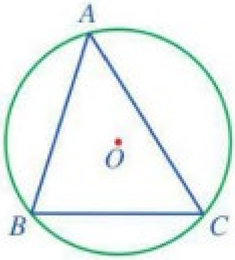
CHƯƠNG 8
ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

BÀI 1
ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP TAM GIÁC
ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP TAM GIÁC

1. Đường tròn ngoại tiếp tam giác

a. Định nghĩa: Đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác được gọi là **đường tròn ngoại tiếp tam giác** đó.

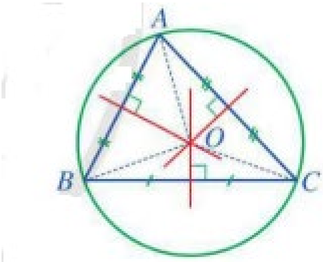


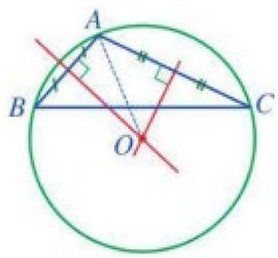
Chú ý: Khi đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC, ta còn nói tam giác nội tiếp đường tròn (O).

b. Cách xác định tâm đường tròn ngoại tam giác

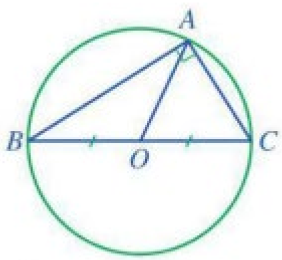
• **Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác** là giao của ba đường trung trực của tam giác đó.

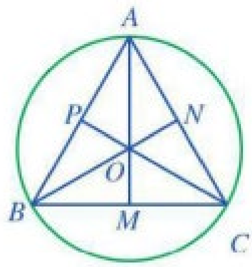
• **Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác** bằng khoảng cách từ giao điểm ba đường trung trực đến mỗi đỉnh của tam giác đó.





• Đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông có tâm là trung điểm cạnh huyền và bán kính bằng nửa cạnh huyền của tam giác vuông đó.





• Trong một tam giác đều, trọng tâm của tam giác đồng thời là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

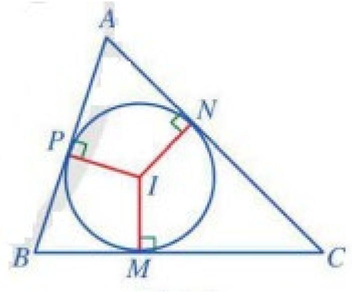
• Tam giác đều cạnh a có bán kính đường tròn ngoại tiếp là $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Nhận xét:

- Vì ba đường trung trực của tam giác đi qua một điểm nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao của hai đường trung trực bất kì của tam giác đó.
- Mỗi tam giác có đúng một đường tròn ngoại tiếp.

2. Đường tròn nội tiếp tam giác

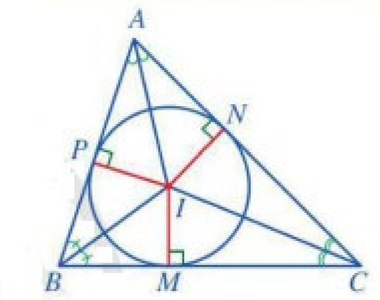
a. Định nghĩa: Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác được gọi đường tròn nội tiếp tam giác.



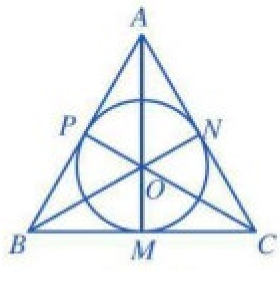
Chú ý: Khi đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, ta còn nói tam giác ngoại tiếp đường tròn (I).

b. Cách xác định tâm đường tròn nội tiếp tam giác

- **Tâm đường tròn nội tiếp tam giác** là giao ba đường phân giác của tam giác.
- **Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác** bằng khoảng cách từ giao điểm ba đường phân giác đến mỗi cạnh của tam giác đó.



- Trong một tam giác đều, trọng tâm của tam giác đồng thời là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác đó.

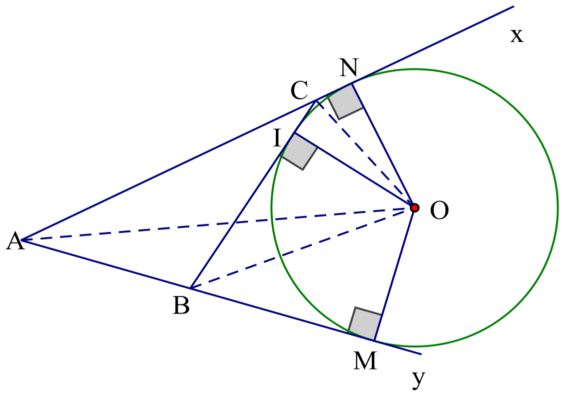


- Tam giác đều cạnh a có bán kính đường tròn nội tiếp là $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Nhận xét:

- Vì ba đường phân giác của tam giác đi qua một điểm nên tâm đường tròn nội tiếp tam giác là giao của hai đường phân giác bất kì của tam giác đó.
- Mỗi tam giác có đúng một đường tròn nội tiếp.

3. Đường tròn bàng tiếp tam giác (Đọc thêm)



• Đường tròn tiếp xúc với 1 cạnh của tam giác và tiếp xúc với phần kéo dài của hai cạnh còn lại gọi là đường tròn bàng tiếp tam giác

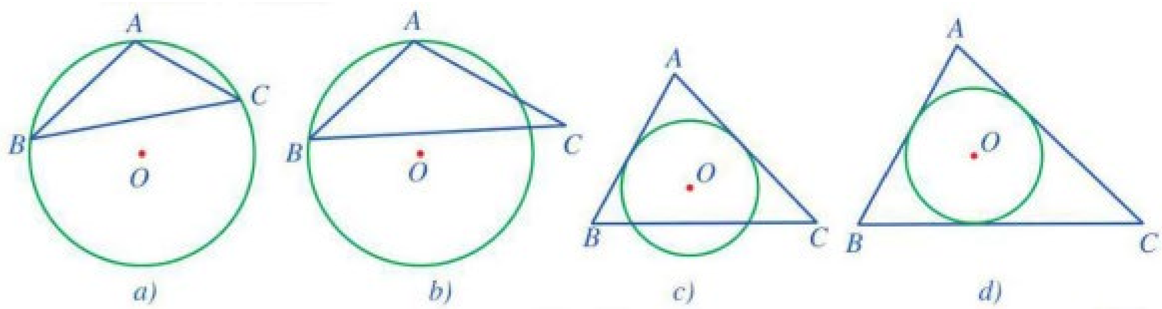
• Tâm của đường tròn bàng tiếp tam giác góc $\widehat{A}$ là giao điểm của hai đường phân giác các góc ngoài tại B và C hoặc là giao điểm của đường phân giác góc $\widehat{A}$ và đường phân giác ngoài tại B (hoặc C)

• Mỗi tam giác có ba đường tròn bàng tiếp tam giác

DẠNG 1
XÁC ĐỊNH TÂM VÀ TÍNH BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP, NỘI TIẾP TAM GIÁC

- Đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông có tâm là trung điểm cạnh huyền và bán kính bằng nửa cạnh huyền của tam giác vuông đó.
- Trong một tam giác đều, trọng tâm của tam giác đồng thời là tâm của đường tròn ngoại và nội tiếp tam giác đó.
- Tam giác đều cạnh a có bán kính đường tròn ngoại tiếp là $R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ và bán kính đường tròn nội tiếp là $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Bài 1. Cho hình vẽ sau :



a) Hình nào có đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC? Giải thích ?

b) Hình nào có đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC? Giải thích ?

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB=10cm$ và $AC=\sqrt{21}cm$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 3. Cho ΔABC vuông tại A, có $AB=6cm$ và $AC=8cm$ ngoại tiếp đường tròn $(I;r)$. Tính r

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB=4a$ và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có bán kính là $R=\frac{5a}{2}$. Tính AC cạnh theo a.

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có bán kính là $R=10\sqrt{2}(cm)$. Tính AB.

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, và có $AB=a\sqrt{2}$. Tính bán đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC theo a.

Bài 7. Cho tam giác ABC có $AB=5(cm), AB=12(cm), BC=13(cm)$.

a) Tính diện tích tam giác ABC.

b) Tính bán đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 8. Cho tam giác đều ABC cạnh $2a$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC theo a.

Bài 9. Đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC có bán kính $R=\frac{4a\sqrt{3}}{3}$.

a) Tính các cạnh của tam giác ABC theo a.

b) Tính bán đường tròn nội tiếp tam giác ABC theo a.

Bài 10. Đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC có bán kính bằng $4(dm)$.

a) Tính diện tích tam giác ABC.

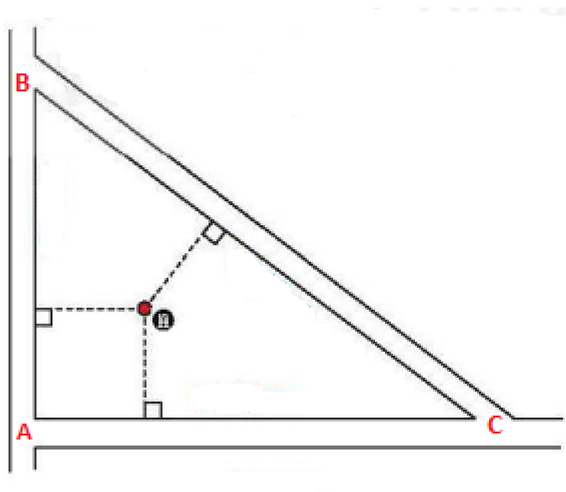
b) Tính bán đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Bài 11. Người ta muốn làm một khung gỗ hình tam giác đều có cạnh $10\sqrt{10}(cm)$ để đặt vừa khít một đồng hồ treo tường (như hình vẽ). Tính đường kính chiếc đồng hồ đó.

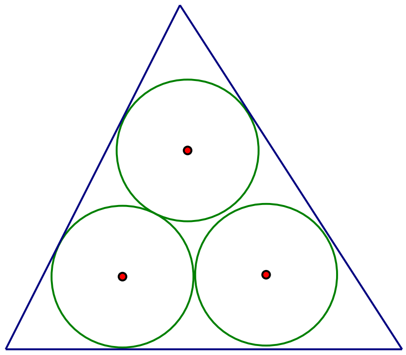
Bài 12. Bác An có một khu đất được bao xung quanh bởi ba con đường thẳng lập thành một tam giác với độ dài các cạnh là $AB=30m, AC=40m, BC=50m$ (như hình vẽ).

a) Với giá đất hiện tại là 20 triệu/m^2. Nếu Bác An bán thì được bao nhiêu tiền?

b) Bác An muốn xây một ngôi nhà biệt thự bên trong khu đất mình cách đều cả ba con đường đó. Khi đó, ngôi nhà biệt thự của Bác An cách mỗi con đường là bao nhiêu?



Bài 13. Ba đường tròn tiếp xúc với nhau từng đôi một và tiếp xúc với các cạnh của tam giác như hình bên. Nếu mỗi đường tròn có bán kính là 3, thì chu vi của tam giác sẽ bằng bao nhiêu?



Bài 14. Cho ΔABC vuông tại A, có $AB = 9cm, AC = 12cm$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp, G là trọng tâm của tam giác. Tính độ dài IG

DẠNG 2
BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP, NỘI TIẾP TAM GIÁC

Bài 1. Cho ΔABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Gọi E,F theo thứ tự là hình chiếu của (O) lên AB và AC. Chứng minh rằng AO là tia phân giác của $\widehat{BAC}$

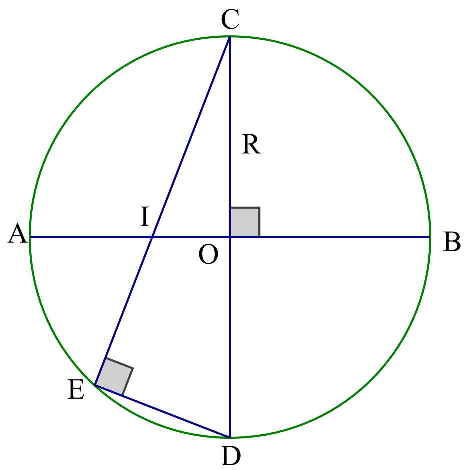
Bài 2. Cho ΔABC vuông tại A $\widehat{BAC}=90^0\left(AB\le AC\right)$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC tại D. Chứng minh rằng:

a) $BD=\dfrac{BC+AB-AC}{2}$

b) $S_{ABC}=BD.DC$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Cho đường tròn $(O;R)$ và hai đường kính vuông góc AB,CD. Trên bán kính AO lấy đoạn $AI=\dfrac{2AO}{3}$, vẽ tia CI cắt (O) tại E. Tính R theo CE



Bài 4. Cho ΔABC vuông tại A ngọi tiếp đường tròn (O). Gọi D,E,F lần lượt là các tiếp điểm của (O) với các cạnh AB,AC và BC. Đường thẳng BO cắt đường thẳng EF tại I. Tính $\widehat{BIF}$

DẠNG 3

BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐƯỜNG TRÒN BÀNG TIẾP TAM GIÁC

ĐỌC THÊM

Bài 1. Cho ΔABC, đường tròn tâm I bàng tiếp trong góc A tiếp xúc với các tia AB, AC theo thứ tự tại E, F. Cho $BC = a, CA = b, AB = c$. Chứng minh rằng:

a) $AE = AF = \dfrac{a+b+c}{2}$

b) $BE = \dfrac{a+b-c}{2}$

c) $CF = \dfrac{c+a-b}{2}$

Bài 2. Cho tam giác ABC cân tại A, điểm I là tâm đường tròn nội tiếp, điểm K là tâm đường tròn bàng tiếp $\widehat{A}$ của tam giác. Gọi O là trung điểm của IK

a) Chứng minh 4 điểm B, I, C, K cùng thuộc 1 đường tròn

b) Gọi (O) là đường tròn đi qua 4 điểm B, I, C, K. Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn $(O; OK)$

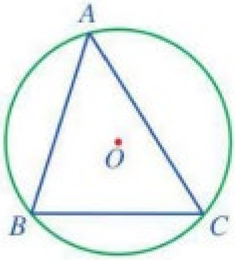
c) Tính bán kính của (O) biết $AB = AC = 20cm, BC = 24cm$

CHƯƠNG 8
ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

BÀI 1
ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP TAM GIÁC
ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP TAM GIÁC

1. Đường tròn ngoại tiếp tam giác

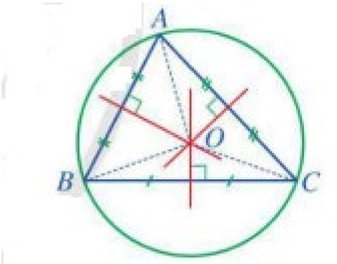
a. Định nghĩa: Đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác được gọi là **đường tròn ngoại tiếp tam giác** đó.

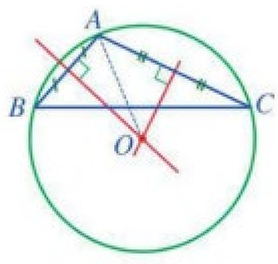


Chú ý: Khi đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC, ta còn nói tam giác nội tiếp đường tròn (O).

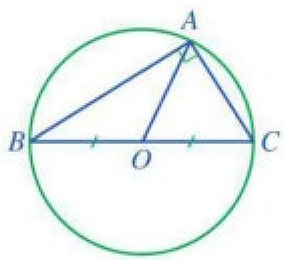
b. Cách xác định tâm đường tròn ngoại tam giác

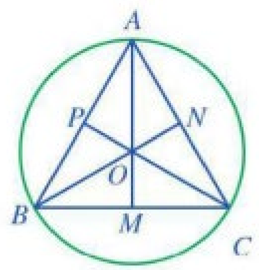
- **Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác** là giao của ba đường trung trực của tam giác đó.
- **Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác** bằng khoảng cách từ giao điểm ba đường trung trực đến mỗi đỉnh của tam giác đó.





- Đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông có tâm là trung điểm cạnh huyền và bán kính bằng nửa cạnh huyền của tam giác vuông đó.





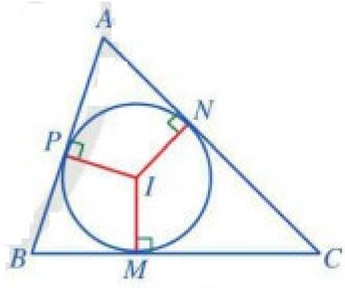
- Trong một tam giác đều, trọng tâm của tam giác đồng thời là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.
- Tam giác đều cạnh a có bán kính đường tròn ngoại tiếp là $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Nhận xét:

- Vì ba đường trung trực của tam giác đi qua một điểm nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao của hai đường trung trực bất kì của tam giác đó.
- Mỗi tam giác có đúng một đường tròn ngoại tiếp.

2. Đường tròn nội tiếp tam giác

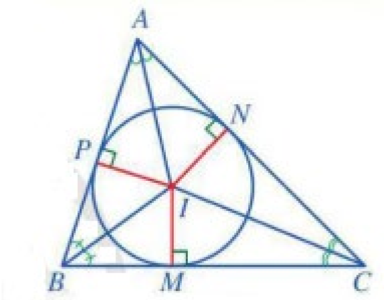
a. Định nghĩa: Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác được gọi đường tròn nội tiếp tam giác.



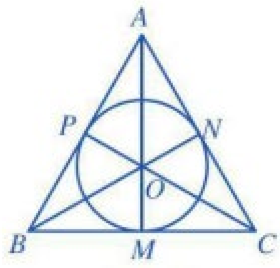
Chú ý: Khi đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, ta còn nói tam giác ngoại tiếp đường tròn (I).

b. Cách xác định tâm đường tròn nội tiếp tam giác

- **Tâm đường tròn nội tiếp tam giác** là giao ba đường phân giác của tam giác.
- **Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác** bằng khoảng cách từ giao điểm ba đường phân giác đến mỗi cạnh của tam giác đó.



- Trong một tam giác đều, trọng tâm của tam giác đồng thời là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác đó.

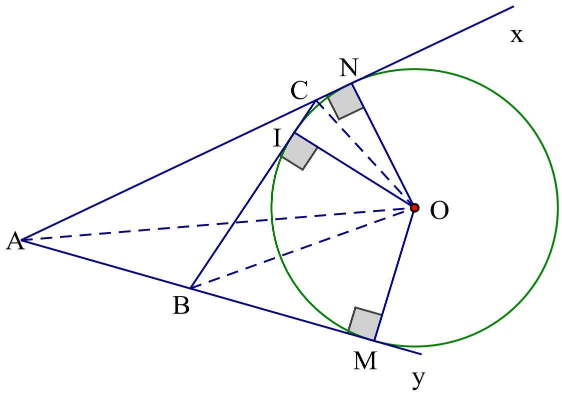


- Tam giác đều cạnh a có bán kính đường tròn nội tiếp là $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Nhận xét:

- Vì ba đường phân giác của tam giác đi qua một điểm nên tâm đường tròn nội tiếp tam giác là giao của hai đường phân giác bất kì của tam giác đó.
- Mỗi tam giác có đúng một đường tròn nội tiếp.

3. Đường tròn bàng tiếp tam giác (Đọc thêm)



• Đường tròn tiếp xúc với 1 cạnh của tam giác và tiếp xúc với phần kéo dài của hai cạnh còn lại gọi là đường tròn bàng tiếp tam giác

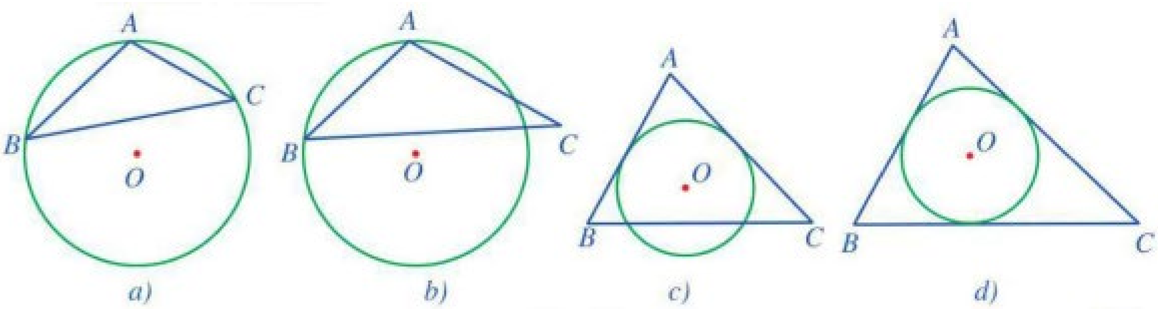
• Tâm của đường tròn bàng tiếp tam giác góc $\widehat{A}$ là giao điểm của hai đường phân giác các góc ngoài tại B và C hoặc là giao điểm của đường phân giác góc $\widehat{A}$ và đường phân giác ngoài tại B (hoặc C)

• Mỗi tam giác có ba đường tròn bàng tiếp tam giác

DẠNG 1
XÁC ĐỊNH TÂM VÀ TÍNH BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP, NỘI TIẾP TAM GIÁC

- Đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông có tâm là trung điểm cạnh huyền và bán kính bằng nửa cạnh huyền của tam giác vuông đó.
- Trong một tam giác đều, trọng tâm của tam giác đồng thời là tâm của đường tròn ngoại và nội tiếp tam giác đó.
- Tam giác đều cạnh a có bán kính đường tròn ngoại tiếp là $R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ và bán kính đường tròn nội tiếp là $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Bài 1. Cho hình vẽ sau :



a) Hình nào có đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC? Giải thích ?

b) Hình nào có đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC? Giải thích ?

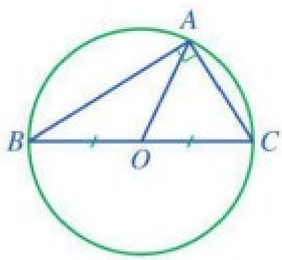
Lời giải

a) Hình $a)$, đường tròn (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vì nó đi qua ba đỉnh A,B,C của tam giác ABC.

b) Hình $d)$, đường tròn (O) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC vì nó tiếp xúc ba cạnh AB,BC,CA của tam giác ABC.

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB=10cm$ và $AC=\sqrt{21}cm$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải



Xét ABC vuông tại A, theo pythagore ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$BC^2 = 10^2 + \left(\sqrt{21}\right)^2$

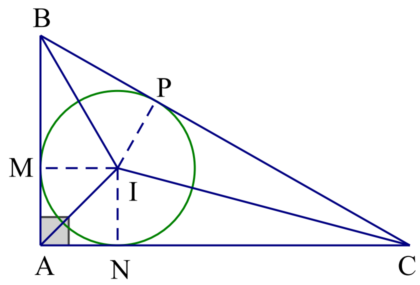
$BC^2 = 121$

$\Rightarrow BC = \sqrt{121} = 11(cm)$

Tam giác ABC vuông tại A nên bán kính R đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng nữa cạnh huyền BC hay $R = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{11}{2} = 5,5(cm)$

Bài 3. Cho ΔABC vuông tại A, có $AB = 6cm$ và $AC = 8cm$ ngoại tiếp đường tròn $(I;r)$. Tính r

Lời giải



Đường tròn $(I;r)$ tiếp xúc với các cạnh AB, AC, BC theo thứ tự M, N, P

Ta có: $S_{AIB} = \dfrac{1}{2}IM.AB = \dfrac{1}{2}r.AB(1); S_{AIC} = \dfrac{1}{2}IN.AC = \dfrac{1}{2}r.AC(2); S_{BIC} = \dfrac{1}{2}r.BC(3)$

Cộng $(1)(2)(3)$ vế theo vế, ta được: $\dfrac{S_{AIB} + S_{AIC} + S_{BIC}}{S_{ABC}} = \dfrac{1}{2}r.(AB + AC + BC)$

Mà $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{6.8}{2} = 24(cm^2)$, $BC = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10(cm)$

Nên ta có: $24 = \dfrac{1}{2}r(6 + 8 + 10) \Rightarrow r = 2(cm)$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB = 4a$ và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có bán kính là $R = \dfrac{5a}{2}$. Tính AC cạnh theo a.

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có bán kính là $R = 10\sqrt{2}(cm)$. Tính AB.

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, và có $AB = a\sqrt{2}$. Tính bán đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC theo a.

Bài 7. Cho tam giác ABC có $AB = 5(cm), AB = 12(cm), BC = 13(cm)$.

a) Tính diện tích tam giác ABC.

b) Tính bán đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 8. Cho tam giác đều ABC cạnh $2a$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC theo a.

Bài 9. Đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC có bán kính $R = \dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$.

a) Tính các cạnh của tam giác ABC theo a.

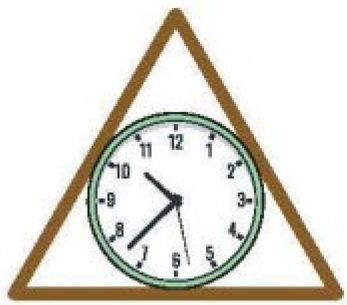
b) Tính bán đường tròn nội tiếp tam giác ABC theo a.

Bài 10. Đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC có bán kính bằng $4(dm)$.

a) Tính diện tích tam giác ABC.

b) Tính bán đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

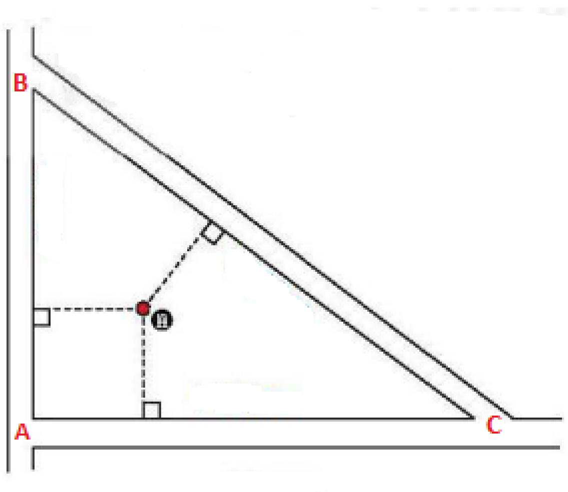
Bài 11. Người ta muốn làm một khung gỗ hình tam giác đều có cạnh $10\sqrt{10}(cm)$ để đặt vừa khít một đồng hồ treo tường (như hình vẽ). Tính đường kính chiếc đồng hồ đó.



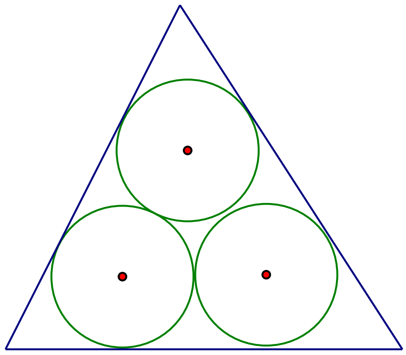
Bài 12. Bác An có một khu đất được bao xung quanh bởi ba con đường thẳng lập thành một tam giác với độ dài các cạnh là $AB = 30m, AC = 40m, BC = 50m$ (như hình vẽ).

a) Với giá đất hiện tại là 20 triệu/m^2. Nếu Bác An bán thì được bao nhiêu tiền?

b) Bác An muốn xây một ngôi nhà biệt thự bên trong khu đất mình cách đều cả ba con đường đó. Khi đó, ngôi nhà biệt thự của Bác An cách mỗi con đường là bao nhiêu?



Bài 13. Ba đường tròn tiếp xúc với nhau từng đôi một và tiếp xúc với các cạnh của tam giác như hình bên. Nếu mỗi đường tròn có bán kính là 3, thì chu vi của tam giác sẽ bằng bao nhiêu?



Lời giải

Từ tâm P và Q vẽ PQ và CQ vuông góc với cạnh AD của tam giác

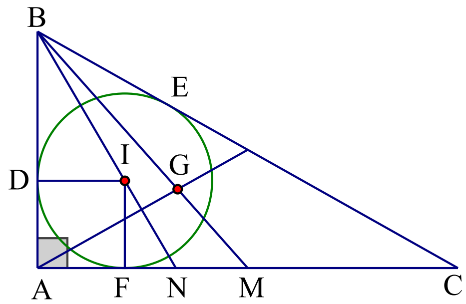
Các tam giác APB và DQC là nửa tam giác đều với $PB = QC = 3$

$\Rightarrow AB = CD = 3\sqrt{3}; BC = PQ = 6 \Rightarrow AD = 6 + 6\sqrt{3}$

Vậy chu vi tam giác là: $18 + 18\sqrt{3}$

Bài 14. Cho ΔABC vuông tại A, có $AB = 9cm, AC = 12cm$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp, G là trọng tâm của tam giác. Tính độ dài IG

Lời giải



Gọi D, E, F là tiếp điểm của đường tròn (I) với AB

ΔABC vuông tại A, theo định lý Pytago ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15(cm)$

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có: $AD = AF; BD = BE; CE = CF$

Do đó $2AD + 2BE + 2CE = AB + BC + CA = 9 + 12 + 15 = 36$

$\Leftrightarrow 2AD + 2BC = 36 \Leftrightarrow AD = 3(cm) \Rightarrow BD = 6(cm); DI = 3(cm)$

Gọi $N = BI \cap AC$, ta có: $\frac{BI}{BN} = \frac{BD}{BA} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} = \frac{BG}{BM} \Rightarrow \begin{cases} IG//NM \\ IG = \frac{2}{3}NM \end{cases}$

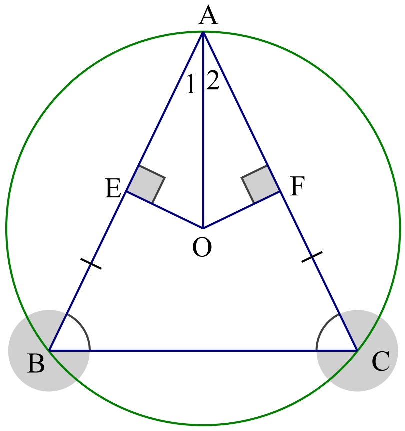
Ta có $\lozenge IDAF$ là hình vuông, có: $\frac{BD}{BA} = \frac{DI}{AN} = \frac{2}{3} \Rightarrow AN = 4,5(cm)$

Mà M là trung điểm của AC nên: $NM = AM - AN = 6 - 4,5 = 1,5(cm) \Rightarrow IG = 1(cm)$

DẠNG 2
BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP, NỘI TIẾP TAM GIÁC

Bài 1. Cho ΔABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Gọi E, F theo thứ tự là hình chiếu của (O) lên AB và AC. Chứng minh rằng AO là tia phân giác của $\widehat{BAC}$

Lời giải



Ta có: ΔABC cân tại $A \Rightarrow AB = AC \Rightarrow OE = OF$

Xét hai tam giác vuông AOE và AOF, có:

+ OA: cạnh chung

+ $OE = OF$: Chứng minh trên

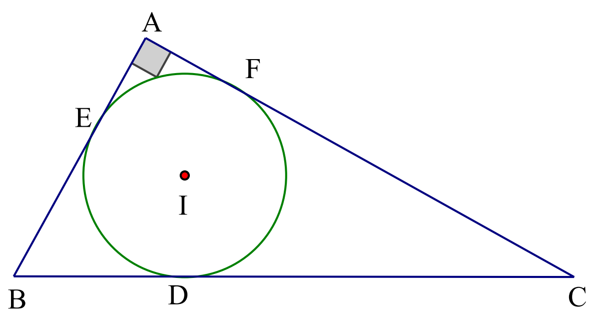
$\Rightarrow \Delta AOE = \Delta AOF \Rightarrow \begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \\ AE = AF \end{cases} \Rightarrow AO$ là phân giác của $\widehat{BAC}$

Bài 2. Cho ΔABC vuông tại A $\widehat{BAC} = 90^0 \left(AB \le AC\right)$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC tại D. Chứng minh rằng:

a) $BD = \dfrac{BC + AB - AC}{2}$

b) $S_{ABC} = BD.DC$

Lời giải



a) Gọi E, F là tiếp điểm của đường tròn (I) với các cạnh AB, AC

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có: $AE = AF; BE = BD; CD = CF$

Do đó: $2BD = BD + BE = BC - CD + AB - AE = BC + AB - (CD + AE) = BC + AB - (CF + AF)$

$= BC + AB - AC \Rightarrow BD = \dfrac{BC + AB - AC}{2}$

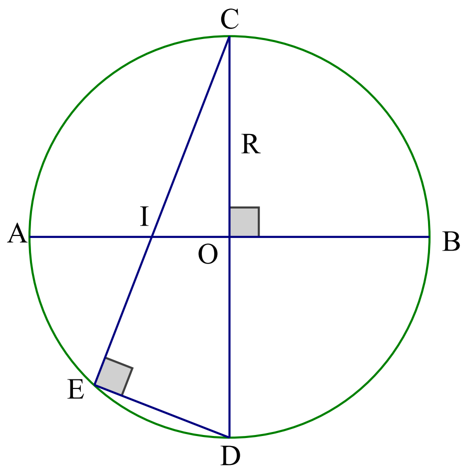
b) Tương tự câu a) ta có: $DC = \dfrac{BC + AC - AB}{2}$

mà $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (ΔABC vuông tại A), do đó: $BD.DC = \dfrac{(BC + AB - AC)(BC + AC - AB)}{4}$

$\dfrac{BC^2 - (AB - AC)^2}{4} = \dfrac{BC^2 - AB^2 - AC^2 + 2AB.AC}{4} = \dfrac{AB.AC}{2} = S_{ABC}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Cho đường tròn $(O;R)$ và hai đường kính vuông góc AB, CD. Trên bán kính AO lấy đoạn $AI = \dfrac{2AO}{3}$, vẽ tia CI cắt (O) tại E. Tính R theo CE



Lời giải

Ta có $AI = \dfrac{2AO}{3} = \dfrac{2R}{3} \Rightarrow OI = R - \dfrac{2R}{3} = \dfrac{R}{3}$

ΔOCI vuông tại O, ta có:

$CI = \sqrt{OC^2 + OI^2} = \sqrt{R^2 + \left(\dfrac{R}{3}\right)^2} = \dfrac{R\sqrt{10}}{3}$

ΔCED nội tiếp đường tròn O có cạnh CD là đường kính $\Rightarrow \Delta CED$ vuông tại E

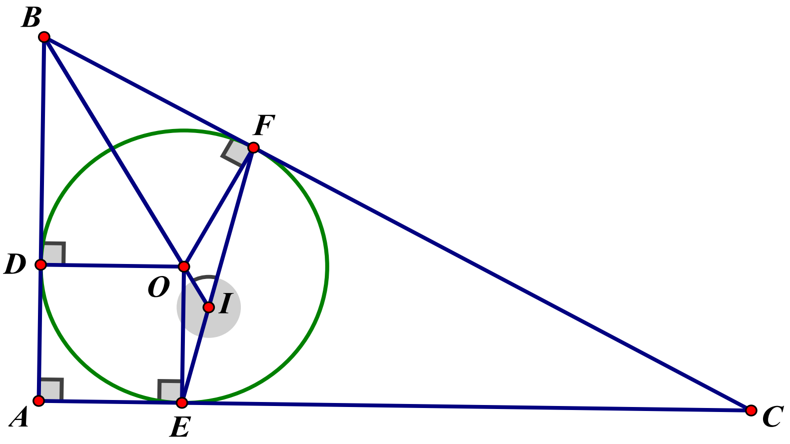
Hai tam giác vuông OCI và CED có $\widehat{C}: chung$

$\Rightarrow \Delta COI \# \Delta CED \Rightarrow \dfrac{CO}{CE} = \dfrac{CI}{CD} \Rightarrow CE = \dfrac{CO.CD}{CI}$

$= \dfrac{R.2R}{R\dfrac{\sqrt{10}}{3}} = \dfrac{6R}{\sqrt{10}} = \dfrac{3R\sqrt{10}}{5}$

Bài 4. Cho ΔABC vuông tại A ngọi tiếp đường tròn (O). Gọi D,E,F lần lượt là các tiếp điểm của (O) với các cạnh AB,AC và BC. Đường thẳng BO cắt đường thẳng EF tại I. Tính $\widehat{BIF}$

Lời giải



Ta có: $\widehat{DEI}=\widehat{DEF}=\frac{1}{2}\widehat{DOF}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm củng chắn cung DF).

Vì BD,BF là các tiếp tuyến của (O) lần lượt tại D,F nên OB là tia phân giác của $\widehat{DOF}$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau).

$\Rightarrow \widehat{DOB}=\frac{1}{2}\widehat{DOF}$

$\Rightarrow \widehat{DEI}=\widehat{DOB}.$

$\Rightarrow DEIO$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có góc ngoài bằng góc trong tại đinh đối diện).

Xét tứ giác $ODAE$ có $\widehat{ODA}=\widehat{DAE}=\widehat{OEA}=90^\circ$ nên $ODAE$ là hình chữ nhật (tứ giác có 3 góc vuông).

Lại có AD,AE là các tiếp tuyến của (O) tại D,E nên $AD=AE$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau

$\Rightarrow ODAE$ là hình vuông (hình chữ nhật có 2 cạnh kề bằng nhau) $\Rightarrow \widehat{ODE}=45^\circ$.

Mà $DEIO$ là tứ giác nội tiếp (cmt).

$\Rightarrow \widehat{BIF}=\widehat{ODE}=45^\circ$ (góc ngoài yà góc trong tại đinh đối diện của tứ giác nội tiếp).

Vậy $\widehat{BIF}=45^\circ$.

DẠNG 3

BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐƯỜNG TRÒN BÀNG TIẾP TAM GIÁC

ĐỌC THÊM

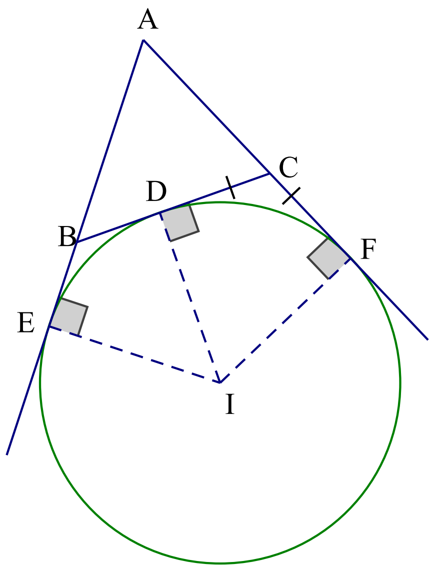
Bài 1. Cho ΔABC, đường tròn tâm I bàng tiếp trong góc A tiếp xúc với các tia AB, AC theo thứ tự tại E, F. Cho $BC = a, CA = b, AB = c$. Chứng minh rằng:

a) $AE = AF = \dfrac{a+b+c}{2}$

b) $BE = \dfrac{a+b-c}{2}$

c) $CF = \dfrac{c+a-b}{2}$

Lời giải



Gọi D là tiếp tuyến của (I) với cạnh BC

a) Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau thì: $BD = BE, CD = CF, AE = AF$

Do $AE = AB + BE = c + BD$ (1); $AF = AC + CF = b + CD$ (2)

Cộng (1) với (2) theo vế ta được: $2AE = 2AF = b + c + BD + CD = a + b + c \Rightarrow AE = AF = \dfrac{a+b+c}{2}$

b) Theo câu a) ta có: $BD + c = BE + c = AE = \dfrac{a+b+c}{2}; CD + b = CF + b = \dfrac{a+b+c}{2}$

$\Rightarrow BE = \dfrac{a+b+c}{2} - c = \dfrac{a+b-c}{2}; CF = \dfrac{a+b+c}{2} - b = \dfrac{a+c-b}{2}$

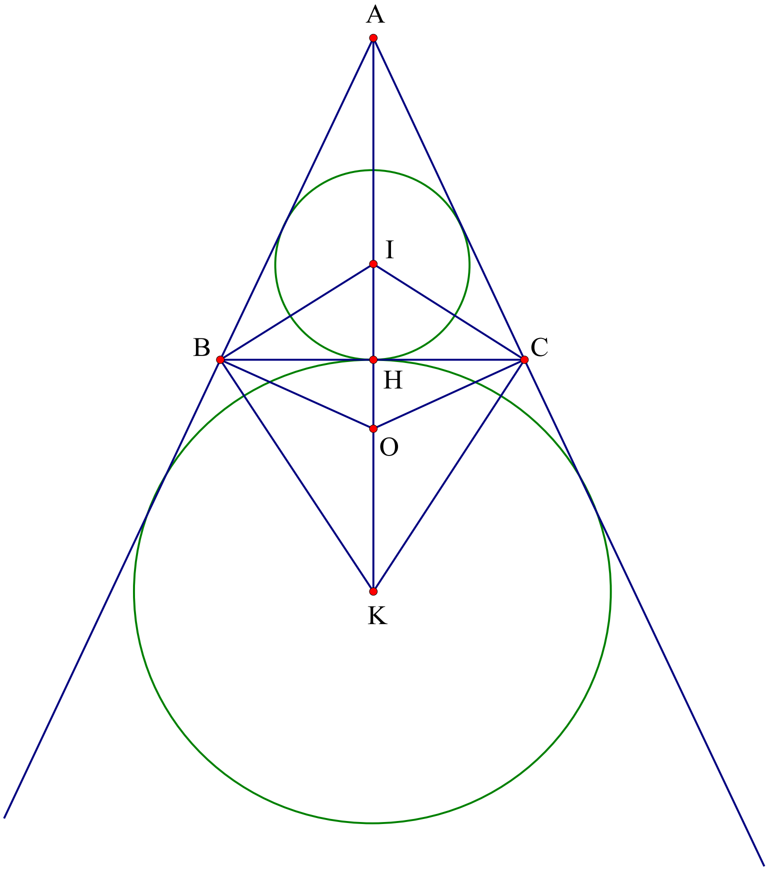
Bài 2. Cho tam giác ABC cân tại A, điểm I là tâm đường tròn nội tiếp, điểm K là tâm đường tròn bàng tiếp $\widehat{A}$ của tam giác. Gọi O là trung điểm của IK

a) Chứng minh 4 điểm B, I, C, K cùng thuộc 1 đường tròn

b) Gọi (O) là đường tròn đi qua 4 điểm B, I, C, K. Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn $(O; OK)$

c) Tính bán kính của (O) biết $AB = AC = 20cm, BC = 24cm$

Lời giải



a) Ta có BI, BK là hai tia phân giác của hai góc kề bù $\Rightarrow BI \perp BK = B$

Tương tự CI và CK là hai tia phân giác hai góc kề bù $\Rightarrow CI \perp CK = C$

$\Rightarrow \widehat{IBK} = \widehat{ICK} = 90^0 \Rightarrow I, B, K, C$ cùng nằm trên một đường tròn.

b) Ta có: $\widehat{ACO} = \widehat{ACI} + \widehat{ICB} + \widehat{BCO}; \widehat{ICK} = 90^0 = \widehat{ICB} + \widehat{BCO} + \widehat{OCK}$

Ta đi chứng minh:

$\widehat{OCK} = \widehat{ACI} \Leftrightarrow \widehat{OKC} = \widehat{ICB}$

Lại có: $\widehat{OKC} + \widehat{OIC} = 90^0 (\widehat{ICK} = 90^0); \widehat{ICB} + \widehat{OIC} = 90^0 (\widehat{IHC} = 90^0) \Rightarrow \widehat{ACO} = \widehat{ICK} = 90^0 \Rightarrow AC$ là tiếp tuyến

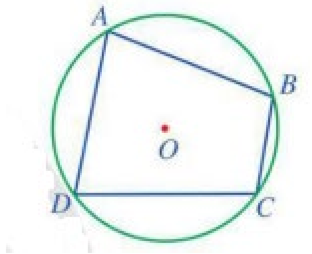
c) Ta có AK cắt BC tại $H \Rightarrow HC = 12cm, AH = 16cm$

$$\Delta ACH \# \Delta COH (gg) \Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{CH}{CO} \Rightarrow CO = 15cm$$

BÀI 2
TỨ GIÁC NỘI TIẾP

1. Định nghĩa

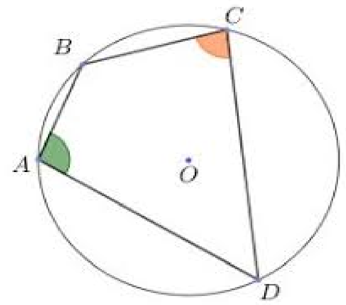
Tứ giác nội tiếp đường tròn là tứ giác có bốn đỉnh nằm trên đường tròn đó.



Chú ý: Trong hình vẽ trên, ta có tứ giác $ABCD$ nội tiếp và đường tròn (O) được gọi là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.

2. Tính chất

Trong một tứ giác nội tiếp đường tròn, tổng số đo hai góc đối bằng 180^0.

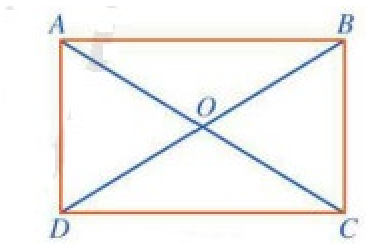


$\widehat{A}+\widehat{C}=180^\circ$

3. Hình chữ nhật, hình vuông nội tiếp đường tròn

a. Hình chữ nhật nội tiếp đường tròn

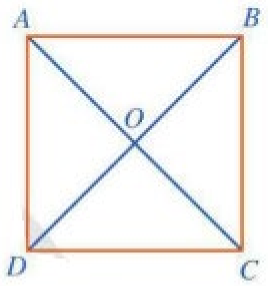
- Mỗi hình chữ nhật là tứ giác nội tiếp được đường tròn.
- Tâm của đường tròn ngoại hình chữ nhật là giao điểm của hai đường chéo và mỗi đường chéo là một đường kính của đường tròn đó.



b. Hình vuông nội tiếp được đường tròn

- Mỗi hình vuông là tứ giác nội tiếp được đường tròn.
- Tâm của đường tròn ngoại hình vuông là giao điểm của hai đường chéo và mỗi đường chéo là một đường kính của đường tròn đó.

- Bán kính của đường tròn ngoại tiếp hình vuông cạnh a là $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



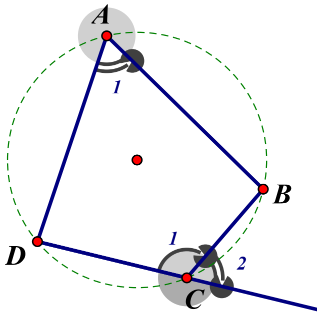
Chú ý: Hình thang cân nội tiếp được đường tròn

CHỦ ĐỀ 1
TÍNH GÓC CỦA TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN
CHỨNG MINH TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN

DẠNG 1
TÍNH GÓC CỦA TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN

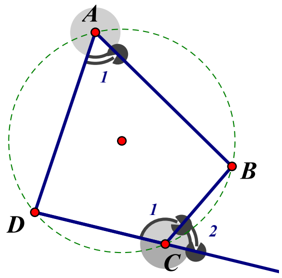
Kiến thức cần nhớ

1. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn thì có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180^0.



$ABCD$ nội tiếp được đường tròn nên $\widehat{A_1}+\widehat{C_1}=180^0$ và $\widehat{B}+\widehat{D}=180^0$

2. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn thì có góc bằng góc kề của góc đối của nó.

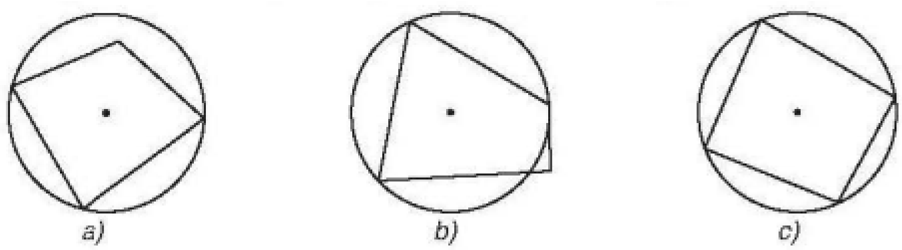


$ABCD$ nội tiếp được đường tròn nên $\widehat{A_1}+\widehat{C_1}=180^0$ mà $\widehat{C_1}+\widehat{C_2}=180^0\left(hai\ góc\ kê\ bù\right)\Rightarrow \widehat{A_1}=\widehat{C_2}$

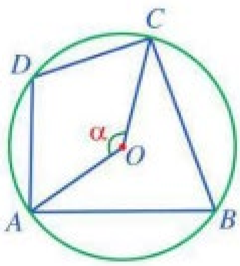
Chú ý: Cần nắm lại kiến thức góc nội tiếp và góc ở tâm

- Góc nội tiếp có số đo bằng nửa số đo cung bị chắn.
- Góc ở tâm có số đo bằng cung bị chắn.
- Góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung thì góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm.

Bài 1. Trong các tứ giác sau, tứ giác nào nội tiếp được đường tròn? Giải thích.



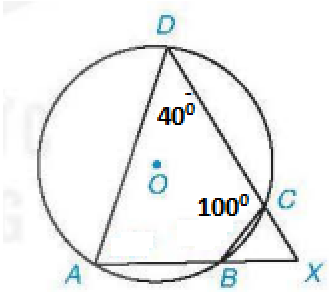
Bài 2. Trong hình vẽ dưới đây, cho $\alpha = 140^0$.



a) Tính các góc $\widehat{ABC}, \widehat{ADC}$ của tứ giác $ABCD$.

b) Tính $\widehat{BAD} + \widehat{BCD}$.

Bài 3. Trong hình vẽ dưới đây, cho $\widehat{ADC} = 40^0, \widehat{BCD} = 100^0$.



a) Tính các góc $\widehat{ABC}, \widehat{BAD}$ của tứ giác $ABCD$.

b) Tính $\widehat{BXC}$.

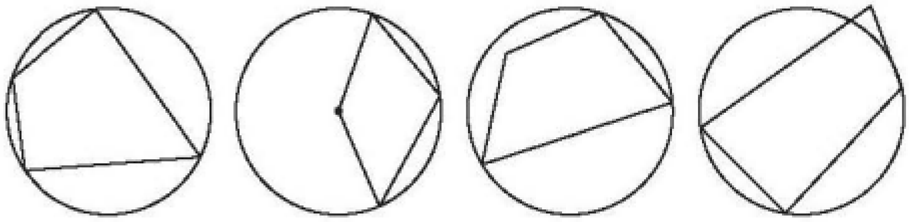
Bài 4. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn. Tính số đo các góc còn lại của tứ giác đó trong các trườn hợp sau:

a) $\widehat{A} = 45^0$ và $\widehat{B} = 155^0$.

b) $\widehat{B} = 60^0$ và $\widehat{C} = 85^0$.

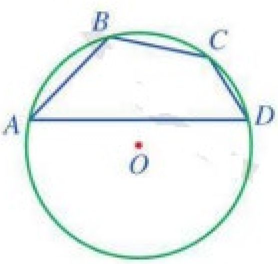
BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Trong các tứ giác sau, tứ giác nào nội tiếp được đường tròn? Giải thích.

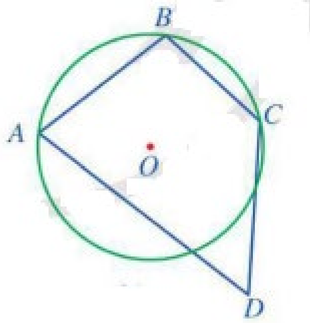


a) b) c) d)

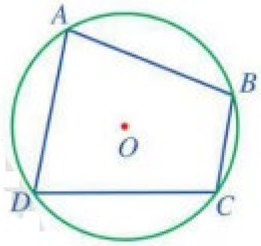
Bài 6. Trong các đường tròn (O) sau, đường tròn nào ngoại tiếp tứ giác $ABCD$? Giải thích.



Hình 1



Hình 2

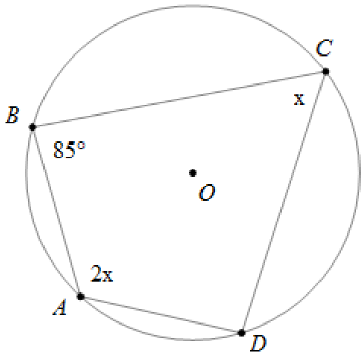


Hình 3

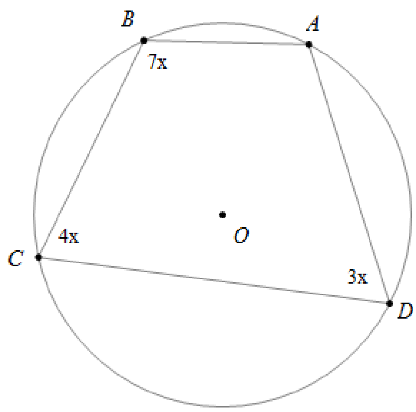
Bài 7. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn. Tính số đo các góc còn lại của tứ giác đó trong mỗi trường hợp sau:

a) $\widehat{A}=110^0$ và $\widehat{B}=50^0$ b) $\widehat{B}=60^0$ và $\widehat{C}=85^0$ c) $\widehat{C}=55^0$ và $\widehat{D}=127^0$

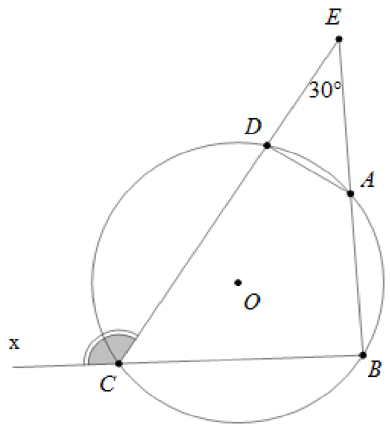
Bài 8. Dựa vào hình vẽ sau, hãy tính x.



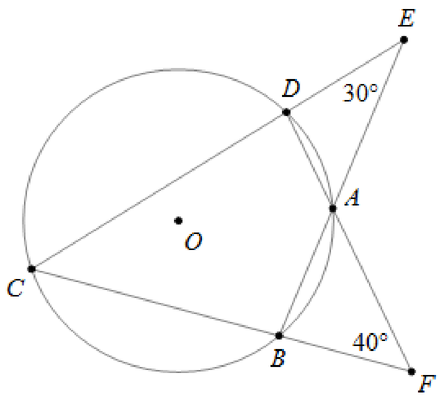
Bài 9. Dựa vào hình vẽ sau, hãy tính x.



Bài 10. Dựa vào hình vẽ sau hãy tính số đo các góc của tứ giác $ABCD$, biết $\widehat{DCx} = 135^0$



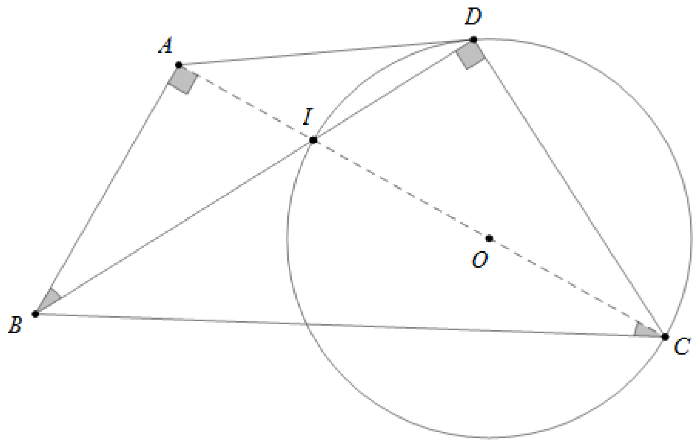
Bài 11. Dựa vào hình vẽ sau hãy tính số đo các góc của tứ giác $ABCD$.



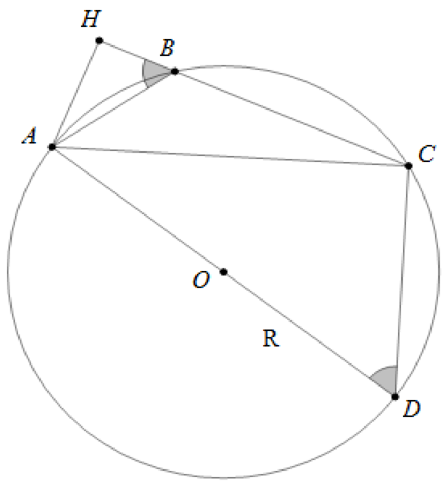
Bài 12. Dựa vào hình vẽ sau

a) Chứng minh CI là phân giác góc $\widehat{BCD} = 135^0$.

b) Chứng minh AD là tiếp tuyến của đường tròn tâm O.



Bài 13. Dựa vào hình vẽ sau hãy tính bán kính R, biết $AH \perp HC,\ AH = 5cm,\ AB = 8cm,\ AC = 15cm$.

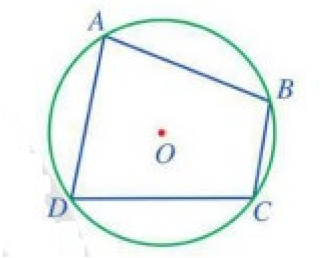


DẠNG 2

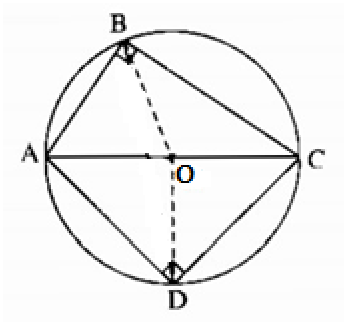
CHỨNG MINH TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN

1. Phương pháp chung

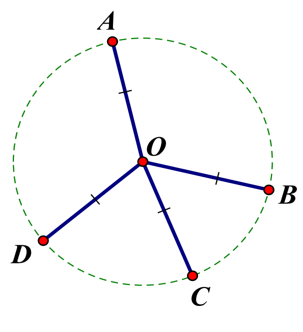
• **Phương pháp 1:** Để tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn thì ta chứng minh $\widehat{A}+\widehat{C}=180^0$ hoặc $\widehat{B}+\widehat{D}=180^0$.



Chú ý: Tứ giác có hai góc đối diện đều bằng 90^0 thì tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó là trung điểm của cạnh đối diện hai góc vuông đó.



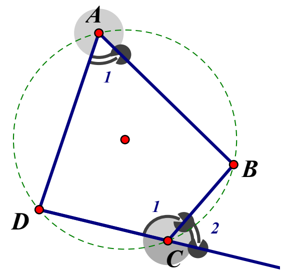
• **Phương pháp 2:** Để tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn thì ta chứng minh $OA=OB=OC=OD$.



2. Ta cần thuộc các bổ đề sau để vận dụng chứng minh tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.

Bổ đề 1: Tứ giác có góc bằng góc kề của góc đối của nó thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.

Giả thiết	$ABCD$ là tứ giác $\widehat{A_1} = \widehat{C_2}$
Kết luận	Tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn.



Chứng minh:

Ta có: $\widehat{A_1} = \widehat{C_2}$ (giả thiết)

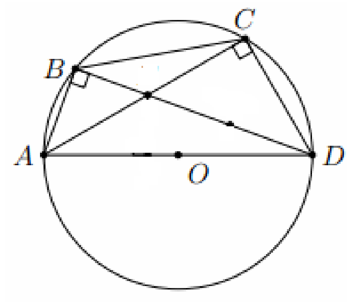
$\widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 180^0$ (hai góc kề bù)

Suy ra $\widehat{A_1} + \widehat{C_1} = 180^0$

Tứ giác $ABCD$ có tổng số đo hai góc đối $\widehat{A_1}$ và $\widehat{C_1}$ bằng 180^0, do đó tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn.

Bổ đề 2: Tứ giác có hai đỉnh kề nhau và cùng bằng 90^0, đồng thời cùng nhìn dưới một cạnh thì tứ giác nội tiếp được đường tròn.

Giả thiết	$ABCD$ là tứ giác có là hai góc kề $\widehat{ABD}, \widehat{ACD}$ cùng nhìn dưới cạnh AD. $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^0$ $OA = OD$
Kết luận	Tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn có tâm là trung điểm AD.



Chứng minh:

Xét tam giác ABD có $\widehat{ABD} = 90^0$ và BO là đường trung tuyến nên $OB = OA = OD = \frac{1}{2}AD$ (1)

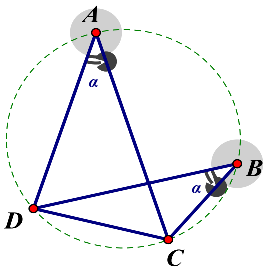
Xét tam giác ACD có $\widehat{ACD} = 90^0$ và CO là đường trung tuyến nên $OC = OA = OD = \frac{1}{2}AD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OA = OB = OC = OD$

Vậy tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn có tâm là trung điểm AD.

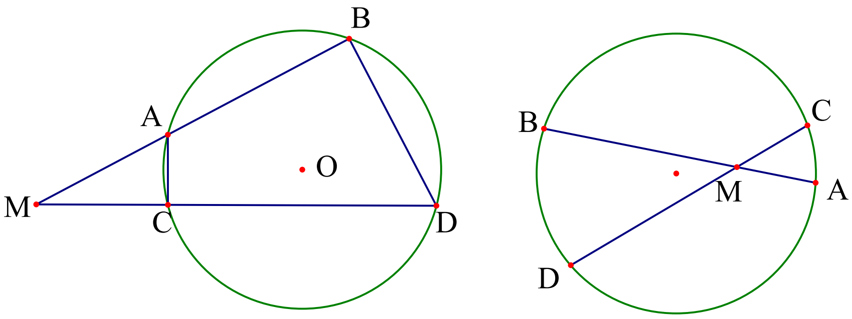
Chú ý:

Mở rộng bổ đề 2: Tứ giác có hai đỉnh kề nhau và bằng nhau đồng thời cùng nhìn dưới một cạnh thì tứ giác nội tiếp được.



Nếu $\widehat{CAD} = \widehat{CBD} = \alpha$ thì $ABCD$ nội tiếp

Bổ đề 3: Cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 cắt nhau tại điểm M. Trên hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt lấy các điểm A, B và C, D khi đó 4 điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn khi và chỉ khi $MA.MB = MC.MD$.



Hình 1 **Hình 2**

Nếu $MA.MB = MC.MD$ thì $ABCD$ nội tiếp

Ta chứng minh tính chất trên như sau:

• Trường hợp 1 (Hình 1)

Ta có: $MA.MB = MC.MD \Rightarrow \dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MC}{MB}$

Xét ΔMAC và ΔMDB có:

$\widehat{MAC}$ chung

$\dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MC}{MB}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta MAC \sim \Delta MDB (c-g-c) \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MDB} \Rightarrow ABCD$ nội tiếp.

• Trường hợp 2 (Hình 2)

Ta có: $MA.MB = MC.MD \Rightarrow \dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MC}{MB}$

Xét ΔMAC và ΔMDB có:

$\widehat{AMC} = \widehat{DMB}$ (đối đỉnh)

$\dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MC}{MB}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta MAC \sim \Delta MDB(c-g-c) \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MDB}$

Vậy tứ giác $ABCD$ có hai đỉnh A và D kề nhau, cùng nhìn cạnh BC dưới hai góc bằng nhau nên tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn.

Nhận xét: Trong bài tập chứng minh tứ giác nội tiếp chủ yếu sử dụng Bổ đề 1 và Bổ đề 2, còn Bổ đề 2 mở rộng và Bổ đề 3 hầu như không dùng đến. Nó chỉ dùng cho học sinh chuyên toán, vì thế các em không quan tâm đến Bổ đề 2 mở rộng và Bổ đề 3 nhé **.**

Bài 1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Vẽ các đường cao BD và CE của tam giác ABC. Gọi H là giao điểm của BD và CE.

a) Chứng minh $ADHE$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $BCDE$ là tứ giác nội tiếp.

Bài 2. Cho tam giác nhọn ABC $(AB > AC)$. Đường tròn (I) đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại F, E. Đường thẳng BE cắt CF tại H và đường thẳng AH cắt BC tại D.

a) Chứng minh tứ giác $BFHD$ nội tiếp.

b) Chứng minh tứ giác $ABDE$ nội tiếp.

Bài 3. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có tam giác ABC là tam giác nhọn. Vẽ các đường cao AM và CN của tam giác ABC. Gọi H là giao điểm của AM và CN.

a) Chứng minh $\widehat{ABC} = \widehat{CHM}$.

b) Chứng minh $\widehat{ADC} = \widehat{AHC}$.

c) Chứng minh $\widehat{MAC} = \widehat{MNC}$.

d) Chứng minh $\widehat{MAC} + 90^0 = \widehat{ANM}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Trên nửa đường tròn (O) đường kính AB lấy điểm C sao cho $AC > BC$ (C khác A và B). Gọi D là trung điểm của đoạn thẳng OA. Đường thẳng qua D và vuông góc với AB cắt AC tại E. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $BCED$ nội tiếp được

b) $AC.AE = \dfrac{AB^2}{4}$

Bài 5. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm là điểm H. Gọi M là điểm trên dây cung BC không chứa điểm A (M khác B, C). Gọi N, P theo thứ tự là các điểm đối xứng của M qua các đường thẳng AB, AC

a) Chứng minh $AHCP$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh N, H, P thẳng hàng.

Bài 6. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A ở bên ngoài đường tròn. Vẽ hai tiếp tuyến AB,AC với đường tròn (O) (B,C là các tiếp điểm). Gọi M là trung điểm AB.

a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp và xác định tâm I của đường tròn này.

b) Chứng minh rằng $AM.AO = AB.AI$.

c) Gọi G là trọng tâm tam giác ACM. Chứng minh $MG//BC$.

d) Chứng minh IG vuông góc với CM.

Bài 7. Cho tam giác ABC và đường cao AH gọi $\mathrm{M,N}$ lần lượt là trung điểm của $\mathrm{AB,AC}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BHM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác CNH tại E. Chứng minh AMEN là tứ giác nội tiếp và HE đi qua trung điểm của MN.

Bài 8. Trên các cạnh $\mathrm{BC,CD}$ của hình vuông ABCD ta lấy lần lượt các điểm $\mathrm{M,N}$ sao cho $\widehat{\mathrm{MAN}} = 45^0$. Đường thẳng BD cắt các đường thẳng $\mathrm{AM,AN}$ tương ứng tại các điểm $\mathrm{P,Q}$.

a) Chứng minh rằng các tứ giác ABMQ và ADNP nội tiếp.

b) Chứng minh rằng các điểm $\mathrm{M,N,Q,P,C}$ nằm trên cùng một đường tròn.

Bài 9. Cho điểm M thuộc cung nhỏ BC của đường tròn (O). Một đường thẳng d ở ngoài (O) và vuông góc với OM; $\mathrm{CM,BM}$ cắt d lần lượt tại $\mathrm{D,E}$. Chứng minh rằng $\mathrm{B,C,D,E}$ cùng thuộc một đường tròn.

Bài 10. Cho đường tròn $(O;R)$ nội tiếp ΔABC, tiếp xúc với cạnh AB,AC lần lượt ở D và E

a) Gọi O' là tâm đường tròn nội tiếp ΔADE, tính OO' theo R.

b) Các đường phân giác trong của $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cắt đường thẳng DE lần lượt tại M và N. Chứng minh tứ giác $BCMN$ nội tiếp được đường tròn.

c) Chứng minh $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{DM}{AC} = \dfrac{EN}{AB}$.

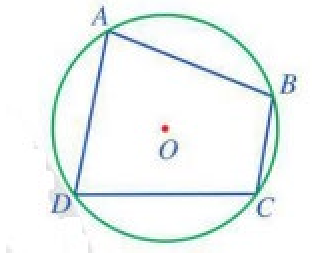
Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ đường cao AH và phân giác trong AD của góc $\widehat{\mathrm{HAC}}$. Phân giác trong góc $\widehat{\mathrm{ABC}}$ cắt $\mathrm{AH,AD}$ lần lượt tại $\mathrm{M,N}$. Chứng minh rằng: $\widehat{\mathrm{BND}} = 90^0$.

Bài 12. Cho tam giác cân ABC $(\mathrm{AB} = \mathrm{AC})$ P là điểm trên cạnh đáy BC. Kẻ các đường thẳng $\mathrm{PE,PD}$ lần lượt song song với $\mathrm{AB,AC}$ $(\mathrm{E} \in \mathrm{AC}, \mathrm{D} \in \mathrm{AB})$ gọi Q là điểm đối xứng với P qua DE. Chứng minh bốn điểm $\mathrm{Q,A,B,C}$ cùng thuộc một đường tròn.

BÀI 2
TỨ GIÁC NỘI TIẾP

1. Định nghĩa

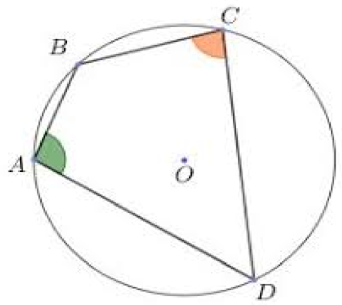
Tứ giác nội tiếp đường tròn là tứ giác có bốn đỉnh nằm trên đường tròn đó.



Chú ý: Trong hình vẽ trên, ta có tứ giác $ABCD$ nội tiếp và đường tròn (O) được gọi là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.

2. Tính chất

Trong một tứ giác nội tiếp đường tròn, tổng số đo hai góc đối bằng 180^0.



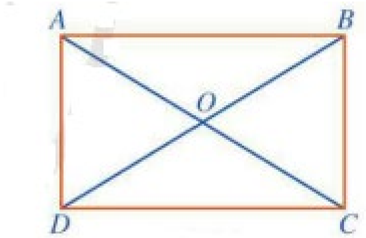
$\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$

3. Hình chữ nhật, hình vuông nội tiếp đường tròn

a. Hình chữ nhật nội tiếp đường tròn

• Mỗi hình chữ nhật là tứ giác nội tiếp được đường tròn.

• Tâm của đường tròn ngoại hình chữ nhật là giao điểm của hai đường chéo và mỗi đường chéo là một đường kính của đường tròn đó.

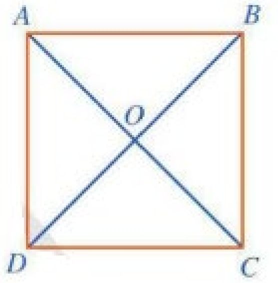


b. Hình vuông nội tiếp được đường tròn

• Mỗi hình vuông là tứ giác nội tiếp được đường tròn.

• Tâm của đường tròn ngoại hình vuông là giao điểm của hai đường chéo và mỗi đường chéo là một đường kính của đường tròn đó.

- Bán kính của đường tròn ngoại tiếp hình vuông cạnh a là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.



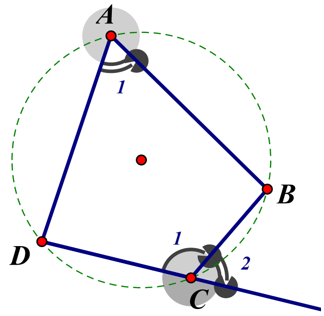
Chú ý: Hình thang cân nội tiếp được đường tròn

CHỦ ĐỀ 1
TÍNH GÓC CỦA TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN
CHỨNG MINH TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN

DẠNG 1
TÍNH GÓC CỦA TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN

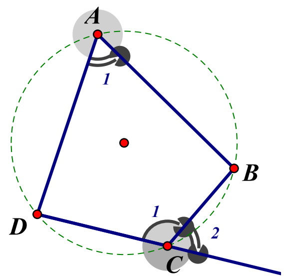
Kiến thức cần nhớ

1. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn thì có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180^0.



$ABCD$ nội tiếp được đường tròn nên $\widehat{A_1}+\widehat{C_1}=180^0$ và $\widehat{B}+\widehat{D}=180^0$

2. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn thì có góc bằng góc kề của góc đối của nó.

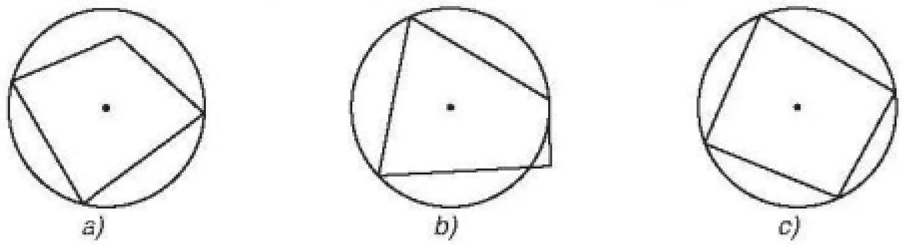


$ABCD$ nội tiếp được đường tròn nên $\widehat{A_1}+\widehat{C_1}=180^0$ mà $\widehat{C_1}+\widehat{C_2}=180^0\,(hai\ góc\ kê\ bù) \Rightarrow \widehat{A_1}=\widehat{C_2}$

Chú ý: Cần nắm lại kiến thức góc nội tiếp và góc ở tâm

- Góc nội tiếp có số đo bằng nửa số đo cung bị chắn.
- Góc ở tâm có số đo bằng cung bị chắn.
- Góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung thì góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm.

Bài 1. Trong các tứ giác sau, tứ giác nào nội tiếp được đường tròn? Giải thích.

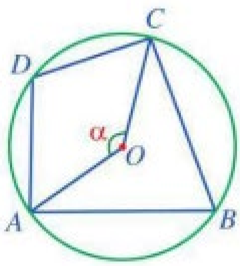


Lời giải

Ở hình a) và hình b), tứ giác không nội tiếp đường tròn vì có một đỉnh tứ giác không nằm trên đường tròn

Ở hình c), tứ giác nội tiếp đường tròn vì 4 đỉnh tứ giác nằm trên đường tròn

Bài 2. Trong hình vẽ dưới đây, cho $\alpha = 140^0$.



a) Tính các góc $\widehat{ABC}, \widehat{ADC}$ của tứ giác $ABCD$.

b) Tính $\widehat{BAD} + \widehat{BCD}$.

Lời giải

a) Ta có: $\widehat{ABC} = \dfrac{1}{2}\alpha = \dfrac{1}{2}.140^0 = 70^0$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung AC)

$\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^0$ (tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn)

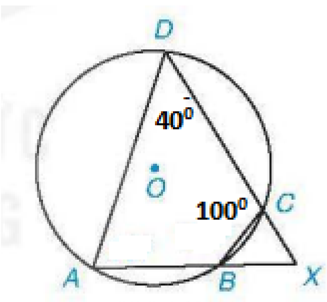
$70^0 + \widehat{ADC} = 180^0$

$\widehat{ADC} = 180^0 - 70^0$

$\widehat{ADC} = 110^0$

b) tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn nên $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^0$.

Bài 3. Trong hình vẽ dưới đây, cho $\widehat{ADC} = 40^0, \widehat{BCD} = 100^0$.



a) Tính các góc $\widehat{ABC}, \widehat{BAD}$ của tứ giác $ABCD$.

b) Tính $\widehat{BXC}$.

Lời giải

a) Ta có:

$\widehat{ABC}+\widehat{ADC}=180^0$ (tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn)

$\widehat{ABC}+40^0=180^0$

$\widehat{ABC}=180^0-40^0$

$\widehat{ABC}=140^0$

$\widehat{BAD}+\widehat{BCD}=180^0$ (tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn)

$\widehat{BAD}+100^0=180^0$

$\widehat{BAD}=180^0-100^0$

$\widehat{BAD}=80^0$

b) Ta có:

$\widehat{AXD}+\widehat{XAD}+\widehat{XDA}=180^0$ (tổng ba góc của tam giác ADX)

$\widehat{AXD}+80^0+40^0=180^0$

$\widehat{AXD}=180^0-\left(80^0+40^0\right)$

$\widehat{AXD}=60^0$

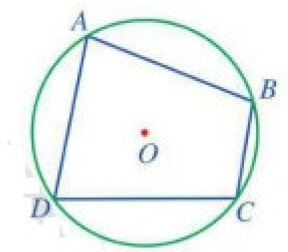
Bài 4. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn. Tính số đo các góc còn lại của tứ giác đó trong các trườn hợp sau:

a) $\widehat{A}=45^0$ và $\widehat{B}=155^0$.

b) $\widehat{B}=60^0$ và $\widehat{C}=85^0$.

Lời giải

a)



- Ta có: $\widehat{A}+\widehat{C}=180^0$ (tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn)

$45^0+\widehat{C}=180^0$

$\widehat{C}=180^0-45^0$

$\widehat{C}=135^0$

- Ta có: $\widehat{B}+\widehat{D}=180^0$ (tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn)

$155^0+\widehat{D}=180^0$

$\widehat{D}=180^0-155^0$

$\widehat{D}=25^0$

b) $\widehat{B}=60^0$ và $\widehat{C}=85^0$.

- Ta có: $\widehat{B}+\widehat{D}=180^0$ (tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn)

$60^0+\widehat{D}=180^0$

$\widehat{D}=180^0-60^0$

$\widehat{D}=120^0$

- Ta có: $\widehat{A}+\widehat{C}=180^0$ (tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn)

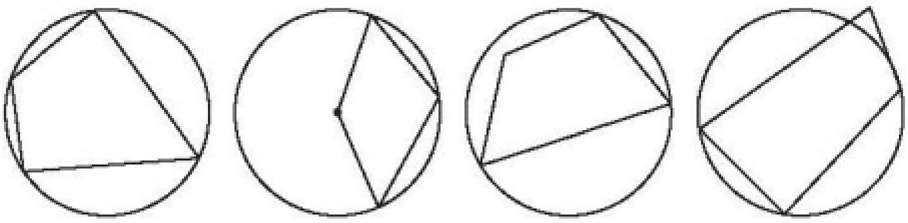
$\widehat{A}+85^0=180^0$

$\widehat{A}=180^0-85^0$

$\widehat{A}=95^0$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Trong các tứ giác sau, tứ giác nào nội tiếp được đường tròn? Giải thích.



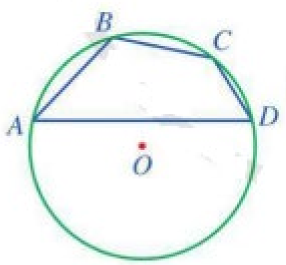
a) b) c) d)

Lời giải

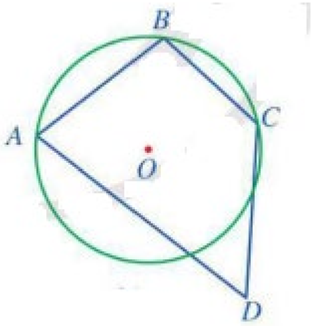
Ở hình a) và hình b), tứ giác nội tiếp đường tròn vì 4 đỉnh tứ giác nằm trên đường tròn

Ở hình c) và hình d), tứ giác không nội tiếp đường tròn vì có một đỉnh tứ giác không nằm trên đường tròn

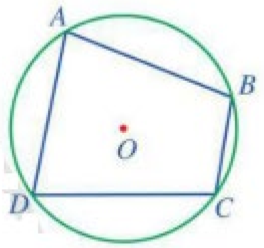
Bài 6. Trong các đường tròn (O) sau, đường tròn nào ngoại tiếp tứ giác $ABCD$? Giải thích.



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Lời giải

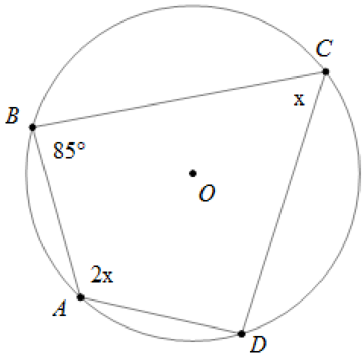
Ở hình 1) và hình 3), đường tròn (O) là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ vì nó đi qua cả bốn đỉnh của tứ giác $ABCD$.

Ở hình 2), đường tròn (O) là đường tròn không ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ vì nó không đi qua đỉnh D của tứ giác.

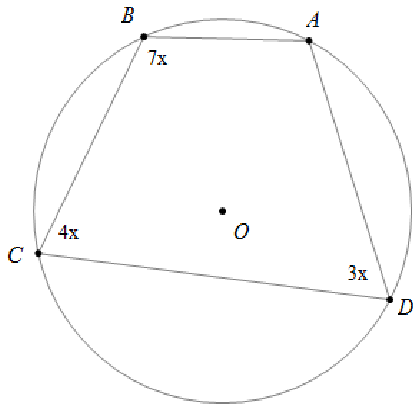
Bài 7. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn. Tính số đo các góc còn lại của tứ giác đó trong mỗi trường hợp sau:

a) $\widehat{A}=110^0$ và $\widehat{B}=50^0$ b) $\widehat{B}=60^0$ và $\widehat{C}=85^0$ c) $\widehat{C}=55^0$ và $\widehat{D}=127^0$

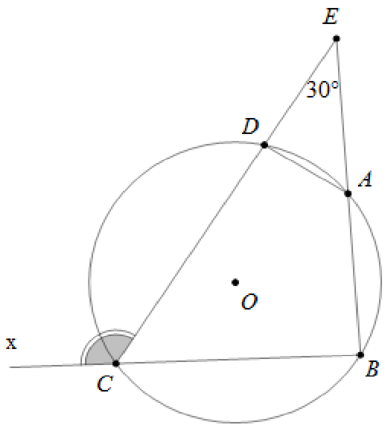
Bài 8. Dựa vào hình vẽ sau, hãy tính x.



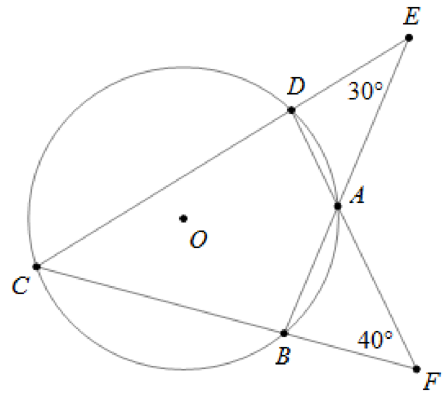
Bài 9. Dựa vào hình vẽ sau, hãy tính x.



Bài 10. Dựa vào hình vẽ sau hãy tính số đo các góc của tứ giác $ABCD$, biết $\widehat{DCx} = 135^0$



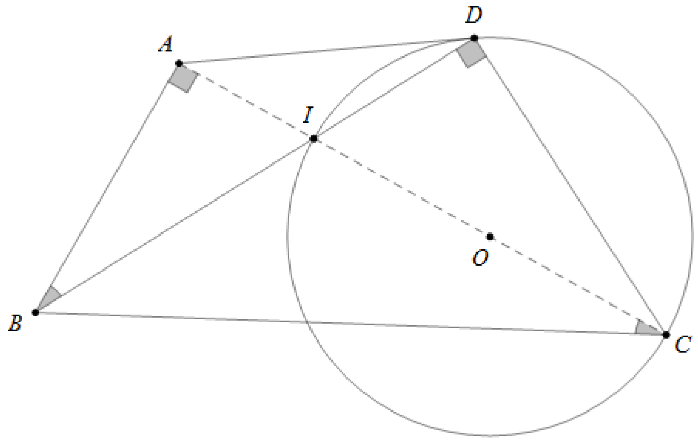
Bài 11. Dựa vào hình vẽ sau hãy tính số đo các góc của tứ giác $ABCD$.



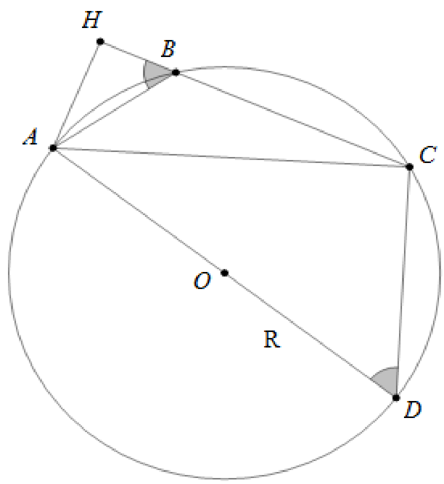
Bài 12. Dựa vào hình vẽ sau

a) Chứng minh CI là phân giác góc $\widehat{BCD} = 135^0$.

b) Chứng minh AD là tiếp tuyến của đường tròn tâm O.



Bài 13. Dựa vào hình vẽ sau hãy tính bán kính R, biết $AH \perp HC,\ AH = 5cm,\ AB = 8cm,\ AC = 15cm$.

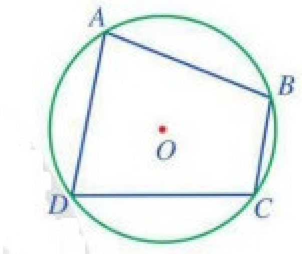


DẠNG 2

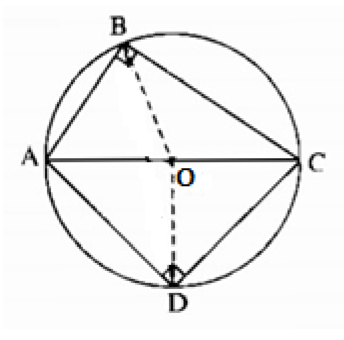
CHỨNG MINH TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN

1. Phương pháp chung

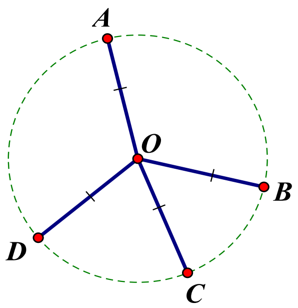
• **Phương pháp 1:** Để tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn thì ta chứng minh $\widehat{A}+\widehat{C}=180^0$ hoặc $\widehat{B}+\widehat{D}=180^0$.



Chú ý: Tứ giác có hai góc đối diện đều bằng 90^0 thì tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó là trung điểm của cạnh đối diện hai góc vuông đó.



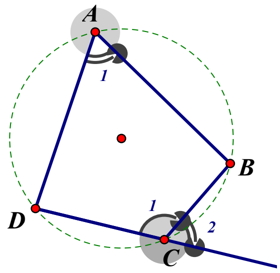
• **Phương pháp 2:** Để tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn thì ta chứng minh $OA=OB=OC=OD$.



2. Ta cần thuộc các bổ đề sau để vận dụng chứng minh tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.

Bổ đề 1: Tứ giác có góc bằng góc kề của góc đối của nó thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.

Giả thiết	$ABCD$ là tứ giác $\widehat{A_1} = \widehat{C_2}$
Kết luận	Tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn.



Chứng minh:

Ta có: $\widehat{A_1} = \widehat{C_2}$ (giả thiết)

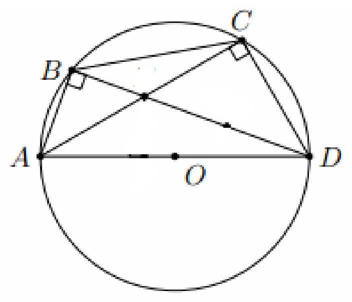
$\widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 180^0$ (hai góc kề bù)

Suy ra $\widehat{A_1} + \widehat{C_1} = 180^0$

Tứ giác $ABCD$ có tổng số đo hai góc đối $\widehat{A_1}$ và $\widehat{C_1}$ bằng 180^0, do đó tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn.

Bổ đề 2: Tứ giác có hai đỉnh kề nhau và cùng bằng 90^0, đồng thời cùng nhìn dưới một cạnh thì tứ giác nội tiếp được đường tròn.

Giả thiết	$ABCD$ là tứ giác có là hai góc kề $\widehat{ABD}, \widehat{ACD}$ cùng nhìn dưới cạnh AD. $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^0$ $OA = OD$
Kết luận	Tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn có tâm là trung điểm AD.



Chứng minh:

Xét tam giác ABD có $\widehat{ABD} = 90^0$ và BO là đường trung tuyến nên $OB = OA = OD = \dfrac{1}{2}AD$ (1)

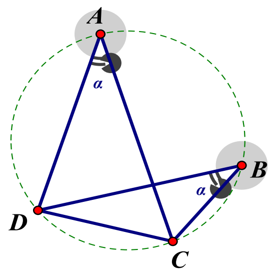
Xét tam giác ACD có $\widehat{ACD} = 90^0$ và CO là đường trung tuyến nên $OC = OA = OD = \dfrac{1}{2}AD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OA = OB = OC = OD$

Vậy tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn có tâm là trung điểm AD.

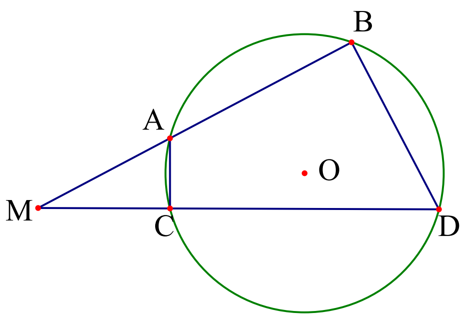
Chú ý:

Mở rộng bổ đề 2: Tứ giác có hai đỉnh kề nhau và bằng nhau đồng thời cùng nhìn dưới một cạnh thì tứ giác nội tiếp được.

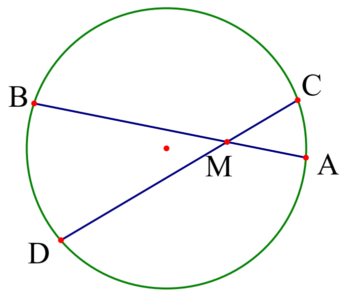


Nếu $\widehat{CAD} = \widehat{CBD} = \alpha$ thì $ABCD$ nội tiếp

Bổ đề 3: Cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 cắt nhau tại điểm M. Trên hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt lấy các điểm A, B và C, D khi đó 4 điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn khi và chỉ khi $MA.MB = MC.MD$.



Hình 1



Hình 2

Nếu $MA.MB = MC.MD$ thì $ABCD$ nội tiếp

Ta chứng minh tính chất trên như sau:

• **Trường hợp 1 (Hình 1)**

Ta có: $MA.MB = MC.MD \Rightarrow \dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MC}{MB}$

Xét ΔMAC và ΔMDB có:

$\widehat{MAC}$ chung

$\dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MC}{MB}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta MAC \sim \Delta MDB (c-g-c) \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MDB} \Rightarrow ABCD$ nội tiếp.

• **Trường hợp 2 (Hình 2)**

Ta có: $MA.MB = MC.MD \Rightarrow \dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MC}{MB}$

Xét ΔMAC và ΔMDB có:

$\widehat{AMC} = \widehat{DMB}$ (đối đỉnh)

$\dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MC}{MB}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta MAC \sim \Delta MDB(c-g-c) \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MDB}$

Vậy tứ giác $ABCD$ có hai đỉnh A và D kề nhau, cùng nhìn cạnh BC dưới hai góc bằng nhau nên tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn.

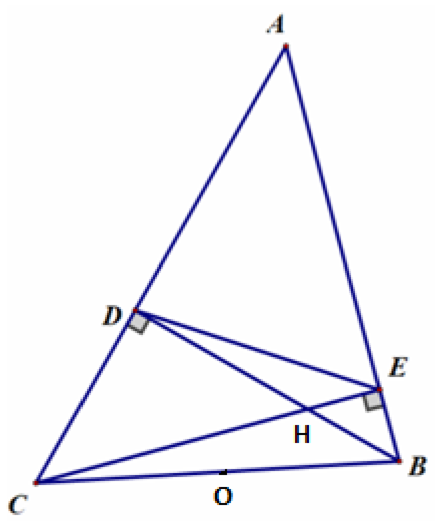
Nhận xét: Trong bài tập chứng minh tứ giác nội tiếp chủ yếu sử dụng Bổ đề 1 và Bổ đề 2, còn Bổ đề 2 mở rộng và Bổ đề 3 hầu như không dùng đến. Nó chỉ dùng cho học sinh chuyên toán, vì thế các em không quan tâm đến Bổ đề 2 mở rộng và Bổ đề 3 nhé **.**

Bài 1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Vẽ các đường cao BD và CE của tam giác ABC. Gọi H là giao điểm của BD và CE.

a) Chứng minh $ADHE$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $BCDE$ là tứ giác nội tiếp.

Lời giải



a) Chứng minh $ADHE$ là tứ giác nội tiếp.

Vì BD, CE là các đường cao của ΔABC nên $\begin{cases} BD \perp AC \\ CE \perp AB \end{cases} \Rightarrow \widehat{AEH} = \widehat{ADH} = 90^\circ$.

Xét tứ giác $ADHE$ có $\widehat{AEH} + \widehat{ADH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

$\Rightarrow ADHE$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có tổng 2 góc đối bằng 180^0).

b) Chứng minh $BCDE$ là tứ giác nội tiếp.

Gọi O là trung điểm BC.

Vì BD, CE là các đường cao của ΔABC nên $\begin{cases} BD \perp AC \\ CE \perp AB \end{cases} \Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$

Xét tam giác BDC có $\widehat{BDC} = 90^0$ và DO là đường trung tuyến nên $OD = OC = OB = \frac{1}{2}BC$ (1)

Xét tam giác BEC có $\widehat{BEC} = 90^0$ và EO là đường trung tuyến nên $OE = OC = OB = \frac{1}{2}BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OD = OE = OC = OB$

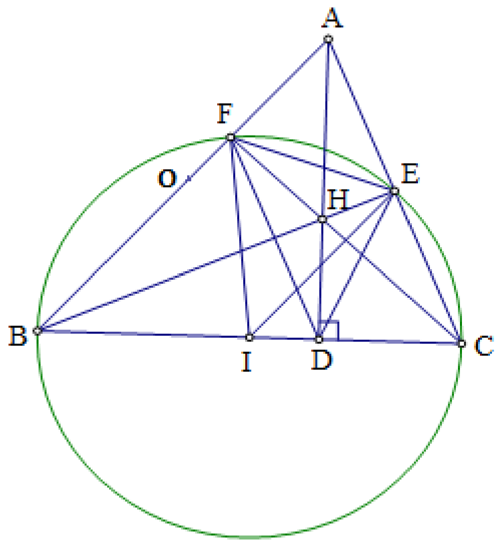
Vậy tứ giác $BCDE$ nội tiếp được đường tròn có tâm O là trung điểm BC.

Bài 2. Cho tam giác nhọn ABC $(AB > AC)$. Đường tròn (I) đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại F, E. Đường thẳng BE cắt CF tại H và đường thẳng AH cắt BC tại D.

a) Chứng minh tứ giác $BFHD$ nội tiếp.

b) Chứng minh tứ giác $ABDE$ nội tiếp.

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $BFHD$ nội tiếp.

- Xét đường tròn (I)

$\widehat{CFB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow CF \perp AB$

$\widehat{CFB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow BE \perp AC$

Suy ra H là trực tâm của tam giác ABC hay $AH \perp BC \Rightarrow \widehat{HDB} = 90^0$

- Xét tứ giác $BFHD$

$\widehat{CFB} = \widehat{HDB} = 90^0$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \widehat{CFB} + \widehat{HDB} = 180^0$

tứ giác $BFHD$ có tổng hai góc đối $\widehat{CFB}, \widehat{HDB}$ bằng 180^0 nên tứ giác $BFHD$ nội tiếp.

b) Chứng minh tứ giác $ABDE$ nội tiếp.

Gọi O là trung điểm AB.

Xét tam giác ADB có $\widehat{ADB} = 90^0$ và DO là đường trung tuyến nên $OD = OA = OB = \frac{1}{2}AB$ (1)

Xét tam giác AEB có $\widehat{AEB}=90^0$ và EO là đường trung tuyến nên $OE=OA=OB=\frac{1}{2}AB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OD=OE=OA=OB$

Vậy tứ giác $ABDE$ nội tiếp được đường tròn có tâm O là trung điểm AB.

Bài 3. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có tam giác ABC là tam giác nhọn. Vẽ các đường cao AM và CN của tam giác ABC. Gọi H là giao điểm của AM và CN.

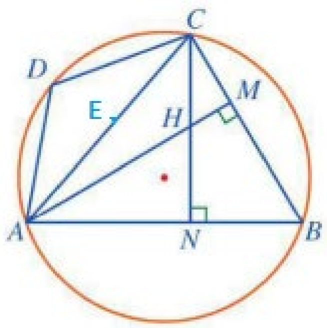
a) Chứng minh $\widehat{ABC}=\widehat{CHM}$.

b) Chứng minh $\widehat{ADC}=\widehat{AHC}$.

c) Chứng minh $\widehat{MAC}=\widehat{MNC}$.

d) Chứng minh $\widehat{MAC}+90^0=\widehat{ANM}$.

Lời giải



a) Chứng minh $\widehat{ABC}=\widehat{CHM}$.

Vì AM, CN là các đường cao của ΔABC nên $\begin{cases} AM\perp BC \\ CN\perp AB \end{cases} \Rightarrow \widehat{BMH}=\widehat{BNH}=90^\circ$.

Xét tứ giác $BNHM$ có $\widehat{BMH}+\widehat{BNH}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$.

$\Rightarrow BNHM$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có tổng 2 góc đối bằng 180^0).

Tứ giác $BNHM$ nội tiếp nên: $\widehat{MBN}+\widehat{NHM}=180^\circ$ hay $\widehat{CBA}+\widehat{NHM}=180^\circ$

mà $\widehat{MBN}+\widehat{NHM}=180^\circ$ (hai góc kề bù)

do đó $\widehat{CBA}=\widehat{MBN}$

b) Chứng minh $\widehat{ADC}=\widehat{AHC}$.

Tứ giác $BNHM$ nội tiếp nên: $\widehat{MBN}+\widehat{NHM}=180^\circ$

mà $\widehat{AHC}=\widehat{NHM}$ (đối đỉnh)

nên $\widehat{MBN}+\widehat{AHC}=180^\circ$

hay $\widehat{ABC}+\widehat{AHC}=180^\circ$

Mặc khác tứ giác $BNHM$ nội tiếp đường tròn tâm (O) nên $\widehat{ADC}+\widehat{ABC}=180^0$

Do đó $\widehat{ADC}=\widehat{AHC}$

c) Chứng minh $\widehat{MAC}=\widehat{MNC}$.

Ta chứng minh $ACMN$ là tứ giác nội tiếp.

Gọi E là trung điểm AC.

Xét tam giác AMC có $\widehat{AMC} = 90^0$ và ME là đường trung tuyến nên $EM = EC = EA = \frac{1}{2}AC$ (1)

Xét tam giác ANC có $\widehat{ANC} = 90^0$ và NE là đường trung tuyến nên $EN = EC = EA = \frac{1}{2}AC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $EM = EN = EC = EA$

Vậy tứ giác $ACMN$ nội tiếp được đường tròn có tâm E là trung điểm AC.

Suy ra $\widehat{MAC} = \widehat{MNC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MC của đường tròn tâm E)

d) Chứng minh $\widehat{MAC} + 90^0 = \widehat{ANM}$.

Ta có $\widehat{MAC} + \widehat{ACM} = 90^0$ (hai góc phụ nhau)

Hay $\widehat{ACM} = 90^0 - \widehat{MAC}$

Mà $\widehat{ACM} + \widehat{ANM} = 180^0$ (tứ giác $ACMN$ nội tiếp được đường tròn, câu c))

Nên $90^0 - \widehat{MAC} + \widehat{ANM} = 180^0$

Suy ra $\widehat{MAC} + 90^0 = \widehat{ANM}$

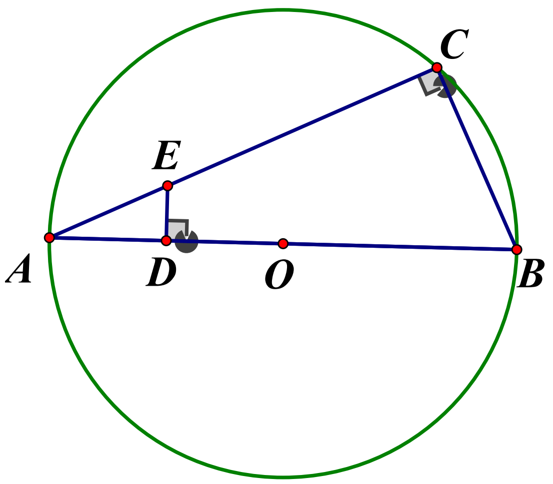
BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Trên nửa đường tròn (O) đường kính AB lấy điểm C sao cho $AC > BC$ (C khác A và B). Gọi D là trung điểm của đoạn thẳng OA. Đường thẳng qua D và vuông góc với AB cắt AC tại E. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $BCED$ nội tiếp được

b) $AC.AE = \frac{AB^2}{4}$

Lời giải



a) Tứ giác $BCED$ nội tiếp

C thuộc đường tròn đường kính $AB \Rightarrow \angle ACB = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \angle ECB = 90°$, mặt khác $ED \perp AB$ tại D (gt) $\Rightarrow \angle EDB = 90°$

Tứ giác $BCED$ có $\angle ECB + \angle EDB = 90° + 90° = 180°$ mà hai góc này đối nhau

Suy ra $BCED$ là tứ giác nội tiếp

b) $AC.AE = \frac{AB^2}{4}$

Xét ΔAED và ΔABC có :

$$\left.\begin{array}{l}\angle BAC\ chung \\ \angle ADE = \angle ACB = 90°\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AED \sim \Delta ABC(g.g)$$

$\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$(cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)$\Rightarrow AC.AE = AD.AB$

Mà D là trung điểm của $AO(gt) \Rightarrow AD = \frac{1}{2}AO$

O là tâm đường tròn đường kính AB (gt)$\Rightarrow AO = \frac{1}{2}AB$

Suy ra $AD = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}AB = \frac{1}{4}AB$

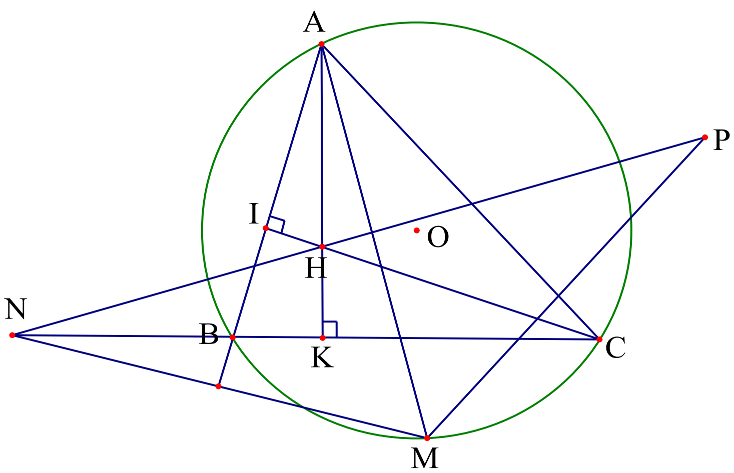
Do đó, $AC.AE = \frac{1}{4}AB.AB = \frac{AB^2}{4}(dfcm)$

Bài 5. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm là điểm H. Gọi M là điểm trên dây cung BC không chứa điểm A (M khác B,C). Gọi N,P theo thứ tự là các điểm đối xứng của M qua các đường thẳng AB, AC

a) Chứng minh $AHCP$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh N,H,P thẳng hàng.

Lời giải



a). Giả sử các đường cao của tam giác là AK, CI . Để chứng minh $AHCP$ là tứ giác nội tiếp ta sẽ chứng minh $\widehat{AHC} + \widehat{APC} = 180^0$.

Ta có:

$\widehat{AHC} = \widehat{IHK}$ (đối đỉnh)

$\widehat{APC}=\widehat{AMC}=\widehat{ABC}$ (do tính đối xứng và góc nội tiếp cùng chắn một cung).

Như vậy ta chỉ cần chứng minh $\widehat{ABC}+\widehat{IHK}=180^0$ nhưng điều này là hiển nhiên do tứ giác BIHK là tứ giác nội tiếp.

b). Để chứng minh N,H,P thẳng hàng ta sẽ chứng minh $\widehat{NHA}+\widehat{AHP}=180^0$ do đó ta sẽ tìm cách quy hai góc này về 2 góc đối nhau trong một tứ giác nội tiếp.

Thật vậy ta có: $\widehat{AHP}=\widehat{ACP}$ (tính chất góc nội tiếp), $\widehat{ACP}=\widehat{ACM}$ (1) (Tính chất đối xứng) .

Ta thấy vai trò tứ giác AHCP giống với AHBN nên ta cũng dễ chứng minh được AHBN là tứ giác nội tiếp từ đó suy ra $\widehat{AHN}=\widehat{ABN}$, mặt khác $\widehat{ABN}=\widehat{ABM}$ (2) (Tính chất đối xứng) .

Từ (1), (2) ta suy ra chỉ cần chứng minh $\widehat{ABM}+\widehat{ACM}=180^0$ nhưng điều này là hiển nhiên do tứ giác ABMC nội tiếp.

Vậy $\widehat{NHA}+\widehat{AHP}=180^0$ hay N,H,P thẳng hàng.

Bài 6. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A ở bên ngoài đường tròn. Vẽ hai tiếp tuyến AB,AC với đường tròn (O) (B,C là các tiếp điểm). Gọi M là trung điểm AB.

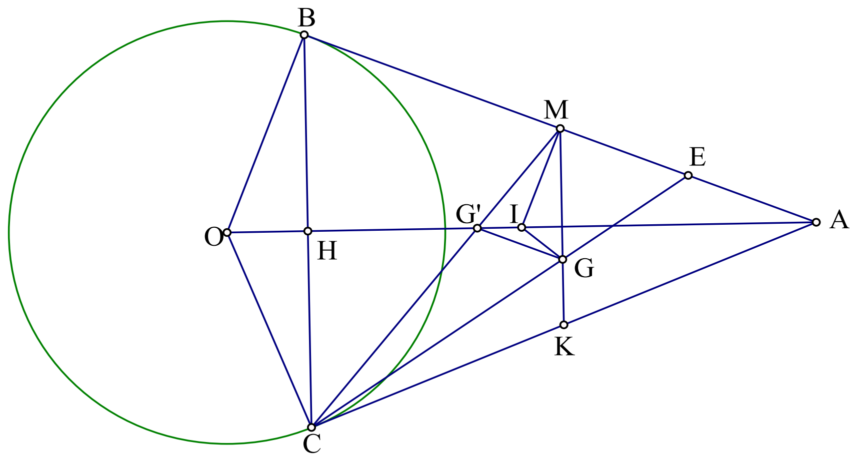
a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp và xác định tâm I của đường tròn này.

b) Chứng minh rằng $AM.AO=AB.AI$.

c) Gọi G là trọng tâm tam giác ACM. Chứng minh $MG//BC$.

d) Chứng minh IG vuông góc với CM.

Lời giải



a) Do AB,AC là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn (O) nên $\widehat{ABO}=\widehat{ACO}=90^0 \Rightarrow B,C$ thuộc đường tròn đường kính OA có tâm I là trung điểm OA.

b) Ta có $AM.AO=\dfrac{AB}{2}.2AI=AB.AI$.

c) Gọi E là trung điểm MA, do G là trọng tâm ΔCMA nên $G\in CE$ và $\dfrac{GE}{CE}=\dfrac{1}{3}$.

Mặt khác $\frac{ME}{BE}=\frac{1}{3}$ (vì $ME=\frac{MA}{2}=\frac{MB}{2}$ nên $ME=\frac{BE}{3}$) $\Rightarrow \frac{GE}{CE}=\frac{ME}{BE}$, theo định lý Ta-lét đảo $\Rightarrow MG//BC$.

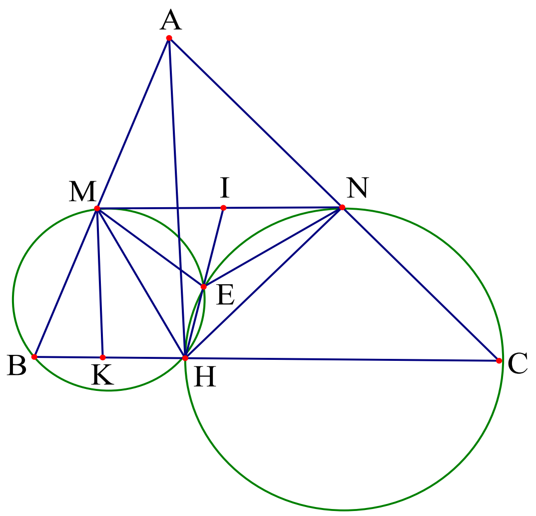
d) Gọi G' là giao điểm của OA và $CM \Rightarrow G'$ là trọng tâm ΔABC. Nên $\frac{G'M}{CM}=\frac{1}{3}=\frac{GE}{CE'}$, theo định lý Ta-lét đảo $GG'//ME$ (1)

MI là đường trung bình trong $\Delta OAB \Rightarrow MI//OB$, mà $AB \perp OB$ (cmt) $\Rightarrow MI \perp AB$, nghĩa là $MI \perp ME$ (2).

Từ (1) và (2) cho $MI \perp GG'$, ta lại có $GI' \perp MK$ (vì $OA \perp MK$) nên I là trực tâm $\Delta MGG' \Rightarrow GI \perp G'M$ tức $GI \perp CM$.

Bài 7. Cho tam giác ABC và đường cao AH gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BHM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác CNH tại E. Chứng minh $AMEN$ là tứ giác nội tiếp và HE đi qua trung điểm của MN.

Lời giải



Để chứng minh $AMEN$ là tứ giác nội tiếp ta sẽ chứng minh: $\widehat{MAN}+\widehat{MEN}=180^0$.

Ta cần tìm sự liên hệ của các góc $\widehat{MAN};\widehat{MEN}$ với các góc có sẵn của những tứ giác nội tiếp khác.

Ta có $\widehat{MEN}=360^0-\left(\widehat{MEH}+\widehat{NEH}\right)=360^0-\left(180^0-\widehat{ABC}+180^0-\widehat{ACB}\right)=\widehat{ABC}+\widehat{ACB}=180^0-\widehat{BAC}$ suy ra $\widehat{MEN}+\widehat{MAN}=180^0$. Hay tứ giác $AMEN$ là tứ giác nội tiếp.

Kẻ $MK \perp BC$, giả sử HE cắt MN tại I thì IH là cát tuyến của hai đường tròn (BMH), (CNH).

Lại có $MB=MH=MA$ (Tính chất trung tuyến tam giác vuông).

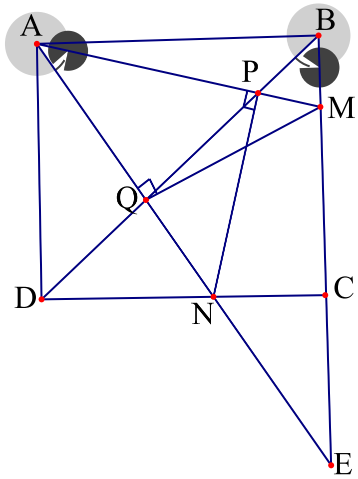
Suy ra tam giác MBH cân tại $M \Rightarrow KB=KH \Rightarrow MK$ luôn đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MBH. Hay MN là tiếp tuyến của (MBH) suy ra $IM^2=IE.IH$, tương tự ta cũng có MN là tiếp tuyến của (HNC) suy ra $IN^2=IE.IH$ do đó $IM=IN$.

Bài 8. Trên các cạnh BC, CD của hình vuông $ABCD$ ta lấy lần lượt các điểm M, N sao cho $\widehat{MAN} = 45^0$. Đường thẳng BD cắt các đường thẳng AM, AN tương ứng tại các điểm P, Q.

a) Chứng minh rằng các tứ giác $ABMQ$ và $ADNP$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng các điểm M, N, Q, P, C nằm trên cùng một đường tròn.

Lời giải



a). Gọi E là giao điểm của AN và BC.

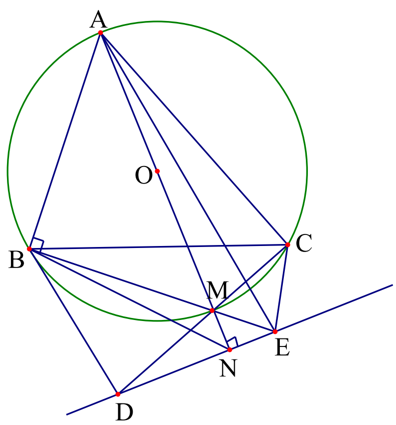
Các điểm M và Q nằm trên hai cạnh EB và EA của tam giác EBA, nên tứ giác $ABMQ$ là lồi. Các đỉnh A và B cùng nhìn đoạn thẳng MQ dưới một góc 45^0 không đổi. Vì vậy tứ giác $ABMQ$ nội tiếp.

Lập luận tương tự ta suy ra tứ giác $ADNP$ nội tiếp.

b) Từ kết quả câu a, suy ra $\widehat{ADP} = \widehat{ANP} = 45^0, \widehat{QAM} = \widehat{QBM} = 45^0 \Rightarrow NP \perp AM, MQ \perp AN$. Tập hợp các điểm P, Q, C nhìn đoạn MN dưới một góc vuông, nên các điểm này nằm trên đường tròn đường kính MN.

Bài 9. Cho điểm M thuộc cung nhỏ BC của đường tròn (O). Một đường thẳng d ở ngoài (O) và vuông góc với OM; CM, BM cắt d lần lượt tại D, E. Chứng minh rằng B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải



Kẻ đường kính AM cắt d tại N.

Ta có $\widehat{ANE} = \widehat{ABE} = 90^0$ nên tứ giác ABNE nội tiếp, suy ra $\widehat{BEN} = \widehat{BAN}$.

Mặt khác $\widehat{BAN} = \widehat{BCM}$, do đó $\widehat{BCM} = \widehat{BEN}$ hay $\widehat{BCD} = \widehat{BED}$.

Tứ giác BCDE có các đỉnh C và E cùng nhìn đoạn thẳng BD dưới một góc không đổi. Vì vậy tứ giác BCDE nội tiếp.

Vậy B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.

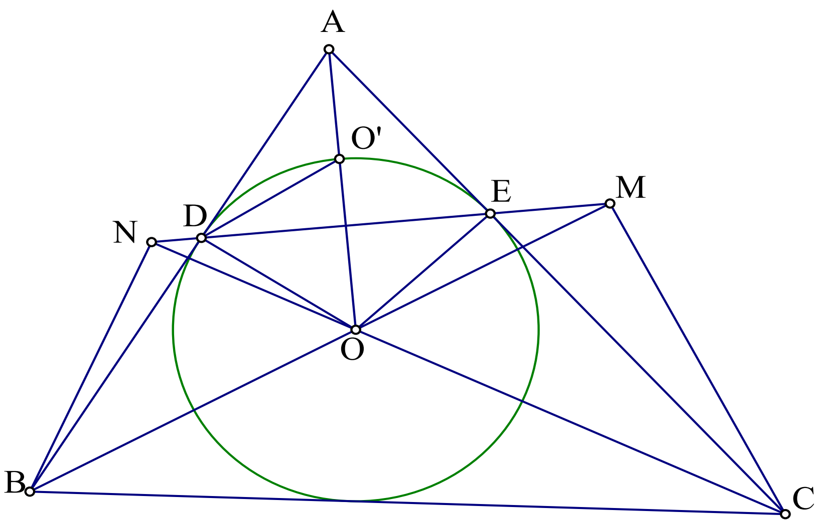
Bài 10. Cho đường tròn $(O;R)$ nội tiếp ΔABC, tiếp xúc với cạnh AB, AC lần lượt ở D và E

a) Gọi O' là tâm đường tròn nội tiếp ΔADE, tính OO' theo R.

b) Các đường phân giác trong của $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cắt đường thẳng DE lần lượt tại M và N. Chứng minh tứ giác $BCMN$ nội tiếp được đường tròn.

c) Chứng minh $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{DM}{AC} = \dfrac{EN}{AB}$.

Lời giải



a). Gọi O' là giao điểm của AO với cung nhỏ DE của đường tròn $(O) \Rightarrow O'$ thuộc đường phân giác của $\widehat{A}$ trong ΔADE.

Ta có $\widehat{DOA} = \widehat{EOA}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \overset{\frown}{DO'} = \overset{\frown}{O'E}$.

Mà $\widehat{ADO'} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{DO'}; \widehat{EDO'} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{O'E} \Rightarrow \widehat{ADO'} = \widehat{EDO'} \Rightarrow DO'$ là phân giác $\widehat{D} \Rightarrow O'$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔADE. Do đó $OO' = R$.

b) Do $AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \Delta ADE$ cân tại A nên $\widehat{ADE} = \dfrac{180^0 - \widehat{BAC}}{2} = 90^0 - \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$.

Mà $\widehat{ADE} = \widehat{ABM} + \widehat{NMB} = \dfrac{\widehat{ABC}}{2} + \widehat{NMB}$ (do BO là phân giác $\widehat{ABC}$ nên $\widehat{ABM} = \dfrac{\widehat{ABC}}{2}$)

$\Rightarrow \widehat{NMB} = \widehat{ADE} - \dfrac{\widehat{B}}{2} = 90^0 - \dfrac{\widehat{BAC} + \widehat{ABC}}{2} = \dfrac{\widehat{ACB}}{2}$.

Mặt khác $\widehat{NCB} = \dfrac{\widehat{ACB}}{2}$ (do CO là tia phân giác $\widehat{ACB}$).

Suy ra $\widehat{NMB} = \widehat{NCB}$, mà M, C là hai đỉnh liên tiếp của tứ giác $BCMN \Rightarrow$ Tứ giác $BCMN$ nội tiếp (vì cùng thuộc một cung chứa góc).

c) ΔNMO và ΔBCO có $\widehat{NOM} = \widehat{BOC}$ (đối đỉnh); $\widehat{NMO} = \widehat{BCO}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta NMO \sim \Delta BCO$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{OM}{OC} = \dfrac{ON}{OB} = \dfrac{MN}{BC}$.

Tương tự $\Delta DMO$$ ΔACO (g.g) $\Rightarrow \dfrac{DM}{AC} = \dfrac{OM}{OC}$;

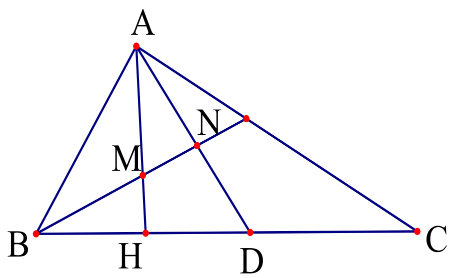
$\Delta NEO \sim \Delta BAO$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{NE}{AB} = \dfrac{ON}{OB}$.

Vậy $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{DM}{AC} = \dfrac{EN}{AB}$.

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ đường cao AH và phân giác trong AD của góc $\widehat{HAC}$. Phân giác trong góc $\widehat{ABC}$ cắt AH, AD lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng: $\widehat{BND} = 90^0$.

Lời giải

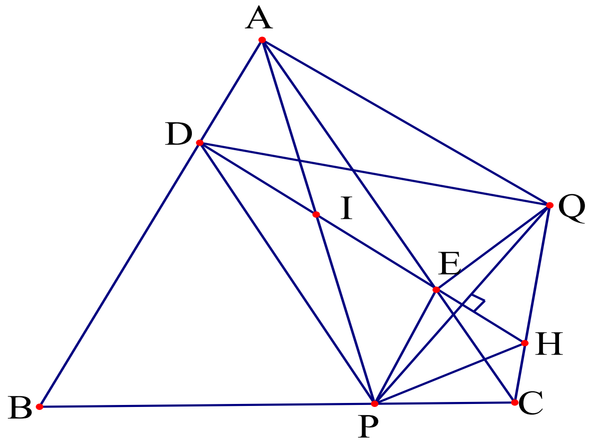
Phân tích: Ta có $\widehat{MHD} = 90^0$. Nếu $\widehat{MND} = 90^0$ thì tứ giác $MHDN$ nội tiếp. Vì vậy thay vì trực tiếp chỉ ra góc $\widehat{BND} = 90^0$ ta sẽ đi chứng minh tứ giác $MHDN$ nội tiếp. Tức là ta chứng minh $\widehat{AMN} = \widehat{ADH}$.



Thật vậy ta có $\widehat{AMN} = \widehat{BMH} = 90^0 - \widehat{MBH}$, $\widehat{NDH} = 90^0 - \widehat{HAD}$ mà $\widehat{MBH} = \dfrac{1}{2}\widehat{ABC}, \widehat{HAD} = \dfrac{1}{2}\widehat{HAC}$ và $\widehat{ABC} = \widehat{HAC}$ do cùng phụ với góc $\widehat{BCA}$ từ đó suy ra $\widehat{AMN} = \widehat{ADH}$ hay tứ giác $MHDN$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MND} = \widehat{MHD} = 90^0$

Bài 12. Cho tam giác cân ABC $(AB = AC)$ P là điểm trên cạnh đáy BC. Kẻ các đường thẳng PE, PD lần lượt song song với $AB, AC\left(E \in AC, D \in AB\right)$ gọi Q là điểm đối xứng với P qua DE. Chứng minh bốn điểm Q, A, B, C cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải



Bài toán có 2 giả thiết cần lưu ý. Đó là các đường thẳng song song với 2 cạnh tam giác , và điểm Q đối xứng với P qua DE. Do đó ta sẽ có: $AD = EP = EC = EQ$ và $DP = DQ$ (Đây là chìa khóa để ta giải bài toán này)

Từ định hướng đó ta có lời giải như sau:

Do $AD//PE, PD//AE \Rightarrow ADPE$ là hình bình hành $\Rightarrow AE = DP = DQ$.

Mặt khác do P,Q đối xứng nhau qua $DE \Rightarrow AD = PE = EQ$. Suy ra $DAQE$ là hình thang cân $\Rightarrow \widehat{DAQ} = \widehat{AQE}$.

Kéo dài DE cắt CQ tại H ta có $\widehat{DAQ} = \widehat{AQE} = \widehat{PEH}$.

Như vậy để chứng minh $ABCQ$ nội tiếp ta cần chứng minh: $\widehat{PCH} + \widehat{PEH} = 180^0 \Leftrightarrow PEHC$ là tứ giác nội tiếp.

Mặt khác ta có: $\widehat{ECQ} = \widehat{EQC}$ (do tam giác EQC cân), $\widehat{EPH} = \widehat{EQH}$ (Do tính đối xứng) suy ra $\widehat{ECH} = \widehat{EPH} \Leftrightarrow EPCH$ là tứ giác nội tiếp.

CHỦ ĐỀ 2
BÀI TẬP TỔNG HỢP VỀ ĐƯỜNG TRÒN

DẠNG 1
ĐƯỜNG TRÒN LIÊN QUAN ĐẾN TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN, CHỨNG MINH HỆ THỨC, TRUNG ĐIỂM, TỈ LỆ CẠNH

Bài 1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, các đường cao AE, BF và CN cắt nhau tại H ($E \in BC$, $F \in AC$, $N \in AB$).

a) Chứng minh tứ giác $CEHF$ nội tiếp.

b) Kéo dài FE cắt đường tròn đường kính BC tại M. Chứng minh $BM = BN$.

c) Biết $AH = BC$. Tính số đo góc A của tam giác ABC.

Bài 2. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Từ A kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O)(M, N *là các tiếp điểm).* Một đường thẳng đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm P, Q sao cho P nằm giữa A và Q, dây cung PQ không đi qua tâm O. Gọi I là trung điểm của đoạn PQ, J là giao điểm của hai đường thẳng AQ và MN. Chứng minh rằng :

a) Năm điểm A, M, O, I, N cùng nằm trên một đường tròn và $\angle JIM = \angle JIN$

b) Tam giác AMP đồng dạng với tam giác AQM. Và $AP.AQ = AI.AJ$

Bài 3. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB, dây CD vuông góc với AB tại F. Gọi M là một điểm thuộc cung nhỏ BC (M khác B, M khác C), hai đường thẳng AM và CD cắt nhau tại E

a) Chứng minh tứ giác $BMEF$ nội tiếp

b) Chứng minh tia MA là phân giác của góc CMD

c) Chứng minh $AC^2 = AE.AM$

d) Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng MD và AB, N là giao điểm của hai đường thẳng AM và BC. Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CEN nằm trên đường thẳng CI

Bài 4. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ tiếp xúc ngài tại A $(R > r)$. Gọi BC là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn này (với $B \in (O)$ và $C \in (O')$). Tiếp tuyến chung tại A của hai đường tròn (O) và (O') cắt đoạn thẳng BC tại M.

a) Chứng minh OM vuông góc với $O'M$.

b) Gọi E là giao điểm của AB với OM và F là giao điểm của AC với $O'M$. Chứng minh tứ giác $OEFO'$ nội tiếp một đường tròn.

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OEFO'$, K là trung điểm của AM. Chứng minh $OO' = 2IK$.

Bài 5. Cho nửa đường tròn đường kính AD. Lấy điểm B thuộc nửa đường tròn (B khác A và D), trên cung BD lấy điểm C (C khác B và D). Hai dây AC, BD cắt nhau tại điểm E. Kẻ đoạn thẳng EF vuông góc với $AD\left(F \in AD\right)$

a) Chứng minh tứ giác $ABEF$ nội tiếp

b) Chứng minh $AE.AC = AF.AD$

c) Chứng minh E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BFC

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6. Cho tam giác ABC nhọn với $AB > AC$. Các đường cao BM, CN cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác $AMHN$ nội tiếp

b) Gọi D là giao điểm của AH và BC. Chứng minh AD là phân giác của $\angle MDN$

c) Đường thẳng qua D và song song với MN cắt AB, CN lần lượt tại I, J. Chứng minh D là trung điểm IJ

Bài 7. Cho đường tròn (O). Từ một điểm M. ở ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O)(A, B là hai tiếp điểm).

a) Chứng minh $MAOB$ là tứ giác nội tiếp.

b) Vẽ đường kính BK của đường tròn (O), H là điểm trên BK sao cho AH vuông góc BK. Điểm I là giao điểm của AH, MK. Chứng minh I là trung điểm của HA.

Bài 8. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Vẽ tia tiếp tuyến Ax cùng phía với nửa đường tròn đường kính AB. Lấy một điểm M trên tia $Ax(M \neq A)$. Vẽ tiếp tuyến MC với nửa đường tròn (O) (C là tiếp điểm). Vẽ AC cắt OM tại E, Vẽ MB cắt nửa đường tròn (O) tại $D(D \neq B)$.

a) Chứng minh : Tứ giác $AMDE$ nội tiếp trong một đường tròn.

b) Chứng minh: $MA^2 = MD \cdot MB$.

c) Vẽ CH vuông góc với $AB(H \in AB)$. Chứng minh rằng MB đi qua trung điểm của đoạn thẳng CH.

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB < AC)$ nội tiếp trong đường tròn tâm O. Dựng đường thẳng d qua A song song BC, đường thẳng d' qua C song song BA, gọi D là giao điểm của d và d'. Dựng AE vuông góc BD (E nằm trên BD), F là giao điểm của BD với đường tròn $\left(O\right)$. Chứng minh:

a) Tứ giác $AECD$ nội tiếp được trong đường tròn.

b) $\widehat{AOF} = 2\widehat{CAE}$

c) Tứ giác AECF là hình bình hành.

d) $DF \cdot DB = 2AB^2$.

Bài 10. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây MN cố định $(MN < 2R)$. Kẻ đường kính AB vuông góc với dây MN tại E. Lấy điểm C thuộc dây MN (C khác M,N,E). Đường thẳng BC cắt đường tròn $(O;R)$ tại điểm K (K khác B)

a) Chứng minh $AKCE$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh $BM^2 = BK.BC$

c) Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng $AK, MN; D$ là giao điểm của hai đường thẳng AC và BI. Chứng minh điểm C cách đều ba cạnh của tam giác DEK

Bài 11. Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC và E là hình chiếu vuông góc của điểm B lên đường thẳng AO

a) Chứng minh $AEHB$ là tứ giác nôi tiếp

b) Chứng minh đường thẳng HE vuông góc với đường thẳng AC

c) Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính tỉ số $\frac{ME}{MH}$

Bài 12. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và $AB < AC$. Vẽ các đường cao AD, BE, CF của tam giác đó. Gọi H là giao điểm của các đường cao vừa vẽ

a) Chứng minh rằng các tứ giác $AEHF$ và $BFEC$ nội tiếp

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AH, BC. Chứng minh rằng $FM.FC = FN.FA$

c) Gọi P, Q lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ M, N đến đường thẳng DF. Chứng minh rằng đường tròn đường kính PQ đi qua giao điểm của FE, MN

Bài 13. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O), điểm D thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ (D khác A và B). Các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và C cắt AD theo thứ tự tại E và G. Gọi I là giao điểm của CE và BG

a) Chứng minh rằng $\Delta EBC \sim \Delta BCG$

b) Tính số đo góc BIC. Từ đó, hãy chứng minh tứ giác $BIDE$ nội tiếp

c) Gọi K là giao điểm của DI và BC. Chứng minh rằng $BK^2 = KI.KD$

DẠNG 2
ĐƯỜNG TRÒN LIÊN QUAN ĐẾN BA ĐIỂM THẲNG HÀNG, BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn tâm O. Kẻ đường kính AD. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại D cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại E và F

a) Chứng minh hai tam giác ABC và AFE đồng dạng với nhau

b) Gọi I là trung điểm của EF và K là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC. Chứng minh ba điểm A, K, I thẳng hàng

Bài 2. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Gọi BE, CF là các đường cao và H là trực tâm của tam giác ABC.

a) Chứng minh tứ giác $AEHF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHF$ cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai I (A không trùng với I). Chứng minh hai tam giác IBC và IFE đồng dạng với nhau.

c) Hai đường thẳng BC và EF cắt nhau tại K. Chứng minh ba điểm A, I, K thẳng hàng.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại C (AC < BC), đường cao CK và đường phân giác BD $(K \in AB, D \in AC)$. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với AC cắt CK, AB lần lượt tại H và I.

a) Chứng minh tứ giác CDKI nội tiếp.

b) Chứng minh AC.AD = DH.AB.

c) Gọi F là trung điểm của AD. Đường tròn tâm I bán kính ID cắt BC tại M (M khác B) và cắt AM tại N (N khác M). Chứng minh B, N, F thẳng hàng.

DẠNG 3
ĐƯỜNG TRÒN LIÊN QUAN ĐẾN TIẾP TUYẾN, VUÔNG GÓC, SONG SONG

Bài 1. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Dây cung MN vuông góc với AB, ($AM < BM$). Hai đường thẳng BM và NA cắt nhau tại K. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ K đến đường thẳng AB.

a) Chứng minh tứ giác $AHKM$ nội tiếp trong một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $NB.HK = AN.HB$.

c) Chứng minh HM là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài 2. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao BE, CF cắt nhau tại $H\left(E \in AC, F \in AB\right)$. Chứng minh rằng :

a)Tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn

b) $AE.BC = EF.AB$

c) $OA \perp EF$

Bài 3. Cho tam giác *ABC* có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn *(O), (AB < AC).* Gọi *D* là điểm trên cung nhỏ *BC* sao cho *DB < DC*. Từ *D* kẻ *DE* vuông góc với *BC* (*E* thuộc *BC*), kẻ *DF* vuông góc với *AC* (*F* thuộc *AC*). Đường thẳng *EF* cắt tia *AB* tại *K*.

a) Chứng minh tứ giác *CDEF* và $\widehat{DFE} = \widehat{DAB}$.

b) Chứng minh tứ giác *DKBE* nội tiếp và *DB.DF = DA. DE.*

c) Gọi *I, J* lần lượt là trung điểm của *AB* và *EF*. Chứng minh *IJ* vuông góc với *DJ*.

Bài 4. Cho đường tròn (O) , đường kính AB, bán kính OC vuông góc với AB. Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BC. Đường thẳng AH cắt OC tại D và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K (K khác A)

a) Chứng minh tứ giác $ODKB$ nội tiếp một đường tròn

b) Tia phân giác của góc COK cắt AK tại M. Chứng minh $\angle CMA = 90°$

c) Đường thẳng OM cắt BC tại N, NK cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là P (P khác K). Chứng minh B đối xứng với P qua M

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn. Các đường cao AK, BE và CF cắt nhau tại H. Gọi I là trung điểm của đoạn AH, N là trung điểm của đoạn BC.

a) Chứng minh bốn điểm A, E, H, F nằm trên cùng một đường tròn.

b) Chứng minh NE là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH.

c) Chứng minh $CI^2 - IE^2 = CK.CB$.

Bài 6. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm A lấy điểm M $(M \neq A)$. Lấy điểm N trên đoạn thẳng OB (N khác O và B).Đường thẳng MN cắt đường tròn (O) tại hai điểm C, D (C nằm giữa M và D). Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng CD

a) Chứng minh tứ giác $AMIO$ là tứ giác nội tiếp

b) Qua D kẻ đường thẳng song song với MO cắt AB tại H. Chứng minh $MA^2 = MC.MD$ và $\angle IAB = \angle MDH$

c) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của đường thẳng MO với hai đường thẳng BC, BD. Chứng minh tứ giác $AEBF$ là hình bình hành

Bài 7. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O. Hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại M, tia AM cắt đường tròn (O) tại điểm D.

a) Chứng minh rằng tứ giác $OBMC$ nội tiếp được đường tròn.

b) Chứng minh $MB^2 = MD.MA$

c) Gọi E là trung điểm đoạn thẳng AD; tia CE cắt đường tròn (O) tại điểm F. Chứng minh rằng: $BF // AM$.

Bài 8. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O, đường cao BE và CF. Tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại S, BC và OS cắt nhau tại M.

a) Chứng minh rằng $AB.MB = AE.BS$.

b) Hai tam giác AEM và ABS đồng dạng.

c) Gọi AM cắt EF tại N, AS cắt BC tại P. Chứng minh rằng $NP \perp BC$.

DẠNG 4
ĐƯỜNG TRÒN LIÊN QUAN ĐẾN GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

Bài 1. Trên nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R,$ lấy điểm C (C khác A và B), từ C kẻ CH vuông góc với $AB\left(H \in AB\right).$ Gọi D là điểm bất kỳ trên đoạn CH (D khác C và H), đường thẳng AD cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai là E

a) Chứng minh tứ giác $BHDE$ nội tiếp

b) Chứng minh $AD.EC = CD.AC$

c) Khi điểm C di động trên nửa đường tròn (C khác A,B và điểm chính giữa cung AB), xác định vị trí của điểm C sao cho chu vi tam giác COH đạt giá trị lớn nhất

Bài 2. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, M là một điểm bất kỳ thuộc nửa đường tròn $(M$ khác A,B). Tiếp tuyến tại M cắt các tiếp tuyến Ax, By của đường tròn (O) lần lượt tại C và D

a) Chứng minh tứ giác $ACMO$ nội tiếp

b) Chứng minh CO vuông góc với OD

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích hai tam giác ACM, BDM

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn $\left(O;R\right)$, có ba đường cao AK, BE và CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác $AEHF$ nội tiếp.

b) Hai đường thẳng BE và CF cắt đường tròn $\left(O\right)$ lần lượt tại M và N (M khác B; N khác C). Chứng minh: $MN//EF$.

c) Giả sử hai điểm B,C cố định, điểm A di động trên cung lớn BC của đường tròn $\left(O\right)$ (A khác B,C). Tìm vị trí của điểm A sao cho chu vi tam giác KEF đạt giá trị lớn nhất.

Bài 4. Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn $\left(O;R\right)$ và $AB < AC$. Ba đường cao AD, BE, CF của tam giác $ABC(D, E, F$ là chân các đường cao) đồng quy tại điểm H. Kẻ đường kính AK của đường tròn $\left(O;R\right)$. Gọi M là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AK.

a) Chứng minh rằng tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh rằng tam giác ABD đồng dạng với tam giác AKC và MD song song với BK.

c) Giả sử hai đỉnh B,C cố định trên đường tròn $\left(O;R\right)$ và đỉnh A di động trển cung lớn BC của đường tròn $\left(O;R\right)$. Chứng minh rằng đường thẳng MF luôn đi qua một điểm cố định và tìm vị trí của đỉnh A sao cho diện tích tam giác AEH lớn nhất.

Bài 5. Trên nửa đường tròn tâm O đường kính AB với $AB = 2022$, lấy điểm C (C khác A và B), từ C kẻ CH vuông góc $AB (H \in AB)$. Gọi D là điểm bất kì trên đoạn CH (D khác C và H), đường thẳng AD cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai E.

a) Chứng minh tứ giác BHDE là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh: $AD \cdot EC = CD \cdot AC$.

c) Chứng minh: $AD.AE + BH.BA = 2022^2$.

d) Khi điểm C di động trên nửa đường tròn (C khác A, B và điểm chính giữa cung AB), xác định vị trí điểm C sao cho chu vi tam giác COH đạt giá trị lớn nhất.

Bài 6. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn $(O;R)$, kẻ tiếp tuyến MA(A là tiếp điểm) và cát tuyến MBC không đi qua tâm O (điểm B nằm giữa hai điểm M, C). Gọi H là trung điểm BC. Đường thẳng OH cắt đường tròn $(O;R)$ tại hai điểm N, K (trong đó điểm K thuộc cung BAC). Gọi D là giao điểm của AN và BC

a) Chứng minh tứ giác $AKHD$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh $\angle NAB = \angle NBD$ và $NB^2 = NA.ND$

c) Chứng minh rằng khi đường tròn $(O;R)$ và điểm M cố định đồng thời cát tuyến MBC thay đổi thì điểm D nằm trên một đường tròn cố định

Bài 7. Cho đường tròn (O;R) và đường thẳng d không đi qua O cắt (O) tại hai điểm A; B. Trên tia đối của tia BA lấy điểm M; qua M kẻ hai tiếp tuyến MC; MD với đường tròn (O) (C; D là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của AB.

a) Chứng minh tứ giác OMCH nội tiếp.

b) OM cắt đường tròn (O) tại I và cắt CD tại K. Chứng minh $OK.OM = R^2$

c) Đường thẳng qua O vuông góc với OM, cắt tia MC và MD lần lượt tại P và Q. Tính độ dài OM theo R sao cho diện tích tam giác MPQ nhỏ nhất.

Bài 8. Cho đường tròn (O,R) và đường thẳng d không đi qua O cắt đường tròn tại hai điểm A, B. Lấy một điểm M trên tia đối của tia BA kẻ hai tiếp tuyến MC, MD với đường tròn (C, D là tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của AB.

a) Chứng minh rằng M, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn

b) Đoạn OM cắt đường tròn tại I. CMR I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MCD.

c) Đường thẳng qua O, vuông góc với OM cắt các tia MC, MD theo thứ tự tại P, Q. Tìm vị trí của điểm M trên d sao cho diện tích tam giác MPQ bé nhất.

CHỦ ĐỀ 2

BÀI TẬP TỔNG HỢP VỀ ĐƯỜNG TRÒN

DẠNG 1

ĐƯỜNG TRÒN LIÊN QUAN ĐẾN TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN, CHỨNG MINH HỆ THỨC, TRUNG ĐIỂM, TỈ LỆ CẠNH

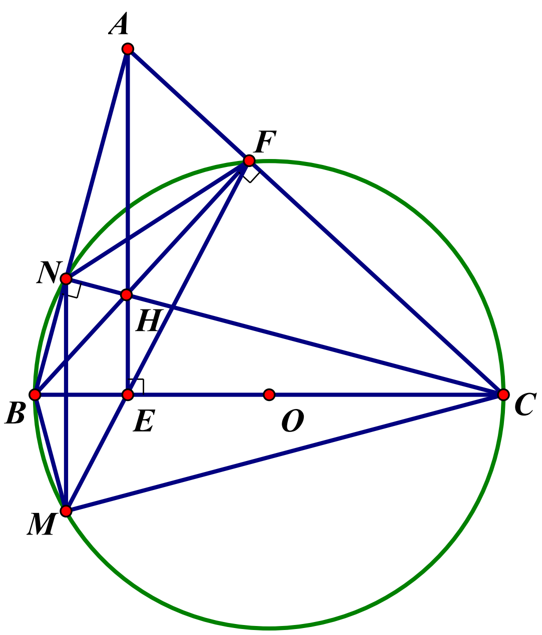
Bài 1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, các đường cao AE, BF và CN cắt nhau tại H ($E \in BC$, $F \in AC$, $N \in AB$).

a) Chứng minh tứ giác $CEHF$ nội tiếp.

b) Kéo dài FE cắt đường tròn đường kính BC tại M. Chứng minh $BM = BN$.

c) Biết $AH = BC$. Tính số đo góc A của tam giác ABC.

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $CEHF$ nội tiếp.

Ta có:

$HF \perp AC\left(gt\right) \Rightarrow \widehat{HFC} = 90°$

$HE \perp BC\left(gt\right) \Rightarrow \widehat{HEC} = 90°$

Xét tứ giác $CEHF$ có: $\widehat{HFC} + \widehat{HEC} = 90° + 90° = 180°$ mà hai góc này đối nhau

$\Rightarrow CEHF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Kéo dài FE cắt đường tròn đường kính BC tại M. Chứng minh $BM = BN$.

Ta có:

$HN \perp AB\left(gt\right) \Rightarrow \widehat{ANH} = 90°$

$HF \perp AC\left(gt\right) \Rightarrow \widehat{AFH} = 90°$

Xét tứ giác $AFHN$ có: $\widehat{ANH} + \widehat{AFH} = 90° + 90° = 180°$ mà hai góc này đối nhau

$\Rightarrow AFHN$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{NAH} = \widehat{NFH}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung HN) (1)

Tứ giác $HECF$ nội tiếp (cmt)

$\Rightarrow \widehat{HFE} = \widehat{HCE}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung HE). (2)

Ta có: $\widehat{BAE} = \widehat{NCB}$ (hai góc cùng phụ với $\widehat{ABC}$) $\Rightarrow \widehat{NAH} = \widehat{HCE}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{NFH} = \widehat{HFE}$ hay $\widehat{NFB} = \widehat{BFM}$.

Xét $\left(O\right)$ có: $\widehat{NFB} = \widehat{BFM}$:

$\Rightarrow sd\overset{\frown}{BN} = sd\overset{\frown}{BM}$ (hai góc nội tiếp bằng nhau hai cung chắn bằng nhau).

$\Rightarrow BN = BM$ (hai cung chắn bằng nhau hai dây bằng nhau) (đpcm).

c) Biết $AH = BC$. Tính số đo góc A của tam giác ABC.

Xét hai tam giác vuông FAH và FBH ta có:

$AH = BC$ (giả thiết)

$\widehat{FAH} = \widehat{FBC}$ (vì cùng phụ với góc $\widehat{ACE}$)

Vậy $\Delta FAH = \Delta FBC$

$\Rightarrow FA = FB$

Mặt khác tam giác AFB vuông có $FA = FB$ nên nó vuông cân

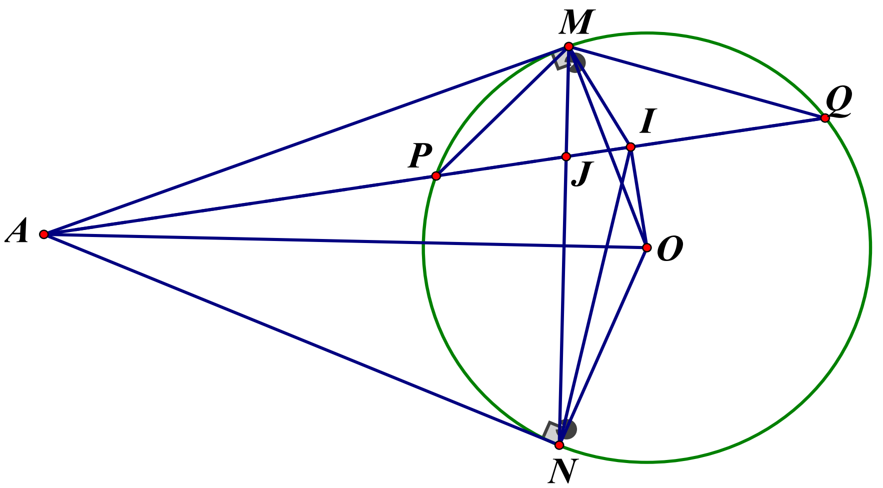
Vậy $\widehat{BAC} = 45^\circ$.

Bài 2. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Từ A kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn $\left(O\right)\left(M, N\right.$ *là các tiếp điểm).* Một đường thẳng đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm P, Q sao cho P nằm giữa A và Q, dây cung PQ không đi qua tâm O. Gọi I là trung điểm của đoạn PQ, J là giao điểm của hai đường thẳng AQ và MN. Chứng minh rằng :

a) Năm điểm A, M, O, I, N cùng nằm trên một đường tròn và $\angle JIM = \angle JIN$

b) Tam giác AMP đồng dạng với tam giác AQM. Và $AP.AQ = AI.AJ$

Lời giải



a) Năm điểm A, M, O, I, N cùng nằm trên một đường tròn và $\angle JIM = \angle JIN$

- Năm điểm A, M, O, I, N cùng nằm trên một đường tròn

Xét đường tròn (O) có I là trung điểm của dây cung PQ (dây PQ không đi qua tâm O)

$\Rightarrow OI \perp PQ \Rightarrow \angle PIO = 90° \Rightarrow \angle AIO = 90°$

$\Rightarrow \Delta AIO$ vuông tại I $\Rightarrow I$ thuộc đường tròn đường kính AO

AM là tiếp tuyến của (O) $\Rightarrow \angle AMO = 90°$ (tính chất tiếp tuyến của đường tròn)

$\Rightarrow \Delta AMO$ vuông tại M $\Rightarrow M$ thuộc đường tròn đường kính AO

Cmtt suy ra N thuộc đường tròn đường kính AO

Vậy 5 điểm A, M, O, I, N cùng nằm trên một đường tròn đường kính AO

- $\angle JIM = \angle JIN$

AM, AN là tiếp tuyến của đường tròn (O) $\Rightarrow OA$ là phân giác của $\angle MON$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \angle AOM = \angle AON$. Ta có :

$\angle AOM = \angle AIM$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AM)

$\angle AON = \angle AIN$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AN) mà $\angle AOM = \angle AON\,(cmt)$

$\Rightarrow \angle AIM = \angle AIN \Rightarrow \angle JIM = \angle JIN\,(dfcm)$

b) Tam giác AMP đồng dạng với tam giác AQM. Và $AP.AQ = AI.AJ$

Xét (O) có : $\angle MQP = \angle AMP$ (cùng chắn cung PM) $\Rightarrow \angle MQA = \angle AMP$

Xét ΔAMP và ΔAQM có :

$\angle MAQ\, chung,\ \angle AMP = \angle MQA \Rightarrow \Delta AMP \sim \Delta AQM\,(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{AP}{AM} = \dfrac{AM}{AQ}$ (hai cặp cạnh tương ứng tỉ lệ) $\Rightarrow AP.AQ = AM^2\,(1)$

Ta có : $\angle AMN = \angle AIN$ (cùng chắn cung AN) $\Rightarrow \angle AMJ = \angle JIN$

Mà $\angle JIM = \angle JIN\,(cmt) \Rightarrow \angle AMJ = \angle JIM$ (do $\angle JIM = \angle JIN - cmt$) $\Rightarrow \angle AMJ = \angle AIM$

Xét ΔAMJ và ΔAIM có :

$\angle MAI\, chung,\ \angle AMJ = \angle AIM\,(cmt) \Rightarrow \Delta AMJ \sim \Delta AIM\,(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{AM}{AI} = \dfrac{AJ}{AM}$ (cặp cạnh tương ứng tỉ lệ) $\Rightarrow AI.AJ = AM^2\,(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AP.AQ = AI.AJ\,(dfcm)$

Bài 3. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB, dây CD vuông góc với AB tại F. Gọi M là một điểm thuộc cung nhỏ BC (M khác B, M khác C), hai đường thẳng AM và CD cắt nhau tại E

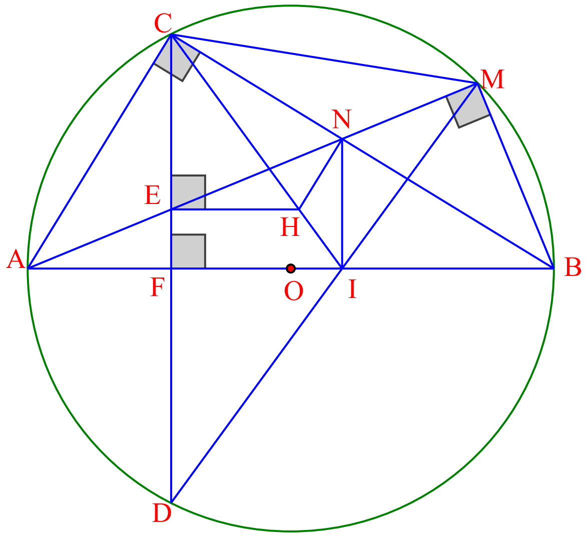
a) Chứng minh tứ giác $BMEF$ nội tiếp

b) Chứng minh tia MA là phân giác của góc CMD

c) Chứng minh $AC^2 = AE.AM$

d) Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng MD và AB, N là giao điểm của hai đường thẳng AM và BC. Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CEN nằm trên đường thẳng CI

Lời giải



a) Xét tứ giác $BMEF$ có:

$\widehat{BFE} = 90^0$ (gt)

$\widehat{BFE} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{BFE} + \widehat{BME} = 180^0$

Mà hai góc $\widehat{BFE}$, $\widehat{BME}$ nằm ở vị trí đối nhau nên tứ giác $BMEF$ nội tiếp

b) Ta có $AB \perp CD \Rightarrow F$ là trung điểm của CD (mối liên hệ giữa đường kính và dây cung)

$\Rightarrow AB$ là đường trung trực của CD $\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{AC}$ = sđ $\overset{\frown}{AD}$

Ta có $\widehat{AMC} = \dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AC}$ và $\widehat{AMD} = \dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AD}$

$\Rightarrow \widehat{AMC} = \widehat{AMD} \Rightarrow AM$ là phân giác của $\widehat{CMD}$

c) Xét ΔACE và ΔAMC có: $\widehat{A}$: chung

$\widehat{AMC} = \dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AC}$ và $\widehat{ACD} = \dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AD}$ $\Rightarrow \widehat{AMC} = \widehat{ACD}$

$\Rightarrow \Delta ACE \# \Delta AMC$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{AC}{AM} = \dfrac{AE}{AC} \Rightarrow AC^2 = AE.AM$

d) Trên CI lấy điểm H sao cho HE vuông góc với CD

Cần chứng minh tứ giác $CEHN$ nội tiếp đường tròn đường kính CH, ta đi chứng minh $\widehat{CNE} = \widehat{CHE}$

Ta có: $\widehat{NMI} = \widehat{NBI}\left(= \dfrac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{AC}\right) \Rightarrow$ tứ giác $BMNI$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{NIB} + \widehat{NMB} = 180^0 \Rightarrow \widehat{NIB} = 90^0 \Rightarrow$ tứ giác $ACNI$ nội tiếp

Ta có: $\widehat{CHE} = \widehat{CIA}$ (đồng vị); $\widehat{CNE} = \widehat{CIA}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AC}$)

$\Rightarrow \widehat{CNE} = \widehat{CHE} \Rightarrow$ tứ giác $CEHN$ nội tiếp

Mà $\widehat{CEH} = 90^0 \Rightarrow CH$ là đường kính

$\Rightarrow$ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CEN nằm trên CI.

Bài 4. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ tiếp xúc ngài tại A $(R > r)$. Gọi BC là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn này (với $B \in (O)$ và $C \in (O')$). Tiếp tuyến chung tại A của hai đường tròn (O) và (O') cắt đoạn thẳng BC tại M.

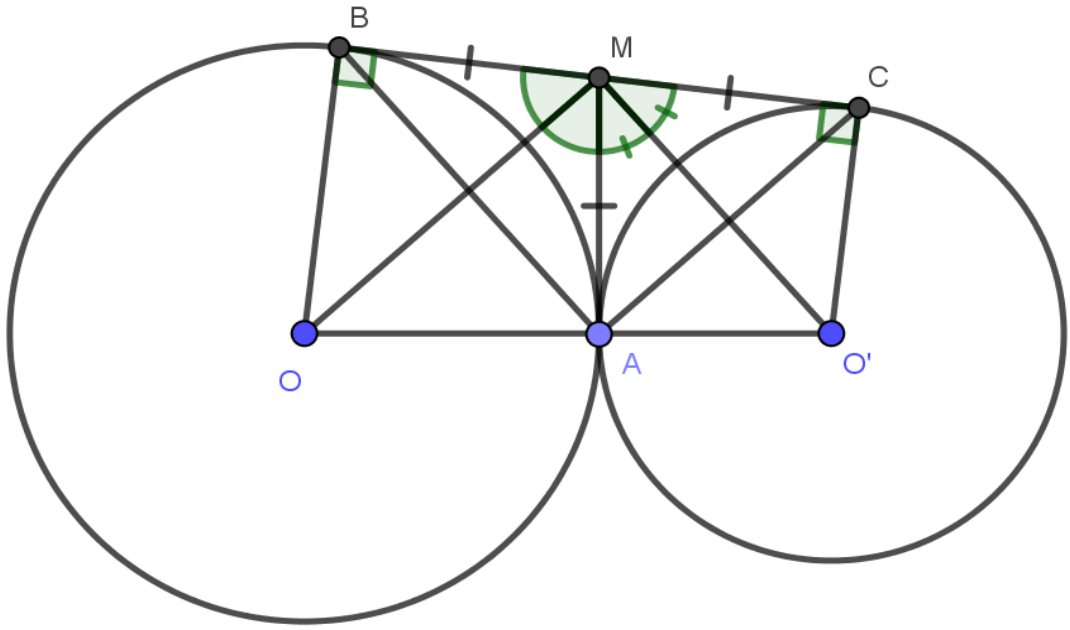
a) Chứng minh OM vuông góc với $O'M$.

b) Gọi E là giao điểm của AB với OM và F là giao điểm của AC với $O'M$. Chứng minh tứ giác $OEFO'$ nội tiếp một đường tròn.

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OEFO'$, K là trung điểm của AM. Chứng minh $OO' = 2IK$.

Lời giải

a) Chứng minh OM vuông góc với $O'M$.



Vì MA và MB là tiếp tuyến của (O) nên MO

là tia phân giác của $\widehat{AMB}$. Do đó $\widehat{OMA}=\frac{1}{2}\widehat{BMA}$

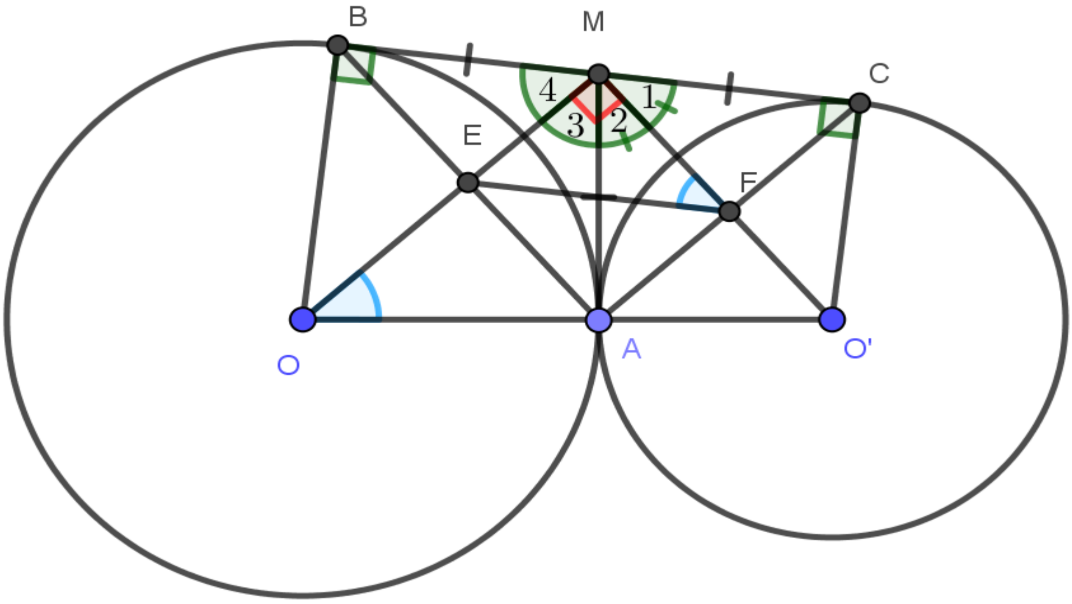
MA và MC là tiếp tuyến của (O') nên MO'

là tia phân giác của $\widehat{AMC}$. Do đó $\widehat{O'MA}=\frac{1}{2}\widehat{CMA}$

Suy ra $\widehat{OMO'}=\widehat{OMA}+\widehat{O'MA}=\frac{1}{2}\left(\widehat{BMA}+\widehat{CMA}\right)=\frac{1}{2}.180^0=90^0$

$\Rightarrow OM\perp O'M$

b) Gọi E là giao điểm của AB với OM và F là giao điểm của AC với $O'M$. Chứng minh tứ giác $OEFO'$ nội tiếp một đường tròn.



Ta có:

$MB = MA$ (tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau)

$OB = OA$ (bán kính R)

$\Rightarrow MO$ là đường trung trực của AB

$\Rightarrow MO \perp AB$ tại $E \Rightarrow \widehat{MEA} = 90^0$

Tương tự, ta có: $\widehat{MFA} = 90^0$

Xét tứ giác $MEAF$ có: $\widehat{MEA} = \widehat{MFE} = \widehat{OMO'} = 90^0$

$\Rightarrow$ tứ giác $MEAF$ là hình chữ nhật (theo dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow MEAF$ là tứ giác nội tiếp

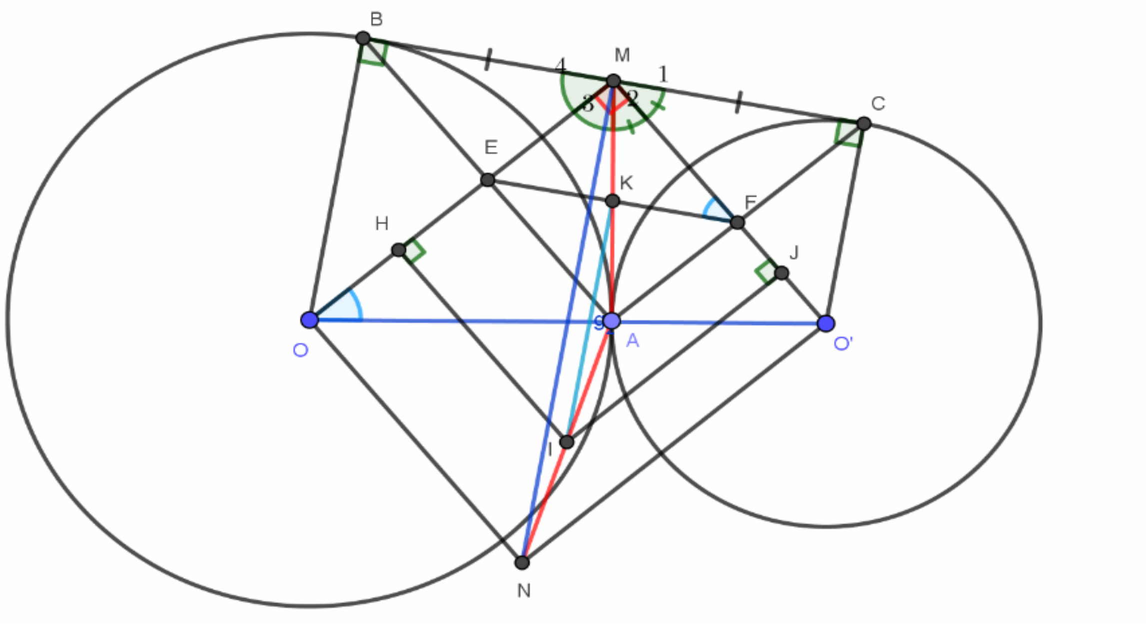
$\Rightarrow \widehat{MFE} = \widehat{MAE}$

Trong tam giác vuông AOM , ta có $\widehat{MAE} = \widehat{OAE}$

Vì vậy $\widehat{MFE} = \widehat{EOO'}$

Do đó, tứ giác $OEFO'$ nội tiếp một đường tròn (góc ngoài bằng góc trong của đỉnh đối diện)

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OEFO'$, K là trung điểm của AM . Chứng minh $OO' = 2IK$.



Cần xác định tâm I của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OEFO'$

Vẽ hai đường trung trực của hai đoạn thẳng EO và FO' lần lượt cắt EO và FO' tại H và J. Hai đường trung trực này cắt nhau tại I. I chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OEFO'$.

Qua O vẽ đường thẳng song song với MO'. Qua O' vẽ đường thẳng song song với MO. Hai đường thẳng này cắt nhau tại N. Theo cách vẽ ta được tứ giác $MONO'$ là hình chữ nhật (vì có 3 góc vuông).

Suy ra $OO' = MN$ (hai đường chéo của hình chữ nhật)

Chứng minh I là trung điểm của AN:

Hình thang $AEON$ có $HE = HO$ và $HI // EA // ON$

$\Rightarrow HI$ đi qua trung điểm của AN (1)

Tương tự, ta có JI đi qua trung điểm của AN (2)

Mà $I = HI \cap JI$ (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow I$ là trung điểm của AN

Xét ΔAMN có IK là đường trung bình của tam giác

$\Rightarrow IK = \dfrac{1}{2}MN$

$\Rightarrow IK = \dfrac{1}{2}OO'$

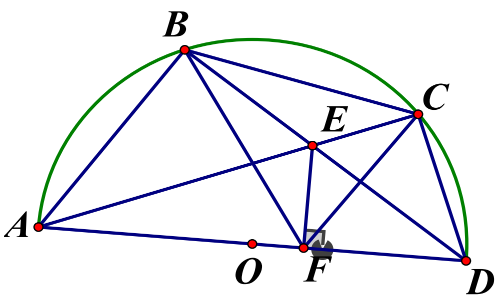
Bài 5. Cho nửa đường tròn đường kính AD. Lấy điểm B thuộc nửa đường tròn (B khác A và D), trên cung BD lấy điểm C (C khác B và D). Hai dây AC, BD cắt nhau tại điểm E. Kẻ đoạn thẳng EF vuông góc với $AD\left(F \in AD\right)$

a) Chứng minh tứ giác $ABEF$ nội tiếp

b) Chứng minh $AE.AC = AF.AD$

c) Chứng minh E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BFC

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $ABEF$ nội tiếp

B thuộc (O)$\Rightarrow \angle ABD = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)$\Rightarrow \angle ABE = 90°$

$EF \perp AD(gt) \Rightarrow \angle AFE = 90°$

Xét tứ giác $ABEF$ có $\angle ABE + \angle AFE = 90° + 90° = 180°$ mà 2 góc này đối nhau

$\Rightarrow ABEF$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh $AE.AC = AF.AD$

$C \in (O) \Rightarrow \angle ACD = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét ΔAFE và ΔACD có :

$\angle CAD\, chung$, $\angle AFE = \angle ACD = 90°$

$\Rightarrow \Delta AFE \sim \Delta ACD(g.g) \Rightarrow \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{AE}{AD} \Rightarrow AC.AE = AF.AD(dfcm)$

a) Chứng minh E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BFC

*Ta chứng minh FE là phân giác của $\angle BFC$

Xét (O): $\angle BAC = \angle BDC$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung BC) $\Rightarrow \angle BAE = \angle EDC(1)$

Tứ giác $ABEF$ nội tiếp (cmt) nên $\angle BAE = \angle BFE$ (cùng chắn cung BE)(2)

Tứ giác $CDFE$ có $\angle ECD + \angle EFD = 90° + 90° = 180°$ mà hai góc này đối nhau

Nên $CDFE$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle EFC = \angle EDC$ (cùng chắn cung EC) (3)

Từ (1), (2), (3)$\Rightarrow \angle BFE = \angle EFC \Rightarrow FE$ là phân giác của $\angle BFC$

*Chứng minh CE là phân giác của góc BCF

Xét (O) có $\angle ACB = \angle ADB$ (cùng chắn cung AB)$\Rightarrow \angle ECB = \angle EDF$

Tứ giác $CDFE$ nội tiếp (cmt)$\Rightarrow \angle ECF = \angle EDF$ (cùng chắn cung EF)

Suy ra $\angle ECB = \angle ECF \Rightarrow CE$ là phân giác $\angle BCF$

ΔBCF có FE, CE là hai đường phân giác cắt nhau tại E

Nên E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $BCF(dfcm)$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

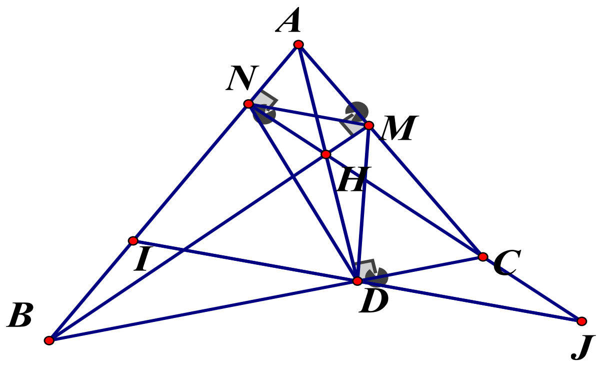
Bài 6. Cho tam giác ABC nhọn với $AB > AC$. Các đường cao BM, CN cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác $AMHN$ nội tiếp

b) Gọi D là giao điểm của AH và BC. Chứng minh AD là phân giác của $\angle MDN$

c) Đường thẳng qua D và song song với MN cắt AB, CN lần lượt tại I, J. Chứng minh D là trung điểm IJ

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $AMHN$ nội tiếp

Ta có $\begin{cases} HM \perp AC \\ HN \perp AB \end{cases} \Rightarrow \angle HMA = \angle HNA = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle HMA + \angle HNA = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, mà 2 góc này là hai góc đối nhau nên tứ giác $AMHN$ là tứ giác nội tiếp

b) Gọi D là giao điểm của AH và BC. Chứng minh AD là phân giác của $\angle MDN$

Tương tự câu a, ta có

$\angle HMC = \angle HDM = 90^\circ \Rightarrow HDCM$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle HDM = \angle HCM$ (cùng chắn cun HM)

$\angle HDB = \angle HNB = 90^\circ \Rightarrow HDBN$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle NDH = \angle NBH$ (cùng chắn cung HN)

Mà $\angle HCM = \angle NBH$ (cùng phụ với $\angle BAC$)

$\Rightarrow \angle HDM = \angle HDN \Rightarrow AD$ là phân giác của $\angle MDN\,(dfcm)$

c) Đường thẳng qua D và song song với MN cắt AB, CN lần lượt tại I, J. Chứng minh D là trung điểm IJ

Ta có :

Tứ giác $AMHN$ nội tiếp (cmt)$\Rightarrow \angle HNM = \angle HAM$ (cùng chắn cung HM)

Mà $\angle HAM = \angle HBD$ (cùng phụ với $\angle ACB$)

Tứ giác $HDBN$ nội tiếp $(cmt) \Rightarrow \angle HBD = \angle HND$ (cùng chắn cung HD)

$\Rightarrow \angle HNM = \angle HND$

Ta lại có $IJ // MN (gt) \Rightarrow \angle HNM = \angle HJI = \angle HJD$ (hai góc so le trong bằng nhau)

$\Rightarrow \angle HND = \angle HJD \Rightarrow \Delta DNJ$ cân tại D nên $DN = DJ\,(1)$

Vì $\angle HND = \angle HJD(cmt) \Rightarrow 90° - \angle HND = 90° - \angle HJD \Rightarrow \angle DNI = \angle NID$

Suy ra ΔNID cân tại D$\Rightarrow DN = DI\,(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $DI = DJ\,(= DN)$

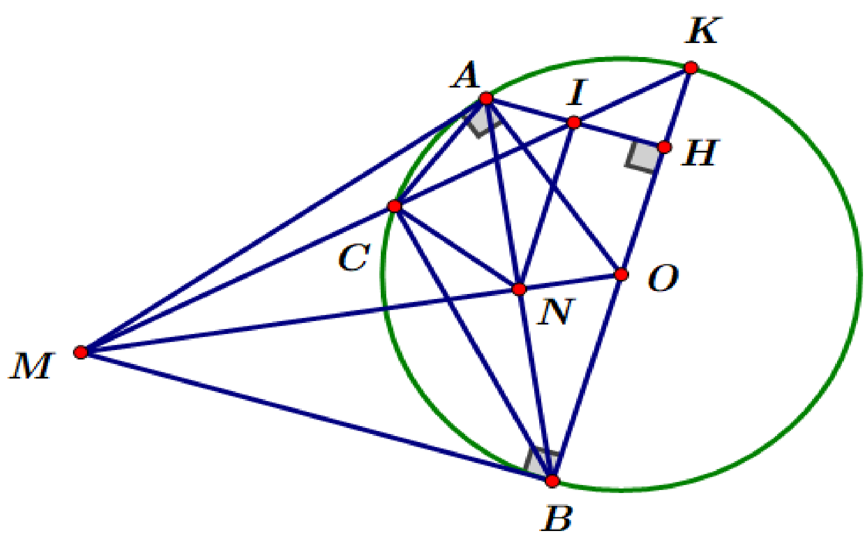
Vậy D là trung điểm $IJ\,(dfcm)$

Bài 7. Cho đường tròn (O). Từ một điểm M. ở ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O)(A, B là hai tiếp điểm).

a) Chứng minh $MAOB$ là tứ giác nội tiếp.

b) Vẽ đường kính BK của đường tròn (O), H là điểm trên BK sao cho AH vuông góc BK. Điểm I là giao điểm của AH, MK. Chứng minh I là trung điểm của HA.

Lời giải



a) Chứng minh $MAOB$ là tứ giác nội tiếp.

Vì MA, MB là các tiếp tuyến của (O) lần lượt tại A, B nên $\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90°$ (định nghĩa).

Tứ giác $MAOB$ có $\widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 180°$.

Suy ra tứ giác $MAOB$ nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối bằng bằng $180°$).

b) Vẽ đường kính BK của đường tròn (O), H là điểm trên BK sao cho AH vuông góc BK. Điểm I là giao điểm của AH, MK. Chứng minh I là trung điểm của HA.

Gọi N là giao điểm của AB với MO.

C là giao điểm giữa MK với đường tròn (O)

Ta có: $OA = OB \Rightarrow O$ thuộc trung trực của AB.

Tứ giác $MCNB$ có $\widehat{MCB} = \widehat{MNB} = 90°$. Suy ra tứ giác $MCNB$ nội tiếp (tứ giác có hai đỉnh kề cùng nhìn một cạnh dưới các góc bằng nhau).

$\Rightarrow \widehat{NMB} = \widehat{NCB}$ (hai góc cùng chắn một cung BN)

Ta có: $\widehat{NMB} = \widehat{NBO}$ (cùng phụ với $\widehat{MBN}$)

$\Rightarrow \widehat{NCB} = \widehat{NBO}$.

Lại có: $\widehat{NCB} + \widehat{NCI} = 90°, \widehat{NAI} + \widehat{NBO} = 90°$

Suy ra $\widehat{NCI} = \widehat{NAI}$.

Xét tứ giác $ACNI$ có: $\widehat{NCI} = \widehat{NAI}(cmt)$, suy ra tứ giác $ACNI$ nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh kề cùng nhìn một cạnh dưới các góc bằng nhau).

$\Rightarrow \widehat{ANI} = \widehat{ACI}$ (hai góc cùng chắn cung AI).

Trong (O) có: $\widehat{ACI} = \widehat{ABK}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AK)

Suy ra $\widehat{ANI} = \widehat{ABK}$. Mà hai góc này vị trí đồng vị $\Rightarrow NI // BK$

Tam giác ABK có: $\begin{cases} NI // BK \\ NA = NB = \dfrac{1}{2}AB \end{cases}$

Suy ra I là trung điểm của $AH \Rightarrow IA = IH$ (định lí đường trung bình của tam giác) (đpcm).

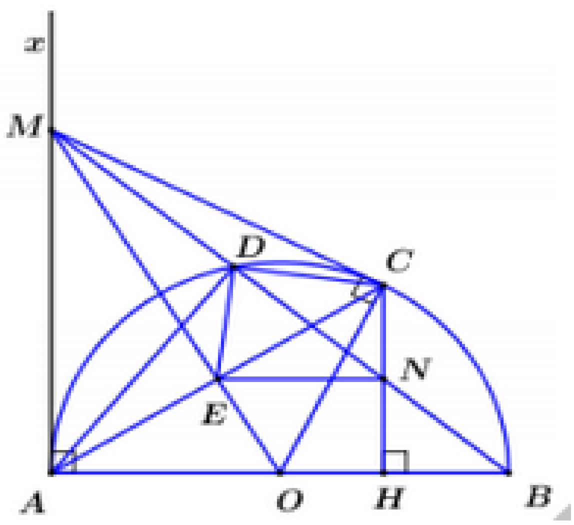
Bài 8. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Vẽ tia tiếp tuyến Ax cùng phía với nửa đường tròn đường kính AB. Lấy một điểm M trên tia $Ax(M \neq A)$. Vẽ tiếp tuyến MC với nửa đường tròn (O) (C là tiếp điểm). Vẽ AC cắt OM tại E, Vẽ MB cắt nửa đường tròn (O) tại $D(D \neq B)$.

a) Chứng minh : Tứ giác $AMDE$ nội tiếp trong một đường tròn.

b) Chứng minh: $MA^2 = MD \cdot MB$.

c) Vẽ CH vuông góc với $AB(H \in AB)$. Chứng minh rằng MB đi qua trung điểm của đoạn thẳng CH.

Lời giải



a) Chứng minh: Tứ giác AMDE nội tiếp trong một đường tròn.

Ta có: $OA = OC \Rightarrow O$ thuộc trung trực của AC.

$MA = MC$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow M$ thuộc trung trực của AC.

$\Rightarrow OM$ là trung trực của $AC \Rightarrow OM \perp AC$ tại $E \Rightarrow \widehat{AEM} = 90°$.

Ta có $\widehat{ADB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{ADM} = 90°$.

Xét tứ giác $AMDE$ có $\widehat{AEM} = \widehat{ADM} = 90°(cmt) \Rightarrow AMDE$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính

AM (tứ giác có 2 đỉnh kề cùng nhìn AM dưới một góc $90°$).

***b) Chứng minh** $MA^2 = MD,MB$.*

Xét ΔMAD và ΔMBA có:

$\widehat{AMB}$ chung;

$\widehat{MDA} = \widehat{MAB} = 90°$

$\Rightarrow \Delta MAD \sim \Delta MBA(g.g) \Rightarrow \dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MB}{MA}$(2 cạnh tương ứng) $\Rightarrow MA^2 = MD.MB.$

***c) Vẽ** CH **vuông góc với** $AB(H \in AB)$. **Chứng minh rằng** MB **đi qua trung điểm của đoạn thẳng** CH.*

Gọi $MB \cap CH = \{N\}$.

Vì $AEDM$ là tứ giác nội tiếp (cmt) nên $\widehat{DEC} = \widehat{AMD}$ (góc ngoài và góc trong tại đỉnh đối diện của tứ giác nội tiếp).

Mà $\widehat{AMD} = \widehat{DAB}$ (cùng phụ với $\widehat{MAD}$) nên $\widehat{DEC} = \widehat{DAB}$ (1).

Ta có $\widehat{DNC} = \widehat{BNH}$ (đối đỉnh), mà $\begin{cases} \widehat{BNH} + \widehat{NBH} = 90° \\ \widehat{DAB} + \widehat{NBH} = 90° \end{cases} \Rightarrow \widehat{BNH} = \widehat{DAB} \Rightarrow \widehat{DNC} = \widehat{DAB}$ (2).

Từ (1) và $(2) \Rightarrow \widehat{DEC} = \widehat{DNC}$.

$\Rightarrow DENC$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh kề cùng nhìn một cạnh dưới các góc bằng nhau).

$\Rightarrow \widehat{DNE} = \widehat{DCE}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung DE).

Mà $\widehat{DCE} = \widehat{DCA} = \widehat{DBA}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung DA).

$\Rightarrow \widehat{DNE} = \widehat{DBA}$. Mà 2 góc này nằm ở vị trí 2 góc đồng vị nên $EN // AB$ hay $EN // AH$.

Lại có: E là trung điểm của AC (do OM là trung trực của $AC, OM \cap AC = \{E\}$).

$\Rightarrow N$ là trung điểm của CH (định lí đường trung bình trong tam giác ACH).

Vậy MB đi qua N là trung điểm của CH (đpcm).

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB < AC)$ nội tiếp trong đường tròn tâm O. Dựng đường thẳng d qua A song song BC, đường thẳng d' qua C song song BA, gọi D là giao điểm của d và

d'. Dựng AE vuông góc BD (E nằm trên BD), F là giao điểm của BD với đường tròn (O). Chứng minh:

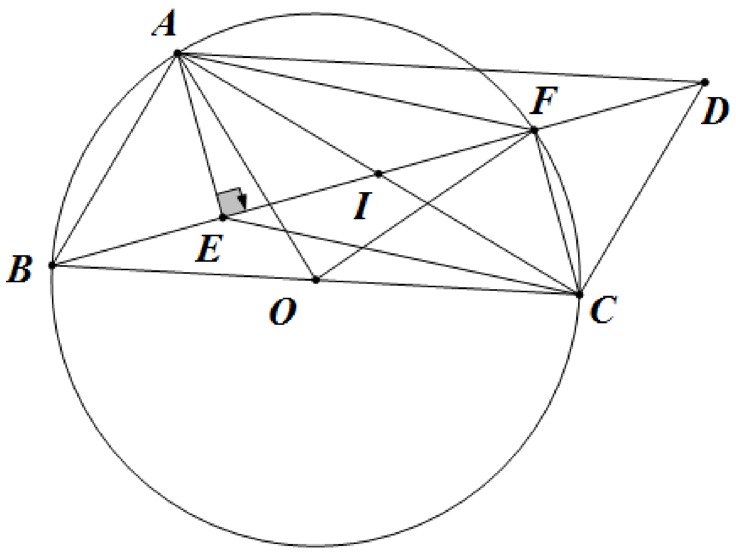
a) Tứ giác $AECD$ nội tiếp được trong đường tròn.

b) $\widehat{AOF} = 2\widehat{CAE}$

c) Tứ giác AECF là hình bình hành.

d) $DF \cdot DB = 2AB^2$.

Lời giải



a) ta có $\widehat{BAC} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow AB//CD$ nên $\widehat{ACD} = \widehat{BAC} = 90°$ (hai góc so le trong)

Suy ra $\widehat{AED} = \widehat{ACD} = 90° \Rightarrow E;C$ cùng nhìn AD dưới góc $90°$ do đó tứ giác $AECD$ nội tiếp.

b) tứ giác $AECD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CAE} = \widehat{CDE}$ (2 góc nội tiếp chắn cung EC)

$AB//CD \Rightarrow \widehat{CDE} = \widehat{ABD}$ (so le trong)

$\Rightarrow \widehat{CAE} = \widehat{ABD}$

Mà $\widehat{ABD}$ là góc ở tâm; $\widehat{AOF}$ là góc nội tiếp chắn cung AF $\Rightarrow \widehat{AOF} = 2.\widehat{ABD}$ hay $\widehat{AOF} = 2.\widehat{CAE}$

c) Ta có $\widehat{BFC} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)$\Rightarrow AE//CF$ (cùng vuông góc với BD)

Lại có $\widehat{AFB} = \widehat{ACB} = \widehat{CAD} = \widehat{FEC} \Rightarrow AF//EC$

Do đó tứ giác $AECF$ là hình bình hành.

d) Gọi giao điểm của AC và BD là I, do tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên

$IA = IC; IB = ID; AB = CD$

Xét tam giác DCI vuông tại C có CF là đường cao nên $CD^2 = DF.DI \Rightarrow AB^2 = DF.DI$

$\Rightarrow 2AB^2 = 2.DF.DI$ mà $2DI = BD$ do đó $2AB^2 = DF.BD$.

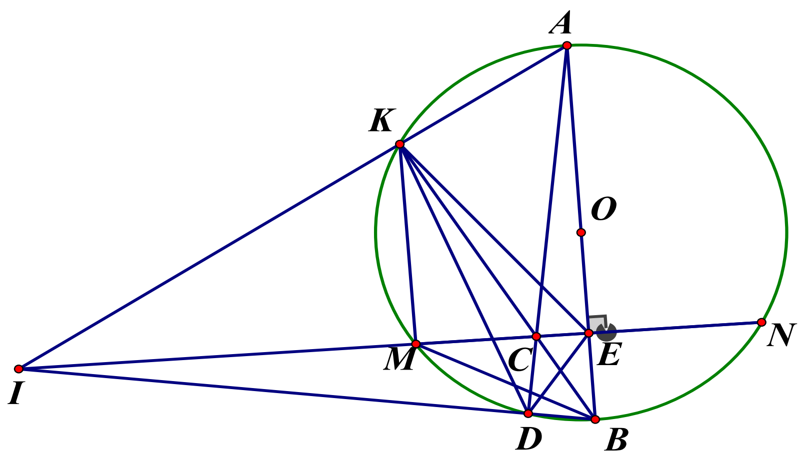
Bài 10. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây MN cố định $(MN < 2R)$. Kẻ đường kính AB vuông góc với dây MN tại E. Lấy điểm C thuộc dây MN (C khác M, N, E). Đường thẳng BC cắt đường tròn $(O;R)$ tại điểm K (K khác B)

a) Chứng minh $AKCE$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh $BM^2 = BK.BC$

c) Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng $AK, MN; D$ là giao điểm của hai đường thẳng AC và BI. Chứng minh điểm C cách đều ba cạnh của tam giác DEK

Lời giải



1) Chứng minh $AKCE$ là tứ giác nội tiếp

Ta có : $\angle AKE = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \angle AKC = 90°$

$AB \perp MN$ tại E nên $\angle AEC = 90°$

Xét tứ giác $AKCE$ có $\angle AKC + \angle AEC = 90° + 90° = 180°$ mà hai góc này đối nhau nên $AKCE$ là tứ giác nội tiếp

2) Chứng minh $BM^2 = BK.BC$

Ta có $AB \perp MN$ nên B là điểm chính giữa cung $MN \Rightarrow sd\,\overset{\frown}{BM} = sd\,\overset{\frown}{BN}$

$\Rightarrow \angle BMN = \angle MKB$ (2 góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

$\Rightarrow \angle BMC = \angle BKM$

Xét ΔBCM và ΔBMK có :

$\angle MBK\ chung, \angle BMC = \angle BKM\,(cmt) \Rightarrow \Delta BCM \sim \Delta BMK\,(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{BC}{BM} = \dfrac{BM}{BK} \Rightarrow BM^2 = BC.BK\,(dfcm)$

3) Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng $AK, MN; D$ là giao điểm của hai đường thẳng AC và BI. Chứng minh điểm C cách đều ba cạnh của tam giác DEK

Tam giác ABI có $BK \perp AI\,(do\ \angle AKB = 90°), IE \perp AB\,(do\ AB \perp MN)$

$\Rightarrow BK, IE$ là hai đường cao của $\Delta ABI \Rightarrow C$ là trực tâm $\Delta ABI \Rightarrow AD$ là đường cao của tam giác $ABI \Rightarrow AD \perp IB \Rightarrow \angle ADB = 90°$

Mà AB là đường kính của đường tròn $(O) \Rightarrow D \in (O)$

Xét (O) có :

$\angle ADK = \angle ABK$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AK)

$\angle DKB = \angle DAB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BD)

Tứ giác $AKCE$ nội tiếp $(cmt) \Rightarrow \angle CKE = \angle CAE$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CE)

$\Rightarrow \angle BKE = \angle DAB \Rightarrow \angle DKB = \angle DAB$

$\Rightarrow KB$ là tia phân giác của $\angle DKE$

Tứ giác $BDCE$ có : $\angle BDC + \angle CEB = 90° + 90° = 180°$ mà hai góc này đối nhau

$\Rightarrow BDCE$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle CDE = \angle CBE$ (cùng chắn cung CE) $\Rightarrow \angle ADE = \angle ABK \Rightarrow \angle ADK = \angle ADE$

$\Rightarrow DA$ là tia phân giác của $\angle EDK$

Tam giác DEK có :

KB là tia phân giác của $\angle DKE$, DA là tia phân giác của $\angle EDK$

Mà C là giao điểm của $KB, DA \Rightarrow C$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔDEK

Vậy C cách đều ba cạnh của tam giác DEK

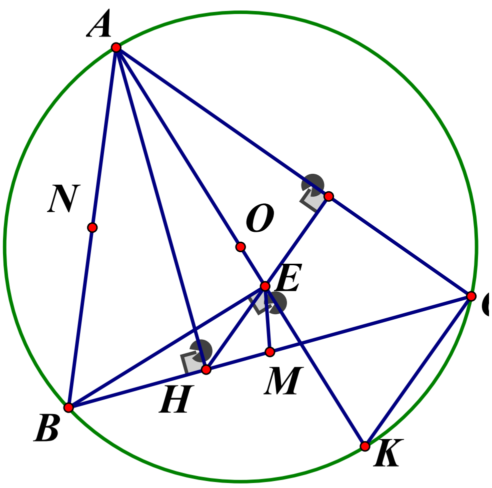
Bài 11. Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC và E là hình chiếu vuông góc của điểm B lên đường thẳng AO

a) Chứng minh $AEHB$ là tứ giác nôi tiếp

b) Chứng minh đường thẳng HE vuông góc với đường thẳng AC

c) Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính tỉ số $\dfrac{ME}{MH}$

Lời giải



a) Chứng minh $AEHB$ là tứ giác nôi tiếp

Ta có :

$AH \perp BC \Rightarrow \angle AHB = 90°$, $AE \perp BE \Rightarrow \angle AEB = 90°$

Tứ giác $AEHB$ có $\angle AHB = \angle AEB = 90°$ cùng nhìn cạnh AB dưới 1 góc không đổi

$\Rightarrow AEHB$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh đường thẳng HE vuông góc với đường thẳng AC

Kéo dài AO cắt đường tròn (O) tại K khi đó AK là đường kính của đường tròn tâm O, ta có C thuộc đường tròn (O) $\Rightarrow \angle ACK = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow CK \perp AC$

Tứ giác $AEHB$ nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \angle EHC = \angle BAE$ (hai góc cùng bù với $\angle BHE$)

$\Rightarrow \angle EHC = \angle BAK$

Xét (O) có : $\angle BAK = \angle BCK$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BK)

$\Rightarrow \angle EHC = \angle BCK$ mà hai góc này ở vị trí so le trong $\Rightarrow HE // CK$

Ta có $\begin{cases} CK \perp AC(cmt) \\ CK // HE \end{cases} \Rightarrow HE \perp AC(dfcm)$

c) Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính tỉ số $\frac{ME}{MH}$

Gọi N là trung điểm của AB

Ta có N là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABHE \Rightarrow NE = NH \, (1)$

Tam giác ABC có : M, N lần lượt là trung điểm BC, AB

Suy ra MN là đường trung bình của tam giác $ABC \Rightarrow MN // AC$

Mà $HE \perp AC(cmt) \Rightarrow MN \perp HE \, (2)$

Từ (1) và $(2) \Rightarrow MN$ là đường trung trực của $HE \Rightarrow MH = ME \Rightarrow \frac{ME}{MH} = 1$

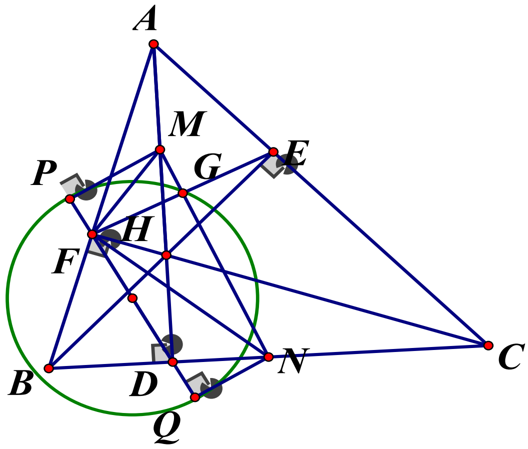
Bài 12. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và $AB < AC$. Vẽ các đường cao AD, BE, CF của tam giác đó. Gọi H là giao điểm của các đường cao vừa vẽ

a) Chứng minh rằng các tứ giác $AEHF$ và $BFEC$ nội tiếp

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AH, BC. Chứng minh rằng $FM.FC = FN.FA$

c) Gọi P, Q lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ M, N đến đường thẳng DF. Chứng minh rằng đường tròn đường kính PQ đi qua giao điểm của FE, MN

Lời giải



a) Chứng minh rằng các tứ giác $AEHF$ và $BFEC$ nội tiếp

Ta có $\angle AFH = 90°$ (do $CF \perp AB$); $\angle AEH = 90°\left(BE \perp AC\right)$

Suy ra $\angle AFH + \angle AEH = 180°$ mà hai góc này đối nhau nên $AEHF$ là tứ giác nội tiếp

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AH, BC. Chứng minh rằng $FM.FC = FN.FA$

Tam giác BFC vuông tại F ta có: FN là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BC

$\Rightarrow FN = \dfrac{BC}{2}(1)$

Tam giác BEC vuông tại E ta có EN là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BC

$\Rightarrow EN = \dfrac{1}{2}BC(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $FN = EN(*)$

ΔAHF vuông tại F có FM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AH

$\Rightarrow FM = \dfrac{1}{2}AH(3)$

ΔAEH vuông tại E có EM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền $AH \Rightarrow EM = \dfrac{1}{2}AH(4)$

Từ (3) và(4) suy ra $FM = ME(**)$

Từ (*) và (**) ta có MN là đường trung trực EF

Gọi G là giao điểm của MN, EF

Tam giác FME có MG là đường cao đồng thời là đường trung tuyến

$\Rightarrow \Delta FME$ cân tại M có MG là phân giác $\Rightarrow \angle FMG = \dfrac{1}{2}\angle FME(5)$

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $FAEH$ có :

$\angle FAE = \dfrac{1}{2}\angle FME$ (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm chắn cung EF) (6)

Từ (5) và (6) suy ra $\angle FAE = \angle FMK$ hay $\angle FAC = \angle FMN$

Ta có $FM = MH\left(= \dfrac{1}{2}AH\right) \Rightarrow \Delta FMH$ cân tại M

$\Rightarrow \angle MFH = \angle MHF = \angle DHC$ (vì $\angle MHF = \angle DHC$ là hai góc đối đỉnh)

Ta có : $FN = NC\left(=\frac{1}{2}BC\right) \Rightarrow \Delta FNC$ cân tại N$\Rightarrow \angle NFC = \angle NCF$

Mà $\angle DHC + \angle NCF = 90°$ (ΔDHN vuông tại D)

Suy ra $\angle MFH + \angle NFC = \angle MFN = 90°$

Xét ΔFMN và ΔFAC có:

$\angle MFN = \angle AFC = 90°, \angle FAC = \angle FMN (cmt)$

$\Rightarrow \Delta FMN \sim \Delta FAC \Rightarrow \frac{FM}{FN} = \frac{FA}{FC} \Rightarrow FM.FC = FN.FA (dfcm)$

c) Gọi P, Q lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ M, N đến đường thẳng DF. Chứng minh rằng đường tròn đường kính PQ đi qua giao điểm của FE, MN

Vì $MN \perp EF$ tại G nên $\angle MGF = 90°$

Ta có $MP \perp PQ$ tại P nên $\angle MPF = 90°$

Tứ giác $MPFG$ có : $\angle MGF + \angle MPF = 90° + 90° = 180°$ mà hai góc này đối nhau

$\Rightarrow MPFG$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle MGP = \angle MFP$ (cùng nhìn cạnh MP)

Vì $MN \perp EF$ tại G$\Rightarrow \angle FGN = 90°$

Ta có $NQ \perp PQ$ tại Q$\Rightarrow \angle NQF = 90°$

Tứ giác $NQFG$ có :

$\angle FGN + \angle NQF = 90° + 90° = 180°$ mà hai góc này đối nhau nên $NQFG$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle QGN = \angle QFN$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung QN)

$\Rightarrow \angle MGP + \angle QGN = \angle MFP + \angle QFN$

Mà $\angle MFN = 90° \Rightarrow \angle MFP + \angle QFN = 90°$

$\Rightarrow \angle MFP + \angle QGN = 90° \Rightarrow \angle PGQ = 90°$

Đường tròn đường kính PQ có $\angle PGQ = 90° \Rightarrow G \in$ đường tròn đường kính PQ.

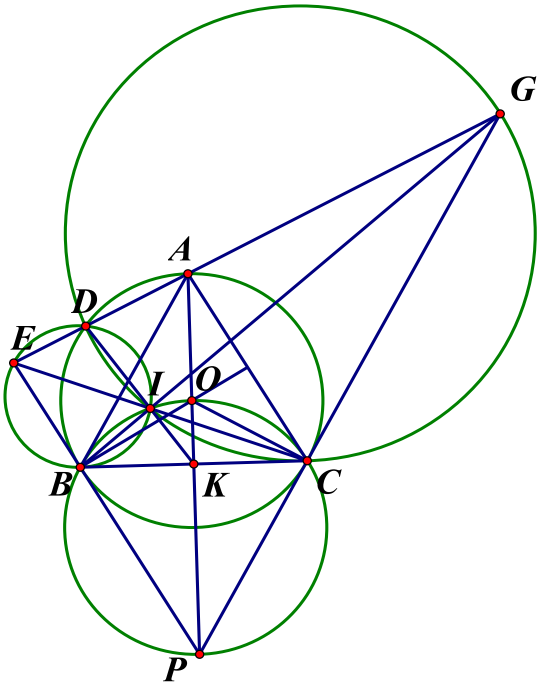
Bài 13. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O), điểm D thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ (D khác A và B). Các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và C cắt AD theo thứ tự tại E và G. Gọi I là giao điểm của CE và BG

a) Chứng minh rằng $\Delta EBC \sim \Delta BCG$

b) Tính số đo góc BIC. Từ đó, hãy chứng minh tứ giác $BIDE$ nội tiếp

c) Gọi K là giao điểm của DI và BC. Chứng minh rằng $BK^2 = KI.KD$

Lời giải



a) Chứng minh rằng $\Delta EBC \sim \Delta BCG$

Gọi tiếp tuyến tại B,C của (O) cắt nhau tại P.

$\angle EBC = 180° - \angle PBC = 180° - \angle PCB = \angle GCB$

Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác DEB cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác GCD tại I' khác D. Ta có :

$\angle DI'B = 180° - \angle DEB$ và $\angle DI'C = 180° - \angle DGC$

Chú ý rằng $\angle BPC = 180° - \angle BOC = 180^0 - 120° = 60°$

Do đó $\angle BI'C = 120°$. Lại có :

$\angle BDE = \angle EI'B = 60°$ (do tứ giác $DACB$ nội tiếp và $EDI'B$ nội tiếp) dẫn đến :

E, I', C thẳng hàng. Tương tự G, I', B thẳng hàng, dẫn đến $I \equiv I'$

Do đó thu được $\angle BIC = \angle EBC = \angle GBC$ dẫn đến các tam giác $EBC; BIC$ và BCG đồng dạng với nhau.

b) Tính số đo góc BIC. Từ đó, hãy chứng minh tứ giác $BIDE$ nội tiếp

Từ câu a) ta đã chỉ ra $\angle BIC = 120°$ và $BIDE$ nội tiếp

c) Gọi K là giao điểm của DI và BC. Chứng minh rằng $BK^2 = KI.KD$

Ta có : $\angle CIB = \angle KIB = \angle BEI = \angle IDB$ dẫn đến tam giác KIB đồng dạng với tam giác KBD

$$\Rightarrow \frac{KI}{KB} = \frac{KB}{KD} \Rightarrow BK^2 = KI.KD$$

DẠNG 2

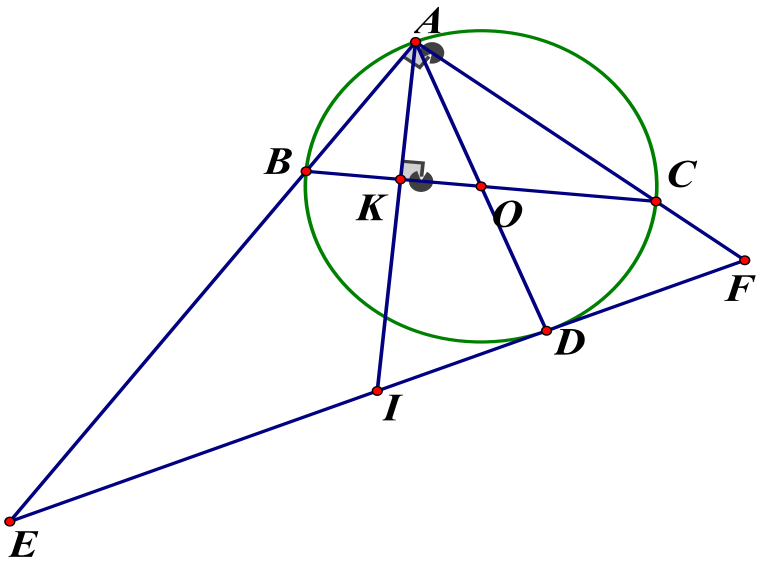
ĐƯỜNG TRÒN LIÊN QUAN ĐẾN BA ĐIỂM THẲNG HÀNG, BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn tâm O. Kẻ đường kính AD. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại D cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại E và F

a) Chứng minh hai tam giác ABC và AFE đồng dạng với nhau

b) Gọi I là trung điểm của EF và K là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC. Chứng minh ba điểm A, K, I thẳng hàng

Lời giải



a) Chứng minh hai tam giác ABC và AFE đồng dạng với nhau

EF là tiếp tuyến của (O) tại D nên $AD \perp EF$ tại D

Tam giác ADF vuông tại D nên $\angle AFD + \angle FAD = 90°$

Mà $\angle FAD + \angle OAB = \angle BAC = 90° \Rightarrow \angle AFD = \angle OAB$

Tam giác OAB có $OA = OB \Rightarrow \Delta OAB$ cân tại O $\Rightarrow \angle OAB = \angle OBA$ (hai góc ở đáy)

$\Rightarrow \angle AFD = \angle OBA$ hay $\angle AFE = \angle ABC$

Xét ΔABC và ΔAFE có :

$\angle EAF$ chung, $\angle ABC = \angle AFE(cmt) \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta AFE(g.g)(dfcm)$

b) Gọi I là trung điểm của EF và K là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC. Chứng minh ba điểm A, K, I thẳng hàng

Xét tam giác vuông AEF có AI là trung tuyến ừng với cạnh huyền EF

$\Rightarrow AI = \frac{1}{2}EF = IE = IF$ (đường trung tuyến bằng nửa cạnh huyền)

$\Rightarrow \Delta IAE$ cân tại I $\Rightarrow \angle IAE = \angle IEA = \angle AEF$

Mà $\Delta ABC \backsim \Delta AFE(cmt) \Rightarrow \angle AEF = \angle ACB$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow \angle IAE = \angle ACB$

Lại có $\angle ACB = \angle KAB$ (cùng phụ với $\angle ABC$) $\Rightarrow \angle IAE = \angle KBA$

Vậy A, K, I thẳng hàng (đpcm)

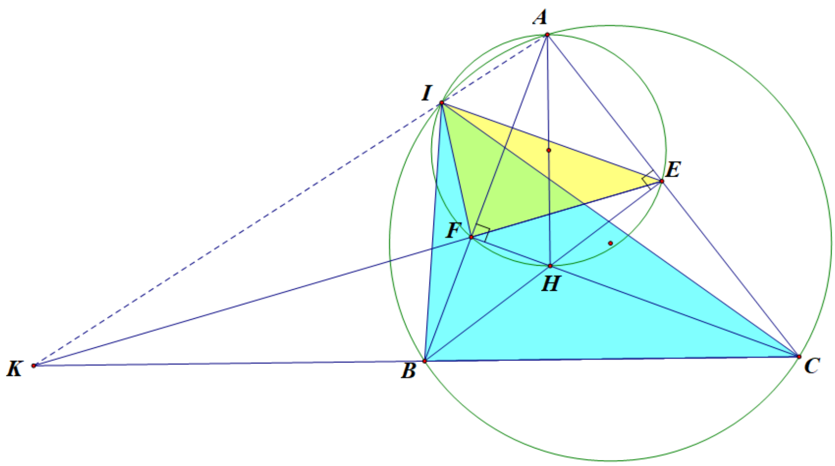
Bài 2. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Gọi BE, CF là các đường cao và H là trực tâm của tam giác ABC.

a) Chứng minh tứ giác $AEHF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHF$ cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai I (A không trùng với I). Chứng minh hai tam giác IBC và IFE đồng dạng với nhau.

c) Hai đường thẳng BC và EF cắt nhau tại K. Chứng minh ba điểm A, I, K thẳng hàng.

Lời giải



a) Xét tứ giác $AEHF$, ta có: $\widehat{AFH} = 90°$ (Vì CF là đường cao của tam giác ABC)

$\widehat{AEH} = 90°$ (Vì BE là đường cao của tam giác ABC)

Do đó $\widehat{AFH}+\widehat{AEH}=90°+90°=180°$

Vậy tứ giác $AEHF$ là tứ giác nội tiếp .

b) Xét tứ giác $AEHF$, ta có: $\widehat{IEF}=\widehat{IAF}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{IF}$)

$\widehat{IAF}=\widehat{IBC}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{IB}$)

Do đó $\widehat{IEF}=\widehat{IBC}$

Tương tự, $\widehat{FIE}=\widehat{FAE}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{EF}$)

$\widehat{FAE}=\widehat{BIC}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BC}$)

Do đó $\widehat{FIE}=\widehat{BIC}$

Xét ΔIBC và ΔIFE, ta có: $\widehat{IEF}=\widehat{IBC}$ (cmt)

$\widehat{FIE}=\widehat{BIC}$ (cmt)

Do đó $\Delta IBC \backsim \Delta IFE\,(g-g)$

c)

Tứ giác $IAEF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{IFK}=\widehat{IAE}$

Tứ giác $IABC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{IBK}=\widehat{IAE}$

Suy ra $\widehat{IFK}=\widehat{IBK}$

Suy ra tứ giác $IFBK$ nội tiếp (có hai đỉnh B,F kề cùng nhìn cạnh IK dưới một góc bằng nhau).

Vậy $\widehat{KIF}+\widehat{KBF}=180°$, mà $\widehat{KBF}=\widehat{FEC}=\widehat{FIA}$

$\Rightarrow \widehat{KIF}+\widehat{FIA}=180°$ hay ba điểm $A,\ I,\ K$ thẳng hàng.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

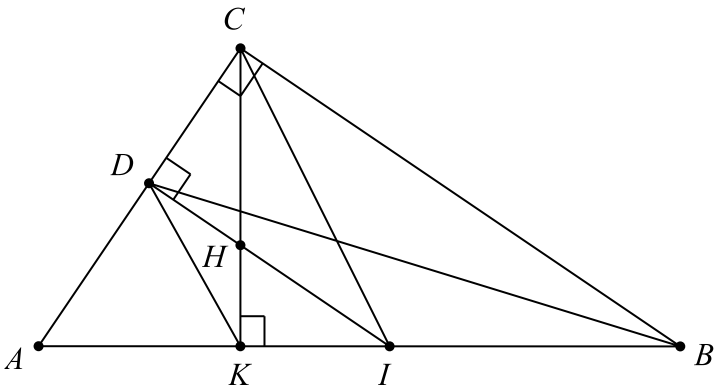
Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại C (AC < BC), đường cao CK và đường phân giác BD $(K\in AB, D\in AC)$. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với AC cắt CK, AB lần lượt tại H và I.

a) Chứng minh tứ giác CDKI nội tiếp.

b) Chứng minh AC.AD = DH.AB.

c) Gọi F là trung điểm của AD. Đường tròn tâm I bán kính ID cắt BC tại M (M khác B) và cắt AM tại N (N khác M). Chứng minh B, N, F thẳng hàng.

Lời giải



a) Ta có : $\widehat{CDI} = 90^0$ (gt)

$\widehat{CKI} = 90^0$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{CDI} = \widehat{CKI}$

Vậy tứ giác CDKI nội tiếp.

b) Ta có: BD là phân giác của tam giác ABC (gt) $\Rightarrow \dfrac{AD}{DC} = \dfrac{AB}{BC} \Rightarrow \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{DC}{BC}$ (1)

Xét ΔDCH và ΔCBA có:

$\widehat{CDH} = \widehat{BCA}\ \left(= 90^0\right)$

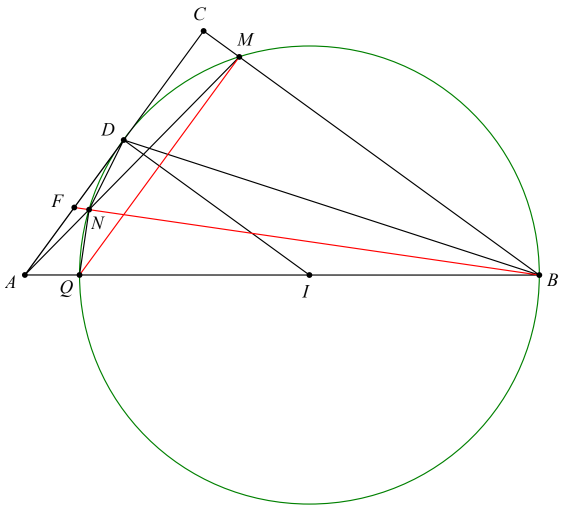
$\widehat{DCH} = \widehat{CBA}$ (cùng phụ $\widehat{BAC}$)

$\Rightarrow \Delta DCH \sim \Delta CBA$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{DH}{AC} = \dfrac{DC}{BC}$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \dfrac{DH}{AC} = \dfrac{AD}{AB} \Rightarrow AC.AD = AB.DH$

c)



Gọi F’ là giao điểm của BN với AD, Q là giao điểm của AB với (I).

Ta có: ID // BC (cùng vuông góc với AC) $\Rightarrow \widehat{IDB} = \widehat{DBC}$

Mà $\widehat{DBI} = \widehat{DBC}$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{IDB} = \widehat{DBI}$

$\Rightarrow \Delta IDB$ cân tại I $\Rightarrow IB = ID \Rightarrow B \in (I)$

$\Rightarrow$ tứ giác BMNQ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{NBQ} = \widehat{NMQ}$

Ta có: $\widehat{QMB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow QM \perp BC$

$\Rightarrow$ QM // AC (cùng vuông góc với BC)

$\Rightarrow \widehat{NMQ} = \widehat{MAD}$ (so le trong)

$\Rightarrow \widehat{NAF'} = \widehat{F'BA}$

Xét $\Delta F'AN$ và $\Delta F'BA$ có:

$\widehat{NAF'} = \widehat{F'BA}$ (c/m trên)

$\widehat{BF'A}$ chung

$\Rightarrow \Delta F'AN \sim \Delta F'BA$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{F'A}{F'B} = \dfrac{F'N}{F'A} \Rightarrow F'A^2 = F'B.F'N$ (3)

Ta lại có: $DA \perp ID$ (gt) nên DA là tiếp tuyến của (I) $\Rightarrow \widehat{F'DN} = \widehat{NBD}$

Xét $\Delta F'DN$ và $\Delta F'BD$ có:

$\widehat{F'DN} = \widehat{NBD}$ (c/m trên)

$\widehat{BF'D}$ chung

$\Rightarrow \Delta F'DN \sim \Delta F'BD$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{F'D}{F'B} = \dfrac{F'N}{F'D} \Rightarrow F'D^2 = F'B.F'N$ (4)

Từ (3), (4) $\Rightarrow F'A^2 = F'D^2$ $\Rightarrow$ F’A = F’D Hay F’ là trung điểm của AD

Do đó F’ trùng với F

Vậy F, N, B thẳng hàng

DẠNG 3
ĐƯỜNG TRÒN LIÊN QUAN ĐẾN TIẾP TUYẾN, VUÔNG GÓC, SONG SONG

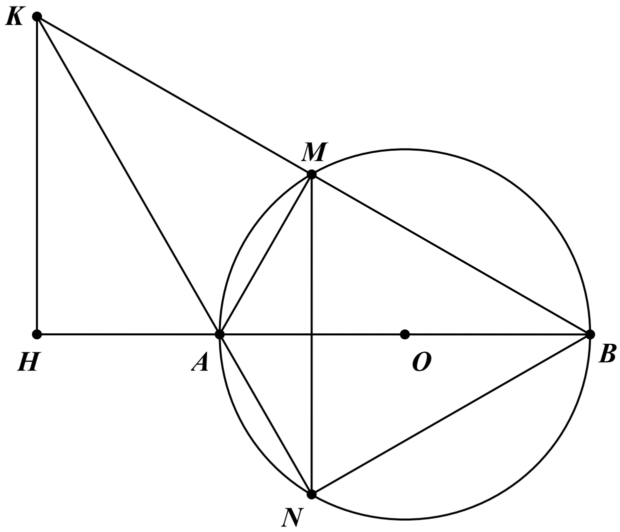
Bài 1. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Dây cung MN vuông góc với AB, ($AM < BM$). Hai đường thẳng BM và NA cắt nhau tại K. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ K đến đường thẳng AB.

a) Chứng minh tứ giác $AHKM$ nội tiếp trong một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $NB\,.\,HK = AN\,.\,HB$.

c) Chứng minh HM là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $AHKM$ nội tiếp trong một đường tròn.

+) Tứ giác $AHKM$ có: $\widehat{AHM} = 90°$ (vì $KH \perp AB$)

và $\widehat{AMB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{AMK} = 90°$ (kề bù với $\widehat{AMB}$)

Suy ra tứ giác $AHKM$ nội tiếp đường tròn đường kính AK.

b) Chứng minh rằng: $NB\,.\,HK = AN\,.\,HB$.

Xét ΔANB và ΔKHB có:

+) $\widehat{ANB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{ANB} = \widehat{KHB} = 90°$;

+) Đường kính $AB \perp MN \Rightarrow A$ là điểm chính giữa $\overset{\frown}{MN}$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây)

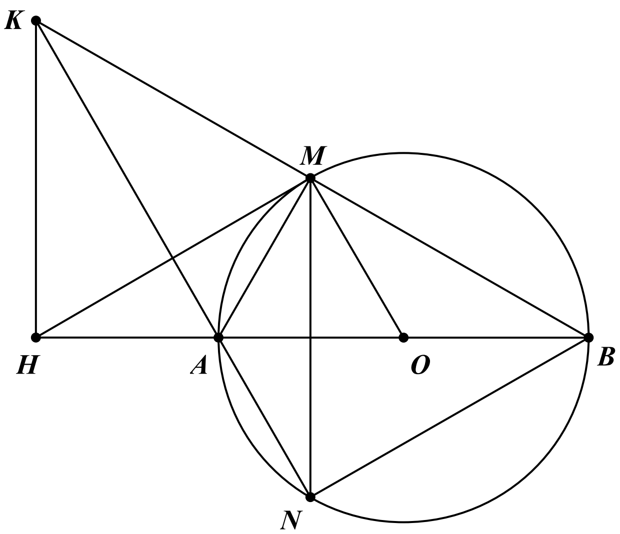
$\Rightarrow \overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{AM} \Rightarrow \widehat{ABN} = \widehat{KBH}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau);

Suy ra $\Delta ANB \backsim \Delta KHB\ (g.g)$

$$\Rightarrow \frac{AN}{NB} = \frac{KH}{HB}$$

$\Rightarrow NB\,.\,HK = AN\,.\,HB$.

c) Chứng minh HM là tiếp tuyến của đường tròn (O).



+) Ta có HM giao với đường tròn (O) tại M, ta phải chứng minh $HM \perp OM$. Thật vậy:

Tứ giác $AHKM$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HMK} = \widehat{HAK}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overparen{HK}$);

$\widehat{HAK} = \widehat{NAB}$ (hai góc đối đỉnh);

$\widehat{NAB} = \widehat{MAB}$ ($AB \perp MN \Rightarrow B$ là điểm chính giữa $\overparen{MN}$, hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau);

$\widehat{MAB} = \widehat{OMA}$ (ΔOAM cân tại O);

$\Rightarrow \widehat{HMK} = \widehat{OMA}\left(= \widehat{HAK} = \widehat{NAB} = \widehat{MAB}\right) \Rightarrow \widehat{HMK} + \widehat{HMA} = \widehat{OMA} + \widehat{HMA}$;

Mà $\widehat{HMK} + \widehat{HMA} = \widehat{AMK} = 90^\circ$ (kề bù với $\widehat{AMB} = 90^\circ$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn);

$\Rightarrow \widehat{OMA} + \widehat{HMA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HMO} = 90^\circ \Rightarrow HM \perp OM$ tại $M \in (O)$

$\Rightarrow HM$ là tiếp tuyến của (O).

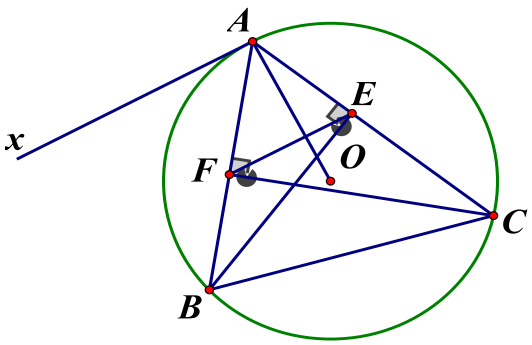
Bài 2. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao BE, CF cắt nhau tại $H\left(E \in AC, F \in AB\right)$. Chứng minh rằng :

a)Tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn

b) $AE.BC = EF.AB$

c) $OA \perp EF$

Lời giải



a) Tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn

Tứ giác $BCEF$ có $\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ\left(do\ BE \perp AC, CF \perp AB\right)$

Mà 2 góc này cùng nhìn cạnh BC $\Rightarrow$ tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn

b) $AE.BC = EF.AB$

Tứ giác $BCEF$ nội tiếp nên $\angle FBC = \angle AEF$ (cùng bù với $\angle FEC$)

Xét ΔAEF và ΔABC có : $\angle BAC\ chung, \angle FBC = \angle AEF(cmt)$

$$\Rightarrow \Delta AEF \sim \Delta ABC(g.g) \Rightarrow \frac{AE}{EF} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AE.BC = EF.AB(dfcm)$$

c) $OA \perp EF$

Kẻ tiếp tuyến Ax đi qua điểm A của đường tròn $(O) \Rightarrow Ax \perp OA$ (1)

Tứ giác $BCEF$ nội tiếp $\Rightarrow \angle AFE = \angle ACB$ (góc trong và góc ngoài tại đỉnh đối diện)

Mà $\angle xAB = \angle ACB$ (cùng chắn cung AB) $\Rightarrow \angle AFE = \angle xAB$, mà 2 góc này ở vị trí so le trong) nên $Ax//EF\,(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OA \perp EF\,(dpcm)$

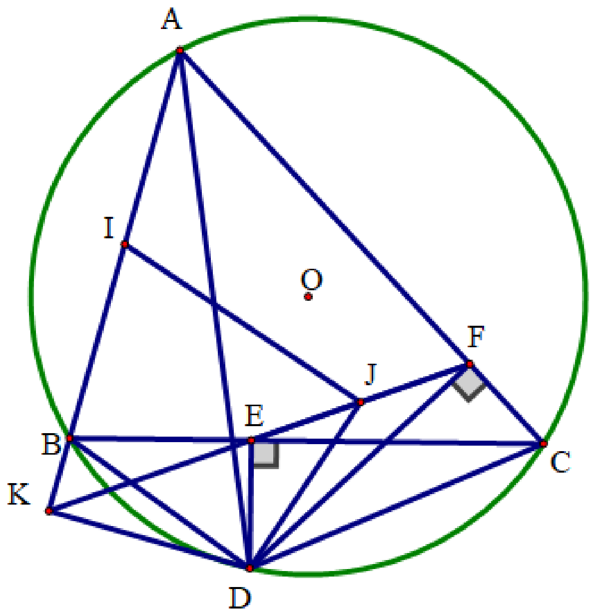
Bài 3. Cho tam giác *ABC* có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn *(O), (AB < AC)*. Gọi *D* là điểm trên cung nhỏ *BC* sao cho *DB < DC*. Từ *D* kẻ *DE* vuông góc với *BC* (*E* thuộc *BC*), kẻ *DF* vuông góc với *AC* (*F* thuộc *AC*). Đường thẳng *EF* cắt tia *AB* tại *K*.

a) Chứng minh tứ giác *CDEF* và $\widehat{DFE} = \widehat{DAB}$.

b) Chứng minh tứ giác *DKBE* nội tiếp và *DB.DF = DA. DE*.

c) Gọi *I, J* lần lượt là trung điểm của *AB* và *EF*. Chứng minh *IJ* vuông góc với *DJ*.

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác *CDEF* và $\widehat{DFE} = \widehat{DAB}$.

Xét tứ giác *CDEF* có:

+) $\widehat{DEC} = 90^0$ (*DE* vuông góc với *BC* tại *E*)

+) $\widehat{DFC} = 90^0$ (*DF* vuông góc với *AC* tại *F*)

$\Rightarrow$ Tứ giác *CDEF* nội tiếp đường tròn đường kính *DC* (2 đỉnh *E và F* cùng nhìn cạnh *DC* dưới 1 góc vuông)

$$\Rightarrow \widehat{DFE} = \widehat{DCE} = \frac{1}{2} sd\,\widehat{DE}$$

Mà $\widehat{DCE} = \widehat{DCB} = \widehat{DAB} = \frac{1}{2} sd\,\widehat{BD}$ trong đường tròn (*O*).

Do đó: $\widehat{DFE} = \widehat{DAB}$.

b) Chứng minh tứ giác *DKBE* nội tiếp và *DB.DF = DA. DE*.

Ta có: $\widehat{KED} = \widehat{DCF}$ (góc ngoài bằng góc đối trong của tứ giác *CDEF* nội tiếp)

$\widehat{DCF} = \widehat{DCA} = \widehat{KBD}$ (góc ngoài bằng góc đối trong đối với tứ giác $ABDC$ nội tiếp đường tròn (O)).

Do đó: $\widehat{KBD} = \widehat{KED} = \widehat{DCA}$ không đổi.

Suy ra tứ giác *DKBE* nội tiếp (2 đỉnh *B, E* cùng phía đối với cạnh *KD* và cùng nhìn cạnh *KD* dưới 1 góc không đổi)

Ta có: $\widehat{EDF} = \widehat{ECF} = \dfrac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{EF} = \widehat{BCA}$

Và $\widehat{BCA} = \widehat{BDA} = \dfrac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{BA}$ trong đường tròn (O)

Suy ra $\widehat{BDA} = \widehat{EDF}$.

Xét ΔDBA và ΔDEF có:

+) $\widehat{DAB} = \widehat{DFE}$ (chứng minh trên)

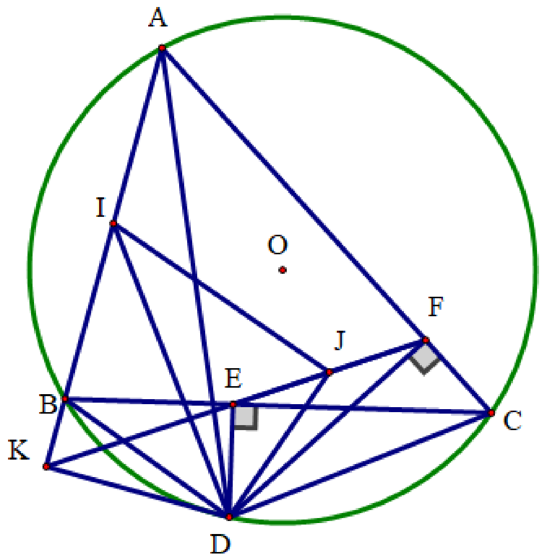
+) $\widehat{BDA} = \widehat{EDF}$ (chứng minh trên)

ΔDBA □ ΔDEF (góc - góc)

$\Rightarrow \dfrac{DB}{DE} = \dfrac{DA}{DF} = \dfrac{BA}{EF}$ (*)

$\Rightarrow DB.DF = DA.DE$ (điều phải chứng minh)

c) Gọi *I, J* lần lượt là trung điểm của *AB* và *EF*. Chứng minh *IJ* vuông góc với *DJ*.



Từ (*) và *I, J* lần lượt là trung điểm của *AB, EF* nên ta có:

$$\frac{DB}{DE} = \frac{BA}{EF} = \frac{2IB}{2JE} = \frac{IB}{JE}$$

Xét ΔDBI và ΔDEJ ta có:

+) $\widehat{DBI} = \widehat{DEJ}$ (ΔDBA □ ΔDEF chứng minh trên)

+) $\dfrac{DB}{DE} = \dfrac{IB}{JE}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta DBI$ □ ΔDEJ (cạnh – góc – cạnh)

$\Rightarrow \widehat{DIB}=\widehat{DJE} \Rightarrow \widehat{KID}=\widehat{KJD}$ = góc không đổi.

$\Rightarrow$ Tứ giác *IKDJ* nội tiếp (2 đỉnh *I, J* cùng phía với cạnh *KD* và cùng nhìn cạnh *KD* dưới 1 góc không đổi)

$\Rightarrow \widehat{IKD}+\widehat{IJD}=180^0$.

Mà tứ giác *DKBE* nội tiếp nên $\widehat{IKD}=\widehat{BKD}=180^0-\widehat{BED}=90^0$

Do đó: $\widehat{IJD}$ vuông hay *IJ* vuông góc với *DJ*.

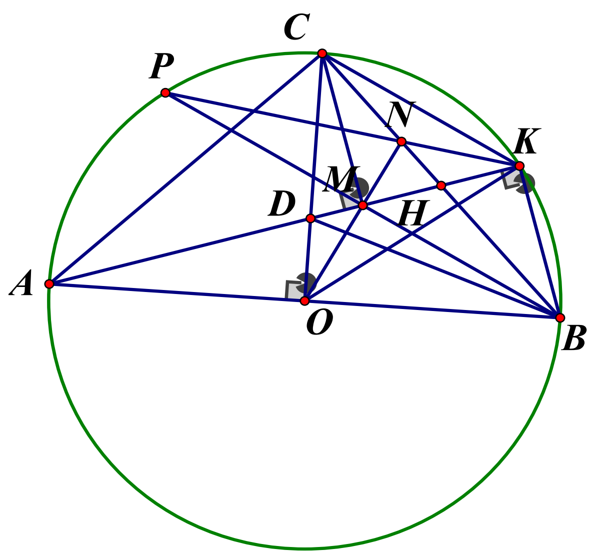
Bài 4. Cho đường tròn (O) , đường kính AB, bán kính OC vuông góc với AB. Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BC. Đường thẳng AH cắt OC tại D và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K (K khác A)

a) Chứng minh tứ giác $ODKB$ nội tiếp một đường tròn

b) Tia phân giác của góc COK cắt AK tại M. Chứng minh $\angle CMA=90°$

c) Đường thẳng OM cắt BC tại N, NK cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là P (P khác K). Chứng minh B đối xứng với P qua M

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $ODKB$ nội tiếp một đường tròn

Xét (O) có: K thuộc đường tròn nên $\angle AKB=90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \angle DKB=90° \Rightarrow \Delta BDK$ vuông tại K

$\Rightarrow K$ thuộc đường tròn đường kính $BD(1)$

Ta có $OC \perp AB$ tại O (gt) $\Rightarrow \angle BOC=90° \Rightarrow \angle BOD=90° \Rightarrow \Delta OBD$ vuông tại O

$\Rightarrow O$ thuộc đường tròn đường kính $BD(2)$

Từ (1) và $(2) \Rightarrow O, K$ thuộc đường tròn đường kính BD

Vậy tứ giác $ODKB$ nội tiếp một đường tròn

b) Tia phân giác của góc COK cắt AK tại M. Chứng minh $\angle CMA=90°$

Xét tam giác COK có $OC = OK \Rightarrow \Delta COK$ cân tại O

$\Rightarrow \angle OCK = \angle CKO$

Lại có ON là phân giác của góc $COK\,(gt)$

$\Rightarrow ON$ đồng thời là đường trung bình của

Mà $M \in ON \Rightarrow CM = MK$ (tính chất đường trung trực)

$\Rightarrow \Delta CMK$ cân tại M$\Rightarrow \angle MCK = \angle CKM$

Ta có :

$\angle OCK = \angle CKO(cmt)$

$\Rightarrow \angle OCM + \angle CMK = \angle OKM + \angle MKC$

$\Rightarrow \angle OCM = \angle OKM\,(do\,\angle MCK = \angle CKM\,(cmt))$

$\Rightarrow \angle OCM = \angle DKO(3)$

Tứ giác $DKBO$ nội tiếp đường tròn $\Rightarrow \angle DKO = \angle DBO$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung OD) (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\angle OCM = \angle DBO$

Tam giác ABD có :

DO là đường cao (do OC vuông góc với AB tại O)

DO là đường trung tuyến (do O là tâm đường tròn đường kính AB nên O là trung điểm của AB)

$\Rightarrow \Delta ABD$ cân tại D$\Rightarrow \angle DAO = \angle DBO \Rightarrow \angle MAO = \angle DBO$

Mà $\angle OCM = \angle DBO(cmt) \Rightarrow \angle MAO = \angle OCM$

Xét tứ giác $AOMC$ có : $\angle MAO = \angle OCM$ mà hai góc này có đỉnh kề nhau cùng chắn cung AC$\Rightarrow$ $AOMC$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle AOC = \angle AMC$

Mà $\angle AOC = 90^\circ$ (do AB vuông góc với CO tại O)

$\Rightarrow \angle AMC = 90^\circ\,(dfcm)$

c) Đường thẳng OM cắt BC tại N, NK cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là P (P khác K). Chứng minh B đối xứng với P qua M

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AHC có :

$$HM.HA = HC^2 = HB^2 \Rightarrow \frac{HM}{HB} = \frac{HB}{HA}$$

Xét ΔHBM và ΔHAB có : $\angle AHB\,chung, \dfrac{HM}{HB} = \dfrac{HB}{HA}(cmt) \Rightarrow \Delta HBM \backsim \Delta HAB(c.g.c)$

$\Rightarrow \angle HAB = \angle HBM$ (hai góc tương ứng)

Mà $\angle HAB = \angle KPB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung KB)

$\Rightarrow \angle KBP = \angle HBM$ hay $\angle NPB = \angle NBP$

$\Rightarrow \Delta NBP$ cân tại N (tam giác có hai góc ở đáy bằng nhau

$\Rightarrow NB = NP$

Xét ΔONB và ΔONP có :

$OB = OP(= R), ON$ chung, $NB = NP(cmt)$

$\Rightarrow \Delta ONB = \Delta ONP(c.c.c)$

$\Rightarrow \angle NOB = \angle NOP$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow ON$ là phân giác của $\angle BOP$

$\Rightarrow OM$ là phân giác của $\angle BOP$

Xét tam giác OBP có: $OB = OP = R$, nên ΔOBP cân tại O $\Rightarrow$ phân giác OM đồng thời là đường trung tuyến $\Rightarrow M$ là trung điểm của BP

Vậy B đối xứng với P qua M (đpcm)

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

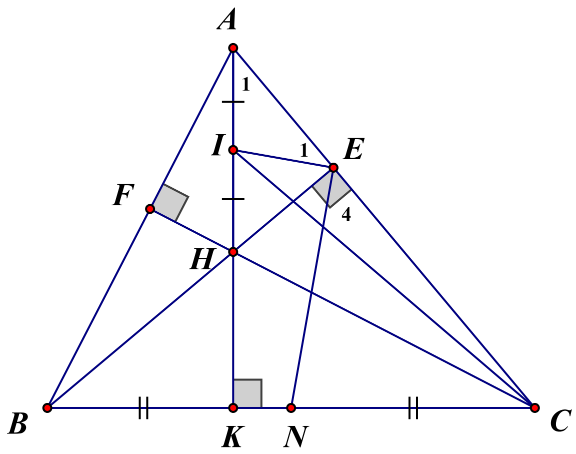
Bài 5. Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn. Các đường cao AK, BE và CF cắt nhau tại H. Gọi I là trung điểm của đoạn AH, N là trung điểm của đoạn BC.

a) Chứng minh bốn điểm A, E, H, F nằm trên cùng một đường tròn.

b) Chứng minh NE là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH.

c) Chứng minh $CI^2 - IE^2 = CK.CB$.

Lời giải



a) Chứng minh bốn điểm A, E, H, F nằm trên cùng một đường tròn.

Ta có $\widehat{AEB} = 90°$ (do BE là đường cao của ΔABC) hay $\widehat{AEH} = 90°$

$\widehat{AFC} = 90°$ (do CF là đường cao của ΔABC) hay $\widehat{AFH} = 90°$

Xét tứ giác $AEHF$ có $\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 90° + 90° = 180°$

Mà $\widehat{AEH}$, $\widehat{AFH}$ ở vị trí đối nhau

Do đó tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn đường kính AH

Suy ra bốn điểm A, E, H, F cùng nằm trên một đường tròn (đpcm)

b) Chứng minh NE là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH;

Vì I là trung điểm của đoạn thẳng AH nên I là tâm đường tròn đường kính AH

Suy ra $IA = IE$

$\Rightarrow \Delta IAE$ cân tại I

$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{E_1}$ (1)

ΔEBC vuông tại E có EN là đường trung trrung tuyến ứng với cạnh huyền BC

$\Rightarrow EN = NC \left(= \dfrac{BC}{2} \right)$

$\Rightarrow \Delta ENC$ cân tại N

$\Rightarrow \widehat{NCE} = \widehat{E_4}$ (2)

Xét ΔAKC vuông tại K có $\widehat{KCA} + \widehat{A_1} = 90^\circ$ hay $\widehat{NCE} + \widehat{A_1} = 90^\circ$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{E_1} + \widehat{E_4} = 90^\circ$

Lại có $\widehat{E_1} + \widehat{E_4} + \widehat{IEN} = 180^\circ$ (do A, E, C thẳng hàng)

$\Rightarrow 90^\circ + \widehat{IEN} = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{IEN} = 90^\circ$

Suy ra $EN \perp EI$ tại E

Do đó NE là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH (đpcm)

c) Chứng minh $CI^2 - IE^2 = CK.CB$.

Áp dụng định lí Py – Ta – Go ΔCIK vuông tại K, ta có: $CI^2 = CK^2 + IK^2$

Lại có $IA = IE = IH$ (cùng bán kính đường tròn tâm I)

$\Rightarrow CI^2 - IE^2 = CK^2 + IK^2 - IE^2$

$CI^2 - IE^2 = CK^2 + (IK + IE)(IK - IE)$

$CI^2 - IE^2 = CK^2 + (IK + IE)(IK - IH) = CK^2 + AK.KH$ (4)

Ta lại có $CK.CB = CK(CK + KB) = CK^2 + CK.KB$ (5)

Xét ΔKBH và ΔKAC có

$\widehat{KBH} = \widehat{KAC}$ (Cùng phụ với $\widehat{ACB}$); $\widehat{BKH} = \widehat{AKC} = 90^\circ$

Do đó $\Delta AHK \backsim \Delta ACB\ (g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{KB}{KA} = \dfrac{KH}{KC} \Rightarrow KA.KH = KB.KC$ hay $AK.KH = CK.KB$ (6)

Từ (4),(5) và (6) suy ra $CI^2 - IE^2 = CK.CB$ (đpcm)

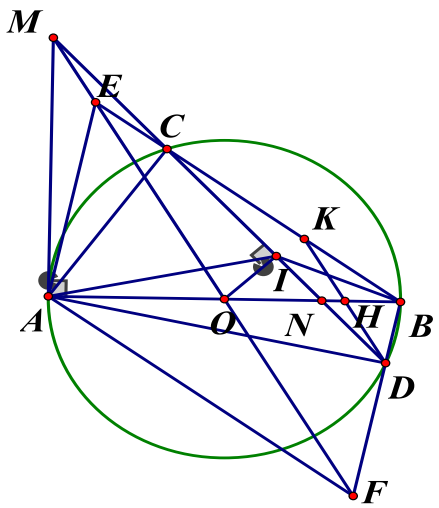
Bài 6. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm A lấy điểm M $(M \neq A)$. Lấy điểm N trên đoạn thẳng OB (N khác O và B).Đường thẳng MN cắt đường tròn (O) tại hai điểm C, D (C nằm giữa M và D). Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng CD

a) Chứng minh tứ giác $AMIO$ là tứ giác nội tiếp

b) Qua D kẻ đường thẳng song song với MO cắt AB tại H. Chứng minh $MA^2 = MC.MD$ và $\angle IAB = \angle MDH$

c) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của đường thẳng MO với hai đường thẳng BC, BD. Chứng minh tứ giác $AEBF$ là hình bình hành

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $AMIO$ là tứ giác nội tiếp

Ta có : I là trung điểm của CD nên $OI \perp CD$ (tính chất đường kính – dây cung)

$\Rightarrow \angle OIM = 90°$

MA là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A (gt) nên $\angle MAO = 90°$

Xét tứ giác $AMIO$ có $\angle OIM + \angle MAO = 90° + 90° = 180°$ mà hai góc này đối diện nhau

Nên tứ giác $AMIO$ là tứ giác nội tiếp

b) Qua D kẻ đường thẳng song song với MO cắt AB tại H. Chứng minh $MA^2 = MC.MD$ và

$\angle IAB = \angle MDH$

Ta có $\angle MAC = \angle CDA$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AC)

Xét ΔMCA và ΔMAD có :

$\angle DMA$ chung, $\angle MAC = \angle MDA (cmt)$

$\Rightarrow \Delta MCA \sim \Delta MAD (g.g) \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MA}$ (hai cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)

$\Rightarrow MA^2 = MC.MD\left(dfcm\right)$

Vì $AMIO$ là tứ giác nội tiếp (cmt) nên ta có :

$\angle IMO = \angle IAO = \angle IAB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung OI)

Vì $HD // MO \Rightarrow \angle MDH = \angle IMO$ (2 góc so le trong)

Vậy $\angle IAB = \angle MDH\left(dfcm\right)$

c) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của đường thẳng MO với hai đường thẳng BC, BD. Chứng minh tứ giác $AEBF$ là hình bình hành

Kéo dài DH cắt BC tại K

Ta có : $\angle IAB = \angle MDH(cmt)$ hay $\angle IAH = \angle IDH$ mà A và D là hai đỉnh kề nhau của tứ giác $AIHD$ cùng nhìn cạnh IH dưới 1 góc bằng nhau

Suy ra tứ giác $AIHD$ nội tiếp đường tròn

$\Rightarrow \angle HID = \angle HAD$ (cùng chắn cung HD)

Xét (O) ta có : $\angle BAD = \angle BCD$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BD)

Hay $\angle HAD = \angle BCD$

Suy ra $\angle BCD = \angle HID\left(= \angle HAD\right)$, mà 2 góc này ở vị trí đồng vị nên $IH//CK$

Suy ra H là trung điểm của DK (định lý về đường trung bình của tam giác)

$\Rightarrow HK = HD\left(1\right)$

Vì $DH//OH\left(gt\right) \Rightarrow HK//OE, HD//OF$

Xét ΔBOE có $HK//OE(cmt) \Rightarrow \dfrac{HK}{OE} = \dfrac{BH}{BO}$ (hệ quả của định lý Talet) (2)

Xét ΔBOF ta có $HD//OF(cmt) \Rightarrow \dfrac{HD}{OF} = \dfrac{BH}{BO}$ (hệ quả định lý Talet) (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow OE = OF$

Xét tứ giác $AEBF$ ta có : $OA = OB = R; OE = OF(cmt)$

Suy ra tứ giác $AEBF$ là hình bình hành (đpcm)

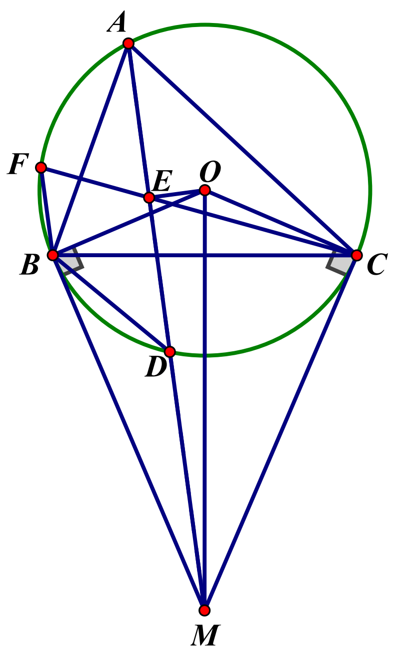
Bài 7. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O. Hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại M, tia AM cắt đường tròn (O) tại điểm D.

a) Chứng minh rằng tứ giác $OBMC$ nội tiếp được đường tròn.

b) Chứng minh $MB^2 = MD.MA$

c) Gọi E là trung điểm đoạn thẳng AD; tia CE cắt đường tròn (O) tại điểm F. Chứng minh rằng: $BF // AM$.

Lời giải



a) Chứng minh rằng tứ giác *OBMC* nội tiếp được đường tròn.

Ta có MB, MC là các tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\begin{cases} OB \perp MB \\ OC \perp MC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{MBO} = 90^0 \\ \widehat{MCO} = 90^0 \end{cases}$

Xét tứ giác OBMC có $\widehat{MBO} + \widehat{MCO} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Mà $\widehat{MBO}, \widehat{MCO}$ là hai góc đối nhau nên tứ giác OBMC nội tiếp.

b) Chứng minh $MB^2 = MD.MA$

Ta có $\widehat{DBM} = \widehat{BAM}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung BD).

Xét ΔMBD và ΔMAB có:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{DBM} = \widehat{BAM} \\ \widehat{BMA} \text{ chung} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta MBD \# \Delta MAB \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MB^2 = MA.MD$$

c) Gọi *E* là trung điểm đoạn thẳng *AD*; tia *CE* cắt đường tròn (O) tại điểm *F*. Chứng minh rằng: *BF // AM*.

Ta có E là trung điểm của AD nên OE ⊥ AD (mối quan hệ giữa đường kính và dây cung) $\Rightarrow \widehat{OEM} = 90^0$

Xét tứ giác OEMC có $\widehat{OEM} + \widehat{OCM} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Mà $\widehat{OEM}, \widehat{OCM}$ là hai góc đối nhau nên tứ giác OEMC nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{COM} = \widehat{CEM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CM) (1)

Ta lại có $\widehat{COM} = \widehat{BOM} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{BC}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Mà $\widehat{BFC}=\dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BC}$ (tính chất góc nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{COM}=\widehat{BFC}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{MEC}=\widehat{BFC}$

Mà hai góc $\widehat{MEC}$ và $\widehat{BFC}$ ở vị trí đồng vị $\Rightarrow EM\,//\,BF$ hay $AM\,//\,BF$.

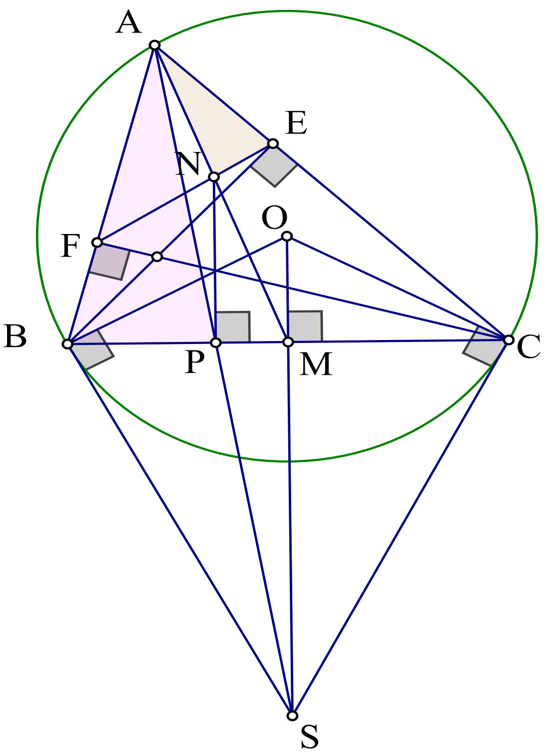
Bài 8. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O, đường cao BE và CF. Tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại S, BC và OS cắt nhau tại M.

a) Chứng minh rằng $AB.MB = AE.BS$.

b) Hai tam giác AEM và ABS đồng dạng.

c) Gọi AM cắt EF tại N, AS cắt BC tại P. Chứng minh rằng $NP \perp BC$.

Lời giải



a) Ta chứng minh $\Delta ABE \sim \Delta BSM$.

b) Từ câu a ta có $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{MB}{BS}$ (1)

mà $MB = EM$ (do ΔBEC vuông tại E có M là trung điểm của BC)

nên $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{EM}{BS}$ Có $\widehat{MOB}=\widehat{BAE};\widehat{EBA}+\widehat{BAE}=90^0$;

$\widehat{MBO}+\widehat{MOB}=90^0$ nên $\widehat{MBO}=\widehat{EBA}$

do đó $\widehat{MEB}=\widehat{OBA}=\widehat{MBE}$. Suy ra $\widehat{MEA}=\widehat{SBA}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta AME \sim \Delta ABS$ (đpcm).

c) Dễ thấy SM vuông góc với BC nên ta chứng minh $NP\,//\,SM$.

Xét ΔANE và ΔAPB: Từ câu b) ta có $\Delta AEM \sim \Delta ABS$ nên $\widehat{NAE} = \widehat{PAB}$. Mà $\widehat{AEN} = \widehat{ABP}$ (do tứ giác $BCEF$ nội tiếp). Do đó $\Delta ANE \sim \Delta APB$ nên $\dfrac{AN}{AP} = \dfrac{AE}{AB}$.

Lại có $\dfrac{AM}{AS} = \dfrac{AE}{AB}\left(\Delta AEM \sim \Delta ABS\right)$. Suy ra $\dfrac{AM}{AS} = \dfrac{AN}{AP}$ nên trong tam giác AMS có $NP / /SM$ (định lý Talet đảo). Do đó bài toán được chứng minh.

DẠNG 4

ĐƯỜNG TRÒN LIÊN QUAN ĐẾN GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

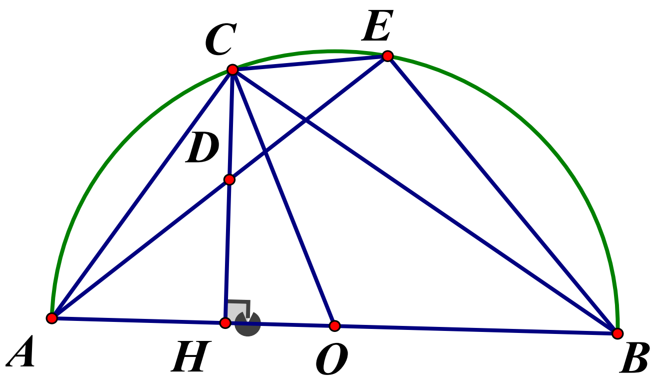
Bài 1. Trên nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$, lấy điểm C (C khác A và B), từ C kẻ CH vuông góc với $AB\left(H \in AB\right)$. Gọi D là điểm bất kỳ trên đoạn CH (D khác C và H), đường thẳng AD cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai là E

a) Chứng minh tứ giác $BHDE$ nội tiếp

b) Chứng minh $AD.EC = CD.AC$

c) Khi điểm C di động trên nửa đường tròn (C khác A, B và điểm chính giữa cung AB), xác định vị trí của điểm C sao cho chu vi tam giác COH đạt giá trị lớn nhất

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $BHDE$ nội tiếp

Ta có : $\angle BEA = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \angle BED = 90°$

Xét tứ giác $BHDE$ có : $\angle BED + \angle BHD = 90° + 90° = 180°$, mà 2 góc này đối nhau

Nên $BHDE$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh $AD.EC = CD.AC$

Ta có $\angle ACB = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \angle ABC = \angle ACH$ (cùng phụ với $\angle BCH$)

Mà $\angle AEC = \angle ABC$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AC)

$\Rightarrow \angle AEC = \angle ACH = \angle ACD$

Xét ΔACD và ΔAEC có :

$\angle CAE\ chung, \angle ACD = \angle AEC\left(cmt\right) \Rightarrow \Delta ACD \sim \Delta AEC(g.g)$

$\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{CD}{EC}$(hai cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)

Vậy $AD.EC = CD.AC(dfcm)$

c) Khi điểm C di động trên nửa đường tròn (C khác A, B và điểm chính giữa cung AB), xác định vị trí của điểm C sao cho chu vi tam giác COH đạt giá trị lớn nhất

Chu vi tam giác COH là $P_{COH} = OC + OH + CH$

Do OC bằng bán kính đường tròn đường kính AB không đổi nên

P_{COH} max $\Leftrightarrow (OH + CH)_{\max}$

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki ta có :

$\left(OH + CH\right)^2 \le 2\left(OH^2 + CH^2\right) = 2OC^2$ (Định lý Pytago)

$\Rightarrow OH + CH \le OC\sqrt{2}$

Khi đó ta có $P_{COH} = OC + OH + CH \le OC + OC\sqrt{2} = R\left(1 + \sqrt{2}\right)$

Dấu "=" xảy ra khi $OH = CH \Rightarrow \Delta OCH$ vuông cân tại H $\Rightarrow \angle COH = 45° \Rightarrow \angle COA = 45°$

Vậy để chu vi tam giác COH đạt giá trị lớn nhất bằng $R\left(1+\sqrt{2}\right)$ thì điểm C nằm trên nửa đường tròn đường kính AB sao cho $\angle COA = 45°$

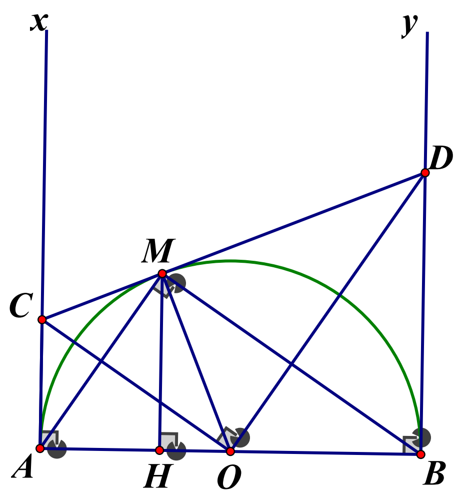
Bài 2. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, M là một điểm bất kỳ thuộc nửa đường tròn (M khác A,B). Tiếp tuyến tại M cắt các tiếp tuyến Ax, By của đường tròn (O) lần lượt tại C và D

a) Chứng minh tứ giác $ACMO$ nội tiếp

b) Chứng minh CO vuông góc với OD

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích hai tam giác ACM, BDM

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $ACMO$ nội tiếp

Vì Ax là tiếp tuyến của (O) tại A (gt) $\Rightarrow Ax \perp AB \Rightarrow \angle OAC = 90°$

Vì CD là tiếp tuyến của (O) tại M $\Rightarrow CD \perp OM \Rightarrow \angle OMC = 90°$

Xét tứ giác $ACMO$ có $\angle OAC + \angle OMC = 90° + 90° = 180°$ mà hai góc này đối nhau

Nên $ACMO$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh CO vuông góc với OD

AC, CD là tiếp tuyến của đường tròn (O) $\Rightarrow OC$ là tia phân giác của $\angle AOM$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \angle COM = \frac{1}{2}\angle AOM$

BD, CD là tiếp tuyến của đường tròn (O) $\Rightarrow OD$ là tia phân giác của $\angle BOM$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \angle DOM = \frac{1}{2}\angle BOM$

Ta có $\angle AOM + \angle BOM = 180°$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow \frac{1}{2}\angle AOM + \frac{1}{2}\angle BOM = 90° \Rightarrow \angle COM + \angle DOM = 90° \Rightarrow \angle COD = 90°$

Vậy $CO \perp DO (dfcm)$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích hai tam giác ACM, BDM

Kẻ $MH \perp AB$

Ta có $CA = CM, DB = DM$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Mà $CD = CM + DM$ nên $CD = CA + DB = AC + BD$

Trong tam giác MHO ta có $MH \le MO = R$

Trong tứ giác $ABDC$ là hình thang vuông nên $CD \ge AB = 2R$

Ta có $S_{ABDC} = \dfrac{(AC+BD).AB}{2} = \dfrac{CD.AB}{2} \ge \dfrac{AB.AB}{2} = 2R^2$

$S_{MAB} = \dfrac{MH.AB}{2} \le \dfrac{MO.AB}{2} = R^2$

$\Rightarrow S_{ACM} + S_{BDM} = S_{ABDC} - S_{MAB} \ge 2R^2 - R^2 = R^2$

Dấu bằng xảy ra khi $H \equiv O \Leftrightarrow M$ là điểm nằm chính giữa cung AB

Vậy M nằm chính giữa cung AB thì tổng diện tích tam giác ACM và BDM nhỏ nhất bằng R^2

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

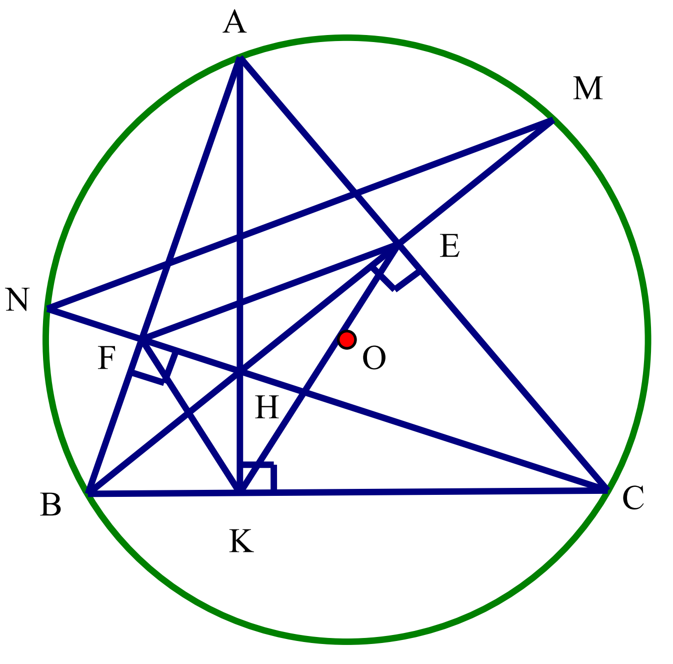
Bài 3. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$, có ba đường cao AK, BE và CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác $AEHF$ nội tiếp.

b) Hai đường thẳng BE và CF cắt đường tròn (O) lần lượt tại M và N (M khác B; N khác C). Chứng minh: $MN // EF$.

c) Giả sử hai điểm B, C cố định, điểm A di động trên cung lớn BC của đường tròn (O) (A khác B, C). Tìm vị trí của điểm A sao cho chu vi tam giác KEF đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



a. Chứng minh tứ giác $AEHF$ nội tiếp:

Xét tứ giác $AEHF$, có: $\begin{cases} HE \perp AC\ (gt) \Rightarrow \widehat{AEH} = 90^0 \\ HF \perp AB\ (gt) \Rightarrow \widehat{AFH} = 90^0 \end{cases}$.

$\Rightarrow \widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 90^0 + 90^0 = 180^0$.

Vậy tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn.

b. Hai đường thẳng BE và CF cắt đường tròn (O) lần lượt tại M và N (M khác B; N khác C). Chứng minh: $MN // EF$.

Xét tứ giác $BCEF$, có: $\begin{cases} BE \perp AC\,(gt) \Rightarrow \widehat{BEC} = 90^0 \\ CF \perp AB\,(gt) \Rightarrow \widehat{BFC} = 90^0 \end{cases}$.

Tứ giác $BCEF$ có 2 đỉnh E, F liên tiếp nhau cùng nhìn cạnh BC dưới 1 góc 90^0.

$\Rightarrow$ Tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn đường kính BC.

$\Rightarrow$ $\widehat{FEB} = \widehat{BCF}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung BF) hay $\widehat{FEB} = \widehat{BCN}$. (1)

Xét đường tròn (O) có: $\widehat{BMN} = \widehat{BCN}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung BN). (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\widehat{BMN} = \widehat{FEB}$.

Mà 2 góc này ở vị trí đồng vị $\Rightarrow MN // EF$. (điều phải chứng minh).

c. Giả sử hai điểm B, C cố định, điểm A di động trên cung lớn BC của đường tròn (O) (A khác B, C). Tìm vị trí của điểm A sao cho chu vi tam giác KEF đạt giá trị lớn nhất.

Xét đường tròn đường kính BC, có $\widehat{FBE} = \widehat{ECF}$ hay $\widehat{ABM} = \widehat{ACN}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung EF).

$\Rightarrow \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AN} \Rightarrow AM = AN$.

Mà $OM = ON = R$ nên OA là đường trung trực của đoạn thẳng MN.

$\Rightarrow$ $OA \perp MN$.

Lại có : $MN // EF$ (câu b) $\Rightarrow OA \perp EF$.

Tương tự: $OB \perp FK; OC \perp EK$.

Ta có: $S_{\Delta ABC} = S_{OEAF} + S_{OFBK} + S_{OECK} = \frac{1}{2}OA.EF + \frac{1}{2}OB.FK + \frac{1}{2}OC.EK = \frac{1}{2}R.(EF + FK + EK)$

$= \frac{1}{2}.R.C_{\Delta KEF}$ (trong đó $C_{\Delta KEF}$ là chu vi ΔKEF).

Khi đó: Chu vi ΔKEF lớn nhất khi và chỉ khi diện tích ΔABC lớn nhất.

Mà $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AK.BC$.

Theo đề bài BC cố định nên $S_{\Delta ABC}$ lớn nhất khi và chỉ khi AK lớn nhất. $\Leftrightarrow A$ là điểm chính giữa cung lớn BC.

Vậy chu vi ΔKEF lớn nhất khi và chỉ A là điểm chính giữa cung lớn BC.

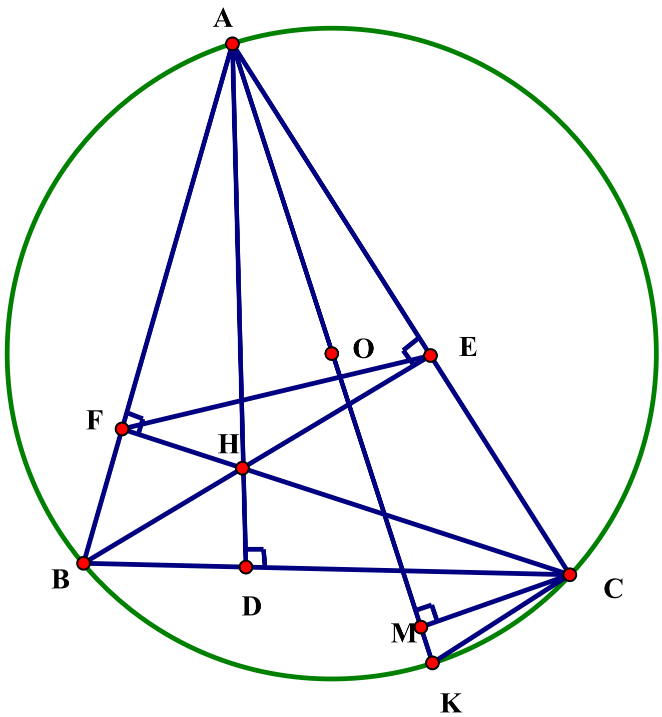
Bài 4. Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn $(O;R)$ và $AB < AC$. Ba đường cao AD, BE, CF của tam giác $ABC(D, E, F$ là chân các đường cao) đồng quy tại điểm H. Kẻ đường kính AK của đường tròn $(O;R)$. Gọi M là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AK.

a) Chứng minh rằng tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh rằng tam giác ABD đồng dạng với tam giác AKC và MD song song với BK.

c) Giả sử hai đỉnh B, C cố định trên đường tròn $(O;R)$ và đỉnh A di động trên cung lớn BC của đường tròn $(O;R)$. Chứng minh rằng đường thẳng MF luôn đi qua một điểm cố định và tìm vị trí của đỉnh A sao cho diện tích tam giác AEH lớn nhất.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{BEC} = 90^\circ$ (vì BE là đường cao của ΔABC)

$\widehat{BFC} = 90^\circ$ (vì CF là đường cao của ΔABC)

$\Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ$

Xét tứ giác $BCEF$ có $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ$ (theo chứng minh trên)

$\Rightarrow$ Đỉnh E và F là hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh BC dưới một góc không đổi 90°

Do đó tứ giác $BCEF$ nội tiếp (đpcm)

b)

* Chứng minh rằng tam giác ABD đồng dạng với tam giác AKC

Ta có + $\widehat{ACK} = 90^\circ$ (là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

+ $\widehat{ABC} = \widehat{AKC}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$)

Xét ΔABD và ΔAKC có

$\widehat{ADB} = \widehat{ACK} = 90^\circ$

$\widehat{ABC} = \widehat{AKC}$ (theo chứng minh trên)

Do đó $\Delta ABD \sim \Delta AKC$ $(g.g)$

* MD song song với BK.

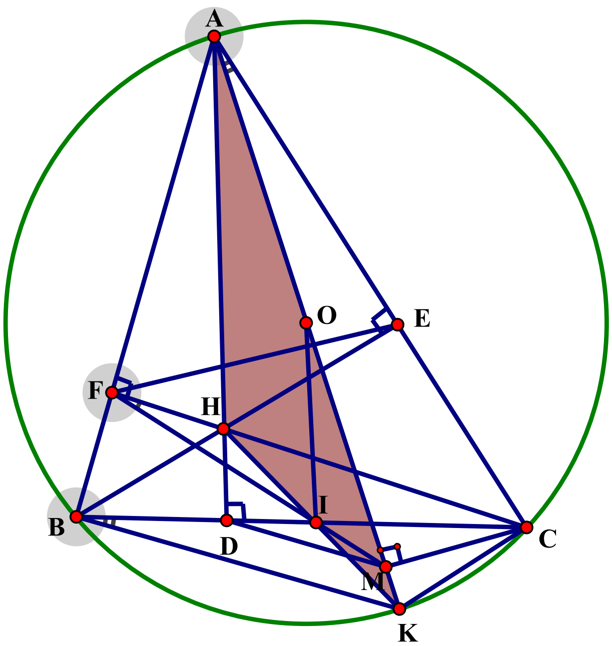
Xét đường tròn tâm (O) có $\widehat{CBK} = \widehat{KAC}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{KC}$) (1)

Chứng minh tứ giác $ACMD$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{KAC} = \widehat{CDM}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{MC}$) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{CBK} = \widehat{CDM}$ $\Rightarrow DM \parallel BK$ (đpcm)

c)



Gọi I trung điểm BC

Ta có $\widehat{ACK} = 90^\circ$ (chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow CK \perp AC$

Mà $BE \perp AC$ (BE là đường cao của ΔABC)

Suy ra $CK \parallel BE$ (1)

Tương tự $BK \parallel CF$ (2)

Xét tứ giác $CHBK$ có $\begin{cases} CK \parallel BE \\ BK \parallel CF \end{cases}$

Suy ra tứ giác $CHBK$ là hình bình hành.

Mà I trung điểm của BC

Suy ra I, H, K thẳng hàng.

Xét ΔAHK có O là trung điểm của AK

I là trung điểm của HK

Suy ra OI là đường trung bình của $\Delta AHK \Rightarrow AH = 2OI$

Do OI không đổi nên AH không đổi

Ta có $S_{\Delta AHE} = \dfrac{1}{2} AE \cdot HE$ (1)

Ta có ΔAEH vuông tại E nên $AE^2 + EH^2 = AH^2$

Áp dụng bất đẳng thức cô si ta có

$AH^2 = AE^2 + EH^2 \geq 2\sqrt{AE^2 \cdot EH^2} = 2AE \cdot HE$

$\Rightarrow AE \cdot HE \leq \dfrac{1}{2} AH^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $S_{\Delta AHE} \leq \dfrac{1}{4} AH^2$ không đổi

$\Rightarrow S_{\Delta AHE} = \dfrac{1}{4} AH^2$

Dấu "=" xảu ra khi $AE = HE \Rightarrow \widehat{HAE} = 45° \Rightarrow \widehat{ACB} = 45°$

Bài 5. Trên nửa đường tròn tâm O đường kính AB với $AB = 2022$, lấy điểm C (C khác A và B), từ C kẻ CH vuông góc $AB (H \in AB)$. Gọi D là điểm bất kì trên đoạn CH (D khác C và H), đường thẳng AD cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai E.

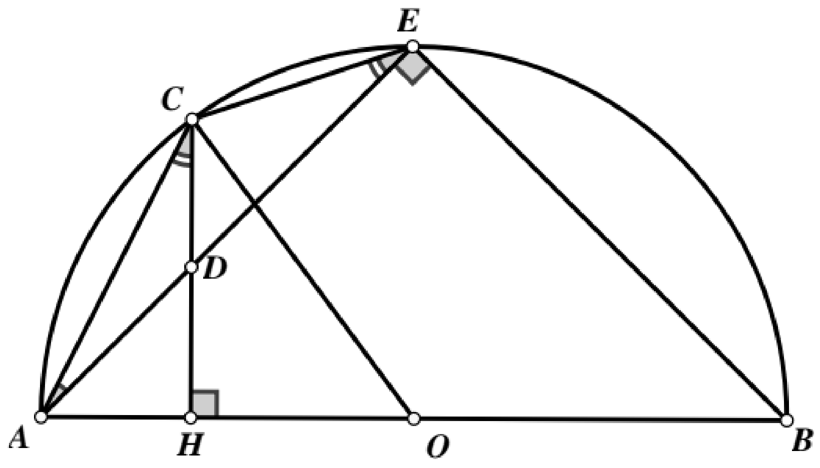
a) Chứng minh tứ giác BHDE là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh: $AD \cdot EC = CD \cdot AC$.

c) Chứng minh: $AD.AE + BH.BA = 2022^2$.

d) Khi điểm C di động trên nửa đường tròn (C khác A, B và điểm chính giữa cung AB), xác định vị trí điểm C sao cho chu vi tam giác COH đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



a) Xét tứ giác $BHDE$ có: $\widehat{DHA}=90^\circ(gt)$; $\widehat{DEB}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $\widehat{DHA}=\widehat{DEB}$ do đó tứ giác BHDE nội tiếp.

b) Xét hai tam giác ΔADC và ΔACE có: $\widehat{CAD}$ chung; $\widehat{ACD}=90^\circ-\widehat{CAH}=\widehat{CEA}$

Nên $\Delta ADC\sim\Delta ACE(g\cdot g)$ do đó $\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{AC}{CE}$ hay $AD.EC=CD.AC$.

c) HD: Dựa vào ý (1) để chứng minh $\Delta ADH\sim\Delta ABE(g.g)$ khi đó:

$AD\cdot AE+BH\cdot BA=AB\cdot AE+AB\cdot BH=AB^2=2022^2$.

d) Tam giác CHO vuông tại H nên theo định lí Pytago ta có:

$$OC^2=OH^2+HC^2=\frac{1}{2}(OH+HC)^2+\frac{1}{2}(OH-HC)^2\ge\frac{1}{2}(OH+HC)^2$$

Hay là $OH+HC\le OC\sqrt{2}$ nên $Cv_{CHO}=OC+OH+HC\le(1+\sqrt{2})OC=(1+\sqrt{2})\cdot 1011$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi điểm C nằm trên nửa đường tròn O sao cho $\widehat{ACD}=45^\circ$.

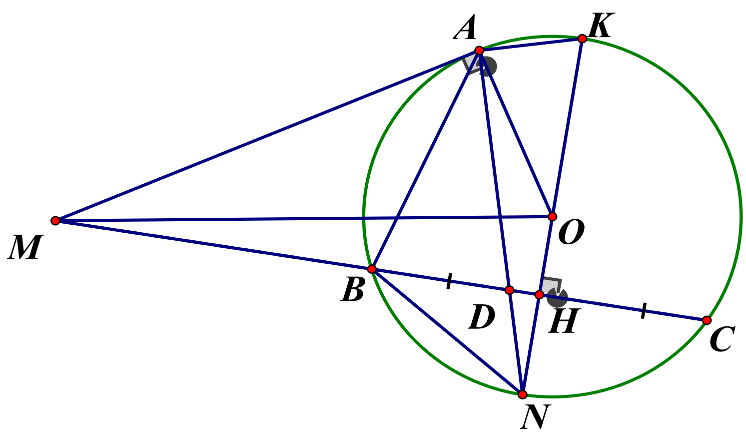
Bài 6. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn $(O;R)$, kẻ tiếp tuyến MA (A là tiếp điểm) và cát tuyến MBC không đi qua tâm O (điểm B nằm giữa hai điểm M,C). Gọi H là trung điểm BC. Đường thẳng OH cắt đường tròn $(O;R)$ tại hai điểm N,K (trong đó điểm K thuộc cung BAC). Gọi D là giao điểm của AN và BC

a) Chứng minh tứ giác $AKHD$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh $\angle NAB=\angle NBD$ và $NB^2=NA.ND$

c) Chứng minh rằng khi đường tròn $(O;R)$ và điểm M cố định đồng thời cát tuyến MBC thay đổi thì điểm D nằm trên một đường tròn cố định

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $AKHD$ là tứ giác nội tiếp

Ta có $\angle KAN=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow\angle KAD=90^\circ$

H là trung điểm của $BC\Rightarrow OH\perp BC$ (tính chất đường kính – dây cung)

$\Rightarrow\angle KHD=90^\circ$

Xét tứ giác $AKHD$ có $\angle KAD + \angle KHD = 90° + 90° = 180°$, mà hai góc này đối diện

Nên tứ giác $AKHD$ nội tiếp

b) Chứng minh $\angle NAB = \angle NBD$ và $NB^2 = NA.ND$

Vì H là trung điểm $BC \Rightarrow N$ là điểm chính giữa cung $BC \Rightarrow \overset{\frown}{BN} = \overset{\frown}{CN}$

$\Rightarrow \angle NAB = \angle NBC = \angle NBD$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Xét ΔNBD và ΔNAB có :

$\angle ANB$ chung, $\angle NBD = \angle NAB(cmt) \Rightarrow \Delta NBD \sim \Delta NAB(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{NB}{ND} = \dfrac{NA}{NB}$ (2 cặp cạnh tương ứng tỉ lệ) $\Rightarrow NB^2 = NA.ND\left(dfcm\right)$

c) Chứng minh rằng khi đường tròn $\left(O;R\right)$ và điểm M cố định đồng thời cát tuyến MBC thay đổi thì điểm D nằm trên một đường tròn cố định

$\angle MDA = \frac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{AB} + \frac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{NC} = \frac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{AB} + \frac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{NB} = \frac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{AN} \Rightarrow \Delta MAD$ cân tại M

$\Rightarrow MD = MA$ mà MA không đổi nên $D \in \left(M;MA\right)$

Bài 7. Cho đường tròn (O;R) và đường thẳng d không đi qua O cắt (O) tại hai điểm A; B. Trên tia đối của tia BA lấy điểm M; qua M kẻ hai tiếp tuyến MC; MD với đường tròn (O) (C; D là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của AB.

a) Chứng minh tứ giác OMCH nội tiếp.

b) OM cắt đường tròn (O) tại I và cắt CD tại K. Chứng minh $OK.OM = R^2$

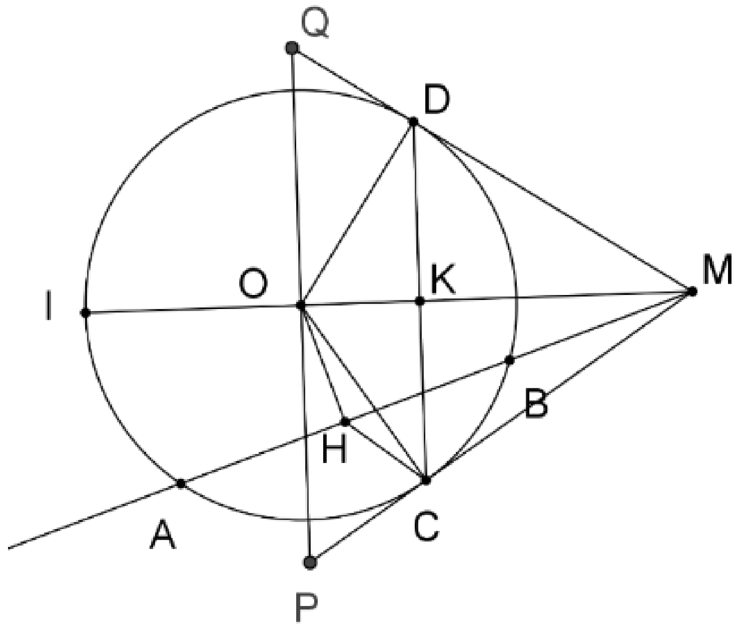
c) Đường thẳng qua O vuông góc với OM, cắt tia MC và MD lần lượt tại P và Q. Tính độ dài OM theo R sao cho diện tích tam giác MPQ nhỏ nhất.

Lời giải

a) Chứng minh tứ giác OMCH nội tiếp.

Vì H là trung điểm của dây cung AB nên $OH \perp AB \Rightarrow \widehat{OHM} = 90^\circ$

Ta có: $\widehat{OHM} = \widehat{OCM} = 90^\circ$ nên tứ giác OMCH nội tiếp.

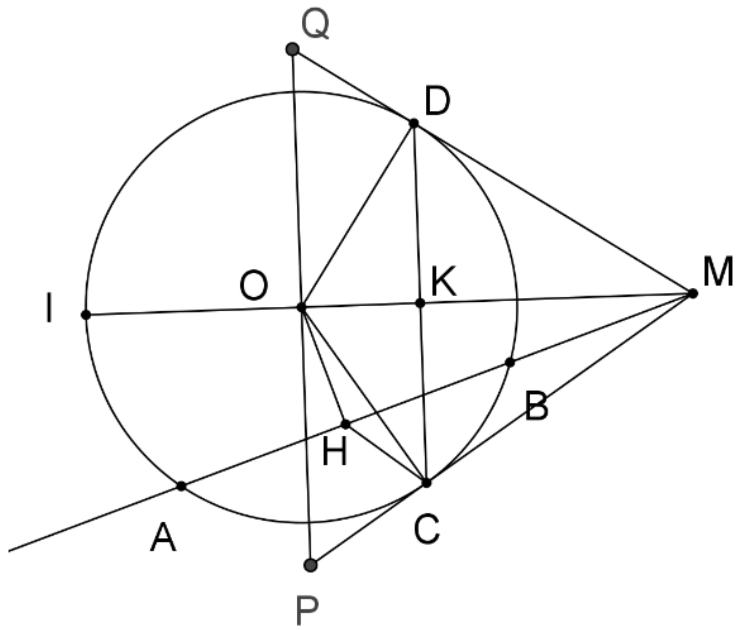


b) OM cắt đường tròn (O) tại I và cắt CD tại K. Chứng minh $OK.OM=R^2$

Tam giác ODM vuông tại D (vì $\widehat{ODM}=90^\circ$). Mặt khác: MC=MD (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau);

$OC=OD=R \Rightarrow$ OM là đường trung trực của đoạn thẳng CD $\Rightarrow OM \perp CD$. Trong tam giác vuông ODM áp dụng hệ thức $b^2=a.b'$ ta có: $OD^2=OK.OM \Leftrightarrow OK.OM=R^2$.

c) Đường thẳng qua O vuông góc với OM, cắt tia MC và MD lần lượt tại P và Q. Tính độ dài OM theo R sao cho diện tích tam giác MPQ nhỏ nhất.



Theo t/c hai tiếp tuyến cắt nhau ta có MO là tia phân giác của góc PMQ, mặt khác $MO \perp PQ$ nên tam giác PMQ cân tại M $\Rightarrow PQ = 2OP$.

Ta có $S_{PMQ}=\frac{1}{2}MO.PQ=MO.OP$. Trong tam giác vuông OMQ ta có:

$\frac{1}{OD^2}=\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OM^2}\Leftrightarrow\frac{1}{R^2}=\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OM^2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si :

$\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OM^2}\geq 2\sqrt{\frac{1}{OP^2}.\frac{1}{OM^2}}=\frac{2}{OP.OM}\Leftrightarrow\frac{1}{R^2}\geq\frac{2}{S_{PMQ}}$

$S_{PMQ}\geq 2R^2$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{OM^2}=\frac{1}{OP^2}\\ OM.OP=2R^2\end{cases}\Leftrightarrow OM=OP=R\sqrt{2}$.

Vậy S_{PMQ} đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow OM=R\sqrt{2}$.

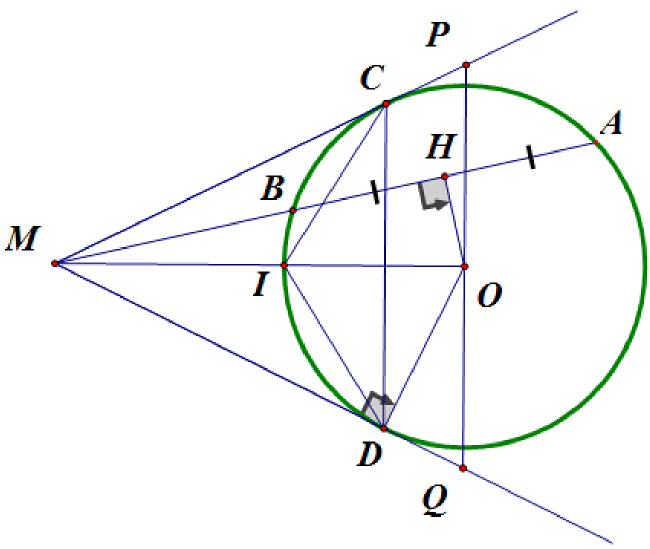
Bài 8. Cho đường tròn (O,R) và đường thẳng d không đi qua O cắt đường tròn tại hai điểm A, B. Lấy một điểm M trên tia đối của tia BA kẻ hai tiếp tuyến MC, MD với đường tròn (C, D là tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của AB.

a) Chứng minh rằng M, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn

b) Đoạn OM cắt đường tròn tại I. CMR I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MCD.

c) Đường thẳng qua O, vuông góc với OM cắt các tia MC, MD theo thứ tự tại P, Q. Tìm vị trí của điểm M trên d sao cho diện tích tam giác MPQ bé nhất.

Lời giải



a. Do MD là tiếp tuyến của (O) => $MD\perp OD$ => $\widehat{MDO}=90^0$

Do H là trung điểm của AB; dây AB không đi qua tâm O

nên $OH\perp AB$; => $\widehat{MHO}=90^0$

Xét tứ giác MHOD có $\widehat{MDO}+\widehat{MHO}=90^0+90^0=180^0$

⇨ tứ giác MHOD nội tiếp

⇨ M, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

b. Do MC, MD là tiếp tuyến của (O)

=>MO là tia phân giác của $\widehat{CMD}$ => MI là tia phân giác của $\widehat{CMD}$ (*)

OI là tia phân giác của $\widehat{COD}$ => $\widehat{COI} = \widehat{DOI}$ hay $\overset{\frown}{CI} = \overset{\frown}{DI}$ (1)

Mà $\widehat{MCI} = \dfrac{1}{2}\text{sd}\overset{\frown}{CI}$; $\widehat{DCI} = \dfrac{1}{2}sd\overset{\frown}{DI}$ (2)

Từ 1, 2 => $\widehat{MCI} = \widehat{DCI}$ => CI là phân giác của $\widehat{MCD}$ (**)

Từ (*), (**) => I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MCD

c. Ta có $S_{MPQ} = \dfrac{1}{2}MO.PQ = \dfrac{1}{2}.MO.2.OP = MO.OP$

Mà $\Delta MCO \sim \Delta MOP(g.g)$

$=> \dfrac{MO}{MP} = \dfrac{CO}{OP} => MO.OP = MP.CO$

$=> S_{MPQ} = MP.\text{CO} = (MC + CP).\text{CO} \geq 2\sqrt{MC.CP}.\text{CO} = 2OC^2 = 2R^2$

Dấu “ =” xảy ra khi MC = CP $\Leftrightarrow \Delta MOP$ vuông cân

$\Leftrightarrow \widehat{PMO} = 45^0 \Leftrightarrow \widehat{CMD} = 90^0$

⇔ MCOD là hình vuông cạnh R <=> OM = R$\sqrt{2}$ .Vậy diện tích tam giác MPQ bé nhất khi OM = R$\sqrt{2}$