$x = -\frac{2}{5}$$

Vậy $m = 0$ thỏa yêu cầu bài toán

TH2: Với $m \neq 0$ phương trình $mx^2 + (2m - 5)x + m - 2 = 0$ là một phương trình bậc hai và có

$$\Delta = (2m - 5)^2 - 4m(m - 2) = -12m + 25$$

để phương trình (1) có nghiệm thì $\Delta \geq 0$

$$-12m + 25 \geq 0$$

$$m \leq \frac{25}{12}$$

Kết hợp hai trường hợp suy ra phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $m \leq \frac{25}{12}$

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì $a \neq 0$ và $\Delta > 0$

hay $m \neq 0$ và $-12m + 25 > 0$

hay $m \neq 0$ và $m < \frac{25}{12}$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \neq 0$ và $m < \frac{25}{12}$

Bài 3. Cho phương trình $x^2 + (2m + 3)x + 3m = 0$ (m là tham số) (1)

a) Tìm giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm $x = 3$

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m phương trình (1) luôn có nghiệm.

Lời giải

a) Tìm giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm $x = 3$

Vì $x = 3$ là nghiệm của (1) nên thay $x = 3$ vào phương trình ta có :

$$3^2 + (2m + 3).3 + 3m = 0$$

$$9 + 6m + 9 + 3m = 0$$

$$9m = -18$$

$$m = -2$$

Vậy để phương trình (1) có nghiệm $x = 3$ thì $m = -2$

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m phương trình (1) luôn có nghiệm.

Phương trình (1) có :

$$\Delta = (2m + 3)^2 - 4.1.3m = 4m^2 + 12m + 9 - 12m = 4m^2 + 9 > 0 (\forall m)$$

Vậy phương trình (1) luôn có nghiệm (đpcm)

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Cho phương trình $mx^2 - 3(m+1)x + m^2 - 13m - 4 = 0$ (với m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình có một nghiệm là $x = -2$. Tìm nghiệm còn lại

Lời giải

Thay $x = -2$ vào phương trình ta tìm được $m = 1$ hoặc $m = 2$

- Với $m = 1$, ta có: $x^2 - 6x - 16 = 0$. Giải được $x = -2$ và $x = 8$

- Với $m = 2$, ta có: $2x^2 - 9x - 26 = 0$ Giải được $x = -2$ và $x = \frac{13}{2}$

Bài 5. Cho phương trình $(2m-3)x^2 - 2(m-2)x - 1 = 0$ với m là tham số. Khi nào

- Giải phương trình với $m = 2$
- Chứng minh rằng với mọi $m \in \mathbb{R}$, phương trình luôn có nghiệm.
- Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải

a) Với $m = 2$, phương trình đã cho trở thành $x^2 - 1 = 0$ hay $x = \pm 1$

b) Xét hai trường hợp

TH1: Với $m = \frac{3}{2}$ phương trình đã cho trở thành: $x - 1 = 0$ hay $x = 1$

TH2: Với $m \neq \frac{3}{2}$ phương trình $(2m-3)x^2 - 2(m-2)x - 1 = 0$ là một phương trình bậc hai và có

$$\Delta' = (m-2)^2 + (2m-3) = (m-1)^2 \geq 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

Suy ra phương trình luôn có nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$

c) Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi:

$$m \neq \frac{3}{2} \text{ và } (m-1)^2 > 0$$

$$m \neq \frac{3}{2} \text{ và } m \neq 1$$

Bài 6. Cho phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình:

- Có hai nghiệm phân biệt
- Có nghiệm kép
- Vô nghiệm
- Có đúng một nghiệm
- Có nghiệm

Lời giải

$$\text{Ta có: } \Delta = (m-1)^2 - m(m-3) = m + 1$$

a) Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $m \neq 0$ và $\Delta > 0$ hay $m \neq 0$ và $m > -1$

b) Xét $m \neq 0$. Phương trình có nghiệm kép khi $m \neq 0$ và $\Delta' = 0$ hay $m = -1$

c) Ta tìm được $m < -1$

d) Ta tìm được $m = 0; m = -1$

e) Ta tìm được $m \geq -1$

Bài 7. Cho phương trình $(m-2)x^2 - 2(m+1)x + m = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình:

a) Có hai nghiệm phân biệt

b) Có nghiệm kép

c) Vô nghiệm

d) Có đúng một nghiệm

e) Có nghiệm

Lời giải

Ta có: $\Delta' = (m+1)^2 - m(m-2) = 4m+1$

a) Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $m \neq 2$ và $\Delta' > 0$ hay $m \neq 2$ và $m > \frac{-1}{4}$

b) Tìm được $m = \frac{-1}{4}$

c) Ta tìm được $m < \frac{-1}{4}$

d) Ta tìm được $m = 2; m = \frac{-1}{4}$

e) Ta tìm được $m \geq \frac{-1}{4}$

Bài 8. Chứng minh rằng với $\forall m$ các phương trình sau luôn có nghiệm:

$$a) x^2 - 2(m+2)x - m - 7 = 0$$

$$b) x^2 - 4m^2x - 4m - 2 = 0$$

Lời giải

$$a) x^2 - 2(m+2)x - m - 7 = 0$$

Ta có $\Delta' = (m+2)^2 - (m-7) = m^2 + 5m + 11 = \left(m + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} > 0, \forall m \Rightarrow \Delta' > 0$ với mọi m

Vậy phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

$$b) x^2 - 4m^2x - 4m - 2 = 0$$

Ta có $\Delta' = 4m^4 + 4m + 2 = 2(2m^4 + 2m + 1)$

$$\text{mà } 2m^4 + 2m + 1 = 2\left(m^4 - m^2 + \frac{1}{4}\right) + 2\left(m^2 + m + \frac{1}{4}\right) = 2\left(m^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$$

Dấu “=” xảy ra khi $m^2 - \frac{1}{2} = 0$ và $m + \frac{1}{2} = 0$ suy ra vô lý $\Rightarrow \Delta' > 0 \forall m$.

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Bài 9. Cho phương trình $x^2 + (m-5)x - 3(m-2) = 0$ với $m \in \mathbb{R}$ là tham số

a) Chứng minh rằng phương trình trên luôn có nghiệm $x = 3$ với mọi $m \in \mathbb{R}$

b) Tìm m để phương trình có nghiệm kép

Lời giải

a) Ta có

$$x^2 + (m-5)x - 3(m-2) = 0$$

$$x^2 - 3x + (m-2)x - 3(m-2) = 0$$

$$x(x-3) + (m-2)(x-3) = 0$$

$$(x-3)(x+m-2) = 0$$

$$x = 3 \text{ và } x = 2 - m$$

Vậy phương trình trên luôn có nghiệm $x = 3$ với mọi $m \in \mathbb{R}$

b) Phương trình có nghiệm kép khi và chỉ khi hai nghiệm của phương trình trùng nhau

Theo câu a) suy ra $2 - m = 3 \Rightarrow m = -1$

Ta cũng có thể xét $\Delta = (m-5)^2 + 4.3(m-2) = m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2$

Phương trình có nghiệm kép khi

$$\Delta = 0$$

$$(m+1)^2 = 0$$

$$m = -1$$

Bài 10. Cho phương trình: $x^2 - 2(3m+2)x + 2m^2 - 3m + 5 = 0$.

a) Giải phương trình với $m = -2$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình có một trong các nghiệm bằng -1 .

c) Tìm các giá trị của m để phương trình trên có nghiệm kép.

Bài 11. Cho phương trình: $x^2 - 2(m-2)x + m^2 - 3m + 5 = 0$.

a) Giải phương trình với $m = 3$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình có một trong các nghiệm bằng -4 .

c) Tìm các giá trị của m để phương trình trên có nghiệm kép.

Bài 12. Cho phương trình: $x^2 - 2(m+3)x + m^2 + 3 = 0$.

a) Giải phương trình với $m = -1$ và $m = 3$.

b) Tìm m để phương trình có một trong các nghiệm bằng 4 .

c) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

CHỦ ĐỀ 2

SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

DẠNG 1

SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Cho (P) : $y = ax^2$ và (d) : $y = mx + n (m \neq 0)$. Để tìm tọa độ giao điểm (nếu có) của (P) và d ta làm như sau:

Bước 1: Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d : $ax^2 = mx + n (*)$

Bước 2: Giải phương trình $(*)$ ta tìm được nghiệm (nếu có). Từ đó ta tìm được tọa độ giao điểm của (P) và d

Chú ý:

Số nghiệm của $(*)$ đúng bằng số giao điểm của (P) và d , cụ thể

- Nếu $(*)$ vô nghiệm thì d không cắt (P)
- Nếu $(*)$ có nghiệm kép thì d tiếp xúc với (P)
- Nếu $(*)$ có hai nghiệm phân biệt thì d cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng

$$(d): y = -\frac{1}{2}x + 2.$$

a) Vẽ đồ thị (P) và (d) trên cùng mặt phẳng tọa độ.

b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Lời giải

Lập bảng:

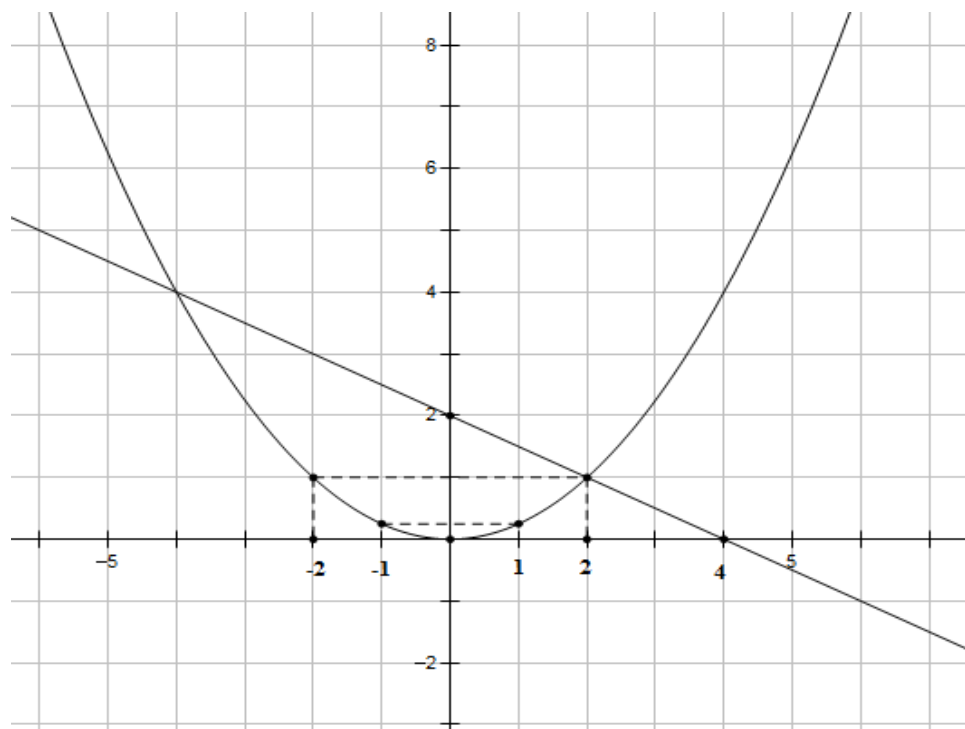
Đường thẳng (d) :

x	0	4
$y = -\frac{1}{2}x + 2.$	2	0

Parabol (P) :

x	-2	-1	0	1	2
$y = \frac{1}{4}x^2$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1

Vẽ đồ thị:



b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của phương trình

$$\frac{1}{4}x^2 = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\Delta' = 1^2 - (-8) = 9 > 0$$

Do $\Delta' > 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là

$$x = -4 \text{ và } x = 2$$

$$+ \text{ Với } x = -4 \Rightarrow y = 4$$

$$+ \text{ Với } x = 2 \Rightarrow y = 1.$$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $(-4; 4)$ và $(2; 1)$.

Bài 2. Cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + 1$.

a) Vẽ parabol (P) và đường thẳng d trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy

b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Lời giải

a) Vẽ parabol (P) và đường thẳng d trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$a = 2 > 0$, hàm số đồng biến nếu $x > 0$, hàm số nghịch biến nếu $x < 0$

Bảng giá trị

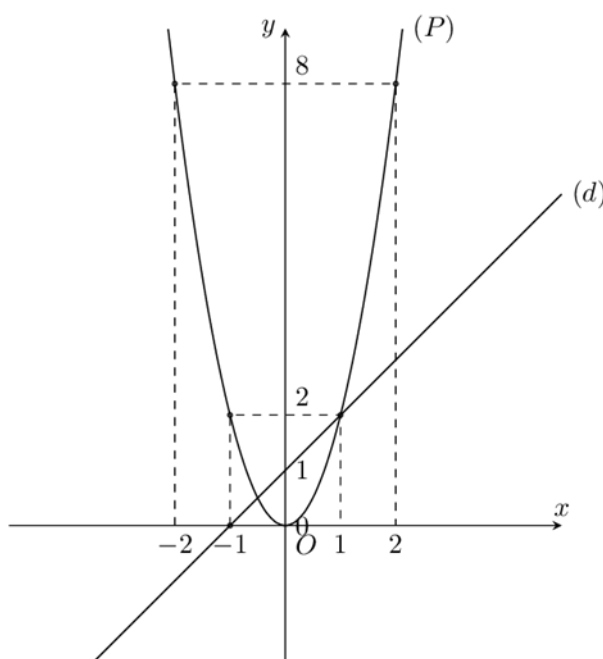
x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8

Đồ thị hàm số $y = 2x^2$ là đường cong Parabol đi qua điểm O , nhận Oy làm trục đối xứng, bề lõm hướng lên trên.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$a = 1 > 0$ nên hàm số đồng biến trên \mathbb{R}

Đồ thị hàm số $y = x + 1$ là đường thẳng đi qua điểm $(0;1)$ và $(-1;0)$



b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của phương trình

$$2x^2 = x + 1$$

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

Ta có $a + b + c = 2 - 1 - 1 = 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x = 1$ và $x = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2}$

+ Với $x = 1 \Rightarrow y = 1 + 1 = 2$

+ Với $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$.

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $(1; 2)$ và $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Bài 3. Cho Parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = 5x + 6$

a) Vẽ đồ thị (P) .

b) Tìm tọa độ các giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Lời giải

a) Vẽ đồ thị (P) .

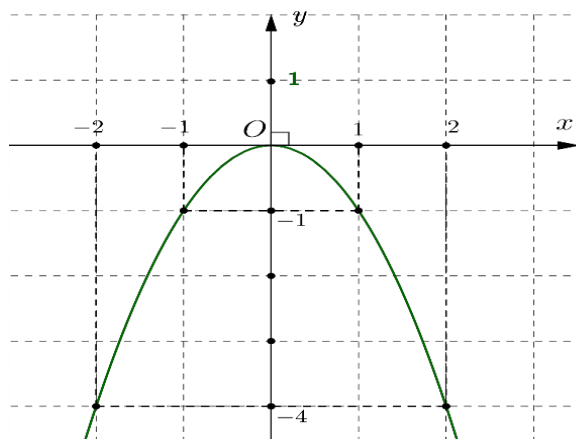
Đồ thị hàm số $y = -x^2$ đi qua gốc tọa độ O , có bề lõm hướng xuống và nhận Oy làm trục đối xứng.

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4

\Rightarrow Parabol $(P): y = -x^2$ đi qua các điểm $(-2; -4)$, $(-1; -1)$, $(0; 0)$, $(1; -1)$, $(2; -4)$.

Đồ thị Parabol $(P): y = -x^2$:



b) Hoành độ giao điểm của đồ thị (P) và (d) là nghiệm của phương trình:

$$-x^2 = 5x + 6 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0$$

Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4.6 = 1 > 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-5+1}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-5-1}{2} = -3$$

$$\text{Với } x_1 = -2 \Rightarrow y_1 = -(-2)^2 = -4.$$

$$\text{Với } x_2 = -3 \Rightarrow y_2 = -(-3)^2 = -9.$$

Vậy tọa độ các giao điểm của (P) và (d) là $A(-2; -4)$, $B(-3; -9)$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN**Bài 4.** Cho hàm số $y = -2x^2$ có đồ thị (P)

a) Vẽ (P)

b) Bằng phép tính, tìm tọa độ các giao điểm của (P) với đường thẳng (d): $y = x - 3$ **Lời giải**

a) Học sinh tự vẽ đồ thị (P)

b) Ta có phương trình hoành độ giao điểm :

$$-2x^2 = x - 3$$

$$2x^2 + x - 3 = 0$$

$$2x^2 + 3x - 2x - 3 = 0$$

$$(x-1)(2x+3) = 0$$

$$x = 1 \text{ và } x = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Với } x = 1 \Rightarrow y = -2$$

$$\text{Với } x = -\frac{3}{2} \Rightarrow y = -\frac{9}{4}$$

Vậy giao điểm của (P) và (d) là $A(1; -2), B\left(-\frac{3}{2}; -\frac{9}{4}\right)$ **Bài 5.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol (P): $y = 2x^2$.

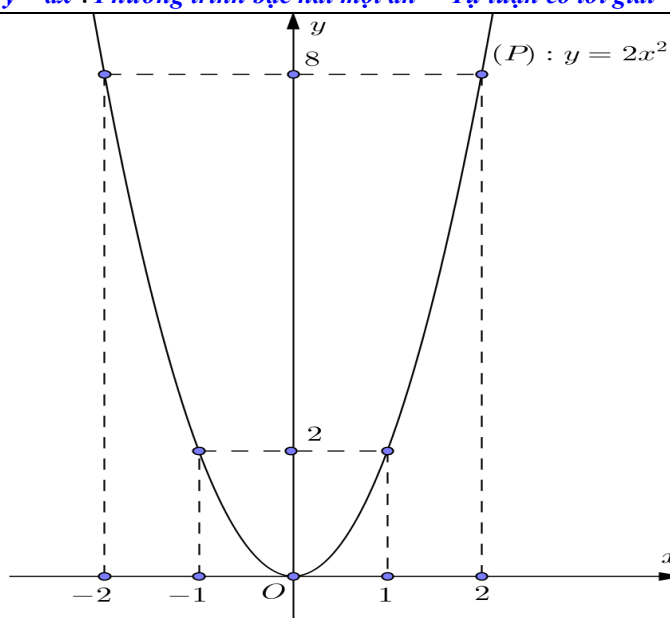
a) Vẽ đồ thị parabol (P).

b) Bằng phép tính, tìm tất cả các điểm thuộc parabol (P) (khác gốc tọa độ O) có tung độ gấp hai lần hoành độ.**Lời giải**a) Vẽ đồ thị parabol (P): $y = 2x^2$.

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8

Đồ thị:



b) Gọi $M(a; b)$ là điểm cần tìm với $a \neq 0, b \neq 0$.

Vì M có tung độ gấp hai lần hoành độ nên $b = 2a$

Khi đó: $M(a, 2a)$

Vì $M(a, 2a) \in (P): y = 2x^2$ nên:

$$2a = 2a^2$$

$$2a^2 - 2a = 0$$

$$a^2 - a = 0$$

$$a(a - 1) = 0$$

$$a = 0 \text{ và } a = 1$$

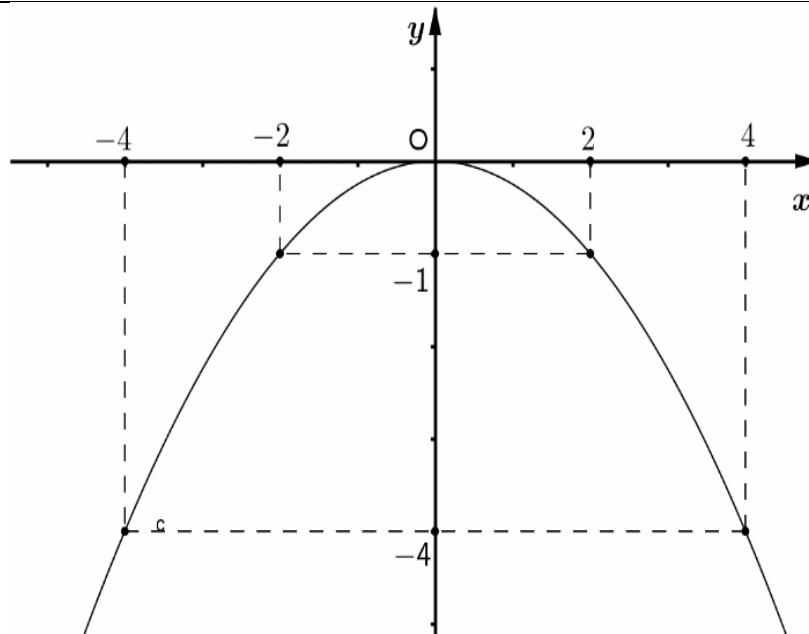
Vì $a \neq 0$ nên ta chọn $a = 1$. Vậy $M(1; 2)$

Bài 6. Cho hàm số: $y = -\frac{1}{4}x^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng (d): $y = \frac{1}{2}x - 2$. Vẽ đồ thị (P) và tìm tọa độ giao điểm của (P) với đường thẳng (d) bằng phép tính.

Lời giải

+ Vẽ (P):

X	-4	-2	0	2	4
$y = -\frac{1}{4}x^2$	-4	-1	0	-1	-4



+ Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của pt:

$$\frac{1}{2}x - 2 = -\frac{1}{4}x^2$$

$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2 = 0$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x^2 - 2x + 4x - 8 = 0$$

$$(x - 2)(x + 4) = 0$$

$$x = -4; x = 2$$

Với $x=2$ ta được $y=-1$; với $x=-4$ ta được $y=-4$.

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là : $(2; -1)$ và $(-4; -4)$

Bài 7. Cho Parabol (P): $y = -x^2$ và đường thẳng (d): $y = 5x + 6$

a) Vẽ đồ thị (P).

b) Tìm tọa độ các giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Lời giải

a) Vẽ đồ thị (P).

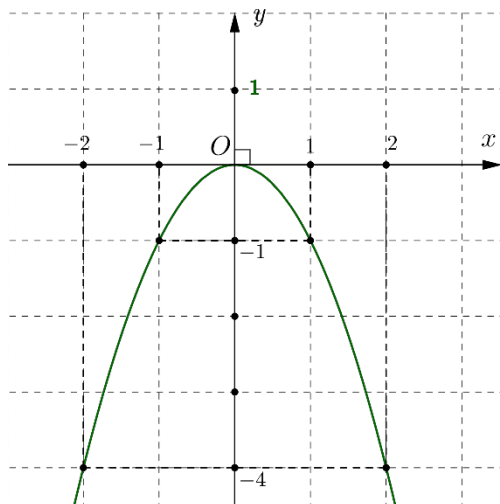
Đồ thị hàm số $y = -x^2$ đi qua gốc tọa độ O , có bề lõm hướng xuống và nhận Oy làm trục đối xứng.

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4

\Rightarrow Parabol (P): $y = -x^2$ đi qua các điểm $(-2; -4)$, $(-1; -1)$, $(0; 0)$, $(1; -1)$, $(2; -4)$.

Đồ thị Parabol (P): $y = -x^2$:



b)

Hoành độ giao điểm của đồ thị (P) và (d) là nghiệm của phương trình:

$$-x^2 = 5x + 6$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4.6 = 1 > 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-5+1}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-5-1}{2} = -3$$

$$\text{Với } x_1 = -2 \Rightarrow y_1 = -(-2)^2 = -4.$$

$$\text{Với } x_2 = -3 \Rightarrow y_2 = -(-3)^2 = -9.$$

Vậy tọa độ các giao điểm của (P) và (d) là $A(-2; -4), B(-3; -9)$.

Bài 8. Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P) .

a) Vẽ (P) b) Bằng phép tính, tìm tọa độ các giao điểm của (P) và đường thẳng $(d): y = -x + 2$.

Lời giải

a) Vẽ (P)

Vẽ đồ thị hàm số $(P): y = x^2$.

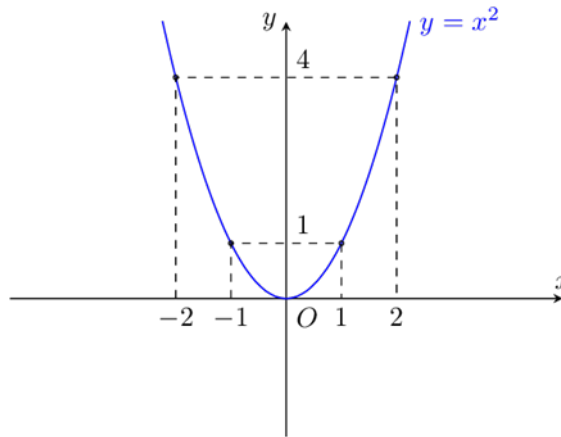
Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$a = 1 > 0$, hàm số đồng biến nếu $x > 0$, hàm số nghịch biến nếu $x < 0$

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Đồ thị hàm số $y = x^2$ là đường cong Parabol đi qua điểm O , nhận Oy làm trục đối xứng, bề lõm hướng lên trên.



b) Bằng phép tính, tìm tọa độ các giao điểm của (P) và đường thẳng (d): $y = -x + 2$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm giữa (P) và đường thẳng (d) ta được:

$$x^2 = -x + 2$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

Ta có: $a + b + c = 1 + 1 - 2 = 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x = 1$ và $x = \frac{c}{a} = -2$

Với $x = 1$ ta có $y = 1^2 = 1$.

Với $x = -2$ ta có $y = (-2)^2 = 4$.

Vậy đồ thị (P) cắt (d) tại hai điểm $(1;1), (-2;4)$.

Bài 9. Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = x + 2$

a) Vẽ parabol (P) và đường thẳng (d) trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy .

b) Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d) bằng phép tính.

Lời giải

a) Vẽ parabol (P) và đường thẳng (d) trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy .

+ Xét parabol (P): $y = x^2$

Hệ số $a = 1 > 0$ nên hàm số đồng biến khi $x > 0$, nghịch biến khi $x < 0$ và có bề lõm hướng lên trên

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

\Rightarrow Parabol (P) là đường cong có đỉnh $O(0;0)$, qua các điểm $(1;1), (-1;1), (2;4), (-2;4)$

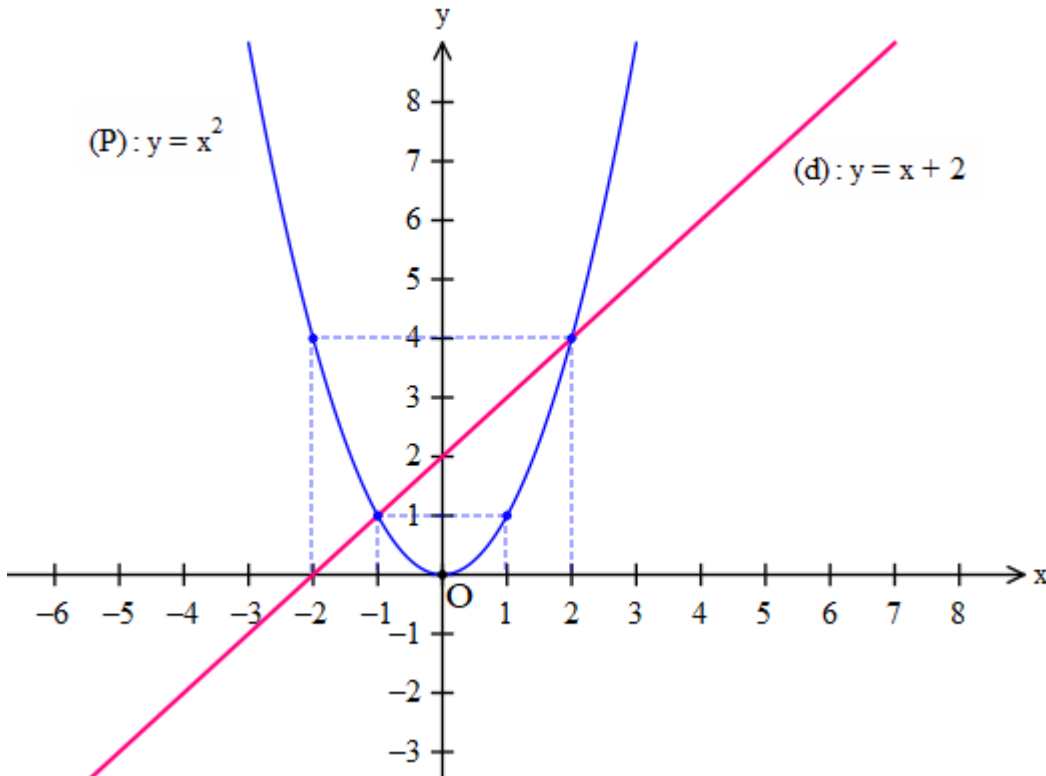
+ Xét đường thẳng (d): $y = x + 2$

Bảng giá trị:

x	0	-2
$y = x + 2$	2	0

\Rightarrow Đường thẳng (d) cắt trục Ox tại điểm $(-2; 0)$, cắt trục Oy tại điểm $(0; 2)$

Vẽ parabol (P) và đường thẳng (d) trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy .



b) Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d) bằng phép tính.

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d) :

$$x^2 = x + 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$a - b + c = 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a} = 2$

+ Với $x_1 = -1 \rightarrow y_1 = -1 + 2 = 1$

+ Với $x_2 = 2 \rightarrow y_2 = 2 + 2 = 4$

Vậy parabol (P) và đường thẳng (d) cắt nhau tại hai điểm $(-1; 1), (2; 4)$.

Bài 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol $(P): y = x^2$, trên (P) lấy hai điểm $A(-1; 1), B(3; 9)$.

a) Tính diện tích tam giác OAB .

b) Xác định điểm C thuộc cung nhỏ AB của (P) sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.

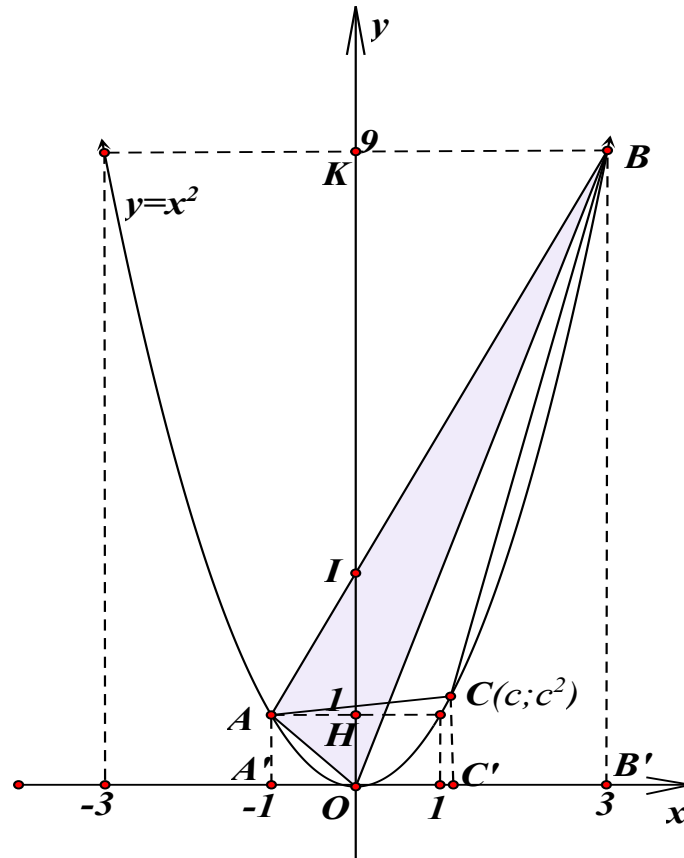
Lời giải

a) Gọi $y = ax + b$ là phương trình đường thẳng AB .

Ta có
$$\begin{cases} a \cdot (-1) + b = 1 \\ a \cdot 3 + b = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

suy ra phương trình đường thẳng AB (d): $y = 2x + 3$.

Đường thẳng AB cắt trục Oy tại điểm $I(0;3)$.



Diện tích tam giác OAB là: $S_{OAB} = S_{OAI} + S_{OBI} = \frac{1}{2} AH \cdot OI + \frac{1}{2} BK \cdot OI$.

Ta có $AH = 1; BK = 3, OI = 3$.

Suy ra $S_{OAB} = 6$ (đvdt).

b) Giả sử $C(c; c^2)$ thuộc cung nhỏ (P) với $-1 < c < 3$.

Diện tích tam giác: $S_{ABC} = S_{ABB'A'} - S_{ACC'A'} - S_{BCC'B'}$.

Các tứ giác $ABB'A', AA'C'C, CBB'C'$ đều là hình thang vuông nên ta có:

$$S_{ABC} = \frac{1+9}{2} \cdot 4 - \frac{1+c^2}{2} \cdot (c+1) - \frac{9+c^2}{2} \cdot (3-c) = 8 - 2(c-1)^2 \leq 8.$$

Vậy diện tích tam giác ABC lớn nhất bằng 8 (đvdt) khi $C(1;1)$.

DẠNG 2

SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ CHỨA THAM SỐ

Bài 1. Cho hàm số $y = (1-m)x^2$. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y = (1-m)x^2$ cắt đường thẳng $y = -x + 3$ tại điểm có tung độ bằng 2?

Lời giải

Vì đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = -x + 3$ tại điểm có tung độ bằng 2 nên giao điểm đó có hoành độ x thỏa mãn: $2 = -x + 3$ hay $x = 1$

Thay $x = 1, y = 2$ vào (1) ta có:

$$2 = (1-m) \cdot 1^2$$

$$1-m = 2$$

$$m = -1$$

Vậy để thỏa mãn điều kiện bài toán thì $m = -1$.

Bài 2. Cho hàm số $y = x - 1$ có đồ thị là (d) .

a) Vẽ đồ thị (d) trên mặt phẳng tọa độ.

b) Tìm a để (d) tiếp xúc với Parabol $(P): y = ax^2$.

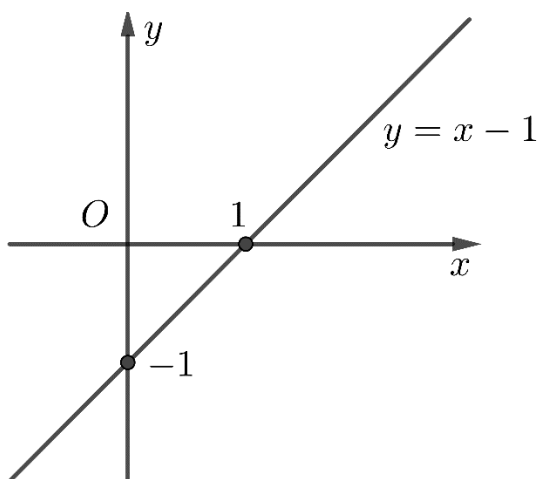
Lời giải

a) Bảng giá trị:

x	0	1
$y = x - 1$	-1	0

\Rightarrow Đường thẳng d đi qua 2 điểm $(0; -1)$ và $(1; 0)$.

Đồ thị:



b) Hoành độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của phương trình:

$$ax^2 = x - 1 \quad (a \neq 0).$$

$$ax^2 - x + 1 = 0 \quad (*)$$

Đề d tiếp xúc (P) thì phương trình (*) có nghiệm duy nhất khi:

$$\Delta = 0$$

$$1 - 4a = 0$$

$$a = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Vậy } a = \frac{1}{4}.$$

Bài 3. Tìm tham số m để đường thẳng (d): $y = 2x + m$ cắt (P): $y = \frac{1}{2}x^2$ tại hai điểm phân biệt.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (P) và (d)

$$\frac{1}{2}x^2 = 2x + m$$

$$x^2 = 4x + 2m$$

$$x^2 - 4x - 2m = 0$$

$$\Delta' = (-2)^2 - 1 \cdot (-2m) = 4 + 2m$$

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi $\Delta' > 0$

$$4 + 2m > 0$$

$$m > -2.$$

Vậy $m > -2$ thì thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài 4. Cho Parabol là đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng d là đồ thị hàm số $y = mx + m - 1$

(với m là tham số).

a. Vẽ Parabol là đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$.

b. Chứng minh Parabol luôn cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của tham số m .

Lời giải

a. Học sinh tự làm nhé

b. Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$$-\frac{1}{2}x^2 = mx + m - 1$$

$$x^2 + 2mx + 2m - 2 = 0 \quad (1)$$

Phương trình (1) có $\Delta' = m^2 - 2m + 2 = (m - 1)^2 + 1 > 0$ với mọi m . Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt. Do đó (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Bài 5. Cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng $d: y = (m - 1)x + m + 4$ (m là tham số). Tìm điều kiện của tham số m để d cắt (P) tại hai điểm nằm về hai phía của trục tung.

Lời giải

(P): $y = x^2$ giao điểm với $d: y = (m - 1)x + m + 4$ tại 2 điểm nằm về hai phía của trục tung

Tọa độ giao điểm là nghiệm của phương trình:

$$x^2 = (m - 1)x + m + 4$$

$$x^2 - (m - 1)x - m - 4 = 0$$

(P) cắt d tại hai điểm nằm về hai phía của trục tung khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu.

$$\Leftrightarrow ac < 0$$

$$-m - 4 < 0.$$

$$m > 4$$

Vậy $m > 4$ thì (P) cắt d tại hai điểm nằm về hai phía của trục tung.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = -x + m + 2$ (m là tham số).

a) Vẽ parabol (P).

b) Khi $m = 0$, tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép toán.

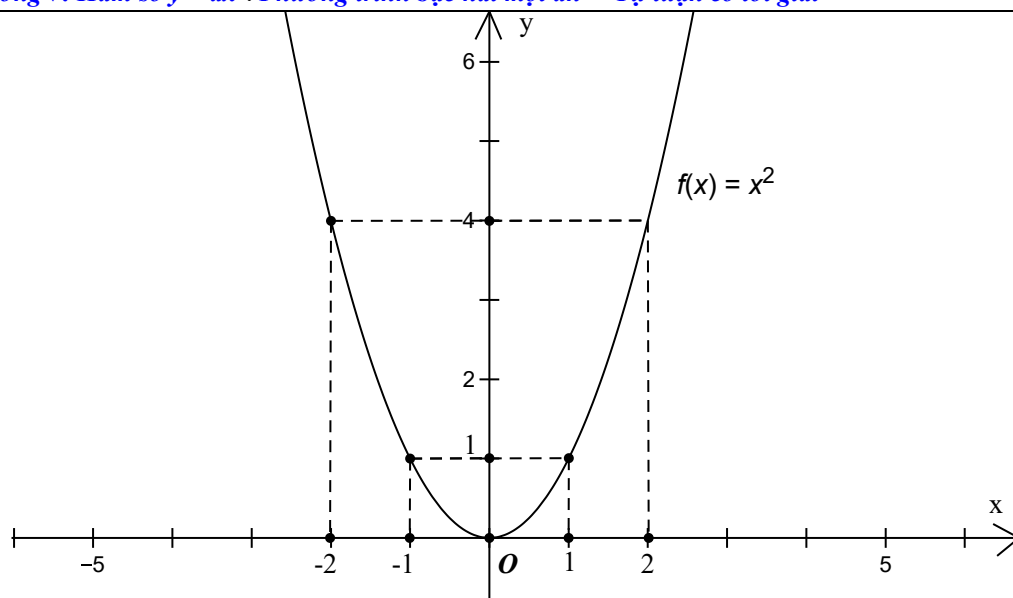
c) Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) và parabol (P) có một điểm chung duy nhất.

Lời giải

a) Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2$ (P), ta có bảng sau:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Vậy đồ thị hàm số $y = x^2$ (P) là Pa-ra-bol đi qua $(-2; 4), (-1; 1), (0; 0), (1; 1), (2; 4)$ và nhận Oy làm trục đối xứng.



b) Khi $m = 0$ phương trình đường thẳng có dạng $(d): y = -x + 2$.

Hoành độ giao điểm của $(P): y = x^2$ và $(d): y = -x + 2$ là nghiệm của phương trình:

$$x^2 = -x + 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

Vì $a + b + c = 1 + 1 + (-2) = 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a} = -2$.

Với $x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 1^2 = 1$.

Với $x_2 = -2 \Rightarrow y_2 = (-2)^2 = 4$.

Vậy ta có hai giao điểm của (P) và (d) là $(1;1)$ và $(-2;4)$.

c) Xét phương trình hoành độ giao điểm của $(P): y = x^2$ và $(d): y = -x + m + 2$:

$$x^2 = -x + m + 2 \Leftrightarrow x^2 + x - m - 2 = 0 \quad (1).$$

Để (d) và (P) có một điểm chung duy nhất thì phương trình (1) có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 1^2 - 4.1.(-m-2) = 0 \Leftrightarrow 1 + 4m + 8 = 0 \Leftrightarrow 4m = -9 \Leftrightarrow m = \frac{-9}{4}.$$

Vậy $m = \frac{-9}{4}$ là giá trị cần tìm.

Bài 7. Cho đường thẳng $(d): y = 2mx + 2m - 3$ và Parabol $(P): y = x^2$

a) Tìm m để đường thẳng (d) đi qua $A(1;5)$.

b) Tìm m để đường thẳng (d) tiếp xúc với Parabol (P)

Lời giải

a) Tìm m để đường thẳng $(d): y = 2mx + 2m - 3$ đi qua $A(1;5)$.

Do (d) đi qua $A(1;5)$. Thay $x = 1; y = 5$ vào phương trình đường thẳng ta được:

$$5 = 2m \cdot 1 + 2m - 3$$

$$4m = 8$$

$$m = 2$$

Vậy với $m = 2$ thì đường thẳng $(d): y = 2mx + 2m - 3$ đi qua $A(1;5)$.

b) Tìm m để đường thẳng (d) tiếp xúc với Parabol (P)

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là

$$x^2 = 2mx + 2m - 3$$

$$x^2 - 2mx - 2m + 3 = 0(*)$$

$$\Delta' = (-m)^2 - (-2m + 3) = m^2 + 2m - 3$$

Để (d) tiếp xúc với Parabol (P) thì phương trình $(*)$ có nghiệm kép hay

$$\Delta' = 0$$

$$m^2 + 2m - 3 = 0$$

$$(m - 1)(m + 3) = 0$$

$$m = 1 \text{ hoặc } m = -3$$

Vậy $m = 1$ hoặc $m = -3$

Bài 8. Cho hàm số $y = 2x^2$ có đồ thị là parabol (P) và hàm số $y = 2x + \sqrt{m}$ có đồ thị là đường thẳng

(d) (với m là tham số và $m \geq 0$)

a) Vẽ đồ thị (P) trên mặt phẳng tọa độ Oxy

b) Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt

Lời giải

a) Vẽ đồ thị (P) trên mặt phẳng tọa độ Oxy

Học sinh tự vẽ (P)

b) Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $2x^2 - 2x - \sqrt{m} = 0(*)$

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt

$$\Delta' = (-1)^2 - 2 \cdot (-\sqrt{m}) > 0$$

$$1 + 2\sqrt{m} > 0 \text{ (luôn đúng với mọi } m \geq 0)$$

Vậy (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi $m \geq 0$

Bài 9. Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$.

a) Vẽ (P) .

b) Tìm m để đường thẳng $(d): y = (m - 1)x + m + 4$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt nằm về hai phía của trục tung.

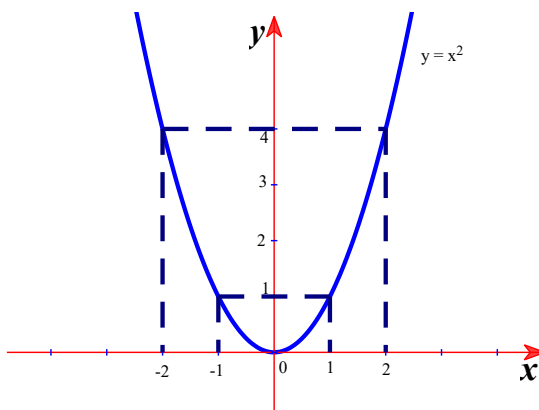
Lời giải

a) **Vẽ (P).**

Ta có bảng giá trị :

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Vậy đồ thị hàm số $(P): y = x^2$ là parabol đi qua các điểm $(-2;4)$, $(-1;1)$, $(0;0)$, $(1;1)$, $(2;4)$.



b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $(d): y = (m - 1)x + m + 4$ và $(P): y = x^2$ ta có:

$$(m - 1)x + m + 4 = x^2$$

$$x^2 - (m - 1)x - m - 4 = 0 \quad (*)$$

Đường thẳng (d) cắt đồ thị hàm số (P) tại hai điểm phân biệt nằm về hai phía của trục tung khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm trái dấu khi

$$ac < 0$$

$$-m - 4 < 0$$

$$m > -4$$

Vậy $m > -4$ thì đường thẳng $(d): y = (m - 1)x + m + 4$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt nằm về hai phía của trục tung.

CHỦ ĐỀ 3**GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI**

Để giải bài toán bằng cách lập phương trình bậc hai, ta có thể làm các bước sau:

- **Bước 1:** Lập phương trình bậc hai:

- + Chọn ẩn và đặt điều kiện thích hợp cho chúng.
- + Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.
- + Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

- **Bước 2:** Giải phương trình bậc hai.

- **Bước 3:** Trả lời: Kiểm tra xem trong các nghiệm của hệ phương trình, nghiệm nào thích hợp với bài toán (thoả mãn điều kiện ở bước 1) và kết luận.

DẠNG 1**TOÁN LIÊN QUAN HÌNH HỌC**

Thuộc công thức tính chu vi; diện tích của tam giác, hình thang, hình chữ nhật, hình vuông, định lý Pi-ta-go.

Bài 1. Sân vận động Quốc gia Mỹ Đình (Quận Nam Từ Liêm – Hà Nội) có mặt sân bóng hình chữ nhật với chiều dài hơn chiều rộng $37m$ và có diện tích là $7140m^2$. Hãy tính chiều dài và chiều rộng của mặt sân bóng đá này

Lời giải

Gọi chiều rộng mặt sân là $x(m)$ ($x > 0$) \Rightarrow chiều dài mặt sân là $x + 37(m)$

Vì diện tích mặt sân là $7140m^2$ nên ta có phương trình :

$$x(x + 37) = 7140$$

$$x^2 + 37x - 7140 = 0$$

Giải phương trình, ta được: $x = 68(tm)$; $x = -105(ktm)$

Vậy chiều rộng mặt sân là 68 , chiều dài là $68 + 37 = 105m$

Bài 2. Một người nông dân trồng hoa trên một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng $15m$. Cuối mỗi vụ thu hoạch, bình quân người đó bán được 20.000 đồng tiền hoa trên mỗi mét vuông đất. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn đó. Biết tổng số tiền bán hoa cuối vụ từ mảnh vườn người đó thu được là 252 triệu đồng.

Lời giải

Gọi chiều rộng mảnh vườn là $x(m)$, điều kiện: $x > 0$.

Khi đó, chiều dài mảnh vườn là $x + 15$ (m)

Diện tích mảnh vườn là: $252000000 : 20000 = 12600$ (m²)

Theo đề bài, ta có phương trình:

$$x(x + 15) = 12600$$

$$x^2 + 15x - 12600 = 0$$

Giải phương trình, ta được: $x_1 = 105$ (nhận); $x_2 = -120$ (loại)

Vậy chiều rộng mảnh vườn là 105 m, chiều dài mảnh vườn là $105 + 15 = 120$ m,

Bài 3. Một mảnh đất hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 13 m. Biết chiều dài mảnh đất lớn hơn chiều rộng là 7 m. Hãy tính diện tích mảnh đất hình chữ nhật đó.

Lời giải

Gọi chiều rộng mảnh đất là x (m) (ĐK: $x > 0$) \Rightarrow Chiều dài mảnh đất là $x + 7$ (m).

Vì độ dài đường chéo của mảnh đất hình chữ nhật là 13 m nên ta có phương trình:

$$x^2 + (x + 7)^2 = 13^2$$

$$x^2 + x^2 + 14x + 49 = 169$$

$$2x^2 + 14x - 120 = 0$$

$$x^2 + 7x - 60 = 0$$

Ta có $\Delta = 7^2 - 4 \cdot (-60) = 289 = 17^2 > 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$x = \frac{-7 + 17}{2} = 5 \text{ (tm)}; x = \frac{-7 - 17}{2} = -12 \text{ (ktm)}$$

\Rightarrow Chiều rộng của mảnh đất là 5 m, chiều dài của mảnh đất là $5 + 7 = 12$ m.

Vậy diện tích mảnh đất hình chữ nhật là $S = 5 \cdot 12 = 60$ (m²).

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài lớn hơn chiều rộng là 6 m. Tính chiều rộng và chiều dài khu vườn, biết diện tích khu vườn là 280 m².

Lời giải

Tính chiều rộng và chiều dài khu vườn:

Gọi kích thước chiều rộng khu vườn hình chữ nhật là x (m), $x > 0$

Chiều dài khu vườn có kích thước $x + 6$ (m)

Khu vườn có diện tích là 280 m² nên ta có phương trình

$$x(x + 6) = 280$$

$$x^2 + 6x - 280 = 0$$

$x = 14$ (Nhận) và $x = -20$ (loại)

Vậy khu vườn có chiều rộng là $14m$ và chiều dài là $20m$.

Bài 5. Bác Bình trồng cam trên một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng $4m$, chu vi của mảnh vườn là $40m$. Biết rằng cứ $3m^2$ bác Bình trồng được 1 cây cam, hỏi bác Bình trồng được bao nhiêu cây cam trên mảnh vườn đó

Lời giải

Nửa chu vi của mảnh vườn là : $40 : 2 = 20(m)$

Gọi chiều dài của mảnh vườn là $x(m)$ ($4 < x < 20$) \Rightarrow chiều rộng : $x - 4(m)$

Vì nửa chu vi của mảnh vườn là $40m$ nên ta có phương trình :

$$x + x - 4 = 20 \Leftrightarrow x = 12(tm)$$

Vậy chiều dài mảnh vườn là $12m$, chiều rộng là $8m$

Số cây cam bác Bình trồng là $12.8 : 3 = 32$ (cây cam)

Bài 6. Một tam giác vuông có độ dài hai cạnh góc vuông hơn kém nhau $7cm$, độ dài cạnh huyền bằng $17cm$. Tính độ dài hai cạnh góc vuông

Lời giải

Gọi độ dài cạnh thứ nhất của tam giác vuông là $x(cm)$ ($x > 0$)

Khi đó độ dài cạnh thứ hai của tam giác vuông $x + 7(cm)$

Áp dụng định lý Pytago ta có phương trình :

$$x^2 + (x + 7)^2 = 17^2$$

$$x^2 + 7x - 120 = 0$$

$$\begin{cases} x = 8(tm) \\ x = -15(ktm) \end{cases}$$

Vậy độ dài cạnh thứ nhất của tam giác vuông là $8cm$, độ dài cạnh thứ hai là $15cm$

Bài 7. Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng. Người ta làm một lối đi xung quanh vườn (thuộc đất trong vườn) rộng $1,5m$. Tính kích thước của vườn, biết rằng đất còn lại trong vườn để trồng trọt là $4329m^2$.

Lời giải

Gọi chiều rộng hình chữ nhật là x (m, đk: $x > 0$).

Khi đó chiều dài hình chữ nhật là $3x$ (m).

Kích thước phần đất còn lại sau khi làm lối đi là $x - 3(m); 3x - 3(m)$.

Theo bài diện tích đất còn lại là $4329m^2$ nên ta có phương trình

$$(x - 3)(3x - 3) = 4329$$

$$3x^2 - 3x - 9x + 9 = 4329$$

$$3x^2 - 12x - 4320 = 0$$

$$x^2 - 4x - 1440 = 0$$

$$\Delta' = 4 + 1440 = 1444 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 38$$

$$\text{Pt có hai nghiệm phân biệt } x_1 = \frac{2+38}{1} = 40 \text{ (t.m); } x_2 = \frac{2-38}{1} = -36 \text{ (L)}$$

Vậy chiều rộng mảnh vườn là 40 m; chiều dài mảnh vườn là $3 \cdot 40 = 120$ m.

Bài 8. Nhà bạn Hoàng có một mảnh vườn hình chữ nhật, rộng 6m. Diện tích của mảnh vườn bằng 216 m^2 . Tính chiều rộng và chiều dài của mảnh vườn nhà bạn Hoàng.

Lời giải

Gọi chiều rộng của mảnh vườn nhà bạn Hoàng là: $x(m)$ (ĐK: $x > 0$).

Vì chiều dài lớn hơn chiều rộng $6m$ nên chiều dài mảnh vườn là: $x + 6(m)$.

Do diện tích của mảnh vườn là 216 m^2 nên ta có phương trình:

$$x(x+6) = 216$$

$$x^2 + 6x - 216 = 0$$

Ta có: $\Delta' = 3^2 + 216 = 225 = 15^2 > 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1 = -3 + 15 = 12 \text{ (tm)} \text{ Hoặc } x_2 = -3 - 15 = -18 \text{ (ktm)}$$

\Rightarrow Chiều rộng của mảnh vườn là $12m$ và chiều dài của mảnh vườn là: $12 + 6 = 18(m)$

Vậy chiều rộng và chiều dài của mảnh vườn nhà bạn Hoàng lần lượt là 12 mét và 18 mét.

Bài 9. Một hình chữ nhật có chu vi bằng 68cm. Nếu tăng chiều rộng 6cm và giảm chiều dài 10cm thì được một hình vuông có cùng diện tích với hình chữ nhật ban đầu. Tìm kích thước của hình chữ nhật ban đầu.

Lời giải

+ Nửa chu vi hcn ban đầu là $68 : 2 = 34$ (cm).

+ Gọi chiều dài hcn ban đầu là x (cm); $(10(x+34))$. Suy ra chiều rộng hcn ban đầu là $(34 - x)$ (cm).

+ Chiều dài hcn sau khi giảm 10(cm) là $(x - 10)$ (cm). Chiều rộng hcn sau khi tăng 6(cm) là $(40 - x)$ (cm).

+ Theo đề, sau khi giảm chiều dài 10(cm) và tăng chiều rộng 6(cm) ta được hình vuông nên ta có phương trình:

$$x - 10 = 40 - x$$

$$x = 25 \text{ (nhận)}$$

+ Vậy chiều dài hcn ban đầu là 25(cm).

Chiều rộng hcn ban đầu là $34 - 25 = 9$ (cm).

DẠNG 2
TOÁN LIÊN QUAN CHUYỂN ĐỘNG
Kiến thức cần nhớ:

- ◆ Quãng đường = Vận tốc . Thời gian.
- ◆ Vận tốc tỷ lệ nghịch với thời gian và tỷ lệ thuận với quãng đường đi được:
- ◆ Nếu hai xe đi ngược chiều nhau khi gặp nhau lần đầu: Thời gian hai xe đi được là như nhau, Tổng quãng đường 2 xe đi được bằng đúng quãng đường cần đi của 2 xe.
- ◆ Nếu hai phương tiện chuyển động cùng chiều từ hai địa điểm khác nhau là A và B, xe từ A chuyển động nhanh hơn xe từ B thì khi xe từ A đuổi kịp xe từ B ta luôn có hiệu quãng đường đi được của xe từ A với quãng đường đi được của xe từ B bằng quãng đường AB
- ◆ Đối với (Ca nô, tàu xuồng) chuyển động trên dòng nước: Ta cần chú ý:
 - + Khi đi xuôi dòng: Vận tốc ca nô= Vận tốc riêng + Vận tốc dòng nước.
 - + Khi đi ngược dòng: Vận tốc ca nô= Vận tốc riêng - Vận tốc dòng nước.
 - + Vận tốc của dòng nước là vận tốc của một vật trôi tự nhiên theo dòng nước (Vận tốc riêng của vật đó bằng 0)

Bài 1. Quãng đường AB dài 100km . Một ô tô dự định đi từ A đến B với vận tốc và thời gian dự định. Trên thực tế xe đi với vận tốc chậm hơn dự định 10km/h nên xe đến B chậm hơn dự định 30 phút. Tính vận tốc và thời gian ô tô dự định đi trên quãng đường AB

Lời giải

Đổi 30 phút = 0,5 giờ

Gọi vận tốc ô tô dự định đi trên quãng đường AB là $x(\text{km/h})(x > 10)$

Thời gian dự định đi trên quãng đường AB là $\frac{100}{x}(h)$

Vận tốc thực tế ô tô đi là $x - 10(\text{km/h})$

Nên thời gian thực tế đi hết quãng đường AB là $\frac{100}{x-10}(h)$

Vì xe đến B chậm hơn dự định 30 phút = $\frac{1}{2}(h)$ nên ta có phương trình :

$$\frac{100}{x-10} - \frac{100}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{100x - 100(x-10)}{x(x-10)} = \frac{1}{2}$$

$$x^2 - 10x - 2000 = 0$$

Ta có $\Delta' = 5^2 + 2000 = 2025 > 0, \sqrt{\Delta} = 45$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = 5 + 45 = 50(\text{tm}); x_2 = 5 - 45 = -40(\text{ktm})$$

Vậy vận tốc dự định là 50km/h và thời gian dự định là $\frac{100}{50} = 2$ giờ

Bài 2. Một ô tô và một xe máy khởi hành cùng một lúc từ thành phố Cao Bằng đến huyện Bảo Lạc, quãng đường dài 135 km. Biết rằng vận tốc của ô tô lớn hơn vận tốc của xe máy 9 km/h và ô tô đến huyện Bảo Lạc trước xe máy 45 phút. Tính vận tốc của mỗi xe.

Lời giải

Gọi vận tốc của xe máy là x (km/h) (điều kiện: $x > 0$).

Khi đó vận tốc của ô tô là: $x + 9$ (km/h).

Thời gian Xe máy đi từ Cao Bằng đến Bảo Lạc là: $\frac{135}{x}$ (giờ).

Thời gian Ô tô đi từ Cao Bằng đến Bảo Lạc là: $\frac{135}{x+9}$ (giờ).

Vì Ô tô đến Bảo Lạc trước xe máy 45 phút = $\frac{3}{4}$ giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{135}{x} - \frac{135}{x+9} = \frac{3}{4}$$

$$135.4(x+9) - 135.4x = 3x(x+9)$$

$$540(x+9) - 540x = 3x^2 + 27x$$

$$3x^2 + 27x - 4860 = 0$$

$$x^2 + 9x - 1620 = 0$$

$$(x-36)(x+45) = 0$$

phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 36$ (tm); $x = -45$ (ktm).

Vậy vận tốc của xe máy là 36(km/h); vận tốc của ô tô là 45(km/h).

Bài 3. Một người dự định đi xe máy từ A đến B với vận tốc không đổi. Nhưng sau khi đi được 2 giờ thì xe bị hỏng phải dừng lại 20 phút để sửa chữa. Do đó, để kịp đến B đúng thời gian dự định, người đó phải tăng vận tốc thêm 8km/h . Tính vận tốc ban đầu của xe máy. Biết rằng quãng đường AB dài 160km

$$20' = \frac{1}{3}h$$

Lời giải

Gọi vận tốc ban đầu của xe máy là x (km/h) ($x > 0$)

Vận tốc lúc sau là $x + 8$ (km/h)

Thời gian xe máy dự định đi hết quãng đường AB là $\frac{160}{x}$ (giờ)

Quãng đường xe đi được sau 2 giờ là $2x(km)$

Thời gian xe đi với vận tốc $x + 8(km/h)$ là $\frac{160 - 2x}{x + 8}$

Do xe máy đến B đúng thời gian quy định nên ta có phương trình :

$$\frac{160}{x} = 2 + \frac{1}{3} + \frac{160 - 2x}{x + 8}$$

$$\frac{160x + 1280 - 160x + 2x^2}{x^2 + 8x} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{1280 + 2x^2}{x^2 + 8x} = \frac{7}{3}$$

$$6x^2 + 3840 = 7x^2 + 56x$$

$$x^2 + 56x - 3840 = 0$$

phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 40(tm); x = -96(ktm)$

Vậy vận tốc ban đầu của xe máy là $40(km/h)$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Một xe khách và một xe tải xuất phát cùng một lúc từ thành phố A đến thành phố B trên quãng đường dài $180 km$. Vận tốc xe khách lớn hơn vận tốc xe tải là $10 km/h$ nên xe khách đã đến B sớm hơn xe tải 36 phút. Tính vận tốc mỗi xe.

Lời giải

Đổi: 36 phút = $\frac{3}{5}$ giờ.

Gọi vận tốc của xe khách là: $x (km/h)$, (điều kiện: $0 < x < 10$).

Vận tốc của xe tải là: $x - 10 (km/h)$.

Thời gian xe khách đi là: $\frac{180}{x} (h)$.

Thời gian xe tải đi là: $\frac{180}{x - 10} (h)$.

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{180}{x - 10} - \frac{180}{x} = \frac{3}{5}$.

$$5.180x - 5.180(x - 10) = 3x(x - 10)$$

$$900x - 900x + 9000 = 3x^2 - 30x.$$

$$3x^2 - 30x - 9000 = 0$$

$$x^2 - 10x - 3000 = 0$$

$$\begin{cases} x = -50 \\ x = 60 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta được $x = 60$.

Vậy vận tốc xe khách là 60 km/h và vận tốc xe tải là 50 km/h .

Bài 5. Một người đi xe máy từ địa điểm A đến địa điểm B trên quãng đường 100 km . Khi từ B về A người đó đã giảm vận tốc 10 km/h so với lúc đi nên thời gian về nhiều hơn thời gian lúc đi là 30 phút. Tính vận tốc của người lúc đi.

Lời giải

$$\text{Đổi } 30 \text{ phút} = \frac{1}{2} \text{ giờ}$$

Gọi $x \text{ (km/h)}$ là vận tốc của người đó lúc đi (ĐK: $x > 10$)

Vận tốc của người đó lúc về là $x - 10 \text{ (km/h)}$

Thời gian đi từ A đến B là: $\frac{100}{x} \text{ (h)}$

Thời gian từ B về đến A là: $\frac{100}{x - 10} \text{ (h)}$

Theo đề bài ta có phương trình $\frac{100}{x - 10} - \frac{100}{x} = \frac{1}{2}$

Biến đổi đưa về phương trình $x^2 - 10x - 2000 = 0$

Giải phương trình ta được $x_1 = 50 \text{ (nhân)}$; $x_2 = -40 \text{ (loại)}$

Vậy vận tốc của người đó lúc đi là: 50 km/h

Bài 6. Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 15 km . Khi từ B trở về A người đó tăng vận tốc thêm 3 km/h . Vì vậy, thời gian về ít hơn thời gian đi là 15 phút. Tính vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ A đến B .

Lời giải

$$15 \text{ phút} = \frac{1}{4} \text{ giờ}$$

Gọi vận tốc lúc đi từ A đến B là $x \text{ (km/h)}$ ($x > 0$)

Vận tốc lúc về từ B về A là: $x + 3 \text{ (km/h)}$

Thời gian đi là: $\frac{15}{x} \text{ (h)}$, thời gian lúc về: $\frac{15}{x + 3} \text{ (h)}$

Vì thời gian về ít hơn đi là $\frac{1}{4}$ giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{15}{x} - \frac{15}{x+3} = \frac{1}{4}$$

$$4[15(x+3) - 15x] = 1 \cdot [x(x+3)]$$

$$180 = x^2 + 3x$$

$$x^2 + 3x - 180 = 0$$

Giải phương trình ta được $x = 12(tm); x = -15(ktm)$

Vận tốc của người đi xe đạp từ A đến B là $12km/h$

Bài 7. Một ô tô và một xe máy cùng khởi hành từ địa điểm A và đi đến địa điểm B. Do vận tốc của ô tô lớn hơn vận tốc của xe máy là $20km/h$ nên ô tô đến B sớm hơn xe máy 30 phút. Biết quãng đường AB dài $60km$, tính vận tốc của mỗi xe (Giả định rằng vận tốc mỗi xe là không đổi trên toàn bộ quãng đường AB)

Lời giải

$$30' = \frac{1}{2}h$$

Gọi vận tốc của ô tô là $x(km/h)$ ($x > 20$) \Rightarrow vận tốc của xe máy là $x - 20(km/h)$

Thời gian ô tô đi hết quãng đường AB : $\frac{60}{x}(h)$, thời gian xe máy đi hết AB: $\frac{60}{x-20}(h)$

Do ô tô đến sớm hơn 30 phút nên ta có phương trình :

$$\frac{60}{x-20} - \frac{60}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Giải được } \begin{cases} x = 60(tm) \\ x = -40(ktm) \end{cases}$$

Vận tốc của ô tô và xe máy lần lượt là $60km/h$; $40km/h$

Bài 8. Năm 2021, Thủ tướng chính phủ đã phê duyệt dự án xây dựng công trình đường cao tốc Châu Đốc – Cần Thơ- Sóc Trăng, dự án này có ý nghĩa đặc biệt quan trọng, sẽ góp phần phát triển kinh tế xã hội của tỉnh Sóc Trăng nói riêng và khu vực đồng bằng Sông Cửu Long nói chung. Theo ước tính chiều dài toàn tuyến cao tốc từ Châu Đốc đến Sóc Trăng là $188km$. Biết rằng vận tốc ô tô đi trên đường cao tốc lớn hơn vận tốc ô tô đi trên đường quốc lộ là $34km/h$. Vì vậy nếu ô tô di chuyển trên quãng đường $188km$ thì việc di chuyển trên đường cao tốc sẽ rút ngắn được 68 phút so với việc di chuyển trên đường quốc lộ. tính vận tốc của ô tô khi di chuyển trên đường cao tốc

Lời giải

$$\text{Đổi } 68 \text{ phút} = \frac{17}{15} \text{ giờ}$$

Gọi vận tốc ô tô di chuyển trên đường cao tốc là $x(km/h)$ ($x > 34$)

Vận tốc ô tô di chuyển trên đường quốc lộ là $x - 34(km/h)$

Thời gian ô tô đi quãng đường $188km$ trên đường cao tốc là $\frac{188}{x}(h)$

Thời gian ô tô đi trên quãng đường 188km trên đường quốc lộ là $\frac{188}{x-34}$ (h)

Vì nếu ô tô di chuyển trên quãng đường 188km thì việc di chuyển trên đường cao tốc sẽ rút ngắn được 68 phút so với việc di chuyển trên đường quốc lộ nên ta có phương trình :

$$\frac{188}{x-34} - \frac{188}{x} = \frac{17}{15}$$

Giải được $\begin{cases} x = 94(tm) \\ x = -60(ktm) \end{cases}$

Vậy vận tốc ô tô di chuyển trên đường cao tốc là $94km/h$

Bài 9. Quãng đường AB dài 150 km. Một xe tải khởi hành đi từ A đến B , cùng lúc đó một ô tô cũng đi trên quãng đường đó từ A đến B với vận tốc lớn hơn vận tốc xe tải 5 km/h, nên ô tô đến B sớm hơn xe tải 20 phút. Tính vận tốc xe tải.

Lời giải

Gọi x (km/h) là vận tốc của xe tải đi từ A đến B ($x > 0$).

Vận tốc của ô tô đi từ A đến B là $x+5$ (km/h).

Thời gian xe tải đi từ A đến B là $\frac{150}{x}$ (giờ)

Thời gian ô tô đi từ A đến B là $\frac{150}{x+5}$ (giờ)

Vì ô tô đến B sớm hơn xe tải 20 phút nên ta có phương trình:

$$\frac{150}{x} - \frac{150}{x+5} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$$

$$x^2 + 5x - 2250 = 0$$

$$x = 45 (nh); x = -50 (l)$$

Vậy vận tốc của xe tải đi từ A đến B là 45 km/h.

Bài 10. Hằng ngày bạn Mai đi học bằng xe đạp, quãng đường từ nhà đến trường dài 3km. Hôm nay, xe đạp hư nên Mai nhờ mẹ chở đi đến trường bằng xe máy với vận tốc lớn hơn vận tốc khi đi xe đạp là 24 km/h, cùng thời điểm khởi hành như mọi ngày nhưng Mai đã đến trường sớm hơn 10 phút. tính vận tốc của bạn Mai khi đi học bằng xe đạp.

Lời giải

Gọi vận tốc của bạn Mai khi đi xe đạp từ nhà tới trường là x (km/h) ($x > 0$).

Thời gian Mai đi xe đạp từ nhà đến trường là $\frac{3}{x}$ (h).

Vận tốc xe máy mẹ Mai chở Mai từ nhà đến trường là $x+24$ (km/h)

Thời gian mẹ chở Mai đi học bằng xe máy từ nhà đến trường là $\frac{3}{x+24}$ (h)

Vì hôm nay mai đến sớm hơn 10 phút hay $\frac{1}{6}$ (h) so với mọi ngày, ta có phương trình $\frac{3}{x} - \frac{3}{x+24} = \frac{1}{6}$

$$18(x+24) - 18x = x(x+24)$$

$$18x + 432 - 18x = x^2 + 24x$$

$$x^2 + 24x - 432 = 0$$

$$\text{Có } \Delta' = 12^2 - 1 \cdot (-432) = 576 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{576} = 24$$

$$x_1 = \frac{-12+24}{1} = 12 \text{ (nhận); } x_2 = \frac{-12-24}{1} = -36 \text{ (loại).}$$

Vận tốc của bạn Mai khi đi xe đạp từ nhà đến trường là 12 km/h

Bài 11. Hai ô tô khởi hành cùng một lúc từ địa điểm A đến địa điểm B cách nhau 120 km. Vận tốc ô tô thứ hai lớn hơn vận tốc ô tô thứ nhất là 10 km/h nên ô tô thứ hai đến B trước ô tô thứ nhất 24 phút. Tính vận tốc của mỗi ô tô.

Lời giải

Gọi vận tốc của ô tô thứ nhất là x (km/h) (ĐK: $x > 0$).

Suy ra vận tốc của ô tô thứ hai là $x + 10$ (km/h)

Thời gian ô tô thứ nhất đi hết quãng đường AB là: $\frac{120}{x}$ (h)

Thời gian ô tô thứ hai đi hết quãng đường AB là $\frac{120}{x+10}$ (h)

Vì ô tô thứ hai đến B trước ô tô thứ nhất 24 phút = $\frac{2}{5}$ giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{120}{x} - \frac{120}{x+10} = \frac{2}{5}$$

$$600(x+10) - 600x = 2x(x+10)$$

$$600x + 6000 - 600x = 2x^2 + 20x$$

$$2x^2 + 20x - 6000 = 0$$

$$x^2 + 10x - 3000 = 0$$

Ta có: $\Delta' = (-5)^2 + 3000 = 3025 = 55^2 > 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$x_1 = -5 + 55 = 50 \text{ (tm); } x_2 = -5 - 55 = -60 \text{ (ktm)}$$

Vậy vận tốc của ô tô thứ nhất là 50 km/h và vận tốc của ô tô thứ hai là 60 km/h.

Bài 12. Lúc 9 giờ sáng, một xe ô tô khởi hành từ A đến B với vận tốc không đổi trên cả quãng đường là 55 km/h. Sau khi xe ô tô này đi được 20 phút thì cũng trên quãng đường đó, một xe ô tô khác bắt đầu đi từ B về A với vận tốc không đổi trên cả quãng đường là 45 km/h. Hỏi hai xe ô tô gặp nhau lúc mấy giờ? Biết quãng đường AB dài 135 km.

Lời giải

$$\text{Đổi } 20 \text{ phút} = \frac{1}{3}(h).$$

$$\text{Quãng đường ô tô đi từ } A \text{ đến } B \text{ trong } 20 \text{ phút là: } 55 \cdot \frac{1}{3} = \frac{55}{3}(km).$$

Gọi thời gian ô tô đi từ B đến A đi đến khi gặp ô tô đi từ A đến B là $x(h), (x > 0)$.

$$\Rightarrow \text{Thời gian ô tô đi từ } A \text{ đến } B \text{ đi đến khi gặp ô tô đi từ } B \text{ đến } A \text{ là: } x + \frac{1}{3}(h).$$

$$\Rightarrow \text{Quãng đường ô tô đi từ } A \text{ đến } B \text{ đi được đến khi } 2 \text{ xe gặp nhau là: } 55 \left(x + \frac{1}{3} \right) = 55x + \frac{55}{3}(km).$$

$$\text{Quãng đường ô tô đi từ } B \text{ đến } A \text{ đi được đến khi } 2 \text{ xe gặp nhau là: } 45x(km).$$

Quãng đường AB dài $135km$

Quãng đường ô tô đi từ A đi trước ô tô đi từ B là:

$$55 \cdot \frac{1}{3} = \frac{55}{3}(km)$$

Đến lúc $9h20$ phút hai xe còn cách nhau là:

$$135 - \frac{55}{3} = \frac{350}{3}(km)$$

Thời gian hai xe gặp nhau là:

$$\frac{350}{3} : (55 + 45) = \frac{7}{6}(h)$$

$$\text{Đổi } \frac{7}{6} \text{ giờ} = 1 \text{ giờ } 10 \text{ phút}$$

Thời điểm hai xe gặp nhau là:

$$9 \text{ giờ } 20 \text{ phút} + 1 \text{ giờ } 10 \text{ phút} = 10 \text{ giờ } 30 \text{ phút}$$

Vậy hai xe gặp nhau lúc 10 giờ 30 phút.

Bài 13. Một ô tô khách và một ô tô tải chở vật liệu xây dựng khởi hành cùng một lúc từ bến xe khách Lai Châu đến trung tâm thị trấn Mường Tè. Do trọng tải lớn nên xe tải chở vật liệu xây dựng đi với vận tốc chậm hơn xe khách 10 km/h . Xe khách đến trung tâm thị trấn Mường Tè sớm hơn xe tải $1 \text{ giờ } 6 \text{ phút}$. Tính vận tốc mỗi xe biết quãng đường từ bến xe khách thành phố Lai Châu đến trung tâm thị trấn Mường Tè là 132 km .

Lời giải

Gọi vận tốc của xe tải là $x \text{ (km/h)}$ ($x > 0$)

\Rightarrow vận tốc của xe khách là $x + 10 \text{ (km/h)}$

Thời gian đi hết quãng đường của xe tải là $\frac{132}{x}(h)$ và xe khách là $\frac{132}{x+10}(h)$

Vì xe khách đi nhanh hơn xe tải là 1 giờ 6 phút = $\frac{11}{10}$ (h)

Nên ta có phương trình:

$$\frac{132}{x} - \frac{132}{x+10} = \frac{11}{10}$$

$$132 \cdot 10(x+10) - 132 \cdot 10x = 11x(x+10)$$

$$x^2 + 10x - 1200 = 0$$

Giải phương trình ta được $x_1 = -40$ (loại); $x_2 = 30$ (thỏa mãn)

Vậy vận tốc của xe tải là 30 km/h và xe khách là 40 km/h.

Bài 14. Một xe máy khởi hành tại địa điểm A đi đến địa điểm B cách A 160 km, sau đó 1 giờ, một ô tô đi từ B đến A . Hai xe gặp nhau tại địa điểm C cách B 72 km. Biết vận tốc của ô tô lớn hơn vận tốc của xe máy 20 km/giờ. Tính vận tốc của mỗi xe.

Lời giải

Gọi x (km/h) là vận tốc của xe máy. Điều kiện: $x > 0$

Quãng đường xe máy đi đến lúc gặp nhau là: 88 (km)

Thời gian xe máy đi đến lúc gặp nhau là: $\frac{88}{x}$ (h)

Vận tốc của ô tô đi là: $x + 20$ (km/h)

Quãng đường ô tô đi đến lúc gặp nhau là: 72 (km)

Thời gian ô tô đi đến lúc gặp nhau là: $\frac{72}{x+20}$ (h)

Theo đề ta có phương trình:

$$\frac{88}{x} - \frac{72}{x+20} = 1$$

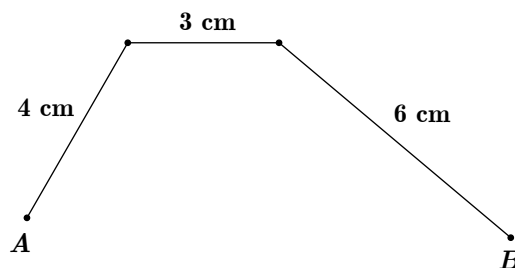
$$88x + 1760 - 72x = x^2 + 20x$$

$$x^2 + 4x - 1760 = 0$$

Giải phương trình ta được: $x_1 = 40$ (nhận), $x_2 = -44$ (loại)

Vậy, vận tốc xe máy là 40 km/h, vận tốc xe ô tô là 60 km/h

Bài 15. Quãng đường AB gồm một đoạn lên dốc dài 4 km, một đoạn bằng phẳng dài 3 km và một đoạn xuống dốc 4 km dài 6 km (như hình vẽ). Một người đi xe đạp từ A đến B và quay về A ngay hết tổng cộng 130 phút. Biết rằng vận tốc người đó đi trên đoạn đường bằng phẳng là 12 km/h và vận tốc xuống dốc lớn hơn vận tốc lên dốc 5 km/h (vận tốc lên dốc, xuống dốc lúc đi và về như nhau). Tính vận tốc lúc lên dốc và lúc xuống dốc của người đó.



Lời giải

Đổi 130 phút = $\frac{13}{6}(h)$

Gọi vận tốc lúc lên dốc của người đó là $x(km/h)(x > 0)$. Thì vận tốc lúc xuống dốc là $x + 5(km/h)$.

Thời gian lúc lên dốc, xuống dốc trên quãng đường 4 km lần lượt là: $\frac{4}{x}(h)$ và $\frac{4}{x+5}(h)$.

Thời gian lúc đi trên quãng đường 3 km là $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}(h)$

Thời gian lúc lên và xuống dốc trên quãng đường 6 km lần lượt là: $\frac{6}{x}(h)$ và $\frac{6}{x+5}(h)$.

Tổng thời gian đi từ A đến B là: $\frac{4}{x} + \frac{1}{4} + \frac{6}{x+5}(h)$

Tổng thời gian đi từ B đến A là: $\frac{6}{x} + \frac{1}{4} + \frac{4}{x+5}(h)$

Tổng thời gian cả đi cả về là bằng $\frac{13}{6}h$ nên ta có phương trình:

$$\frac{4}{x} + \frac{1}{4} + \frac{6}{x+5} + \frac{6}{x} + \frac{1}{4} + \frac{4}{x+5} = \frac{13}{6}$$

$$\frac{10}{x} + \frac{1}{2} + \frac{10}{x+5} = \frac{13}{6}$$

$$\frac{10(x+x+5)}{x(x+5)} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{2x+5}{x(x+5)} = \frac{1}{6}$$

$$6(2x+5) = x(x+5)$$

$$x^2 - 7x - 30 = 0$$

Ta có $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot (-30) = 169 = 13^2 > 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$x = \frac{7+13}{2} = 10(tm); x = \frac{7-13}{2} = -3(ktm).$$

Vậy vận tốc lúc lên dốc là 10 km/h và vận tốc lúc xuống dốc là 15 km/h .

Bài 16. Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 24 km . Khi đi từ B trở về A người đó tăng vận tốc thêm 4 km/h so với lúc đi, nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 30 phút. Tính vận tốc của xe đạp khi đi từ A đến B.

Lời giải

Đổi 30 phút $= \frac{1}{2}$ giờ.

Gọi vận tốc của xe đạp khi đi từ A đến B là x (km/h , $x > 0$). Thời gian xe đi từ A đến B là $\frac{24}{x}$ (giờ).

Đi từ B về A, người đó đi với vận tốc $x + 4$ (km/h). Thời gian xe đi từ B về A là $\frac{24}{x+4}$ (giờ)

Do thời gian về ít hơn thời gian đi là 30 phút nên ta có phương trình:

$$\frac{24}{x} - \frac{24}{x+4} = \frac{1}{2}.$$

Giải phương trình:

$$\begin{aligned} x^2 + 4x - 192 &= 0 \\ \frac{24}{x} - \frac{24}{x+4} &= \frac{1}{2} \begin{cases} x = 12 \\ x = -16 \end{cases} \end{aligned}$$

Đối chiếu với điều kiện ta có vận tốc của xe đạp đi từ A đến B là 12 km/h .

DẠNG 3
TOÁN LIÊN QUAN THỰC TẾ

Bài 1. Một phân xưởng theo kế hoạch phải may 900 bộ quần áo trong một thời gian quy định, mỗi ngày phân xưởng may được số bộ quần áo là như nhau. Khi thực hiện, do cải tiến kỹ thuật nên mỗi ngày phân xưởng may thêm được 10 bộ quần áo và hoàn thành kế hoạch trước 3 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày phân xưởng may được bao nhiêu bộ quần áo?

Lời giải

Gọi số bộ quần áo mà phân xưởng phải may trong mỗi ngày theo kế hoạch là x (bộ quần áo)

Điều kiện $x \in \mathbb{N}; x < 900$

Khi đó thời gian phân xưởng may xong 900 bộ quần áo theo kế hoạch là $\frac{900}{x}$ (ngày)

Thực tế mỗi ngày may được $x + 10$ (bộ quần áo) nên thời gian phân xưởng may xong 900 bộ quần áo là $\frac{900}{x + 10}$ (ngày)

Do hoàn thành kế hoạch sớm hơn 3 (ngày) nên ta có phương trình:

$$\frac{900}{x} - \frac{900}{x + 10} = 3$$

$$900(x + 10) - 900x = 3x(x + 10)$$

$$x^2 + 10x - 3000 = 0$$

$$\text{Ta có } \Delta' = 5^2 - 1 \cdot (-3000) = 3025$$

Do $\Delta' > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-5 + 55}{1} = 50 \text{ (thoả mãn điều kiện)}$$

$$x_2 = \frac{-5 - 55}{1} = -60 \text{ (không thoả mãn điều kiện)}$$

Vậy theo kế hoạch mỗi ngày phân xưởng phải may 50 bộ quần áo

Bài 2. Hai đội công nhân cùng làm một công việc thì hoàn thành tròn 12 ngày. Nếu họ làm riêng thì đội II hoàn thành công việc hết nhiều thời gian hơn đội I là 10 ngày. Hỏi nếu làm riêng, mỗi đội phải làm trong bao nhiêu ngày để xong công việc.

Lời giải

Gọi thời gian đội thứ nhất hoàn thành công việc là x (ngày) ($x > 0$)

Suy ra thời gian đội thứ hai hoàn thành công việc là $x + 10$ (ngày)

Trong 1 ngày đội I làm được $\frac{1}{x}$ (công việc), đội II làm được $\frac{1}{x + 10}$ (công việc).

Vì hai người hoàn thành công việc trong 12 ngày nên ta có phương trình:

$$\frac{12}{x} + \frac{12}{x+10} = 1$$

$$12(x+10) + 12x = x(x+10)$$

$$12x + 120 + 12x = x^2 + 10x$$

$$x^2 - 14x - 120 = 0$$

phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 20$ (thỏa mãn); $x_2 = -6$ (loại)

Vậy thời gian đội thứ nhất hoàn thành công việc là 20 (ngày)

Thời gian đội thứ hai hoàn thành công việc là 30 (ngày).

Bài 3. Trong kỳ SEA Games 31 tổ chức tại Việt Nam, thú Sao La được chọn làm linh vật. Một phân xưởng được giao sản xuất 420 thú nhồi bông Sao La trong một thời gian dự định để làm quà tặng. Biết rằng nếu mỗi giờ phân xưởng sản xuất thêm 5 thú nhồi bông Sao La thì sẽ rút ngắn được thời gian hoàn thành công việc là 2 giờ. Tính thời gian dự định của phân xưởng.

Lời giải

Gọi thời gian dự định hoàn thành công việc của phân xưởng là x (giờ), $x > 0$.

Thời gian thực tế để hoàn thành công việc là $x - 2$ (giờ)

Theo kế hoạch mỗi ngày phân xưởng sản xuất được $\frac{420}{x}$ (thú nhồi bông)

Thực tế mỗi ngày phân xưởng sản xuất được $\frac{420}{x-2}$ (thú nhồi bông)

Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{420}{x-2} - \frac{420}{x} = 5$

$$420x - 420(x-2) = 5x(x-2)$$

$$x^2 - 2x - 168 = 0$$

$$\Delta' = b'^2 - ac = (-1)^2 - 1 \cdot (-168) = 169$$

$$\Rightarrow x_1 = 14 \text{ (tm)}, x_2 = -12 \text{ (loại)}$$

Vậy thời gian dự định hoàn thành công việc của phân xưởng là 14 giờ

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Theo kế hoạch, một xưởng may phải may 280 bộ quần áo. Khi thực hiện, mỗi ngày xưởng may được nhiều hơn 5 bộ quần áo so với số bộ phải may trong một ngày theo kế hoạch. Vì thế xưởng đã hoàn thành công việc sớm một ngày so với kế hoạch. Hỏi theo kế hoạch ban đầu, mỗi ngày xưởng phải may bao nhiêu bộ quần áo?

Lời giải

Gọi số bộ quần áo mỗi ngày xưởng phải may theo kế hoạch x (bộ, $x \in \mathbb{N}^*$, $x < 280$).

Thực tế, số bộ quần áo mỗi ngày xưởng phải may là $x + 5$ (bộ).

Thời gian hoàn thành công việc của xưởng theo kế hoạch là : $\frac{280}{x}$ (ngày)

Thời gian hoàn thành công việc của xưởng thực tế là : $\frac{280}{x+5}$ (ngày)

Thực tế, xưởng hoàn thành công việc trước kế hoạch 1 ngày nên ta có phương trình:

$$\frac{280}{x} - \frac{280}{x+5} = 1$$

$$\frac{280(x+5) - 280x}{x(x+5)} = 1$$

$$\frac{280x + 1400 - 280x}{x^2 + 5x} = 1$$

$$\frac{1400}{x^2 + 5x} = 1$$

$$x^2 + 5x = 1400$$

$$x^2 + 5x - 1400 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = 5^2 - 4.1.(-1400) = 5625 > 0$$

Vì $\Delta > 0$ nên phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{5625}}{2.1} = 35 \text{ (thoả mãn)}$$

$$x_2 = \frac{-5 - \sqrt{5625}}{2.1} = -40 \text{ (loại)}$$

Vậy theo kế hoạch, mỗi ngày xưởng phải may 35 bộ quần áo.

Bài 5. Một cửa hàng kinh doanh điện máy sau khi nhập về chiếc tivi, đã bán chiếc tivi đó; cửa hàng thu được tiền lãi là 10% của giá nhập về. Giả sử cửa hàng tiếp tục nâng giá bán chiếc tivi đó thêm 5% của giá đã bán, nhưng bớt cho khách hàng 245000 đồng, khi đó cửa hàng sẽ thu được tiền lãi là 12% của giá nhập về. Tìm giá tiền khi nhập về của chiếc tivi đó.

Lời giải

Gọi giá nhập về của chiếc tivi là x (đồng). Theo đề cửa hàng thu lãi $\frac{x}{10}$, tức là giá đã bán là $x + \frac{x}{10}$. Nếu cửa hàng tiếp tục nâng giá bán chiếc tivi đó thêm 5% giá đã bán và bớt cho khách hàng 245 000 đồng,

$$\text{khi đó giá bán ra là } x + \frac{x}{10} + \frac{5}{100} \left(x + \frac{x}{10} \right) - 245000$$

Theo đề khi đó cửa hàng thu lãi là 12% của giá nhập về, kéo theo :

$$x + \frac{x}{10} + \frac{5}{100} \left(x + \frac{x}{10} \right) - 24500 = x + \frac{12}{100} x$$

Từ đó dễ tính được $x = 7\,000\,000$

Vậy giá nhập về của chiếc ti vi đó là 7 triệu đồng.

Bài 6. Một người dự định trồng 210 cây theo thời gian định trước. Nhưng do thời tiết xấu nên theo thực tế mỗi ngày người đó trồng được ít hơn dự định 5 cây, vì thế hoàn thành công việc chậm mất 7 ngày so với dự kiến. Hỏi theo dự định ban đầu, mỗi ngày người đó trồng được bao nhiêu cây ?

Lời giải

Gọi số cây mỗi ngày dự định người đó trồng là x (cây)

Thời gian trồng cây theo dự định là : $\frac{210}{x}$ (ngày)

Số cây trồng theo thực tế là : $x - 5$ (cây)

Thời gian trồng cây theo thực tế là $\frac{210}{x-5}$ (ngày)

Vì thời gian hoàn thành công việc chậm hơn 7 ngày so với dự kiến nên ta có phương trình :

$$\frac{210}{x-5} - \frac{210}{x} = 7$$

$$\frac{210x - 210x + 1050}{x^2 - 5x} = 7$$

$$7x^2 - 35x - 1050 = 0$$

$$\begin{cases} x = 15(tm) \\ x = -10(km) \end{cases}$$

Vậy theo dự định ban đầu, người đó trồng được 15 cây mỗi ngày.

Bài 7. Thành phố Gia Nghĩa lên kế hoạch xét nghiệm Covid-19 cho 1000 người trong một thời gian quy định. Nhờ cải tiến phương pháp nên mỗi giờ xét nghiệm được thêm 50 người. Vì thế, việc xét nghiệm hoàn thành sớm hơn kế hoạch 1 giờ. Hỏi theo kế hoạch mỗi giờ thành phố Gia Nghĩa xét nghiệm được bao nhiêu người

Lời giải

Gọi số người được xét nghiệm mỗi giờ theo kế hoạch : x (người) ($x \in \mathbb{N}^*$)

Khi đó, trên thực tế mỗi giờ xét nghiệm được $x + 50$ (người)

Theo kế hoạch, thời gian xét nghiệm xong là $\frac{1000}{x}$ (giờ)

Trên thực tế, thời gian xét nghiệm xong: $\frac{1000}{x+50}$ (giờ)

Do hoàn thành sớm hơn kế hoạch 1 ngày nên ta có phương trình

$$\frac{1000}{x} - \frac{1000}{x+50} = 1$$

$$x^2 + 50x - 50\,000$$

$$\begin{cases} x = 200(tm) \\ x = -250(ktm) \end{cases}$$

Vậy theo kế hoạch, mỗi giờ thành phố Gia Nghĩa xét nghiệm được 200 người

Bài 8. Theo kế hoạch, một tổ công nhân dự định phải may 120 kiện khẩu trang để phục vụ công tác phòng chống dịch Covid – 19. Nhưng khi thực hiện nhờ cải tiến kỹ thuật nên mỗi ngày tổ đã làm tăng thêm 5 kiện so với dự định. Do đó tổ đã hoàn thành công việc sớm hơn dự định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày tổ phải làm bao nhiêu kiện khẩu trang?

Lời giải

Gọi số kiện khẩu trang mỗi ngày mà tổ dự định phải làm là x (kiện khẩu trang, $x \in \mathbb{N}^*$)

Khi đó: thời gian hoàn thành 120 kiện khẩu trang theo dự định là $\frac{120}{x}$ (ngày)

Số kiện khẩu trang làm thực tế mỗi ngày là $x + 5$ (kiện)

Thời gian hoàn thành 120 kiện khẩu trang thực tế là $\frac{120}{x+5}$ (ngày).

Vì tổ hoàn thành sớm hơn 2 ngày so với dự kiến nên ta có phương trình:

$$\frac{120}{x} - \frac{120}{x+5} = 2$$

$$\frac{120(x+5)}{x(x+5)} - \frac{120x}{x(x+5)} = \frac{2x(x+5)}{x(x+5)}$$

$$120x + 600 - 120x = 2x^2 + 10x$$

$$2x^2 + 10x - 600 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 300 = 0$$

$$\text{Tính được } \Delta = 1225 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 15 \text{ (tm)} \\ x_2 = -20 \text{ (ko tm)} \end{cases}$$

Vậy theo kế hoạch mỗi tổ phải làm 15 kiện khẩu trang mỗi ngày.

Bài 9. Một phân xưởng phải may 1200 bộ quần áo trong một thời gian quy định. Khi thực hiện, do cải tiến kỹ thuật nên mỗi ngày phân xưởng may thêm được 10 bộ quần áo và hoàn thành kế hoạch trước 4 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày phân xưởng may bao nhiêu bộ quần áo?

Lời giải

Gọi x là số bộ quần áo phân xưởng may mỗi ngày theo kế hoạch ($x \in \mathbb{N}^*$)

Thời gian phân xưởng may 1200 bộ quần áo theo kế hoạch là $\frac{1200}{x}$ (ngày)

Thực tế mỗi ngày phân xưởng may được $x + 10$ (bộ)

Nên thời gian thực tế phân xưởng may 1200 bộ quần áo là $\frac{1200}{x+10}$ (ngày)

$$\text{Theo đề bài ta có phương trình } \frac{1200}{x} - \frac{1200}{x+10} = 4$$

$$1200(x+10) - 1200x = 4x(x+10)$$

$$4x^2 + 40x - 12000 = 0$$

$$\begin{cases} x = 50 \text{ (nhan)} \\ x = -60 \text{ (loai)} \end{cases}$$

Vậy theo kế hoạch mỗi ngày phân xưởng may được 50 bộ quần áo.

Bài 10. Theo kế hoạch, Công an tỉnh Khánh Hòa sẽ cấp 7200 thẻ căn cước công dân cho địa phương A. Một tổ công tác được điều động đến địa phương A để cấp thẻ căn cước công dân trong một thời gian nhất định. Khi thực hiện nhiệm vụ, tổ chức công tác đã cải tiến kĩ thuật nên mỗi ngày đã cấp tăng thêm được 40 thẻ Căn cước so với kế hoạch. Vì vậy, tổ công tác đã hoàn thành nhiệm vụ sớm hơn kế hoạch 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch ban đầu, mỗi ngày tổ công tác sẽ cấp được bao nhiêu thẻ Căn cước?

Lời giải

Gọi số thẻ Căn cước mỗi ngày tổ công tác cấp được theo kế hoạch là x (thẻ). ($x \in \mathbb{N}^*$)

Theo kế hoạch, tổ công tác sẽ hoàn thành nhiệm vụ trong $\frac{7200}{x}$ ngày.

Sau khi cải tiến kĩ thuật, mỗi ngày tổ công tác cấp được $x + 40$ thẻ.

Sau khi cải tiến kĩ thuật, tổ công tác hoàn thành nhiệm vụ trong $\frac{7200}{x + 40}$ ngày

Theo đề bài ta có phương trình: $\frac{7200}{x} - \frac{7200}{x + 40} = 2$

Giải phương trình thu được $x = 360$ (TMĐK)

KL: Vậy theo kế hoạch ban đầu, mỗi ngày tổ công tác cấp được 360 thẻ Căn cước

Bài 11. Trong giai đoạn phòng chống đại dịch Covid-19, Bộ Y tế khuyến cáo người dân thực hiện nghiêm túc thông điệp 5K, trong đó có yêu cầu giữ vệ sinh và “Khử khuẩn”.

Theo kế hoạch một công ty phải sản xuất 4000 chai dung dịch khử khuẩn trong một thời gian quy định (số chai dung dịch khử khuẩn sản xuất trong mỗi ngày là bằng nhau). Để tăng cường phòng chống dịch, mỗi ngày công ty đã sản xuất nhiều hơn dự định 100 chai dung dịch khử khuẩn. Do đó, công ty đã hoàn thành công việc trước thời hạn 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày công ty sản xuất bao nhiêu chai dung dịch khử khuẩn?

Lời giải

Gọi số chai dung dịch khử khuẩn mỗi ngày công ty đó sản xuất theo kế hoạch là x (chai, $x \in \mathbb{N}^*$).

Thời gian để sản xuất 4000 chai dung dịch khử khuẩn theo kế hoạch là $\frac{4000}{x}$ (ngày).

Thực tế mỗi ngày công ty đó sản xuất được $x + 100$ (chai).

Thời gian thực tế để sản xuất 4000 chai dung dịch khử khuẩn là $\frac{4000}{x + 100}$ (ngày).

Vì công ty đã hoàn thành công việc trước thời hạn 2 ngày nên ta có phương trình:

$$\frac{4000}{x} - \frac{4000}{x + 100} = 2$$

$$4000(x+100) - 4000x = 2x(x+100)$$

$$2x^2 + 200x - 400000 = 0$$

$$x^2 + 100x - 200000 = 0$$

Ta có: $\Delta' = 50^2 + 200000 = 202500 = 450^2 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x = -50 + 450 = 400(tm)$$

$$x = -50 - 450 = -500(ktm)$$

Vậy số chai dung dịch khử khuẩn mỗi ngày công ty đó sản xuất theo kế hoạch là 400 chai.

Bài 12. Theo kế hoạch công an tỉnh Kiên Giang điều hai tổ công tác đến làm thẻ Căn cước công dân cho một phường trên địa bàn thành phố Rạch Giá. Nếu cả hai tổ cùng làm thì trong 4 ngày hoàn thành công việc. Nếu mỗi tổ làm riêng thì thời gian hoàn thành của tổ I ít hơn thời gian hoàn thành của tổ II là 6 ngày. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi tổ phải làm trong bao nhiêu ngày để hoàn thành công việc?

Lời giải

Gọi thời gian làm riêng hoàn thành công việc của tổ thứ nhất là x (ngày) ($x \in \mathbb{N}, x > 0$)

Thời gian làm riêng hoàn thành công việc của tổ thứ hai là $(x+6)$ (ngày)

Mỗi ngày:

Tổ thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc)

Tổ thứ hai làm được $\frac{1}{x+6}$ (công việc).

Lúc làm chung thì cả 2 tổ làm trong 4 ngày xong việc nên mỗi ngày cả 2 tổ làm được $\frac{1}{4}$ (công việc).

Do đó ta lập được phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+6} = \frac{1}{4}$$

$$4(x+6) + 4x = x(x+6)$$

$$4x + 24 + 4x = x^2 + 6x$$

$$x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$x = 6 (tm)$$

$$x = -4 (ktm)$$

Vậy: Tổ I làm riêng hoàn thành trong 6 (ngày)

Tổ II làm riêng hoàn thành trong 12 (ngày)

Bài 13. Theo kế hoạch, một tổ trong xưởng may phải may xong 8400 chiếc khẩu trang trong một thời gian quy định. Do tình hình dịch bệnh Covid-19 diễn biến phức tạp, tổ đã quyết định tăng năng suất nên mỗi ngày tổ đã may được nhiều hơn 102 chiếc khẩu trang so với số khẩu trang phải may trong một ngày theo kế hoạch. Vì vậy, trước thời gian quy định 4 ngày, tổ đã may được 6416 chiếc khẩu trang. Hỏi số khẩu trang mà tổ phải may mỗi ngày theo kế hoạch là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi số khẩu trang mà tổ phải may mỗi ngày theo kế hoạch là x (chiếc) (ĐK: $x \in \mathbb{N}^*$).

Vì xưởng phải may 8400 chiếc khẩu trang nên thời gian để may xong là $\frac{8400}{x}$ (ngày).

Vì sau khi tăng năng suất nên mỗi ngày tổ đã may được nhiều hơn 102 chiếc khẩu trang so với số khẩu trang phải may trong một ngày theo kế hoạch nên thực tế mỗi ngày tổ mai được $x + 102$ (chiếc)

Thời gian tổ may được 6416 chiếc khẩu trang theo thực tế là: $\frac{6416}{x + 102}$ (ngày).

Vì tổ may trước thời gian quy định 4 ngày, tổ đã may được 6416 chiếc khẩu trang nên ta có phương trình:

$$\frac{8400}{x} - \frac{6416}{x + 102} = 4$$

$$\frac{2100}{x} - \frac{1604}{x + 102} = 1$$

$$2100(x + 102) - 1604x = x(x + 102)$$

$$2100x + 214200 - 1604x = x^2 + 102x$$

$$x^2 - 394x - 214200 = 0$$

$$x^2 - 700x + 306x - 214200 = 0$$

$$x(x - 700) + 306(x - 700) = 0$$

$$(x - 700)(x + 306) = 0$$

$$x = 700(tm)$$

$$x = -306(ktm)$$

Vậy số khẩu trang mà tổ phải may mỗi ngày theo kế hoạch là 700 chiếc.

Bài 14. Một nhóm học sinh dự định làm 360 chiếc mũ chắn giọt bắn trong một thời gian nhất định để ủng hộ các địa phương trong công tác phòng, chống dịch bệnh COVID-19. Thực tế, mỗi ngày nhóm học sinh làm vượt mức 12 chiếc mũ so với dự định. Vì vậy, nhóm đã làm xong trước dự định hai ngày và làm thêm được 4 chiếc mũ. Hỏi theo dự định, mỗi ngày nhóm học sinh làm được bao nhiêu chiếc mũ?

Lời giải

Gọi số chiếc mũ mỗi ngày nhóm học sinh dự định làm được là x (chiếc), ($x \in \mathbb{N}^*$, $x < 360$)

Thời gian dự định nhóm học sinh làm xong 360 chiếc mũ là: $\frac{360}{x}$ (ngày)

Thực tế mỗi ngày, nhóm học sinh làm được số chiếc mũ là $x + 12$ (chiếc)

Thời gian thực tế nhóm học sinh hoàn thành $360 + 4 = 364$ chiếc mũ là: $\frac{364}{x + 12}$ (ngày)

Nhóm học sinh đã hoàn thành xong trước dự định 2 ngày nên ta có phương trình

$$\frac{360}{x} - \frac{364}{x + 12} = 2$$

$$x^2 + 14x - 2160 = 0$$

Phương trình có $\Delta' = (-7)^2 + 1.2160 = 2209 > 0$

Nên phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = -7 + \sqrt{2209} = 40 \text{ (tm)}; x_2 = -7 - \sqrt{2209} = -54 \text{ (ktm)}$$

Vậy theo dự định, mỗi ngày nhóm học sinh làm được 40 chiếc mũ.

Bài 15. Một địa phương lên kế hoạch xét nghiệm SARS-COV-2 cho 12000 người trong một thời gian quy định. Nhờ cải tiến phương pháp nên mỗi giờ xét nghiệm được thêm 1000 người. Vì thế, địa phương này hoàn thành sớm hơn kế hoạch là 16 giờ. Hỏi theo kế hoạch, địa phương này phải xét nghiệm trong thời gian bao nhiêu giờ?

Lời giải

Gọi số người được xét nghiệm trong một giờ theo dự định là x (người) ($x < 12000, x \in \mathbb{N}^*$)

Theo kế hoạch, thời gian để địa phương đó xét nghiệm hết 12000 người là $\frac{12000}{x}$ (giờ)

Thực tế, số người được xét nghiệm trong một giờ là $x + 1000$ (người)

Thực tế, thời gian địa phương đó xét nghiệm hết 12000 người là $\frac{12000}{x+1000}$ (giờ)

Do địa phương hoàn thành kế hoạch sớm hơn 16 giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{12000}{x} - \frac{12000}{x+1000} = 16$$

$$12000(x+1000) - 12000x = 16x(x+1000)$$

$$12000x + 12000000 - 12000x = 16x^2 + 16000x$$

$$16x^2 + 16000x - 12000000 = 0$$

$$x^2 + 1000x - 750000 = 0$$

$$x^2 + 1500x - 500x - 750000 = 0$$

$$x(x+1500) - 500(x+1500) = 0$$

$$(x+1500)(x-500) = 0$$

$$x+1500 = 0$$

$$x-500 = 0$$

$$x = -1500 \text{ (không thỏa mãn)}$$

$$x = 500 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy theo kế hoạch, địa phương này cần $\frac{12000}{500} = 24$ (giờ) để xét nghiệm xong.

Bài 16. Để phục vụ công tác phòng chống dịch COVID-19, một Công ty A lên kế hoạch trong một thời gian quy định làm 20000 tấm chắn bảo hộ để tặng các chốt chống dịch. Do ý thức khẩn trương trong công tác hỗ trợ chống dịch và nhờ cải tiến quy trình làm việc nên mỗi ngày Công ty A làm được nhiều

hơn 300 tấm so với kế hoạch ban đầu. Vì thế, Công ty A đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn đúng một ngày so với thời gian quy định và làm được nhiều hơn 700 tấm so với kế hoạch ban đầu. Biết rằng số tấm làm ra trong mỗi ngày là bằng nhau và nguyên cái. Hỏi theo kế hoạch ban đầu, mỗi ngày Công ty A cần làm bao nhiêu tấm chắn bảo hộ ?

Lời giải

+) Gọi x (cái) ($x \in \mathbb{N}^*$, $x > 0$) là số tấm chắn bảo hộ phải làm ra được trong mỗi ngày theo kế hoạch, thì số tấm chắn bảo hộ làm ra được mỗi ngày trong thực tế là $x + 300$ (cái).

+) Số ngày hoàn thành công việc theo kế hoạch là $\frac{20000}{x}$ (ngày).

+) Số ngày hoàn thành công việc trong thực tế là $\frac{20700}{x + 300}$ (ngày).

+) Theo đề bài ta có phương trình:

$$\frac{20000}{x} - \frac{20700}{x + 300} = 1$$

$$x^2 + 1000x - 6000000 = 0$$

$$x = 2000 \text{ (nhận)}, x = -3000 \text{ (loại)}$$

Vậy theo kế hoạch ban đầu, mỗi ngày Công ty A cần làm 2000 cái tấm chắn bảo hộ.

Bài 17. Một tổ sản xuất phải làm xong 4800 bộ đồ bảo hộ y tế trong một số ngày quy định. Thực tế, mỗi ngày tổ đó làm được nhiều hơn 100 bộ đồ bảo hộ y tế so với số bộ đồ bảo hộ y tế phải làm trong một ngày theo kế hoạch. Vì thế 8 ngày trước khi hết hạn, tổ sản xuất đã làm xong 4800 bộ đồ bảo hộ y tế đó. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày tổ sản xuất phải làm bao nhiêu bộ đồ bảo hộ y tế? (Giả định rằng số bộ đồ bảo hộ y tế mà tổ đó làm xong trong mỗi ngày là bằng nhau.)

Lời giải

Gọi số bộ đồ bảo hộ y tế mà tổ sản xuất phải làm trong một ngày theo kế hoạch là x (bộ); ($x > 0$).

Lập luận để có phương trình

$$\frac{4800}{x} - \frac{4800}{x + 100} = 8$$

$$x^2 + 100x - 60000 = 0 \text{ (vì } x > 0 \text{)}$$

Giải phương trình tìm được $x = -300$ hoặc $x = 200$

Đối chiếu điều kiện và thử lại thấy $x = 200$ thỏa mãn

KL: Theo kế hoạch, mỗi ngày tổ sản xuất phải làm 200 bộ đồ bảo hộ y tế

BÀI 3
ĐỊNH LÝ VIÈTE**1. Định lý Viète**

Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) thì:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ và } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Nhận xét:

Xét phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

- Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = 1$, nghiệm còn lại là $x_2 = \frac{c}{a}$
- Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = -1$, nghiệm còn lại là $x_2 = -\frac{c}{a}$

2. Tìm hai số khi biết tổng và tích

Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Điều kiện để có hai số đó là $S^2 - 4P \geq 0$

3. Xác định dấu của nghiệm

Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2

- Nếu $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} < 0$ thì phương trình có hai nghiệm trái dấu
- Nếu $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0$ và $S = x_1 + x_2 > 0$ thì phương trình có hai nghiệm dương
- Nếu $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0$ và $S = x_1 + x_2 < 0$ thì phương trình có hai nghiệm âm

Chú ý: Để áp dụng hệ thức Viète phải chú ý đến điều kiện phương trình là phương trình bậc hai có nghiệm $a \neq 0; \Delta \geq 0$

DẠNG 1**KHÔNG GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC ĐỐI XỨNG****Phương pháp:**

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm x_1, x_2 là $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$

Từ đó áp dụng hệ thức Viète ta có: $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$; $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Bước 2: Biến đổi biểu thức đối xứng giữa các nghiệm của đề bài theo tổng $x_1 + x_2$ và tích $x_1 x_2$

Sau đó áp dụng bước 1

Chú ý: Một số biểu thức đối xứng giữa các nghiệm thường gặp là

- $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = S^2 - 2P$
- $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = S^2 - 4P$
- $|a - b| = \sqrt{(a + b)^2 - 4ab} = \sqrt{S^2 - 4P}$
- $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a + b}{ab} = \frac{S}{P}$
- $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = S^3 - 3SP$
- $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$

Bài 1. Biết phương trình $2x^2 + 9x + 6 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính tổng $x_1 + x_2$ và tích $x_1 x_2$.

Bài 2. Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 5x + 3 = 0$. Không giải phương trình hãy tính giá trị của các biểu thức sau

a) $A = x_1^2 + x_2^2$ b) $B = x_1^3 + x_2^3$ c) $C = \frac{1}{x_1^4} + \frac{1}{x_2^4}$ d) $D = |x_1 - x_2|$

Bài 3. Cho phương trình $-3x^2 - 5x - 2 = 0$. Với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình, không giải phương trình hãy tính giá trị của các biểu thức sau

a) $M = x_1 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + x_2$ b) $N = \frac{1}{x_1 + 3} + \frac{1}{x_2 + 3}$

c) $P = \frac{x_1 - 3}{x_1^2} + \frac{x_2 - 3}{x_2^2}$ c) $Q = \frac{x_1}{x_2 + 2} + \frac{x_2}{x_1 + 2}$

b) Gọi hai nghiệm của (1) là x_1, x_2 . Tính theo m giá trị của biểu thức $A = x_1^2 + 2(m+1)x_2 + 2m - 2$

Bài 15. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 + 2024x + 2 = 0$ và x_3, x_4 là các nghiệm của phương trình $x^2 + 2025x + 2 = 0$. Tính $A = (x_1 + x_3)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4)(x_2 - x_4)$

Bài 16. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - x - 1 = 0$. Không giải phương trình. chứng minh rằng $P(x_1) = P(x_2)$ với $P(x) = 3x - \sqrt{33x + 25}$

Bài 17. Cho phương trình $x^2 - 2(m-2)x + 2m - 5 = 0$ (m là tham số)

a) Tìm điều kiện của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

b) Với m vừa tìm được ở trên, tìm biểu thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m

Bài 18. Cho phương trình $x^2 + (m+2)x + 2m = 0$. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ? Khi đó, hãy tìm biểu thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào tham số m .

DẠNG 2**GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẰNG CÁCH NHẢM NGHIỆM**

Xét phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

- Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = 1$, nghiệm còn lại là $x_2 = \frac{c}{a}$
- Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = -1$, nghiệm còn lại là $x_2 = -\frac{c}{a}$

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 8x + 7 = 0$

b) $x^2 + 4x + 3 = 0$

c) $2x^2 - 3x - 5 = 0$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$

b) $5x^2 + 6x - 11 = 0$

c) $2x^2 - 7x - 9 = 0$

Bài 3. Xét tổng $a + b + c$ hoặc $a - b + c$ rồi tính nhẩm các nghiệm của các phương trình sau

a) $15x^2 - 17x + 2 = 0$

b) $1230x^2 - 4x - 1244 = 0$

c) $(2 - \sqrt{3})x^2 + 2\sqrt{3}x - (2 + \sqrt{3}) = 0$

d) $\sqrt{5}x^2 - (2 - \sqrt{5})x - 2 = 0$

Bài 4. Xét tổng $a + b + c$ hoặc $a - b + c$ rồi tính nhẩm các nghiệm của các phương trình sau

a) $7x^2 - 9x + 2 = 0$

b) $23x^2 - 9x - 32 = 0$

c) $1975x^2 + 4x - 1979 = 0$

d) $31,1x^2 - 50,9x + 19,8 = 0$

Bài 5. Cho phương trình $(m - 2)x^2 - (2m + 5)x + m + 7 = 0$ với m là tham số

a) Chứng minh phương trình luôn có một nghiệm không phụ thuộc vào tham số m

b) Tìm các nghiệm của phương trình đã cho theo tham số m

Bài 6. Cho phương trình $(2m - 1)x^2 - (m - 3)x - 6m - 2 = 0$ với m là tham số

a) Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có nghiệm $x = -2$

b) Tìm các nghiệm của phương trình đã cho theo tham số m .

DẠNG 3**TÌM HAI SỐ KHI BIẾT TỔNG VÀ TÍCH****Phương pháp:**

Để tìm hai số x, y khi biết tổng $S = x + y$ và tích $P = xy$, ta làm như sau

Bước 1: Giải phương trình $X^2 - SX + P = 0$ để tìm các nghiệm X_1, X_2

Bước 2: Khi đó các số x, y cần tìm là $x = X_1; y = X_2$ hoặc $x = X_2; y = X_1$

Chú ý: Điều kiện để có hai số đó là $S^2 - 4P \geq 0$

Bài 1. Tìm hai số u và v trong mỗi trường hợp sau:

a) $u + v = 15; uv = 36$

b) $u^2 + v^2 = 13; uv = 6$

Bài 2. Tìm phương trình bậc hai biết nó nhận 2024 và -1 là nghiệm.

Bài 3. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - x - 1 = 0$. Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là

a) $x_1 + 1; x_2 + 1$

b) $x_1^2 + x_2; x_2^2 + x_1$

c) $\frac{x_1}{x_2}; \frac{x_2}{x_1}$

d) $\frac{x_2 + 1}{x_1}; \frac{x_1 + 1}{x_2}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Tìm hai số biết:

a) Tổng bằng 4 và tích bằng 1

b) Tổng bằng 6 và tích bằng 9

Bài 5. Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $2 + \sqrt{3}$ và $2 - \sqrt{3}$

Bài 6. Cho phương trình $x^2 + 5x - 3m = 0$ (m là tham số)

a) Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm là x_1 và x_2

b) Với điều kiện m tìm được ở câu a), hãy lập một phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\frac{2}{x_1^2}$ và $\frac{2}{x_2^2}$

Bài 7. Cho phương trình $3x^2 + 5x - m = 0$ (m là tham số)

a) Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm là x_1 và x_2

b) Với điều kiện m tìm được ở câu a) hãy viết phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\frac{x_1}{x_2 + 1}$ và $\frac{x_2}{x_1 + 1}$

Bài 8. Tìm hai số x và y , biết:

a) Tổng của chúng bằng 4 và tổng bình phương bằng 10

b) Tổng của chúng bằng 3 và tổng lập phương bằng 9

c) Tích của chúng bằng 2 và tổng lập phương bằng -9

d) Tích của chúng bằng -2 , tổng lập phương bằng -7

Bài 9. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 4x + 1 = 0$. Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là:

a) $3x_1 - 2x_2; 3x_2 - 2x_1$

b) $x_1^2 - x_2; x_2^2 - x_1$

c) $\frac{x_1}{x_2 + 1}; \frac{x_2}{x_1 + 1}$

d) $\frac{x_2^2 + x_1}{x_1}; \frac{x_1^2 + x_2}{x_2}$

e) $x_2^2 + 5x_1 + 1; x_1^2 + 5x_2 + 1$

f) $|2x_1 - x_2|; |2x_2 - x_1|$

Bài 10. Cho $a = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}, b = \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$. Chứng minh rằng a, b là hai nghiệm của phương trình bậc hai với hệ số nguyên

Bài 11. Cho $c = \sqrt[3]{6\sqrt{3} + 10}, d = \sqrt[3]{6\sqrt{3} - 10}$. Chứng minh rằng c^2, d^2 là hai nghiệm của một phương trình bậc hai với hệ số nguyên.

Bài 12. Cho a và b là hai số thỏa mãn đẳng thức $a^2 + b^2 + 3ab - 8a - 8b - 2\sqrt{3ab} + 19 = 0$

Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm a và b .

DẠNG 4

XÉT DẤU CÁC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Dấu nghiệm số của phương trình bậc hai

Cho phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) (1)

- phương trình (1) có nghiệm $\Delta \geq 0$.
- phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Delta > 0$.
- phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0$
- phương trình (1) có hai nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$
- phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$
- phương trình (1) có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

Chú ý: Khi so sánh của phương trình bậc 2 với giá trị m ta cần chú ý đến các điều kiện ràng buộc sau:

- Nếu: $x_1 \leq m \leq x_2 \Leftrightarrow (x_1 - m)(x_2 - m) \leq 0$.
- Nếu $m \leq x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2m \\ (x_1 - m)(x_2 - m) \geq 0 \end{cases}$
- Nếu $x_1 \leq x_2 \leq m \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2m \\ (x_1 - m)(x_2 - m) \geq 0 \end{cases}$

Bài 1. Không giải phương trình, cho biết dấu các nghiệm của các phương trình sau:

a) $x^2 - 13x + 20 = 0$

b) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

c) $5x^2 + 7x + 1 = 0$

Bài 2. Cho phương trình $x^2 + (2m - 1)x + m^2 - 4m + 7 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình đã cho có nghiệm.

Bài 3. Cho phương trình $x^2 - 2mx + (5m - 4) = 0$, với m là tham số. Xác định các giá trị của m để phương trình có:

- Nghiệm bằng 0.
- Hai nghiệm phân biệt trái dấu.
- Hai nghiệm phân biệt cùng dương.

Bài 4. Cho phương trình $x^2 - x + 3m = 0$, với m là tham số. Xác định các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 1 < x_2$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình:

- a) $x^2 - 2(m-1)x + m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu
- b) $x^2 - 8x + 2m + 6 = 0$ có hai nghiệm phân biệt
- c) $x^2 - 6x + 2m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dương
- d) $x^2 - 2(m-1)x - 3 - m = 0$ có đúng một nghiệm dương

Bài 6. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình:

- a) $2x^2 - 3(m+1)x + m^2 - m - 2 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.
- b) $3mx^2 + 2(2m+1)x + m = 0$ có hai nghiệm âm
- c) $x^2 + mx + m - 1 = 0$ có hai nghiệm lớn hơn m
- d) $mx^2 - 2(m-2)x + 3(m-2) = 0$ có hai nghiệm cùng dấu.

Bài 7. Cho phương trình $x^2 - x + m = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2 < 2$

DẠNG 5**XÁC ĐỊNH ĐIỀU KIỆN THAM SỐ ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC****Phương pháp**

Ta thực hiện theo các bước sau

Bước 1: Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm $\Delta \geq 0$

Bước 2: Từ hệ thức đã cho và hệ thức Viète, tìm được điều kiện của tham số.

Bước 3: Kiểm tra điều kiện của tham số có thỏa mãn điều kiện ở bước 1 hay không rồi kết luận.

Bài 1. Cho phương trình $2x^2 + 4x + m = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 10$

Bài 2. Cho phương trình: $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ (x là ẩn số, m là tham số). Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 + x_1^2 x_2^2 - 14 = 0$

Bài 3. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình: $x^2 - mx + m - 2 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn: $x_1 - x_2 = 2\sqrt{5}$.

Bài 4. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m = 0$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ (với $x_1 < x_2$) thỏa mãn: $|x_1| = 3|x_2|$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Cho phương trình $x^2 - 4x + m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 14$.

Bài 6. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2mx + 4m - 4 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 - 8 = 0$.

Bài 7. Cho phương trình $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $x_1^4 - x_1^3 = x_2^4 - x_2^3$.

Bài 8. Cho phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 2 = 0$, với m là tham số. Tìm giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 3x_2 = 6$.

Bài 9. Cho phương trình $x^2 - 2mx - 1 = 0$ (1) với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = 7$

Bài 10. Cho phương trình: $x^2 - 3x + m = 0$ (1) (x là ẩn số).

- Giải phương trình (1) khi $m = 2$.
- Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm.
- Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn đẳng thức:

$$x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 - 2x_1^2 x_2^2 = 5.$$

Bài 11. Cho phương trình: $x^2 - (m + 2)x + m + 1 = 0$ (1)

- Giải pt (1) với $m = -3$.
- Chứng tỏ pt (1) luôn có nghiệm với mọi số thực m .
- Tìm m để pt có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài đường cao ứng với cạnh huyền là $h = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Bài 12. Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 = 0$ (m là tham số)

- Giải phương trình với $m = 1$.
- Tìm giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 + 6 = 4x_1 x_2$

Bài 13. Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 2 = 0$ (1) (x là tham số, m là tham số).

- Giải phương trình (1) khi $m = 1$
- Xác định các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện:
 $x_1^2 + 2(m + 1)x_2 = 12m + 2$

Bài 14. Cho phương trình $x^2 - 6x + m + 4 = 0$ (1) (m là tham số).

- Giải phương trình (1) khi $m = 1$.
- Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn
 $2020(x_1 + x_2) - 2021x_1 x_2 = 2014$.

Bài 15. Cho phương trình (ẩn x): $x^2 - 2(m + 2)x + m^2 + 7 = 0$.

- Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt.
- Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình. Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = x_1 x_2 + 12$.

Bài 16. Cho phương trình $x^2 + 4(m - 1)x - 12 = 0$ (*), với m là tham số.

- Giải phương trình (*) khi $m = 2$.
- Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn
 $4|x_1 - 2| \cdot \sqrt{4 - mx_2} = (x_1 + x_2 - x_1 x_2 - 8)^2$.

Bài 17. Cho phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + m = 0$. (1) (m là tham số).

a) Giải phương trình (1) khi $m = 3$.

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 x_2 + x x_2^2 = 4$.

Bài 18. Tìm các giá trị của m để phương trình $x^2 - mx + m^2 - m - 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 là độ dài các cạnh góc vuông của tam giác vuông ABC , biết độ dài cạnh huyền $BC = 2$.

Bài 19. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 2m^2 - 3m + 1 = 0$, với m là tham số. Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình. Chứng minh rằng: $|x_1 + x_2 + x_1 x_2| \leq \frac{9}{8}$.

Bài 20. Cho phương trình $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 1 = 0$, với m là tham số. tìm tất cả các giá trị $m \in \mathbb{Z}$ để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho biểu thức $P = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}$ có giá trị là số nguyên.

DẠNG 6

XÁC ĐỊNH ĐIỀU KIỆN THAM SỐ ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN LIÊN QUAN GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, LỚN NHẤT.

Bài 1. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 2(m-3)x - 6m - 7 = 0$ với m là tham số. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $C = (x_1 + x_2)^2 + 8x_1x_2$

Bài 2. Cho phương trình $x^2 + (m-2)x - 8 = 0$ (1), với m là tham số.

a) Giải phương trình (1) khi $m = 4$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho biểu thức $Q = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 3. Cho phương trình (ẩn x) $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$

a) Giải phương trình khi $m = 3$.

b) Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho biểu thức $A = \frac{4(x_1x_2 + 1)}{x_1^2 + x_2^2 + 2(2 + x_1x_2)}$

đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 4. Cho phương trình $x^2 - (m-1)x - m^2 + m - 2 = 0$, với m là tham số.

a) Chứng minh rằng phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu với mọi m .

b) Gọi hai nghiệm của phương trình đã cho là x_1, x_2 . Tìm m để biểu thức $A = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 - \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3$ đạt

giá trị lớn nhất.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Tìm m để phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 1 = 0$ có nghiệm x_1, x_2 sao cho biểu thức:

$A = x_1(x_1 - x_2) + x_2^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 6. Cho phương trình $x^2 - 5mx + 4m = 0$ (1) (m là tham số)

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

b) Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1). Tìm m để biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 7. Cho phương trình $x^2 - 2x + 2 - m = 0$ (1) (m là tham số)

a) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm

b) Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$A = x_1^2x_2^2 + 3(x_1^2 + x_2^2) - 4$

Bài 8. Cho phương trình $x^2 - 2mx + 2 - m = 0$ (1) (m là tham số)

- a) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m
 b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1).

Tìm m để biểu thức $M = \frac{-24}{2mx_1 + x_2^2 - 6x_1x_2 - m + 2}$ đạt giá trị nhỏ nhất

Bài 9. Cho phương trình $x^2 - mx - 1 = 0$ (1) (x là ẩn số)

a) Chứng minh phương trình (1) luôn có 2 nghiệm trái dấu

b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (1). Tìm giá trị m thoả mãn của biểu thức

$P = \frac{x_1^2 + x_1 - 1}{x_1} + \frac{x_2^2 + x_2 - 1}{x_2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 10. Tìm m để phương trình $x^2 + x + m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 và biểu thức:

$Q = x_1^2(x_1 + 1) + x_2^2(x_2 + 1)$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 11. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2 = 0$, với m là tham số. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $P = x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) - 6$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 12. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $2x^2 - (3a-1)x - 2 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức: $P = \frac{3}{2}(x_1 - x_2)^2 + 2\left(\frac{x_1 - x_2}{2} + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)^2$

Bài 13. Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ (x là ẩn số). Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình.

Tìm m để biểu thức $M = \frac{-24}{x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 14. Cho phương trình $2x^2 + 2mx + m^2 - 2 = 0$, với m là tham số. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của

phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức $A = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)}$

DẠNG 7

SỰ TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ CHỨA THAM SỐ LIÊN QUAN VI-ET

Khi cần biện luận số giao điểm của một đường thẳng (d) và Parabol $(P): y = ax^2$ ta cần chú ý:

◆ Nếu đường thẳng (d) là $y = m$ (song song với trục Ox) ta có thể dựa vào đồ thị để biện luận hoặc biện luận dựa vào $ax^2 = m$.

◆ Nếu đường thẳng $(d): y = mx + n$ ta thường xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $ax^2 = mx + n \Leftrightarrow ax^2 - mx - n = 0$ từ đó ta xét số giao điểm dựa trên số nghiệm của phương trình $ax^2 - mx - n = 0$ bằng cách xét dấu của Δ .

◆ Trong trường hợp đường thẳng (d) cắt đồ thị hàm số (P) tại hai điểm phân biệt A, B thì $A(x_1; mx_1 + n), B(x_2; mx_2 + n)$ khi đó ta có:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + m^2(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{(m^2 + 1)[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2]}.$$

Mọi câu hỏi liên quan đến nghiệm x_1, x_2 ta đều quy về định lý Viet.

Chú ý: Đường thẳng (d) có hệ số góc a đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ thì có dạng: $y = a(x - x_0) + y_0$

Bài 1. Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2(m - 1)x + 2m + 3$.

a) Tìm giá trị của m để đường thẳng d cắt trục tung tại điểm có tọa độ $(0; -5)$.

b) Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng d luôn cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B . Giả sử $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$, tìm m để $x_A^2 + x_B^2 = 10$.

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng

$(d): y = 3mx - 3m + 1$, trong đó m là tham số.

a) Với $m = 1$, tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) .

b) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 11$.

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x + m^2$

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt

b) Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = -3$

Bài 4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hàm số $y = -x^2$ có đồ thị (P) và hàm số

$y = (5m - 6)x - 15m + 25$ có đồ thị là đường thẳng d , với m là tham số

a) Vẽ đồ thị (P)

b) Tìm m để đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 6$

Bài 5. Cho hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -x - m + 1$ (với m là tham số)

a) Vẽ parabol (P) là đồ thị của hàm số $y = x^2$

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn

$$|x_1 - x_2| = 2$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6. Cho Parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = -2x + m$ (với m là tham số).

a) Vẽ Parabol (P) .

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = 1$.

Bài 7. Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = -2x + m - 1$ (với m là tham số). Tìm tất cả

các giá trị của tham số m để đường thẳng d cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và

$B(x_2; y_2)$ sao cho $(y_1 + y_2)^2 = 110 - x_1^2 - x_2^2$.

Bài 8. Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P) .

a) Vẽ đồ thị (P) trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

b) Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y = 2x + 5m$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành

độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \cdot x_2^2 - x_1(5m + 3x_2) = 10115$.

Bài 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol (P) có phương trình $y = x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình $y = 2mx + 3 - 2m$ (với m là tham số)

1) Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(2; 1)$

2) Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B . Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ các điểm A, B . Tìm m để x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật có độ dài đường chéo bằng

$$\sqrt{14}$$

Bài 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d): y = 2x - m + 3$ (m là tham số) parapol

$(P): y = x^2$.

a) Vẽ đồ thị (P) .

b) Tìm các số nguyên m để (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn

$$x_1^2(x_2 + 2) + x_2^2(x_1 + 2)x_1 \leq 10$$

Bài 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx + 3$ (m là tham số).

a) Vẽ parabol (P) .

b) Khi $m = 2$, tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép toán.

c) Tìm m để đường thẳng (d) và parabol (P) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2

thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{3}{2}$.

Bài 12. Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P) .

a) Vẽ đồ thị (P) trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

b) Tìm giá trị của m để đường thẳng $(d): y = 2x - 3m$ (với m là tham số) cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1x_2^2 - x_2(3m + 2x_1) = 12$.

Bài 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng d có phương

trình $y = x + \frac{1}{2}m^2 + m + 1$, với m là tham số.

a) Vẽ đồ thị (P) .

b) Tìm m để đường thẳng d cắt (P) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1^3 + x_2^3 = 68$.

Bài 14. Cho hàm số $y = 2x^2$ có đồ thị (P)

a) Vẽ đồ thị (P) trên mặt phẳng tọa độ (Oxy)

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y = 2mx + 1$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < x_2$ và $|x_2| - |x_1| = 2025$.

Bài 15. Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 3mx + 1 - m^2$ (m là tham số)

a) Tìm m để (d) đi qua điểm $A(1; -9)$

b) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt của hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + x_2 = 2x_1x_2$

Bài 16. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x - m$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ sao cho

$$y_1 + y_2 + x_1^2x_2^2 = 6(x_1 + x_2).$$

Bài 17. Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = (2m + 1)x - 2m$ (m là tham số). Tìm m để (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt $A(x_1, y_1); B(x_2, y_2)$ sao cho $y_1 + y_2 - x_1x_2 = 1$.

Bài 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m - 1)x - m + 3$. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P) . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = x_1^2 + x_2^2$.

BÀI 3
ĐỊNH LÝ VIÈTE**1. Định lý Viète**

Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) thì:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ và } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Nhận xét:

Xét phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

- Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = 1$, nghiệm còn lại là $x_2 = \frac{c}{a}$
- Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = -1$, nghiệm còn lại là $x_2 = -\frac{c}{a}$

2. Tìm hai số khi biết tổng và tích

Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Điều kiện để có hai số đó là $S^2 - 4P \geq 0$

3. Xác định dấu của nghiệm

Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2

- Nếu $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} < 0$ thì phương trình có hai nghiệm trái dấu
- Nếu $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0$ và $S = x_1 + x_2 > 0$ thì phương trình có hai nghiệm dương
- Nếu $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0$ và $S = x_1 + x_2 < 0$ thì phương trình có hai nghiệm âm

Chú ý: Để áp dụng hệ thức Viète phải chú ý đến điều kiện phương trình là phương trình bậc hai có nghiệm $a \neq 0; \Delta \geq 0$

DẠNG 1**KHÔNG GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC ĐỐI XỨNG****Phương pháp:**

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm x_1, x_2 là $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$

Từ đó áp dụng hệ thức Viète ta có: $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$; $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Bước 2: Biến đổi biểu thức đối xứng giữa các nghiệm của đề bài theo tổng $x_1 + x_2$ và tích $x_1 x_2$

Sau đó áp dụng bước 1

Chú ý: Một số biểu thức đối xứng giữa các nghiệm thường gặp là

- $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = S^2 - 2P$
- $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = S^2 - 4P$
- $|a - b| = \sqrt{(a + b)^2 - 4ab} = \sqrt{S^2 - 4P}$
- $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a + b}{ab} = \frac{S}{P}$
- $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = S^3 - 3SP$
- $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$

Bài 1. Biết phương trình $2x^2 + 9x + 6 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính tổng $x_1 + x_2$ và tích $x_1 x_2$.

Lời giải

Phương trình $2x^2 + 9x + 6 = 0$ có $\Delta = 9^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 33 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Khi đó theo hệ thức Viète ta có: $x_1 + x_2 = \frac{-9}{2}$; $x_1 x_2 = 3$

Vậy $x_1 + x_2 = \frac{-9}{2}$; $x_1 x_2 = 3$

Bài 2. Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 5x + 3 = 0$. Không giải phương trình hãy tính giá trị của các biểu thức sau

a) $A = x_1^2 + x_2^2$ b) $B = x_1^3 + x_2^3$ c) $C = \frac{1}{x_1^4} + \frac{1}{x_2^4}$ d) $D = |x_1 - x_2|$

Lời giải

Ta có: $\Delta = 13 > 0 \Rightarrow$ phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Áp dụng hệ thức Viète ta có $x_1 + x_2 = 5; x_1 x_2 = 3$

$$a) A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 5^2 - 2.3 = 19$$

$$b) B = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 80$$

$$c) C = \frac{1}{x_1^4} + \frac{1}{x_2^4} = \frac{x_1^4 + x_2^4}{(x_1 x_2)^4} = \frac{(x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1 x_2)^2}{(x_1 x_2)^4} = \frac{343}{81}$$

d) Ta có

$$D = |x_1 - x_2| \Rightarrow D^2 = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$$

$$\Rightarrow D = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{13}$$

Bài 3. Cho phương trình $-3x^2 - 5x - 2 = 0$. Với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình, không giải phương trình hãy tính giá trị của các biểu thức sau

$$a) M = x_1 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + x_2$$

$$b) N = \frac{1}{x_1 + 3} + \frac{1}{x_2 + 3}$$

$$c) P = \frac{x_1 - 3}{x_1^2} + \frac{x_2 - 3}{x_2^2}$$

$$c) Q = \frac{x_1}{x_2 + 2} + \frac{x_2}{x_1 + 2}$$

Lời giải

Ta có: $\Delta = 25 - 4.3.2 = 1 > 0 \Rightarrow$ phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Áp dụng hệ thức Viète ta có $x_1 + x_2 = \frac{-5}{3}; x_1 x_2 = \frac{2}{3}$

$$a) M = x_1 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + x_2 = (x_1 + x_2) + \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) = (x_1 + x_2) + \left(\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}\right) = \frac{-25}{6}$$

$$b) N = \frac{1}{x_1 + 3} + \frac{1}{x_2 + 3} = \frac{x_1 + x_2 + 6}{x_1 x_2 + 3(x_1 + x_2) + 9} = \frac{13}{14}$$

$$c) P = \frac{x_1 - 3}{x_1^2} + \frac{x_2 - 3}{x_2^2} = \frac{x_1 x_2^2 - 3x_2^2 + x_1^2 x_2 - 3x_1^2}{(x_1 x_2)^2} = \frac{x_1 x_2 (x_1 + x_2) - 3(x_2^2 + x_1^2)}{(x_1 x_2)^2}$$

$$= \frac{x_1 x_2 (x_1 + x_2) - 3[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2]}{(x_1 x_2)^2} = \frac{-49}{4}$$

$$d) \text{Ta có: } Q = \frac{x_1}{x_2 + 2} + \frac{x_2}{x_1 + 2} = \frac{x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 + 2x_2}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)} = \frac{[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] + 2(x_1 + x_2)}{x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4} = \frac{-17}{12}$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Biết rằng phương trình $x^2 - x - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Tính giá trị của biểu thức $C = x_1^2 + x_2^2$.

Lời giải

Phương trình $x^2 - x - 3 = 0$ có $ac = -3 < 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt trái dấu x_1, x_2 .

Khi đó áp dụng định lý Viète ta có: $x_1 + x_2 = 1; x_1x_2 = -3$.

Ta có: $C = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 1^2 - 2 \cdot (-3) = 7$.

Vậy $C = 7$.

Bài 5. Cho phương trình: $2x^2 - 4x - 3 = 0$ có hai nghiệm là $x_1; x_2$. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức: $A = (x_1 - x_2)^2$.

Lời giải

Theo hệ thức Viète, ta có: $x_1 + x_2 = 2; x_1x_2 = -\frac{3}{2}$

Ta có:

$$A = (x_1 - x_2)^2$$

$$A = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$$

$$A = 2^2 - 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$A = 10$$

Vậy $A = 10$.

Bài 6. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình : $x^2 - 4x - 7 = 0$. Tính giá trị của biểu thức

$$T = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} - 2$$

Lời giải

$$x^2 - 4x - 7 = 0$$

Phương trình có $ac = -7 < 0$ nên luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

Áp dụng hệ thức Viète ta có : $x_1 + x_2 = 4; x_1x_2 = -7$.

$$\text{Khi đó ta có : } T = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} - 2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} - 2 = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} - 2 = \frac{4^2 - 2 \cdot (-7)}{-7} - 2 = \frac{-44}{7}$$

$$\text{Vậy } T = -\frac{44}{7}$$

Bài 7. Cho phương trình $x^2 + 5x - 4 = 0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Không giải phương trình, hãy tính giá trị biểu thức $Q = x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2$.

Lời giải

Vì $a = 1, c = -4$ nên a và c trái dấu suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Theo hệ thức Viète có $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -5; x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -4$

$$Q = x_1^2 + x_2^2 + 6x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 + 4x_1 x_2 = (-5)^2 + 4 \cdot (-4) = 9$$

Bài 8. Cho phương trình $x^2 - x - 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 , giá trị của biểu thức $A = \frac{x_1 + x_2}{5x_1 x_2}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Phương trình $x^2 - x - 3 = 0$ có hệ số a, c trái dấu nên có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Theo hệ thức Viète ta có: $x_1 + x_2 = 1; x_1 x_2 = -3$.

$$A = \frac{x_1 + x_2}{5x_1 x_2} = \frac{1}{5 \cdot (-3)} = -\frac{1}{15}$$

Bài 9. Cho phương trình $x^2 + 3x - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy

tính giá trị của biểu thức $T = \frac{3|x_1 - x_2|}{x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2}$.

Lời giải

$$x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 13 > 0$$

Theo Viète ta có : $x_1 + x_2 = -3; x_1 \cdot x_2 = -1$

$$T = \frac{3|x_1 - x_2|}{x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2} = \frac{3\sqrt{(x_1 - x_2)^2}}{x_1 x_2 (x_1 + x_2)} = \frac{3\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}}{x_1 x_2 (x_1 + x_2)} = \frac{3\sqrt{(-3)^2 - 4(-1)}}{(-1) \cdot (-3)} = \frac{3\sqrt{13}}{3} = \sqrt{13}$$

Bài 10. Cho phương trình $x^2 - 12x + 4 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2 . Không giải phương

trình, hãy tính giá trị của biểu thức $T = \frac{x_1^2 + x_2^2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}$

Lời giải

$$x^2 - 12x + 4 = 0$$

Xét $\Delta' = b'^2 - ac = (-6)^2 - 1 \cdot 4 = 32 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Áp dụng hệ thức Viète ta có: $x_1 + x_2 = 12; x_1 x_2 = 4 \Rightarrow x_1 > 0, x_2 > 0$

Ta có:

$$T^2 = \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \right)^2 = \frac{(x_1^2 + x_2^2)^2}{(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2} = \frac{[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2]^2}{x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2}} = \frac{(12^2 - 2 \cdot 4)^2}{12 + 2\sqrt{4}} = 1156$$

Nhận xét $x_1^2 + x_2^2 > 0$ và $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} > 0$ với mọi $x_1, x_2 > 0$ suy ra $T > 0$

$$\Rightarrow T = \sqrt{T^2} = \sqrt{1156} = 34$$

Vậy $T = 34$.

Bài 11. Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 5x - 1 = 0$. Không giải phương trình hãy tính giá trị của các biểu thức sau

a) $A = x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2$

b) $B = x_1^4 + x_2^4$

c) $C = \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}$

d) $D = |x_1 - x_2|$

Lời giải

a) Ta có $\Delta = 29 > 0 \Rightarrow$ phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt

Theo định lý Viète, ta có: $x_1 + x_2 = 5; x_1 \cdot x_2 = -1$

$$A = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - (x_1 + x_2) = 5^2 - 2(-1) - 5 = 22$$

$$b) B = x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2]^2 - 2x_1^2x_2^2 = 727$$

$$c) C = \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^3x_2^3} = \frac{(x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2]}{(x_1x_2)^3} = -140$$

$$d) D = |x_1 - x_2| \Rightarrow D^2 = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 29 \Rightarrow D = \sqrt{29} (D \geq 0)$$

Bài 12. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 3x - 1 = 0$. Tính giá trị của các biểu thức sau

a) $A = x_1^2 + x_2^2$

b) $B = x_1^3(x_1 - 1) + x_2^3(x_2 - x_1)$

c) $C = \left| \frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2} \right|$

Lời giải

a) Ta có: $\Delta = 13 > 0 \Rightarrow$ phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt

theo định lý Viète, ta có: $x_1 + x_2 = 3; x_1 \cdot x_2 = -1$

$$A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3^2 - 2(-1) = 11$$

$$b) B = x_1^3(x_1 - 1) + x_2^3(x_2 - x_1) = x_1^4 + x_2^4 - (x_1^3 + x_2^3) = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 - (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2) = 11^2 - 2 - 3(11 + 1) = 83$$

$$c) C = \left| \frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2} \right| \Rightarrow C^2 = \left(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2} \right)^2 = \left(\frac{x_2^2 - x_1^2}{x_1^2x_2^2} \right)^2 = \frac{(x_2^2 - x_1^2)^2}{(x_1x_2)^4} = \frac{x_1^4 + x_2^4 - 2(x_1x_2)^2}{(x_1x_2)^4} = \frac{[(x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1x_2)^2] - 2(x_1x_2)^2}{(x_1x_2)^4} = 117$$

$$C^2 = 117 \Rightarrow C = 3\sqrt{13} (C \geq 0)$$

Bài 13. Cho phương trình $x^2 - mx - 1 = 0$ (1) (x là ẩn số)

a) Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm trái dấu

b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (1). Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{x_1^2 + x_1 - 1}{x_1} - \frac{x_2^2 + x_2 - 1}{x_2}$

Lời giải

a) $x^2 - mx - 1 = 0$ (1)

Ta có $ac = -1 < 0 \Rightarrow$ phương trình (1) luôn có hai nghiệm x_1, x_2 trái dấu

b) Ta có x_1 là nghiệm của phương trình (1) $\Rightarrow x_1^2 - mx_1 - 1 = 0 \Rightarrow x_1^2 - 1 = mx_1$

Tương tự ta có x_2 là nghiệm của phương trình (1) $\Rightarrow x_2^2 - mx_2 - 1 = 0 \Rightarrow x_2^2 - 1 = mx_2$

$$A = \frac{x_1^2 + x_1 - 1}{x_1} - \frac{x_2^2 + x_2 - 1}{x_2} = \frac{mx_1 + x_1}{x_1} - \frac{mx_2 + x_2}{x_2} = \frac{(m+1)x_1}{x_1} - \frac{(m+1)x_2}{x_2} = 0$$

Vậy $A = 0$.

Bài 14. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 2m - 2 = 0$ (x là ẩn số) (1)

a) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt

b) Gọi hai nghiệm của (1) là x_1, x_2 . Tính theo m giá trị của biểu thức $A = x_1^2 + 2(m+1)x_2 + 2m - 2$

Lời giải

a) $\Delta' = m^2 + 3 > 0 \forall m$

b) Theo định lý Viète ta có: $x_1 + x_2 = 2(m+1)$

Vì x_1 là nghiệm của phương trình nên ta có:

$$x_1^2 - 2(m+1)x_1 + 2m - 2 = 0 \Rightarrow x_1^2 + 2m - 2 = 2(m+1)x_1$$

$$\Rightarrow A = 2(m+1)x_1 + 2(m+1)x_2 = 2(m+1)(x_1 + x_2) = 4(m+1)^2$$

Bài 15. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 + 2024x + 2 = 0$ và x_3, x_4 là các nghiệm của phương trình $x^2 + 2025x + 2 = 0$. Tính $A = (x_1 + x_3)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4)(x_2 - x_4)$

Lời giải

Ta có $\Delta_1, \Delta_2 > 0 \Rightarrow$ hai phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt

Theo định lý Viète ta có:

$$x_1 + x_2 = -2024; x_1 \cdot x_2 = 2$$

$$x_3 + x_4 = -2025; x_3 \cdot x_4 = 2$$

$$(x_1 + x_3)(x_1 + x_4) = x_1^2 + x_1(x_3 + x_4) + x_3x_4 = x_1^2 - 2025x_1 + 2$$

Lại có x_1 là nghiệm phương trình $x^2 + 2024x + 2 = 0$ nên

$$x_1^2 + 2024x_1 + 2 = 0$$

$$x_1^2 - 2025x_1 + 2 + 4049x_1 = 0$$

$$x_1^2 - 2025x_1 + 2 = -4049x_1$$

$$(x_1 + x_3)(x_2 + x_4) = -4049x_1 \quad (1)$$

Tương tự: $(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) = x_2^2 - x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4 = x_2^2 + 2025x_2 + 2$

Mà x_2 là nghiệm phương trình $x^2 + 2024x + 2 = 0$ nên

$$x_2^2 + 2024x_2 + 2 = 0$$

$$x_2^2 + 2025x_2 + 2 - x_2 = 0$$

$$x_2^2 + 2025x_2 + 2 = x_2$$

$$(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) = x_2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$(x_1 + x_3)(x_2 + x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) = -4049x_1 \cdot x_2$$

$$\text{hay } A = -4049x_1 \cdot x_2 = -4049 \cdot 2 = -8098$$

$$\text{Vậy } A = -8098$$

Bài 16. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - x - 1 = 0$. Không giải phương trình, chứng minh rằng $P(x_1) = P(x_2)$ với $P(x) = 3x - \sqrt{33x + 25}$

Lời giải

Ta có $a \cdot c = -1 < 0$ nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt.

Theo định lý Viète ta có: $x_1 + x_2 = 1; x_1 \cdot x_2 = -1$

Ta có:

$$P(x_1) = P(x_2)$$

$$3x_1 - \sqrt{33x_1 + 25} = 3x_2 - \sqrt{33x_2 + 25}$$

$$3(x_1 - x_2) - (\sqrt{33x_1 + 25} - \sqrt{33x_2 + 25}) = 0$$

$$3(x_1 - x_2) - \frac{33(x_1 - x_2)}{\sqrt{33x_1 + 25} + \sqrt{33x_2 + 25}} = 0$$

$$1 - \frac{11}{\sqrt{33x_1 + 25} + \sqrt{33x_2 + 25}} = 0$$

$$\sqrt{33x_1 + 25} + \sqrt{33x_2 + 25} = 11$$

$$(\sqrt{33x_1 + 25} + \sqrt{33x_2 + 25})^2 = 121$$

$$33(x_1 + x_2) + 50 + 2\sqrt{(33x_1 + 25)(33x_2 + 25)} = 121 (*)$$

$$\text{VT} (*) = 33 \cdot 1 + 50 + 2\sqrt{33^2 x_1 x_2 + 33 \cdot 25(x_1 + x_2) + 25^2} = 83 + 2\sqrt{-33^2 + 2533 + 25^2}$$

$$= 83 + 2\sqrt{361} = 83 + 83 = 121 = \text{VP}.$$

Bài 17. Cho phương trình $x^2 - 2(m-2)x + 2m - 5 = 0$ (m là tham số)

a) Tìm điều kiện của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

b) Với m vừa tìm được ở trên, tìm biểu thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m

Lời giải

a) Ta có: $\Delta' = (m-3)^2 \geq 0 \forall m \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 với mọi m khi $m \neq 3$

b) Áp dụng hệ thức Viète ta có $x_1 + x_2 = 2m - 4; x_1x_2 = 2m - 5 \Rightarrow x_1 + x_2 - x_1x_2 = 1$

Vậy biểu thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào tham số m là: $x_1 + x_2 - x_1x_2 = 1$.

Bài 18. Cho phương trình $x^2 + (m+2)x + 2m = 0$. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ? Khi đó, hãy tìm biểu thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào tham số m .

Lời giải

Ta có: $\Delta = (m+2)^2 - 8m = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 \geq 0 \forall m \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m khi $m \neq 2$

Áp dụng hệ thức Viète ta có $x_1 + x_2 = -m - 2; x_1x_2 = 2m$

$2(x_1 + x_2) = -2m - 4; x_1x_2 = 2m \Rightarrow 2(x_1 + x_2) + x_1x_2 = -4$

Biểu thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào tham số m là $2(x_1 + x_2) + x_1x_2 = -4$

DẠNG 2**GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẰNG CÁCH NHẢM NGHIỆM**

Xét phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

- Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = 1$, nghiệm còn lại là $x_2 = \frac{c}{a}$
- Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = -1$, nghiệm còn lại là $x_2 = -\frac{c}{a}$

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 8x + 7 = 0$

b) $x^2 + 4x + 3 = 0$

c) $2x^2 - 3x - 5 = 0$

Lời giải

a) $x^2 - 8x + 7 = 0$.

Ta có $a + b + c = 1 - 8 + 7 = 0$ nên phương trình có 2 nghiệm: $x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a} = 7$

Vậy nghiệm của phương trình là $x_1 = 1; x_2 = 7$

b) $x^2 + 4x + 3 = 0$

Do $a - b + c = 1 - 4 + 3 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1 = -1, x_2 = -\frac{3}{1} = -3$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x_1 = -1, x_2 = -3$

c) $2x^2 - 3x - 5 = 0$

Ta có: $a - b + c = 2 + 3 - 5 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm là: $x_1 = 1; x_2 = \frac{-5}{2}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = 1; x_2 = \frac{-5}{2}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$

b) $5x^2 + 6x - 11 = 0$

c) $2x^2 - 7x - 9 = 0$

Lời giải

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$

Ta có: $a = 1; b = -3; c = 2$ và $a + b + c = 1 - 3 + 2 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1$

và $x_2 = 2$.

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = 1; x_2 = 2$.

b) $5x^2 + 6x - 11 = 0$

Ta có $a + b + c = 5 + 6 - 11 = 0$ nên phương trình có nghiệm phân biệt $x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{11}{5}$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = 1; x_2 = -\frac{11}{5}$.

c) $2x^2 - 7x - 9 = 0$

Ta có $a - b + c = 2 - (-7) + (-9) = 0$ nên phương trình có nghiệm phân biệt $x_1 = -1; x_2 = -\frac{c}{a} = \frac{9}{2}$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = -1; x_2 = \frac{9}{2}$.

Bài 3. Xét tổng $a + b + c$ hoặc $a - b + c$ rồi tính nhằm các nghiệm của các phương trình sau

a) $15x^2 - 17x + 2 = 0$

b) $1230x^2 - 4x - 1244 = 0$

c) $(2 - \sqrt{3})x^2 + 2\sqrt{3}x - (2 + \sqrt{3}) = 0$

d) $\sqrt{5}x^2 - (2 - \sqrt{5})x - 2 = 0$

Lời giải

a) Ta có: $a + b + c = 15 - 17 + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = \frac{2}{15}$

b) Ta có: $a - b + c = 0 \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = \frac{1234}{1230}$

c) Ta có: $a + b + c = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -7 - 4\sqrt{3}$

d) Ta có: $a - b + c = 0 \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Bài 4. Xét tổng $a + b + c$ hoặc $a - b + c$ rồi tính nhằm các nghiệm của các phương trình sau

a) $7x^2 - 9x + 2 = 0$

b) $23x^2 - 9x - 32 = 0$

c) $1975x^2 + 4x - 1979 = 0$

d) $31,1x^2 - 50,9x + 19,8 = 0$

Lời giải

a) Ta có: $a + b + c = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = \frac{2}{7}$

b) Ta có: $a - b + c = 0 \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = \frac{32}{23}$

c) Ta có: $a + b + c = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = \frac{-1979}{1975}$

d) Ta có: $a + b + c = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = \frac{198}{311}$

Bài 5. Cho phương trình $(m - 2)x^2 - (2m + 5)x + m + 7 = 0$ với m là tham số

a) Chứng minh phương trình luôn có một nghiệm không phụ thuộc vào tham số m

b) Tìm các nghiệm của phương trình đã cho theo tham số m

Lời giải

a) Ta có: $a + b + c = (m - 2) + (-2m - 5) + m + 7 = 0 \Rightarrow$ phương trình luôn có nghiệm $x = 1$ không phụ thuộc vào m

b) Với $m = 2$ phương trình có một nghiệm $x = 1$

Với $m \neq 2$ phương trình có hai nghiệm $x = 1$ và $x = \frac{m+7}{m-2}$.

Bài 6. Cho phương trình $(2m - 1)x^2 - (m - 3)x - 6m - 2 = 0$ với m là tham số

a) Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có nghiệm $x = -2$

b) Tìm các nghiệm của phương trình đã cho theo tham số m .

Lời giải

a) Thay $x = -2$ vào phương trình đã cho, ta có: $(2m - 1)(-2)^2 + (m - 3)(-2) - 6m - 2 = 0$ (đúng).

Vậy $x = -2$ là nghiệm của phương trình.

b) Với $m = \frac{1}{2}$: phương trình chỉ có một nghiệm $x = -2$

Với $m \neq \frac{1}{2}$: phương trình có hai nghiệm $x = -2; x = \frac{3m+1}{2m-1}$.

DẠNG 3**TÌM HAI SỐ KHI BIẾT TỔNG VÀ TÍCH****Phương pháp:**

Để tìm hai số x, y khi biết tổng $S = x + y$ và tích $P = xy$, ta làm như sau

Bước 1: Giải phương trình $X^2 - SX + P = 0$ để tìm các nghiệm X_1, X_2

Bước 2: Khi đó các số x, y cần tìm là $x = X_1; y = X_2$ hoặc $x = X_2; y = X_1$

Chú ý: Điều kiện để có hai số đó là $S^2 - 4P \geq 0$

Bài 1. Tìm hai số u và v trong mỗi trường hợp sau:

a) $u + v = 15; uv = 36$

b) $u^2 + v^2 = 13; uv = 6$

Lời giải

a) Ta có $(u + v)^2 - 4uv = 15^2 - 4 \cdot 36 = 81 > 0$ nên u, v là hai nghiệm của phương trình sau:

$$X^2 - 15X + 36 = 0$$

$$X = 12; X = 3$$

$$\Rightarrow u = 12; v = 3 \text{ hoặc } u = 3; v = 12$$

b) Ta có $(u + v)^2 = u^2 + v^2 + 2uv = 13 + 2 \cdot 6 = 25$

$$\Rightarrow u + v = 5; u + v = -5$$

- Với $u + v = 5$ ta có $(u + v)^2 - 4uv = 25 - 4 \cdot 6 = 1 > 0$ nên u, v là hai nghiệm của phương trình sau:

$$X^2 - 5X + 6 = 0$$

$$X = 2; X = 3$$

$$\Rightarrow u = 2; v = 3 \text{ hoặc } u = 3; v = 2$$

- Với $u + v = -5$ ta có $(u + v)^2 - 4uv = 25 - 4 \cdot 6 = 1 > 0$ nên u, v là hai nghiệm của phương trình sau:

$$X^2 + 5X + 6 = 0$$

$$X = -2; X = -3$$

$$\Rightarrow u = -2; v = -3 \text{ hoặc } u = -3; v = -2$$

Vậy $(u; v) \in \{(2; 3); (3; 2); (-2; -3); (-3; -2)\}$.

Bài 2. Tìm phương trình bậc hai biết nó nhận 2024 và -1 là nghiệm.

Lời giải

Ta có tổng hai nghiệm là $S = 2024 + (-1) = 2023$ và tích hai nghiệm $P = -2024$

và $S^2 - 4P = 2024 - 4(-1) > 0$ nên phương trình cần lập là $X^2 - 2023X - 2024 = 0$.

Bài 3. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - x - 1 = 0$. Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là

- a) $x_1 + 1; x_2 + 1$ b) $x_1^2 + x_2; x_2^2 + x_1$ c) $\frac{x_1}{x_2}; \frac{x_2}{x_1}$ d) $\frac{x_2 + 1}{x_1}; \frac{x_1 + 1}{x_2}$

Lời giải

Ta có $ac = -1 < 0 \Rightarrow$ phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Theo Viète ta có: $x_1 + x_2 = 1; x_1 \cdot x_2 = -1$

a) Ta có

$$(x_1 + 1) + (x_2 + 1) = x_1 + x_2 + 1 + 1 = 3$$

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 = -1 + 1 + 1 = 1$$

$\Rightarrow x_1 + 1; x_2 + 1$ là nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 1 = 0$

b) Ta có

$$(x_1^2 + x_2) + (x_2^2 + x_1) = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + x_1 + x_2 = 4$$

$$(x_1^2 + x_2)(x_2^2 + x_1) = x_1^2 x_2^2 + x_1^3 + x_2^3 + x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 4$$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2; x_2^2 + x_1$ là nghiệm của phương trình $x^2 - 4x + 4 = 0$

c) Ta có

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + x_2 + x_1}{x_1 x_2} = -4$$

$$\frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_1} = 1$$

$\Rightarrow \frac{x_1}{x_2}; \frac{x_2}{x_1}$ là nghiệm của phương trình $x^2 + 4x + 1 = 0$

d) Ta có

$$\frac{x_2 + 1}{x_1} + \frac{x_1 + 1}{x_2} = \frac{x_2(x_2 + 1) + x_1(x_1 + 1)}{x_1 x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 4$$

$$\frac{x_2 + 1}{x_1} \cdot \frac{x_1 + 1}{x_2} = \frac{x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1}{x_1 x_2} = -1$$

$\Rightarrow \frac{x_2 + 1}{x_1}; \frac{x_1 + 1}{x_2}$ là nghiệm của phương trình $x^2 - 4x - 1 = 0$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Tìm hai số biết:

a) Tổng bằng 4 và tích bằng 1

b) Tổng bằng 6 và tích bằng 9

Lời giải

a) Ta có $S^2 - 4P = 4^2 - 4 \cdot 1 > 0$

Do đó hai số cần tìm là nghiệm của phương trình: $X^2 - 4X + 1 = 0$

$$\Rightarrow x_1 = 2 + \sqrt{5}; x_2 = 2 - \sqrt{5}$$

b) Ta có $S^2 - 4P = 6^2 - 4 \cdot 9 = 0$

Do đó hai số cần tìm là nghiệm của phương trình: $X^2 - 6X + 9 = 0$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = 3$$

Bài 5. Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $2 + \sqrt{3}$ và $2 - \sqrt{3}$

Lời giải

a) Ta có:

$$(2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$$

$$(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$$

Do đó $2 + \sqrt{3}$ và $2 - \sqrt{3}$ là hai nghiệm của phương trình sau: $X^2 - 4X + 1 = 0$

Bài 6. Cho phương trình $x^2 + 5x - 3m = 0$ (m là tham số)

a) Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm là x_1 và x_2

b) Với điều kiện m tìm được ở câu a), hãy lập một phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\frac{2}{x_1^2}$ và $\frac{2}{x_2^2}$

Lời giải

a) Ta có: $\Delta = 25 + 12m$

để phương trình có hai nghiệm là x_1 và x_2 thì:

$$\Delta \geq 0$$

$$25 + 12m \geq 0$$

$$m \geq \frac{-25}{12}$$

b) Ta có:

$$S = \frac{2}{x_1^2} + \frac{2}{x_2^2} = \frac{2(x_1^2 + x_2^2)}{(x_1 x_2)^2} = \frac{50 + 12m}{9m^2}$$

$$P = \frac{2}{x_1^2} \cdot \frac{2}{x_2^2} = \frac{4}{(x_1 x_2)^2} = \frac{4}{9m^2}$$

Với điều kiện: $0 \neq m \geq \frac{-25}{12}$ thì ta có $\frac{2}{x_1^2}$ và $\frac{2}{x_2^2}$ là hai nghiệm của phương trình bậc hai sau:

$$X^2 - \frac{50 + 12m}{9m^2}X + \frac{4}{9m^2} = 0$$

$$9m^2 X^2 - 2(6m + 25)X + 4 = 0$$

Bài 7. Cho phương trình $3x^2 + 5x - m = 0$ (m là tham số)

a) Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm là x_1 và x_2

b) Với điều kiện m tìm được ở câu a) hãy viết phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\frac{x_1}{x_2+1}$ và $\frac{x_2}{x_1+1}$

Lời giải

a) Điều kiện của m là: $m \geq \frac{-25}{12}$

b) Phương trình cần lập là: $X^2 + \frac{10+6m}{3m+6}X + \frac{m}{m+2} = 0 \left(-2 \neq m \geq \frac{-25}{12} \right)$

Bài 8. Tìm hai số x và y , biết:

a) Tổng của chúng bằng 4 và tổng bình phương bằng 10

b) Tổng của chúng bằng 3 và tổng lập phương bằng 9

c) Tích của chúng bằng 2 và tổng lập phương bằng -9

d) Tích của chúng bằng -2 , tổng lập phương bằng -7

Lời giải

a)

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ (x + y)^2 - 2xy = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X^2 - 4X + 3 = 0 \Rightarrow X = 1; X = 3$$

Vậy hai số cần tìm là 1 và 3.

b)

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x^3 + y^3 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X^2 - 3X + 2 = 0 \Rightarrow X = 1; X = 2$$

c)

$$\begin{cases} xy = 2 \\ (x + y)^3 - 3xy(x + y) = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 2 \\ (x + y)^3 - 6(x + y) + 9 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Giải } (x + y)^3 - 6(x + y) + 9 = 0$$

Đặt $t = x + y$

$$(x + y)^3 - 6(x + y) + 9 = 0$$

$$t^3 - 6t + 9 = 0$$

$$(t + 3)(t^2 - 3t + 3) = 0$$

$$t = -3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = -3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X^2 + 3X + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = -2$$

Vậy hai số cần tìm là -1 và -2 .

$$\begin{cases} xy = -2 \\ x^3 + y^3 = -7 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} xy = -2 \\ (x + y)^3 + 6(x + y) + 7 = 0 \end{cases}$$

Giải $(x + y)^3 + 6(x + y) + 7 = 0$

Đặt $t = x + y$

$$t^3 + 6t + 7 = 0$$

$$t = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xy = -2 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X^2 + X - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1; x = -2$$

Vậy hai số cần tìm là 1 và -2 .

Bài 9. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 4x + 1 = 0$. Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là:

a) $3x_1 - 2x_2; 3x_2 - 2x_1$

b) $x_1^2 - x_2; x_2^2 - x_1$

c) $\frac{x_1}{x_2 + 1}; \frac{x_2}{x_1 + 1}$

d) $\frac{x_2^2 + x_1}{x_1}; \frac{x_1^2 + x_2}{x_2}$

e) $x_2^2 + 5x_1 + 1; x_1^2 + 5x_2 + 1$

f) $|2x_1 - x_2|; |2x_2 - x_1|$

Lời giải

Ta có: $\Delta = 3 > 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = 1 \end{cases}$$

a)

$$3x_1 - 2x_2 + 3x_2 - 2x_1 = x_1 + x_2 = 4$$

$$(3x_1 - 2x_2)(3x_2 - 2x_1) = 13x_1x_2 - 6(x_1^2 + x_2^2) = 25x_1x_2 - 6(x_1 + x_2)^2 = -71$$

Vậy phương trình bậc hai cần tìm là: $x^2 - 4x - 71 = 0$

$$b) x_1^2 - x_2 + x_2^2 - x_1 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - (x_1 + x_2) = 10$$

$$(x_1^2 - x_2)(x_2^2 - x_1) = x_1^2x_2^2 - (x_1^3 + x_2^3) + x_1x_2 = 2 - (x_1 + x_2)^3 + 3x_1x_2(x_1 + x_2) = -50$$

Vậy phương trình bậc hai cần tìm là: $x^2 - 10x - 50 = 0$

$$c) \frac{x_1}{x_2 + 1} + \frac{x_2}{x_1 + 1} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + x_1 + x_2}{x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1} = 3$$

$$\frac{x_1}{x_2 + 1} \cdot \frac{x_2}{x_1 + 1} = \frac{x_1x_2}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} = \frac{1}{x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + \frac{1}{6} = 0$$

$$d) \frac{x_2^2 + x_1}{x_1} + \frac{x_1^2 + x_2}{x_2} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1x_2} + 2 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) + 2 = 54$$

$$\frac{x_2^2 + x_1}{x_1} \cdot \frac{x_1^2 + x_2}{x_2} = \frac{(x_2^2 + x_1)(x_1^2 + x_2)}{x_1x_2} = x_1^2x_2^2 + x_1^3 + x_2^3 + x_1x_2 = 2 + (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 54$$

Vậy phương trình bậc hai cần tìm là: $x^2 - 54x + 54 = 0$

$$e) x_2^2 + 5x_1 + 1; x_1^2 + 5x_2 + 1$$

Ta có x_1 là nghiệm của phương trình $\Rightarrow x_1^2 = 4x_1 - 1 \Rightarrow x_1^2 + 5x_2 + 1 = 4x_1 - 1 + 5x_2 + 1 = x_2 + 16$

Tương tự: $x_2^2 + 5x_1 + 1 = x_1 + 16$

Mà

$$(x_1 + 16) + (x_2 + 16) = x_1 + x_2 + 32 = 36$$

$$(x_1 + 16)(x_2 + 16) = x_1x_2 + 16(x_1 + x_2) + 16^2 = 321$$

Vậy phương trình bậc hai cần tìm là: $x^2 - 36x + 321 = 0$

$$f) |2x_1 - x_2| \cdot |2x_2 - x_1| = |5x_1x_2 - 2(x_1^2 + x_2^2)| = |9x_1x_2 - 2(x_1 + x_2)^2| = 23$$

Đặt

$$a = |2x_1 - x_2| + |2x_2 - x_1|, a \geq 0$$

$$a^2 = (2x_1 - x_2)^2 + (2x_2 - x_1)^2 + 2|2x_1 - x_2| \cdot |2x_2 - x_1|$$

$$= 5(x_1^2 + x_2^2) - 8x_1x_2 + 46 = 5(x_1 + x_2)^2 - 18x_1x_2 + 46 = 108 \rightarrow a = 6\sqrt{3}$$

Vậy phương trình bậc hai cần tìm là: $x^2 - 6\sqrt{3}x + 23 = 0$

Bài 10. Cho $a = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}, b = \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$. Chứng minh rằng a, b là hai nghiệm của phương trình bậc hai với hệ số nguyên

Lời giải

Ta có

$$a + b = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = \sqrt{(3 + \sqrt{2})^2} + \sqrt{(3 - \sqrt{2})^2} = 6$$

$$ab = \sqrt{121 - 72} = 7$$

Vậy a, b là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 6x + 7 = 0$ (dpcm)

Bài 11. Cho $c = \sqrt[3]{6\sqrt{3} + 10}, d = \sqrt[3]{6\sqrt{3} - 10}$. Chứng minh rằng c^2, d^2 là hai nghiệm của một phương trình bậc hai với hệ số nguyên.

Lời giải

$$c^2 = \sqrt[3]{20 + 120\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(4 + 2\sqrt{3})^3} = 4 + 2\sqrt{3}$$

$$d^2 = \sqrt[3]{(4 - 2\sqrt{3})^3} = 4 - 2\sqrt{3}$$

Ta có

$$c^2 + d^2 = 8$$

$$c^2 \cdot d^2 = 16 - 12 = 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 4 = 0$$

Bài 12. Cho a và b là hai số thỏa mãn đẳng thức $a^2 + b^2 + 3ab - 8a - 8b - 2\sqrt{3ab} + 19 = 0$

Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm a và b .

Lời giải

Ta có

$$a^2 + b^2 + 3ab - 8a - 8b - 2\sqrt{3ab} + 19 = 0$$

$$(a + b)^2 - 8(a + b) + 16 + ab - 2\sqrt{3ab} + 3 = 0$$

$$(a + b - 4)^2 + (\sqrt{ab} - \sqrt{3})^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b - 4 = 0 \\ \sqrt{ab} - \sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ ab = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

DẠNG 4

XÉT DẤU CÁC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Dấu nghiệm số của phương trình bậc hai

Cho phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) (1)

- phương trình (1) có nghiệm $\Delta \geq 0$.
- phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Delta > 0$.
- phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0$
- phương trình (1) có hai nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$
- phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$
- phương trình (1) có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

Chú ý: Khi so sánh của phương trình bậc 2 với giá trị m ta cần chú ý đến các điều kiện ràng buộc sau:

- Nếu: $x_1 \leq m \leq x_2 \Leftrightarrow (x_1 - m)(x_2 - m) \leq 0$.
- Nếu $m \leq x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2m \\ (x_1 - m)(x_2 - m) \geq 0 \end{cases}$
- Nếu $x_1 \leq x_2 \leq m \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2m \\ (x_1 - m)(x_2 - m) \geq 0 \end{cases}$

Bài 1. Không giải phương trình, cho biết dấu các nghiệm của các phương trình sau:

a) $x^2 - 13x + 20 = 0$

b) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

c) $5x^2 + 7x + 1 = 0$

Lời giải

a) $x^2 - 13x + 20 = 0$

Ta có:
$$\begin{cases} P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 20 > 0 \\ S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 13 > 0 \end{cases}$$

Vì $P > 0$ nên hai nghiệm x_1, x_2 cùng dấu và $S > 0$ nên hai nghiệm cùng dấu dương.

b) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

Ta có: $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{2}{3} < 0$ nên hai nghiệm x_1, x_2 trái dấu.

c) $5x^2 + 7x + 1 = 0$

Ta có:
$$\begin{cases} P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{5} > 0 \\ S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-7}{5} < 0 \end{cases}$$

Vì $P > 0$ nên hai nghiệm x_1, x_2 cùng dấu và $S < 0$ nên hai nghiệm cùng dấu âm.

Bài 2. Cho phương trình $x^2 + (2m - 1)x + m^2 - 4m + 7 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình đã cho có nghiệm.

Lời giải

$$x^2 + (2m - 1)x + m^2 - 4m + 7 = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (2m - 1)^2 - 4(m^2 - 4m + 7) \\ &= 4m^2 - 4m + 1 - 4m^2 + 16m - 28 \\ &= 12m - 27 \end{aligned}$$

Phương trình (1) có nghiệm khi

$$\Delta \geq 0$$

$$12m - 27 \geq 0$$

$$12m \geq 27$$

$$m \geq \frac{9}{4}$$

Vậy với $m \geq \frac{9}{4}$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

Bài 3. Cho phương trình $x^2 - 2mx + (5m - 4) = 0$, với m là tham số. Xác định các giá trị của m để phương trình có:

- Nghiệm bằng 0.
- Hai nghiệm phân biệt trái dấu.
- Hai nghiệm phân biệt cùng dương.

Lời giải

a) Phương trình có nghiệm $x = 0$ nên thay vào phương trình ta được:

$$5m - 4 = 0$$

$$m = \frac{4}{5}$$

b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt trái dấu khi

$$1. (5m - 4) < 0$$

$$m < \frac{4}{5}$$

c) Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi

$$\Delta' > 0$$

$$m^2 - (5m - 4) > 0$$

$$(m - 1)(m - 4) > 0$$

$$m > 4 \text{ hoặc } m < 1.$$

Theo hệ thức Viète ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 \cdot x_2 = 5m - 4 \end{cases}$$

Hai nghiệm của phương trình cùng dương khi

$$2m > 0 \text{ và } 5m - 4 > 0$$

$$\Rightarrow m > \frac{4}{5}$$

Kết hợp với điều kiện ta có $\frac{4}{5} < m < 1$ hoặc $m > 4$.

Bài 4. Cho phương trình $x^2 - x + 3m = 0$, với m là tham số. Xác định các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 1 < x_2$.

Lời giải

Cách 1. Đặt $x - 1 = t$, ta có

$$x_1 < 1 < x_2$$

$$x_1 - 1 < 0 < x_2 - 1$$

$$t_1 < 0 < t_2$$

Phương trình ẩn x là $x^2 - x + 3m = 0$ được đưa về phương trình ẩn t :

$$(t + 1)^2 - (t + 1) + 3m = 0$$

$$t^2 + t + 3m = 0$$

Phương trình ẩn t phải có hai nghiệm trái dấu khi

$$3m < 0$$

$$m < 0$$

Vậy $m < 0$

Cách 2: Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi

$$\Delta > 0$$

$$1 - 12m > 0$$

$$m < \frac{1}{12}$$

Khi đó theo hệ thức Viète ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \cdot x_2 = 3m \end{cases} \quad (1).$$

Hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < 0 < x_2 - 1 \Rightarrow x_1 - 1$ và $x_2 - 1$ trái dấu khi

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0$$

$$x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta có:

$$3m - 1 + 1 < 0$$

$$m < 0$$

Kết hợp với điều kiện ta có $m < 0$ là các giá trị cần tìm.

Chú ý:

Nếu hai nghiệm $x_1, x_2 < 1$ thì phương trình ẩn t có hai nghiệm đều là số âm.

Nếu hai nghiệm $x_1, x_2 > 1$ thì phương trình ẩn t có hai nghiệm đều là số dương.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình:

a) $x^2 - 2(m-1)x + m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu

b) $x^2 - 8x + 2m + 6 = 0$ có hai nghiệm phân biệt

c) $x^2 - 6x + 2m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dương

d) $x^2 - 2(m-1)x - 3 - m = 0$ có đúng một nghiệm dương

Lời giải

a) Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow m < -1$

b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = 8^2 - 4(2m + 6) > 0 \Leftrightarrow m < 5$

c) Phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 32 - 8m > 0 \\ 6 > 0 \\ 2m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-1}{2} < m < 4$

d) Vì $\Delta = 4(m-1)^2 - 4(-3-m) = (2m-1)^2 + 15 > 0, \forall m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt

Phương trình có đúng một nghiệm dương $ac = -3 - m < 0 \Leftrightarrow m > -3$

Bài 6. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình:

a) $2x^2 - 3(m+1)x + m^2 - m - 2 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

b) $3mx^2 + 2(2m+1)x + m = 0$ có hai nghiệm âm

c) $x^2 + mx + m - 1 = 0$ có hai nghiệm lớn hơn m

d) $mx^2 - 2(m-2)x + 3(m-2) = 0$ có hai nghiệm cùng dấu.

Lời giải

- a) Phương trình có hai nghiệm trái dấu khi $-1 < m < 2$
- b) Phương trình có hai nghiệm âm khi $m > 0$ hoặc $m \leq -2 - \sqrt{3}$
- c) Phương trình có hai nghiệm lớn hơn m khi $m < -1$
- d) Phương trình có hai nghiệm cùng dấu khi $-1 \leq m < 0$

Bài 7. Cho phương trình $x^2 - x + m = 0$ (1) (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2 < 2$

Lời giải

Cách 1: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = 1 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{4}$ (*)

$$\text{Khi đó: } x_1 < x_2 < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2 < 0 \\ x_2 - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2 + x_2 - 2 < 0 \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 4 < 0 \\ x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4 < 0 \\ m - 2 + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2.$$

Kết hợp với (*) ta được: $-2 < m < \frac{1}{4}$

Cách 2: Vì $x_2 > x_1 \Rightarrow x_2 = \frac{1 + \sqrt{\Delta'}}{2} \Rightarrow x_1 < x_2 < 2 \Leftrightarrow x_2 < 2 \Leftrightarrow \frac{1 + \sqrt{\Delta'}}{2} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta'} < 3 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta'} < 9$

$$\Leftrightarrow 1 - 4m < 9 \Leftrightarrow m > -2$$

Kết hợp với (*) ta được: $-2 < m < \frac{1}{4}$

DẠNG 5**XÁC ĐỊNH ĐIỀU KIỆN THAM SỐ ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC****Phương pháp**

Ta thực hiện theo các bước sau

Bước 1: Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm $\Delta \geq 0$

Bước 2: Từ hệ thức đã cho và hệ thức Viète, tìm được điều kiện của tham số.

Bước 3: Kiểm tra điều kiện của tham số có thỏa mãn điều kiện ở bước 1 hay không rồi kết luận.

Bài 1. Cho phương trình $2x^2 + 4x + m = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 10$

Lời giải

Ta có: $2x^2 + 4x + m = 0$ (*)

$$\Delta' = 2^2 - 2.m$$

$$\Delta' = 4 - 2m$$

Phương trình (*) có hai nghiệm x_1, x_2 khi $\Delta' \geq 0$

$$4 - 2m \geq 0$$

$$m \leq 2$$

Với $m \leq 2$ thì phương trình (*) có hai nghiệm x_1, x_2

$$\text{Theo hệ thức Viète: } x_1 + x_2 = \frac{-4}{2} = -2; x_1 \cdot x_2 = \frac{m}{2}$$

Theo đề bài:

$$x_1^2 + x_2^2 = 10$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10$$

$$(-2)^2 - 2 \cdot \frac{m}{2} = 10$$

$$4 - m = 10$$

$$m = -6 \text{ (nhận)}$$

Bài 2. Cho phương trình: $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ (x là ẩn số, m là tham số). Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 + x_1^2 x_2^2 - 14 = 0$

Lời giải:

Ta có: $\Delta' = (-1)^2 - m + 1 = 2 - m$

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ khi

$$\Delta' > 0$$

$$2 - m > 0$$

$$m < 2$$

Theo Viète ta có: $x_1 + x_2 = 2; x_1 x_2 = m - 1$

Mà:

$$x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 + x_1^2 x_2^2 - 14 = 0$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 + x_1^2 x_2^2 - 14 = 0$$

$$(2)^2 - 3(m - 1) + (m - 1)^2 - 14 = 0$$

$$4 - 3m + 3 + m^2 - 2m + 1 - 14 = 0$$

$$m^2 - 5m - 6 = 0$$

$$(m + 1)(m - 6) = 0$$

$$m = -1 \text{ (nhận) hoặc } m = 6 \text{ (loại)}$$

Vậy $m = -1$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài 3. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình: $x^2 - mx + m - 2 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn: $x_1 - x_2 = 2\sqrt{5}$.

Lời giải

Phương trình $x^2 - mx + m - 2 = 0$ có 2 nghiệm khi và chỉ khi $\Delta > 0$.

$$(-m)^2 - 4(m - 2) > 0$$

$$m^2 - 4m + 8 > 0$$

$$(m - 2)^2 + 4 > 0 \text{ (luôn đúng).}$$

Do đó phương trình đã cho luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Theo hệ thức Viète ta có: $x_1 + x_2 = m; x_1 x_2 = m - 2$.

Theo bài ra ta có:

$$x_1 - x_2 = 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)^2 = 20$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 = 20$$

$$(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2) - 4x_1x_2 = 20$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 20$$

$$m^2 - 4(m - 2) = 20$$

$$m^2 - 4m - 12 = 0(1)$$

Ta có $\Delta'_m = 2^2 - 1 \cdot (-12) = 16 > 0$ nên phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

$$m_1 = \frac{2 + \sqrt{16}}{1} = 6; m_2 = \frac{2 - \sqrt{16}}{1} = -2.$$

Bài 4. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m = 0$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ (với $x_1 < x_2$) thỏa mãn: $|x_1| = 3|x_2|$.

Lời giải.

Phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m = 0(1)$

Phương trình (1) là phương trình bậc hai ẩn x có:

$$\Delta' = [-(m+1)]^2 - (m^2 + 2m) = m^2 + 2m + 1 - m^2 - 2m = 1 > 0$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ với mọi m , mà $x_1 < x_2$ nên:

$$x_1 = m + 1 - 1 = m$$

$$x_2 = m + 1 + 1 = m + 2$$

$$x_1; x_2 \text{ thỏa mãn: } |x_1| = 3|x_2| \Rightarrow |m| = 3|m + 2|$$

$$m = 3(m + 2) \text{ hoặc } m = -3(m + 2)$$

$$3m + 6 = m \text{ hoặc } m = -3m - 6$$

$$m = -3 \text{ (thỏa } x_1 < x_2 \text{)} \text{ hoặc } m = \frac{-3}{2} \text{ (thỏa } x_1 < x_2 \text{)}$$

Vậy tất cả các giá trị của m thỏa mãn đề bài là: $m = -3$ và $m = -\frac{3}{2}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Cho phương trình $x^2 - 4x + m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 14$.

Lời giải

Ta có: $\Delta' = 2^2 - (m - 1) = 5 - m$

Để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thì $\Delta' \geq 0$ hay $m \leq 5$

Áp dụng định lý Viète ta có: $x_1 + x_2 = 4; x_1x_2 = m - 1$

Theo bài ta ta có:

$$x_1^2 + x_2^2 = 14$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 14$$

$$4^2 - 2(m-1) = 14$$

$$m = 2 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy với $m = 2$ thì phương trình $x^2 - 4x + m - 1 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 14$.

Bài 6. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2mx + 4m - 4 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 - 8 = 0$.

Lời giải

Xét phương trình $x^2 - 2mx + 4m - 4 = 0$

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 khi

$$\Delta' > 0$$

$$m^2 - 4m + 4 > 0$$

$$(m-2)^2 > 0$$

$$m-2 \neq 0$$

$$m \neq 2$$

Với $m \neq 2$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 .

Áp dụng hệ thức Viète ta có: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 2m; x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 4m - 4$

Theo đề bài ta có:

$$x_1^2 + x_2^2 - 8 = 0$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 8 = 0$$

$$(2m)^2 - 2 \cdot (4m - 4) - 8 = 0$$

$$4m^2 - 8m + 8 - 8 = 0$$

$$4m^2 - 8m = 0$$

$$4m(m-2) = 0$$

$$4m = 0 \text{ hoặc } m - 2 = 0$$

$m = 0$ (thỏa mãn điều kiện) hoặc $m = 2$ (không thỏa mãn điều kiện)

Vậy $m = 0$.

Bài 7. Cho phương trình $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $x_1^4 - x_1^3 = x_2^4 - x_2^3$.

Lời giải

Phương trình $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ có $\Delta' = 1 - m + 1 = 2 - m$.

Phương trình đã cho có nghiệm khi

$$\Delta' \geq 0$$

$$2 - m \geq 0.$$

$$m \leq 2$$

Khi đó theo định lý Viète ta có: $x_1 + x_2 = 2; x_1 x_2 = m - 1$

Do x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ nên ta có:
$$\begin{cases} x_1^2 = 2x_1 - m + 1 \\ x_2^2 = 2x_2 - m + 1 \end{cases}$$

Theo bài ra ta có:

$$x_1^4 - x_1^3 = x_2^4 - x_2^3$$

$$x_1^4 - x_2^4 - (x_1^3 - x_2^3) = 0$$

$$(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 - x_2^2) - (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = 0$$

$$(2(x_1 + x_2) - 2m + 2)(2x_1 - m + 1 - 2x_2 + m - 1) - (x_1 - x_2)[2(x_1 + x_2) - 2m + 2 + m - 1] = 0$$

$$(2 \cdot 2 - 2m + 2) \cdot 2(x_1 - x_2) - (x_1 - x_2)(2 \cdot 2 - m + 1) = 0$$

$$(x_1 - x_2)(2(6 - 2m) - 5 + m) = 0$$

$$(x_1 - x_2)(3m + 7) = 0$$

$$x_1 = x_2; m = \frac{7}{3}(k \text{ tm})$$

Thay $x_1 = x_2$ vào (1) ta được:

$$\begin{cases} 2x_1 = 2 \\ x_1^2 = m - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ m = 2(\text{tm}) \end{cases}$$

Vậy $m = 2$.

Bài 8. Cho phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 2 = 0$, với m là tham số. Tìm giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 3x_2 = 6$.

Lời giải

$x^2 - 2mx + 2m - 2 = 0$, với m là tham số.

$$\Delta' = (-m)^2 - (2m - 2) = m^2 - 2m + 2 = (m - 1)^2 + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Suy ra pt có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

Theo Viète ta có: $x_1 + x_2 = 2m; x_1 x_2 = 2m - 2$

Theo đề, ta có : $x_1 + 3x_2 = 6$

Giải hệ pt

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 3 - m \\ x_1 = 3m - 3 \end{cases}$$

Thay $\begin{cases} x_2 = 3 - m \\ x_1 = 3m - 3 \end{cases}$ vào $x_1 x_2 = 2m - 2$, ta được:

$$(3m - 3)(3 - m) = 2m - 2$$

$$3m^2 - 10m + 7 = 0$$

Phương trình có dạng $a + b + c = 3 - 10 + 7 = 0$.

Suy ra $m = 1$ hoặc $m = \frac{7}{3}$.

Vậy giá trị cần tìm là $m = 1$ hoặc $m = \frac{7}{3}$.

Bài 9. Cho phương trình $x^2 - 2mx - 1 = 0$ (1) với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = 7$

Lời giải

Phương trình (1) có $\Delta' = m^2 + 1 > 0, \forall m$ nên phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Khi đó áp dụng định lý Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = 2m; x_1 x_2 = -1$.

Theo bài ra ta có:

$$x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = 7$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - x_1 x_2 = 7$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 = 7$$

$$4m^2 + 3 = 7$$

$$4m^2 = 4$$

$$m = \pm 1$$

Vậy $m = \pm 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 10. Cho phương trình: $x^2 - 3x + m = 0$ (1) (x là ẩn số).

a) Giải phương trình (1) khi $m = 2$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm.

c) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn đẳng thức:

$$x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 - 2x_1^2 x_2^2 = 5.$$

Lời giải

a) Giải phương trình (1) khi $m = 2$.

+ Khi $m = 2$, phương trình đã cho trở thành: $x^2 - 3x + 2 = 0$.

+ Ta có: $a + b + c = 1 + (-3) + 2 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = 2$.

Vậy khi $m = 2$ thì phương trình (1) có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = 2$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm.

+ Ta có: $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = 9 - 4m$.

+ Để phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\Delta \geq 0$$

$$9 - 4m \geq 0$$

$$4m \leq 9$$

$$m \leq \frac{9}{4}$$

Vậy khi $m \leq \frac{9}{4}$ thì phương trình (1) có nghiệm.

c) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn đẳng thức:

$$x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 - 2x_1^2 x_2^2 = 5.$$

+) Theo câu b) phương trình (1) có nghiệm x_1, x_2 khi $m \leq \frac{9}{4}$ (*).

Khi đó theo định lý Viète, ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 3; x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = m$.

Ta có: $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 - 2x_1^2 x_2^2 = 5$

$$x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) - 2(x_1 x_2)^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] - 2(x_1 x_2)^2 = 5$$

$$m(3^2 - 2m) - 2m^2 = 5$$

$$9m - 2m^2 - 2m^2 = 5$$

$$4m^2 - 9m + 5 = 0$$

$$4m^2 - 4m - 5m + 5 = 0$$

$$4m(m-1) - 5(m-1) = 0$$

$$(m-1)(4m-5) = 0$$

$$m = 1 \text{ hoặc } m = \frac{5}{4}.$$

Đối chiếu với điều kiện (*) ta được các giá trị cần tìm của m là $m = 1$ và $m = \frac{5}{4}$.

Bài 11. Cho phương trình: $x^2 - (m + 2)x + m + 1 = 0$ (1)

a) Giải pt (1) với $m = -3$.

b) Chứng tỏ pt (1) luôn có nghiệm với mọi số thực m .

c) Tìm m để pt có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài đường cao ứng với cạnh huyền là $h = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

a) Giải pt (1) với $m = -3$.

Khi $m = -3$ pt (1) trở thành: $x^2 + x - 2 = 0$. Vì $1 + 1 + (-2) = 0$ nên pt có hai nghiệm $x_1 = 1; x_2 = -2$

b) Chứng tỏ pt (1) luôn có nghiệm với mọi số thực m .

Ta có: $\Delta = [-(m + 2)]^2 - 4(m + 1) = m^2 + 4m + 4 - 4m - 4 = m^2 \geq 0$ với mọi m

Vậy pt (1) luôn có nghiệm với mọi số thực m .

c) Tìm m để pt có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài đường cao ứng với cạnh huyền là $h = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Theo câu b ta có: $\Delta = m^2$

Pt (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m^2 > 0 \\ m + 2 > 0 \\ m + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ m > -1 \end{cases}$$

Mặt khác tam giác vuông có đường cao ứng với cạnh huyền $h = \frac{2}{\sqrt{5}}$ nên áp dụng hệ thức $\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$

ta có:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}$$

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{5}{4}$$

$$4[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] = 5(x_1 x_2)^2$$

$$4[(m+2)^2 - 2(m+1)] = 5(m+1)^2$$

$$m^2 + 2m - 3 = 0$$

$$m = 1; m = -3$$

Đổi chiều điều kiện ta được $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Bài 12. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 = 0$ (m là tham số)

a) Giải phương trình với $m = 1$.

b) Tìm giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 + 6 = 4x_1 x_2$

Lời giải

Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 = 0$ (m là tham số)

a) Giải phương trình với $m = 1$.

Với $m = 1$, phương trình đã cho trở thành $x^2 - 4x + 1 = 0$.

Ta có $\Delta' = 2^2 - 1 = 3 > 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = 2 + \sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = 2 - \sqrt{3}$$

Vậy khi $m = 1$ thì nghiệm của phương trình là $x_1 = 2 + \sqrt{3}; x_2 = 2 - \sqrt{3}$.

b) Tìm giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 + 6 = 4x_1 x_2$

Ta có: $\Delta' = (m+1)^2 - m^2 = 2m+1$.

Để phương trình đã cho có 2 nghiệm x_1, x_2 thì

$$\Delta' \geq 0$$

$$2m+1 \geq 0.$$

$$m \geq -\frac{1}{2}$$

Khi đó áp dụng định lý Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = 2(m+1); x_1 x_2 = m^2$.

Theo bài ra ta có:

$$x_1^2 + x_2^2 + 6 = 4x_1x_2$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 6 = 4x_1x_2$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 6x_1x_2 + 6 = 0$$

$$4(m+1)^2 - 6m^2 + 6 = 0$$

$$-2m^2 + 8m + 10 = 0(1)$$

Ta có $a - b + c = -2 - 8 + 10 = 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$m_1 = -1(ktm); m_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{10}{-2} = 5(tm).$$

Vậy có 1 giá trị của m thỏa mãn là $m = 5$.

Bài 13. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2 = 0$ (1) (x là tham số, m là tham số).

a) Giải phương trình (1) khi $m = 1$

b) Xác định các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện:

$$x_1^2 + 2(m+1)x_2 = 12m + 2$$

Lời giải

a) Thay $m = 1$ vào phương trình (1) ta có:

$$x^2 - 2(1+1)x + 1^2 + 2 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Phương trình có: $a + b + c = 1 - 4 + 3 = 0$

\Rightarrow Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1$ và $x_2 = \frac{c}{a} = 3$.

Vậy với $m = 1$ thì phương trình có tập nghiệm là: $S = \{1; 3\}$.

b) Xét phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2 = 0$ (1)

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi

$$\Delta' > 0$$

$$(m+1)^2 - (m^2 + 2) > 0$$

$$m^2 + 2m + 1 - m^2 - 2 > 0$$

$$2m - 1 > 0$$

$$m > \frac{1}{2}$$

Với $m > \frac{1}{2}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Áp dụng định lí Viète ta có: $x_1 + x_2 = 2(m + 1); x_1x_2 = m^2 + 2$.

Theo đề bài ta có:

$$x_1^2 + 2(m + 1)x_2 = 12m + 2$$

$$x_1^2 + (x_1 + x_2)x_2 = 12m + 2$$

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 12m + 2$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + x_1x_2 = 12m + 2$$

$$(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 = 12m + 2$$

$$4(m + 1)^2 - (m^2 + 2) = 12m + 2$$

$$4m^2 + 8m + 4 - m^2 - 2 = 12m + 2$$

$$3m^2 - 4m = 0$$

$$m(3m - 4) = 0$$

$$m = 0(ktm); m = \frac{4}{3}(tm)$$

Vậy $m = \frac{4}{3}$ là thỏa mãn bài toán.

Bài 14. Cho phương trình $x^2 - 6x + m + 4 = 0$ (1) (m là tham số).

a) Giải phương trình (1) khi $m = 1$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

$$2020(x_1 + x_2) - 2021x_1x_2 = 2014.$$

Lời giải

Xét phương trình $x^2 - 6x + m + 4 = 0$ (1) (m là tham số).

a) Khi $m = 1$, ta có

$$x^2 - 6x + 1 + 4 = 0$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

Vì $a + b + c = 1 + (-6) + 5 = 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a} = 5$.

Vậy $m = 1$ thì phương trình có nghiệm là $x_1 = 1; x_2 = 5$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

$$2020(x_1 + x_2) - 2021x_1x_2 = 2014.$$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì

$$\Delta' > 0$$

$$(-3)^2 - 1(m+4) > 0$$

$$9 - m - 4 > 0$$

$$-m > -5$$

$$m < 5$$

Khi đó theo hệ thức Viète, ta có $x_1 + x_2 = 6; x_1 x_2 = m + 4$.

$$\text{Theo bài ra: } 2020(x_1 + x_2) - 2021x_1 x_2 = 2014$$

$$2020 \cdot 6 - 2021 \cdot (m + 4) = 2014$$

$$12120 - 2021m - 8084 = 2014$$

$$-2021m = -2022$$

$$m = \frac{2022}{2021} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $m = \frac{2022}{2021}$ là giá trị cần tìm.

Bài 15. Cho phương trình (ẩn x): $x^2 - 2(m+2)x + m^2 + 7 = 0$.

a) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình. Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = x_1 x_2 + 12$.

Lời giải

a) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Phương trình $x^2 - 2(m+2)x + m^2 + 7 = 0$ có:

$$\Delta' = (m+2)^2 - m^2 - 7 = 4m - 3.$$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi

$$\Delta' > 0$$

$$4m - 3 > 0.$$

$$m > \frac{3}{4}$$

Vậy với $m > \frac{3}{4}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình. Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = x_1 x_2 + 12$.

Với $m > \frac{3}{4}$, theo định lý Viète ta có: $x_1 + x_2 = 2m + 4; x_1 x_2 = m^2 + 7$

Theo bài ra ta có:

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1 x_2 + 12$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = x_1 x_2 + 12$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 - 12 = 0$$

$$(2m + 4)^2 - 3(m^2 + 7) - 12 = 0$$

$$4m^2 + 16m + 16 - 3m^2 - 21 - 12 = 0$$

$$m^2 + 16m - 17 = 0$$

Ta có $a + b + c = 1 + 16 - 17 = 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$m = 1(tm); m = \frac{c}{a} = -17(ktm).$$

Vậy $m = 1$.

Bài 16. Cho phương trình $x^2 + 4(m-1)x - 12 = 0$ (*), với m là tham số.

a) Giải phương trình (*) khi $m = 2$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$4|x_1 - 2| \cdot \sqrt{4 - mx_2} = (x_1 + x_2 - x_1x_2 - 8)^2.$$

Lời giải

a) Với $m = 2$ thì phương trình (*) trở thành: $x^2 + 4x - 12 = 0$

$$x^2 + 6x - 2x - 12 = 0$$

$$x(x+6) - 2(x+6) = 0$$

$$(x+6)(x-2) = 0$$

$$x = -6; x = 2$$

Vậy với $m = 2$ thì phương trình (*) có tập nghiệm là $S = \{-6; 2\}$.

b) Phương trình (*) có $a.c = 1 \cdot (-12) = -12 < 0$ nên luôn có hai nghiệm phân biệt trái dấu.

$$\text{Theo định lí Viète ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -4m + 4 \\ x_1 \cdot x_2 = -12 \end{cases} \quad (1)$$

Vì x_2 là nghiệm của phương trình (*) nên ta có: $x_2^2 + 4(m-1)x_2 - 12 = 0$

$$x_2^2 + 4mx_2 - 4x_2 - 12 = 0$$

$$x_2^2 + 4(mx_2 - 4) - 4x_2 + 4 = 0$$

$$4(4 - mx_2) = x_2^2 - 4x_2 + 4$$

$$4(4 - mx_2) = (x_2 - 2)^2$$

$$2 \cdot \sqrt{4 - mx_2} = \sqrt{(x_2 - 2)^2}$$

$$2 \cdot \sqrt{4 - mx_2} = |x_2 - 2| \quad (2)$$

Mà theo bài có: $4|x_1 - 2| \cdot \sqrt{4 - mx_2} = (x_1 + x_2 - x_1x_2 - 8)^2$ (3)

Thay (1), (2) vào (3) ta được: $2 \cdot |x_1 - 2| \cdot |x_2 - 2| = [-4m + 4 + 12 - 8]^2$

$$2 \cdot |x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4| = (8 - 4m)^2$$

$$2 \cdot |-12 - 2(-4m + 4) + 4| = 64 - 64m + 16m^2$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot |-16 + 8m| = 16(m^2 - 4m + 4)$$

$$16 \cdot |m - 2| = 16(m - 2)^2$$

$$|m - 2| = (m - 2)^2$$

$$(m - 2)^2 = (m - 2)^4$$

$$(m - 2)^4 - (m - 2)^2 = 0$$

$$(m - 2)^2 \cdot [(m - 2)^2 - 1] = 0$$

$$(m - 2)^2 = 0 \text{ hoặc } (m - 2)^2 - 1 = 0$$

Giải $(m - 2)^2 = 0 \Rightarrow m = 2$

Giải $(m - 2)^2 - 1 = 0$

$$(m - 2)^2 = 1$$

$$m - 2 = 1; m - 2 = -1$$

$$m = 3; m = 1$$

Vậy $m \in \{1; 2; 3\}$

Bài 17. Cho phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + m = 0$. (1) (m là tham số).

a) Giải phương trình (1) khi $m = 3$.

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2x_2 + xx_2^2 = 4$.

Lời giải

a) Giải phương trình (1) khi $m = 3$

Thay $m = 3$ vào phương trình (1) ta được:

$$x^2 - 2(3 - 1)x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \text{ Vì } a + b + c = 1 + (-4) + 3 = 0 \text{ nên phương trình có hai nghiệm}$$

phân biệt là: $x = 1; x = \frac{c}{a} = 3$.

Vậy với $m = 3$ phương trình có nghiệm là $x = 1; x = 3$.

b. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2x_2 + xx_2^2 = 4$

Để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thì

$$\Delta' \geq 0$$

$$(m-1)^2 - m \geq 0$$

$$m^2 - 2m + 1 - m \geq 0$$

$$m^2 - 3m + 1 \geq 0 (*)$$

Khi đó áp dụng định lí Viète ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2(m-1) \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m \end{cases}$$

Ta có:

$$x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = 4$$

$$x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 4$$

$$2m(m-1) = 4$$

$$m^2 - m - 2 = 0$$

Ta có $a - b + c = 1 - (-1) + (-2) = 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt $m = -1; m = -\frac{c}{a} = 2$

Kết hợp điều kiện (*) ta có $m = -1$ thỏa mãn.

Vậy $m = -1$ là giá trị cần tìm.

Bài 18. Tìm các giá trị của m để phương trình $x^2 - mx + m^2 - m - 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 là độ dài các cạnh góc vuông của tam giác vuông ABC , biết độ dài cạnh huyền $BC = 2$.

Lời giải

Ta có: $\Delta = m^2 - 4(m^2 - m - 3) = 3m^2 - 4m - 12$ (2).

Điều kiện để phương trình có nghiệm là:

$$\Delta \geq 0$$

$$m^2 - 4(m^2 - m - 3) \geq 0$$

$$3m^2 - 4m - 12 \leq 0$$
 (2)

Vì độ dài cạnh của tam giác vuông là số dương nên $x_1, x_2 > 0$.

Theo định lý Viète, ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m > 0 \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - m - 3 > 0 \end{cases} \quad (1).$$

Từ giả thiết suy ra $x_1^2 + x_2^2 = 4 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 4$.

Do đó

$$m^2 - 2(m^2 - m - 3) = 4$$

$$m^2 - 2m - 2 = 0$$

$$m = 1 \pm \sqrt{3}$$

Thay $m = 1 \pm \sqrt{3}$ vào (1) và (2) ta thấy $m = 1 + \sqrt{3}$.

Vậy giá trị cần tìm là $m = 1 + \sqrt{3}$.

Bài 19. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 2m^2 - 3m + 1 = 0$, với m là tham số. Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình. Chứng minh rằng: $|x_1 + x_2 + x_1x_2| \leq \frac{9}{8}$.

Lời giải

Ta có $\Delta' = (m-1)^2 - (2m^2 - 3m + 1) = -m^2 + m = m(1-m)$.

Để phương trình có hai nghiệm khi

$$\Delta' \geq 0$$

$$0 \leq m \leq 1$$

Theo định lý Viète ta có: $x_1 + x_2 = 2(m-1)$ và $x_1x_2 = 2m^2 - 3m + 1$.

Ta có

$$|x_1 + x_2 + x_1x_2| = |2(m-1) + 2m^2 - 3m + 1| = |2m^2 - m - 1| = 2 \left| m^2 - \frac{m}{2} - \frac{1}{2} \right| = 2 \left| \left(m - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{9}{16} \right|$$

$$\text{Vì } 0 \leq m \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq m - \frac{1}{4} \leq \frac{3}{4}$$

$$\left(m - \frac{1}{4} \right)^2 \leq \frac{9}{16}$$

$$\left(m - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{9}{16} \leq 0$$

$$\text{Do đó } |x_1 + x_2 + x_1x_2| = 2 \left| \left(m - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{9}{16} \right| = 2 \left| \frac{9}{16} - \left(m - \frac{1}{4} \right)^2 \right| = \frac{9}{8} - 2 \left(m - \frac{1}{4} \right)^2 \leq \frac{9}{8}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m = \frac{1}{4}$.

Bài 20. Cho phương trình $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 1 = 0$, với m là tham số. tìm tất cả các giá trị $m \in \mathbb{Z}$ để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho biểu thức $P = \frac{x_1x_2}{x_1 + x_2}$ có giá trị là số nguyên.

Lời giải

Ta có $\Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2 + 1) = 4m - 3$.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta > 0 \Rightarrow m > \frac{3}{4}$.

Theo định lý Viète ta có: $x_1 + x_2 = 2m + 1$ và $x_1x_2 = m^2 + 1$.

$$\text{Do đó } P = \frac{x_1x_2}{x_1 + x_2} = \frac{m^2 + 1}{2m + 1} = \frac{2m - 1}{4} = \frac{5}{4(2m + 1)}.$$

Suy ra $4P = 2m - 1 + \frac{5}{2m+1}$. Do $m > \frac{3}{4}$ nên $2m+1 > 1$

Để $P \in \mathbb{Z}$ thì ta phải có $(2m+1)$ là ước của 5, suy ra $2m+1 = 5 \Leftrightarrow m = 2$

Thử lại với $m = 2$, ta được $P = 1$ (thỏa mãn).

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm thỏa mãn bài toán.

DẠNG 6

XÁC ĐỊNH ĐIỀU KIỆN THAM SỐ ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN LIÊN QUAN GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, LỚN NHẤT.

Bài 1. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 2(m-3)x - 6m - 7 = 0$ với m là tham số. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $C = (x_1 + x_2)^2 + 8x_1x_2$

Lời giải

Phương trình $x^2 - 2(m-3)x - 6m - 7 = 0$ có $\Delta' = (m-3)^2 + 6m + 7 = m^2 + 16 > 0$ với mọi $m \in \mathbb{R}$

Suy ra: phương trình trên luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Theo định lí Viète ta có :
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 6 \\ x_1 \cdot x_2 = -6m - 7 \end{cases}$$

Ta có :

$$\begin{aligned} C &= (x_1 + x_2)^2 + 8x_1x_2 \\ &= (2m - 6)^2 + 8(-6m - 7) \\ &= 4m^2 - 24m + 36 - 48m - 56 \\ &= 4m^2 - 72m - 20 \\ &= 4(m^2 - 18m + 81) - 4 \cdot 81 - 20 \\ &= 4(m - 9)^2 - 344 \geq -344, \forall m \in \mathbb{R} \text{ (vì } 4(m - 9)^2 \geq 0, \forall m \in \mathbb{R} \text{)} \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m - 9 = 0 \Leftrightarrow m = 9$.

Vậy GTNN của C là -344 đạt tại $m = 9$

Bài 2. Cho phương trình $x^2 + (m-2)x - 8 = 0$ (1), với m là tham số.

a) Giải phương trình (1) khi $m = 4$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho biểu thức $Q = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

a) Giải phương trình (1) khi $m = 4$.

Thay $m = 4$ vào phương trình (1) ta được: $x^2 + 2x - 8 = 0$

Ta có: $\Delta' = 1 + 8 = 9 = 3^2 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = -1 + \sqrt{9} = 2; x_2 = -1 - \sqrt{9} = -4.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x_1 = 2; x_2 = -4$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho biểu thức $Q = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)$ đạt giá trị lớn nhất.

Phương trình (1) có: $\Delta = (m-2)^2 + 32 > 0 \quad \forall m$ nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Khi đó theo Viète ta có: $x_1 + x_2 = -m + 2; x_1 x_2 = -8$

Ta có:

$$\begin{aligned} Q &= (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1) \\ &= x_1^2 x_2^2 - (x_1^2 + x_2^2) + 1 \\ &= x_1^2 x_2^2 - (x_1 + x_2)^2 + 2x_1 x_2 + 1 \\ &= 64 - (-m + 2)^2 - 16 + 1 = -(-m + 2)^2 + 49 \leq 49 \quad \forall m. \end{aligned}$$

Vậy $Q_{\max} = 49$. Dấu "=" xảy ra khi $m = 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của Q bằng 49 khi $m = 2$.

Bài 3. Cho phương trình (ẩn x) $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$

a) Giải phương trình khi $m = 3$.

b) Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho biểu thức $A = \frac{4(x_1 x_2 + 1)}{x_1^2 + x_2^2 + 2(2 + x_1 x_2)}$

đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

a) Khi $m = 3$, phương trình đã cho trở thành: $x^2 - 6x + 5 = 0$.

Vì $a + b + c = 1 - 6 + 5 = 0$ nên phương trình có 2 nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = 5$.

b) Vì $a + b + c = 1 - 2m + 2m - 1 = 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = 2m - 1$ với mọi giá trị của m .

$$\text{Ta có: } A = \frac{4(x_1x_2 + 1)}{x_1^2 + x_2^2 + 2(2 + x_1x_2)} = \frac{4(x_1x_2 + 1)}{(x_1 + x_2)^2 + 4} = \frac{4(2m - 1 + 1)}{(2m - 1 + 1)^2 + 4} = \frac{8m}{4m^2 + 4} = \frac{2m}{m^2 + 1}$$

Lại có:

$$(m + 1)^2 \geq 0, \forall m$$

$$2m \geq -(m^2 + 1), \forall m$$

$$\frac{2m}{(m^2 + 1)} \geq -1, \forall m$$

$\Rightarrow A \geq -1, \forall m$, dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m = -1$.

Suy ra A đạt giá trị nhỏ nhất bằng -1 khi $m = -1$.

Bài 4. Cho phương trình $x^2 - (m - 1)x - m^2 + m - 2 = 0$, với m là tham số.

a) Chứng minh rằng phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu với mọi m .

b) Gọi hai nghiệm của phương trình đã cho là x_1, x_2 . Tìm m để biểu thức $A = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 - \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3$ đạt

giá trị lớn nhất.

Lời giải

a) Xét $a.c = -m^2 + m - 2 = -\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} < 0, \forall m \in \mathbb{R}$

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm trái dấu với mọi m .

b) Gọi hai nghiệm của phương trình đã cho là x_1, x_2 .

Theo câu a) thì $x_1x_2 \neq 0$, do đó A được xác định với mọi x_1, x_2 .

Do x_1, x_2 trái dấu nên $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 = -t$ với $t > 0$, suy ra $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3 < 0$, suy ra $A < 0$

Đặt $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 = -t$, với $t > 0$, suy ra $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3 = -\frac{1}{t}$.

Khi đó $A = -t - \frac{1}{t}$ mang giá trị âm và A đạt giá trị lớn nhất khi $-A$ có giá trị nhỏ nhất.

Ta có $-A = t + \frac{1}{t} \geq 2$, suy ra $A \leq -2$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$t = \frac{1}{t}$$

$$t^2 = 1$$

$$t = \pm 1$$

Vì $t > 0$ nên $t = 1$

Với $t = 1$, ta có

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 = -1$$

$$\frac{x_1}{x_2} = -1$$

$$x_1 = -x_2$$

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$-(m-1) = 0$$

$$m = 1$$

Vậy với $m = 1$ thì biểu thức A đạt giá trị lớn nhất là -2 .

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Tìm m để phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 1 = 0$ có nghiệm x_1, x_2 sao cho biểu thức:

$A = x_1(x_1 - x_2) + x_2^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = 2m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$

Khi đó theo Viète, ta có: $x_1 + x_2 = 2(m+1); x_1 \cdot x_2 = m^2 + 1$

$$\Rightarrow A = x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 = 4(m+1)^2 - 3(m^2 + 1) = m^2 + 8m + 1 \geq 1 (m \geq 0)$$

Vậy $m = 0$.

Bài 6. Cho phương trình $x^2 - 5mx + 4m = 0(1)$ (m là tham số)

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

b) Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1). Tìm m để biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

Ta có $A = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = (m+1)^2 + 4 \geq 4$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow m = -1$

Bài 7. Cho phương trình $x^2 - 2x + 2 - m = 0$ (1) (m là tham số)

a) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm

b) Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = x_1^2 x_2^2 + 3(x_1^2 + x_2^2) - 4$$

Lời giải

a) Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = 1 - (2 - m) = m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 1$

b) Với $m \geq 1 \Rightarrow x_1 + x_2 = 2; x_1 \cdot x_2 = 2 - m$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } A &= x_1^2 x_2^2 + 3(x_1^2 + x_2^2) - 4 = x_1^2 x_2^2 + 3(x_1 + x_2)^2 - 6x_1 x_2 - 4 = (2 - m)^2 + 3 \cdot 2^2 - 6(2 - m) - 4 \\ &= (2 - m)^2 - 6(2 - m) + 9 - 1 = (2 - m - 3)^2 - 1 = (m + 1)^2 - 1 \end{aligned}$$

Do $m \geq 1 \rightarrow (m + 1)^2 \geq 2^2 = 4 \Rightarrow A \geq 4 - 1 = 3 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow A_{\min} = 3$

Bài 8. Cho phương trình $x^2 - 2mx + 2 - m = 0$ (1) (m là tham số)

a) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1).

Tìm m để biểu thức $M = \frac{-24}{2mx_1 + x_2^2 - 6x_1 x_2 - m + 2}$ đạt giá trị nhỏ nhất

Lời giải

a) Ta có: $\Delta' = m^2 - (m - 2) = m^2 - m + 2 = (m - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4} > 0, \forall m$

b) Theo Viète, ta có: $x_1 + x_2 = 2m; x_1 \cdot x_2 = m - 2$

Do x_2 là nghiệm của (1) nên $x_2^2 - 2mx_2 + m - 2 = 0 \rightarrow x_2^2 = 2mx_2 - m + 2$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } 2mx_1 + x_2^2 - 6x_1 x_2 - m + 2 &= 2m(x_1 + x_2) - 6x_1 x_2 - 2m + 4 = 2m \cdot 2m - 6(m - 2) - 2m + 4 \\ &= 4m^2 - 8m + 16 = 4(m - 1)^2 + 12 \geq 12. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow M \geq \frac{-24}{12} = -2$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow m = 1$

Bài 9. Cho phương trình $x^2 - mx - 1 = 0$ (1) (x là ẩn số)

a) Chứng minh phương trình (1) luôn có 2 nghiệm trái dấu

b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (1). Tìm giá trị m thoả mãn của biểu thức

$$P = \frac{x_1^2 + x_1 - 1}{x_1} + \frac{x_2^2 + x_2 - 1}{x_2} \text{ đạt giá trị nhỏ nhất.}$$

Bài 10. Tìm m để phương trình $x^2 + x + m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 và biểu thức:

$$Q = x_1^2(x_1 + 1) + x_2^2(x_2 + 1) \text{ đạt giá trị lớn nhất.}$$

Bài 11. Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 2 = 0$, với m là tham số. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $P = x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) - 6$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 12. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $2x^2 - (3a - 1)x - 2 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức: } P = \frac{3}{2}(x_1 - x_2)^2 + 2\left(\frac{x_1 - x_2}{2} + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)^2$$

Bài 13. Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ (x là ẩn số). Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình.

Tìm m để biểu thức $M = \frac{-24}{x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 14. Cho phương trình $2x^2 + 2mx + m^2 - 2 = 0$, với m là tham số. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của

phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức $A = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)}$

DẠNG 7

SỰ TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ CHỨA THAM SỐ LIÊN QUAN VI-ET

Khi cần biện luận số giao điểm của một đường thẳng (d) và Parabol (P): $y = ax^2$ ta cần chú ý:

◆ Nếu đường thẳng (d) là $y = m$ (song song với trục Ox) ta có thể dựa vào đồ thị để biện luận hoặc biện luận dựa vào $ax^2 = m$.

◆ Nếu đường thẳng (d): $y = mx + n$ ta thường xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $ax^2 = mx + n \Leftrightarrow ax^2 - mx - n = 0$ từ đó ta xét số giao điểm dựa trên số nghiệm của phương trình $ax^2 - mx - n = 0$ bằng cách xét dấu của Δ .

◆ Trong trường hợp đường thẳng (d) cắt đồ thị hàm số (P) tại hai điểm phân biệt A, B thì $A(x_1; mx_1 + n), B(x_2; mx_2 + n)$ khi đó ta có:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + m^2(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{(m^2 + 1)[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2]}.$$

Mọi câu hỏi liên quan đến nghiệm x_1, x_2 ta đều quy về định lý Viet.

Chú ý: Đường thẳng (d) có hệ số góc a đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ thì có dạng: $y = a(x - x_0) + y_0$

Bài 1. Cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2(m - 1)x + 2m + 3$.

a) Tìm giá trị của m để đường thẳng d cắt trục tung tại điểm có tọa độ $(0; -5)$.

b) Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng d luôn cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B . Giả sử $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$, tìm m để $x_A^2 + x_B^2 = 10$.

Lời giải

a) Vì đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tọa độ $(0; -5)$ nên ta có:

$$2m + 3 = -5$$

$$2m = -8$$

$$m = -4$$

Vậy với $m = -4$ thì đường thẳng (d) cắt trục tung tại tọa độ $(0; -5)$.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là:

$$x^2 = 2(m-1)x + 2m + 3$$

$$x^2 - 2(m-1)x - 2m - 3 = 0 \quad (*)$$

Ta có: $\Delta' = (m-1)^2 + 2m + 3 = m^2 - 2m + 1 + 2m + 3 = m^2 + 4$

Vì $m^2 \geq 0$ với mọi m nên $\Delta' = m^2 + 4 \geq 4 > 0$ với mọi m .

Vậy phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt với mọi $m \Rightarrow$ đường thẳng d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m .

Theo Viète ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 x_2 = -2m - 3 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x_A + x_B = 2(m-1) \\ x_A x_B = -2m - 3 \end{cases}$

Mà

$$x_A^2 + x_B^2 = 10$$

$$(x_A + x_B)^2 - 2x_A x_B = 10$$

$$4(m-1)^2 - 2(-2m-3) = 10$$

$$4m^2 - 8m + 4 + 4m + 6 = 10$$

$$4m^2 - 4m = 0$$

$$4m(m-1) = 0$$

$$m = 0; m = 1 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy $m \in \{0; 1\}$

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng

$(d): y = 3mx - 3m + 1$, trong đó m là tham số.

a) Với $m = 1$, tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) .

b) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ

$$x_1, x_2 \text{ thoả mãn } x_1 + 2x_2 = 11.$$

Lời giải

$$(P): y = x^2$$

$$(d): y = 3mx - 3m + 1.$$

a) Với $m = 1$, đường thẳng (d) có dạng $y = 3x - 3 + 1 \Leftrightarrow y = 3x - 2$.

Khi đó, phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) là:

$$x^2 = 3x - 2$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(a = 1; b = -3; c = 2)$$

Do $a + b + c = 1 + (-3) + 2 = 0$ nên phương trình có 2 nghiệm $x_1 = 1; x_2 = 2$.

$$\text{Với } x = x_1 = 1 \text{ thì } y = 1^2 = 1$$

$$\text{Với } x = x_2 = 2 \text{ thì } y = 2^2 = 4$$

Vậy với $m = 1$ thì toạ độ giao điểm của (d) và (P) là $(1; 1); (2; 4)$.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) là:

$$x^2 = 3mx - 3m + 1$$

$$x^2 - 3mx + 3m - 1 = 0 \quad (*)$$

$$\Delta = (-3m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3m - 1) = 9m^2 - 12m + 4$$

$$= (3m)^2 - 2 \cdot 3m \cdot 2 + 2^2 = (3m - 2)^2$$

Để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thì phương trình (*) phải có 2 nghiệm phân biệt $x_1;$

$$x_2$$

$$\Delta > 0$$

$$(3m - 2)^2 > 0$$

$$3m - 2 \neq 0$$

$$3m \neq 2$$

$$m \neq \frac{2}{3} \quad (**)$$

$$\text{Khi đó, theo hệ thức Viète } \begin{cases} x_1 + x_2 = 3m & (2) \\ x_1 \cdot x_2 = 3m - 1 & (3) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } x_1 + 2x_2 = 11 \quad (4)$$

Từ (2); (4) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3m \\ x_1 + 2x_2 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 11 - 3m \\ x_1 + 11 - 3m = 3m \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 11 - 3m \\ x_1 = 3m + 3m - 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 6m - 11 \\ x_2 = 11 - 3m \end{cases}$$

Thế $x_1 = 6m - 11$; $x_2 = 11 - 3m$ vào (3) ta được:

$$(6m - 11) \cdot (11 - 3m) = 3m - 1$$

$$66m - 18m^2 - 121 + 33m - 3m + 1 = 0$$

$$-18m^2 + 96m - 120 = 0$$

$$18m^2 - 96m + 120 = 0$$

$$3m^2 - 16m + 20 = 0 \quad (5)$$

$$\Delta' = (-8)^2 - 3 \cdot 20 = 64 - 60 = 4 > 0.$$

Vì $\Delta' > 0$ nên phương trình (5) có 2 nghiệm phân biệt

$$m_1 = \frac{-(-8) + \sqrt{4}}{3} = \frac{10}{3} \quad (\text{t/m(**)})$$

$$m_2 = \frac{-(-8) - \sqrt{4}}{3} = 2 \quad (\text{t/m(**)})$$

Vậy $m \in \left\{ 2; \frac{10}{3} \right\}$ thoả mãn đề ra.

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x + m^2$

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt

b) Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thoả mãn

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1) = -3$$

Lời giải

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là :

$$x^2 = 2x + m^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - m^2 = 0(*)$$

$$\text{Ta có } \Delta' = (-1)^2 - (-m^2) = m^2 + 1 > 0 (\forall m)$$

Nên phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt, do đó (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt (*dfcm*)

b) Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1) = -3$$

Vì x_1, x_2 là hoành độ giao điểm của (d) và (P) hay x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (*)

Theo hệ thức Viète ta có : $x_1 + x_2 = 2; x_1x_2 = -m^2$.

Theo giả thiết :

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1) = -3$$

$$x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1 + 3 = 0$$

$$-m^2 + 2 + 1 + 3 = 0$$

$$m^2 = 6$$

$$m = \pm\sqrt{6}$$

Vậy $m = \pm\sqrt{6}$

Bài 4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hàm số $y = -x^2$ có đồ thị (P) và hàm số

$y = (5m - 6)x - 15m + 25$ có đồ thị là đường thẳng d , với m là tham số

a) Vẽ đồ thị (P)

b) Tìm m để đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 6$

Lời giải

a) Vẽ đồ thị (P)

Học sinh tự vẽ đồ thị (P)

b) Tìm m để đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 6$

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) :

$$-x^2 = (5m - 6)x - 15m + 25$$

$$x^2 + (5m - 6)x - 15m + 25 = 0(*)$$

$$\text{Ta có : } \Delta = (5m - 6)^2 - 4 \cdot (-15m + 25) = 25m^2 - 64$$

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì $25m^2 - 64 > 0 \Rightarrow m < -\frac{8}{5}$ hoặc $m > \frac{8}{5}$

Khi đó, áp dụng hệ thức Viète: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -5m + 6 \\ x_1x_2 = -15m + 25 \end{cases}$.

Ta có :

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| &= 6 \\ (x_1 - x_2)^2 &= 36 \\ (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 &= 36 \\ (-5m + 6)^2 - 4(-15m + 25) &= 36 \\ 25m^2 &= 100 \\ m &= \pm 2 \end{aligned}$$

Vậy $m = \pm 2$

Bài 5. Cho hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -x - m + 1$ (với m là tham số)

a) Vẽ parabol (P) là đồ thị của hàm số $y = x^2$

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn

$$|x_1 - x_2| = 2$$

Lời giải

a) Vẽ parabol (P) là đồ thị của hàm số $y = x^2$

Học sinh tự vẽ Parabol

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn

$$|x_1 - x_2| = 2$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = -x - m + 1 \Leftrightarrow x^2 + x + m - 1 = 0(1)$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 1^2 - 4(m - 1) > 0 \Leftrightarrow m < \frac{5}{4}$$

Khi đó áp dụng hệ thức Viète: $x_1 + x_2 = -1; x_1x_2 = m - 1$.

Khi đó ta có :

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| &= 2 \\ (x_1 - x_2)^2 &= 4 \\ (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 &= 4 \\ 1 - 4(m - 1) &= 4 \\ m &= \frac{1}{4}(tm) \end{aligned}$$

Vậy $m = \frac{1}{4}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6. Cho Parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = -2x + m$ (với m là tham số).

a) Vẽ Parabol (P) .

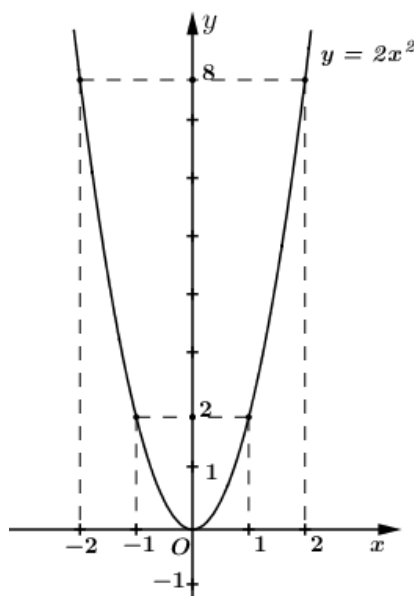
b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = 1$.

Lời giải

a) Vẽ Parabol (P) .

Ta có bảng giá trị sau:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8



b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = 1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$$2x^2 = -2x + m \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - m = 0 \quad (1)$$

Ta có $\Delta' = 1^2 - 2(-m) = 1 + 2m$

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi

$$\Delta' > 0$$

$$1 + 2m > 0$$

$$m > \frac{-1}{2}$$

Với $m > \frac{-1}{2}$ thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2

Theo hệ thức Viète ta có: $x_1 + x_2 = -1; x_1x_2 = \frac{-m}{2}$

Theo đề bài ta có:

$$x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = 1$$

$$-1 - 2 \frac{-m}{2} = 1$$

$$-1 + m = 1$$

$$m = 2$$

Vậy $m = 2$ thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = 1$

Bài 7. Cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng $d: y = -2x + m - 1$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng d cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ sao cho $(y_1 + y_2)^2 = 110 - x_1^2 - x_2^2$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P)

$$x^2 = -2x + m - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - m + 1 = 0 \quad (1)$$

Để đường thẳng d cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

Hay $\Delta' > 0$

$$1^2 - 1 \cdot (-m + 1) > 0$$

$$m > 0$$

Vậy $m > 0$ thì đường thẳng d cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$

Khi đó ta có $y_1 = x_1^2; y_2 = x_2^2$

Theo Viète ta có $x_1 + x_2 = -2; x_1 \cdot x_2 = -m + 1$

Ta có $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = (-2)^2 - 2(-m + 1) = 2m + 2$

Theo bài ra ta có

$$(y_1 + y_2)^2 = 110 - x_1^2 - x_2^2$$

$$(x_1^2 + x_2^2)^2 = 110 - (x_1^2 + x_2^2)$$

$$(2m + 2)^2 = 110 - (2m + 2)$$

$$2m^2 + 5m - 52 = 0$$

Ta có $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-52) = 441$

Do $\Delta > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$m_1 = \frac{-5 + 21}{4} = 4 \quad (\text{thỏa mãn điều kiện } m > 0)$$

$$m_2 = \frac{-5 - 21}{4} = \frac{-13}{2} \quad (\text{không thỏa mãn điều kiện } m > 0)$$

Vậy $m = 4$ để đường thẳng d cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ sao cho

$$(y_1 + y_2)^2 = 110 - x_1^2 - x_2^2.$$

Bài 8. Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P) .

a) Vẽ đồ thị (P) trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

b) Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y = 2x + 5m$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \cdot x_2^2 - x_1(5m + 3x_2) = 10115$.

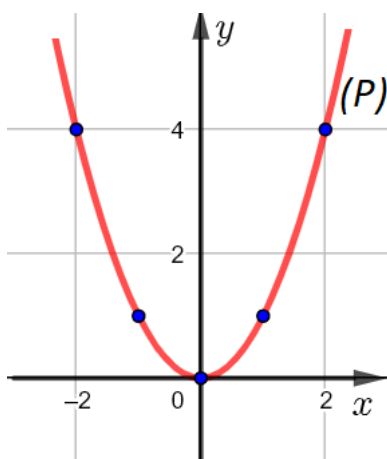
Lời giải

a) Vẽ đồ thị (P) trên mặt phẳng tọa độ Oxy :

Ta có bảng giá trị sau:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Đồ thị hàm số $y = x^2$ có dạng như sau:



a) Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y = 2x + 5m$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \cdot x_2^2 - x_1(5m + 3x_2) = 10115$:

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$x^2 = 2x + 5m$$

$$x^2 - 2x - 5m = 0$$

Do (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 nên

$$\Delta' > 0$$

$$1^2 + 5m > 0.$$

$$m > -\frac{1}{5}$$

Khi đó, theo Viète ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{-2}{1} = 2 & (1) \\ x_1 x_2 = \frac{-5m}{1} = -5m & (2) \end{cases}$$

Theo đề bài ta có: $x_1 \cdot x_2^2 - x_1(5m + 3x_2) = 10115$ (3).

Từ (1) $\Rightarrow x_1 = 2 - x_2$. Thay vào (2) và (3), ta có:
$$\begin{cases} (2 - x_2)x_2 = -5m \\ (2 - x_2) \cdot x_2^2 - (2 - x_2)(5m + 3x_2) = 10115 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5m = x_2^2 - 2x_2 \\ (2 - x_2) \cdot x_2^2 - (2 - x_2)(x_2^2 - 2x_2 + 3x_2) = 10115 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5m = x_2^2 - 2x_2 \\ (2 - x_2) \cdot x_2^2 - (2 - x_2)(x_2^2 + x_2) = 10115 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5m = x_2^2 - 2x_2 \\ 2x_2^2 - x_2^3 - 2x_2^2 - 2x_2 + x_2^3 + x_2^2 = 10115 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5m = x_2^2 - 2x_2 \\ x_2^2 - 2x_2 = 10115 \end{cases}$$

$\Rightarrow 5m = 10115 \Leftrightarrow m = 2023$ (thỏa mãn).

Vậy, $m = 2023$.

Bài 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol (P) có phương trình $y = x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình $y = 2mx + 3 - 2m$ (với m là tham số)

1) Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(2;1)$

2) Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B . Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ các điểm A, B . Tìm m để x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật có độ dài đường chéo bằng $\sqrt{14}$

Lời giải

1) Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(2;1)$

Thay $x = 2, y = 1$ vào phương trình đường thẳng (d) ta có :

$$1 = 2m \cdot 2 + 3 - 2m \Leftrightarrow 2m = -2 \Leftrightarrow m = -1$$

Vậy $m = -1$ thì thỏa đề

2) Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B . Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ các điểm A, B . Tìm m để x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật có độ dài đường chéo bằng $\sqrt{14}$

Ta có phương trình hoành độ giao điểm (d) và (P):

$$x^2 = 2mx + 3 - 2m \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0 (*)$$

Ta có : $\Delta' = m^2 - 2m + 3 = (m-1)^2 + 2 > 0$ (với mọi m)

Nên phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt

\Rightarrow (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B

Gọi x_1, x_2 là hoành độ các điểm A, B $\Rightarrow x_1, x_2$ là hai nghiệm phân biệt của phương trình (*)

Lại có x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật nên (*) có hai nghiệm phân biệt dương:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m - 3 > 0 \end{cases}$$

$$m > \frac{3}{2}$$

Áp dụng hệ thức Viète ta có : $x_1 + x_2 = 2m; x_1 x_2 = 2m - 3$

Vì x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật có đường chéo bằng $\sqrt{14}$ nên áp dụng định lý

Pythagore trong tam giác vuông ta có :

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= 14 \\ (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 &= 14 \\ 4m^2 - 2(2m - 3) &= 14 \\ 2m^2 + 2m - 4 &= 0 \\ m &= -1(ktm); m = 2(tm) \end{aligned}$$

Vậy $m = 2$

Bài 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng (d): $y = 2x - m + 3$ (m là tham số) parapol

(P): $y = x^2$.

a) Vẽ đồ thị (P).

b) Tìm các số nguyên m để (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn

$$x_1^2(x_2 + 2) + x_2^2(x_1 + 2)x_1 \leq 10$$

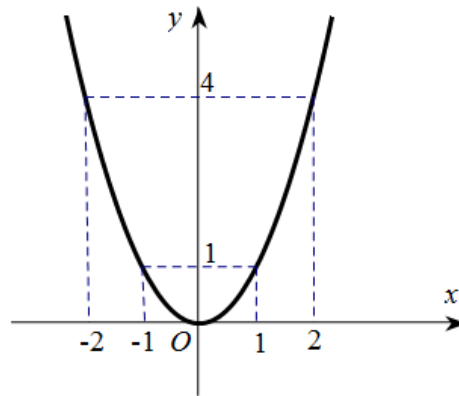
Lời giải

a) Vẽ đồ thị (P).

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Đồ thị:



b) Tìm các số nguyên m để (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn

$$x_1^2(x_2 + 2) + x_2^2(x_1 + 2)x_1 \leq 10$$

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P):

$$x^2 = 2x - m + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x + m - 3 = 0 (*)$$

$$\Delta' = 1 - (m - 3) = 4 - m$$

Để (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt khi

$$\Delta' > 0$$

$$4 - m > 0$$

$$m < 4 \quad (1)$$

Áp dụng định lí Viète, ta có $x_1 + x_2 = 2; x_1 x_2 = m - 3$

$$\text{Mà } x_1^2(x_2 + 2) + x_2^2(x_1 + 2)x_1 \leq 10$$

$$x_1^2 x_2 + 2x_1^2 + x_2^2 x_1 + 2x_2^2 \leq 10$$

$$x_1 x_2 (x_1 + x_2) + 2(x_1^2 + x_2^2) \leq 10$$

$$x_1 x_2 (x_1 + x_2) + 2(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 \leq 10 \quad (2)$$

Thay $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = m - 3 \end{cases}$ vào (2), ta có: $2(m - 3) + 2 \cdot 4 - 4(m - 3) \leq 10$

$$2(m - 3) + 2 \cdot 4 - 4(m - 3) \leq 10$$

$$2m - 6 + 8 - 4m + 12 \leq 10$$

$$-2m + 14 \leq 10$$

$$-2m \leq -4$$

$$m \geq 2$$

Kết hợp điều kiện (1) suy ra $2 \leq m < 4$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{2; 3\}$.

Vậy $m \in \{2; 3\}$

Bài 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx + 3$ (m là tham số).

a) Vẽ parabol (P) .

b) Khi $m = 2$, tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép toán.

c) Tìm m để đường thẳng (d) và parabol (P) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2

$$\text{thỏa mãn } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{3}{2}.$$

Lời giải

a) Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2$ (P)

b) Khi $m = 2$ phương trình đường thẳng có dạng $(d): y = 2x + 3$.

Hoành độ giao điểm của $(P): y = x^2$ và $(d): y = 2x + 3$ là nghiệm của phương trình:

$$x^2 = 2x + 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Vì $a - b + c = 1 - (-2) + (-3) = 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1 = -1; x_2 = -\frac{c}{a} = 3$.

$$\text{Với } x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = (-1)^2 = 1.$$

$$\text{Với } x_2 = 3 \Rightarrow y_2 = 3^2 = 9.$$

Vậy ta có hai giao điểm của (P) và (d) là $(-1; 1)$ và $(3; 9)$.

c) Xét phương trình hoành độ giao điểm của $(P): y = x^2$ và $(d): y = mx + 3$:

$$\begin{aligned} x^2 &= mx + 3 \\ x^2 - mx - 3 &= 0 \end{aligned} \quad (1).$$

Để (d) và (P) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thì phương trình (1) phải luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\Rightarrow \Delta > 0$$

$$(-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) > 0$$

$$m^2 + 12 > 0 \text{ (luôn đúng với mọi } m \text{)}$$

Vậy với mọi m thì phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

$$\text{Theo hệ thức Viète, ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 \cdot x_2 = -3 \end{cases}.$$

Thay $x = 0$ vào (1), ta có $0^2 - m \cdot 0 - 3 = -3 \neq 0$ với mọi m nên (1) luôn có hai nghiệm phân biệt khác 0 với mọi m .

Theo bài ra ta có:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{3}{2}$$

$$2x_2 + 2x_1 = 3x_1x_2 \quad .$$

$$2(x_1 + x_2) = 3x_1x_2$$

Thay hệ thức Vi-et, ta được:

$$2m = 3 \cdot (-3)$$

$$2m = -9 \quad .$$

$$m = \frac{-9}{2}$$

Vậy $m = \frac{-9}{2}$ là giá trị cần tìm.

Bài 12. Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P) .

a) Vẽ đồ thị (P) trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

b) Tìm giá trị của m để đường thẳng $(d): y = 2x - 3m$ (với m là tham số) cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1x_2^2 - x_2(3m + 2x_1) = 12$.

Lời giải

a) Vẽ đồ thị (P)

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^2 = 2x - 3m$$

$$x^2 - 2x + 3m = 0 (*)$$

Để đường thẳng $(d): y = 2x - 3m$ cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thì phương trình

$(*)$ phải có hai nghiệm $x_1; x_2$.

$$\Delta' = 1 - 3m > 0$$

$$m < \frac{1}{3}$$

Theo định lí Viète, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = 3m \end{cases}$$

Vì x_2 là nghiệm của phương trình $(*)$ nên

$$x_2^2 - 2x_2 + 3m = 0$$

$$3m = 2x_2 - x_2^2$$

$$\Rightarrow x_1x_2^2 - x_2(2x_2 - x_2^2 + 2x_1) = 12$$

$$x_1x_2^2 + x_2^3 - 2x_2(x_1 + x_2) = 12$$

$$x_2^2(x_1 + x_2) - 2x_2(x_1 + x_2) = 12$$

$$(x_1 + x_2)(x_2^2 - 2x_2) = 12$$

$$2x_2^2 - 4x_2 = 12$$

$$x_2^2 - 2x_2 = 6$$

$$-3m - 6 = 0$$

$$m = -2 \text{ (tm)}$$

Vậy $m = -2$.

Bài 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng d có phương

trình $y = x + \frac{1}{2}m^2 + m + 1$, với m là tham số.

a) Vẽ đồ thị (P) .

b) Tìm m để đường thẳng d cắt (P) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1^3 + x_2^3 = 68$.

Lời giải

a) Vẽ đồ thị (P) .

b) Tìm m để đường thẳng d cắt (P) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1^3 + x_2^3 = 68$.

PT hoành độ giao điểm: $\frac{1}{2}x^2 = x + \frac{1}{2}m^2 + m + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - m^2 - 2m - 2 = 0(*)$

Để đường thẳng d cắt (P) tại 2 điểm phân biệt thì pt (*) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m + 3 > 0 \Leftrightarrow (m + 1)^2 + 2 > 0$$

Do $(m + 1)^2 \geq 0 \forall m$ nên $(m + 1)^2 + 2 > 0 \forall m$, do đó pt (*) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi $m \Rightarrow$

đường thẳng d luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2

Khi đó áp dụng ĐL Viète ta có: $x_1 + x_2 = 2; x_1x_2 = -m^2 - 2m - 2$

Theo bài ra ta có:

$$x_1^3 + x_2^3 = 68$$

$$(x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 68$$

$$2^3 - 3(-m^2 - 2m - 2) \cdot 2 = 68$$

$$6m^2 + 12m - 48 = 0$$

$$m^2 + 6m - 8 = 0(**)$$

PT (**) có hai nghiệm phân biệt $m_1 = 2; m_2 = -4$.

Bài 14. Cho hàm số $y = 2x^2$ có đồ thị (P)

a) Vẽ đồ thị (P) trên mặt phẳng tọa độ (Oxy)

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y = 2mx + 1$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < x_2$ và $|x_2| - |x_1| = 2025$.

Lời giải

a) Vẽ đồ thị (P) . Học sinh tự vẽ

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là

$$2x^2 = 2mx + 1$$

$$2x^2 - 2mx - 1 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta' = (-m)^2 - 2 \cdot (-1) = m^2 + 2 > 0 \text{ với mọi giá trị của } m$$

Nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m .

Suy ra (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của m .

Theo định lí Viète ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m & (2) \\ x_1 x_2 = -\frac{1}{2} & (3) \end{cases}$$

Ta có $x_1 < x_2$ mà $x_1 x_2 = -\frac{1}{2} < 0$ suy ra $x_1 < 0 < x_2$

Khi đó $|x_2| - |x_1| = 2025$

$$x_2 - (-x_1) = 2025$$

$$x_2 + x_1 = 2025$$

$$m = 2025$$

Bài 15. Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 3mx + 1 - m^2$ (m là tham số)

a) Tìm m để (d) đi qua điểm $A(1; -9)$

b) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt của hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + x_2 = 2x_1 x_2$

Lời giải

a) Tìm m để (d) đi qua điểm $A(1; -9)$

Đường thẳng $(d): y = 3mx + 1 - m^2$ đi qua điểm $A(1; -9)$

$$-9 = 3m \cdot 1 + 1 - m^2$$

$$m^2 - 3m - 9 - 1 = 0$$

$$m^2 - 3m - 10 = 0$$

Phương trình có $\Delta = (-3)^2 + 4 \cdot 10 = 49 > 0$

\Rightarrow Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $m_1 = \frac{3 + \sqrt{49}}{2} = 5; m_2 = \frac{3 - \sqrt{49}}{2} = -2$

Vậy $m = -2$ hoặc $m = 5$ để thỏa mãn bài toán

b) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt của hoành độ $x_1; x_2$

Thỏa mãn $x_1 + x_2 = 2x_1x_2$

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số đã cho là:

$$x^2 = 3mx + 1 - m^2$$

$$x^2 - 3mx + m^2 - 1 = 0 \quad (*)$$

để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt của hoành độ $x_1; x_2$ thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

$$\Delta > 0$$

$$(3m)^2 - 4(m^2 - 1) > 0$$

$$9m^2 - 4m^2 + 4 > 0$$

$$5m^2 + 4 > 0 \quad \forall m$$

\Rightarrow Với mọi giá trị của m thì (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt của hoành độ $x_1; x_2$

$$\text{Áp dụng hệ thức Viète với phương trình } (*) \text{ ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 3m \\ x_1x_2 = m^2 - 1 \end{cases}$$

Theo đề bài ra ta có:

$$x_1 + x_2 = 2x_1x_2$$

$$3m = 2(m^2 - 1)$$

$$2m^2 - 2 - 3m = 0$$

$$2m^2 - 3m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \text{Phương trình có hai nghiệm phân biệt: } m_1 = \frac{3 + \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = 2; m_2 = \frac{3 - \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{2}$$

Vậy $m = -\frac{1}{2}$ hoặc $m = 2$ để thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 16. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x - m$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ sao cho $y_1 + y_2 + x_1^2x_2^2 = 6(x_1 + x_2)$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$$x^2 = 2x - m$$

$$x^2 - 2x + m = 0 \quad (1)$$

Ta có: $\Delta' = 1 - m$

Điều kiện để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt là phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) có hai nghiệm phân biệt hay $1 - m > 0 \Rightarrow m < 1$ (*)

Khi đó x_1, x_2 là các hoành độ giao điểm của (d) và (P) nên x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình hoành độ của (d) và (P) .

Do đó theo hệ thức Viète ta có: $x_1 + x_2 = 2; x_1 x_2 = m$

Khi đó:

$$y_1 + y_2 + x_1^2 x_2^2 = 6(x_1 + x_2).$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 x_2^2 = 6(x_1 + x_2).$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + x_1^2 x_2^2 = 6(x_1 + x_2).$$

$$4 - 2m + m^2 = 12$$

$$m^2 - 2m - 8 = 0$$

$$m = -2 \text{ (TM (*)); } m = 4$$

Vậy $m = -2$ thỏa mãn.

Bài 17. Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = (2m + 1)x - 2m$ (m là tham số). Tìm m để (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt $A(x_1, y_1); B(x_2, y_2)$ sao cho $y_1 + y_2 - x_1 x_2 = 1$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $x^2 = (2m + 1)x - 2m$

$$\Leftrightarrow x^2 - (2m + 1)x + 2m = 0$$

Ta có: $\Delta = \left[-(2m + 1)^2 - 4 \cdot 2m \right] = 4m^2 - 4m + 1 = (2m - 1)^2$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta > 0 \Rightarrow 2m - 1 \neq 0 \Rightarrow m \neq \frac{1}{2}$

Theo hệ thức Viète ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 1 \\ x_1 \cdot x_2 = 2m \end{cases}$$

Vậy với $m = 0$ thì (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt thỏa điều kiện đã cho.

Khi đó: $y_1 + y_2 - x_1 x_2 = 1$

$$x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = 1$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 = 1$$

$$(2m + 1)^2 - 3 \cdot 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 4m + 1 - 6m - 1 = 0$$

$$4m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow 2m(2m - 1) = 0$$

$$2m = 0 \text{ hoặc } 2m - 1 = 0$$

$$m = 0 \text{ (thỏa điều kiện) hoặc } m = \frac{1}{2} \text{ (không thỏa điều kiện)}$$

Bài 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m-1)x - m + 3$. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P) . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = x_1^2 + x_2^2$.

Lời giải

2) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0(*)$$

Vì x_1, x_2 là hoành độ giao điểm của (P) và (d) nên x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (*).

Do đó

$$\Delta'_* = (m-1)^2 - (m-3) \geq 0$$

$$\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Theo hệ thức Viète ta có: $x_1 + x_2 = 2(m-1); x_1x_2 = m-3$.

Khi đó:

$$M = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4(m-1)^2 - 2 \cdot (m-3) = \frac{1}{4}(4m-5)^2 + \frac{15}{4} \geq \frac{15}{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m = \frac{5}{4}$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của biểu thức M là $\frac{15}{4}$ khi $m = \frac{5}{4}$