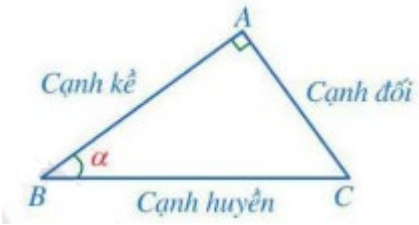
CHƯƠNG 4
HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

BÀI 1
TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

1. Tỉ số lượng giác của góc nhọn

Cho góc nhọn $\alpha\left(0^0 < \alpha < 90^0\right)$. Xét ΔABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = \alpha$.



Các tỉ số lượng giác của góc nhọn α	Công thức
Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh huyền được gọi là sin của góc α, kí hiệu $\sin\alpha$	$\sin\alpha = \dfrac{AC}{BC}$
Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh huyền được gọi là côsin của góc α, kí hiệu $\cos\alpha$	$\cos\alpha = \dfrac{AB}{BC}$
Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề được gọi là tang của góc α, kí hiệu $\tan\alpha$	$\tan\alpha = \dfrac{AC}{BC}$
Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh đối được gọi là côtang của góc α, kí hiệu $\cot\alpha$	$\cot\alpha = \dfrac{BC}{AC}$

Chú ý: Với góc nhọn α, ta có:

- $0 < \sin\alpha < 1;\ 0 < \cos\alpha < 1$
- $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

2. Tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau

Định lí: Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng côsin góc kia, tang góc này bằng côtang góc kia.

Hai góc phụ nhau là hai góc nhọn có tổng bằng 90^0.

Nhận xét: Với $0^0 < \alpha < 90^0$, ta có:

- $\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$
- $\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$
- $\tan(90^0 - \alpha) = \cot\alpha$
- $\cot(90^0 - \alpha) = \tan\alpha$

Bảng tỉ số lượng giác của một số góc đặc biệt:

α	30^0	45^0	60^0
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

DẠNG 1
TÍNH TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC

Với góc nhọn α, ta có:

- $0 < \sin\alpha < 1;\ 0 < \cos\alpha < 1$
- $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$
- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
- $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $\tan\alpha.\cot\alpha = 1$
- $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$
- $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

Bài 1. Tìm các tỉ số lượng giác còn lại của góc α, biết:

a) $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ b) $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$ c) $\tan\alpha = \dfrac{4}{3}$

Bài 2. Tìm góc nhọn α, biết:

a) $\sin\alpha = \cos\alpha$ b) $\tan\alpha = \cot\alpha$

Bài 3. Tính giá trị của các biểu thức sau

a) $A = 4 - \sin^2 45^0 + 2\cos^2 60^0 - 3\cot^3 45^0$ b) $B = \tan 45^0.\cos 30^0.\cot 30^0$

c) $C = \cos^2 15^0 + \cos^2 25^0 + ... + \cos^2 75^0$ d) $D = \sin^2 10^0 + \sin^2 20^0 + ... + \sin^2 80^0$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Tính giá trị của các biểu thức sau

a) $A = \dfrac{\sin 30^0 + 2\cos 45^0 - 3\tan^{2024} 45^0}{\cos 60^0}$ b) $B = \dfrac{\sin 30^0.\cos 60^0.\cot 60^0}{\tan 45^0}$

Bài 5. Cho α là góc nhọn, biết $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Tính $\cos\alpha;\ \tan\alpha;\ \cot\alpha$

Bài 6.

a) Tính giá trị biểu thức $A = \cos^2 20° + \cos^2 40° + \cos^2 50° + \cos^2 70°$.

b) Rút gọn biểu thức $B = \sin 35^\circ + \sin 67^\circ - \cos 23^\circ - \cos 55^\circ$.

Bài 7. Sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự tăng dần.

a) $\sin 70^\circ, \cos 30^\circ, \cos 40^\circ, \sin 51^\circ$

b) $\sin 20^\circ, \cos 31^\circ, \cos 47^\circ, \sin 14^\circ$.

c) $\tan 30^\circ, \cot 34^\circ, \cot 46^\circ, \tan 81^\circ$

d) $\cot 25^\circ, \tan 65^\circ, \cot 35^\circ, \tan 75^\circ$.

Bài 8. Cho $\tan\alpha = 2$. Tính $A = \dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$

Bài 9. Biết $\tan\alpha = 2$. Tính giá trị của biểu thức : $A = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\cos^2 a$.

Bài 10. Cho α là góc nhọn tính giá trị của biểu thức $E = \sin^6\alpha + 3\sin^2\alpha.\cos^2\alpha + \cos^6\alpha$

DẠNG 2
TÍNH TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại C có $BC = 1,2cm; AC = 0,9cm$. Tính các tỉ số lượng giác của góc B, từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc A.

Bài 2. Cho tam giác ABC có $AB = a\sqrt{5}, BC = a\sqrt{3}, AC = a\sqrt{2}$

a) Chứng minh tam giác ABC vuông

b) Tính các tỉ số lượng giác của góc B, từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của góc A

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 1,6cm; AC = 1,2cm$. Tính các tỉ số lượng giác của góc B, từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc C.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 60mm; AC = 8cm$. Tính các tỉ số lượng giác của góc B

Từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc C

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A. Hãy tính các tỉ số lượng giác của góc C biết rằng $\cos B = 0,6$

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Tính $\sin B, \sin C$

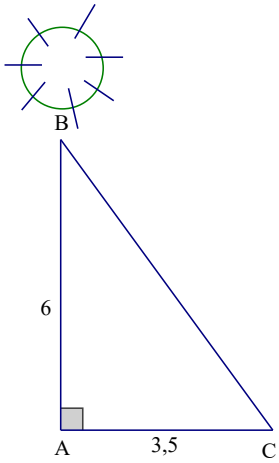
a) $AB = 13cm, BH = 5cm$

b) $BH = 3cm, CH = 4cm$

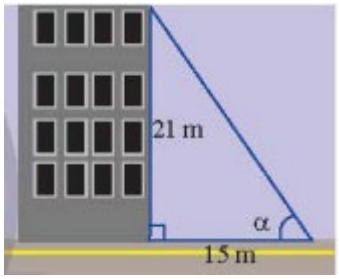
DẠNG 3
BÀI TOÁN THỰC TẾ

Bài 1. Một cây cau có chiều cao $6m$. Để hái một buồng cau xuống, phải đặt thang tre sao cho đầu thang tre đạt độ cao đó, khi đó góc của thang tre với mặt đất là bao nhiêu, biết chiếc thang dài $8m$ (làm tròn đến phút).

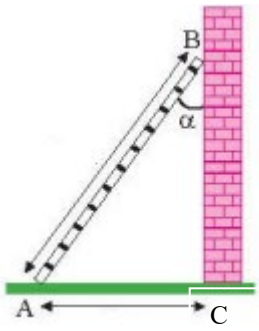
Bài 2. Một cột đèn điện AB cao $6m$ có bóng in trên mặt đất là AC dài 3,5m. Hãy tính $\widehat{BCA}$ (làm tròn đến phút) mà tia nắng mặt trời tạo với mặt đất



Bài 3. Tia nắng chiếu qua nóc của tòa nhà hợp với mặt đất một góc α. Cho biết tòa nhà cao 21m và bóng của nó trên mặt đất dài 15m. Tính góc α (làm tròn đến phút) .



Bài 4. Một cái thang dài 6m được đặt dựa vào một bức tường sao cho chân thang cách tường 3m. Tính góc α tạo bởi thang với bức tường.



Bài 5. Một máy bay đang bay ở độ cao 12 km . Khi bay hạ cánh xuống mặt đất, đường đi của máy bay tạo một góc nghiêng so với mặt đất. Nếu cách sân bay 320 km máy bay bắt đầu hạ cánh thì góc nghiêng là bao nhiêu (làm tròn đến phút)?

DẠNG 4
CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại $A\left(AB<AC\right)$, $\widehat{C}=\alpha<45^0$, đường trung tuyến AM, đường cao AH, $MA=MB=MC=a$. Chứng minh rằng:

a) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha.\cos\alpha$

b) $1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$

c) $1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$

Bài 2. Cho tam giác nhọn ABC hai đường cao AD và BE cắt nhau tại H. Biết $\dfrac{HD}{HA}=\dfrac{1}{2}$. Chứng minh rằng $\tan B.\cot C=3$.

Bài 3. Cho tam giác ABC có $BC=a,AC=b,AB=c$. Chứng minh rằng: $\sin\dfrac{A}{2}\le\dfrac{a}{b+c}$.

Bài 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $BC=a,AC=b,AB=c$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

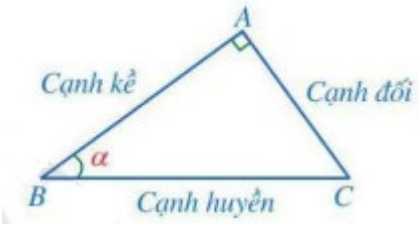
Bài 5. Cho ΔABC vuông tại A, Chứng minh rằng: $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{\sin B}{\sin C}$.

CHƯƠNG 4
HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

BÀI 1
TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

1. Tỉ số lượng giác của góc nhọn

Cho góc nhọn $\alpha\left(0^0 < \alpha < 90^0\right)$. Xét ΔABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = \alpha$.



Các tỉ số lượng giác của góc nhọn α	Công thức
Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh huyền được gọi là sin của góc α, kí hiệu $\sin\alpha$	$\sin\alpha = \dfrac{AC}{BC}$
Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh huyền được gọi là côsin của góc α, kí hiệu $\cos\alpha$	$\cos\alpha = \dfrac{AB}{BC}$
Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề được gọi là tang của góc α, kí hiệu $\tan\alpha$	$\tan\alpha = \dfrac{AC}{BC}$
Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh đối được gọi là côtang của góc α, kí hiệu $\cot\alpha$	$\cot\alpha = \dfrac{BC}{AC}$

Chú ý: Với góc nhọn α, ta có:

- $0 < \sin\alpha < 1;\ 0 < \cos\alpha < 1$
- $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

2. Tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau

Hai góc phụ nhau là hai góc nhọn có tổng bằng 90^0.

Định lí: Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng côsin góc kia, tang góc này bằng côtang góc kia.

Nhận xét: Với $0^0 < \alpha < 90^0$, ta có:

- $\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$
- $\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$
- $\tan(90^0 - \alpha) = \cot\alpha$
- $\cot(90^0 - \alpha) = \tan\alpha$

Bảng tỉ số lượng giác của một số góc đặc biệt:

α	30^0	45^0	60^0
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

DẠNG 1
TÍNH TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC

Với góc nhọn α, ta có:

- $0 < \sin\alpha < 1;\ 0 < \cos\alpha < 1$
- $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$
- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
- $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $\tan\alpha.\cot\alpha = 1$
- $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$
- $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

Bài 1. Tìm các tỉ số lượng giác còn lại của góc α, biết:

a) $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ b) $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$ c) $\tan\alpha = \dfrac{4}{3}$

Lời giải

a) Ta có:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5} (\cos\alpha > 0)$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{4}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{4}{3}$$

b) Ta có:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{25}{169} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{5}{13} (\sin\alpha > 0)$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{5}{12}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{12}{5}$$

c) Ta có:

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\left(\frac{4}{3}\right)^2\Leftrightarrow\frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{25}{9}\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\frac{9}{25}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{3}{5}(\cos\alpha>0)$$

$$\tan\alpha.\cot\alpha=1\Leftrightarrow\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{3}{4}$$

$$\sin\alpha=\cos\alpha\tan\alpha=\frac{3}{5}.\frac{4}{3}=\frac{4}{5}$$

Bài 2. Tìm góc nhọn α, biết:

a) $\sin\alpha=\cos\alpha$ b) $\tan\alpha=\cot\alpha$

Lời giải

a) Ta có:

$$\sin\alpha=\cos\alpha\Rightarrow\sin\alpha=\sin\left(90^0-\alpha\right)$$

$$\Leftrightarrow\alpha=90^0-\alpha\Rightarrow\alpha=45^0$$

b) Ta có:

$$\tan\alpha=\cot\alpha\Rightarrow\tan\alpha=\tan\left(90^0-\alpha\right)$$

$$\Leftrightarrow\alpha=90^0-\alpha\Rightarrow\alpha=45^0$$

Bài 3. Tính giá trị của các biểu thức sau

a) $A=4-\sin^2 45^0+2\cos^2 60^0-3\cot^3 45^0$ b) $B=\tan 45^0.\cos 30^0.\cot 30^0$

c) $C=\cos^2 15^0+\cos^2 25^0+...+\cos^2 75^0$ d) $D=\sin^2 10^0+\sin^2 20^0+...+\sin^2 80^0$

Lời giải

a) Ta có:

$$A=4-\sin^2 45^0+2\cos^2 60^0-3\cot^3 45^0=4-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2.\left(\frac{1}{2}\right)^2-3=1$$

b) Ta có: $B=\tan 45^0.\cos 30^0.\cot 30^0=1.\frac{\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3}=\frac{3}{2}$

c) Ta có:

$$C=\cos^2 15^0+\cos^2 25^0+...+\cos^2 75^0=\left(\cos^2 15^0+\cos^2 75^0\right)+...+\cos^2 45^0=1+1+1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{7}{2}$$

d) Ta có:

$$D=\sin^2 10^0+\sin^2 20^0+...+\sin^2 80^0=\left(\sin^2 10^0+\cos^2 10^0\right)+...+\left(\sin^2 40^0+\cos^2 40^0\right)=1+1+1+1=4$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Tính giá trị của các biểu thức sau

a) $A=\dfrac{\sin 30^0+2\cos 45^0-3\tan^{2024}45^0}{\cos 60^0}$

b) $B=\dfrac{\sin 30^0.\cos 60^0.\cot 60^0}{\tan 45^0}$

Bài 5. Cho α là góc nhọn, biết $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Tính $\cos\alpha;\ \tan\alpha;\ \cot\alpha$

Bài 6.

a) Tính giá trị biểu thức $A=\cos^2 20^\circ+\cos^2 40^\circ+\cos^2 50^\circ+\cos^2 70^\circ$.

b) Rút gọn biểu thức $B=\sin 35^\circ+\sin 67^\circ-\cos 23^\circ-\cos 55^\circ$.

Bài 7. Sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự tăng dần.

a) $\sin 70^\circ,\cos 30^\circ,\cos 40^\circ,\sin 51^\circ$

b) $\sin 20^\circ,\cos 31^\circ,\cos 47^\circ,\sin 14^\circ$.

c) $\tan 30^\circ,\cot 34^\circ,\cot 46^\circ,\tan 81^\circ$

d) $\cot 25^\circ,\tan 65^\circ,\cot 35^\circ,\tan 75^\circ$.

Bài 8. Cho $\tan\alpha=2$. Tính $A=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$

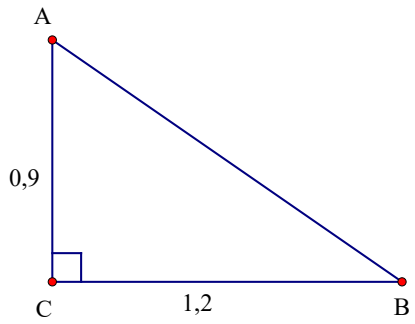
Bài 9. Biết $\tan\alpha=2$. Tính giá trị của biểu thức : $A=\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-3\cos^2 a.$

Bài 10. Cho α là góc nhọn tính giá trị của biểu thức $E=\sin^6\alpha+3\sin^2\alpha.\cos^2\alpha+\cos^6\alpha$

DẠNG 2
TÍNH TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại C có $BC = 1,2cm; AC = 0,9cm$. Tính các tỉ số lượng giác của góc B, từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc A.

Lời giải



tam giác ABC vuông tại C nên theo Pythagone ta có: $AB^2 = AC^2 + BC^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow AB = \frac{3}{2}$

Ta có:

$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$

$\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$

$\tan B = \frac{AC}{CB} = \frac{3}{4}$

$\cot B = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{3}$

Do $\widehat{A} + \widehat{B} = 90^0$ nên:

$\sin A = \cos B = \frac{4}{5}$

$\cos A = \sin B = \frac{3}{5}$

$\tan A = \cot B = \frac{4}{3}$

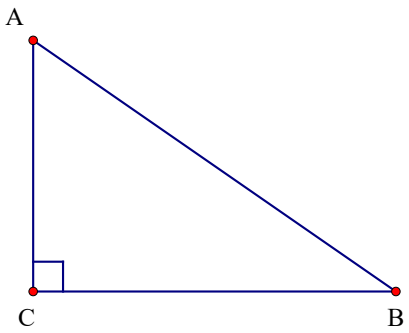
$\cot A = \tan B = \frac{3}{4}$

Bài 2. Cho tam giác ABC có $AB = a\sqrt{5}, BC = a\sqrt{3}, AC = a\sqrt{2}$

a) Chứng minh tam giác ABC vuông

b) Tính các tỉ số lượng giác của góc B, từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của góc A

Lời giải



a) ta có:

$AB^2 = 5a^2$

$AC^2 + BC^2 = 3a^2 + 2a^2 = 5a^2$

$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại C (định lý Pythagone đảo).

b) Ta có:

$$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{6}}{5}$$

$$\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$\tan B = \frac{AC}{CB} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\cot B = \frac{BC}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Do $\widehat{A} + \widehat{B} = 90^0$ nên:

$$\sin A = \cos B = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$\cos A = \sin B = \frac{\sqrt{6}}{5}$$

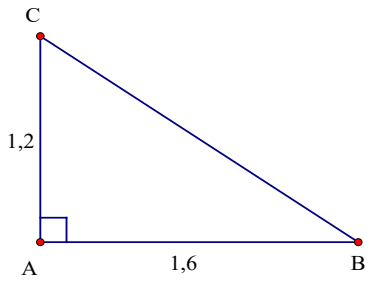
$$\tan A = \cot B = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\cot A = \tan B = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 1,6cm; AC = 1,2cm$. Tính các tỉ số lượng giác của góc B, từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc C.

Lời giải

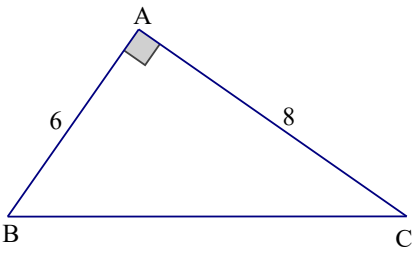


Ta có: $\sin B=\frac{3}{5};\cos B=\frac{4}{5};\tan B=\frac{3}{4};\cot B=\frac{4}{3}$

$\Rightarrow \sin C=\frac{4}{5};\cos C=\frac{3}{5};\tan C=\frac{4}{3};\cot C=\frac{3}{4}$

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=60mm;AC=8cm$. Tính các tỉ số lượng giác của góc B Từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc C

Lời giải

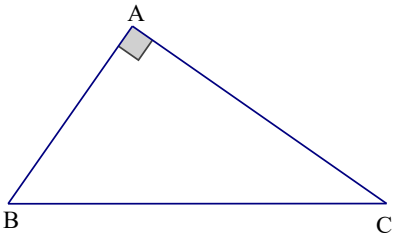


Ta có: $\sin B=\frac{8}{10}=\frac{4}{5};\cos B=\frac{6}{10}=\frac{3}{5};\tan B=\frac{8}{6}=\frac{4}{3};\cot B=\frac{3}{4}$

$\Rightarrow \sin C=\frac{3}{5};\cos B=\frac{4}{5};\tan B=\frac{3}{4};\cot B=\frac{4}{3}.$

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A. Hãy tính các tỉ số lượng giác của góc C biết rằng $\cos B=0,6$

Lời giải



Ta có: $\sin^2 B+\cos^2 B=1\Rightarrow \sin^2 B+0,6^2=1\Rightarrow \sin^2 B=0,64\Rightarrow \sin B=0,8$

$\tan B=\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{0,8}{0,6}=\frac{4}{3}$

$\cot B=\frac{\cos B}{\sin B}=\frac{0,6}{0,8}=\frac{3}{4}$

Do $\widehat{C}+\widehat{B}=90^0$ nên:

$\sin C=\cos B=0,6$

$\cos C = \sin B = 0,8$

$\tan C = \cot B = \dfrac{3}{4}$

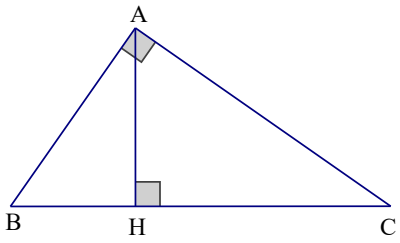
$\cot C = \tan B = \dfrac{4}{3}$

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Tính $\sin B, \sin C$

a) $AB = 13cm, BH = 5cm$

b) $BH = 3cm, CH = 4cm$

Lời giải



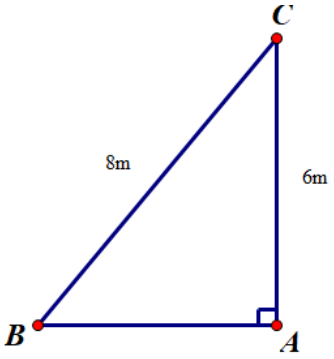
a) Ta có: $AB = 13cm, BH = 5cm \Rightarrow AH \Rightarrow BC \Rightarrow \sin B, \sin C$

b) Ta có: $BH = 3cm, CH = 4cm \Rightarrow AH \Rightarrow AB, AC \Rightarrow \sin B, \sin C$

DẠNG 3
BÀI TOÁN THỰC TẾ

Bài 1. Một cây cau có chiều cao $6m$. Để hái một buồng cau xuống, phải đặt thang tre sao cho đầu thang tre đạt độ cao đó, khi đó góc của thang tre với mặt đất là bao nhiêu, biết chiếc thang dài $8m$ (làm tròn đến phút).

Lời giải



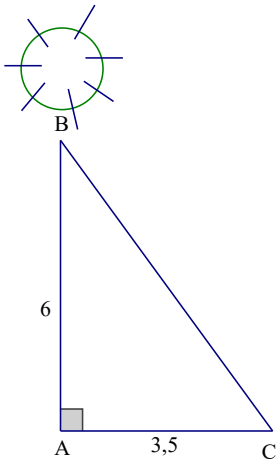
Xét ΔABC vuông tại A, ta có:

$\sin B = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

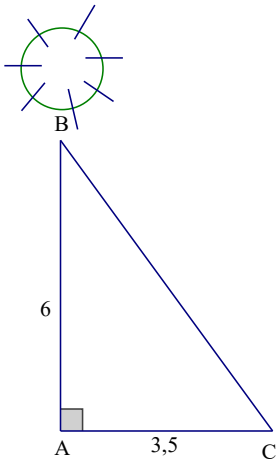
$\Rightarrow \widehat{B} \approx 48^{\circ}35'$

Vậy góc giữa thang tre với mặt đất là $48^{0}35'$.

Bài 2. Một cột đèn điện AB cao $6m$ có bóng in trên mặt đất là AC dài 3,5m. Hãy tính $\widehat{BCA}$ (làm tròn đến phút) mà tia nắng mặt trời tạo với mặt đất



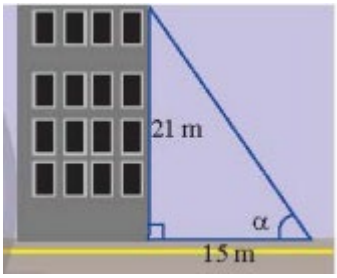
Lời giải



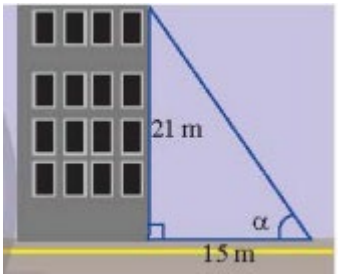
Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông ABC, ta có:

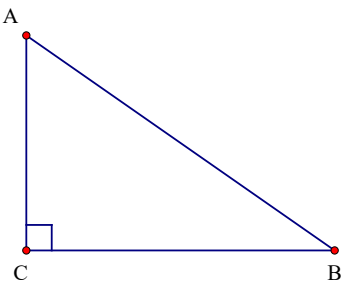
$$\tan \widehat{C} = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{3,5} \Rightarrow \widehat{C} \approx 59^0 45'$$

Bài 3. Tia nắng chiếu qua nóc của tòa nhà hợp với mặt đất một góc α. Cho biết tòa nhà cao 21m và bóng của nó trên mặt đất dài 15m. Tính góc α (làm tròn đến phút) .



Lời giải

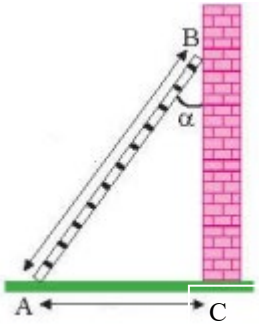




Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông ABC, ta có:

$$\tan \widehat{B} = \frac{AC}{CB} = \frac{21}{15} \Rightarrow \widehat{C} \approx 54^0 28'$$

Bài 4. Một cái thang dài 6m được đặt dựa vào một bức tường sao cho chân thang cách tường 3m. Tính góc α tạo bởi thang với bức tường.



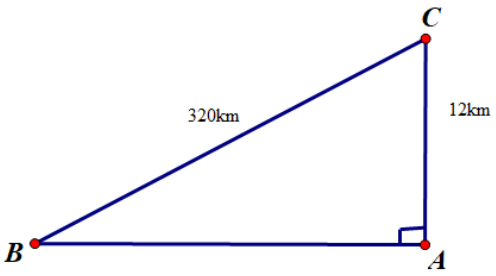
Lời giải

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông ABC, ta có:

$$\sin \widehat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{B} = 30^0$$

Bài 5. Một máy bay đang bay ở độ cao $12\,\text{km}$. Khi bay hạ cánh xuống mặt đất, đường đi của máy bay tạo một góc nghiêng so với mặt đất. Nếu cách sân bay $320\,\text{km}$ máy bay bắt đầu hạ cánh thì góc nghiêng là bao nhiêu (làm tròn đến phút)?

Lời giải:



Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông ABC, ta có:

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{320} = \frac{3}{80}$$

$$\Rightarrow \widehat{B} \approx 2^\circ 9'$$

Vậy góc nghiêng là $2^\circ 9'$.

DẠNG 4
CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

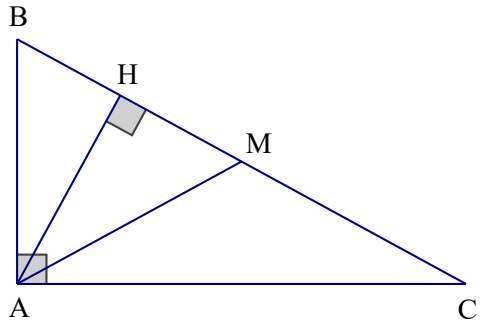
Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại $A\left(AB<AC\right)$, $\widehat{C}=\alpha<45^0$, đường trung tuyến AM, đường cao AH, $MA=MB=MC=a$. Chứng minh rằng:

a) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha.\cos\alpha$

b) $1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$

c) $1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{AMH}=2\alpha$;

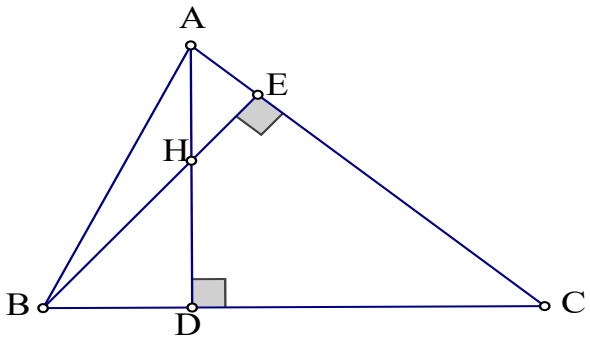
$$\sin 2\alpha=\frac{AH}{AM}=\frac{2AH}{2AM}=\frac{2AH}{BC}=2.\frac{AB.AC}{BC^2}=2.\sin\alpha.\cos\alpha$$

b) $$1+\cos 2\alpha=1+\frac{HM}{AM}=\frac{HC}{AM}=\frac{2HC}{BC}=2.\frac{AC^2}{BC^2}=2.\cos^2\alpha$$

c) $$1-\cos 2\alpha=1-\frac{HM}{AM}\frac{HB}{AM}=\frac{2HB}{BC}=2.\frac{AB^2}{BC^2}=2.\sin^2\alpha$$

Bài 2. Cho tam giác nhọn ABC hai đường cao AD và BE cắt nhau tại H. Biết $\frac{HD}{HA}=\frac{1}{2}$. Chứng minh rằng $\tan B.\cot C=3$.

Lời giải



Ta có: $\tan B = \dfrac{AD}{BD}; \tan C = \dfrac{AD}{CD} \Rightarrow \tan B.\tan C = \dfrac{AD^2}{BD.CD}$ (1)

$\widehat{HBD} = \widehat{CAD}$ (cùng phụ với $\widehat{ACB}$); $\widehat{HDB} = \widehat{ADC} = 90^0$.

Do đó $\Delta BDH \sim \Delta ADC$ (g.g), suy ra $\dfrac{DH}{DC} = \dfrac{BD}{AD}$, do đó $BD.DC = DH.AD$ (2).

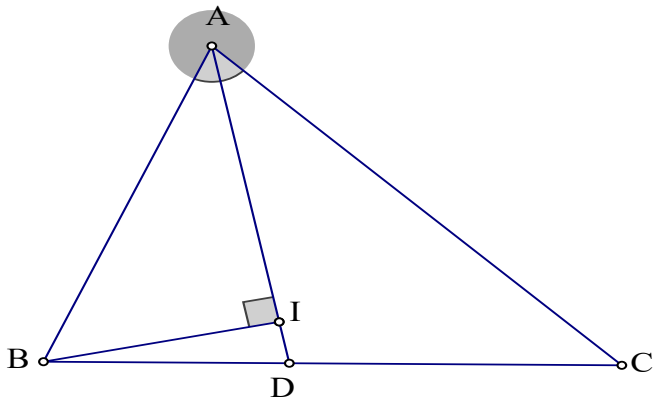
Từ (1) và (2) suy ra $\tan B.\tan C = \dfrac{AD^2}{DH.AD} = \dfrac{AD}{DH}$ (3).

Theo giả thiết $\dfrac{HD}{AH} = \dfrac{1}{2}$ suy ra $\dfrac{HD}{AH + HD} = \dfrac{1}{2+1}$ hay $\dfrac{HD}{AD} = \dfrac{1}{3}$, suy ra $AD = 3HD$.

Thay vào (3) ta được: $\tan B.\tan C = \dfrac{3HD}{DH} = 3$.

Bài 3. Cho tam giác ABC có $BC = a, AC = b, AB = c$. Chứng minh rằng: $\sin\dfrac{A}{2} \le \dfrac{a}{b+c}$.

Lời giải



Vẽ đường phân giác AD của tam giác ABC.

Theo tính chất đường phân giác của tam giác ta có $\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{DC}{AC}$

$\Rightarrow \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{BD + DC}{AB + AC} = \dfrac{BC}{AB + AC}$.

Vậy $\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{a}{b+c}$.

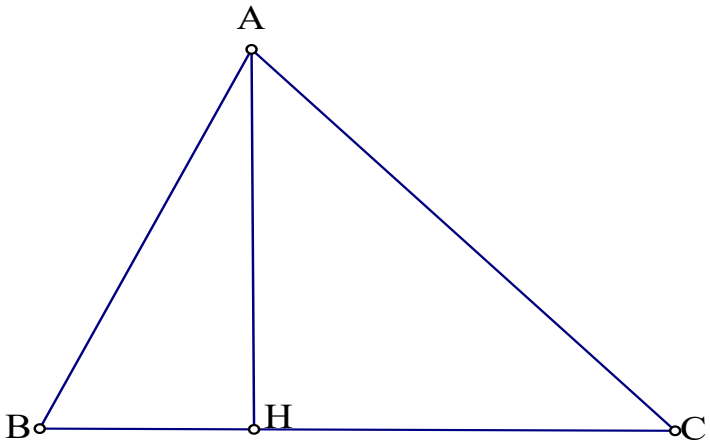
Vẽ $BI \perp AD\left(I \in AD\right)$, suy ra $BI \le BD$. ΔIAB có $\widehat{AIB} = 90^0$,

do đó $\sin\widehat{BAI} = \dfrac{BI}{AB}$; hay $\sin\dfrac{A}{2} \le \dfrac{a}{b+c}$.

Bài 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $BC = a, AC = b, AB = c$. Chứng minh rằng:

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

Lời giải



Vẽ $AH \perp BC, H \in BC$; vì trong ΔHAB có $\widehat{H} = 90^0$ nên $\sin B = \dfrac{AH}{AB}$;

vì trong ΔHAC có $\widehat{H} = 90^0$ nên $\sin \widehat{C} = \dfrac{AH}{AC}$.

Do đó $\dfrac{\sin B}{\sin C} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{b}{c} \Rightarrow \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

Chứng minh tương tự ta có $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$.

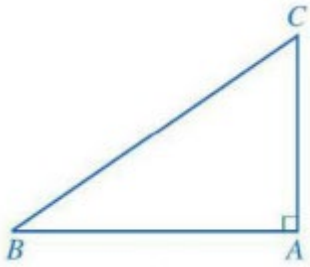
Vậy $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

Bài 5. Cho ΔABC vuông tại A, Chứng minh rằng: $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\sin B}{\sin C}$.

BÀI 2
MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

1. Tính cạnh góc vuông theo cạnh huyền và tỉ số lượng giác của góc nhọn

Định lí: Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân với sin của góc đối hoặc nhân với côsin góc kề.

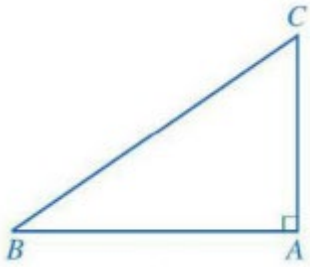


Cho ΔABC vuông tại A, ta có:

- $AC = BC.\sin B = BC.\cos C$
- $AB = BC.\sin C = BC.\cos B$

2. Tính cạnh góc vuông theo cạnh góc vuông còn lại và tỉ số lượng giác của góc nhọn

Định lí: Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh góc vuông kia nhân với tang của góc đối hoặc nhân côtang với góc kề.



Cho ΔABC vuông tại A, ta có:

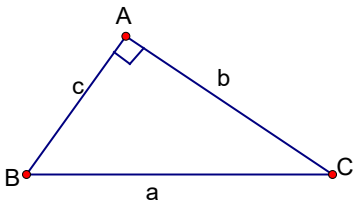
- $AC = AB.\tan B = AB.\cot C$
- $AB = AC.\tan C = AC.\cot B$

DẠNG 1
GIẢI TAM GIÁC

Phương pháp: Để giải tam giác vuông ta dùng hệ thức giữa cạnh và các góc trong tam giác vuông

Cho ΔABC vuông tại A có $BC=a, AC=b, AB=c$

- $b=a.\sin B=a.\cos C$
- $c=a.\sin C=a.\cos B$
- $b=c.\tan B=c.\cot C$
- $c=b.\tan C=b.\cot B$



Chú ý: Các bài toán về giải tam giác vuông bao gồm:

+ Giải tam giác vuông khi biết độ dài 1 cạnh và số đo 1 góc nhọn

+ Giải tam giác vuông khi biết độ dài 2 cạnh

Bài 1. Giải tam giác ABC vuông tại A, biết AC = 10 cm, góc C bằng 30^0.

Bài 2. Giải tam giác ABC vuông tại A, biết AB = 3cm, góc C bằng 30^0

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Giải tam giác ABC vuông tại A. Cho biết $AB=14cm, \widehat{C}=30^0$

Bài 4. Giải tam giác ABC vuông tại B. Cho biết $AC=15cm, \widehat{A}=52^0$ (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Bài 5. Giải tam giác ABC vuông tại A. Cho biết $AB=7\sqrt{2}cm, AC=11cm$ (cạnh làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai, góc làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai, góc làm tròn đến độ).

Bài 6. Cho tam giác ΔABC vuông tại A. Gọi $BC=a, AC=b, AB=c$. Giải ΔABC, biết:

a) $c=3,8cm; \widehat{B}=51^0$ b) $a=11cm, \widehat{C}=60^0$

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $BC=a, AC=b, AB=c$. Hãy giải tam giác ABC, biết:

a) $b=5,4cm; \widehat{C}=30^0$ b) $c=10cm; \widehat{C}=45^0$

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $BC=a, AC=b, AB=c$. Hãy giải tam giác ABC, biết:

a) $a=15cm, b=10cm$ b) $b=12cm, c=7cm$

Bài 9. Giải tam giác MNP có $\widehat{N}=70^0; \widehat{P}=38^0$, đường cao $MI=8cm$. Diện tích ΔMNP bằng? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Bài 10. Giải tam giác ABC có $AB=12cm, AC=12cm, BC=20cm$. Tính các góc của tam giác ABC (làm tròn đến độ).

DẠNG 2
TÍNH CẠNH, GÓC VÀ DIỆN TÍCH TAM GIÁC

Phương pháp

Làm xuất hiện tam giác vuông để áp dụng các hệ thức trên bằng cách kẻ thêm đường cao.

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC = 12cm, \widehat{B} = 60^0$. Hãy tính $\widehat{C}, AB, BC$ và diện tích tam giác ABC.

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A. Biết $AB = 3$ cm, $BC = 3$ cm .

a) Tính độ dài cạnh AC.

b) Tính $\sin A$ và $\cos B$?

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 4cm, BC = 5cm.$ Tính độ dài cạnh AC và $\sin C$

Bài 4. Cho tam giác ABC, trong đó BC = 16 cm, $\widehat{ABC} = 45^0$; $\widehat{ACB} = 30^0$. Gọi N là chân đường vuông góc kẻ từ A đến cạnh BC.

a. Hãy tính đoạn thẳng AN.

b. Hãy tính cạnh AC.

(Làm tròn đến số thập phân thứ hai)

Bài 5. Cho tam giác ABC có $AB = 16, AC = 14$ và $\widehat{B} = 60^0$.

a) Tính độ dài cạnh BC

b) Tính diện tích tam giác ABC.

Bài 6. Trong một tam giác vuông, đường cao ứng với cạnh huyền chia tam giác thành hai phần có diện tích bằng $54\,\text{cm}^2$ và $96\,\text{cm}^2$. Độ dài cạnh huyền bằng

A. 27 cm. **B**. 48 cm. **C**. 25 cm. **D**. 21 cm.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A. Biết $AB = 30cm$, $\widehat{B} = \alpha, \tan\alpha = \dfrac{5}{12}$. Tính BC, AC

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 5cm$, $\cot B = \dfrac{5}{8}$. Tính độ dài các đoạn thẳng AC và BC

Bài 9. Cho tam giác ΔABC có $\widehat{B} = 38^0, \widehat{C} = 30^0$, $BC = 11cm$. Gọi N là chân đường vuông góc hạ từ A xuống cạnh BC. Hãy tính.

a) Độ dài đoạn thẳng AN.

b) Độ dài đoạn thẳng.

Bài 10. Cho tam giác ΔABC có $BC = 11cm$, $\widehat{B} = 38^0, \widehat{C} = 30^0$. Gọi N là chân đường vuông góc hạ từ A xuống cạnh BC. Hãy tính

a) Độ dài đoạn thẳng AN

b) Độ dài cạnh AC

c) Tính diện tích tam giác ABC

Bài 11. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^0$, $\widehat{C} = 50^0, AC = 35cm$. Tính diện tích tam giác ABC

Bài 12. Cho tứ giác $ABCD$, có: $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^0, \widehat{C} = 40^0$ $AB = 4cm, AD = 3cm. S_{ABCD} = ?$

Bài 13. Cho tam giác ABC, đường cao $AH\left(H \in BC\right)$, $\widehat{B} = 42^0, AB = 12cm, BC = 22cm.$ Tính các cạnh và các góc của tam giác ABC.

Bài 14. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AC = 15cm, \widehat{B} = 50^0$. Hãy tính độ dài

a) AB, AC

b) phân giác CD

Bài 15. Cho tam giác ABC, đường cao $AH = 5\left(cm\right)$, $\widehat{B} = 70^0, \widehat{C} = 35^0$. Tính các cạnh của ΔABC

Bài 16. Cho hình bình hành $ABCD$, có: $\widehat{A} = 45^0, AB = BD = 18(cm)$

a) Tính AB

b) Tính S_{ABCD}

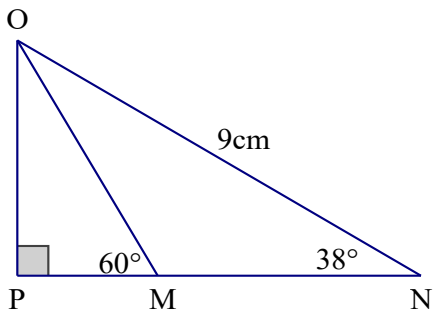
Bài 17. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^0; \widehat{C} = 30^0$ $AB = 4cm, AD = 3cm.$ Tính S_{ABCD}

Bài 18. Cho tam giác ABC vuông tại A, biết $AB = 21cm, \widehat{C} = 40^0$. Tính độ dài đường phân giác BD của $\widehat{ABC}$, với D nằm trên cạnh AC

Bài 19. Cho hình thang $ABCD$ sao cho $AB = AD = 10cm, BC = 14cm, \widehat{A} = 120^0$, BC vuông góc với đường chéo BD. Tính chu vi của $ABCD$

Bài 20. Hình vẽ cho biết ΔABC là tam giác đều cạnh $8cm$ và $\widehat{AMB} = 42^0$. Tính AM (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai)

Bài 21. Với hình vẽ đã cho. Tính diện tích tam giác OMN (làm tròn kết quả đến chữ số hàng đơn vị)



Bài 22. Cho ΔABC cân tại A có $\widehat{A} = 30^0$, đường trung tuyến BM. Tính số đo $\widehat{CBM}$ (làm tròn kết quả đến độ)

Bài 23. Cho tam giác ABC vuông tại A, có: $AB = 10cm, AC = 15cm$

a. Tính góc B

b. Phân giác trong của góc B cắt AC tại I. Tính AI

c. Vẽ AH vuông góc với BI tại H. Tính AH

Bài 24. Cho tam giác ABC vuông tại A, góc $\widehat{C} = 30^0, BC = 10cm$

a. Tính AB, AC

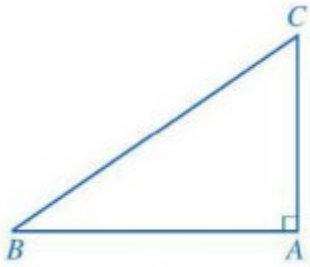
b. Kẻ từ A các đường thẳng AM, AN lần lượt vuông góc với các đường phân giác trong và ngoài của góc B. Chứng minh $MN = AB$

c. Chứng minh các tam giác MAB và ABC đồng dạng. Tìm tỉ số đồng dạng.

BÀI 2
MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

1. Tính cạnh góc vuông theo cạnh huyền và tỉ số lượng giác của góc nhọn

Định lí: Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân với sin của góc đối hoặc nhân với côsin góc kề.

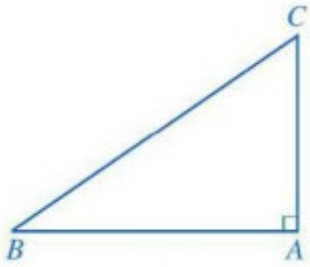


Cho ΔABC vuông tại A, ta có:

- $AC = BC.\sin B = BC.\cos C$
- $AB = BC.\sin C = BC.\cos B$

2. Tính cạnh góc vuông theo cạnh góc vuông còn lại và tỉ số lượng giác của góc nhọn

Định lí: Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh góc vuông kia nhân với tang của góc đối hoặc nhân côtang với góc kề.



Cho ΔABC vuông tại A, ta có:

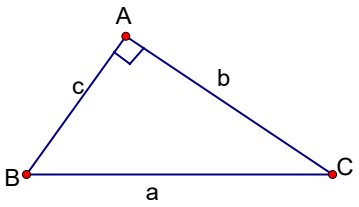
- $AC = AB.\tan B = AB.\cot C$
- $AB = AC.\tan C = AC.\cot B$

DẠNG 1
GIẢI TAM GIÁC

Phương pháp: Để giải tam giác vuông ta dùng hệ thức giữa cạnh và các góc trong tam giác vuông

Cho ΔABC vuông tại A có $BC = a, AC = b, AB = c$

- $b = a.\sin B = a.\cos C$
- $c = a.\sin C = a.\cos B$
- $b = c.\tan B = c.\cot C$
- $c = b.\tan C = b.\cot B$



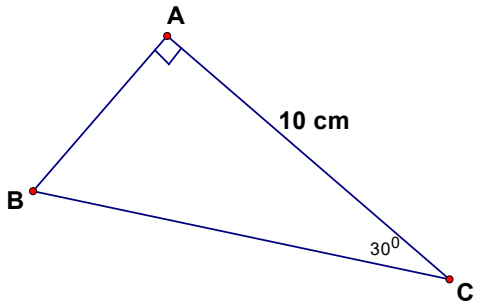
Chú ý: Các bài toán về giải tam giác vuông bao gồm:

+ Giải tam giác vuông khi biết độ dài 1 cạnh và số đo 1 góc nhọn

+ Giải tam giác vuông khi biết độ dài 2 cạnh

Bài 1. Giải tam giác ABC vuông tại A, biết AC = 10 cm, góc C bằng 30^0.

Lời giải



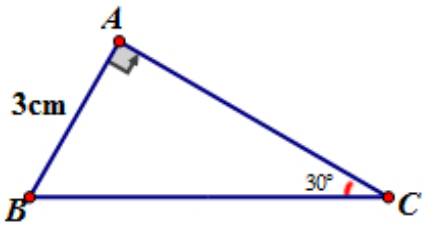
Ta có: $\hat{B} = 60^0$ (do phụ góc C)

$AB = AC.\tan C = 10.\tan 30^0 = \dfrac{10\sqrt{3}}{3} cm$

$BC = \dfrac{AC}{\cos C} = \dfrac{10}{\cos 30^0} = \dfrac{20\sqrt{3}}{3} cm$

Bài 2. Giải tam giác ABC vuông tại A, biết AB = 3cm, góc C bằng 30^0

Lời giải



+ $\hat{B} = 60^0$ (do phụ góc C)

+ $AC = AB.\tan B = 3.\tan 60^0 = 3\sqrt{3}$ (cm)

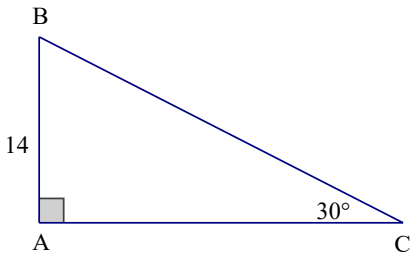
+ Áp dụng hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông ta có:

$$\sin C = \frac{AB}{BC} \Rightarrow BC = \frac{AB}{\sin C} = \frac{3}{\sin 30^0} = 6$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Giải tam giác ABC vuông tại A. Cho biết $AB = 14cm, \widehat{C} = 30^0$

Lời giải



Ta có ABC vuông tại $A \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 90^0$

Mà $\widehat{C} = 30^0 \Rightarrow \widehat{B} = 60^0$

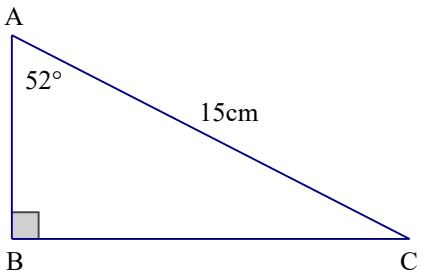
+ $AC = AB.\tan\widehat{B} = 14.\tan 60^0 \Rightarrow AC = 14\sqrt{3}\left(cm\right)$

+ $\cos\widehat{B} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow BC = \frac{AB}{\cos\widehat{B}} = \frac{AB}{0,5} = 28\left(cm\right)$

Vậy $\widehat{B} = 60^0; AC = 14\sqrt{3}\left(cm\right); BC = 28\left(cm\right)$

Bài 4. Giải tam giác ABC vuông tại B. Cho biết $AC = 15cm, \widehat{A} = 52^0$ (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải



Ta có ABC vuông tại $B \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{C} = 90^0$

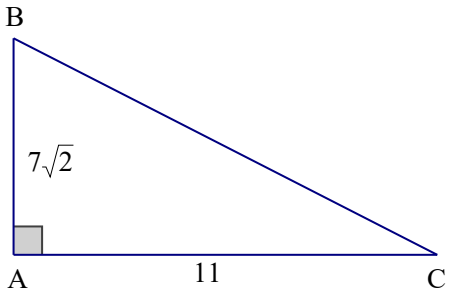
Mà $\widehat{A} = 52^0 \Rightarrow \widehat{C} = 38^0$

+ $AB = AC.\sin\widehat{C} = 15.\sin 38^0 \approx 9,2cm$

+ $BC = AC.\sin\widehat{A} = 15.\sin 52^0 \approx 11,8cm$

Bài 5. Giải tam giác ABC vuông tại A. Cho biết $AB = 7\sqrt{2}cm, AC = 11cm$ (cạnh làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai, góc làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai, góc làm tròn đến độ).

Lời giải



Ta có: $\tan\widehat{B}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{11}{7\sqrt{2}}=1,1145\Rightarrow\widehat{B}=48^0$

Lại có: $\widehat{B}+\widehat{C}=90^0\Rightarrow\widehat{C}=42^0$

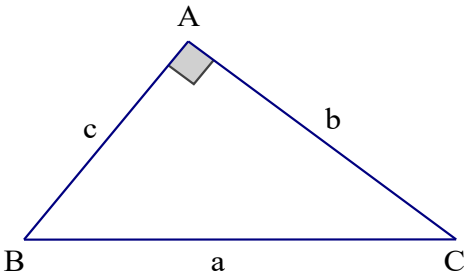
Áp dụng định lí Pythagore vào tam giác vuông ABC, ta có: $BC^2=AB^2+AC^2=\left(7\sqrt{2}\right)^2+11^2=219$

$\Rightarrow BC=\sqrt{219}\approx14,80\left(cm\right)$.

Bài 6. Cho tam giác ΔABC vuông tại A. Gọi $BC=a,AC=b,AB=c$. Giải ΔABC, biết:

a) $c=3,8cm;\widehat{B}=51^0$ b) $a=11cm,\widehat{C}=60^0$

Lời giải



a) Xét tam giác ΔABC vuông tại A.

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông, ta có:

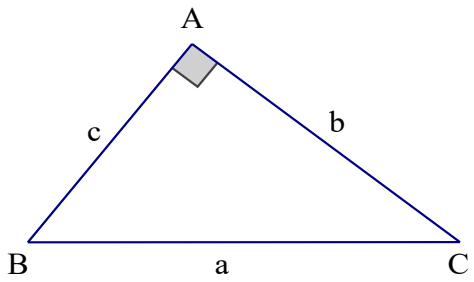
$\cos\widehat{B}=\dfrac{AB}{BC}\Leftrightarrow\cos51^0=\dfrac{3,8}{BC}\Rightarrow BC=6cm;AC=4,6cm$

b) Ta có: $\widehat{C}=60^0\Rightarrow\widehat{B}=30^0\Rightarrow AB=sin60^0.11=8,6cm;AC=4,3cm$

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $BC=a,AC=b,AB=c$. Hãy giải tam giác ABC, biết:

a) $b=5,4cm;\widehat{C}=30^0$ b) $c=10cm;\widehat{C}=45^0$

Lời giải



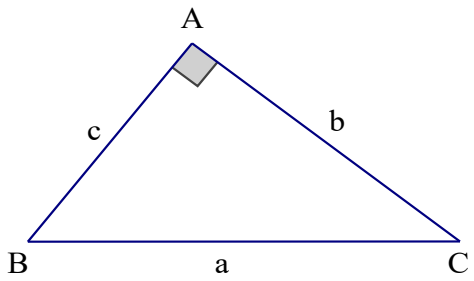
a) Xét tam giác ABC vuông tại A, có: $tan\widehat{C} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow tan30^0 = \frac{AB}{5} \Rightarrow AB \Rightarrow BC \Rightarrow \widehat{B}$

b) Xét tam giác ABC vuông tại A, có: $tan\widehat{C} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow tan45^0 = \frac{3}{AC} \Rightarrow AC \Rightarrow AB \Rightarrow \widehat{B}$

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $BC = a, AC = b, AB = c$. Hãy giải tam giác ABC, biết:

a) $a = 15cm, b = 10cm$ b) $b = 12cm, c = 7cm$

Lời giải

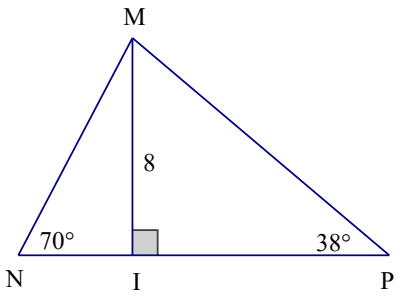


a) Dùng định lý Pythagore tính được $AB \Rightarrow \widehat{B} \Rightarrow \widehat{C}$

b) Dùng định lý Pythagore tính được $BC \Rightarrow \widehat{B} \Rightarrow \widehat{C}$

Bài 9. Giải tam giác MNP có $\widehat{N} = 70^0; \widehat{P} = 38^0$, đường cao $MI = 8cm$. Diện tích ΔMNP bằng? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải



Ta có: $NI = MI.\cot\widehat{N} = 8.\cot 70^0 = 2,91(cm)$

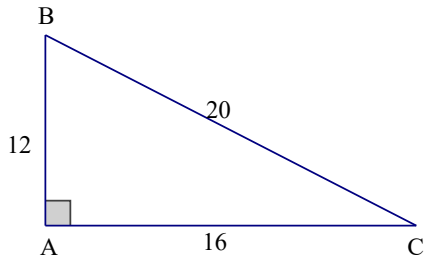
+ $PI = MI.\cot\widehat{P} = 8.\cot 38^0 = 8.\frac{1}{0,78} = 10,26(cm)$

$\Rightarrow NP = NI + IP = 2,91 + 10,26 = 13,17(cm)$

$\Rightarrow S_{MNP}=\frac{1}{2}.8.13,17=52,68\left(cm^2\right)$

Bài 10. Giải tam giác ABC có $AB=12cm, AC=12cm, BC=20cm$. Tính các góc của tam giác ABC (làm tròn đến độ).

Lời giải



Ta có $\begin{cases} AB^2+AC^2=12^2+16^2=400 \\ BC^2=20^2=400 \end{cases} \Rightarrow AB^2+AC^2=BC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A (Pythagore đảo)

$\Rightarrow \sin\hat{A}=\frac{AC}{BC}=\frac{16}{20}=0,8\Rightarrow \hat{B}=53^0$

Ta có: $\hat{C}=90^0-\hat{B}=90^0-53^0=37^0$.

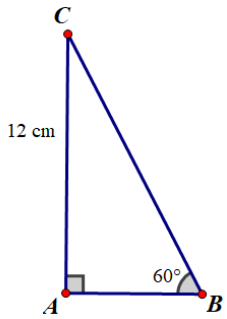
DẠNG 2
TÍNH CẠNH, GÓC VÀ DIỆN TÍCH TAM GIÁC

Phương pháp

Làm xuất hiện tam giác vuông để áp dụng các hệ thức trên bằng cách kẻ thêm đường cao.

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC = 12cm, \widehat{B} = 60^0$. Hãy tính $\widehat{C}, AB, BC$ và diện tích tam giác ABC.

Lời giải



Vì ΔABC vuông tại A nên $\widehat{A} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 90^0 \rightarrow \widehat{C} = 90^0 - \widehat{B} = 90^0 - 60^0 = 30^0$

$AB = AC.\cot \widehat{B} = 12.\cot 60^0 = 12.\dfrac{\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3} \approx 6,9\left(cm\right)$

$BC^2 = AC^2 + AB^2 = 12^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2 = 192$

$\rightarrow BC = \sqrt{192} = 8\sqrt{3} \approx 13,9\left(cm\right)$

Diện tích tam giác ABC:

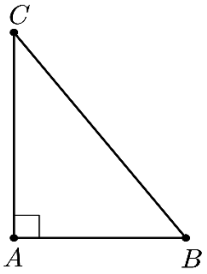
$S = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{1}{2}.4\sqrt{3}.12 = 24\sqrt{3} \approx 41,6\left(cm^2\right)$

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A. Biết $AB = 3$ cm, $BC = 3$ cm .

a) Tính độ dài cạnh AC.

b) Tính $\sin A$ và $\cos B$?

Lời giải



a) Tính độ dài cạnh AC.

Tam giác ABC vuông tại A, Áp dụng định lí Pythagore, ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$\Rightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2$

$\Rightarrow AC^2 = 5^2 - 3^2$

$\Rightarrow AC^2 = 16$

$\Rightarrow AC = 4(\text{cm})$.

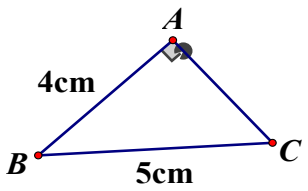
b) Tính $\sin A$ và $\cos B$?

Tam giác ABC vuông tại A, Áp dụng tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông, ta có:

$\sin A = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{4}{5}$; $cosA = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{3}{5}$.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 4cm, BC = 5cm$. Tính độ dài cạnh AC và $\sin C$

Lời giải



Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông ABC ta có :

$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow 4^2 + AC^2 = 5^2 \Rightarrow AC = 3(cm)$

Xét tam giác vuông ABC có : $\sin C = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{4}{5}$

Vậy $AC = 3cm, \sin C = \dfrac{4}{5}$

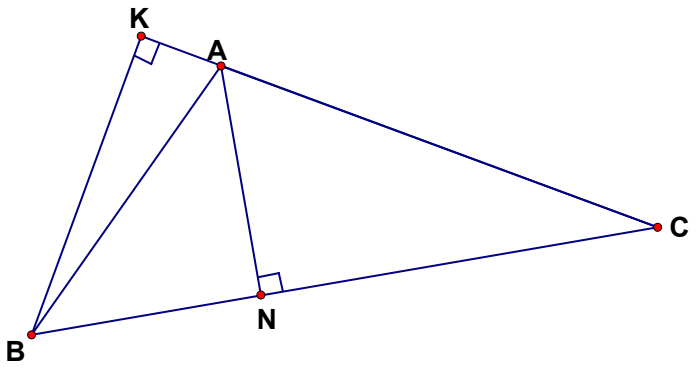
Bài 4. Cho tam giác ABC, trong đó BC = 16 cm, $\widehat{ABC} = 45^0$; $\widehat{ACB} = 30^0$. Gọi N là chân đường vuông góc kẻ từ A đến cạnh BC.

a. Hãy tính đoạn thẳng AN.

b. Hãy tính cạnh AC.

(Làm tròn đến số thập phân thứ hai)

Lời giải



a. Từ B kẻ BK vuông góc với AC tại K

ta có BK = BC.sinC = 16.sin30^0 = 8cm

$\angle KBA = 15^0$

$$AB = \frac{BK}{\cos KBA} = \frac{8}{\cos 15^0} \approx 8,28cm$$

Tam giác ANB vuông cân tại N nên $AN = \frac{AB}{\sqrt{2}} \approx 5,86cm$

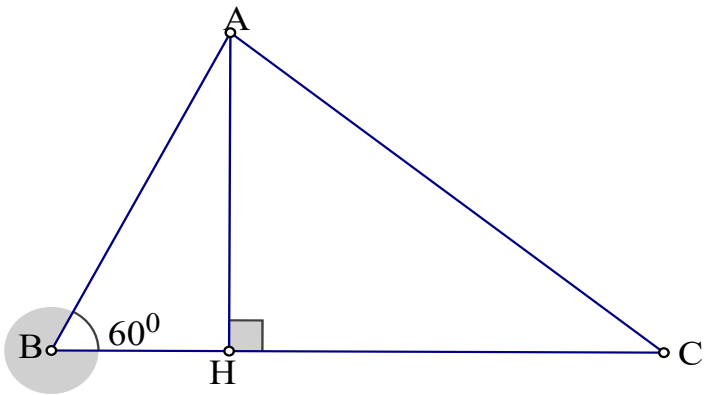
b) AN.BC = BK.AC = 2S$_{ABC}$ $\Rightarrow AC = \frac{AN.BC}{BK} \approx 11,72cm$

Bài 5. Cho tam giác ABC có $AB = 16, AC = 14$ và $\widehat{B} = 60^0$.

a) Tính độ dài cạnh BC

b) Tính diện tích tam giác ABC.

Lời giải



a) Kẻ đường cao AH.

Xét tam giác vuông ABH, ta có:

$$BH = AB.\cos B = AB.\cos 60^0 = 16.\frac{1}{2} = 8$$

$$AH = AB.\sin B = AB.\sin 60^0 = 16.\frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}.$$

Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác vuông AHC ta có:

$HC^2 = AC^2 - AH^2 = 14^2 - \left(8\sqrt{3}\right)^2 = 196 - 192 = 4 \Rightarrow HC = 2$.

Suy ra $BC = CH + HB = 2 + 8 = 10$.

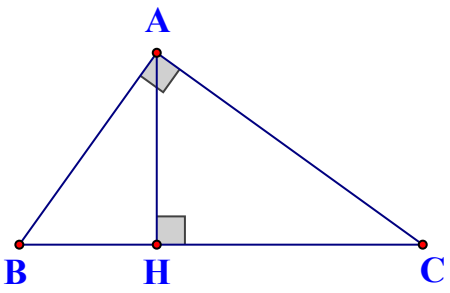
b) $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC.AH = \frac{1}{2}.10.8\sqrt{3} = 40\sqrt{3}$ (đvdt)

Bài 6. Trong một tam giác vuông, đường cao ứng với cạnh huyền chia tam giác thành hai phần có diện tích bằng $54\,\text{cm}^2$ và $96\,\text{cm}^2$. Độ dài cạnh huyền bằng

A. 27 cm. **B**. 48 cm. **C**. 25 cm. **D**. 21 cm.

Lời giải

Chọn C



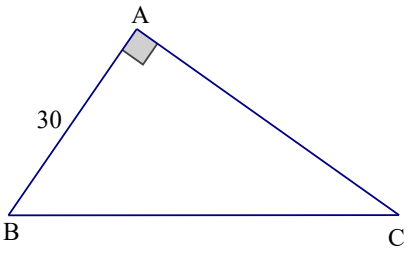
Ta có $S_{ABH}.S_{ACH} = 54.96 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot AH^2.BH.CH = 54.96 \Leftrightarrow AH^4 = 4.54.96 = 12^4 \Leftrightarrow AH = 12$.

Lại có $S_{ABC} = \frac{1}{2} AH.BC \Leftrightarrow BC = \frac{2.S_{ABC}}{AH} = \frac{2(54+96)}{12} = 25\,(\text{cm})$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A. Biết $AB = 30cm$, $\widehat{B} = \alpha, \tan\alpha = \frac{5}{12}$. Tính BC, AC

Lời giải

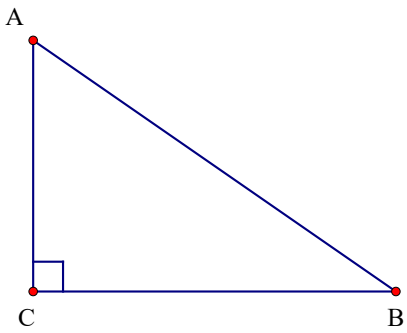


Ta có:

$\widehat{B} = \alpha, \tan\alpha = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{AC}{30} = \frac{5}{12} \Rightarrow AC = \frac{150}{12} = 12,5 \Rightarrow BC$

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 5cm$, $\cot B = \frac{5}{8}$. Tính độ dài các đoạn thẳng AC và BC

Lời giải



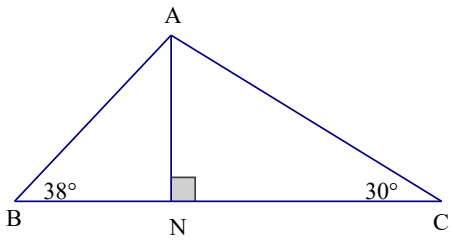
Áp dụng tỉ số $cotB$ trong tam giác vuông ABC và định lý pythagore ta tính được $AC = 8cm, BC = \sqrt{89}cm$

Bài 9. Cho tam giác ΔABC có $\widehat{B} = 38^0, \widehat{C} = 30^0$, $BC = 11cm$. Gọi N là chân đường vuông góc hạ từ A xuống cạnh BC. Hãy tính.

a) Độ dài đoạn thẳng AN.

b) Độ dài đoạn thẳng.

Lời giải



a) Cách 1: Sử dụng các tỉ số lượng giác trong các tam giác vuông NAB và NAC, ta có:

$BN.\tan B = NC.\tan C$

Chú ý: $BN + NC = BC \Rightarrow BN \approx 4,67cm; AN \approx 3,65cm$

Cách 2: Gợi ý: Kẻ $CH \perp AB = H$

b) Xét tam giác ANC vuông, có $AC = \dfrac{AN}{\sin C} \Rightarrow AC \approx 7,3cm$

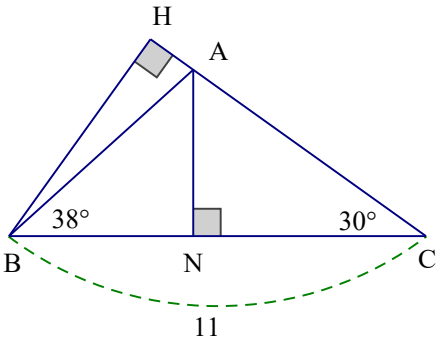
Bài 10. Cho tam giác ΔABC có $BC = 11cm$, $\widehat{B} = 38^0, \widehat{C} = 30^0$. Gọi N là chân đường vuông góc hạ từ A xuống cạnh BC. Hãy tính

a) Độ dài đoạn thẳng AN

b) Độ dài cạnh AC

c) Tính diện tích tam giác ABC

Lời giải



Kẻ $BH \perp AC \Rightarrow \Delta BHC$ vuông tại $H \Rightarrow \widehat{HBC} = 60^0; \widehat{HBA} = 60^0 - 38^0 = 22^0$

Do đó $BH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}.11 = 5,5(cm)$ (trong tam giác vuông cạnh đối diện với góc 30^0 bằng nửa cạnh huyền)

a) Tam giác BHA vuông tại H, cạnh huyền BA và cạnh $BH = 5,5cm$ kề với

$\widehat{B} = 22^0 \Rightarrow \cos 22^0 = \frac{BH}{AB} \Rightarrow AB = \frac{5,5}{\cos 22^0} \approx 5,932(cm)$

Kẻ $AN \perp BC$

Trong tam giác vuông ABN vuông tại N có AN đối diện với góc 38^0 nên $\sin 38^0 = \frac{AN}{AB}$

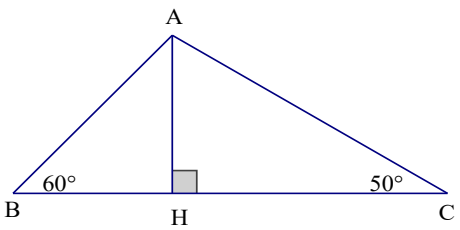
$\Rightarrow AN = AB.\sin 38^0 = 5,932.\sin 38^0 \approx 3,652(cm)$

b) Tam giác ANC vuông tại $N, \widehat{C} = 30^0 \Rightarrow AC = \frac{AN}{\sin 30^0} \approx \frac{3,652}{0,5} = 7,304(cm)$

c) Ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AN.BC = \frac{1}{2}.3,652.11 = 20,086(cm^2)$.

Bài 11. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^0$, $\widehat{C} = 50^0, AC = 35cm$. Tính diện tích tam giác ABC

Lời giải



Xét tam giác ABC, có: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^0 \Rightarrow \widehat{A} = 70^0$

Vẽ đường cao $AH\left(H \in BC\right)$

Ta có: $\sin \widehat{C} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = \sin \widehat{C}.AC = \sin 50^0.AC = 26,8(cm)$

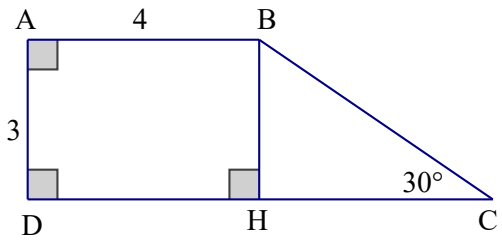
$\sin \widehat{B} = \frac{26,8}{AB} \Rightarrow AB = \frac{26,8}{\sin 60^0} = 38,5(cm)$

Xét tam giác ABH vuông tại H, có: $BH = 15,8(cm) \Rightarrow CH = 22,7(cm) \Rightarrow BC \approx 38,5(cm)$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}.BC.AH=\frac{1}{2}.26,8.38,5=510(cm^2)$

Bài 12. Cho tứ giác $ABCD$, có: $\widehat{A}=\widehat{D}=90^0,\widehat{C}=40^0$ $AB=4cm, AD=3cm.S_{ABCD}=?$

Lời giải



Kẻ $BH\perp CD\left(H\in CD\right)$, ta có tứ giác $ABHD$ là hình chữ nhật (tứ giác có 3 góc vuông)

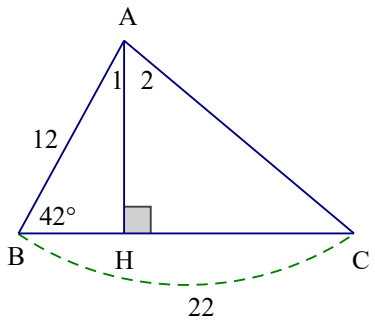
$\Rightarrow BH=3cm, DH=4cm$

Xét tam giác BHC vuông tại H, có: $\tan\widehat{C}=\tan 40^0=\frac{BH}{HC}\Rightarrow HC=\frac{3}{0,839}=3,58\left(cm\right)$

$S_{ABCD}=\frac{(AB+CD).AD}{2}=\frac{(4+7,58).3}{2}=17,37(cm^2)$

Bài 13. Cho tam giác ABC, đường cao $AH\left(H\in BC\right)$, $\widehat{B}=42^0, AB=12cm, BC=22cm.$ Tính các cạnh và các góc của tam giác ABC.

Lời giải



Xét tam giác ABH vuông tại H, có: $\widehat{B}=42^0\Rightarrow\widehat{A_1}=48^0$

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông, ta có: $AH=AB.\sin\widehat{B}=12.\sin 42^0=8cm$

$BH=AB.cos\widehat{B}=8,916\left(cm\right)\Rightarrow HC=13\left(cm\right)$

Ta lại có: $\tan\widehat{C}=\frac{AH}{HC}=0,614\Rightarrow\widehat{C}=31^0 30'\Rightarrow\widehat{A_2}=58^0 30'\Rightarrow\widehat{BAC}=106^0 30'$

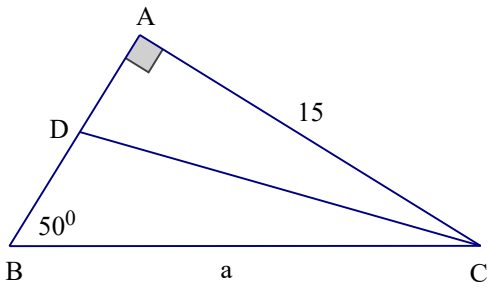
$AH=AC.\sin\widehat{C}\Rightarrow AC=\frac{AH}{\sin\widehat{C}}=15,350(cm)$

Bài 14. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AC=15cm,\widehat{B}=50^0$. Hãy tính độ dài

a) AB, AC

b) phân giác CD

Lời giải



a) Tam giác ABC vuông ở A, theo hệ thức lượng về cạnh và góc trong tam giác vuông, ta có:

$AB = AC.\cot \widehat{B} = 15.\cot 50^0 \approx 15.0,8391 \approx 12,59(cm)$

$AC = BC.\sin \widehat{B} \Rightarrow BC = \dfrac{AC}{\sin \widehat{B}} = \dfrac{15}{\sin 50^0} \approx \dfrac{15}{0,7660} \approx 19,58(cm)$

b) Tam giác ABC vuông ở A nên: $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^0 \Rightarrow \widehat{C} = 90^0 - \widehat{B} = 40^0$

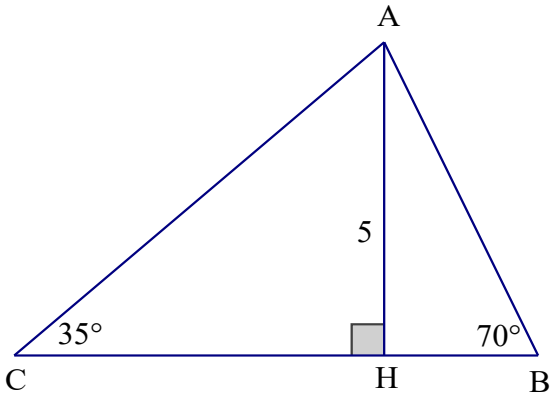
CD là tia phân giác của $\widehat{C}$, ta có: $\widehat{ACD} = \dfrac{1}{2}\widehat{C} = \dfrac{1}{2}.40^0 = 20^0$

Trong tam giác vuông ACD vuông tại A, theo hệ thức lượng về cạnh và góc ta có:

$AC = CD.\cos \widehat{ACD}.\cos 20^0 \Rightarrow CD = \dfrac{AC}{\cos 20^0} = \dfrac{15}{0,9397} \approx 15,96(cm)$.

Bài 15. Cho tam giác ABC, đường cao $AH = 5(cm)$, $\widehat{B} = 70^0, \widehat{C} = 35^0$. Tính các cạnh của ΔABC

Lời giải



Tam giác AHB vuông tại $H \Rightarrow AH = AB.\sin \widehat{B} \Rightarrow AB = \dfrac{AH}{\sin \widehat{B}} = \dfrac{5}{\sin 70^0} \approx 5,32(cm)$

Tam giác AHC vuông tại $H \Rightarrow AH = AC.\sin \widehat{C} \Rightarrow AC = \dfrac{AH}{\sin \widehat{C}} = \dfrac{5}{\sin 35^0} \approx 8,72(cm)$

Ta lại có: $BH = AH.\cot \widehat{B} = AH.\cot 70^0 \approx 5.0,3640 \approx 1,82(cm)$

$CH = AH.\cot \widehat{C} = AH.\cot 35^0 \approx 5.1,4281 \approx 7,14(cm)$

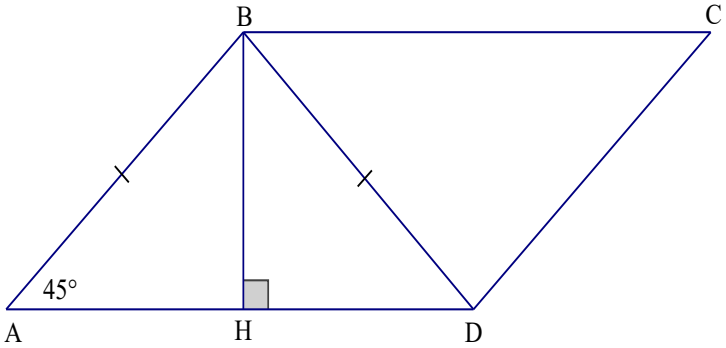
Vậy $BC = BH + HC = 1,82 + 7,14 = 8,96(cm)$

Bài 16. Cho hình bình hành $ABCD$, có: $\widehat{A}=45^0, AB=BD=18(cm)$

a) Tính AB

b) Tính S_{ABCD}

Lời giải



a) Xét tam giác ABD, có $AB=AD$ nên tam giác ABD cân tại B

Kẻ $BH\perp AD\Rightarrow H$ là trung điểm của AD

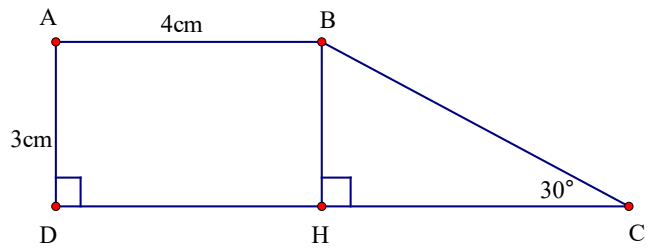
Xét tam giác AHB vuông tại H. Áp dụng hệ thức liên hệ giữa cạnh và góc trong tam giác vuông ta có:

$$\begin{cases} BH=AB.\sin\widehat{A}=45^0=9\sqrt{2}(cm) \\ AH=AB.\cos\widehat{A}=9\sqrt{2}\,(cm) \end{cases}\Rightarrow AD=2AH=18\sqrt{2}(cm)$$

b) $S_{ABCD}=2.S_{ABD}=2.\dfrac{1}{2}.AD.BH=342(cm^2)$

Bài 17. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A}=\widehat{D}=90^0;\widehat{C}=30^0$ $AB=4cm, AD=3cm.$ Tính S_{ABCD}

Lời giải

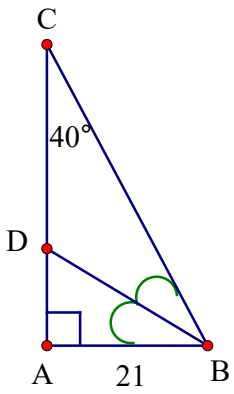


- Kẻ $BH\perp CD=H$

- Chú ý diện tích đa giác $ABCD$ bằng tổng diện tích hai đa giác $ABHD$ và BHC

Bài 18. Cho tam giác ABC vuông tại A, biết $AB=21cm,\widehat{C}=40^0$. Tính độ dài đường phân giác BD của $\widehat{ABC}$, với D nằm trên cạnh AC

Lời giải

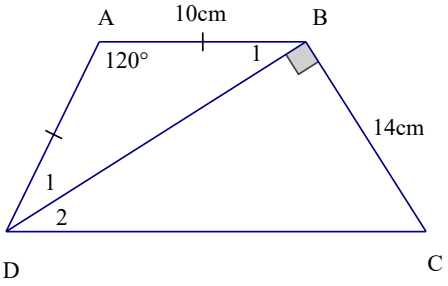


$\widehat{ABD} = 25^0$. Áp dụng tỉ số lượng giác trong tam giác vuông ABD ta có:

$$BD = \frac{21}{cos25^0} \approx 21,19(cm)$$

Bài 19. Cho hình thang $ABCD$ sao cho $AB = AD = 10cm, BC = 14cm, \widehat{A} = 120^0$, BC vuông góc với đường chéo BD. Tính chu vi của $ABCD$

Lời giải



Ta có: ΔABD cân tại $A(AB = AD = 10cm)$

$$\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{D_1} = \frac{180^0 - \widehat{A_1}}{2} = \frac{180^0 - 120^0}{2} = 30^0$$

$\Rightarrow \widehat{D_2} = \widehat{B_1} = 30^0$ (so le trong)

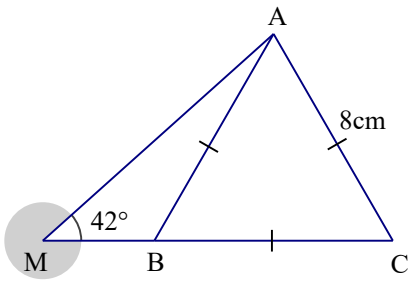
ΔBCD vuông tại B, có:

$$sin\widehat{D_2} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow CD = \frac{BC}{sin\widehat{D_2}} = \frac{14}{0,5} = 28(cm)$$

Do đó $P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 62(cm)$

Bài 20. Hình vẽ cho biết ΔABC là tam giác đều cạnh $8cm$ và $\widehat{AMB} = 42^0$. Tính AM (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai)

Lời giải



Vẽ đường cao $AH\left(H\in BC\right)$

Do ΔABC đều nên AH cũng là đường trung tuyến $\Rightarrow HB=HC=4cm$

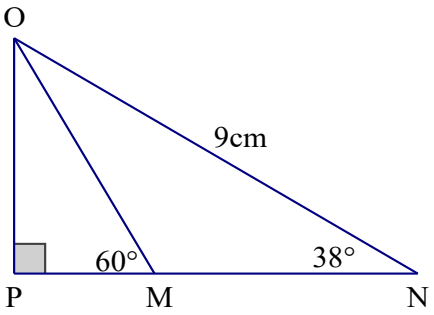
Từ ΔABH vuông tại H, ta có:

$AH^2=AB^2-BH^2=8^2-4^2=48\Rightarrow AH=4\sqrt{3}\left(cm\right)$

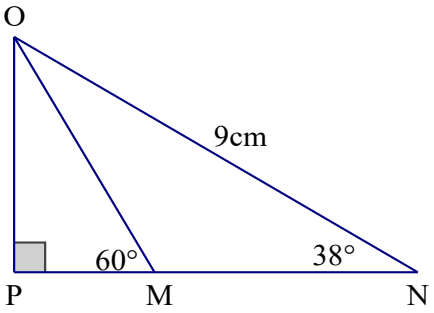
Từ ΔAHM vuông tại H, ta có:

$sin\widehat{M}=\frac{AH}{AM}\Rightarrow AM=\frac{AH}{sin\widehat{M}}=\frac{4\sqrt{3}}{0,669}\approx10,34\left(cm\right)$

Bài 21. Với hình vẽ đã cho. Tính diện tích tam giác OMN (làm tròn kết quả đến chữ số hàng đơn vị)



Lời giải



ΔOPN vuông tại P nên ta có:

+ $OP=ON.sin\widehat{N}=9.sin38^0\approx5,54\left(cm\right)$

+ $NP=ON.cos\widehat{N}=9.cos38^0\approx7,09\left(cm\right)$

ΔOPM vuông tại P nên ta có:

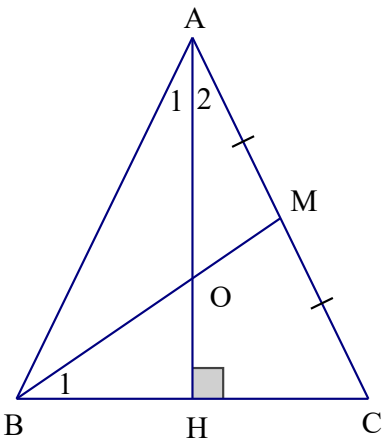
+ $MP=\dfrac{OP}{tan\widehat{M}}=\dfrac{5,54}{tan60^0}=\dfrac{5,54}{\sqrt{3}}=3,2(cm)$

Ta có: $MN=NP-MP=7,09-3,2=3,89(cm)$

Do đó $S_{OMN}=\dfrac{1}{2}OP.MN=\dfrac{1}{2}.5,54.3,89\approx 11(cm^2)$

Bài 22. Cho ΔABC cân tại A có $\widehat{A}=30^0$, đường trung tuyến BM. Tính số đo $\widehat{CBM}$ (làm tròn kết quả đến độ)

Lời giải



Vẽ đường cao AH của ΔABC cắt BM tại O

Do ΔABC cân tại A nên AH cũng là đường trung tuyến, đường phân giác

$\Rightarrow O$ là trọng tâm của ΔABC và $\widehat{A_1}=\widehat{A_2}=15^0$

ΔABH vuông tại H, ta có $tan\widehat{A_1}=\dfrac{BH}{AH}\ (1)$

ΔOHB vuông tại H, ta có $tan\widehat{B_1}=\dfrac{OH}{BH}\ (2)$

Nhân (1) và (2) vế với vế, ta được:

$tan\widehat{A_1}.tan\widehat{B_1}=\dfrac{BH}{AH}.\dfrac{OH}{BH}=\dfrac{OH}{AH}=\dfrac{1}{2}$ (O là trọng tâm của ΔABC)

$\Rightarrow tan\widehat{B_1}=\dfrac{1}{3.tan\widehat{A_1}}=\dfrac{1}{3.tan15^0}=\dfrac{1}{3.0,2679}=1,2442$

$\Rightarrow \widehat{B_1}=51^012'\approx 51^0$

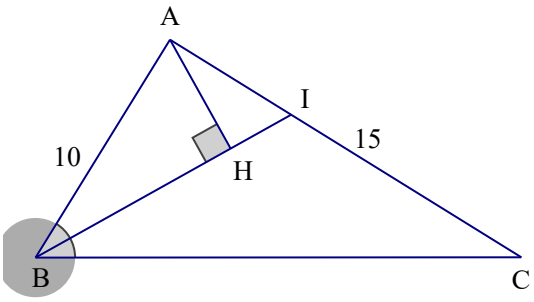
Bài 23. Cho tam giác ABC vuông tại A, có: $AB=10cm, AC=15cm$

a. Tính góc B

b. Phân giác trong của góc B cắt AC tại I. Tính AI

c. Vẽ AH vuông góc với BI tại H. Tính AH

Lời giải



a) Xét tam giác ABC vuông tại A, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$tan\widehat{B}=\frac{AC}{AB}=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}\Rightarrow \widehat{B}=56^0$

b) Ta có:

$tan\widehat{ABI}=\frac{AI}{AB}\Rightarrow AI=AB.tan\widehat{ABI}=10.tan28^0=5,3(cm)$

c) $Sin\widehat{ABH}=\frac{AH}{AB}\Rightarrow AH=AB.Sin28^0=4,7(cm)$

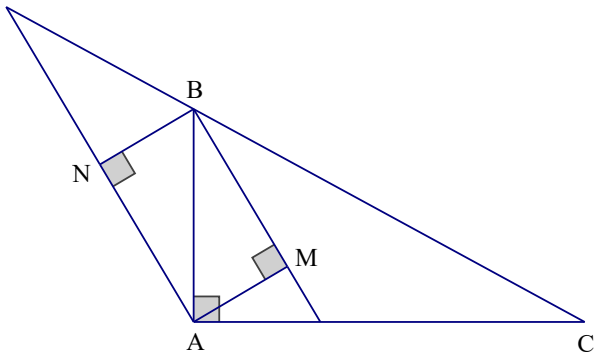
Bài 24. Cho tam giác ABC vuông tại A, góc $\widehat{C}=30^0, BC=10cm$

a. Tính AB, AC

b. Kẻ từ A các đường thẳng AM, AN lần lượt vuông góc với các đường phân giác trong và ngoài của góc B. Chứng minh $MN=AB$

c. Chứng minh các tam giác MAB và ABC đồng dạng. Tìm tỉ số đồng dạng.

Lời giải



b) Chú ý: Hai đường phân giá của hai góc kề bù vuông góc với nhau

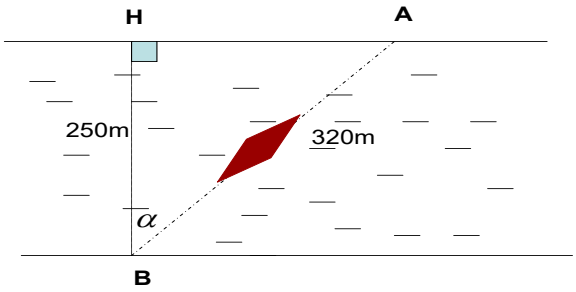
c) Ta có: BM là phân giác của góc B. Từ đó tính được số đo các góc của tam giác MAB

*) Chú ý: Tam giác MAB và ABC đều là các tam giác nửa đều, từ đó tính được tỉ số đồng dạng là 0,5.

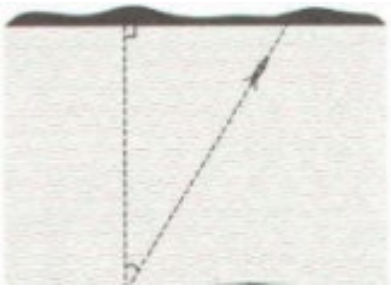
BÀI 3
ỨNG DỤNG CỦA TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

DẠNG 1
ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG CÁCH

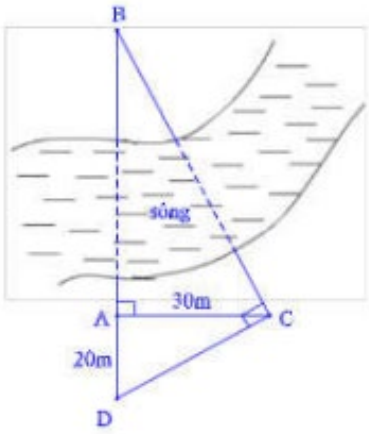
Bài 1. Một khúc sông rộng khoảng 250m. Một con đò chéo qua sông bị dòng nước đẩy xiên nên phải chèo khoảng 320m mới sang được bờ bên kia. Hỏi dòng nước đã đẩy chiếc đò lệch đi một góc bằng bao nhiêu độ.(góc α ở hình vẽ)



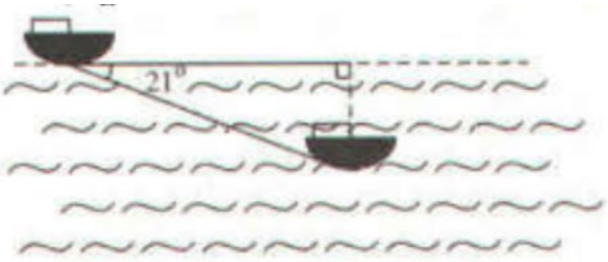
Bài 2. Một con thuyền qua khúc sông với vận tốc $3,5km/h$ mất hết 6 phút. Do dòng nước chảy mạnh nên đã đẩy con thuyền đi qua con sông trên đường đi tạo với bờ một góc 25^0. Hãy tính chiều rộng của con sông?



Bài 3. Muốn tính khoảng cách từ điểm A đến điểm B bên kia bờ sông, bạn Minh Hiền vạch một đường vuông góc với AB. Trên đường vuông góc này lấy một đoạn thẳng $AC = 30\text{m}.$, rồi vạch CD vuông góc với phương BC cắt AB tại D (xem hình vẽ). Đo $AD = 20\text{m},$ từ đó bạn Minh Hiền tính được khoảng cách từ A đến B. Em hãy tính độ dài AB và số đo góc ACB.



Bài 4. Trong một buổi luyện tập, một tàu ngầm ở trên mặt biển bắt đầu lặng xuống và di chuyển theo một đường thẳng tạo với mặt nước một góc 21°.

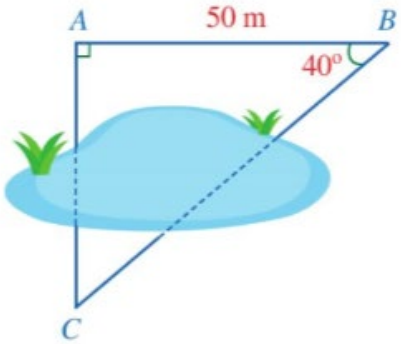


a) Khi tàu chuyển động theo hướng đó và đi được 250m thì tàu ở độ sâu bao nhiêu so với mặt nước (làm tròn đến đơn vị mét).

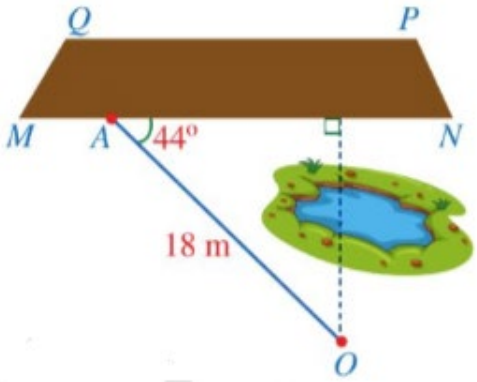
b) Giả sử tốc độ trung bình của tàu là 9km/h thì sau bao lâu (tính từ lúc bắt đầu lặn) tàu ở độ sâu 200m (cách mặt nước biển 200m) làm tròn đến phút.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

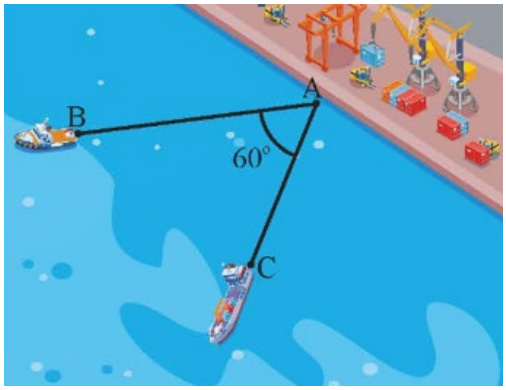
Bài 5. Hình vẽ bên dưới mô tả ba vị trí A, B, C là ba đỉnh của một tam giác vuông và không đo được trực tiếp các khoảng cách từ C đến A và từ C đến B. Biết $AB = 50(m), \widehat{ABC} = 40^0$. Tính các khoảng cách CA và BC (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).



Bài 6. Người ta cần ước lượng khoảng cách từ vị trí O đến khu đất có dạng hình thang MNPQ nhưng không thể đo được trực tiếp, khoảng cách đó được tính bằng khoảng cách từ O đến đường thẳng MN. Người ta chọn vị trí A ở đáy MN và đo được $OA = 18(m), \widehat{ABC} = 44^0$ (Hình vẽ). Tính khoảng cách từ vị trí O đến khu đất (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét).



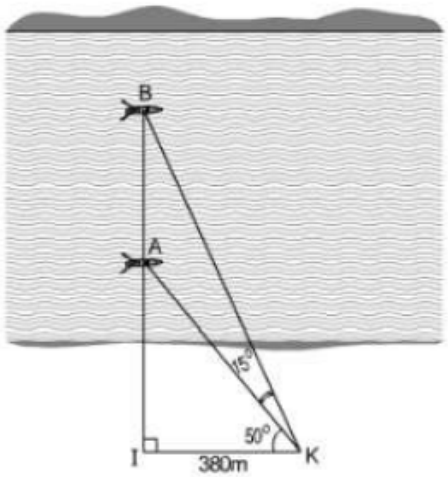
Bài 7. Hai chiếc tàu thủy B và C cùng xuất phát từ một vị trí A, đi thẳng theo hai hướng tạo thành một góc 60° (Hình vẽ). Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lí/giờ, tàu C chạy với tốc độ 15 hải lí/giờ. Hỏi sau 1,5 giờ hai tàu B và C cách nhau bao nhiêu hải lí (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?



Lời giải

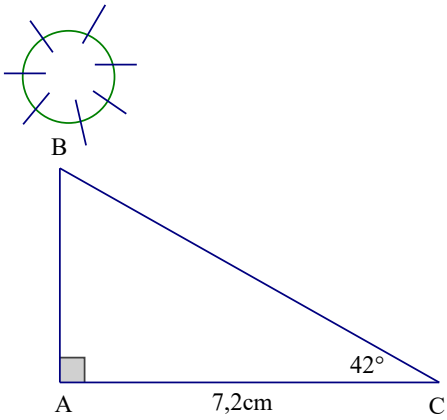
Bài 8. Hai người A và B đứng cùng bờ sông nhìn ra một cồn nổi giữa sông. Người A nhìn ra cồn với một góc $43°$ so với bờ sông, người B nhìn ra cồn với một góc $28°$ so với bờ sông. Hai người đứng cách nhau $250m$. Hỏi cồn cách bờ sông hai người đang đứng bao nhiêu m?

Bài 9. Hai chiếc thuyền A và B ở vị trí được minh họa như hình dưới dây. Tính khoảng cách giữa chúng. (làm tròn đến met)



DẠNG 2
ƯỚC LƯỢNG CHIỀU CAO

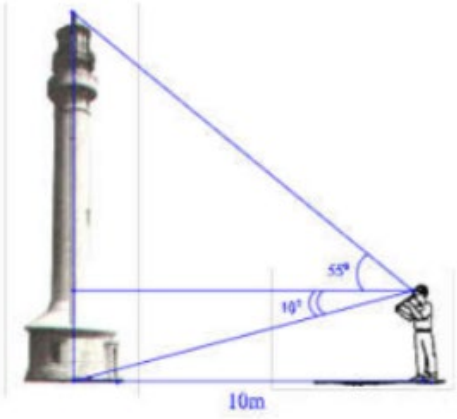
Bài 10. Một cột đèn có bóng trên mặt đất dài 7,2 cm. Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ 42^0. Tính chiều cao của cột đèn?



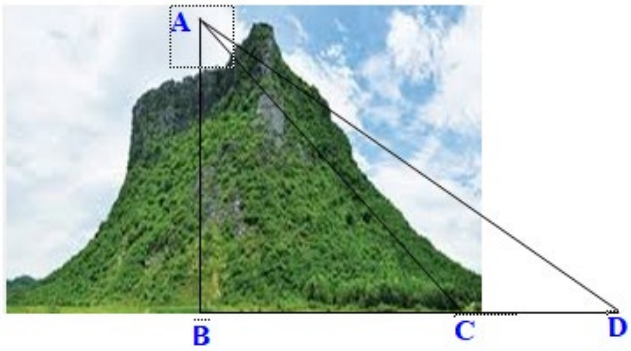
Bài 11. Một cầu trượt trong công viên có độ dốc là 28^0 và có độ cao là $2,1cm$. Tính độ dài của mặt cầu trượt (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)

Bài 12. Thang xếp chữ A gồm hai thang đơn tựa vào nhau. Để an toàn, mỗi thang đơn tạo với mặt đất một góc khoảng $75°$. Nếu muốn tạo một thang xếp chữ A cao 2m tính từ mặt đất thì mỗi thang đơn phải dài bao nhiêu?

Bài 13. Một người quan sát đứng cách một cái tháp $10\,\text{m}$, nhìn thẳng đỉnh tháp và chân tháp lần lượt dưới 1 góc 55° và 10° so với phương ngang của mặt đất. Hãy tính chiều cao của tháp.



Bài 14. Đo chiều cao quả núi *(hình vẽ)*



Để đo chiều cao AB của một ngọn núi, ta chọn một điểm C và điểm D cách nhau 50m sao cho tia DC hướng về "tâm" ngọn núi. Dùng giác kế ta đo được hai góc $C \approx 22^0 18'$ và góc D $\approx 20^0 36'$. Tính chiều cao bằng mét của quả núi.

Bài 15. Tòa nhà Bitexco Financial (hay Tháp Tài chính Bitexco) là một tòa nhà chọc trời được xây dựng tại trung tâm Quận 1, Thành phố Hồ Chí Minh. Tòa nhà có 68 tầng (không tính 3 tầng hầm). Biết rằng, khi toà nhà có bóng in trên mặt đất dài 47,3 mét, thì cùng thời điểm đó có một cột cờ (được cắm thẳng đứng trên mặt đất) cao 15 mét có bóng in trên mặt đất dài 2,64 mét.

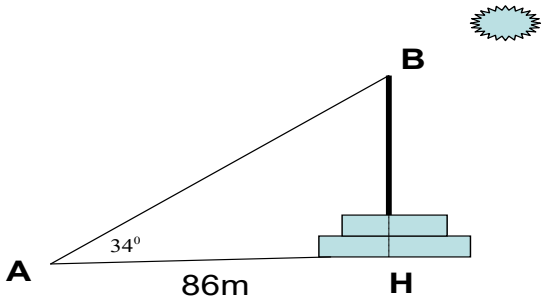
a) Tính góc tạo bởi tia nắng mặt trời với mặt đất (đơn vị đo góc được làm tròn đến độ).

b) Tính chiều cao của toà nhà, (làm tròn đến hàng đơn vị).

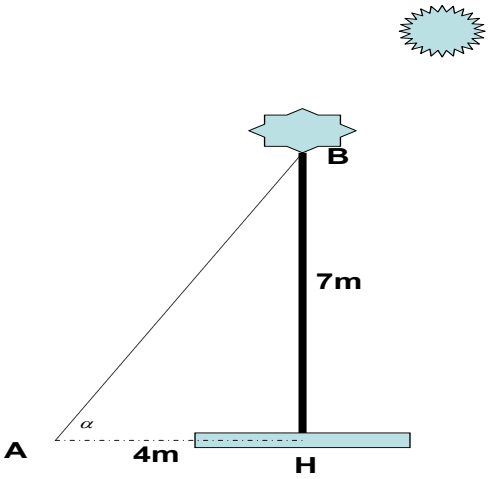
BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 16. Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc $60°$ và bóng của một tòa tháp trên mặt đất dài 20 m. Khi đó chiều cao của tòa tháp bằng bao nhiêu?

Bài 17. Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ bằng 34^0 và bóng của một ngọn tháp trên mặt đất dài 86m. Tính chiều cao của tháp (làm tròn đến mét)



Bài 18. Một cột cao 7m có bóng trên mặt đất dài 4m. Hãy tính góc (làm tròn đến phút) mà tia sáng Mặt Trời tạo với mặt đất (góc α ở hình vẽ)



Bài 19. Một máy bay đang bay ở độ cao 12 km. Khi bay hạ cánh xuống mặt đất, đường đi của máy bay tạo một góc nghiêng so với mặt đất.

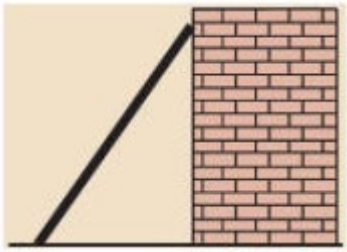
a) Nếu cách sân bay 320 km máy bay bắt đầu hạ cánh thì góc nghiêng là bao nhiêu (làm tròn đến phút)?

b) Nếu phi công muốn tạo góc nghiêng 5° thì cách sân bay bao nhiêu kilômét phải bắt đầu cho máy bay hạ cánh (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)?

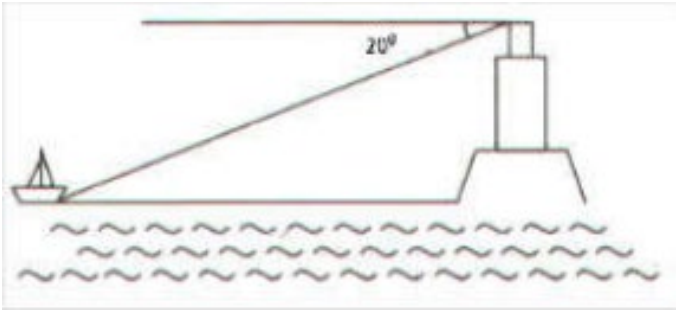
Bài 20. Hải đăng Kê Gà thuộc xã Tân Thành, huyện Hàm Thuận Nam, Bình Thuận là ngọn hải đăng được trung tâm sách kỷ luật Việt Nam xác nhận là ngọn hải đăng cao nhất và nhiều tuổi nhất. Hải đăng Kê Gà được xây dựng từ năm 1897-1899 và toàn bộ bằng đá. Tháp đèn có hình bát giác, cao $66m$ so với mực nước biển. Ngọn đèn đặt trong tháp có thể phát sáng xa 22 hải lý (tương đương $40km$).

Một người đi thuyền thúng trên biển, muốn đến ngọn hải đăng có độ cao $66m$, người đó đứng trên mũi thuyền và dùng giác kế đo được góc giữa thuyền và tia nắng chiều từ đỉnh ngọn hải đăng đến thuyền là $25°$. Tính khoảng cách của thuyền đến ngọn hải đăng (làm tròn đến m).

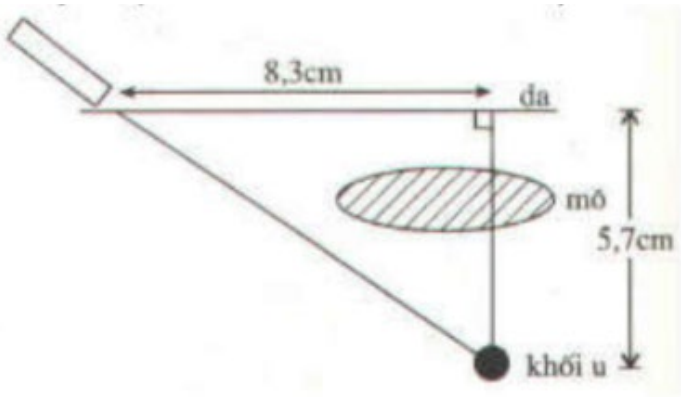
Bài 21. Trường bạn Trúc Linh có một chiếc thang dài $6m$. Cần đặt chân thang cách chân tường một khoảng cách bằng bao nhiêu để nó tạo với mặt đất một góc "an toàn" là $65°$ (tức là đảm bảo thang không bị đổ khi sử dụng).



Bài 22. Từ một đài quan sát cao 350m so với mực nước biển, người ta nhìn thấy một chiếc thuyền bị nạn dưới góc $20°$ so với phương ngang của mực nước biển. Muốn đến cứu con thuyền thì phải đi quãng đường dài bao nhiêu mét?

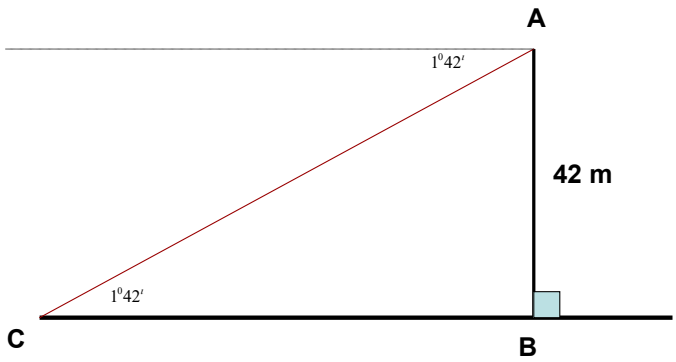


Bài 23. Một khối u của một bệnh nhân cách mặt da $5,7\,\text{cm}$ được chiếu bởi một chùm tia gamma. Để tránh làm tổn thương mô, bác sĩ đặt nguồn tia cách khối u (trên mặt da) $8,3\,\text{cm}$ (xem hình vẽ). Tính góc tạo bởi chùm tia với mặt da và chùm tia phải đi một đoạn dài bao nhiêu để đến được khối u?



Bài 24. Một tòa nhà cao tầng có bóng trên mặt đất là 272m, cùng thời điểm đó một cột đèn cao 7m có bóng trên mặt đất dài 14m. Em hãy cho biết tòa nhà đó có bao nhiêu tầng, biết rằng mỗi tầng cao 3,4m?

Bài 25. Một người quan sát ở đài hải đăng cao 42 mét so với mặt nước biển nhìn thấy một con tàu ở xa với góc $1^0 42'$ so với phương nằm ngang. Hỏi khoảng cách từ tàu đến chân ngọn hải đăng là bao nhiêu hải lí ?(1 hải lí= 1852 mét)



Bài 26. Để đo chiều cao của một đồn giặc nằm trên một quả đồi cao (đỉnh D mà không thể tới gần được) người ta sử dụng một phép đo như sau:

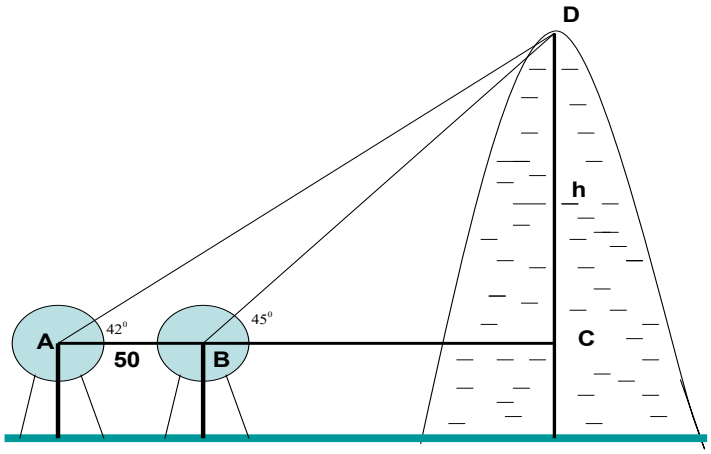
Chọn một điểm A trên mặt đất đặt một giác kế thẳng đứng(giác kế cao 1,5m).

Quay thanh giác kế sao cho khi ngắm theo thanh này ta nhìn thấy đỉnh D quả đồi. Đọc trên giác kế có số đo 42^0 của góc DAC.

Trên đoạn thẳng AC từ chân đồi tới điểm A ta chọn một điểm B cách A là 50m.

Quay thanh giác kế và khi ngắm theo thanh này ta cũng nhìn thấy đỉnh D của quả đồi. Đọc giác kế ta có số đo là 45^0 của góc DBC . Hãy tính chiều cao của quả đồi.

(hình vẽ minh họa bên dưới)



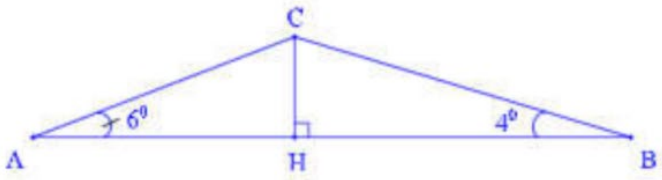
Bài 27. Một người thợ sử dụng thước ngắm có góc vuông để đo chiều cao một cây dừa, với các kích thước đo được như hình bên. Khoảng cách từ góc cây đến chân người thợ là $4,8\text{m}$ và từ vị trí chân đứng thẳng trên mặt đất đến mắt của người nhắm là $1,6\text{m}$. Hỏi với các kích thước trên, người thợ đo được chiều cao của cây đó là bao nhiêu? (làm tròn đến mét).

Bài 28. Một cần cẩu có góc nghiêng so với mặt đất nằm ngang là 40^0 .Vậy muốn nâng một vật nặng lên cao $8,1$ mét thì cần cẩu phải dài bao nhiêu? Biết chiều cao của xe là $2,6$ mét, chiều cao của vậ là 1 mét (làm tròn kết quả đến 1 chữ số thập phân).

Bài 29. Giông bão thổi mạnh, một cây tre gãy gập xuống làm ngọn cây chạm đất và ngọn cây tạo với mặt đất một góc 30^o. Người ta đo được khoảng cách từ chỗ ngọn cây chạm đất đến gốc tre là $8,5m$. Giả sử cây tre mọc vuông góc với mặt đất , hãy tính chiều cao của cây tre đó (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Bài 30. Tính chiều cao của trụ cầu Cần Thơ so với mặt sông Hậu, cho biết tại hai điểm cách nhau $89m$ trên mặt sông người ta nhìn thấy đỉnh trụ cầu với góc nâng lần lượt là 40^o và 30^o.

Bài 31. Lúc 6h sáng bạn An đi từ nhà (điểm A) đến trường (điểm B) phải leo lên và xuống dốc như hình vẽ dưới. Cho biết đoạn AB dài 762m, góc $\hat{A} = 6^\circ$ và $\hat{B} = 4^\circ$

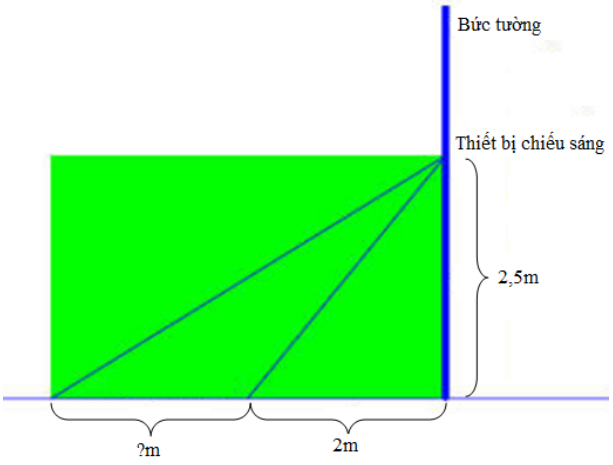


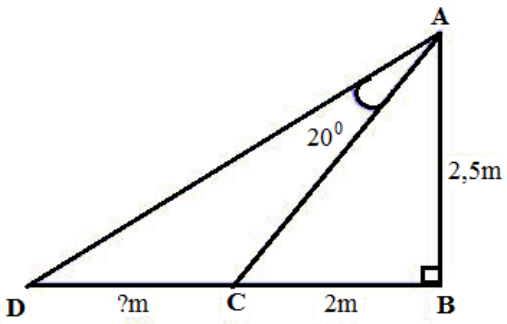
a) Tính chiều cao con dốc.

b) Hỏi An đến trường lúc mấy giờ? Biết rằng tốc độ lên dốc 4hm/h và tốc độ xuống dốc 19km/h.

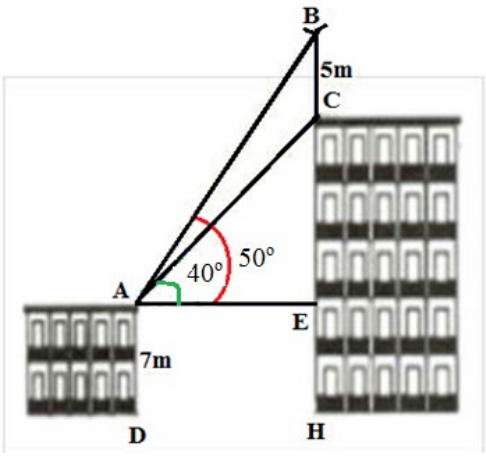
Bài 32. Một chiếc cầu trượt bao gồm phần cầu thang (để bước lên) và phần ống trượt (để trượt xuống) nối liền với nhau. Biết rằng khi xây dựng phần ống trượt cần phải đặt phần ống trượt nghiêng với mặt đất một góc 50°. Hãy tính khoảng cách từ chân cầu thang đến chân ống trượt nếu xem phần cầu thang như một đường thẳng dài 2,5m; ống trượt dài 3m.

Bài 33. Người ta cần lắp đặt một thiết bị chiếu sáng gắn trên tường cho một phòng triển lãm như hình vẽ. Thiết bị này có góc chiếu sáng là 20^o và cần đặt cao hơn mặt đất là 2,5m. Người ta đặt thiết bị chiếu sáng này sát tường và được canh chỉnh sao cho trên mặt đất dải ánh sáng bắt đầu từ vị trí cách tường 2m. Hãy tính độ dài vùng được chiếu sáng trên mặt đất.





Bài 34. Trên nóc của một tòa nhà có một cột ăng – ten cao 5m. Từ vị trí quan sát A cao 7m so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng – ten dưới góc 50^o và 40^o so với phương nằm ngang. Tính chiều cao của tòa nhà.

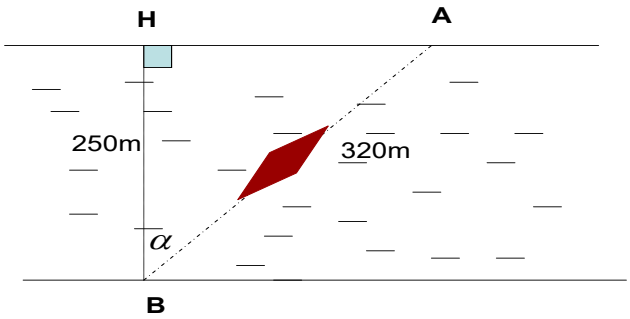


Bài 35. Trong phòng khách sạn, bên cạnh bộ khóa cửa chính còn có một phụ kiện hữu ích khác chính là door guard (chốt trượt mở an toàn). Thiết bị này phòng trường hợp khi nghe tiếng gõ cửa mà không biết chính xác đó là ai. Door guard là một dạng chốt nối, tạo một khoảng cỡ 12cm đủ để người bên trong nhận diện người bên ngoài và nói chuyện với nhau. Nếu chiều rộng cánh cửa vào khoảng 90cm. Hãy tính góc mở cánh cửa.

BÀI 3
ỨNG DỤNG CỦA TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

DẠNG 1
ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG CÁCH

Bài 1. Một khúc sông rộng khoảng 250m. Một con đò chéo qua sông bị dòng nước đẩy xiên nên phải chèo khoảng 320m mới sang được bờ bên kia. Hỏi dòng nước đã đẩy chiếc đò lệch đi một góc bằng bao nhiêu độ.(góc α ở hình vẽ)

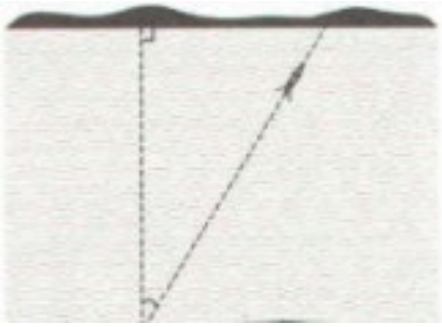


Lời giải

Tam giác AHB vuông tại H nên theo tỉ số lượng giác ta có

$$\cos\alpha = \frac{BH}{BA} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{250}{350} \Rightarrow \alpha \approx 38^0 37'$$

Bài 2. Một con thuyền qua khúc sông với vận tốc $3,5km/h$ mất hết 6 phút. Do dòng nước chảy mạnh nên đã đẩy con thuyền đi qua con sông trên đường đi tạo với bờ một góc 25^0. Hãy tính chiều rộng của con sông?



Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán

Chuyển đổi: 6 phút $=\frac{1}{10}$ giờ.

Quãng đường con thuyền đi được là:

$AC = v.t = 3,5.\frac{1}{10} = 0,35km = 350m$

$\triangle ABo$

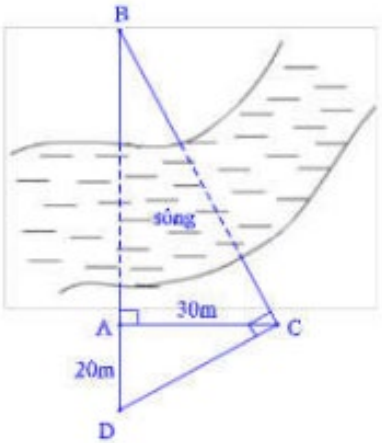
$\cos A = \frac{AB}{AC}$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B ta có : $\cos A = \frac{AB}{AC}$ (tỷ số lượng giác của góc nhọn)

$\Rightarrow AB = AC \sin A = 350cos25^0 \approx 317,21m$

Vậy chiều rộng của con sông là 147,92m.

Bài 3. Muốn tính khoảng cách từ điểm A đến điểm B bên kia bờ sông, bạn Minh Hiền vạch một đường vuông góc với AB. Trên đường vuông góc này lấy một đoạn thẳng $AC = 30\text{m}.$, rồi vạch CD vuông góc với phương BC cắt AB tại D (xem hình vẽ). Đo $AD = 20\text{m},$ từ đó bạn Minh Hiền tính được khoảng cách từ A đến B. Em hãy tính độ dài AB và số đo góc ACB.



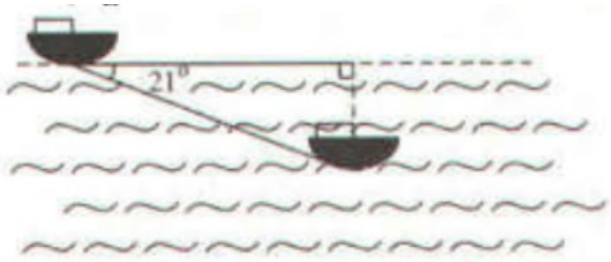
Lời giải

Xét ΔBCD vuông tại C và CA là đường cao, ta có: $AB.AD = AC^2 \Rightarrow AB = \frac{AC^2}{AD} = 45\text{m}.$

Xét ΔABC vuông tại A, ta có: $\tan ACB = \frac{AB}{AC} = \frac{45}{30} = 1,5 \Rightarrow \widehat{ACB} \approx 56°18'.$

Vậy $AB = 45\text{m}$, $\widehat{ACB} = 56°18'.$

Bài 4. Trong một buổi luyện tập, một tàu ngầm ở trên mặt biển bắt đầu lặng xuống và di chuyển theo một đường thẳng tạo với mặt nước một góc 21°.

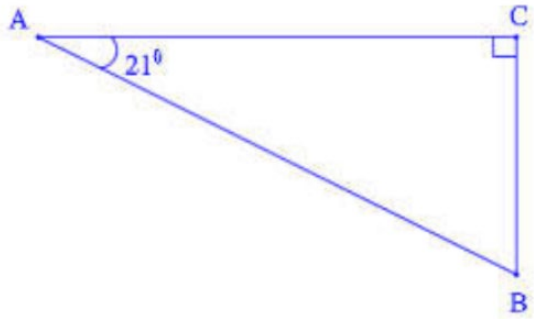


a) Khi tàu chuyển động theo hướng đó và đi được 250m thì tàu ở độ sâu bao nhiêu so với mặt nước (làm tròn đến đơn vị mét).

b) Giả sử tốc độ trung bình của tàu là 9km/h thì sau bao lâu (tính từ lúc bắt đầu lặn) tàu ở độ sâu 200m (cách mặt nước biển 200m) làm tròn đến phút.

Lời giải

Hình vẽ minh họa



a) Xét ΔABC vuông tại C ta có:

$$\sin A = \frac{CB}{AB} \Rightarrow CB = AB.\sin A = 250.\sin 21^0 \approx 89,6m$$

Vậy tàu đi được 250m thì tàu ở độ sâu 89,6m.

b) 9km/h=2,5m/s

Gọi t(s) là thời gian đi để tàu đạt được độ sâu 200m.

Quảng đường tàu đi được trong thời gian t(s) là:

$$AB = S_{AB} = v_{AB}.t_{AB} = 2,5t(m)$$

Xét ΔABC vuông tại C ta có:

$$\sin A = \frac{CB}{AB}$$

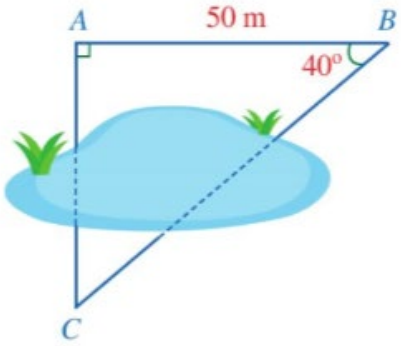
$$\sin 21^0 = \frac{200}{2,5t}$$

$$t = \frac{200}{2,5.\sin 21^0} \approx 223s \approx 4\,phút$$

Vậy thời gian tàu đi là 4 phút.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Hình vẽ bên dưới mô tả ba vị trí A, B, C là ba đỉnh của một tam giác vuông và không đo được trực tiếp các khoảng cách từ C đến A và từ C đến B. Biết $AB = 50(m), \widehat{ABC} = 40^0$. Tính các khoảng cách CA và BC (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).



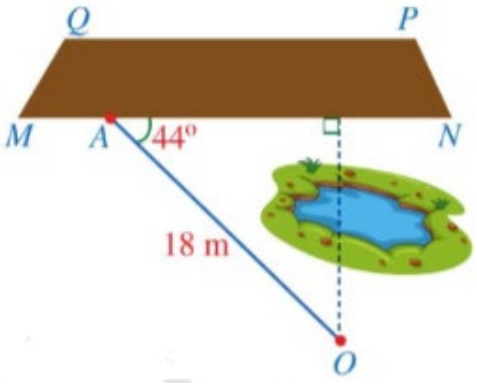
Lời giải

Xét ΔABC vuông tại A, ta có:

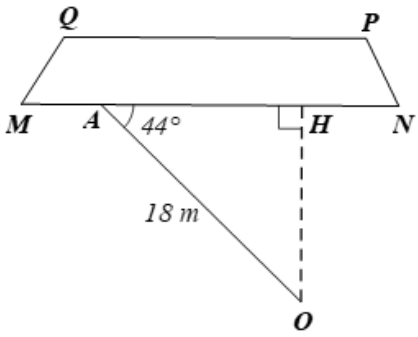
$AC = AB.\tan\widehat{ABC} = 50.\tan 40^0 \approx 42(m)$

$AB = BC.\tan\widehat{ABC}$ Suy ra $BC = \dfrac{\tan\widehat{ABC}}{AB} = \dfrac{50}{\cos 40^0} \approx 65(m)$

Bài 6. Người ta cần ước lượng khoảng cách từ vị trí O đến khu đất có dạng hình thang MNPQ nhưng không thể đo được trực tiếp, khoảng cách đó được tính bằng khoảng cách từ O đến đường thẳng MN. Người ta chọn vị trí A ở đáy MN và đo được $OA = 18(m), \widehat{ABC} = 44^0$ (Hình vẽ). Tính khoảng cách từ vị trí O đến khu đất (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét).



Lời giải

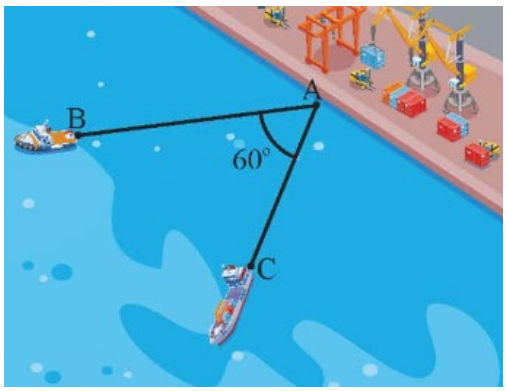


Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ O đến MN.

Xét ΔOAH vuông tại H, ta có: OH = OA.sinA = 18.sin44° ≈ 12,5 (m).

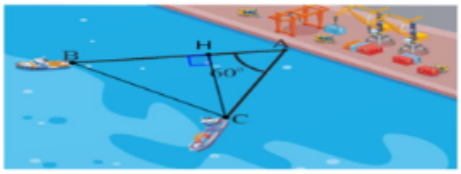
Vậy khoảng cách từ vị trí O đến khu đất khoảng 12,5 m.

Bài 7. Hai chiếc tàu thủy B và C cùng xuất phát từ một vị trí A, đi thẳng theo hai hướng tạo thành một góc 60° (Hình vẽ). Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lí/giờ, tàu C chạy với tốc độ 15 hải lí/giờ. Hỏi sau 1,5 giờ hai tàu B và C cách nhau bao nhiêu hải lí (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?



Lời giải

Nối B và C. Kẻ CH ⊥ AB (H ∈ AB).



Sau 1,5 giờ tàu B chạy được quãng đường là: AB = 20.1,5 = 30 (hải lí).

Sau 1,5 giờ tàu C chạy được quãng đường là: AC = 15.1,5 = 22,5 (hải lí).

Xét tam giác AHC vuông tại H, ta có:

• $CH = AC \cdot \sin A = 22,5 \cdot \sin 60° = \frac{45\sqrt{3}}{4}$ (hải lí).

• AH = AC . cos A = 22,5 . cos 60° = 11,25 (hải lí).

Do đó BH = AB – AH = 30 – 11,25 = 18,75 (hải lí).

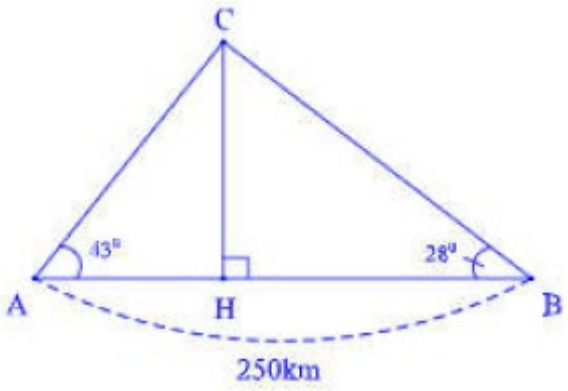
Mặt khác, tam giác CHB vuông tại H, áp dụng định lý Pythagore ta có:

$$BC = \sqrt{BH^2 + CH^2} = \sqrt{(18,75)^2 + \left(\frac{45\sqrt{3}}{4}\right)^2} \approx 27,04 \text{ (hải lí).}$$

Vậy sau 1,5 giờ tàu B cách tàu C là 27,04 hải lí.

Bài 8. Hai người A và B đứng cùng bờ sông nhìn ra một cồn nổi giữa sông. Người A nhìn ra cồn với một góc $43°$ so với bờ sông, người B nhìn ra cồn với một góc $28°$ so với bờ sông. Hai người đứng cách nhau $250m$. Hỏi cồn cách bờ sông hai người đang đứng bao nhiêu m?

Lời giải



Xét tam giác AHC vuông tại A, ta có

$$\tan\widehat{CAH}=\frac{CH}{AH}\Rightarrow AH=\frac{CH}{\tan\widehat{CAH}}=\frac{CH}{\tan 43°}\ (1)$$

Xét tam giác BHC vuông tại B, ta có

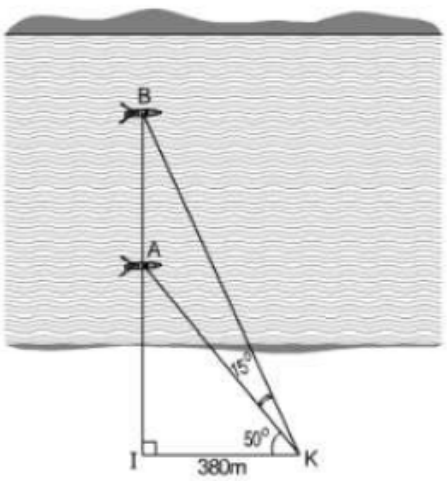
$$\tan\widehat{CBH}=\frac{CH}{BH}\Rightarrow BH=\frac{CH}{\tan\widehat{CbH}}=\frac{CH}{\tan 28°}\ (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $AB=AH+HB=CH\left(\frac{1}{\tan 43°}+\frac{1}{\tan 28°}\right)\Leftrightarrow 250=CH\left(\frac{1}{\tan 43°}+\frac{1}{\tan 28°}\right)$

Suy ra : $CH\approx 84,66m$

Vậy cồn cách bờ sông hai người đang đứng là $84,66m$

Bài 9. Hai chiếc thuyền A và B ở vị trí được minh họa như hình dưới dây. Tính khoảng cách giữa chúng. (làm tròn đến met)



Lời giải:

Xét tam giác AIK vuông tai I ta có:

$$\tan AKI = \frac{AI}{IK} \Rightarrow AI = IK.\tan AKI = 380.\tan 50 \approx 453m$$

Xét tam giác BIK vuông tai I ta có:

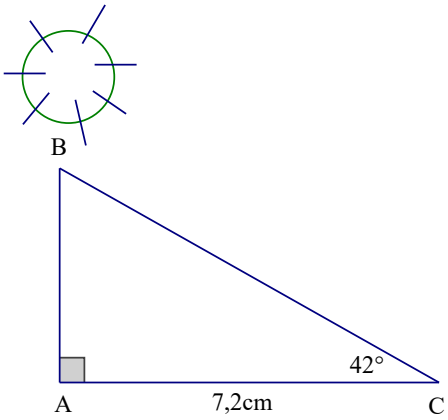
$$\tan BKI = \frac{BI}{IK} \Rightarrow BI = IK.\tan AKI = 380.\tan\left(15° + 50°\right) \approx 815m$$

Ta có $AB + AI = BI \Rightarrow AB = BI - AI = 815 - 453 = 362m$

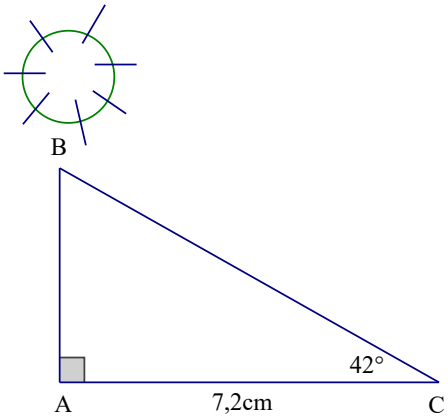
Vậy khoảng cách giữa chúng là $362m$

DẠNG 2
ƯỚC LƯỢNG CHIỀU CAO

Bài 10. Một cột đèn có bóng trên mặt đất dài 7,2 cm. Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ 42^0. Tính chiều cao của cột đèn?



Lời giải



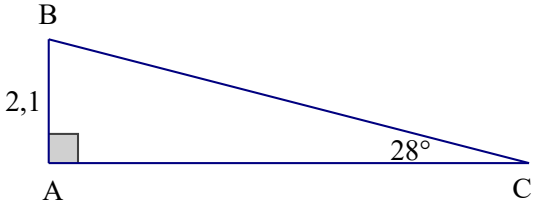
Gọi chiều cao của cột đèn là AB, bóng của cột đèn trên mặt đất là AC

Áp dụng hệ thức cạnh và góc trong tam giác ABC vuông tại A, ta có

$$\tan C = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = 7,2\tan 42^0 \Rightarrow AB \approx 6,75cm$$

Bài 11. Một cầu trượt trong công viên có độ dốc là 28^0 và có độ cao là $2,1cm$. Tính độ dài của mặt cầu trượt (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)

Lời giải



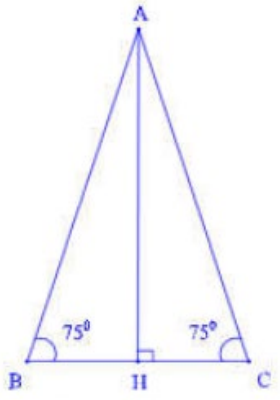
Gọi AB là chiều cao và BC là chiều dài của cầu trượt

Ta có độ dài cầu trượt là: $\frac{2,1}{\sin 28^0} \approx 4,5m$

Bài 12. Thang xếp chữ A gồm hai thang đơn tựa vào nhau. Để an toàn, mỗi thang đơn tạo với mặt đất một góc khoảng $75°$. Nếu muốn tạo một thang xếp chữ A cao 2m tính từ mặt đất thì mỗi thang đơn phải dài bao nhiêu?

Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán:



Do tam giác ABC cân nên đường cao AH cũng là đường trung tuyến hay H là trung điểm của BC.

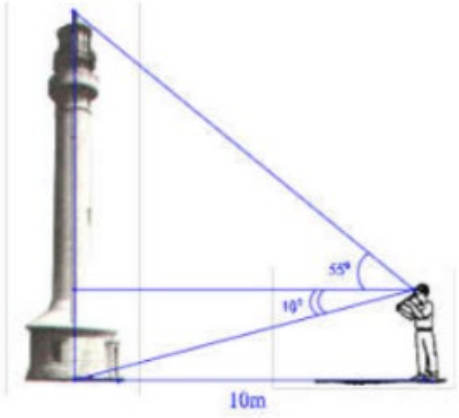
Xét ΔABH vuông tại H, ta có:

$\sin B = \frac{AH}{AB}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

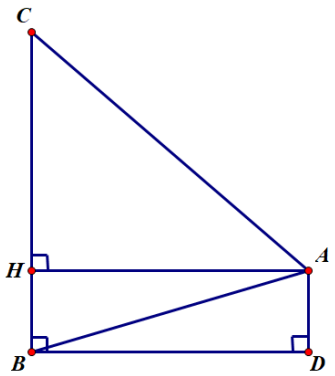
$\Rightarrow AB = \frac{AH}{\sin B} = \frac{2}{\sin 75°} \approx 2,07m$

Vậy thang đơn có chiều dài $2,07m$

Bài 13. Một người quan sát đứng cách một cái tháp $10\,\text{m}$, nhìn thẳng đỉnh tháp và chân tháp lần lượt dưới 1 góc 55° và 10° so với phương ngang của mặt đất. Hãy tính chiều cao của tháp.



Lời giải



Dựa vào hình vẽ minh họa, ta có: $AH = BD = 10\,m$.

Xét ΔAHB vuông tại H, ta có:

$\tan BAH = \dfrac{BH}{AH}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$\Rightarrow BH = AH \cdot \tan BAH = 10 \cdot \tan 10^\circ (m)$

Xét ΔAHC vuông tại H, ta có:

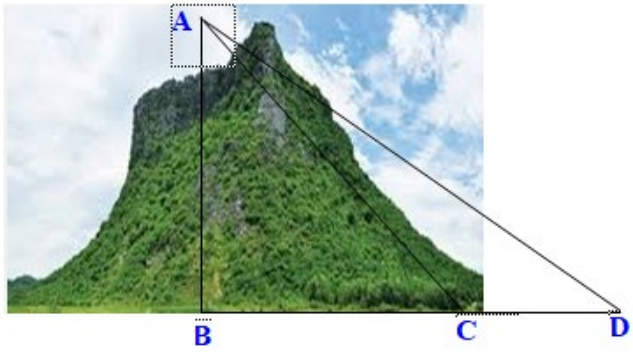
$\tan CAH = \dfrac{CH}{AH}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$\Rightarrow CH = AH \cdot \tan CAH = 10 \cdot \tan 55^\circ (m)$

Ta có: $BC = BH + CH = 10 \cdot \tan 10^\circ + 10 \cdot \tan 55^\circ \approx 16\,m$

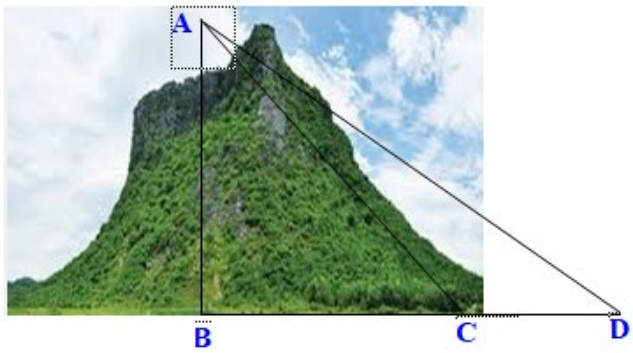
Vậy chiều cao của tháp là $16\,m$.

Bài 14. Đo chiều cao quả núi *(hình vẽ)*



Để đo chiều cao AB của một ngọn núi, ta chọn một điểm C và điểm D cách nhau 50m sao cho tia DC hướng về "tâm" ngọn núi. Dùng giác kế ta đo được hai góc $C \approx 22^0 18'$ và góc D $\approx 20^0 36'$. Tính chiều cao bằng mét của quả núi.

Lời giải



Trong tam giác vuông ABC ta có: BC = AB.cotC.

Trong tam giác vuông ABD ta có : BD = AB.cotD.

Suy ra: CD = BD – BC = AB.(cotD – cotC)

$$\Rightarrow AB = \frac{CD}{\cot D - \cot C} = \frac{50}{\cot 20^0 36' - \cot 22^0 18'} \approx 1802\text{m}$$

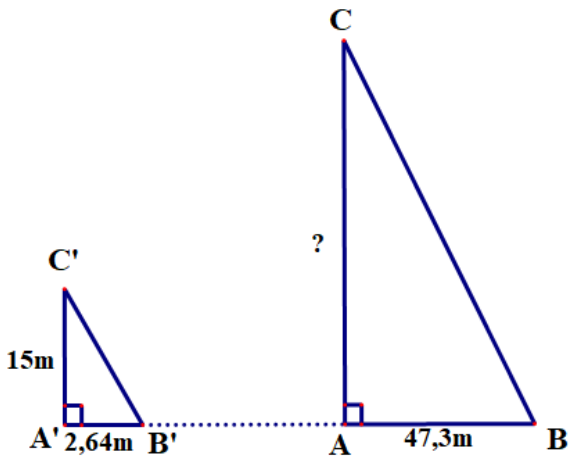
Bài 15. Tòa nhà Bitexco Financial (hay Tháp Tài chính Bitexco) là một tòa nhà chọc trời được xây dựng tại trung tâm Quận 1, Thành phố Hồ Chí Minh. Tòa nhà có 68 tầng (không tính 3 tầng hầm). Biết rằng, khi toà nhà có bóng in trên mặt đất dài 47,3 mét, thì cùng thời điểm đó có một cột cờ (được cắm thẳng đứng trên mặt đất) cao 15 mét có bóng in trên mặt đất dài 2,64 mét.

a) Tính góc tạo bởi tia nắng mặt trời với mặt đất (đơn vị đo góc được làm tròn đến độ).

b) Tính chiều cao của toà nhà, (làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải:

Hình vẽ minh họa bài toán



a) Vì các góc tạo bởi tia nắng mặt trời và mặt đất là bằng nhau nên góc B bằng góc B'

$\Rightarrow \tan B = \tan B' = \dfrac{A'C'}{A'B'} = \dfrac{15}{2,64}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$\Rightarrow B = B' \approx 80^o$

Vậy góc tạo bởi tia nắng mặt trời với mặt đất là 80^o

b) Ta có: $\tan B = \dfrac{AC}{AB}$

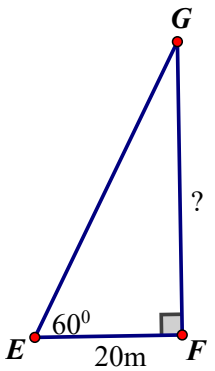
$\Rightarrow AC = AB.\tan B = 47,3.\dfrac{15}{2,64} \approx 268,8m$

Vậy chiều cao của tòa nhà là 268,8m

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 16. Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc $60°$ và bóng của một tòa tháp trên mặt đất dài 20 m . Khi đó chiều cao của tòa tháp bằng bao nhiêu?

Lời giải

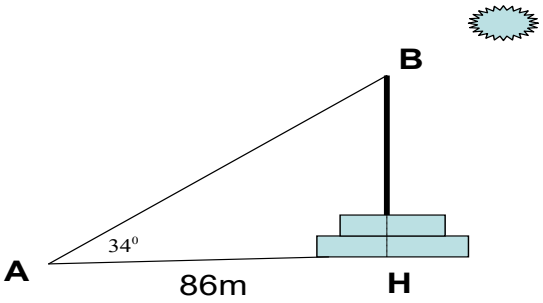


Bài toán được minh họa bởi hình vẽ trên. Trong đó chiều cao của tòa tháp là đoạn GF

Áp dụng hệ thức cạnh và góc trong tam giác vuông ta có

$GF = EF.\tan E = 20.\tan 60^0 = 20\sqrt{3}\,(m)$.

Bài 17. Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ bằng 34^0 và bóng của một ngọn tháp trên mặt đất dài 86m. Tính chiều cao của tháp (làm tròn đến mét)

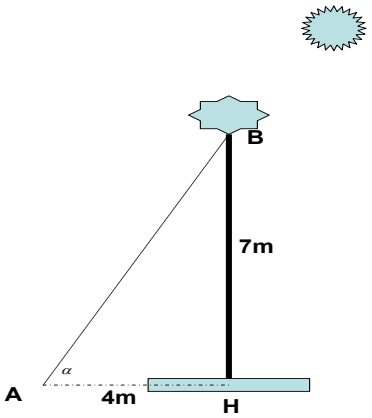


Lời giải

Tam giác AHB vuông tại H nên theo tỉ số lượng giác ta có

BH=AH.tanA=86.tan $34^0 \approx 58$m

Bài 18. Một cột cao 7m có bóng trên mặt đất dài 4m.Hãy tính góc (làm tròn đến phút) mà tia sáng Mặt Trời tạo với mặt đất (góc α ở hình vẽ)



Lời giải

Tam giác AHB vuông tại H nên theo tỉ số lượng giác ta có

$$\tan\alpha = \frac{HB}{HA} \Leftrightarrow \tan\alpha = \frac{7}{4} \Rightarrow \alpha \approx 60^0 15'$$

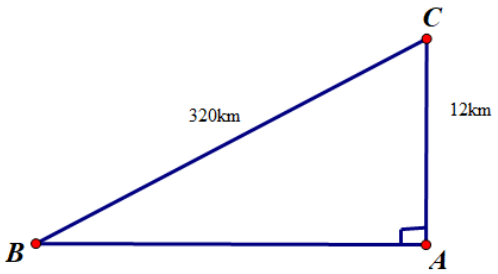
Bài 19. Một máy bay đang bay ở độ cao 12 km. Khi bay hạ cánh xuống mặt đất, đường đi của máy bay tạo một góc nghiêng so với mặt đất.

a) Nếu cách sân bay 320 km máy bay bắt đầu hạ cánh thì góc nghiêng là bao nhiêu (làm tròn đến phút)?

b) Nếu phi công muốn tạo góc nghiêng 5° thì cách sân bay bao nhiêu kilômét phải bắt đầu cho máy bay hạ cánh (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)?

Lời giải:

a)



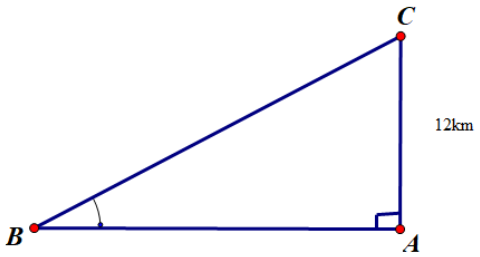
Xét ΔABC vuông tại A, ta có:

$\sin B = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{12}{320} = \dfrac{3}{80}$ (Tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$\Rightarrow \widehat{B} \approx 2^\circ 9'$

Vậy góc nghiêng là $2^\circ 9'$.

b)



Xét ΔABC vuông tại A, ta có:

$\sin B = \dfrac{AC}{BC}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$\Rightarrow BC = \dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{12}{\sin 5^\circ} \approx 137,7\,\text{km}$.

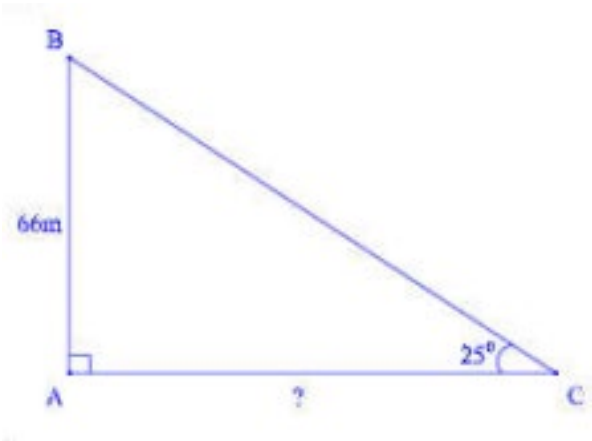
Vậy phải bắt đầu cho máy bay hạ cánh khi máy bay cách sân bay $137,7\,km$.

Bài 20. Hải đăng Kê Gà thuộc xã Tân Thành, huyện Hàm Thuận Nam, Bình Thuận là ngọn hải đăng được trung tâm sách kỷ luật Việt Nam xác nhận là ngọn hải đăng cao nhất và nhiều tuổi nhất. Hải đăng Kê Gà được xây dựng từ năm 1897-1899 và toàn bộ bằng đá. Tháp đèn có hình bát giác, cao $66\,m$ so với mực nước biển. Ngọn đèn đặt trong tháp có thể phát sáng xa 22 hải lý (tương đương $40\,km$).

Một người đi thuyền thúng trên biển, muốn đến ngọn hải đăng có độ cao $66m$, người đó đứng trên mũi thuyền và dùng giác kế đo được góc giữa thuyền và tia nắng chiều từ đỉnh ngọn hải đăng đến thuyền là $25°$. Tính khoảng cách của thuyền đến ngọn hải đăng (làm tròn đến m).

Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán:



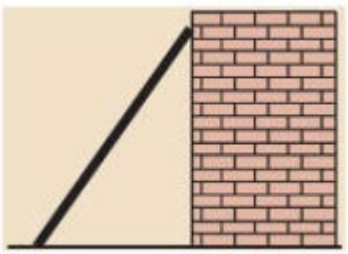
Xét ΔABC vuông tại A, ta có:

$\tan C = \dfrac{AB}{AC}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$\Rightarrow AC = \dfrac{AB}{\tan C} = \dfrac{66}{\tan 25°} \approx 142(m)$

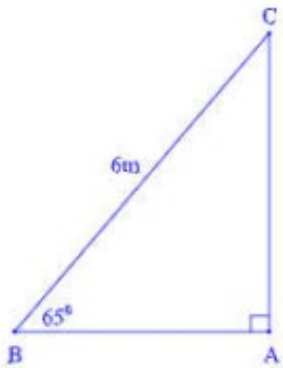
Vậy khoảng cách của thuyền đến ngọn hải đăng là $142\,m$.

Bài 21. Trường bạn Trúc Linh có một chiếc thang dài $6\,m$. Cần đặt chân thang cách chân tường một khoảng cách bằng bao nhiêu để nó tạo với mặt đất một góc "an toàn" là $65°$ (tức là đảm bảo thang không bị đổ khi sử dụng).



Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán:



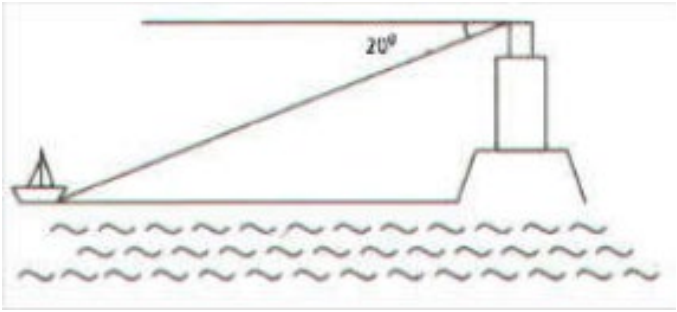
Xét ΔABC vuông tại A, ta có:

$\cos B = \dfrac{AB}{BC}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$\Rightarrow AB = BC.\cos B = 6.\cos 65° \approx 2,5(m)$

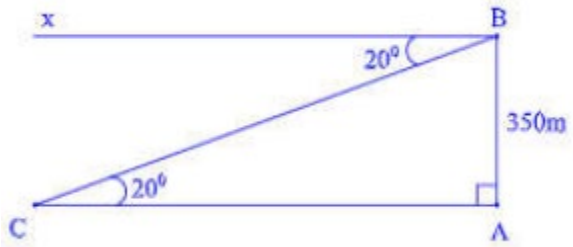
Vậy cần đặt chân thang cách chân tường một khoảng $2,5m$.

Bài 22. Từ một đài quan sát cao 350m so với mực nước biển, người ta nhìn thấy một chiếc thuyền bị nạn dưới góc $20°$ so với phương ngang của mực nước biển. Muốn đến cứu con thuyền thì phải đi quãng đường dài bao nhiêu mét?



Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán:



Theo đề bài, ta có:

$\angle BCA = \angle CBx = 20°$ (vì AC // Bx và hai góc ở vị trí so le trong)

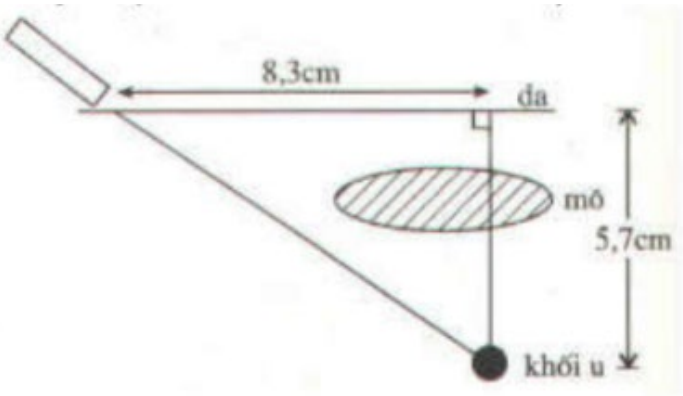
Xét ΔABC vuông tại A, ta có:

$\tan ACB = \dfrac{AB}{AC}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

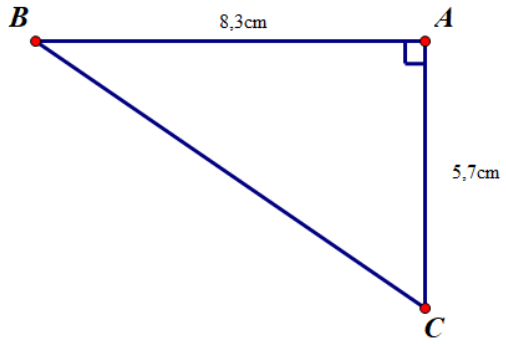
$\Rightarrow AC = \dfrac{AB}{\tan ACB} = \dfrac{350}{\tan 20°} \simeq 961,6m$

Vậy muốn đến cứu con thuyền thì phải đi quãng đường dài khoảng $961,6m$.

Bài 23. Một khối u của một bệnh nhân cách mặt da $5,7\text{cm}$ được chiếu bởi một chùm tia gamma. Để tránh làm tổn thương mô, bác sĩ đặt nguồn tia cách khối u (trên mặt da) $8,3\text{cm}$ (xem hình vẽ). Tính góc tạo bởi chùm tia với mặt da và chùm tia phải đi một đoạn dài bao nhiêu để đến được khối u?



Lời giải



Xét ΔABC vuông tại A, ta có:

$\tan B = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{5,7}{8,3}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$\Rightarrow \widehat{B} \approx 34^{\circ}28'$

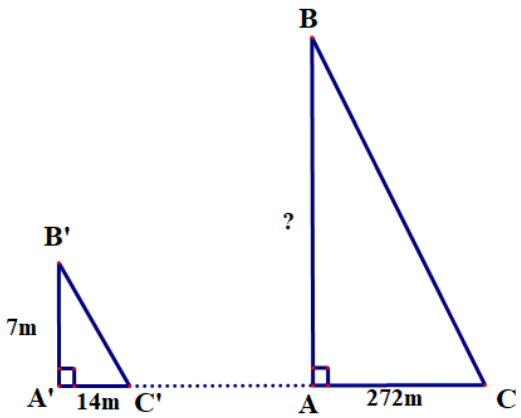
Ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (định lý Pytago) $\Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{(8,3)^2 + (5,7)^2} \approx 10,1(cm)$

Vậy góc tạo bởi chùm tia với mặt da là $34^{\circ}28'$ và chùm tia phải đi một đoạn dài khoảng $10,1cm$ đề đến được khối u.

Bài 24. Một tòa nhà cao tầng có bóng trên mặt đất là 272m, cùng thời điểm đó một cột đèn cao 7m có bóng trên mặt đất dài 14m. Em hãy cho biết tòa nhà đó có bao nhiêu tầng, biết rằng mỗi tầng cao 3,4m?

Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán:



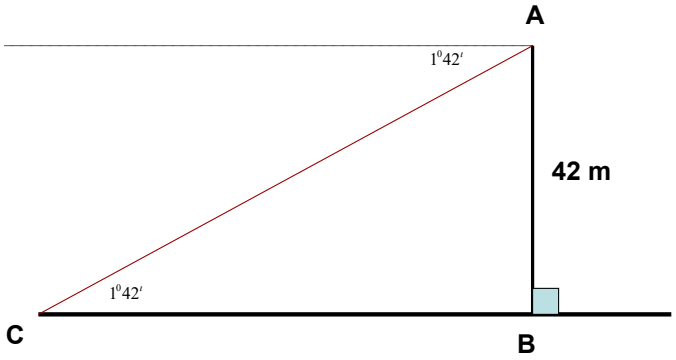
Vì các góc tạo bởi tia nắng mặt trời và mặt đất là bằng nhau nên góc C bằng góc C'

$\tan C = \tan C' \Leftrightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{A'B'}{A'C'}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$\Rightarrow A'B' = \dfrac{AB.A'C'}{AC} = \dfrac{7.272}{14} = 136m$

Vậy tòa nhà có: $\dfrac{136}{3,4} = 40$ (tầng)

Bài 25. Một người quan sát ở đài hải đăng cao 42 mét so với mặt nước biển nhìn thấy một con tàu ở xa với góc $1^0 42'$ so với phương nằm ngang. Hỏi khoảng cách từ tàu đến chân ngọn hải đăng là bao nhiêu hải lí ?(1 hải lí= 1852 mét)



Lời giải

Giả sử: A là đài hải đăng nơi người quan sát đứng nhìn thấy tàu.

B là chân đài hải đăng ở mặt nước biển.

C là vị trí con tàu trên mặt biển.

Khi đó BC là khoảng cách cần tìm.

Ta có: $BC = 42.\cot 1^0 42' \approx 1415{,}13$ met $\approx 0{,}764$ (hải lí).

Bài 26. Để đo chiều cao của một đồn giặc nằm trên một quả đồi cao (đỉnh D mà không thể tới gần được) người ta sử dụng một phép đo như sau:

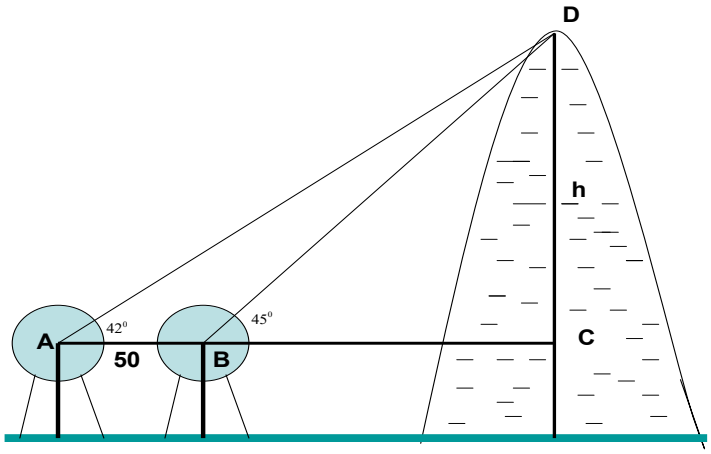
Chọn một điểm A trên mặt đất đặt một giác kế thẳng đứng(giác kế cao 1,5m).

Quay thanh giác kế sao cho khi ngắm theo thanh này ta nhìn thấy đỉnh D quả đồi. Đọc trên giác kế có số đo 42^0 của góc DAC.

Trên đoạn thẳng AC từ chân đồi tới điểm A ta chọn một điểm B cách A là 50m.

Quay thanh giác kế và khi ngắm theo thanh này ta cũng nhìn thấy đỉnh D của quả đồi. Đọc giác kế ta có số đo là 45^0 của góc DBC . Hãy tính chiều cao của quả đồi.

(hình vẽ minh họa bên dưới)



Lời giải

Gọi CD có độ dài là h.

Ta có:Trong tam giác vuông ACD thì $h = AC.\tan 42^0$

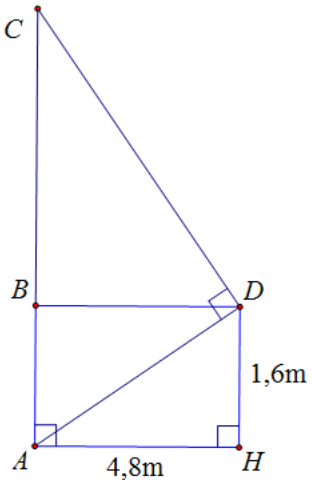
Trong tam giác vuoongBCD có: $BC = h.\cot 45^0$

Vậy ta có $h = (50+h.\cot 45^0).\tan 42^0$ từ đó suy ra $h \approx 500$m do đó chiều cao của quả đồi là 500+1,5 = 501,5(m)

Bài 27. Một người thợ sử dụng thước ngắm có góc vuông để đo chiều cao một cây dừa, với các kích thước đo được như hình bên. Khoảng cách từ góc cây đến chân người thợ là $4,8$m và từ vị trí chân đứng thẳng trên mặt đất đến mắt của người nhắm là $1,6$m. Hỏi với các kích thước trên, người thợ đo được chiều cao của cây đó là bao nhiêu? (làm tròn đến mét).

Lời giải:

Hình vẽ minh họa bài toán:



Ta có, tứ giác ABDH là hình chữ nhật $\Rightarrow BA = DH = 1,6$m; $BD = AH = 4,8$m

Xét ΔADC vuông tại D có BD là đường cao: $BD^2 = BA.BC \Rightarrow BC = \dfrac{BD^2}{BA} = \dfrac{4,8^2}{1,6} = 14,4$m

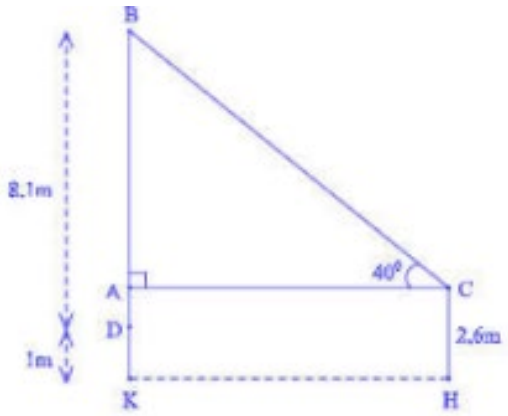
$\Rightarrow AC = AB + BC = 1,6 + 14,4 = 16$m.

Vậy chiều cao của cây dừa là 16m.

Bài 28. Một cần cẩu có góc nghiêng so với mặt đất nằm ngang là 40^0 .Vậy muốn nâng một vật nặng lên cao $8,1$ mét thì cần cẩu phải dài bao nhiêu? Biết chiều cao của xe là $2,6$ mét, chiều cao của vậ là 1 mét (làm tròn kết quả đến 1 chữ số thập phân).

Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán:



Ta có:

$AK = CH$

$\Rightarrow AD + DK = CH$

$\Rightarrow AD = CH - DK = 2,1 - 1 = 1,6m$

Mà:

$AB + AD = BD$

$\Rightarrow AB = BD - AD = 8,1 - 1,6 = 6,5m$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A, ta có:

$\sin C = \dfrac{AB}{BC}$ (tỷ số lượng giác của góc nhọn)

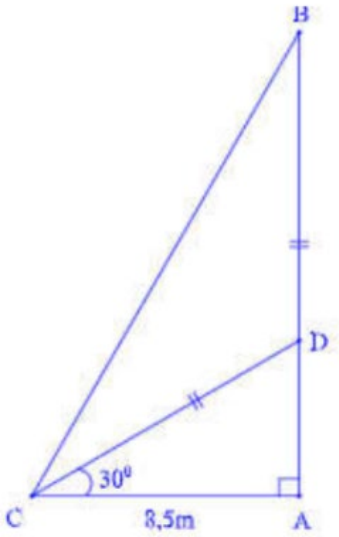
$\Rightarrow BC = \dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{6,5}{\sin 40^0} \approx 10,1m$.

Vậy cần cẩu phải dài 10,1 m.

Bài 29. Giông bão thổi mạnh, một cây tre gãy gập xuống làm ngọn cây chạm đất và ngọn cây tạo với mặt đất một góc 30^o. Người ta đo được khoảng cách từ chỗ ngọn cây chạm đất đến gốc tre là $8,5m$. Giả sử cây tre mọc vuông góc với mặt đất , hãy tính chiều cao của cây tre đó (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán:



Xét ΔADC vuông tại C, ta có: $\tan \widehat{DCA} = \dfrac{AD}{AC}$ (tỉ số lượng giác của hai góc nhọn)

$\Rightarrow AD = AC.\tan DCA = 8,5.\tan 30^o\ (m)$

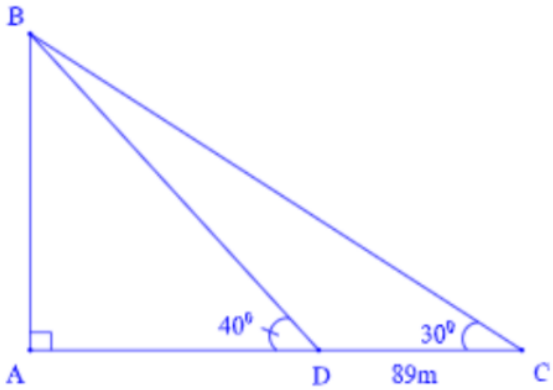
Và $\cos \widehat{DCA} = \dfrac{AC}{DC}$ (tỉ số lượng giác của hai góc nhọn) $\Rightarrow DC = \dfrac{AC}{\cos DCA} = \dfrac{8,5}{\cos 30^o}(m)$

$\Rightarrow AB = AD + DC = 8,5.\tan 30^o + \dfrac{8,5}{\cos 30^o} = 14,72\,m$

Bài 30. Tính chiều cao của trụ cầu Cần Thơ so với mặt sông Hậu, cho biết tại hai điểm cách nhau $89m$ trên mặt sông người ta nhìn thấy đỉnh trụ cầu với góc nâng lần lượt là 40^o và 30^o.

Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán:



Xét ΔABD vuông tại A, ta có

$\tan ADB = \dfrac{AB}{AD}$ (tỉ số lượng giác của hai góc nhọn)

$AD = \dfrac{AB}{\tan ADB} = \dfrac{AB}{\tan 40^o} m \quad (1)$

Xét ΔABC vuông tại A, ta có

$\tan ACB = \dfrac{AB}{AC}$ (tỉ số lượng giác của hai góc nhọn)

$AC = \dfrac{AB}{\tan ACB} = \dfrac{AB}{\tan 30^o} m \quad (2)$

Ta có: $AD + DC = AC$ (vì D thuộc AC)

$\dfrac{AB}{\tan 40^o} + 89 = \dfrac{AB}{\tan 30^o}$

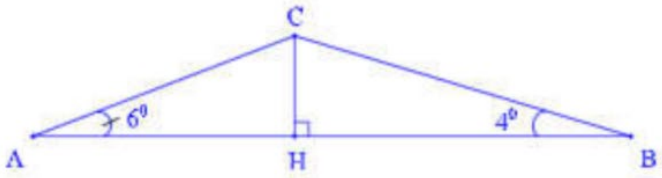
$\dfrac{AB}{\tan 30^o} - \dfrac{AB}{\tan 40^o} = 89$

$\dfrac{AB}{\tan 30^o}\left(\dfrac{1}{\tan 30^o} - \dfrac{1}{\tan 40^o}\right) = 89$

$$AB = \frac{89}{\frac{1}{\tan 30^o} - \frac{1}{\tan 40^o}}$$

$$AB \approx 164,7\,m$$

Bài 31. Lúc 6h sáng bạn An đi từ nhà (điểm A) đến trường (điểm B) phải leo lên và xuống dốc như hình vẽ dưới. Cho biết đoạn AB dài 762m, góc $\hat{A} = 6^\circ$ và $\hat{B} = 4^\circ$



a) Tính chiều cao con dốc.

b) Hỏi An đến trường lúc mấy giờ? Biết rằng tốc độ lên dốc 4hm/h và tốc độ xuống dốc 19km/h.

Lời giải:

a) Xét ΔAHC vuông tại H ta có:

$$\tan CAH = \frac{CH}{AH} \Rightarrow AH = \frac{CH}{\tan CAH} = \frac{CH}{\tan 6^\circ}(m) \quad (1)$$

Xét ΔBHC vuông tại H ta có:

$$\tan CBH = \frac{CH}{BH} \Rightarrow BH = \frac{CH}{\tan CBH} = \frac{CH}{\tan 4^\circ}(m) \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra:

$$AH + BH = \frac{CH}{\tan 6^\circ} + \frac{CH}{\tan 4^\circ}$$

$$AB = CH\left(\frac{1}{\tan 6^\circ} + \frac{1}{\tan 4^\circ}\right)$$

$$672 = CH\left(\frac{1}{\tan 6^\circ} + \frac{1}{\tan 4^\circ}\right)$$

$$\Rightarrow CH = \frac{672}{\left(\frac{1}{\tan 6^\circ} + \frac{1}{\tan 4^\circ}\right)} \approx 32m$$

Vậy chiều cao của con dốc là 32m.

b) Xét ΔACH vuông tại H ta có: $\sin CAH = \frac{CH}{AC} \Rightarrow AC = \frac{CH}{\sin CAH} = \frac{32}{\sin 6^\circ}(m)$

Xét ΔBHC vuông tại H ta có: $\sin CBH = \frac{CH}{CB} \Rightarrow CB = \frac{CH}{\sin CBH} = \frac{CH}{\sin 4^\circ}(m)$

Đổi đơn vị: $4km/h = \frac{10}{9}m/s$; $19km/h = \frac{95}{18}m/s$

Thời gian lên dốc AC là: $t_{AC}=\dfrac{S_{AC}}{V_{AC}}=\dfrac{AC}{V_{AC}}=\dfrac{32/\sin 6^\circ}{14,4}(s)$

Thời gian xuống dốc CB là: $t_{CB}=\dfrac{S_{CB}}{V_{CB}}=\dfrac{CB}{V_{CB}}=\dfrac{32/\sin 4^\circ}{68,4}(s)$

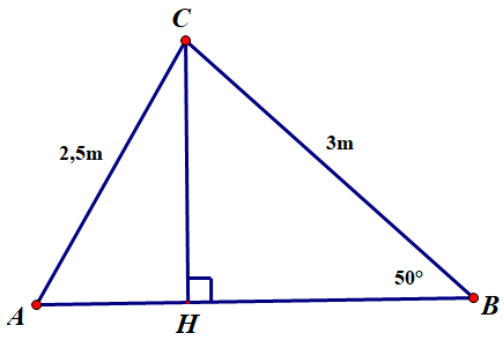
Thời gian đi từ A đến B là: $t_{AB}=t_{AC}+t_{CB}=\dfrac{32/\sin 6^\circ}{14,4}+\dfrac{32/\sin 4^\circ}{68,4}\approx 362,44(s)$

$362,44s\approx 6\ phut\ 3\ giây$

Bài 32. Một chiếc cầu trượt bao gồm phần cầu thang (để bước lên) và phần ống trượt (để trượt xuống) nối liền với nhau. Biết rằng khi xây dựng phần ống trượt cần phải đặt phần ống trượt nghiêng với mặt đất một góc 50°. Hãy tính khoảng cách từ chân cầu thang đến chân ống trượt nếu xem phần cầu thang như một đường thẳng dài 2,5m; ống trượt dài 3m.

Lời giải

Hình minh họa bài toán



Tam giác CHB vuông tại H nên:

$HB=CB.\cos 50^\circ=3.\cos 50^\circ$

$HC=CB.\sin 50^\circ=3.\sin 50^\circ$

Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác ACH vuông tại H:

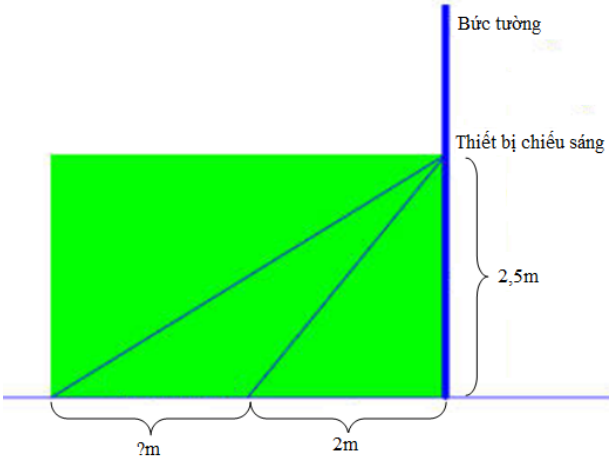
$AC^2=CH^2+AH^2$

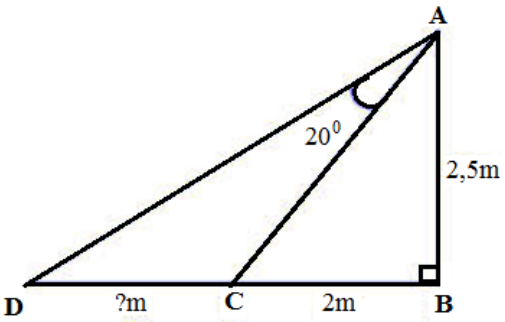
$\Leftrightarrow AH^2=AC^2-CH^2=2,5^2-(3.\sin 50^\circ)^2$

$\Rightarrow AH=\sqrt{2,5^2-(3.\sin 50^\circ)^2}$

Do đó: $AB=AH+HB=\sqrt{2.5^2-(3.\sin 50^\circ)^2}+3.\cos 50^\circ\approx 2,91$

Bài 33. Người ta cần lắp đặt một thiết bị chiếu sáng gắn trên tường cho một phòng triển lãm như hình vẽ. Thiết bị này có góc chiếu sáng là 20^o và cần đặt cao hơn mặt đất là 2,5m. Người ta đặt thiết bị chiếu sáng này sát tường và được canh chỉnh sao cho trên mặt đất dải ánh sáng bắt đầu từ vị trí cách tường 2m. Hãy tính độ dài vùng được chiếu sáng trên mặt đất.





Lời giải

Xét ΔABC vuông tại B, ta có: $\tan\widehat{BAC}=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{2}{2,5}=0,8 \Rightarrow \widehat{BAC}\approx 38,7^o$

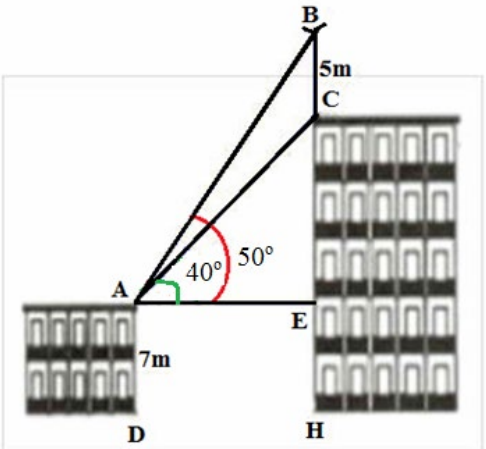
Ta có: $\widehat{BAD}=\widehat{BAC}+\widehat{CAD}=38,7^o+20^o=58,7^o$

Xét ΔABD vuông tại B, Ta có: $BD=AB.\tan BAD=2,5.\tan 58,7^o\approx 4,1(m)$

$\Rightarrow CD=BD-BC=4,1-2=2,1(m)$

Vậy độ dài vùng được chiếu sáng trên mặt đất là 2,1 (m).

Bài 34. Trên nóc của một tòa nhà có một cột ăng – ten cao 5m. Từ vị trí quan sát A cao 7m so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng – ten dưới góc 50^o và 40^o so với phương nằm ngang. Tính chiều cao của tòa nhà.



Lời giải

+ Dựa vào hình vẽ bài toán, ta có:

BC = 5m

AD = EH = 7m

$\widehat{BAE} = 50^o;\ \widehat{CAE} = 40^o$

$\widehat{CEA} = \widehat{BEA} = 90^o$

+ Xét ΔCAE vuông tại E, ta có:

$\tan CAE = \dfrac{CE}{AE}$ (Tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$\Rightarrow CE = AE.\tan CAE = AE.\tan 40^o \ \ (m)$ (1)

+ Xét ΔBAE vuông ở E ta có:

$\tan BAE = \dfrac{BE}{AE}$ (Tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$\Rightarrow BE = AE.\tan BAE = AE.\tan 50^o \ \ (m)$ (2)

+ Từ (1) và (2) ta suy ra:

$BE - CE = AE\tan 50^o - AE\tan 40^o$

$BC = AE\left(\tan 50^o - \tan 40^o\right)$

$5 = AE\left(\tan 50^o - \tan 40^o\right)$

$AE = \dfrac{5}{\tan 50^o - \tan 40^o} \ \ (m)$

+ Thay AE vào (1) ta có: $CE = \dfrac{5}{\tan 50^o - \tan 40^o}\tan 40^o \ \ (m)$

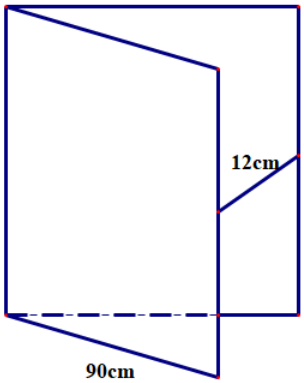
Suy ra: $BH = BC + CE + EH = 5 + \dfrac{5.\tan 40^o}{\tan 50^o - \tan 40^o} + 7 \approx 23,9 \ \ (m)$

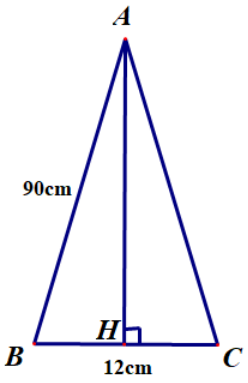
Vậy chiều cao của tòa nhà là 23,9 (m)

Bài 35. Trong phòng khách sạn, bên cạnh bộ khóa cửa chính còn có một phụ kiện hữu ích khác chính là door guard (chốt trượt mở an toàn). Thiết bị này phòng trường hợp khi nghe tiếng gõ cửa mà không biết chính xác đó là ai. Door guard là một dạng chốt nối, tạo một khoảng cỡ 12cm đủ để người bên trong nhận diện người bên ngoài và nói chuyện với nhau. Nếu chiều rộng cánh cửa vào khoảng 90cm. Hãy tính góc mở cánh cửa.

Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán:





Ta có: AB = AC nên ΔABC là tam giác cân tại A

Gọi H là trung điểm BC. Khi đó AH vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao.

BH = HC = 6cm.

Trong tam giác vuông ABH, ta có:

$$\sin BAH = \frac{AH}{AB} = \frac{6}{90} \Rightarrow \widehat{BAH} \approx 3,8^\circ$$

Do đó: $\widehat{BAC} \approx 7,6^\circ$