

Chương 3

CĂN BẬC HAI VÀ CĂN BẬC BA

Bài 1

CĂN BẬC HAI



TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 Căn bậc hai

Căn bậc hai của số thực không âm là a là số thực x sao cho $x^2 = a$.

○ Nhận xét.

- ☑ Số âm không có căn bậc hai;
- ☑ Số 0 có một căn bậc hai duy nhất là 0;
- ☑ Số dương a có đúng hai căn bậc hai đối nhau là \sqrt{a} (căn bậc hai số học của a) và $-\sqrt{a}$.

⚠ Tính căn bậc hai của một số $a > 0$, chỉ cần tính \sqrt{a} . Có thể dễ dàng làm điều này bằng cách sử dụng MTCT.

⚠ ☑ Phép toán tìm căn bậc hai số học của số không âm gọi là phép khai căn bậc hai hay phép khai phương (gọi tắt là khai phương)

☑ Với hai số a, b không âm, ta có

— Nếu $a < b$ thì $\sqrt{a} < \sqrt{b}$;

— Nếu $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ thì $a < b$.

2 Căn thức bậc hai

\sqrt{A} xác định khi A lấy giá trị không âm và ta thường viết là $A \geq 0$. Ta nói $A \geq 0$ là **điều kiện xác định** (hay điều kiện có nghĩa của) \sqrt{A} .

⚠ Tương tự như căn bậc hai của một số thực không âm, với A là một biểu thức, ta cũng có:

☑ Với $A \geq 0$ ta có $\sqrt{A} \geq 0$; $(\sqrt{A})^2 = A$;



CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm căn bậc hai của một số

🔗 **Ví dụ 1.** Tính

a) $\sqrt{81}$;

b) $\sqrt{16}$;

c) $-\sqrt{1,21}$;

d) $-\sqrt{0,01}$;

e) $\sqrt{0,81}$;

f) $\sqrt{\frac{9}{25}}$;

g) $\sqrt{\frac{4}{25}}$;

h) $-\sqrt{\frac{1}{4}}$;

Lời giải.

a) Vì $9^2 = 81$ nên $\sqrt{81} = 9$.

b) Vì $4^2 = 16$ nên $\sqrt{16} = 4$.

c) Vì $1,1^2 = 1,21$ nên $-\sqrt{1,21} = -1,1$.

d) Vì $(0,1)^2 = 0,01$ nên $-\sqrt{0,01} = -0,1$.

e) Vì $0,9^2 = 81$ nên $\sqrt{0,81} = 0,9$.

f) Vì $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$ nên $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$.

g) Vì $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$ nên $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$.

h) Vì $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ nên $-\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$.

□

Ví dụ 2. Tìm căn bậc hai của

a) 121;

b) 144;

c) 64;

d) $\frac{9}{16}$;

e) 0,25;

f) $\frac{4}{9}$;

g) 1,44;

h) $\left(-\frac{2}{5}\right)^2$.

Lời giải.

a) Ta có $\sqrt{121} = 11$ nên 121 có căn bậc hai là 11 và -11 .

b) Ta có $\sqrt{144} = 12$ nên 144 có căn bậc hai là 12 và -12 .

c) Ta có $\sqrt{64} = 8$ nên 64 có căn bậc hai là 8 và -8 .

d) Ta có $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$ nên $\frac{9}{16}$ có căn bậc hai là $\frac{3}{4}$ và $-\frac{3}{4}$.

e) Ta có $\sqrt{0,25} = 0,5$ nên 0,25 có căn bậc hai là 0,5 và $-0,5$.

f) Ta có $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ nên $\frac{4}{9}$ có căn bậc hai là $\frac{2}{3}$ và $-\frac{2}{3}$;

g) Ta có $\sqrt{1,44} = 1,2$ nên 1,44 có căn bậc hai là 1,2 và $-1,2$;

h) Ta có $\sqrt{\left(-\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{2}{5}$ nên $\left(-\frac{2}{5}\right)^2$ có hai căn bậc hai là $\frac{2}{5}$ và $-\frac{2}{5}$.

□

Ví dụ 3. Tìm căn bậc hai của

$$256; 0,04; \frac{121}{36}; 11; 1,6; -0,09.$$

Lời giải.

☑ Căn bậc hai của 256 là ± 16 ;

☑ Căn bậc hai của 0,04 là $\pm 0,2$.

☑ Căn bậc hai của $\frac{121}{36}$ là $\pm \frac{11}{6}$.

☑ Căn bậc hai của 11 là $\pm\sqrt{11}$;

☑ Căn bậc hai của 1,6 là $\pm\sqrt{1,6}$;

☑ Do $-0,09 < 0$ nên $-0,09$ không có căn bậc hai.

□

❖ **Ví dụ 4.** Tính giá trị của biểu thức: $\sqrt{0,09} + 7 \cdot \sqrt{0,36} - 3 \cdot \sqrt{2,25}$.

☞ **Lời giải.**

Ta có: $\sqrt{0,09} + 7 \cdot \sqrt{0,36} - 3 \cdot \sqrt{2,25} = 0,3 + 7 \cdot 0,6 - 3 \cdot 1,5 = 0,3 + 4,2 - 4,5 = 0$. □

❖ **Ví dụ 5.** Giá trị của biểu thức sau là số vô tỷ hay hữu tỷ: $\sqrt{\left(\sqrt{1\frac{9}{16}} - \sqrt{\frac{9}{16}}\right) \cdot 18}$?

☞ **Lời giải.**

Ta có: $\sqrt{\left(\sqrt{1\frac{9}{16}} - \sqrt{\frac{9}{16}}\right) \cdot 18} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{25}{16}} - \sqrt{\frac{9}{16}}\right) \cdot 18} = \sqrt{\left(\frac{5}{4} - \frac{3}{4}\right) \cdot 18} = \sqrt{9} = 3$.

Vậy giá trị của biểu thức đã cho là một số hữu tỷ, hơn nữa còn là một số tự nhiên. □

📁 Dạng 2. Tìm điều kiện xác định của biểu thức chứa căn. Tính giá trị của biểu thức

☑ \sqrt{A} xác định khi $A \geq 0$.

☑ $\frac{1}{\sqrt{A}}$ xác định khi $A > 0$.

❖ **Ví dụ 6.** Tìm điều kiện xác định của mỗi căn thức sau:

a) $\sqrt{5 - 2x}$;

b) $\sqrt{\frac{1}{x^2 - 4x + 4}}$;

c) $\sqrt{25 - x^2}$;

d) $\sqrt{\frac{1}{x^2 - 100}}$.

☞ **Lời giải.**

a) Điều kiện xác định của căn thức là $5 - 2x \geq 0$ hay $x \leq \frac{5}{2}$.

b) Điều kiện xác định của căn thức là $(x - 2)^2 > 0$ hay $x \neq 2$.

c) Điều kiện xác định của căn thức là $25 - x^2 \geq 0$

$$x^2 \leq 25$$

$$|x| \leq 5$$

$$-5 \leq x \leq 5.$$

d) Điều kiện xác định của căn thức là $x^2 - 100 > 0$

$$x^2 > 100$$

$$|x| > 10$$

$$x > 10 \text{ hoặc } x < -10.$$

□

❖ **Ví dụ 7.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để biểu thức $M = \sqrt{x+4} + \sqrt{2-x}$ xác định?

☞ **Lời giải.**

M xác định khi $\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x \geq -4 \\ x \leq 2. \end{cases}$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy có 7 giá trị nguyên của x để biểu thức $M = \sqrt{x+4} + \sqrt{2-x}$ có nghĩa. □

❖ **Ví dụ 8.** Xét căn thức $\sqrt{2x+1}$.

a) Tìm điều kiện xác định của căn thức.

b) Tính giá trị của căn thức đã cho tại $x = 0$ và $x = 4$.

Lời giải.

a) Điều kiện xác định của căn thức là $2x + 1 \geq 0$ hay $x \geq -\frac{1}{2}$.

b) Tại $x = 0$ (thoả mãn điều kiện xác định) căn thức có giá trị là $\sqrt{2 \cdot 0 + 1} = 1$. Tại $x = 4$ (thoả mãn điều kiện xác định) căn thức có giá trị là $\sqrt{2 \cdot 4 + 1} = 3$.

□

Ví dụ 9. Cho biểu thức $A = \sqrt{5 - 2x}$.

a) Với giá trị nào của x thì biểu thức A xác định?

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = -2$ và khi $x = 3$.

Lời giải.

a) Biểu thức A xác định khi $5 - 2x \geq 0$ hay $2x \leq 5$ hay $x \leq \frac{5}{2}$.

b) Khi $x = -2$, ta có $A = \sqrt{5 - 2 \cdot (-2)} = \sqrt{9} = 3$.

Ta thấy $x = 3 > \frac{5}{2}$ nên A không xác định tại $x = 3$.

□

Ví dụ 10. Với giá trị nào của x thì biểu thức $A = \sqrt{3x + 6}$ xác định? Tính giá trị của A khi $x = 5$ (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải.

Biểu thức $A = \sqrt{3x + 6}$ xác định khi $3x + 6 \geq 0$ hay $x \geq -2$.

Với $x = 5$ ta có $A = \sqrt{3 \cdot 5 + 6} = \sqrt{21} \approx 4,58$.

□

Dạng 3. Bài toán so sánh, bài toán tìm x

✓ Với $a, b \geq 0$, ta có:

$$\text{Nếu } a < b \text{ thì } \sqrt{a} < \sqrt{b}.$$

✓ Với $a \geq 0$, ta có:

⊙ $x^2 = a$ khi $x = \pm\sqrt{a}$.

⊙ $\sqrt{x} = a$ khi $x = a^2$.

⊙ $\sqrt{x} < a$ khi $0 \leq x < a^2$.

Ví dụ 11. Không sử dụng MTCT, hãy so sánh:

a) $\sqrt{3}$ và $\sqrt{5}$;

b) 3 với $\sqrt{10}$;

c) 8 và $\sqrt{65}$.

Lời giải.

a) Ta có $3 < 5$ nên $\sqrt{3} < \sqrt{5}$.

b) Ta có $10 > 9$ nên $\sqrt{10} > \sqrt{9}$ hay $\sqrt{10} > 3$.

c) Ta có $64 < 65$ nên $\sqrt{64} < \sqrt{65}$ hay $8 < \sqrt{65}$.

□

❖ **Ví dụ 12.** Không sử dụng MTCT, hãy so sánh $\sqrt{15} - 1$ và $\sqrt{10}$.

🗨 **Lời giải.**

Ta có $\sqrt{15} - 1 < \sqrt{16} - 1 = 4 - 1 = 3$ và $\sqrt{10} > \sqrt{9} = 3$ nên $\sqrt{15} - 1 < \sqrt{10}$. □

❖ **Ví dụ 13.** Với $a < 0$ thì số nào lớn hơn trong hai số $\sqrt{-a}$ và $\sqrt{-2a}$?

🗨 **Lời giải.**

Ta có $-1 > -2$ nên $-a < -2a$ (vì $a < 0$). Do đó $\sqrt{-a} < \sqrt{-2a}$. □

❖ **Ví dụ 14.** Tìm x biết

a) $3x^2 = 0,75$;

b) $2\sqrt{3x} = 12$;

c) $\frac{1}{2}\sqrt{5x} < 10$.

🗨 **Lời giải.**

a) Ta có $3x^2 = 0,75$ suy ra $x^2 = 0,25$. Do đó $x = \pm\sqrt{0,25} = \pm 0,5$.

b) Điều kiện xác định: $x \geq 0$.

Ta có $2\sqrt{3x} = 12$

$$\sqrt{3x} = 6$$

$$3x = 36$$

$$x = 12 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

c) Điều kiện xác định: $x \geq 0$.

Ta có $\frac{1}{2}\sqrt{5x} < 10$

$$\sqrt{5x} < 20$$

$$5x < 400$$

$$x < 80.$$

$$\text{Vậy } 0 \leq x < 80.$$
 □

❖ **Ví dụ 15.** Tìm x , biết

a) $x^2 = \frac{16}{9}$;

b) $x^2 = 4 - 2\sqrt{3}$;

c) $(x - 1)^2 = \frac{1}{9}$;

d) $x^2 + 1 = 6 - 2\sqrt{6}$.

🗨 **Lời giải.**

a) Ta có $x^2 = \frac{16}{9}$

$$x^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$x = \frac{4}{3} \text{ hoặc } x = -\frac{4}{3}.$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right\}.$$

b) Ta có $x^2 = 4 - 2\sqrt{3}$

$$x^2 = (\sqrt{3} - 1)^2$$

$$x = \sqrt{3} - 1 \text{ hoặc } x = 1 - \sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy } x \in \{\sqrt{3} - 1; 1 - \sqrt{3}\}.$$

c) Ta có $(x - 1)^2 = \frac{1}{9}$

$$(x - 1)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$x - 1 = \frac{1}{3} \text{ hoặc } x - 1 = -\frac{1}{3}$$

$$x = \frac{4}{3} \text{ hoặc } x = \frac{2}{3}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{-\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right\}.$$

d) $x^2 + 1 = 6 - 2\sqrt{6}$

$$x^2 = 5 - 2\sqrt{6}$$

$$x^2 = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$$

$$x = \sqrt{3} - \sqrt{2} \text{ hoặc } x = \sqrt{2} - \sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy } x \in \{\sqrt{2} - \sqrt{3}; \sqrt{3} - \sqrt{2}\}.$$
 □

❖ **Ví dụ 16.** Tính tổng các giá trị của x thỏa mãn đẳng thức $\sqrt{x^2 + 25} = 13$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\sqrt{x^2 + 25} = 13$

$$x^2 + 25 = 169$$

$$x^2 = 169 - 25$$

$$x^2 = 144$$

$$x = \pm 12.$$

Vậy tổng các giá trị của x thỏa mãn đẳng thức đã cho là $(-12) + 12 = 0$. □

📁 Dạng 4. Bài toán thực tế

❖ **Ví dụ 17.** Trong một thí nghiệm, một vật rơi tự do từ độ cao 80 m so với mặt đất. Biết quãng đường dịch chuyển được của vật đó tính theo đơn vị mét được cho bởi công thức $h = 5t^2$ với t là thời gian vật đó rơi, tính theo đơn vị giây ($t > 0$). Hỏi sau bao nhiêu lâu kể từ lúc rơi thì vật đó chạm đất?

☞ **Lời giải.**

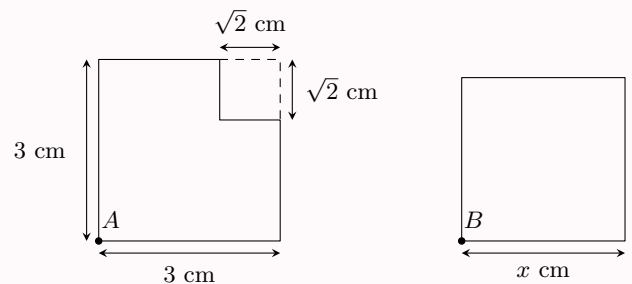
Khi vật chạm đất thì quãng đường dịch chuyển được của vật đó là 80 m.

Ta có $80 = 5t^2$ hay $t^2 = 16$. Do đó $t = \sqrt{16} = 4$ hoặc $t = -\sqrt{16} = -4$.

Vì $t > 0$ nên $t = 4$. Vậy sau 4 giây kể từ lúc rơi thì vật đó chạm đất. □

❖ **Ví dụ 18.**

Biết rằng hình A và hình vuông B trong Hình 2 có diện tích bằng nhau. Tính độ dài cạnh x của hình vuông B.



☞ **Lời giải.**

Diện tích hình A là $3^2 - \sqrt{2}^2 = 7 \text{ cm}^2$.

Theo đề ta có diện tích hình B cũng là 7 cm^2 .

Suy ra $x = \sqrt{7} \text{ cm}$. □

❖ **Ví dụ 19.** Vận dụng Trở lại tình huống mở đầu.

Trong Vật lí, quãng đường S (tính bằng mét) của một vật rơi tự do được cho bởi công thức $S = 4,9t^2$, trong đó t là thời gian rơi (tính bằng giây). Hỏi sau bao nhiêu giây thì vật sẽ chạm đất nếu được thả rơi tự do từ độ cao 122,5 mét?

- Viết công thức tính thời gian t (giây) cần thiết để vật rơi được quãng đường S (mét).
- Sử dụng công thức tìm được trong câu a, hãy trả lời câu hỏi trong tình huống mở đầu.

☞ **Lời giải.**

a) Từ công thức $S = 4,9t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{S}{4,9} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{S}{4,9}}$ (vì $t > 0$).

b) Vật đang ở độ cao 122,5 rơi chạm đất thì vật đã rơi được quãng đường là $S = 122,5$ (m).

Thay $S = 122,5$ m vào phương trình $t = \sqrt{\frac{S}{4,9}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{122,5}{4,9}} = 5$ (s).

Vậy sau 5 (s) thì vật rơi chạm đất.

□

❖ **Ví dụ 20.** Để lái xe an toàn khi đi qua đoạn đường có dạng cung tròn, người lái cần biết tốc độ tối đa cho phép là bao nhiêu. Vì thế, ở những đoạn đường đó thường có bảng chỉ dẫn cho tốc độ tối đa cho phép của ô tô. Tốc độ tối đa cho phép v (m/s) được tính bởi công thức $v = \sqrt{rg\mu}$, trong đó r (m) là bán kính của cung đường, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, $\mu = 0,12$ là hệ số ma sát trượt của đường. Tính tốc độ tối đa cho phép v (m/s) để lái xe an toàn khi đi qua đoạn đường có dạng cung tròn với bán kính $r = 400$ m (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

🗨️ Lời giải.

Ta có công thức:

$$v = \sqrt{rg\mu}$$

Thay: $r = 400$, $g = 9,8$, và $\mu = 0,12$, ta có:

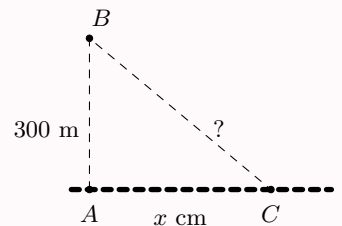
$$v = \sqrt{400 \cdot 9,8 \cdot 0,12} \approx 22 \text{ m/s}$$

Vậy tốc độ tối đa cho phép là khoảng 22m/s.

□

❖ **Ví dụ 21.** Một trạm phát sóng được đặt ở vị trí B cách đường tàu một khoảng $AB = 300$ (m). Đầu tàu đang ở vị trí C , cách vị trí A một khoảng $AC = x$ (m).

- Viết biểu thức biểu thị khoảng cách từ trạm phát sóng đến đầu tàu.
- Tính khoảng cách trên khi $x = 400$, $x = 1000$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của mét).



🗨️ Lời giải.

- Biểu thức biểu thị khoảng cách từ trạm phát sóng đến đầu tàu là $BC = \sqrt{90\,000 + x^2}$.
- Với $x = 400$ thì $BC = \sqrt{90\,000 + 400^2} = 500$ (m).
Với $x = 1000$ thì $BC = \sqrt{90\,000 + 1000^2} \approx 1044$ (m).

□

📁 Dạng 5. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất có chứa căn

❖ **Ví dụ 22.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

a) $A = 5 + \sqrt{x^2 - 3x + 9}$;

b) $B = \sqrt{x^2 - 7x + 5}$;

c) $C = \sqrt{x^2 - 7x + 6} - 25$;

d) $D = 8 + \sqrt{x^2 + 3x - 4}$.

🗨️ Lời giải.

Ta có

a) $A = 5 + \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{4}} \geq 5 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$.

Vậy $A_{\min} = 5 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

b) $B = \sqrt{\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{29}{4}} \geq 0$.

Đẳng thức xảy ra khi $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{29}{4}$.

Vậy $B_{\min} = 0$.

$$c) C = \sqrt{\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}} - 25 \geq -25.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}.$$

$$\text{Vậy } C_{\min} = -25.$$

$$d) D = 8 + \sqrt{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}} \geq 8.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -4. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } A_{\min} = 8.$$

❖ **Ví dụ 23.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$a) A = 15 - \sqrt{x^2 - 4x + 13};$$

$$b) B = 12 - \sqrt{x^2 - 2x + 1};$$

$$c) C = 11 - \sqrt{x^2 + 7x + 4}.$$

☞ **Lời giải.**

Ta có

$$a) A = 15 - \sqrt{(x-2)^2 + 9} \leq 5 - \sqrt{9} = 12.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

$$\text{Vậy } A_{\max} = 12.$$

$$b) B = 12 - \sqrt{(x-1)^2} \leq 12.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

$$\text{Vậy } B_{\max} = 12.$$

$$c) C = 11 - \sqrt{\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}} \leq 11.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -6. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } A_{\max} = 11.$$



BÀI TẬP VẬN DỤNG

❖ **Bài 1.** Tính

$$a) \sqrt{100};$$

$$b) \sqrt{225};$$

$$c) \sqrt{2,25};$$

$$d) \sqrt{\frac{16}{225}}.$$

☞ **Lời giải.**

$$a) \sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10;$$

$$b) \sqrt{225} = \sqrt{15^2} = 15;$$

$$c) \sqrt{2,25} = \sqrt{1,5^2} = 1,5;$$

$$d) \sqrt{\frac{16}{225}} = \sqrt{\left(\frac{4}{15}\right)^2} = \frac{4}{15}.$$

❖ **Bài 2.** Tìm căn bậc hai của mỗi số sau (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai):

$$a) 24,5;$$

$$b) \frac{9}{10}.$$

☞ **Lời giải.**

$$a) \text{ Ta có } \sqrt{24,5} \approx 4,95 \text{ nên } 24,5 \text{ có căn bậc hai là } 4,95 \text{ và } -4,95.$$

$$b) \text{ Ta có } \sqrt{\frac{9}{10}} \approx 0,95 \text{ nên } \frac{9}{10} \text{ có căn bậc hai là } 0,95 \text{ và } -0,95.$$

◀▶ **Bài 3.** Tìm căn bậc hai của

a) 289;

b) 0,81;

c) 1,69;

d) $\frac{49}{121}$.

☞ **Lời giải.**

a) Căn bậc hai của 289 là $\sqrt{289} = 17$ và $-\sqrt{289} = -17$.

b) Căn bậc hai của 0,81 là $\sqrt{0,81} = 0,9$ và $-\sqrt{0,81} = -0,9$.

c) Căn bậc hai của 1,69 là $\sqrt{1,69} = 1,3$ và $-\sqrt{1,69} = -1,3$.

d) Căn bậc hai của $\frac{49}{121}$ là $\sqrt{\frac{49}{121}} = \frac{7}{11}$ và $-\sqrt{\frac{49}{121}} = -\frac{7}{11}$. □

◀▶ **Bài 4.** Tìm căn bậc hai của mỗi số sau

a) 16;

b) 2500;

c) $\frac{4}{81}$;

d) 0,09.

☞ **Lời giải.**

a) Căn bậc hai của 16 là ± 4 ;

b) Căn bậc hai của 2500 là ± 50 ;

c) Căn bậc hai của $\frac{4}{81}$ là $\pm \frac{2}{9}$;

d) Căn bậc hai của 0,09 là $\pm 0,3$. □

◀▶ **Bài 5.** Sử dụng máy tính cầm tay, tính (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư)

a) $\sqrt{54}$;

b) $\sqrt{24,68}$;

c) $\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}$.

☞ **Lời giải.**

a) $\sqrt{54} \approx 7,3485$;

b) $\sqrt{24,68} \approx 4,9679$;

c) $\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7} \approx 7,3313$. □

◀▶ **Bài 6.** Tính giá trị của các biểu thức

a) $(\sqrt{5,25})^2 + (-\sqrt{1,75})^2$;

b) $(\sqrt{102})^2 - \sqrt{98^2}$.

☞ **Lời giải.**

a) $(\sqrt{5,25})^2 + (-\sqrt{1,75})^2 = 5,25 + 1,75 = 7$;

b) $(\sqrt{102})^2 - \sqrt{98^2} = 102 - 98 = 4$. □

◀▶ **Bài 7.** Tính:

a) $(-\sqrt{2})^2 - \sqrt{25}$;

b) $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 \cdot \sqrt{0,09}$.

☞ **Lời giải.**

a) $(-\sqrt{2})^2 - \sqrt{25} = 2 - 5 = -3$;

b) $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 \cdot \sqrt{0,09} = \frac{2}{3} \cdot 0,3 = 0,2$. □

◊ **Bài 8.** Tìm x , biết:

a) $x^2 = 121$;

b) $4x^2 = 9$;

c) $x^2 = 10$.

☞ **Lời giải.**

a) $x^2 = 121$

$x = \pm\sqrt{121}$

$x = \pm 11$.

b) $4x^2 = 9$

$x^2 = \frac{9}{4}$

$x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}}$

$x = \pm\frac{3}{2}$.

c) $x^2 = 10$

$x = \pm\sqrt{10}$.

□

◊ **Bài 9.** Tìm x biết:

a) $5x^2 = 80$;

b) $2\sqrt{x} = 1$;

c) $\sqrt{3x} \leq 6$.

☞ **Lời giải.**

a) $x = \pm 4$;

b) $x = \frac{1}{4}$;

c) $0 \leq x \leq 12$.

□

◊ **Bài 10.** Tìm các giá trị của x sao cho $\sqrt{x} > x$.

☞ **Lời giải.**

Với điều kiện $x > 0$, ta có:

$$\sqrt{x} > x$$

$$x > x^2$$

$$x - x^2 > 0$$

$$x(1 - x) > 0$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1 - x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x < 1 \end{cases}$$

$$0 < x < 1.$$

□

◊ **Bài 11.** So sánh:

a) $\sqrt{\frac{4}{3}}$ và $\sqrt{\frac{3}{4}}$;

b) $\sqrt{0,48}$ và $0,7$.

☞ **Lời giải.**

a) Ta có $\frac{4}{3} > \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{4}{3}} > \sqrt{\frac{3}{4}}$. Vậy $\sqrt{\frac{4}{3}} > \sqrt{\frac{3}{4}}$.

b) Ta có $0,49 > 0,48 \Rightarrow \sqrt{0,49} > \sqrt{0,48} \Rightarrow 0,7 > \sqrt{0,48}$. Vậy $0,7 > \sqrt{0,48}$.

□

◀ **Bài 12.** Không dùng máy tính hoặc bảng số, hãy so sánh

a) $\sqrt{26} + 3$ và $\sqrt{63}$;

b) $\frac{1}{2}$ và $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

☞ **Lời giải.**

a) $\sqrt{26} + 3 > \sqrt{63}$;

b) $\frac{1}{2} > \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

◀ **Bài 13.** Tìm điều kiện xác định cho mỗi căn thức bậc hai sau

a) $\sqrt{x-6}$;

b) $\sqrt{17-x}$;

c) $\sqrt{\frac{1}{x}}$

☞ **Lời giải.**

a) $\sqrt{x-6}$ xác định khi $x-6 \geq 0$ hay $x \geq 6$;

b) $\sqrt{17-x}$ xác định khi $17-x \geq 0$ hay $x \leq 17$;

c) $\sqrt{\frac{1}{x}}$ xác định khi $\frac{1}{x} \geq 0$ hay $x > 0$.

◀ **Bài 14.** Tìm điều kiện xác định cho mỗi căn thức bậc hai sau

a) $\sqrt{4x}$;

b) $\sqrt{x-3}$;

c) $\sqrt{x+1}$;

d) $\sqrt{x^2+1}$.

☞ **Lời giải.**

a) $\sqrt{4x}$ Xác định khi $4x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$. Vậy điều kiện xác định là $x \geq 0$.

b) $\sqrt{x-3}$ Xác định khi $x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$. Vậy điều kiện xác định là $x \geq 3$.

c) $\sqrt{x+1}$ Xác định khi $x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$, Vậy điều kiện xác định là $x \geq -1$.

d) $\sqrt{x^2+1}$ Luôn xác định với mọi x vì $x^2+1 > 0$.

◀ **Bài 15.** Tìm điều kiện xác định của $\sqrt{x+10}$ và tính giá trị của căn thức tại $x = -1$.

☞ **Lời giải.**

Điều kiện xác định là $x+10 \geq 0 \Rightarrow x \geq -10$.

Thay $x = -1$ vào $\sqrt{x+10} \Rightarrow \sqrt{-1+10} = \sqrt{9} = |3| = 3$.

◀ **Bài 16.** Tìm x để các căn thức bậc hai sau xác định

a) $\sqrt{\frac{2}{9-x}}$;

b) $\sqrt{x^2+2x+1}$;

c) $\sqrt{x^2-4x}$.

☞ **Lời giải.**

a) $x < 9$;

b) $x \in \mathbb{R}$;

c) $x \leq 0$ hoặc $x \geq 4$.

⇨ **Bài 17.** Tìm x để các biểu thức sau xác định

a) $\sqrt{9-x^2}$;

b) $\sqrt{\frac{1}{x^2-4}}$;

c) $\frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}}$.

☞ **Lời giải.**

a) $-3 \leq x \leq 3$;

b) $x < -2$ hoặc $x > 2$;

c) $0 \leq x \neq 9$.

□

⇨ **Bài 18.** Cho biểu thức $P = \sqrt{b^2 - 4ac}$. Tính giá trị của P khi

a) $a = 3, b = 10, c = 3$;

b) $a = 2, b = 6, c = 5$.

☞ **Lời giải.**

a) Với $a = 3, b = 10, c = 3$, ta có $b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 100 - 36 = 64$.
 Khi đó, $P = \sqrt{64} = \sqrt{8^2} = 8$.

b) Với $a = 2, b = 6, c = 5$, ta có $b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 36 - 40 = -4$. Vì $-4 < 0$ nên biểu thức P không xác định tại $a = 2, b = 6, c = 5$.

□

⇨ **Bài 19.** Cho biểu thức $P = \sqrt{a^2 - b^2}$. Tính giá trị của P khi:

a) $a = 5, b = 0$;

b) $a = 5, b = -5$;

c) $a = 2, b = -4$.

☞ **Lời giải.**

a) Với $a = 5, b = 0$ ta có $P = \sqrt{5^2 - 0^2} = \sqrt{5^2} = 5$.

b) Với $a = 5, b = -5$ ta có $P = \sqrt{5^2 - (-5)^2} = \sqrt{0} = 0$.

c) Với $a = 2, b = -4$ ta có $2^2 - (-4)^2 = -12 < 0$ nên biểu thức A không xác định tại $a = 2; b = -4$.

□

⇨ **Bài 20.** Tính giá trị của $\sqrt{x^2 - 9}$ tại

a) $x = 5$;

b) $x = -7$;

c) $x = \sqrt{10}$.

☞ **Lời giải.**

a) Thay $x = 5$ vào biểu thức, ta được

$$\sqrt{5^2 - 9} = \sqrt{16} = 4.$$

b) Thay $x = -7$ vào biểu thức, ta được

$$\sqrt{(-7)^2 - 9} = \sqrt{40} = \sqrt{4 \cdot 10} = 2\sqrt{10}.$$

c) Thay $x = \sqrt{10}$ vào biểu thức, ta được

$$\sqrt{(\sqrt{10})^2 - 9} = \sqrt{1} = 1.$$

□

⇨ **Bài 21.** Tính giá trị của $\sqrt{2x^2 + 1}$ tại

a) $x = 2$;

b) $x = -\sqrt{12}$.

☞ **Lời giải.**

a) Thay $x = 2$ vào biểu thức ta được:

$$\sqrt{2(2)^2 + 1} = \sqrt{2(4) + 1} = \sqrt{8 + 1} = \sqrt{9} = 3.$$

b) Thay $x = -\sqrt{12}$ vào biểu thức ta được:

$$\sqrt{2(-\sqrt{12})^2 + 1} = \sqrt{2(12) + 1} = \sqrt{24 + 1} = \sqrt{25} = 5.$$

□

⇨ **Bài 22.** Tính giá trị của mỗi căn thức bậc hai sau

a) $\sqrt{17 - x^2}$ tại $x = 1$; $x = -3$; $x = 2\sqrt{2}$;

b) $\sqrt{x^2 + x + 1}$ tại $x = 0$; $x = -1$; $x = -7$.

☞ **Lời giải.**

a) Tại $x = 1$:

$$\sqrt{17 - 1^2} = \sqrt{16} = 4.$$

Tại $x = -3$:

$$\sqrt{17 - (-3)^2} = \sqrt{17 - 9} = \sqrt{8}.$$

Tại $x = 2\sqrt{2}$:

$$\sqrt{17 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{17 - 8} = \sqrt{9} = 3.$$

b) Tại $x = 0$:

$$\sqrt{0^2 + 0 + 1} = \sqrt{1} = 1$$

Tại $x = -1$:

$$\sqrt{(-1)^2 + (-1) + 1} = \sqrt{1 - 1 + 1} = \sqrt{1} = 1.$$

Tại $x = -7$:

$$\sqrt{(-7)^2 + (-7) + 1} = \sqrt{49 - 7 + 1} = \sqrt{43}.$$

□

⇨ **Bài 23.** Chứng minh $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1$.

□

⇨ **Bài 24.** Tính giá trị của các biểu thức sau khi $x = 16, y = 9$.

a) $\sqrt{x} + \sqrt{y}$;

b) $\sqrt{x + y}$;

c) $\frac{1}{2}\sqrt{xy}$;

d) $\frac{1}{6}x\sqrt{y}$.

☞ **Lời giải.**

a) Với $x = 16; y = 9$ suy ra $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$.

b) Với $x = 16; y = 9$ suy ra $\sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$.

c) Với $x = 16; y = 9$ suy ra $\frac{1}{2}\sqrt{9 \cdot 16} = \frac{1}{2}\sqrt{12^2} = 6$.

d) Với $x = 16; y = 9$ suy ra $\frac{1}{6}16\sqrt{9} = \frac{1}{6}16 \cdot 3 = 8$.

❖ **Bài 25.** Cho biểu thức $P = \sqrt{x^2 - xy + 1}$. Tính giá trị của P khi

a) $x = 3, y = -2$;

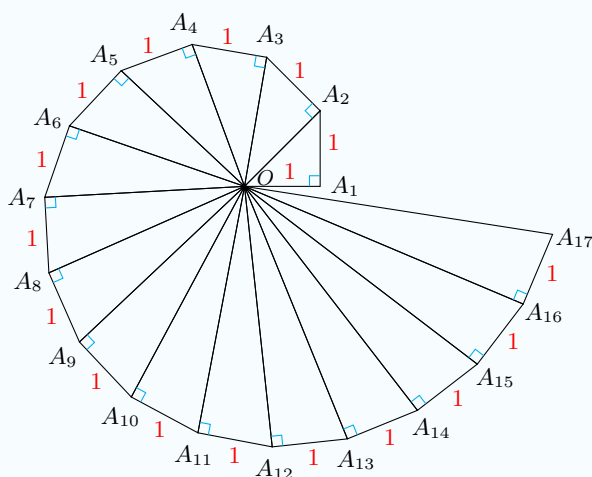
b) $x = 1, y = 4$.

🗨 **Lời giải.**

a) Với $x = 3, y = -2$ suy ra $P = \sqrt{3^2 - 3 \cdot (-2) + 1} = \sqrt{16} = 4$.

b) Với $x = 1, y = 4$ suy ra $P = \sqrt{1^2 - 1 \cdot 4 + 1} = \sqrt{-2}$. Vì $-2 < 0$ nên P không xác định tại $x = 1; y = 4$.

❖ **Bài 26.** Tính độ dài cạnh huyền của mỗi tam giác vuông trong sau.



🗨 **Lời giải.**

☑ Xét $\triangle OA_1A_2$ có $OA_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

☑ Xét $\triangle OA_2A_3$ có $OA_3 = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.

☑ Xét $\triangle OA_3A_4$ có $OA_4 = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$.

☑

☑ Xét $\triangle OA_{16}A_{17}$ có $OA_{17} = \sqrt{(\sqrt{16})^2 + 1^2} = \sqrt{17}$.

❖ **Bài 27.** Để chuẩn bị trồng cây trên vỉa hè, người ta để lại những ô đất hình tròn có diện tích khoảng 2 m^2 . Em hãy ước lượng (với độ chính xác 0,005) đường kính của các ô đất đó khoảng bao nhiêu mét?

🗨 **Lời giải.**

Ta có diện tích ô đất hình tròn là $S = \pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 0,7978845608$.

Suy ra $d = 1,595769122$ với độ chính xác 0,005 suy ra $d \approx 1,6 \text{ m}$.

🔗 **Bài 28.** Đại Kim tự tháp Giza là Kim tự tháp Ai Cập lớn nhất và là lăng mộ của Vương triều thứ Tư của pharaoh Khufu. Nên kim tự tháp có dạng hình vuông với diện tích khoảng $53\,052\text{ m}^2$ (Nguồn: <https://vi.wikipedia.org>). Hỏi độ dài cạnh nền của kim tự tháp đó là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

🗨 **Lời giải.**

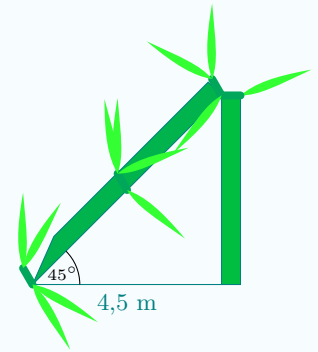
Gọi cạnh hình vuông (nền kim tự tháp) là x , điều kiện $x > 0$, đơn vị m.

Diện tích hình vuông $x^2 = 53\,052 \Rightarrow x = \sqrt{53\,052} \approx 230,3$ m.

Vậy độ dài cạnh nền của kim tự tháp đó xấp xỉ 230,3 m. □

🔗 **Bài 29.**

Giông bão thổi mạnh, một cây bị gãy gập xuống làm ngọn cây chạm đất và tạo với phương nằm ngang một góc 45° (minh họa ở hình bên). Người ta đo được khoảng cách từ chỗ ngọn cây chạm đất đến gốc cây là 4,5 m. Giả sử cây mọc vuông góc với mặt đất, hãy tính chiều cao của cây đó theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



🗨 **Lời giải.**

Xem đoạn bị gãy là CB ; đoạn còn lại (thẳng đứng) là AC .

Như vậy, độ dài của cây khi chưa bị gãy là $AC + BC$.

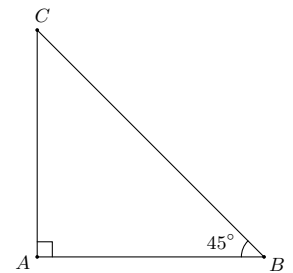
Do $\triangle ABC$ vuông tại A và $\widehat{ABC} = 45^\circ$, suy ra $\triangle ABC$ vuông cân tại A .

Suy ra $AC = AB = 4,5$ m.

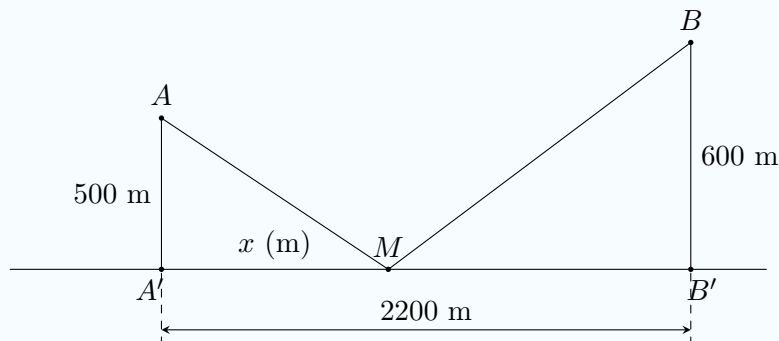
Áp dụng định lí Pytagore trong $\triangle ABC$ vuông tại A , ta được

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{2 \cdot (4,5)^2} = \sqrt{40,5} \text{ m.}$$

Chiều cao cây trước khi gãy là $4,5 + \sqrt{40,5} \approx 10,9$ m. □



🔗 **Bài 30.** Có hai xã A, B cùng ở bên bờ sông Lam, khoảng cách từ hai xã đó đến bờ sông lần lượt là $AA' = 500$ m, $BB' = 600$ m và người ta đo được $A'B' = 2200$ m. Các kĩ sư muốn xây một trạm cung cấp nước sạch nằm bên bờ sông Lam cho người dân hai xã. Giả sử vị trí của trạm cung cấp nước sạch đó là điểm M trên đoạn $A'B'$ với $MA' = x$ (m), $0 < x < 2200$ (minh họa ở hình bên).



- Hãy tính tổng khoảng cách $MA + MB$ theo x .
- Tính tổng khoảng cách $MA + MB$ khi $x = 1200$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).

🗨 **Lời giải.**

a) Xét $\triangle AA'M$ vuông tại A' có $MA = \sqrt{AA'^2 + A'M^2} = \sqrt{500^2 + x^2}$ (m).

Xét $\triangle BB'M$ vuông tại B' có $MB = \sqrt{BB'^2 + B'M^2} = \sqrt{600^2 + (2200 - x)^2}$ (m).

Khi đó $MA + MB = \sqrt{500^2 + x^2} + \sqrt{600^2 + (2200 - x)^2}$ (m).

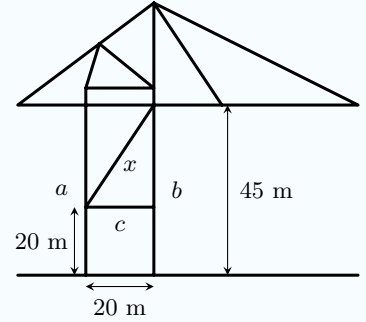
b) Khi $x = 1200$, ta có

$$MA + MB = \sqrt{500^2 + 1200^2} + \sqrt{600^2 + (2200 - 1200)^2} \approx 2466 \text{ (m)}$$

□

❖ Bài 31.

Trên cần trục ở Hình 5, hai trụ a và b đứng cách nhau 20 m, hai xà ngang c và d lần lượt có độ cao 20 m và 45 m so với mặt đất. Xà chéo x có độ dài bao nhiêu mét (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?



Hình 5

☞ Lời giải.

Theo định lý Pytago ta có $x = \sqrt{c^2 + b^2}$.

Theo đề ta có $b = 45 - 20 = 25$ và $c = 20$.

Suy ra $x = \sqrt{25^2 + 20^2} = \sqrt{1025} \approx 32$.

Vậy xà chéo x có độ dài khoảng 32 m.

□

❖ Bài 32. Hệ quả của hiện tượng nóng lên toàn cầu là băng của một số sông băng đang tan chảy. Mười hai năm sau khi băng biến mất, những loài thực vật nhỏ bé, được gọi là địa y, bắt đầu mọc trên đá. Mỗi nhóm địa y phát triển ở dạng (gần như) một hình tròn. Đường kính d (mm) của hình tròn này và tuổi của địa y có thể được tính gần đúng bằng công thức $d = 7\sqrt{t - 12}$ với t là số năm tính từ khi băng biến mất ($t \geq 12$) (nguồn: J.Libby, Math for Real Life: Teaching and Practical Uses for Algebra, McFarland, năm 2017). Tính đường kính của hình tròn do địa y tạo nên sau khi băng biến mất 13 năm; 16 năm.

☞ Lời giải.

Đường kính của hình tròn do địa y tạo nên sau khi băng biến mất 13 năm

$$7\sqrt{13 - 12} = 7 \text{ (mm)}.$$

Đường kính của hình tròn do địa y tạo nên sau khi băng biến mất 16 năm

$$7\sqrt{16 - 12} = 14 \text{ (mm)}.$$

□

Bài 2

CĂN BẬC BA



TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 Căn bậc ba

Căn bậc ba của số thực a là số thực x thỏa mãn $x^3 = a$.

⚠ Mỗi số a đều có duy nhất một căn bậc ba. Căn bậc ba của số a được kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$. Trong kí hiệu $\sqrt[3]{a}$, số 3 được gọi là chỉ số của căn. Phép tìm căn bậc ba của một số gọi là phép khai căn bậc ba.

🔴 Nhận xét. Từ định nghĩa căn bậc ba, ta có $(\sqrt[3]{a})^3 = \sqrt[3]{a^3} = a$ với mọi số thực a .

2 Căn thức bậc ba

Căn thức bậc ba là biểu thức có dạng $\sqrt[3]{A}$, trong đó A là một biểu thức đại số.

⚠ **🔄** Tương tự căn bậc ba của một số, ta cũng có $(\sqrt[3]{A})^3 = \sqrt[3]{A^3} = A$ (A là một biểu thức).

🔄 Để tính giá trị của $\sqrt[3]{A}$ tại những giá trị cho trước của biến, ta thay các giá trị cho trước của biến vào căn thức rồi tính giá trị của biểu thức số nhận được.



CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Tính căn bậc ba, căn thức bậc ba

🔗 Ví dụ 1. Không dùng MTCT, tính:

- | | | | |
|-----------------------|-------------------------|------------------------|------------------------|
| a) $\sqrt[3]{1000}$; | b) $\sqrt[3]{-0,064}$; | c) $\sqrt[3]{-8}$; | d) $\sqrt[3]{0,125}$; |
| e) $\sqrt[3]{125}$; | f) $\sqrt[3]{0,008}$; | g) $\sqrt[3]{216}$; | h) $\sqrt[3]{729}$; |
| i) $\sqrt[3]{1331}$; | j) $\sqrt[3]{-343}$; | k) $\sqrt[3]{-1728}$; | l) $\sqrt[3]{-27}$. |

🗨️ Lời giải.

- | | | |
|---|--|--|
| a) $\sqrt[3]{1000} = 10$. | b) $\sqrt[3]{-0,064} = -0,4$. | c) $\sqrt[3]{-8} = -2$. |
| d) $\sqrt[3]{0,125} = 0,5$. | e) $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$. | f) $\sqrt[3]{0,008} = \sqrt[3]{(0,2)^3} = 0,2$. |
| g) $\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{6^3} = 6$. | h) $\sqrt[3]{729} = \sqrt[3]{9^3} = 9$. | i) $\sqrt[3]{1331} = \sqrt[3]{11^3} = 11$. |
| j) $\sqrt[3]{-343} = \sqrt[3]{(-7)^3} = -7$. | k) $\sqrt[3]{-1728} = \sqrt[3]{(-12)^3} = -12$. | l) $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3$. |

□

🔗 Ví dụ 2. Không dùng MTCT, tính:

- | | | | |
|-------------------------------|-----------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|
| a) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$; | b) $\sqrt[3]{-\frac{125}{512}}$; | c) $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$; | d) $\sqrt[3]{-\frac{8}{125}}$. |
|-------------------------------|-----------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|

🗨️ Lời giải.

❖ **Ví dụ 6.** Cho biểu thức $P = \sqrt[3]{3x-2}$. Tính giá trị của P khi $x = 3$ và khi $x = -2$ (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba).

🗨 **Lời giải.**

- ⊙ Với $x = 3$, ta có $P = \sqrt[3]{3 \cdot 3 - 2} = \sqrt[3]{7} \approx 1,913$;
- ⊙ Với $x = -2$, ta có $P = \sqrt[3]{3 \cdot (-2) - 2} = \sqrt[3]{-8} = -2$.

❖ **Ví dụ 7.** Cho biểu thức $Q = \sqrt[3]{3x^2}$. Tính giá trị của Q khi $x = 2$ và khi $x = -3$ (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

🗨 **Lời giải.**

- ⊙ Với $x = 2$, ta có $Q = \sqrt[3]{3 \cdot 2^2} = \sqrt[3]{12} \approx 2,29$;
- ⊙ Với $x = -3$, ta có $Q = \sqrt[3]{3 \cdot (-3)^2} = \sqrt[3]{27} = 3$.

📁 Dạng 2. So sánh

❖ **Ví dụ 8.** So sánh

- | | |
|---|---------------------------------------|
| a) $\sqrt[3]{-11,35}$ và $\sqrt[3]{-13,12}$; | b) 3 và $\sqrt[3]{27\frac{1}{4}}$; |
| c) 7 và $\sqrt[3]{345}$; | d) $2\sqrt[3]{6}$ và $3\sqrt[3]{2}$. |

🗨 **Lời giải.**

- a) Do $-11,35 > -13,12$ nên $\sqrt[3]{-11,35} > \sqrt[3]{-13,12}$.
- b) Ta có $3 = \sqrt[3]{27}$. Do $27 < 27\frac{1}{4}$ nên $\sqrt[3]{27} < \sqrt[3]{27\frac{1}{4}}$ hay $3 < \sqrt[3]{27\frac{1}{4}}$.
- c) Ta có $7 = \sqrt[3]{343}$. Do $343 < 345$ nên $\sqrt[3]{343} < \sqrt[3]{345}$.
- d) Ta có $2\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{8 \cdot 6} = \sqrt[3]{48}$; $3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{54}$. Do $48 < 54$ nên $2\sqrt[3]{6} < 3\sqrt[3]{2}$.

❖ **Ví dụ 9.** So sánh

- | | |
|---|---|
| a) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{18}$ và $\frac{3}{4}\sqrt[3]{12}$; | b) $\sqrt[3]{130} + 1$ và $3\sqrt[3]{12} - 1$ |
|---|---|

🗨 **Lời giải.**

- a) Ta có

$$\frac{2}{3}\sqrt[3]{18} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 18} = \sqrt[3]{\frac{16}{3}} = \sqrt[3]{5\frac{1}{3}}$$

$$\frac{3}{4}\sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot 12} = \sqrt[3]{\frac{81}{16}} = \sqrt[3]{5\frac{1}{16}}$$

Vì $5\frac{1}{3} > 5\frac{1}{16}$ nên $\frac{2}{3}\sqrt[3]{18} > \frac{3}{4}\sqrt[3]{12}$.

b) Ta có

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{130} + 1 &> \sqrt[3]{1\sqrt{15}} + 1 = 5 + 1 = 6; \\ 3\sqrt[3]{12} - 1 &= \sqrt[3]{27 \cdot 12} - 1 = \sqrt[3]{324} - 1 < \sqrt[3]{343} - 1 = 7 - 1 = 6.\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \sqrt[3]{130} + 1 > 3\sqrt[3]{12} - 1.$$

□

◇ **Ví dụ 10.** Cho $a < 0$, hỏi số nào lớn hơn trong hai số $\sqrt[3]{2a}$ và $\sqrt[3]{3a}$?

☞ **Lời giải.**

Ta có $2 < 3$ suy ra $2a > 3a$ (vì $a < 0$).

Do đó $\sqrt[3]{2a} > \sqrt[3]{3a}$.

□

📁 Dạng 3. Tính giá trị, rút gọn biểu thức chứa căn bậc ba

⚠ Với mọi A, B ta có

$$\text{Ⓜ } \sqrt[3]{A} : \sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{A : B}.$$

$$\text{Ⓜ } \sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{AB}.$$

◇ **Ví dụ 11.** Tính giá trị của biểu thức

a) $A = \sqrt[3]{8000} + \sqrt[3]{0,125}$;

b) $B = \sqrt[3]{12^3} - \sqrt[3]{(-11)^3}$;

c) $C = (\sqrt[3]{4})^3 + (\sqrt[3]{-5})^3$;

d) $D = \sqrt[3]{1000} + (\sqrt[3]{8,9})^3$.

☞ **Lời giải.**

a) Ta có

$$\begin{aligned}A &= \sqrt[3]{8000} + \sqrt[3]{0,125} \\ &= \sqrt[3]{20^3} + \sqrt[3]{(0,5)^3} \\ &= 20 + 0,5 \\ &= 20,5.\end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}B &= \sqrt[3]{12^3} - \sqrt[3]{(-11)^3} \\ &= 12 + (-11) \\ &= -1.\end{aligned}$$

c) Ta có

$$\begin{aligned}C &= (\sqrt[3]{4})^3 + (\sqrt[3]{-5})^3 \\ &= 4 + (-5) \\ &= 1.\end{aligned}$$

d) Ta có

$$\begin{aligned}D &= \sqrt[3]{1000} + (\sqrt[3]{8,9})^3 \\ &= \sqrt[3]{10^3} + 8,9 \\ &= 10 + 8,9 = 18,9.\end{aligned}$$

□

◇ **Ví dụ 12.** Rút gọn các biểu thức

a) $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{-27} + \sqrt[3]{-64}$;

b) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{-16} + \sqrt[3]{128}$;

c) $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{13,5} - \sqrt[3]{120} : \sqrt[3]{15}$;

d) $(\sqrt[3]{2} + 1)(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1)$;

e) $(\sqrt[3]{5} + 1)^3 - 3\sqrt[3]{5}(\sqrt[3]{5} + 1)$;

f) $(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2})^3 + 6\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2} - 1)$.

☞ **Lời giải.**

a) $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{-27} + \sqrt[3]{-64} = 2 + (-3) + (-4) = -5$.

b) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{-16} + \sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} - \sqrt[3]{(-2)^3 \cdot 2} + \sqrt[3]{4^3 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2} = 9\sqrt[3]{2}$.

$$c) \sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{13,5} - \sqrt[3]{120} : \sqrt[3]{15} = \sqrt[3]{16 \cdot 13,5} - \sqrt[3]{120 : 15} = \sqrt[3]{216} - \sqrt[3]{8} = 6 - 2 = 4.$$

$$d) (\sqrt[3]{2} + 1)(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1) = \sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1 = 2 + 1 = 3.$$

$$e) (\sqrt[3]{5} + 1)^3 - 3\sqrt[3]{5}(\sqrt[3]{5} + 1) = 5 + 3\sqrt[3]{25} + 3\sqrt[3]{5} + 1 - 3\sqrt[3]{25} - 3\sqrt[3]{5} = 6.$$

$$f) (\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2})^3 + 6\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2} - 1) = 4 - 3\sqrt[3]{32} + 3\sqrt[3]{16} - 2 + 6\sqrt[3]{4} - 6\sqrt[3]{2} \\ = 4 - 6\sqrt[3]{4} + 6\sqrt[3]{2} - 2 + 6\sqrt[3]{4} - 6\sqrt[3]{2} = 2.$$

□

◀ Ví dụ 13. Tính $A = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$

🗨️ Lời giải.

Để tính giá trị của A , ta tính A^3 sau đó suy ra A .

Bạn nên nhớ hằng đẳng thức $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$.

Ta có

$$A^3 = \left(\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} \right)^3 \\ = (\sqrt{5} + 2) - (\sqrt{5} - 2) - 3\sqrt[3]{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)} \cdot \left(\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} \right)$$

$$\Rightarrow A^3 = 4 - 3A \Rightarrow A^3 + 3A - 4 = 0 \Leftrightarrow (A - 1)(A^2 + A + 4) = 0 \\ \Leftrightarrow A - 1 = 0 \quad (\text{vì } A^2 + A + 4 > 0) \\ \Leftrightarrow A = 1.$$

Vậy $A = 1$.

□

◀ Ví dụ 14. Rút gọn biểu thức

$$a) \sqrt[3]{x^3 + 1 + 3x(x + 1)};$$

$$b) \frac{x + 1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1};$$

$$c) \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 3x - 1};$$

$$d) -x + 5 + \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}.$$

🗨️ Lời giải.

$$a) \sqrt[3]{x^3 + 1 + 3x(x + 1)} = \sqrt[3]{(x + 1)^3} = x + 1.$$

$$b) \frac{x + 1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{(\sqrt[3]{x} + 1)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1} = \sqrt[3]{x} + 1.$$

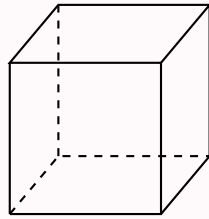
$$c) \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = \sqrt[3]{(x - 1)^3} = x - 1.$$

$$d) -x + 5 + \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} = -x + 5 + \sqrt[3]{(x + 1)^3} = -x + 5 + x + 1 = 6.$$

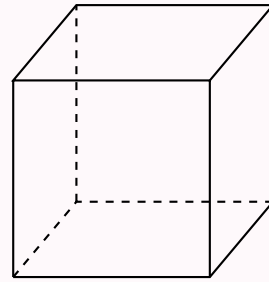
□

📁 Dạng 4. Bài toán thực tế

◀ Ví dụ 15. Có hai khối bê tông hình lập phương A và B có thể tích lần lượt là 8 dm^3 và 15 dm^3 (xem hình vẽ).



Khối lập phương A



Khối lập phương B

a) Tính độ dài cạnh của khối bê tông A.

b) Gọi x (dm) là độ dài cạnh của khối bê tông B. Thay dấu \square bằng số thích hợp để có đẳng thức $x^3 = \square$

🗨️ Lời giải.

a) Gọi a (cm) là độ dài cạnh của khối bê tông A, với $a > 0$.

Ta có $a^3 = 8$ hay $a^3 = 2^3$ suy ra $a = 2$ (cm).

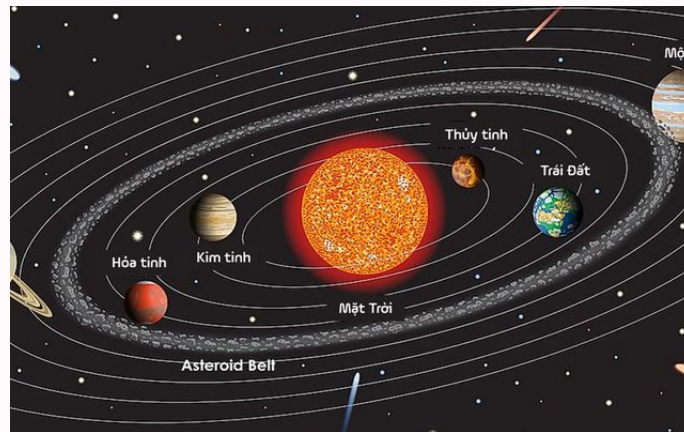
Vậy độ dài cạnh của khối bê tông A là $a = 2$ (cm).

b) Gọi x (dm) là độ dài cạnh của khối bê tông B, với $x > 0$.

Ta có $x^3 = 15$ suy ra $x = \sqrt[3]{15} \approx 2,466$ (cm).

□

🔹 **Ví dụ 16.** Dùng định luật thứ ba của Kepler về sự chuyển động của các hành tinh trong hệ Mặt Trời cho biết khoảng cách trung bình d (triệu dặm) từ một hành tinh quay xung quanh Mặt Trời đến Mặt Trời được tính bởi công thức $d = \sqrt[3]{6r^2}$ với t (ngày Trái Đất) là thời gian hành tinh đó quay quanh Mặt Trời đúng một vòng (Nguồn: <https://vi.wikipedia.org>).



Hệ Mặt Trời

a) Trái Đất quay một vòng quanh Mặt Trời trong khoảng 365 ngày Trái Đất. Hỏi khoảng cách trung bình giữa Trái Đất và Mặt Trời là bao nhiêu triệu kilômét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)? Biết 1 dặm = 1,609344 km.

b) Một năm Sao Hỏa dài bằng 687 ngày trên Trái Đất, nghĩa là Sao Hỏa quay xung quanh Mặt trời đúng một vòng với thời gian bằng 687 ngày Trái Đất. Hỏi khoảng cách trung bình giữa Sao Hỏa và Mặt Trời là bao nhiêu triệu kilômét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

🗨️ Lời giải.

a) Thay $t = 365$ vào công thức $d = \sqrt[3]{6t^2}$, ta có

$$d = \sqrt[3]{6 \cdot 365^2} = \sqrt[3]{799\,350} \approx 92,807 \text{ (triệu dặm)}.$$

Đổi 92,807 triệu dặm \approx 149,4 triệu km.

Vậy khoảng cách trung bình giữa Trái Đất và Mặt Trời là khoảng 149,4 triệu km.

b) Thay $t = 687$ vào công thức $d = \sqrt[3]{6t^2}$, ta có

$$d = \sqrt[3]{6 \cdot 687^2} = \sqrt[3]{2\,831\,814} \approx 141,4787 \text{ (triệu dặm)}.$$

Đổi 141,478 triệu dặm \approx 227,7 triệu km.

Vậy khoảng cách trung bình giữa Sao Hỏa và Mặt Trời là khoảng 227,7 triệu km.

❖ **Ví dụ 17.** Chiều cao ngang vai của một con voi đực ở châu Phi là h (cm) có thể được tính xấp xỉ bằng công thức $h = 62,5\sqrt[3]{t} + 75,8$ với t là tuổi con voi tính theo năm (Nguồn: J.Libby, Math for Real Life: Teaching and Practical Uses for Algebra, McFarland, năm 2017).

- a) Một con voi đực 8 tuổi thì có chiều cao ngang vai là bao nhiêu centimet?
 b) Nếu một con voi đực có chiều cao ngang vai là 205 cm thì con voi đó bao nhiêu tuổi (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

🗨️ Lời giải.

a) Một con voi đực 8 tuổi thì có chiều cao ngang vai là

$$62,5\sqrt[3]{8} + 75,8 = 200,8 \text{ (centimet)}.$$

b) Nếu một con voi đực có chiều cao ngang vai là 205 cm thì

$$\begin{aligned} 205 &= 62,5\sqrt[3]{t} + 75,8 \\ \sqrt[3]{t} &= 2,0672 \\ t &= 2,0672^3 \\ t &= 8,733798504. \end{aligned}$$

Vậy con voi đó khoảng 9 tuổi.



BÀI TẬP VẬN DỤNG

❖ **Bài 1.** Tìm căn bậc ba của mỗi số sau

- a) -64 ; b) $27\,000$; c) $-0,125$; d) $3\frac{3}{8}$.

🗨️ Lời giải.

- a) Ta có $(-4)^3 = -64$ suy ra $\sqrt[3]{-64} = -4$.
 b) Ta có $30^3 = 27\,000$ suy ra $\sqrt[3]{27\,000} = 30$.
 c) Ta có $(-0,5)^3 = -0,125$ suy ra $\sqrt[3]{-0,125} = -0,5$.
 d) Ta có $3\frac{3}{8} = \frac{27}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$ suy ra $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = \frac{3}{2}$.

⇨ **Bài 2.** Tìm căn bậc ba của:

a) 1331;

b) -27;

c) -0,216;

d) $\frac{8}{343}$.

☞ **Lời giải.**

a) $\sqrt[3]{1331} = \sqrt[3]{11^3} = 11$;

b) $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3$;

c) $\sqrt[3]{-0,216} = \sqrt[3]{(-0,6)^3} = -0,6$;

d) $\sqrt[3]{\frac{8}{343}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{7}\right)^3} = \frac{2}{7}$.

⇨ **Bài 3.** Tính

a) $\sqrt[3]{216}$;

b) $\sqrt[3]{-512}$;

c) $\sqrt[3]{-0,001}$;

d) $\sqrt[3]{1,331}$.

☞ **Lời giải.**

a) $\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{6^3} = 6$;

b) $\sqrt[3]{-512} = \sqrt[3]{(-8)^3} = -8$;

c) $\sqrt[3]{-0,001} = \sqrt[3]{(-0,1)^3} = -0,1$;

d) $\sqrt[3]{1,331} = \sqrt[3]{(1,1)^3} = 1,1$.

⇨ **Bài 4.** Tính

a) $\sqrt[3]{0,001}$;

b) $\sqrt[3]{-\frac{1}{64}}$;

c) $-\sqrt[3]{11^3}$;

d) $(\sqrt[3]{-216})^3$.

☞ **Lời giải.**

a) Ta có $\sqrt[3]{0,001} = \sqrt[3]{(0,1)^3} = 0,1$.

b) Ta có $\sqrt[3]{-\frac{1}{64}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{4}\right)^3} = -\frac{1}{4}$

c) Ta có $-\sqrt[3]{11^3} = 11$.

d) Ta có $(\sqrt[3]{-216})^3 = -216$.

⇨ **Bài 5.** Hoàn thành bảng sau vào vở

a	1	8	27	64	?	?	?	?	?	?
$\sqrt[3]{a}$?	?	?	?	5	6	7	8	9	10

☞ **Lời giải.**

a	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000
$\sqrt[3]{a}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

⇨ **Bài 6.** Tính giá trị của biểu thức $P = \sqrt[3]{64n}$ khi $n = 1$; $n = -1$; $n = \frac{1}{125}$.

☞ **Lời giải.**

☑ Với $n = 1$, ta có $P = \sqrt[3]{64 \cdot 1} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$.

☑ Với $n = -1$, ta có $P = \sqrt[3]{64 \cdot (-1)} = \sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4$.

☑ Với $n = \frac{1}{125}$, ta có $P = \sqrt[3]{64 \cdot \frac{1}{125}} = \sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \sqrt[3]{\left(\frac{4}{5}\right)^3} = \frac{4}{5}$.

⇨ **Bài 7.** Sử dụng MTCT tính các căn bậc ba sau đây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai)

a) $\sqrt[3]{2,1}$; b) $\sqrt[3]{-18}$; c) $\sqrt[3]{-28}$; d) $\sqrt[3]{0,35}$

☞ **Lời giải.**

- a) Bấm các phím SHIFT $\sqrt[3]{\square}$ 2 . 1 , màn hình hiện kết quả 1,280579165.
Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai ta được $\sqrt[3]{2,1} \approx 1,28$.
- b) Bấm các phím SHIFT $\sqrt[3]{\square}$ (\leftarrow) 1 8 , màn hình hiện kết quả $-2,620741394$.
Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai ta được $\sqrt[3]{-18} \approx -2,62$.
- c) Bấm các phím SHIFT $\sqrt[3]{\square}$ (\leftarrow) 2 8 , màn hình hiện kết quả $-3,036588972$.
Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai ta được $\sqrt[3]{-28} \approx -3,04$.
- d) Bấm các phím SHIFT $\sqrt[3]{\square}$ 0 . 3 5 , màn hình hiện kết quả 0,7047298732.
Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai ta được $\sqrt[3]{0,35} \approx 0,70$.

□

⇨ **Bài 8.** Sử dụng máy tính cầm tay, tính (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba)

a) $\sqrt[3]{79}$; b) $\sqrt[3]{-6,23}$; c) $\frac{\sqrt[3]{19} + \sqrt[3]{20}}{2}$.

☞ **Lời giải.**

a) $\sqrt[3]{79} \approx 4,921$; b) $\sqrt[3]{-6,23} \approx -1,840$; c) $\frac{\sqrt[3]{19} + \sqrt[3]{20}}{2} \approx 2,691$.

□

⇨ **Bài 9.** So sánh:

a) $\sqrt[3]{-45}$ và $\sqrt[3]{-50}$; b) -10 và $\sqrt[3]{-999}$.

☞ **Lời giải.**

- a) Ta có $-45 > -50 \Rightarrow \sqrt[3]{-45} > \sqrt[3]{-50}$. Vậy $\sqrt[3]{-45} > \sqrt[3]{-50}$.
- b) Ta có $\sqrt[3]{-999} > \sqrt[3]{-1000} = -10$. Vậy $-10 < \sqrt[3]{-999}$.

□

⇨ **Bài 10.** Tính giá trị của các biểu thức

a) $A = \sqrt[3]{8^3} + (\sqrt[3]{-7})^3$; b) $B = \sqrt[3]{1\,000\,000} - \sqrt[3]{0,027}$.

☞ **Lời giải.**

- a) Ta có $A = \sqrt[3]{8^3} + (\sqrt[3]{-7})^3 = 8 + (-7) = -1$.
- b) Ta có $B = \sqrt[3]{1\,000\,000} - \sqrt[3]{0,027} = \sqrt[3]{(100)^3} - \sqrt[3]{(0,3)^3} = 100 + 0,3 = 99,7$.

□

⇨ **Bài 11.** Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt[3]{(1 - \sqrt{2})^3}$; b) $\sqrt[3]{(2\sqrt{2} + 1)^3}$; c) $(\sqrt[3]{\sqrt{2} + 1})^3$.

☞ **Lời giải.**

a) $\sqrt[3]{(1 - \sqrt{2})^3} = 1 - \sqrt{2};$

b) $\sqrt[3]{(2\sqrt{2} + 1)^3} = 2\sqrt{2} + 1;$

c) $(\sqrt[3]{\sqrt{2} + 1})^3 = \sqrt{2} + 1.$

□

◇ **Bài 12.** Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức $\sqrt[3]{27x^3 - 27x^2 + 9x - 1}$ tại $x = 7$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\sqrt[3]{27x^3 - 27x^2 + 9x - 1} = \sqrt[3]{(3x - 1)^3} = 3x - 1.$

Với $x = 7$, giá trị của biểu thức là $3 \cdot 7 - 1 = 20.$

□

◇ **Bài 13.** Chứng minh: $(\sqrt[3]{2} + 1) [(\sqrt[3]{2})^2 - \sqrt[3]{2} + 1] = 3.$

☞ **Lời giải.**

Ta có $(\sqrt[3]{2} + 1) [(\sqrt[3]{2})^2 - \sqrt[3]{2} + 1] (\sqrt[3]{2})^3 + 1^3 = 2 + 1 = 3.$

□

◇ **Bài 14.** Tìm x biết

a) $x^3 = -27;$

b) $x^3 = \frac{64}{125};$

c) $\sqrt[3]{x} = 8;$

d) $\sqrt[3]{x} = -0,9.$

☞ **Lời giải.**

a) $x^3 = -27$ suy ra $x^3 = (-3)^3$ suy ra $x = -3.$

b) $x^3 = \frac{64}{125}$ suy ra $x^3 = \left(\frac{4}{5}\right)^3$ suy ra $x = \frac{4}{5}.$

c) $\sqrt[3]{x} = 8$ suy ra $(\sqrt[3]{x})^3 = 8^3$ suy ra $x = 512.$

d) $\sqrt[3]{x} = -0,9$ suy ra $(\sqrt[3]{x})^3 = (-0,9)^3$ suy ra $x = -0,729.$

□

◇ **Bài 15.** Tìm điều kiện xác định cho mỗi căn thức bậc ba sau

a) $\sqrt[3]{3x + 2}$

b) $\sqrt[3]{x^3 - 1}$

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{2-x}}.$

☞ **Lời giải.**

a) $\sqrt[3]{3x + 2}$ xác định với mọi số thực x vì $3x + 2$ xác định với mọi số thực x .

b) $\sqrt[3]{x^3 - 1}$ xác định với mọi số thực x vì $x^3 - 1$ xác định với mọi số thực x .

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{2-x}}$ xác định với $x \neq 2$ vì $\frac{1}{2-x}$ xác định với $x \neq 2$.

□

◇ **Bài 16.** Tìm điều kiện xác định cho mỗi căn thức bậc ba sau

a) $\sqrt[3]{5x - 11};$

b) $\sqrt[3]{x^2 + x};$

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{x}};$

d) $\sqrt[3]{\frac{1}{x-9}}.$

☞ **Lời giải.**

- a) $\sqrt[3]{5x - 11}$ xác định với mọi x .
- b) $\sqrt[3]{x^2 + x}$ xác định với mọi x .
- c) $\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$ xác định khi $x \neq 0$.
- d) $\sqrt[3]{\frac{1}{x - 9}}$ xác định khi $x - 9 \neq 0 \Rightarrow x \neq 9$.

□

◀▶ **Bài 17.** Một người thợ muốn làm một thùng tôn hình lập phương có thể tích bằng 730dm^3 . Em hãy ước lượng chiều dài cạnh thùng khoảng bao nhiêu dm?

🗨 **Lời giải.**

Gọi $x > 0$ (dm) là chiều dài cạnh thùng.

Thể tích thùng tôn là $x^3 = 730$ nên cạnh $x = \sqrt[3]{730} \approx 9$ (dm).

□

◀▶ **Bài 18.** Thể tích của một khối bê tông có dạng hình lập phương là khoảng $220\,348\text{ cm}^3$. Hỏi độ dài cạnh của khối bê tông đó là bao nhiêu centimét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

🗨 **Lời giải.**

Gọi x (m) là chiều dài cạnh khối bê tông.

Ta có $x^3 = 220\,348 \Rightarrow x = \sqrt[3]{220\,348} \approx 60,4$ cm.

Vậy khối bê tông có cạnh gần bằng 60,4 cm.

□

Bài 3

TÍNH CHẤT CỦA PHÉP KHAI PHƯƠNG

A

TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 Căn thức bậc hai của một bình phương

- ☑ Với mọi số thực a , ta có $\sqrt{a^2} = |a|$.
- ☑ Với biểu thức A bất kì, ta có $\sqrt{A^2} = |A|$, nghĩa là
 - $\sqrt{A^2} = A$ khi $A \geq 0$ (tức là khi A nhận giá trị không âm);
 - $\sqrt{A^2} = -A$ khi $A < 0$ (tức là khi A nhận giá trị âm).

2 Căn thức bậc hai của một tích

- ☑ Với hai số thực a và b không âm, ta có $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.
- ☑ Với hai biểu thức A và B nhận giá trị không âm, ta có $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$.

☑ **Nhận xét.** Như hai ví dụ trên, tùy từng trường hợp mà ta biến đổi $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ hoặc $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ($a \geq 0$ và $b \geq 0$) để việc tính toán trở nên dễ dàng hơn.

Với số thực a bất kì và b không âm, ta có $\sqrt{a^2b} = |a|\sqrt{b}$. Biến đổi này được gọi là *đưa thừa số ra ngoài dấu căn*. Ngược lại, ta có biến đổi *đưa thừa số vào trong dấu căn*:

- ☑ Nếu $a \geq 0$ thì $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$;
- ☑ Nếu $a < 0$ thì $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2b}$.

☑ **Nhận xét.** Tổng quát hơn, với biểu thức A, B mà $B \geq 0$, ta có $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B}$.

3 Căn thức bậc hai của một thương

- ☑ Với số thực a không âm và số thực b dương, ta có $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.
- ☑ Với biểu thức A nhận giá trị không âm và biểu thức B nhận giá trị dương, ta có $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$.

☑ **Nhận xét.** Tùy từng trường hợp mà ta biến đổi

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ hoặc } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (a \geq 0 \text{ và } b > 0)$$

để việc tính toán trở nên dễ dàng hơn.

B

CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Tính toán, rút gọn biểu thức dạng $\sqrt{A^2}$

Vận dụng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0. \end{cases}$

❖ **Ví dụ 1.** Tính giá trị của các biểu thức

- a) $\sqrt{6^2}$; b) $\sqrt{(-5)^2}$; c) $\sqrt{16^2}$; d) $(\sqrt{12})^2$;
 e) $(-\sqrt{0,36})^2$; f) $(\sqrt{5})^2 + (-\sqrt{1,21})^2$; g) $\sqrt{(-3)^2} + 3$; h) $(-\sqrt{9})^2 + \sqrt{(-9)^2}$.

☞ **Lời giải.**

- a) $\sqrt{6^2} = |6| = 6$.
 b) $\sqrt{(-5)^2} = |5| = 5$.
 c) $\sqrt{16^2} = |16| = 16$.
 d) $(\sqrt{12})^2 = 12$.
 e) $(-\sqrt{0,36})^2 = 0,36$.
 f) $(\sqrt{5})^2 + (-\sqrt{1,21})^2 = 5 + 1,21 = 6,21$.
 g) Ta có $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$ nên $\sqrt{(-3)^2} + 3 = 3 + 3 = 6$.
 h) $(-\sqrt{9})^2 + \sqrt{(-9)^2} = 9 + |-9| = 9 + 9 = 18$.

□

❖ **Ví dụ 2.** Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2}$; b) $\sqrt{(a - \sqrt{5})^2}$ với $a > 3$; c) $\sqrt{a^6}$ với $a < 0$.

☞ **Lời giải.**

- a) $\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} = |1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$ (vì $1 - \sqrt{2} < 0$);
 b) $\sqrt{(a - \sqrt{5})^2} = |a - \sqrt{5}| = a - \sqrt{5}$ (vì $a - \sqrt{5} > 0$ với $a > 3$);
 c) $\sqrt{a^6} = \sqrt{(a^3)^2} = |a^3| = -a^3$ (vì $a^3 < 0$ với $a < 0$).

□

❖ **Ví dụ 3.** Không sử dụng MTCT, tính:

- a) $\sqrt{16} + (\sqrt{8})^2 + (-\sqrt{0,16})^2$; b) $\sqrt{5} - \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}$;
 c) $1 - \sqrt{2} + \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2}$; d) $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$.

☞ **Lời giải.**

- a) $\sqrt{16} + (\sqrt{8})^2 + (-\sqrt{0,16})^2 = \sqrt{4^2} + 8 + 0,16 = 4 + 8 + 0,16 = 12,16$.
 b) $\sqrt{5} - \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = \sqrt{5} - |\sqrt{5} - 1| = \sqrt{5} - \sqrt{5} + 1 = 1$.
 c) Ta có $\sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} = |1 + \sqrt{2}| = 1 + \sqrt{2}$ nên $1 - \sqrt{2} + \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} = 1 - \sqrt{2} + (1 + \sqrt{2}) = 2$.
 d) $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{6 - 4\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} - \sqrt{(2 - \sqrt{2})^2} = |\sqrt{2} - 1| - |2 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1 - (2 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 3$

□

◊ **Ví dụ 4.** Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$;

b) $\sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$;

c) $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$.

☞ **Lời giải.**

a) $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{3 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 + 1} = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} = \sqrt{3} + 1$;

b) $\sqrt{8 - 2\sqrt{15}} = \sqrt{5 - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} + 3} = \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$;

c) $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + 4} = \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2} = \sqrt{5} - 2$.

□

◊ **Ví dụ 5.** Rút gọn các biểu thức

a) $A = \sqrt{x^4} + \sqrt{x^6}$;

b) $B = \sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}}$.

☞ **Lời giải.**

a) Ta có $B = \sqrt{x^4} + \sqrt{x^6} = |x^2| + |x^3| = x^2 + |x^3| = \begin{cases} x^2 + x^3 & \text{nếu } x \geq 0 \\ x^2 - x^3 & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$

b) Ta có $A = \sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}} = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = \left|x - \frac{1}{2}\right|$.

Nếu $x \geq \frac{1}{2}$ thì $A = x - \frac{1}{2}$.

Nếu $x < \frac{1}{2}$ thì $A = \frac{1}{2} - x$.

□

◊ **Ví dụ 6.** Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{1 - 2x + x^2}$ với $x > 2$;

b) $(\sqrt{1 - x})^2$ với $x < 0$.

☞ **Lời giải.**

a) Ta có $\sqrt{1 - 2x + x^2} = \sqrt{(1 - x)^2} = |1 - x|$.

Do giả thiết $x > 2$ suy ra $1 - x < 0$ nên $|1 - x| = -(1 - x) = x - 1$. Vì vậy

$$\sqrt{1 - 2x + x^2} = \sqrt{(1 - x)^2} = x - 1 \text{ với } x > 2.$$

b) Từ giả thiết $x < 0$ suy ra $1 - x > 0$. Do đó $(\sqrt{1 - x})^2 = 1 - x$.

□

◊ **Ví dụ 7.**

a) Rút gọn biểu thức $x\sqrt{x^6}$ ($x < 0$).

b) Rút gọn và tính giá trị của biểu thức $x + \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$ tại $x = -2, 5$.

☞ **Lời giải.**

a) Ta có

$$x\sqrt{x^6} = x\sqrt{(x^3)^2} = x|x^3| = x \cdot (-x^3) = -x^4 \text{ (vì } x < 0)$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} & x + \sqrt{4x^2 - 4x + 1} \\ &= x + \sqrt{(2x - 1)^2} \\ &= x + |2x - 1|. \end{aligned}$$

$$\text{Thay } x = -2,5 \text{ vào ta có } 2,5 + |2 \cdot 2,5 - 1| = \frac{5}{2} + 4 = \frac{13}{2}.$$

□

❖ **Ví dụ 8.** Cho biểu thức: $P = 3x - \sqrt{x^2 - 10x + 25}$.

a) Rút gọn biểu thức P ;

b) Tính giá trị của P khi $x = 2$.

☞ **Lời giải.**

$$a) P = 3x - \sqrt{x^2 - 10x + 25} = 3x - \sqrt{(x - 5)^2} = 3x - |x - 5|.$$

☑ Nếu $x \geq 5$ thì $P = 3x - (x - 5) = 2x + 5$.

☑ Nếu $x < 5$ thì $P = 3x + (x - 5) = 4x - 5$.

b) Khi $x = 2 < 5$ thì giá trị của P là $P = 4 \cdot 2 - 5 = 3$.

□

❖ **Ví dụ 9.** Cho biểu thức: $Q = 2x - \sqrt{x^2 + 2x + 1}$.

a) Rút gọn biểu thức Q ;

b) Tính giá trị của x khi $Q = 7$.

☞ **Lời giải.**

$$a) Q = 2x - \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 2x - \sqrt{(x + 1)^2} = 2x - |x + 1|.$$

☑ Nếu $x \geq -1$ thì $Q = 2x - (x + 1) = x - 1$.

☑ Nếu $x < -1$ thì $Q = 2x + (x + 1) = 3x + 1$.

b) Ta phải xét hai trường hợp:

☑ $Q = 7 \Rightarrow x - 1 = 7 \Rightarrow x = 8$ (thỏa mãn $x \geq -1$).

☑ $Q = 7 \Rightarrow 3x + 1 = 7 \Rightarrow x = 2$ (không thỏa mãn $x < -1$).

Vậy $Q = 7$ khi $x = 8$.

□

❖ **Ví dụ 10.** Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}}$;

b) $\sqrt{x + 2 - 2\sqrt{x + 1}}$.

☞ **Lời giải.**

$$\begin{aligned} a) \sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} &= \sqrt{x - 1 + 2\sqrt{x - 1} + 1} \\ &= \sqrt{(\sqrt{x - 1} + 1)^2} = \sqrt{x - 1} + 1 \quad (\text{ĐK: } x \geq 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \sqrt{x + 2 - 2\sqrt{x + 1}} &= \sqrt{x + 1 - 2\sqrt{x + 1} + 1} \\ &= \sqrt{(\sqrt{x + 1} - 1)^2} = |\sqrt{x + 1} - 1| \quad (\text{ĐK: } x \geq -1). \end{aligned}$$

Nếu $x \geq 0$ thì $|\sqrt{x + 1} - 1| = \sqrt{x + 1} - 1$.

Nếu $x < 0$ thì $|\sqrt{x + 1} - 1| = 1 - \sqrt{x + 1}$.

□

Dạng 2. Khai căn một tích

❖ **Ví dụ 11.** Áp dụng quy tắc về căn bậc hai của một tích, hãy tính:

- a) $\sqrt{81 \cdot 49}$; b) $\sqrt{25 \cdot 121}$; c) $\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}$; d) $\sqrt{25 \cdot 1,21}$;
 e) $\sqrt{360 \cdot 90}$; f) $\sqrt{0,16 \cdot 64}$; g) $\sqrt{8,1 \cdot 10^3}$; h) $\sqrt{12,1 \cdot 160}$.

☞ **Lời giải.**

- a) $\sqrt{81 \cdot 49} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{49} = 9 \cdot 7 = 63$.
 b) $\sqrt{25 \cdot 121} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{121} = 5 \cdot 11 = 55$.
 c) $\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5^2} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.
 d) $\sqrt{25 \cdot 1,21} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{1,21} = 5 \cdot 1,1 = 5,5$;
 e) $\sqrt{360 \cdot 90} = \sqrt{36 \cdot 9 \cdot 100} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{100} = 6 \cdot 3 \cdot 10 = 180$.
 f) $\sqrt{0,16 \cdot 64} = \sqrt{0,16} \cdot \sqrt{64} = 0,4 \cdot 8 = 3,2$.
 g) $\sqrt{8,1 \cdot 10^3} = \sqrt{8,1 \cdot 10^2 \cdot 10} = \sqrt{81 \cdot 10^2} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{10^2} = 9 \cdot 10 = 90$.
 h) $\sqrt{12,1 \cdot 160} = \sqrt{121 \cdot 16} = \sqrt{121} \cdot \sqrt{16} = 11 \cdot 4 = 44$.

□

❖ **Ví dụ 12.** Áp dụng quy tắc về căn bậc hai của một tích, hãy tính:

- a) $\sqrt{2500 \cdot 4,9 \cdot 0,9}$; b) $\sqrt{12 \cdot 250 \cdot 1,2}$; c) $\sqrt{41^2 - 40^2}$; d) $\sqrt{81 \cdot 6,25 - 2,25 \cdot 81}$.

☞ **Lời giải.**

- a) $\sqrt{2500 \cdot 4,9 \cdot 0,9} = \sqrt{25 \cdot 49 \cdot 9} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{49} \cdot \sqrt{9} = 5 \cdot 7 \cdot 3 = 105$.
 b) $\sqrt{12 \cdot 250 \cdot 1,2} = \sqrt{12 \cdot 25 \cdot 12} = \sqrt{12^2 \cdot 5^2} = \sqrt{12^2} \cdot \sqrt{5^2} = 12 \cdot 5 = 60$;
 c) $\sqrt{41^2 - 40^2} = \sqrt{(41 - 40) \cdot (41 + 40)} = \sqrt{1 \cdot 81} = 1 \cdot 9 = 9$;
 d) $\sqrt{81 \cdot 6,25 - 2,25 \cdot 81} = \sqrt{81 \cdot (6,25 - 2,25)} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{4} = 9 \cdot 2 = 18$.

□

❖ **Ví dụ 13.**

- a) Tính nhanh $\sqrt{25 \cdot 49}$.
 b) Phân tích thành nhân tử $\sqrt{ab} - 4\sqrt{a}$ (với $a \geq 0, b \geq 0$).

☞ **Lời giải.**

- a) Ta có $\sqrt{25 \cdot 49} = \sqrt{5^2 \cdot 7^2} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{7^2} = 5 \cdot 7 = 35$.
 b) Theo giả thiết $a \geq 0; b \geq 0$, do đó ta có

$$\sqrt{ab} - 4\sqrt{a} = \sqrt{a}(\sqrt{b} - 4).$$

□

◀ Ví dụ 14. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{8a \cdot 5ab \cdot 10b^3}$;

b) $\sqrt{18(2-a)^2}$ với $a > 2$;

c) $\sqrt{25a^2b^2}$ (với $a \geq 0$; $b < 0$).

☞ Lời giải.

a) $\sqrt{8a \cdot 5ab \cdot 10b^3} = \sqrt{8 \cdot 5 \cdot 10 \cdot a^2b^4} = \sqrt{400} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{(b^2)^2} = 20|a|b^2$.

b) $\sqrt{18(2-a)^2} = \sqrt{2 \cdot 9 \cdot (2-a)^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{(2-a)^2} = \sqrt{2} \cdot 3 \cdot |2-a| = 3\sqrt{2}(a-2)$ (vì $a > 2$).

c) Theo giả thiết $a \geq 0$; $b < 0$, do đó

$$\sqrt{25a^2b^2} = \sqrt{5^2 \cdot a^2 \cdot (-b)^2} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{(-b)^2} = 5 \cdot a \cdot (-b) = -5ab.$$

□

📁 Dạng 3. Nhân các căn bậc hai

◀ Ví dụ 15. Áp dụng quy tắc về căn bậc hai của một tích, hãy tính:

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$;

b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{9}{8}}$;

c) $\sqrt{72} \cdot \sqrt{50}$;

d) $\sqrt{12,8} \cdot \sqrt{0,2}$;

e) $\sqrt{27} \cdot \sqrt{3}$;

f) Tính $\sqrt{3} \cdot \sqrt{75}$.

☞ Lời giải.

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{5 \cdot 20} = \sqrt{100} = 10$.

b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{9}{8}} = \sqrt{2 \cdot \frac{9}{8}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$.

c) $\sqrt{72} \cdot \sqrt{50} = \sqrt{72 \cdot 50} = \sqrt{36 \cdot 100} = 6 \cdot 10 = 60$;

d) $\sqrt{12,8} \cdot \sqrt{0,2} = \sqrt{12,8 \cdot 0,2} = \sqrt{128 \cdot 0,02} = \sqrt{64 \cdot 0,04} = 8 \cdot 0,2 = 1,6$.

e) $\sqrt{27} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{27 \cdot 3} = \sqrt{81} = 9$.

f) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 75} = \sqrt{3^2 \cdot 5^2} = |3 \cdot 5| = 15$.

□

◀ Ví dụ 16. Áp dụng quy tắc về căn bậc hai của một tích, hãy tính:

a) $\sqrt{1,3} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{13}$.

b) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{5,2} \cdot \sqrt{52}$.

c) $\sqrt{4,9} \cdot \sqrt{30} \cdot \sqrt{12}$;

d) $\sqrt{2,8} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{10}$;

e) $\sqrt{40} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{4,5}$;

f) $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{12}{25}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$.

☞ Lời giải.

a) $\sqrt{1,3} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{13} = \sqrt{1,3 \cdot 10 \cdot 13} = \sqrt{13 \cdot 13} = 13$.

b) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{5,2} \cdot \sqrt{52} = \sqrt{10 \cdot 5,2 \cdot 52} = \sqrt{52 \cdot 52} = \sqrt{52^2} = 52$.

c) $\sqrt{4,9} \cdot \sqrt{30} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{4,9 \cdot 30 \cdot 12} = \sqrt{7^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2} = \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2^2} = 7 \cdot 3 \cdot 2 = 42$.

d) $\sqrt{2,8} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{2,8 \cdot 7 \cdot 10} = \sqrt{28 \cdot 7} = \sqrt{4 \cdot 7 \cdot 7} = \sqrt{2^2 \cdot 7^2} = \sqrt{14^2} = 14$.

$$e) \sqrt{40} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{4,5} = \sqrt{40 \cdot 20 \cdot 4,5} = \sqrt{400 \cdot 9} = 20 \cdot 3 = 60;$$

$$f) \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{12}{25}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{12}{25} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}.$$

□

❖ **Ví dụ 17.** Thực hiện các phép tính:

$$a) \sqrt{5} \cdot (\sqrt{125} + \sqrt{5});$$

$$b) (\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{5}) \cdot \sqrt{5};$$

$$c) (\sqrt{12} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{27} - \sqrt{3});$$

$$d) (\sqrt{5} - \sqrt{3} + 1) \cdot (\sqrt{5} - 1).$$

☞ **Lời giải.**

$$a) \text{ Ta có } \sqrt{5} \cdot (\sqrt{125} + \sqrt{5}) = \sqrt{5} \cdot \sqrt{125} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5 \cdot 125} + \sqrt{25} = 25 + 5 = 30.$$

$$b) (\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{5}) \cdot \sqrt{5} = \sqrt{100} + \sqrt{225} - \sqrt{25} = 10 + 15 - 5 = 20;$$

$$c) (\sqrt{12} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{27} - \sqrt{3}) = \sqrt{324} - \sqrt{36} + \sqrt{81} - \sqrt{9} = 18 - 6 + 9 - 3 = 18;$$

$$d) (\sqrt{5} - \sqrt{3} + 1) \cdot (\sqrt{5} - 1) = 5 - \sqrt{5} - \sqrt{15} + \sqrt{3} + \sqrt{5} - 1 = 4 - \sqrt{15} + \sqrt{3}.$$

□

❖ **Ví dụ 18.** Thực hiện các phép tính:

$$a) (\sqrt{7} + \sqrt{3})^2;$$

$$b) (\sqrt{8} - \sqrt{2})^2;$$

$$c) (5\sqrt{3} - 2\sqrt{7}) \cdot (5\sqrt{3} + 2\sqrt{7}).$$

☞ **Lời giải.**

$$a) (\sqrt{7} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{7})^2 + 2 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 7 + 2\sqrt{21} + 3 = 10 + 2\sqrt{21};$$

$$b) (\sqrt{8} - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{8})^2 - 2 \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 8 - 2\sqrt{16} + 2 = 2;$$

$$c) (5\sqrt{3} - 2\sqrt{7}) \cdot (5\sqrt{3} + 2\sqrt{7}) = (5\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{7})^2 = 25 \cdot 3 - 4 \cdot 7 = 47.$$

□

❖ **Ví dụ 19.** Rút gọn biểu thức $(\sqrt{14} + \sqrt{6})\sqrt{5 - \sqrt{21}}$.

☞ **Lời giải.**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (\sqrt{14} + \sqrt{6})\sqrt{5 - \sqrt{21}} &= \sqrt{2}(\sqrt{7} + \sqrt{3})\sqrt{5 - \sqrt{21}} \\ &= (\sqrt{7} + \sqrt{3})\sqrt{10 - 2\sqrt{7} \cdot 3} \\ &= (\sqrt{7} + \sqrt{3})\sqrt{(\sqrt{7} - \sqrt{3})^2} \\ &= (\sqrt{7} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{3}) = 4. \end{aligned}$$

□

❖ **Ví dụ 20.** Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \sqrt{5a} \cdot \sqrt{20a} \text{ với } a \geq 0;$$

$$b) \sqrt{3a} \cdot \sqrt{27a} \text{ với } a \geq 0;$$

$$c) \sqrt{15a} \cdot \sqrt{3a} \text{ với } a > 0;$$

$$d) \sqrt{5x} \cdot \sqrt{20x} \text{ với } x \geq 0;$$

$$e) \sqrt{3a^3} \cdot \sqrt{27a} \text{ với } a > 0;$$

$$f) \sqrt{5ab^3} \cdot \sqrt{5ab} \text{ với } a < 0; b < 0.$$

☞ **Lời giải.**

$$a) \sqrt{5a} \cdot \sqrt{20a} = \sqrt{5a \cdot 20a} = \sqrt{100 \cdot a^2} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{a^2} = 10 \cdot |a| = 10a \text{ (vì } a \geq 0).$$

$$b) \sqrt{3a} \cdot \sqrt{27a} = \sqrt{3a \cdot 27a} = \sqrt{81a^2} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{a^2} = 9|a| = 9a \text{ (vì } a \geq 0\text{)}.$$

$$c) \sqrt{15a} \cdot \sqrt{3a} = \sqrt{15a \cdot 3a} = \sqrt{3^2 \cdot a^2 \cdot 5} = 3a\sqrt{5} \text{ (vì } a > 0\text{)}.$$

$$d) \sqrt{5x} \cdot \sqrt{20x} = \sqrt{5x \cdot 20x} = \sqrt{100x^2} = \sqrt{(10x)^2} = |10x| = 10x \text{ với } x \geq 0.$$

$$e) \sqrt{3a^3} \cdot \sqrt{27a} = \sqrt{3a^3 \cdot 27a} = \sqrt{81a^4} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{a^4} = 9 \cdot \sqrt{(a^2)^2} = 9|a^2| = 9a^2 \text{ (vì } a^2 \geq 0 \text{ với mọi số thực } a\text{)}.$$

$$f) \text{ Với } a < 0; b < 0, \text{ ta có } \sqrt{5ab^3} \cdot \sqrt{5ab} = \sqrt{5ab^3 \cdot 5ab} = \sqrt{5^2 a^2 b^4} = \sqrt{(5ab^2)^2} = |5ab^2| = -5ab^2.$$

Dạng 4. Khai căn một thương

◆ Ví dụ 21. Áp dụng quy tắc về căn bậc hai của một thương, hãy tính:

$$a) \sqrt{\frac{4}{25}}; \quad b) \sqrt{\frac{1,69}{0,25}}; \quad c) \sqrt{\frac{49}{64}}; \quad d) \sqrt{\frac{27}{75}}; \quad e) \sqrt{\frac{9}{25}}; \quad f) \sqrt{1\frac{9}{16}};$$

☞ Lời giải.

$$a) \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}.$$

$$b) \sqrt{\frac{1,69}{0,25}} = \frac{\sqrt{1,69}}{\sqrt{0,25}} = \frac{1,3}{0,5} = 2,6.$$

$$c) \sqrt{\frac{49}{64}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{64}} = \frac{7}{8}.$$

$$d) \sqrt{\frac{27}{75}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}.$$

$$e) \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}.$$

$$f) \sqrt{1\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4}.$$

◆ Ví dụ 22. Áp dụng quy tắc về căn bậc hai của một thương, hãy tính:

$$a) \sqrt{\frac{4}{25} : \frac{49}{121}}; \quad b) \sqrt{\frac{65^2 - 52^2}{225}}; \quad c) \sqrt{\frac{11}{9} : 1,44 - \frac{7}{9} : 1,44}.$$

☞ Lời giải.

$$a) \sqrt{\frac{65^2 - 52^2}{225}} = \sqrt{\frac{(65 - 52)(65 + 52)}{225}} = \sqrt{\frac{13 \cdot 117}{225}} = \sqrt{\frac{13 \cdot 13 \cdot 9}{15^2}} = \frac{13 \cdot 3}{15} = \frac{39}{15}.$$

$$b) \sqrt{\frac{11}{9} : 1,44 - \frac{7}{9} : 1,44} = \sqrt{\left(\frac{11}{9} - \frac{7}{9}\right) : \frac{144}{100}} = \sqrt{\frac{4}{9} : \frac{144}{100}} = \sqrt{\frac{4}{9} : \frac{144}{100}} = \sqrt{\frac{4}{9} : \frac{144}{100}} = \frac{2}{3} : \frac{12}{10} = \frac{5}{9}.$$

$$c) \sqrt{\frac{4}{25} : \frac{49}{121}} = \sqrt{\frac{4}{25} : \frac{49}{121}} = \frac{2}{5} : \frac{7}{11} = \frac{22}{35}.$$

◆ Ví dụ 23. Viết số dưới dấu căn thành một phân số thập phân rồi tính

$$a) \sqrt{1,69}; \quad b) \sqrt{6,25}.$$

☞ Lời giải.

$$a) \text{ Ta có } 1,69 = \frac{169}{100} = \frac{13^2}{10^2} \text{ nên } \sqrt{1,69} = \sqrt{\frac{13^2}{10^2}} = \frac{\sqrt{13^2}}{\sqrt{10^2}} = \frac{13}{10} = 1,3.$$

$$b) \text{ Ta có } \sqrt{6,25} = \sqrt{\frac{625}{100}} = \frac{25^2}{10^2} \text{ nên } \sqrt{6,25} = \sqrt{\frac{25^2}{10^2}} = \frac{\sqrt{25^2}}{\sqrt{10^2}} = \frac{25}{10} = 2,5.$$

◊ **Ví dụ 24.** Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{\frac{4a^2}{25}}$;

b) $\sqrt{\frac{a^2}{4b^4}}$ với $a \geq 0, b \neq 0$;

c) $\sqrt{\frac{-36a}{49}}$ với $a < 0$;

d) $\sqrt{\frac{9}{(x-3)^2}}$ với $x > 3$;

e) $a \cdot \sqrt{\frac{2}{a^2}}$ ($a > 0$);

f) $(a^2 - 1) \cdot \sqrt{\frac{5}{(a-1)^2}}$ ($a > 1$).

☞ **Lời giải.**

a) $\sqrt{\frac{4a^2}{25}} = \frac{\sqrt{4a^2}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{a^2}}{5} = \frac{2|a|}{5}$.

b) $\sqrt{\frac{a^2}{4b^4}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{4b^4}} = \frac{|a|}{2b^2} = \frac{a}{2b^2}$ (vì $a \geq 0$).

c) $\sqrt{\frac{-36a}{49}} = \frac{\sqrt{-36a}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{36} \cdot \sqrt{-a}}{\sqrt{49}} = \frac{6\sqrt{-a}}{7}$

d) $\sqrt{\frac{9}{(x-3)^2}} = \frac{9}{\sqrt{(x-3)^2}} = \frac{3}{|x-3|} = \frac{3}{x-3}$ (vì $x-3 > 0$ với $x > 3$).

e) Do $a > 0$ nên $a \cdot \sqrt{\frac{2}{a^2}} = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a^2}} = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} \text{f) Do } a > 1 \text{ nên ta có } (a^2 - 1) \cdot \sqrt{\frac{5}{(a-1)^2}} \\ &= (a-1)(a+1) \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{(a-1)^2}} \\ &= (a-1)(a+1) \cdot \frac{\sqrt{5}}{|a-1|} \\ &= (a-1)(a+1) \cdot \frac{\sqrt{5}}{(a-1)} \\ &= \sqrt{5}(a+1). \end{aligned}$$

□

📁 Dạng 5. Chia các căn bậc hai

◊ **Ví dụ 25.** Áp dụng quy tắc về căn bậc hai của một thương, hãy tính:

a) $\sqrt{8} : \sqrt{2}$.

b) $\sqrt{18} : \sqrt{50}$.

c) $\frac{\sqrt{216}}{\sqrt{6}}$.

d) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}$;

e) $\sqrt{24} : \sqrt{3}$;

f) $\frac{\sqrt{555}}{\sqrt{111}}$;

g) $\sqrt{80} : \sqrt{5}$;

h) $\sqrt{45} : \sqrt{80}$;

☞ **Lời giải.**

a) $\sqrt{8} : \sqrt{2} = \sqrt{8 : 2} = \sqrt{4} = 2$.

b) $\sqrt{18} : \sqrt{50} = \sqrt{18 : 50} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$.

c) $\frac{\sqrt{216}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{216}{6}} = \sqrt{36} = 6$.

$$d) \frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{80}{5}} = \sqrt{16} = 4.$$

$$e) \sqrt{24} : \sqrt{3} = \sqrt{\frac{24}{3}} = \sqrt{8} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2}.$$

$$f) \frac{\sqrt{555}}{\sqrt{111}} = \sqrt{\frac{555}{111}} = \sqrt{5}.$$

$$g) \sqrt{80} : \sqrt{5} = \sqrt{\frac{80}{5}} = \sqrt{16} = 4.$$

$$h) \sqrt{45} : \sqrt{80} = \sqrt{\frac{45}{80}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4};$$

□

◀ Ví dụ 26. Tính

$$a) \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{10}};$$

$$b) \sqrt{\frac{1}{15}} : \sqrt{1\frac{2}{3}}$$

$$c) \sqrt{\frac{3}{5}} : \sqrt{\frac{5}{12}}.$$

$$d) \sqrt{(2 \cdot 3)^5} : \sqrt{2^3 \cdot 3^5}.$$

$$e) \sqrt{54} : \sqrt{2} : \sqrt{3};$$

$$f) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{75}} : \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{117}}.$$

☞ Lời giải.

$$a) \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{5 \cdot 6}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{30}{10}} = \sqrt{3}.$$

$$b) \sqrt{\frac{1}{15}} : \sqrt{1\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{1}{15}} : \sqrt{\frac{5}{3}} = \sqrt{\frac{1}{15} : \frac{5}{3}} = \sqrt{\frac{1}{15} \cdot \frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}.$$

$$c) \sqrt{\frac{3}{5}} : \sqrt{\frac{5}{12}} = \sqrt{\frac{3}{5} : \frac{5}{12}} = \sqrt{\frac{3}{5} \cdot \frac{12}{5}} = \sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{6}{5}.$$

$$d) \sqrt{(2 \cdot 3)^5} : \sqrt{2^3 \cdot 3^5} = \sqrt{\frac{2^5 \cdot 3^5}{2^3 \cdot 3^5}} = \sqrt{2^2} = 2.$$

$$e) \sqrt{54} : \sqrt{2} : \sqrt{3} = \sqrt{54 : 2} : \sqrt{3} = \sqrt{27 : 3} = \sqrt{9} = 3$$

$$f) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{75}} : \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{117}} = \sqrt{\frac{3}{75}} : \sqrt{\frac{52}{117}} = \sqrt{\frac{1}{25}} : \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{1}{5} : \frac{2}{3} = \frac{3}{10}.$$

□

◀ Ví dụ 27. Thực hiện phép tính

$$a) (\sqrt{45} - \sqrt{125} + \sqrt{20}) : \sqrt{5};$$

$$b) (2\sqrt{18} + 3\sqrt{8} - 6\sqrt{2}) : \sqrt{2}.$$

☞ Lời giải.

$$a) (\sqrt{45} - \sqrt{125} + \sqrt{20}) : \sqrt{5} = \sqrt{9} - \sqrt{25} + \sqrt{4} = 3 - 5 + 2 = 0;$$

$$b) (2\sqrt{18} + 3\sqrt{8} - 6\sqrt{2}) : \sqrt{2} = 2\sqrt{9} + 3\sqrt{4} - 6 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 - 6 = 6.$$

□

◀ Ví dụ 28. Rút gọn

$$a) \sqrt{16ab^2} : \sqrt{4a} \text{ với } a > 0, b < 0. \quad b) \sqrt{52a^3} : \sqrt{13a} \text{ với } a > 0.$$

$$c) \frac{\sqrt{2a^2(1-a)^2}}{\sqrt{50}} \text{ với } a > 1.$$

d) $\frac{\sqrt{3ab^4}}{\sqrt{27a}}$ với $a > 0$.

e) $\frac{\sqrt{125a}}{\sqrt{5a}}$ với $a > 0$.

f) $\frac{\sqrt{48x^3}}{\sqrt{3x^5}}$ với $x > 0$.

Lời giải.a) Theo giả thiết $a > 0$; $b < 0$, do đó ta có

$$\sqrt{16ab^2} : \sqrt{4a} = \sqrt{16ab^2 : 4a} = \sqrt{4b^2} = \sqrt{(2b)^2} = |2b| = -2b.$$

b) $\sqrt{52a^3} : \sqrt{13a} = \sqrt{52a^3 : (13a)} = \sqrt{4a^2} = \sqrt{(2a)^2} = 2a$ (do $a > 0$).

c) $\frac{\sqrt{2a^2(1-a)^2}}{\sqrt{50}} = \sqrt{\frac{2a^2(1-a)^2}{50}} = \sqrt{\frac{a^2(1-a)^2}{25}} = \frac{|a||1-a|}{5} = \frac{a(a-1)}{5}$ (vì $a > 1$).

d) $\frac{\sqrt{3ab^4}}{\sqrt{27a}} = \sqrt{\frac{3ab^4}{27a}} = \sqrt{\frac{b^4}{9}} = \frac{\sqrt{(b^2)^2}}{\sqrt{9}} = \frac{b^2}{3}$.

e) $\frac{\sqrt{125a}}{\sqrt{5a}} = \sqrt{\frac{125a}{5a}} = \sqrt{25} = 5$.

f) $\frac{\sqrt{48x^3}}{\sqrt{3x^5}} = \sqrt{\frac{48x^3}{3x^5}} = \sqrt{\frac{16}{x^2}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{x^2}} = \frac{4}{|x|} = \frac{4}{x}$ (vì $x > 0$).

□

Dạng 6. Rút gọn, tính giá trị của biểu thức**Ví dụ 29.** Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{\frac{3x}{5}} \cdot \sqrt{\frac{5x}{27}}$ với $x > 0$;

b) $\sqrt{x^6 \cdot (x-2)^2}$ với $x > 2$.

Lời giải.

a) $\sqrt{\frac{3x}{5}} \cdot \sqrt{\frac{5x}{27}} = \sqrt{\frac{3x}{5} \cdot \frac{5x}{27}} = \sqrt{\frac{x^2}{9}} = \frac{|x|}{3} = \frac{x}{3}$ (vì $x > 0$);

b) $\sqrt{x^6 \cdot (x-2)^2} = \sqrt{x^6} \cdot \sqrt{(x-2)^2} = |x^3| |x-2| = x^3(x-2)$ (vì $x > 2$).

□

Ví dụ 30. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{15x^3 \cdot \frac{60}{x}}$;

b) $\sqrt{16(x^2 - 6x + 9)}$.

Lời giải.a) Điều kiện xác định: $x \neq 0$.

$$\sqrt{15x^3 \cdot \frac{60}{x}} = \sqrt{900x^2} = 30|x| = \begin{cases} 30x & \text{nếu } x > 0 \\ -30x & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

b) $\sqrt{16(x^2 - 6x + 9)} = \sqrt{16(x-3)^2} = 4|x-3| = \begin{cases} 4(x-3) & \text{nếu } x \geq 3 \\ -4(x-3) & \text{nếu } x < 3. \end{cases}$

□

❖ **Ví dụ 31.** Rút gọn biểu thức $M = \sqrt{25x^2(x - 2\sqrt{x} + 1)}$ với $0 < x < 1$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $M = \sqrt{25x^2(x - 2\sqrt{x} + 1)} = \sqrt{25x^2 \cdot (\sqrt{x} - 1)^2} = 5|x| \cdot |\sqrt{x} - 1|$.

Vì $x > 0$ nên $|x| = x$.

Vì $0 < x < 1$ nên $\sqrt{x} < 1$, do đó $|\sqrt{x} - 1| = 1 - \sqrt{x}$.

Vậy $M = 5x(1 - \sqrt{x})$. □

❖ **Ví dụ 32.** Rút gọn biểu thức $\frac{\sqrt{3^{16} - 3^{12}}}{\sqrt{3^{12} - 3^8}}$.

☞ **Lời giải.**

$$\frac{\sqrt{3^{16} - 3^{12}}}{\sqrt{3^{12} - 3^8}} = \sqrt{\frac{3^{12}(3^4 - 1)}{3^8(3^4 - 1)}} = \sqrt{3^4} = 9. \quad \square$$

❖ **Ví dụ 33.** Rút gọn rồi tính giá trị biểu thức sau với $x = 6$

$$A = \frac{\sqrt{(165^2 - 124^2)}}{\sqrt{369}}x.$$

☞ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{(165^2 - 124^2)}}{\sqrt{369}}x = \frac{\sqrt{(165 + 124)(165 - 124)}}{\sqrt{369}}x \\ &= \sqrt{\frac{289 \cdot 41}{369}}x = \sqrt{\frac{289}{9}}x = \frac{17}{3}x. \end{aligned}$$

Với $x = 6$ thì $A = \frac{17}{3} \cdot 6 = 34$. □

❖ **Ví dụ 34.** Cho biểu thức

$$B = \sqrt{\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{y} - 1}} : \sqrt{\frac{\sqrt{y} + 1}{\sqrt{x} - 1}}.$$

Rút gọn rồi tính giá trị biểu thức B với $x = 5; y = 10$.

☞ **Lời giải.**

Điều kiện: $x > 1, y > 1$. Khi đó ta có

$$B = \sqrt{\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{y} - 1}} : \frac{\sqrt{y} + 1}{\sqrt{x}} - 1 = \sqrt{\frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{y} - 1)(\sqrt{y} + 1)}} = \sqrt{\frac{x - 1}{y - 1}}.$$

Với $x = 5, y = 10$ thì $B = \sqrt{\frac{5 - 1}{10 - 1}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$. □

❖ **Ví dụ 35.** Cho biểu thức $C = \sqrt{\frac{x - 2\sqrt{xy} + y}{x + 6\sqrt{xy} + 9y}}$ với $x > 0, y > 0$.

Rút gọn rồi tính giá trị biểu thức C với $x = 25; y = 81$.

☞ **Lời giải.**

$$C = \sqrt{\frac{x - 2\sqrt{xy} + y}{x + 6\sqrt{xy} + 9y}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{(\sqrt{x} + 3\sqrt{y})^2}} = \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{\sqrt{x} + 3\sqrt{y}}.$$

$$\text{Với } x = 25, y = 81 \text{ thì } C = \frac{|\sqrt{25} - \sqrt{81}|}{\sqrt{25} + 3\sqrt{81}} = \frac{|5 - 9|}{5 + 3 \cdot 9} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

□

Dạng 7. Chứng minh bất đẳng thức

❖ **Ví dụ 36.** Không dùng MTCT, chứng minh rằng: $\sqrt{5} + \sqrt{8} < \sqrt{6} + \sqrt{7}$.

☞ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } (\sqrt{5} + \sqrt{8})^2 = 5 + 2\sqrt{40} + 8 = 13 + 2\sqrt{40}$$

$$(\sqrt{6} + \sqrt{7})^2 = 6 + 2\sqrt{42} + 7 = 13 + 2\sqrt{42}$$

Vì $13 + 2\sqrt{40} < 13 + 2\sqrt{42}$ nên $(\sqrt{5} + \sqrt{8})^2 < (\sqrt{6} + \sqrt{7})^2$, suy ra $\sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{8})^2} < \sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{7})^2}$.

Hay $\sqrt{5} + \sqrt{8} < \sqrt{6} + \sqrt{7}$. □

❖ **Ví dụ 37.** Không dùng MTCT, chứng minh rằng: $\sqrt{3} + 2 < \sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$.

☞ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } (\sqrt{3} + 2)^2 = 3 + 4\sqrt{3} + 4 = 7 + 4\sqrt{3};$$

$$[\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)]^2 = 2(\sqrt{3} + 1)^2 = 2(3 + 2\sqrt{3} + 1) = 8 + 4\sqrt{3}.$$

Vì $7 + 4\sqrt{3} < 8 + 4\sqrt{3}$ nên $(\sqrt{3} + 2)^2 < [\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)]^2$, suy ra $\sqrt{(\sqrt{3} + 2)^2} < \sqrt{[\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)]^2}$.

Hay $\sqrt{3} + 2 < \sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$. □

❖ **Ví dụ 38.** Cho $a > 0$, chứng minh rằng $\sqrt{a+9} < \sqrt{a} + 3$.

☞ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } (\sqrt{a+9})^2 = a + 9;$$

$$(\sqrt{a} + 3)^2 = a + 6\sqrt{a} + 9.$$

Do $a > 0$ nên $a + 9 < a + 9 + 6\sqrt{a}$, do đó $(\sqrt{a+9})^2 < (\sqrt{a} + 3)^2$.

⚠ *Căn bậc hai của một tổng không bằng tổng các căn bậc hai.* □

❖ **Ví dụ 39.** Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng

a) $a + b \geq 2\sqrt{ab}$;

b) $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$.

☞ **Lời giải.**

a) Với $a, b \geq 0$ ta có $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$.

Vì $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ nên $a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$, suy ra $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

⚠ *Bất đẳng thức $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ với $a, b \geq 0$ gọi là bất đẳng thức Côsi.*

b) Ta có $a, b, c \geq 0$. Áp dụng bất đẳng thức Côsi đối với hai số ta được

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$b + c \geq 2\sqrt{bc}$$

$$c + a \geq 2\sqrt{ca}.$$

Từ đây suy ra $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$.

◇ Ví dụ 40. Cho $a \geq \frac{1}{2}$, chứng minh rằng $\sqrt{2a-1} \leq a$.

☞ Lời giải.

Từ bất đẳng thức Cô-si $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ suy ra $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức này cho các số không âm $2a-1$ và 1 ta được:

$$\sqrt{2a-1} = \sqrt{(2a-1) \cdot 1} \leq \frac{(2a-1) + 1}{2} = a.$$

Vậy $\sqrt{2a-1} \leq a$ (dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = 1$).

📁 Dạng 8. Bài toán tìm x

◇ Ví dụ 41. Tìm x biết $\sqrt{25 \cdot (x+5)^2} = 15$.

☞ Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{25 \cdot (x+5)^2} &= 15 \\ 5|x+5| &= 15 \\ |x+5| &= 3 \\ x+5 &= 3 \text{ hoặc } x+5 = -3. \\ x &= -2 \text{ hoặc } x = -8. \end{aligned}$$

Vậy $x \in \{-2; -8\}$.

◇ Ví dụ 42. Tìm x biết $\sqrt{9x^2 - 90x + 225} = 6$.

☞ Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{9x^2 - 90x + 225} &= 6 \\ \sqrt{9(x^2 - 10x + 25)} &= 6 \\ \sqrt{9(x-5)^2} &= 6 \\ 3|x-5| &= 6 \\ |x-5| &= 2 \\ x-5 &= 2 \text{ hoặc } x-5 = -2 \\ x &= 7 \text{ hoặc } x = 3. \end{aligned}$$

Vậy $x \in \{7; 3\}$.

◇ Ví dụ 43. Tìm x biết $\sqrt{x^2 - 25} = 2\sqrt{x-5}$.

☞ Lời giải.

Với điều kiện xác định $\begin{cases} x^2 - 25 \geq 0 \\ x - 5 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \geq 25 \\ x \geq 5 \end{cases} \Rightarrow x \geq 5$, ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 25} &= 2\sqrt{x - 5} \\ \sqrt{(x - 5)(x + 5)} - 2\sqrt{x - 5} &= 0 \\ \sqrt{x - 5}(\sqrt{x + 5} - 2) &= 0 \\ \sqrt{x - 5} &= 0 \text{ hoặc } \sqrt{x - 5} - 2 = 0 \\ x - 5 &= 0 \text{ hoặc } x + 5 = 4 \\ x &= 5 \text{ hoặc } x = -1 \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ta có $x = 5$. □

◇◇ **Ví dụ 44.** Tìm x biết $\sqrt{x - 5} + \frac{1}{3}\sqrt{9x - 45} = \frac{1}{5}\sqrt{25x - 125} + 6$.

🗨 **Lời giải.**

Với điều kiện xác định $x \geq 5$, ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{x - 5} + \frac{1}{3}\sqrt{9x - 45} &= \frac{1}{5}\sqrt{25x - 125} + 6 \\ \sqrt{x - 5} + \frac{1}{3}\sqrt{9(x - 5)} &= \frac{1}{5}\sqrt{25(x - 5)} + 6 \\ \sqrt{x - 5} + \sqrt{x - 5} &= \sqrt{x - 5} + 6 \\ \sqrt{x - 5} &= 6 \\ x - 5 &= 36 \\ x &= 41 \text{ (thỏa mãn điều kiện).} \end{aligned}$$

◇◇ **Ví dụ 45.** Tìm x biết $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2$.

🗨 **Lời giải.**

Với điều kiện xác định $x > 0$, ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} &= 2 \\ \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 2 &= 0 \\ \frac{x + 1 - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} &= 0 \\ (\sqrt{x} - 1)^2 &= 0 \\ \sqrt{x} &= 1 \\ x &= 1 \text{ (thỏa mãn điều kiện).} \end{aligned}$$

📁 Dạng 9. Bài toán vận dụng

◇◇ **Ví dụ 46.** Công suất $P(W)$, hiệu điện thế $U(V)$, điện trở $R(\Omega)$ trong đoạn mạch một chiều liên hệ với nhau theo công thức $U = \sqrt{PR}$. Nếu công suất tăng gấp 8 lần, điện trở giảm 2 lần thì tỉ số giữa hiệu điện thế lúc đó và hiệu điện thế ban đầu bằng bao nhiêu?

Lời giải.

Gọi công suất, hiệu điện thế, điện trở ban đầu lần lượt là $P_1; U_1; R_1$.

Gọi công suất, hiệu điện thế, điện trở về sau lần lượt là $P_2; U_2; R_2$.

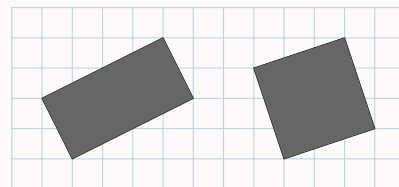
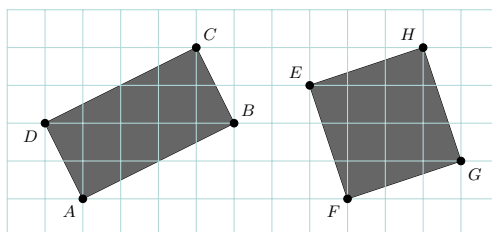
Theo bài ra ta có $P_2 = 8P_1; R_2 = \frac{R_1}{2}$.

$$\text{Mà } \frac{U_2}{U_1} = \frac{\sqrt{P_2 \cdot R_2}}{\sqrt{P_1 \cdot R_1}} = \frac{\sqrt{8P_1 \cdot \frac{R_1}{2}}}{\sqrt{P_1 \cdot R_1}} = 2.$$

□

Ví dụ 47.

Tính diện tích của hình chữ nhật và hình vuông cho trong hình dưới đây. Biết mỗi ô vuông nhỏ có độ dài cạnh là 1. Diện tích của hai hình đó có bằng nhau không?

**Lời giải.**

Gọi hình chữ nhật và hình vuông lần lượt là $ABCD, EFGH$. Từ hình vẽ ta có

$$AB = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}; BC = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S_{ABCD} = \sqrt{20} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{20 \cdot 5} = 10$.

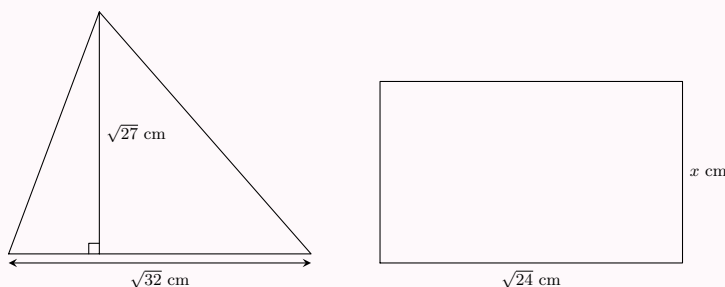
$$EF = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}.$$

Diện tích hình vuông $EFGH$ là $S_{EFGH} = EF^2 = \sqrt{10}^2 = 10$.

Vậy diện tích của hai hình đã cho bằng nhau.

□

Ví dụ 48. Biết rằng hình tam giác và hình chữ nhật ở hình sau có diện tích bằng nhau. Tính chiều rộng x của hình chữ nhật.

**Lời giải.**

Diện tích tam giác là $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{32} \cdot \sqrt{27} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{2} \cdot 3 = 6\sqrt{6}$ (cm²).

Diện tích hình chữ nhật là $x\sqrt{24}$ (cm²).

Theo bài ra ta có

$$x\sqrt{24} = 6\sqrt{6}$$

$$x = \frac{6\sqrt{6}}{\sqrt{24}}$$

$$x = \frac{6\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}$$

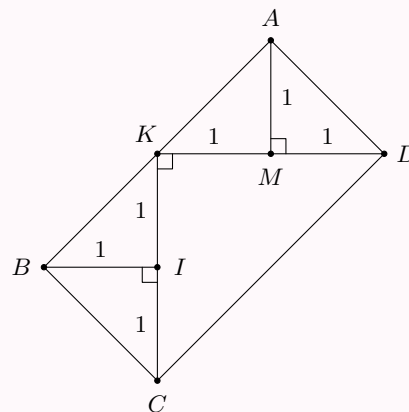
$$x = 3.$$

Vậy chiều rộng của hình chữ nhật là 3 (cm). □

❖ Ví dụ 49.

Bạn Lan cắt một hình chữ nhật $ABCD$ thành những hình tam giác như hình bên (đơn vị tính theo centimét).

- Tính độ dài các cạnh của hình chữ nhật $ABCD$.
- Sau đó, bạn Lan muốn cắt một hình vuông có diện tích bằng diện tích hình chữ nhật $ABCD$. Tính độ dài cạnh của hình vuông đó.



☞ Lời giải.

- a) Trong tam giác vuông cân BIC , ta có:

$$BC^2 = BI^2 + CI^2 \text{ (theo định lí Pythagore).}$$

Suy ra $BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Do đó $BC = \sqrt{2}$ cm.

Ta có $CK = 1 + 1 = 2$ (cm); $DK = 1 + 1 = 2$ cm.

Trong tam giác vuông cân CKD , ta có $CD^2 = CK^2 + DK^2$ (theo định lí Pythagore).

Suy ra $CD^2 = 2^2 + 2^2 = 8$. Do đó $CD = \sqrt{8}$ cm.

Vậy hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = BC = \sqrt{2}$ cm, $AB = CD = \sqrt{8}$ cm.

- b) Diện tích của hình chữ nhật $ABCD$ là

$$BC \cdot CD = \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}^2.$$

Gọi độ dài cạnh của hình vuông là x (cm) với $x > 0$.

Ta có $x^2 = 4$. Do $x > 0$ nên $x = \sqrt{4}$ hay $x = 2$.

Vậy độ dài cạnh của hình vuông là 2 cm. □



BÀI TẬP VẬN DỤNG

❖ Bài 1. Tính:

a) $\sqrt{5,1^2}$;

b) $\sqrt{(-4,9)^2}$;

c) $-\sqrt{(-0,001)^2}$;

d) $\sqrt{(-10)^2}$.

☞ Lời giải.

a) $\sqrt{5,1^2} = |5,1| = 5,1$.

b) $\sqrt{(-4,9)^2} = \sqrt{(4,9)^2} = |4,9| = 4,9$.

$$c) -\sqrt{(-0,001)^2} = -\sqrt{(0,001)^2} = -|0,001| = 0,001.$$

$$d) \sqrt{(-10)^2} = |-10| = 10.$$

🔗 **Bài 2.** Tính:

$$a) \sqrt{(-0,4)^2};$$

$$b) -\sqrt{\left(-\frac{4}{9}\right)^2};$$

$$c) \sqrt{\left(-\frac{2}{7}\right)^2};$$

$$d) -2\sqrt{3^2} + (-\sqrt{6})^2.$$

🗨 **Lời giải.**

$$a) \sqrt{(-0,4)^2} = |-0,4| = 0,4.$$

$$b) -\sqrt{\left(-\frac{4}{9}\right)^2} = -\left|-\frac{4}{9}\right| = -\frac{4}{9}.$$

$$c) \sqrt{\left(-\frac{2}{7}\right)^2} = \left|-\frac{2}{7}\right| = \frac{2}{7}.$$

$$d) -2\sqrt{3^2} + (-\sqrt{6})^2 = -2 \cdot |3| + 6 = -6 + 6 = 0.$$

🔗 **Bài 3.** Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2};$$

$$b) 3\sqrt{x^2} - x + 1 \quad (x < 0);$$

$$c) \sqrt{x^2 - 4x + 4} \quad (x < 2).$$

🗨 **Lời giải.**

$$a) \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2.$$

$$b) 3\sqrt{x^2} - x + 1 = 3|x| - x + 1 = -3x - x + 1 = -4x + 1. \quad (\text{vì } x < 0)$$

$$c) \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x - 2)^2} = |x - 2| = 2 - x. \quad (\text{vì } x < 2)$$

🔗 **Bài 4.** Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \sqrt{(3 - \sqrt{10})^2};$$

$$b) 2\sqrt{a^2} + 4a \quad \text{với } a > 0;$$

$$c) \sqrt{a^2} + \sqrt{(3 - a)^2} \quad \text{với } 0 < a < 3.$$

🗨 **Lời giải.**

$$a) \sqrt{(3 - \sqrt{10})^2} = |3 - \sqrt{10}| = \sqrt{10} - 3 \quad (\text{vì } 3 - \sqrt{10} < 0).$$

$$b) 2\sqrt{a^2} + 4a = 2|a| + 4a = 2a + 4a = 6a \quad (\text{vì } a > 0).$$

$$c) \sqrt{a^2} + \sqrt{(3 - a)^2} = |a| + |3 - a| = a + 3 - a = 3 \quad (\text{vì } 0 < a < 3).$$

🔗 **Bài 5.** Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \sqrt{(3 - \sqrt{10})^2};$$

$$b) \sqrt{9 - 4\sqrt{5}};$$

$$c) 3x - \sqrt{x^2 - 2x + 1}.$$

🗨 **Lời giải.**

$$a) \sqrt{10} - 3;$$

$$b) \sqrt{5} - 2;$$

$$c) \begin{cases} 2x + 1 & \text{nếu } x \geq 1 \\ 4x - 1 & \text{nếu } x < 1. \end{cases}$$

◊ **Bài 6.** Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2}$;

b) $\sqrt{a^2} + \sqrt{(-3a)^2}$ với $a > 0$.

☞ **Lời giải.**

a) $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2$ (vì $2 - \sqrt{5} < 0$);

b) $\sqrt{a^2} + \sqrt{(-3a)^2} = |a| + |-3a| = |a| + 3|a| = 4|a| = 4a$ (vì $a > 0$).

□

◊ **Bài 7.** Không dùng MTCT, chứng tỏ biểu thức A có giá trị là số nguyên:

$$A = \sqrt{(1 + 2\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1 - 2\sqrt{2})^2}.$$

☞ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(1 + 2\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1 - 2\sqrt{2})^2} \\ &= |1 + 2\sqrt{2}| - |1 - 2\sqrt{2}| \\ &= 1 + 2\sqrt{2} + 1 - 2\sqrt{2} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Vậy biểu thức A có giá trị nguyên.

□

◊ **Bài 8.** Tìm x biết

a) $\sqrt{x^2 - 10x + 25} = 2$;

b) $\sqrt{x^2} = 3x - 2$;

c) $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} = x + 7$.

☞ **Lời giải.**

a) $x = 3$ hoặc $x = 7$;

b) $x = 1$;

c) $x \in \left\{10; -\frac{4}{3}\right\}$.

□

◊ **Bài 9.** Tìm x , biết $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + 7x = 13$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + 7x = 13$

$$\sqrt{(x - 3)^2} + 7x = 13$$

$$|x - 3| + 7x = 13.$$

Nếu $x \geq 3$ thì phương trình trở thành $x - 3 + 7x = 13 \Rightarrow 8x = 16 \Rightarrow x = 2$ (không thuộc khoảng đang xét).

Nếu $x < 3$ thì phương trình trở thành $3 - x + 7x = 13 \Rightarrow 6x = 10 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$ (thuộc khoảng đang xét).

Vậy giá trị của x thỏa mãn đẳng thức đã cho là $x = \frac{5}{3}$.

□

◊ **Bài 10.** Tính:

a) $\sqrt{16 \cdot 0,25}$;

b) $\sqrt{2^4 \cdot (-7)^2}$;

c) $\sqrt{0,9} \cdot \sqrt{1000}$;

d) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{40}$.

☞ **Lời giải.**

a) $\sqrt{400 \cdot 0,81} = 18;$

b) $\sqrt{\frac{5}{27} \cdot \frac{3}{20}} = \frac{1}{6};$

c) $\sqrt{(-5)^2 \cdot 3^2} = 15;$

d) $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2 \cdot (2 + \sqrt{5})^2} = 1.$

□

◀ **Bài 15.** Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{8^2 \cdot 5}$

b) $\sqrt{81a^2}$ với $a < 0$;

c) $\sqrt{5a} \cdot \sqrt{45a} - 3a$ với $a \geq 0$.

☞ **Lời giải.**

a) $\sqrt{8^2 \cdot 5} = 8 \cdot \sqrt{5}.$

b) $\sqrt{81a^2} = 81|a| = -81a$ (vì $a < 0$).

$$\begin{aligned} \text{c) } \sqrt{5a} \cdot \sqrt{45a} - 3a &= \sqrt{5a \cdot 45a} - 3a = \sqrt{15^2 \cdot a^2} - 3a \\ &= 15 \cdot |a| - 3a = 15a - 3a = 12a \text{ (vì } a \geq 0). \end{aligned}$$

□

◀ **Bài 16.** Tính

a) $(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 2);$

b) $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y});$

c) $\left(\sqrt{\frac{25}{3}} - \sqrt{\frac{49}{3}} + \sqrt{3}\right)\sqrt{3};$

d) $(1 + \sqrt{3} - \sqrt{5})(1 + \sqrt{3} + \sqrt{5}).$

☞ **Lời giải.**

a) $(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 2) = x - \sqrt{x} - 6;$

b) $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x - y;$

c) $\left(\sqrt{\frac{25}{3}} - \sqrt{\frac{49}{3}} + \sqrt{3}\right)\sqrt{3} = 1;$

d) $(1 + \sqrt{3} - \sqrt{5})(1 + \sqrt{3} + \sqrt{5}) = 2\sqrt{3} - 1.$

□

◀ **Bài 17.** Rút gọn biểu thức $\sqrt{2(a^2 - b^2)} \cdot \sqrt{\frac{3}{a+b}}$ (với $a \geq b > 0$).

☞ **Lời giải.**

Với $a \geq b > 0$ ta có

$$\begin{aligned} &\sqrt{2(a^2 - b^2)} \cdot \sqrt{\frac{3}{a+b}} \\ &= \sqrt{2(a+b)(a-b)} \cdot \sqrt{\frac{3}{a+b}} \\ &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{a-b} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a+b}} \\ &= \sqrt{6} \cdot \sqrt{a-b}. \end{aligned}$$

□

◀ **Bài 18.** Áp dụng quy tắc về căn thức bậc hai của một tích, hãy rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{25(a+1)^2}$ với $a > -1$;

b) $\sqrt{x^2(x-5)^2}$ với $x > 5$;

c) $\sqrt{2b} \cdot \sqrt{32b}$ với $b > 0$;

d) $\sqrt{3c} \cdot \sqrt{27c^3}$ với $c > 0$.

☞ **Lời giải.**

❖ **Bài 22.** Áp dụng quy tắc về căn bậc hai của một thương, hãy tính:

a) $\sqrt{\frac{49}{36}}$;

b) $\sqrt{\frac{13^2 - 12^2}{81}}$;

c) $\frac{\sqrt{9^3 + 7^3}}{\sqrt{9^2 - 9 \cdot 7 + 7^2}}$;

d) $\frac{\sqrt{50^3 - 1}}{\sqrt{50^2 + 51}}$.

☞ **Lời giải.**

a) $\sqrt{\frac{49}{36}} = \frac{7}{6}$;

b) $\sqrt{\frac{13^2 - 12^2}{81}} = \sqrt{\frac{25}{81}} = \frac{5}{9}$;

c) $\frac{\sqrt{9^3 + 7^3}}{\sqrt{9^2 - 9 \cdot 7 + 7^2}} = \frac{\sqrt{(9+7)(9^2 - 9 \cdot 7 + 7^2)}}{\sqrt{9^2 - 9 \cdot 7 + 7^2}} = \sqrt{9+7} = 4$;

d) $\frac{\sqrt{50^3 - 1}}{\sqrt{50^2 + 51}} = \frac{\sqrt{(50-1)(50^2 + 50 \cdot 1 + 1^2)}}{\sqrt{50^2 + 50 \cdot 1 + 1^2}} = \sqrt{50-1} = 7$. □

❖ **Bài 23.** Tính

a) $\sqrt{72} : \sqrt{8}$;

b) $(\sqrt{28} - \sqrt{7} + \sqrt{112}) : \sqrt{7}$.

☞ **Lời giải.**

a) $\sqrt{72} : \sqrt{8} = \sqrt{\frac{72}{8}} = \sqrt{9} = 3$.

b) $(\sqrt{28} - \sqrt{7} + \sqrt{112}) : \sqrt{7} = \sqrt{28} : \sqrt{7} - \sqrt{7} : \sqrt{7} + \sqrt{112} : \sqrt{7} = \sqrt{4} - 1 + \sqrt{16} = 2 - 1 + 4 = 5$. □

❖ **Bài 24.** Tính

a) $\sqrt{\frac{49}{8}} : \sqrt{3\frac{1}{8}}$;

b) $\sqrt{54x} : \sqrt{6x}$;

c) $\sqrt{\frac{1}{125}} \cdot \sqrt{\frac{32}{35}} : \sqrt{\frac{56}{225}}$.

☞ **Lời giải.**

a) $\sqrt{\frac{49}{8}} : \sqrt{3\frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{49}{8} : \frac{25}{8}} = \sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{7}{5}$;

b) $\sqrt{54x} : \sqrt{6x} = \sqrt{\frac{54x}{6x}} = \sqrt{9} = 3$;

c) $\sqrt{\frac{1}{125}} \cdot \sqrt{\frac{32}{35}} : \sqrt{\frac{56}{225}} = \sqrt{\frac{1}{125} \cdot \frac{32}{35} : \frac{56}{225}} = \frac{6}{35}$. □

❖ **Bài 25.** Rút gọn $\frac{-3\sqrt{16a} + 5a\sqrt{16ab^2}}{2\sqrt{a}}$ (với $a > 0$; $b > 0$).

☞ **Lời giải.**

Với $a > 0$; $b > 0$ ta có

$$\frac{-3\sqrt{16a} + 5a\sqrt{16ab^2}}{2\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{16a} \cdot (-3 + 5a\sqrt{b^2})}{2\sqrt{a}} = \frac{4\sqrt{a} \cdot (-3 + 5ab)}{2\sqrt{a}} = 2 \cdot (-3 + 5ab).$$
□

⇨ **Bài 26.** Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\frac{\sqrt{24a^3}}{\sqrt{6a}}$ với $a > 0$;

b) $\sqrt{\frac{3a^2b}{27}}$ với $a \leq 0, b \geq 0$.

☞ **Lời giải.**

a) $\frac{\sqrt{24a^3}}{\sqrt{6a}} = \sqrt{\frac{24a^3}{6a}} = \sqrt{4a^2} = 2|a| = 2a$ (vì $a > 0$).

b) $\sqrt{\frac{3a^2b}{27}} = \sqrt{\frac{a^2b}{9}} = \sqrt{\frac{a^2}{9} \cdot b} = \left|\frac{a}{3}\right| \cdot \sqrt{b} = \frac{-a\sqrt{b}}{3}$ (vì $a \leq 0, b \geq 0$).

□

⇨ **Bài 27.** Áp dụng quy tắc về căn thức bậc hai của một thương, hãy rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{\frac{(3-a)^2}{9}}$ với $a > 3$;

b) $\frac{\sqrt{75x^5}}{\sqrt{5x^3}}$ với $x > 0$;

c) $\sqrt{\frac{9}{x^2 - 2x + 1}}$ với $x > 1$;

d) $\sqrt{\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 6x + 9}}$ với $x \geq 2$.

☞ **Lời giải.**

a) $\sqrt{\frac{(3-a)^2}{9}} = \frac{\sqrt{(3-a)^2}}{\sqrt{9}} = \frac{|3-a|}{3} = \frac{-(3-a)}{3} = \frac{a-3}{3}$ (vì $a > 3$ nên $3-a < 0$).

b) $\frac{\sqrt{75x^5}}{\sqrt{5x^3}} = \sqrt{\frac{75x^5}{5x^3}} = \sqrt{25x^2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{x^2} = 5 \cdot |x| = 5x$ (vì $x > 0$).

c) $\sqrt{\frac{9}{x^2 - 2x + 1}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{(x-1)^2}} = \frac{3}{|x-1|} = \frac{3}{x-1}$ (vì $x > 1$ nên $x-1 > 0$).

d) $\sqrt{\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 6x + 9}} = \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{\sqrt{(x+3)^2}} = \frac{|x-2|}{|x+3|} = \frac{x-2}{x+3}$ (vì $x \geq 2$ nên $x-2 \geq 0$ và $x+3 > 0$).

□

⇨ **Bài 28.** Kích thước màn hình ti vi hình chữ nhật được xác định bởi độ dài đường chéo. Một loại ti vi có tỉ lệ hai cạnh màn hình là 4 : 3.

a) Gọi x (inch) là chiều rộng của màn hình ti vi. Viết công thức tính độ dài đường chéo d (inch) của màn hình ti vi theo x .

b) Tính chiều rộng và chiều dài (theo centimét) của màn hình ti vi loại 40 inch.

☞ **Lời giải.**

a) Chiều dài của màn hình ti vi là $y = \frac{4}{3}x$ (inch).

Công thức tính độ dài đường chéo của màn hình ti vi là

$$d^2 = x^2 + \left(\frac{4}{3}x\right)^2 = x^2 + \frac{16}{9}x^2 = \frac{25x^2}{9} \Rightarrow d = \frac{5}{3}x.$$

b) Ta có

$$d = \frac{5}{3}x \Rightarrow x = \frac{3d}{5}.$$

Do đó chiều rộng của ti vi loại 40 inch là

$$x = \frac{3d}{5} = \frac{120}{5} = 24 \text{ (inch)}.$$

Chiều dài của ti vi loại 40 inch là $\frac{4}{3}x = \frac{4}{3} \cdot 24 = 32 \text{ (inch)}$.

□

◀ **Bài 29.** Cho hình chữ nhật có chiều rộng a (cm), chiều dài b (cm) và diện tích $S \text{ cm}^2$.

a) Tìm S , biết $a = \sqrt{8}$, $b = \sqrt{32}$;

b) Tìm b , biết $S = 3\sqrt{2}$, $a = 2\sqrt{3}$.

🗨 **Lời giải.**

a) Ta có $S = ab = \sqrt{8} \cdot \sqrt{32} = \sqrt{8 \cdot 32} = 16$;

b) Ta có

$$S = ab$$

$$3\sqrt{2} = 2\sqrt{3} \cdot b$$

$$b = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$$

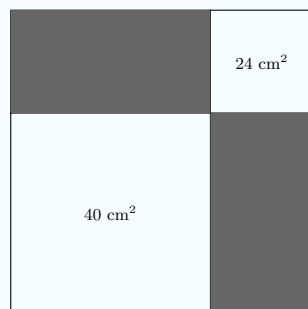
$$b = \sqrt{\frac{3^2 \cdot 2}{2^2 \cdot 3}}$$

$$b = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

$$\text{Vậy } b = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

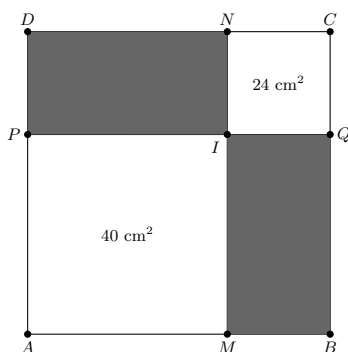
□

◀ **Bài 30.** Từ một tấm thép hình vuông, người thợ cắt ra hai mảnh hình vuông có diện tích lần lượt là 24 cm^2 và 40 cm^2 như hình dưới. Tính diện tích phần còn lại của tấm thép.



Hình 4

🗨 **Lời giải.**



Ta gán các đỉnh $A, B, C, D, P, Q, M, N, I$ như hình vẽ.

$$S_{AMIP} = IP^2 \text{ suy ra } IP^2 = 40 \text{ hay } IP = \sqrt{40}.$$

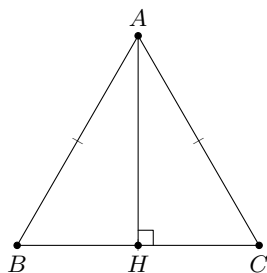
$$S_{IQCN} = IN^2 \text{ suy ra } IN^2 = 24 \text{ hay } IN = \sqrt{24}.$$

$$S_{PIND} = S_{IQBM} = PI \cdot IN = \sqrt{40} \cdot \sqrt{24} = \sqrt{40 \cdot 24} = 8\sqrt{15}.$$

Vậy diện tích phần còn lại là $2S_{PIND} = 16\sqrt{15}$. □

❖ **Bài 31.** Cho tam giác đều ABC có độ dài cạnh là a . Tính độ dài đường cao AH của tam giác ABC theo a .

☞ **Lời giải.**



Ta có tam giác ABC đều cạnh a , gọi H là trung điểm cạnh BC suy ra AH vuông góc với BC và $BC = \frac{a}{2}$. Xét tam giác vuông AHC , áp dụng định lý py-ta-go ta có:

$$AH = \sqrt{AC^2 - MC^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy đường cao $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. □

❖ **Bài 32.** Trong Vật lí, ta có định luật Joule - Lenz để tính nhiệt lượng toả ra ở dây dẫn khi có dòng điện chạy qua:

$$Q = I^2 Rt$$

Trong đó:

- ☑ Q là nhiệt lượng toả ra trên dây dẫn tính theo Jun (J);
- ☑ I là cường độ dòng điện chạy trong dây dẫn tính theo Ampe (A);
- ☑ R là điện trở dây dẫn tính theo Ohm(Ω);
- ☑ t là thời gian dòng điện chạy qua dây dẫn tính theo giây.

Áp dụng công thức trên để giải bài toán sau: Một bếp điện khi hoạt động bình thường có điện trở $R = 80 \Omega$. Tính cường độ dòng điện chạy trong dây dẫn, biết nhiệt lượng mà dây dẫn toả ra trong 1 giây là 500 J.

☞ **Lời giải.**

Áp dụng công thức $Q = I^2 Rt$, cường độ dòng điện chạy trong dây dẫn:

$$I = \sqrt{\frac{Q}{Rt}} = \sqrt{\frac{500}{80 \cdot 1}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}.$$

Vậy cường độ dòng điện chạy trong dây dẫn là $I = \sqrt{\frac{Q}{Rt}} = \frac{5}{2}$. □

❖ **Bài 33.** Tốc độ gần đúng của một ô-tô ngay trước khi đạp phanh được tính theo công thức $v = \sqrt{2\lambda gd}$, trong đó v (m/s) là tốc độ của ô-tô, d (m) là chiều dài của vết trượt tính từ thời điểm đạp phanh cho đến khi ô-tô dừng lại trên đường, λ là hệ số cản lăn của mặt đường, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ (Nguồn: *J. Libby, Math for Real Life*:

Teaching Practical Uses for Algebra, McFarland, năm 2017). Nếu một chiếc ô-tô để lại vết trượt dài khoảng 20 m trên đường nhựa thì tốc độ của ô-tô trước khi đạp phanh là khoảng bao nhiêu mét trên giây (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)? Biết rằng hệ số cản lăn của đường nhựa là $\lambda = 0,7$.



Vết trượt của xe ô-tô

Lời giải.

Tốc độ của ô-tô trước khi đạp phanh là

$$v = \sqrt{2\lambda gd} = \sqrt{2 \cdot 0,7 \cdot 9,8 \cdot 20} = \sqrt{\frac{2^3 \cdot 7^3}{10}} = \frac{14\sqrt{35}}{5}.$$

□

Bài 34. Phân tích thành nhân tử

a) $a - 5\sqrt{a}$;

b) $a - 7$ với $a > 0$;

c) $a + 4\sqrt{a} + 4$;

d) $\sqrt{xy} - 4\sqrt{x} + 3\sqrt{y} - 12$.

Lời giải.

a) $a - 5\sqrt{a} = \sqrt{a}(\sqrt{a} - 5)$;

b) $a - 7 = (\sqrt{a} - \sqrt{7})(\sqrt{a} + \sqrt{7})$;

c) $a + 4\sqrt{a} + 4 = (\sqrt{a} + 2)^2$;

d) $\sqrt{xy} - 4\sqrt{x} + 3\sqrt{y} - 12 = (\sqrt{x} + 3)(\sqrt{y} - 4)$.

□

Bài 35. Chứng minh rằng $\sqrt{7} - \sqrt{3} < \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $(\sqrt{7} + \sqrt{2})^2 = 9 + 2\sqrt{14}$

$$(\sqrt{6} + \sqrt{3})^2 = 9 + 2\sqrt{18}$$

Vì $9 + 2\sqrt{14} < 9 + 2\sqrt{18}$ nên $(\sqrt{7} + \sqrt{2})^2 < (\sqrt{6} + \sqrt{3})^2$.

Hay $\sqrt{7} - \sqrt{3} < \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

□

Bài 36. Tìm x biết

a) $\sqrt{49(1 - 2x + x^2)} - 35 = 0$;

b) $\sqrt{x^2 - 9} - 5\sqrt{x + 3} = 0$.

Lời giải.

a) $x_1 = 6$; $x_2 = -4$;

b) $x_1 = -3$; $x_2 = 28$.

□

⇔ **Bài 37.** Tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt{7 + \sqrt{13}} - \sqrt{7 - \sqrt{13}}$.

Lời giải.

Hướng dẫn: Tính $A^2 = 2$, suy ra $A = \sqrt{2}$. □

LUYỆN TẬP CHUNG 1

↻ **Bài 1.** Với giá trị nào của x thì các căn thức sau xác định

- | | | | |
|--------------------|-----------------------------------|------------------------------|---------------------------------|
| a) $\sqrt{-3x}$. | d) $\sqrt{-3x+2}$. | g) $\sqrt{\frac{1}{3-2x}}$. | i) $\sqrt{\frac{4x^2}{3x-1}}$. |
| b) $\sqrt{2x-4}$. | e) $\frac{x}{x-2} + \sqrt{x-2}$. | | |
| c) $\sqrt{7-6x}$. | f) $\frac{x}{x+2} + \sqrt{x-2}$. | h) $\sqrt{\frac{-2}{x+1}}$. | j) $\sqrt{\frac{2-3x}{4x^2}}$. |

☞ **Lời giải.**

- a) $\sqrt{-3x}$ xác định khi $-3x \geq 0$ suy ra $x \leq 0$.
- b) $\sqrt{2x-4}$ xác định khi $2x-4 \geq 0$ hay $2x \geq 4$, suy ra $x \geq 2$.
- c) $\sqrt{7-6x}$ xác định khi $7-6x \geq 0$ hay $6x \leq 7$, suy ra $x \leq \frac{7}{6}$.
- d) $\sqrt{-3x+2}$ xác định khi $-3x+2 \geq 0$ hay $3x \leq 2$, suy ra $x \leq \frac{2}{3}$.
- e) $\frac{x}{x-2} + \sqrt{x-2}$ xác định khi $\begin{cases} x-2 \neq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x \neq 2 \\ x \geq 2 \end{cases}$, suy ra $x > 2$.
- f) $\frac{x}{x+2} + \sqrt{x-2}$ xác định khi $\begin{cases} x+2 \neq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x \neq -2 \\ x \geq 2 \end{cases}$, suy ra $x \geq 2$.
- g) $\sqrt{\frac{1}{3-2x}}$ xác định khi $\frac{1}{3-2x} \geq 0$ hay $3-2x > 0$, suy ra $x < \frac{3}{2}$.
- h) $\sqrt{\frac{-2}{x+1}}$ xác định khi $\frac{-2}{x+1} \geq 0$ hay $x+1 < 0$, suy ra $x < -1$.

i) $\sqrt{\frac{4x^2}{3x-1}}$ xác định khi $\frac{4x^2}{3x-1} \geq 0$ hay $\begin{cases} x^2 \geq 0 \\ 3x-1 > 0 \\ x^2 = 0 \\ 3x-1 \neq 0 \end{cases}$, suy ra $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x > \frac{1}{3} \\ x = 0 \\ x \neq \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x = 0 \end{cases}$.

j) $\sqrt{\frac{2-3x}{4x^2}}$ xác định khi $\frac{2-3x}{4x^2} \geq 0$ hay $\begin{cases} x \neq 0 \\ 2-3x \geq 0 \end{cases}$, suy ra $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \leq \frac{2}{3} \end{cases}$.

↻ **Bài 2.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để biểu thức $M = \sqrt{x+4} + \sqrt{2-x}$ có nghĩa?

☞ **Lời giải.**

$$M \text{ có nghĩa khi } \begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x \leq 2 \end{cases}.$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy có 7 giá trị nguyên của x để biểu thức M có nghĩa. □

↻ **Bài 3.** Tính

a) $\sqrt[3]{162} \cdot \sqrt[3]{-2} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$;

b) $\sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{22\frac{1}{2}} : \sqrt[3]{53\frac{1}{3}}$.

Lời giải.

a) -6 ;

b) $-\frac{1}{4}$.

□

Bài 4. Tính

a) $(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})^3$;

b) $(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{9})$.

Lời giải.

a) $5 + 3\sqrt[3]{18} + 3\sqrt[3]{12}$;

b) 2.

□

Bài 5. Rút gọn biểu thức

a) $\sqrt[3]{3} \cdot (5\sqrt[3]{18} - 3\sqrt[3]{144}) + \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{50}$;

b) $(12\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{2}) \left(5\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \right)$.

Lời giải.

a) $2\sqrt[3]{2}$;

b) 84.

□

Bài 6. Không dùng MTCT, tính giá trị của biểu thức

$$A = \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} - \sqrt{3}.$$

Lời giải.Ta có $A = |1 - \sqrt{3}| - \sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1) - \sqrt{3} = -1$. ← Hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$.

□

Bài 7. Tính $M = \sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$.**Lời giải.**

$$\begin{aligned} M^3 &= (5\sqrt{2} + 7) - (5\sqrt{2} - 7) - 3\sqrt[3]{(5\sqrt{2} + 7)(5\sqrt{2} - 7)} \cdot M \\ \Leftrightarrow M^3 &= 14 - 3M \\ \Leftrightarrow M^3 + 3M - 14 &= 0 \\ \Leftrightarrow (M - 2)(M^2 + 2M + 7) &= 0 \\ \Leftrightarrow M - 2 = 0 & \text{ (vì } M^2 + 2M + 7 = (M + 1)^2 + 6 > 0) \\ \Leftrightarrow M &= 2. \end{aligned}$$

□

Bài 8. Thực hiện các phép tính:

a) $\sqrt{27 \cdot 75}$;

b) $\sqrt{200 \cdot 18}$;

c) $\sqrt{160 \cdot 12,1}$;

d) $\sqrt{3,6 \cdot 25,6}$.

Lời giải.

a) $\sqrt{27 \cdot 75} = \sqrt{9 \cdot 9 \cdot 25} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{25} = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 45$.

b) $\sqrt{200 \cdot 18} = \sqrt{100 \cdot 4 \cdot 9} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 10 \cdot 2 \cdot 3 = 60$.

$$c) \sqrt{160 \cdot 12,1} = \sqrt{16 \cdot 100 \cdot 1,21} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{100} \cdot \sqrt{1,21} = 4 \cdot 10 \cdot 1,1 = 44.$$

$$d) \sqrt{3,6 \cdot 25,6} = \sqrt{0,36 \cdot 100 \cdot 2,56} = \sqrt{0,36} \cdot \sqrt{100} \cdot \sqrt{2,56} = 0,6 \cdot 10 \cdot 1,6 = 9,6.$$

□

◀ **Bài 9.** Thực hiện các phép tính:

a) $\sqrt{45} \cdot \sqrt{180}$;

b) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{105}$;

c) $\sqrt{250} \cdot \sqrt{0,9}$;

d) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{162}$.

☞ **Lời giải.**

a) $\sqrt{45} \cdot \sqrt{180} = \sqrt{45 \cdot 180} = \sqrt{8100} = 90.$

b) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{175} = \sqrt{7 \cdot 175} = \sqrt{1225} = 35.$

c) $\sqrt{250} \cdot \sqrt{0,9} = \sqrt{250 \cdot 0,9} = \sqrt{225} = 15.$

d) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{162} = \sqrt{8 \cdot 162} = \sqrt{1296} = 36.$

□

◀ **Bài 10.** Thực hiện các phép tính:

a) $A = \sqrt{\frac{49}{81}}$;

b) $B = \frac{\sqrt{3 + \sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$.

☞ **Lời giải.**

a) Ta có $A = \sqrt{\frac{49}{81}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{81}} = \frac{7}{9}.$

b) Ta có $B = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5} + 1}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$

□

◀ **Bài 11.** Rút gọn các biểu thức sau

a) $\sqrt{13 + 4\sqrt{3}} + 2\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$.

b) $(\sqrt{10} - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{3 + \sqrt{5}}$.

☞ **Lời giải.**

a) $\sqrt{13 + 4\sqrt{3}} + 2\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(1 + 2\sqrt{3})^2} + 2\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = 1 + 2\sqrt{3} + 2(2 - \sqrt{3}) = 5.$

b) $(\sqrt{10} - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{3 + \sqrt{5}} = (\sqrt{5} - 1) \cdot \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = (\sqrt{5} - 1) \cdot \sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2} = (\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1) = 4.$

□

◀ **Bài 12.** Thực hiện các phép tính:

a) $A = \sqrt{98} : \sqrt{2}$;

b) $B = (\sqrt{48} - \sqrt{27} + \sqrt{3}) : \sqrt{3}$;

c) $C = (5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}) : \sqrt{15}$.

☞ **Lời giải.**

a) Ta có $A = \sqrt{98} : \sqrt{2} = \sqrt{98 : 2} = \sqrt{49} = 7.$

b) Ta có $B = (\sqrt{48} - \sqrt{27} + \sqrt{3}) : \sqrt{3} = \sqrt{48 : 3} - \sqrt{27 : 3} + \sqrt{3 : 3} = \sqrt{16} - \sqrt{9} + 1 = 2.$

c) $C = (5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}) : \sqrt{15} = (5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}) : (\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}) = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}} + \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{5} + \sqrt{3}.$

□

⇨ **Bài 13.** Tính

a) $(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5});$

b) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2}).$

☞ **Lời giải.**

Sử dụng hằng đẳng thức của hiệu hai bình phương, ta có

a) $(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5}) = 2^2 - (\sqrt{5})^2 = 4 - 5 = -1.$

b) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2 = 5 - 2 = 3.$

□

⇨ **Bài 14.** Rút gọn các biểu thức sau

a) $\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2};$

b) $\sqrt{(\sqrt{7} - 3)^2} + \sqrt{(\sqrt{7} + 3)^2}.$

☞ **Lời giải.**

a) $\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} = |\sqrt{3} - \sqrt{2}| + |1 - \sqrt{2}| = \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{3} - 1;$

b) $\sqrt{(\sqrt{7} - 3)^2} + \sqrt{(\sqrt{7} + 3)^2} = |\sqrt{7} - 3| + |\sqrt{7} + 3| = 3 - \sqrt{7} + \sqrt{7} + 3 = 6.$

□

⇨ **Bài 15.** Thực hiện phép tính

a) $\sqrt{3}(\sqrt{192} - \sqrt{75});$

b) $\frac{-3\sqrt{18} + 5\sqrt{50} - \sqrt{128}}{7\sqrt{2}}.$

☞ **Lời giải.**

a) $\sqrt{3}(\sqrt{192} - \sqrt{75}) = \sqrt{3}(\sqrt{3 \cdot 64} - \sqrt{3 \cdot 25}) = \sqrt{3}(8\sqrt{3} - 5\sqrt{3}) = \sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 3 \cdot 3 = 9.$

b) $\frac{-3\sqrt{18} + 5\sqrt{50} - \sqrt{128}}{7\sqrt{2}} = \frac{-3\sqrt{2 \cdot 9} + 5\sqrt{2 \cdot 25} - \sqrt{2 \cdot 64}}{7\sqrt{2}} = \frac{-9\sqrt{2} + 25\sqrt{2} - 8\sqrt{2}}{7\sqrt{2}}$
 $= \frac{8\sqrt{2}}{7\sqrt{2}} = \frac{8}{7}.$

□

⇨ **Bài 16.** Chứng minh rằng

a) $(1 - \sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{2};$

b) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = 5 + 2\sqrt{6}.$

☞ **Lời giải.**

a) $(1 - \sqrt{2})^2 = 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{2} \Rightarrow (\text{đpcm}).$

b) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6} \Rightarrow (\text{đpcm}).$

□

⇨ **Bài 17.** Tính

a) $\sqrt{10,6^2 - 5,6^2};$

b) $\sqrt{29 + 12\sqrt{5}} + \sqrt{29 - 12\sqrt{5}};$

c) $\frac{\sqrt{10} + \sqrt{26}}{2\sqrt{5} + \sqrt{52}};$

d) $(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3});$

e) $(\sqrt{5 + \sqrt{21}} + \sqrt{5 - \sqrt{21}})^2;$

f) $\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6} + \sqrt{16}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4}}.$

☞ Lời giải.

a) $\sqrt{5,3^2 - 2,8^2} = \sqrt{8,1 \cdot 2,5} = \sqrt{81 \cdot 100 \cdot 0,25} = 9 \cdot 10 \cdot 0,5 = 45.$

b) $\sqrt{29 + 12\sqrt{5}} + \sqrt{29 - 12\sqrt{5}} = \sqrt{(3 + 2\sqrt{5})^2} + \sqrt{(3 - 2\sqrt{5})^2}$
 $= (3 + 2\sqrt{5}) + (2\sqrt{5} - 3) = 4\sqrt{5}.$

c) $\frac{\sqrt{10} + \sqrt{26}}{2\sqrt{5} + \sqrt{52}} = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{13})}{2 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{13})} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

d) $(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}) = 1 - (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 = 1 - (5 - 2\sqrt{6}) = 2\sqrt{6} - 4.$

e) $(\sqrt{5 + \sqrt{21}} + \sqrt{5 - \sqrt{21}})^2 = 5 + \sqrt{21} + 2 \cdot \sqrt{5 + \sqrt{21}} \cdot \sqrt{5 - \sqrt{21}} + 5 - \sqrt{21}$
 $= 10 + 2\sqrt{(5 + \sqrt{21})(5 - \sqrt{21})}$
 $= 10 + 2\sqrt{4} = 14.$

f) $\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6} + \sqrt{16}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4}} = \frac{\sqrt{4} - \sqrt{6} + \sqrt{8} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4}}$
 $= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4}) + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4}}$
 $= \sqrt{2} + 1.$

□

🔗 Bài 18. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{x^4 - 4x^2 + 4} - x^2.$

b) $\frac{\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1}}{x + 1},$ với $x > 1.$

c) $\frac{\sqrt{4x^2 + 4x + 1}}{4x^2 - 1}$ với $x > -\frac{1}{2}.$

d) $9 + x + \sqrt{4 - 4x + x^2}$ với $x < 2.$

☞ Lời giải.

a) $\sqrt{x^4 + 4x^2 + 4} - x^2 = \sqrt{(x^2 + 2)^2} - x^2 = x^2 + 2 - x^2 = 2, (x^2 + 2 > 0).$

b) $\frac{\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1}}{x + 1} = \frac{\sqrt{(x^2 - 1)^2}}{x + 1}, (x^2 - 1 > 0)$
 $= \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = x - 1.$

c) $A = \frac{\sqrt{4x^2 + 4x + 1}}{4x^2 - 1} = \frac{\sqrt{(2x + 1)^2}}{(2x + 1)(2x - 1)} = \frac{|2x + 1|}{(2x + 1)(2x - 1)}.$
Do $x > -\frac{1}{2}$ nên $2x + 1 > 0.$
Suy ra $A = \frac{2x + 1}{(2x + 1)(2x - 1)} = \frac{1}{2x - 1}.$

$$d) B = 9 + x + \sqrt{4 - 4x + x^2} = 9 + x + \sqrt{(2 - x)^2} = 9 + x + |2 - x|.$$

Do $x < 2$ nên $2 - x > 0$.

Suy ra $B = 9 + x + 2 - x = 11$.

□

◇ **Bài 19.** Rút gọn các biểu thức sau

a) $\sqrt[3]{(-x-1)^3};$

b) $\sqrt[3]{8x^3 - 12x^2 + 6x - 1}.$

☞ **Lời giải.**

a) $\sqrt[3]{(-x-1)^3} = -x - 1.$

b) $\sqrt[3]{8x^3 - 12x^2 + 6x - 1} = \sqrt[3]{(2x-1)^3} = 2x - 1.$

□

◇ **Bài 20.** Tìm x biết:

a) $\sqrt{x^2} = 1.$

b) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 3.$

c) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 3.$

d) $\sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 3x.$

☞ **Lời giải.**

a) $\sqrt{x^2} = 1 \Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1.$

b) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 3 \Rightarrow \sqrt{(2x-1)^2} = 3 \Rightarrow |2x-1| = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1. \end{cases}$

c) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 3 \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2} = 3 \Rightarrow |x-2| = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -1. \end{cases}$

d) $\sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 3x \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(x+2)^2} = 3x \Rightarrow |x+1| + |x+2| = 3x. \quad (1)$

Vì $|x+1| + |x+2| \geq 0$ nên $x \geq 0 \Rightarrow x+1 > 0$ và $x+2 > 0$.

Do đó

$$(1) \Rightarrow x+1 + x+2 = 3x \Rightarrow x = 3 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 3$.

□

◇ **Bài 21.** Tìm x biết

a) $2\sqrt[3]{27x} + \frac{1}{7}\sqrt[3]{-343x} + \sqrt[3]{-729x} = 2;$

b) $\sqrt[3]{x^3 - 9x^2} = x - 3.$

☞ **Lời giải.**

a) $-\frac{1}{8};$

b) 1.

□

◇ **Bài 22.** Rút gọn các biểu thức

a) $A = \sqrt{(a-1)^2(2a+1)^2}$ với $a > 1$;

b) $B = \sqrt{(b-1)(b+7) + 16}$ với $b < -3$;

c) $C = \sqrt{c^2 + 10c + 25} - \sqrt{c^2 - 10c + 5}$ với $-5 \leq c \leq 5$;

$$d) D = \frac{1-d}{\sqrt{d^2-2d+1}} + \frac{\sqrt{d^2-4d+4}}{d-2} \text{ với } d > 2.$$

☞ **Lời giải.**

$$a) A = \sqrt{(a-1)^2} \cdot \sqrt{(2a+1)^2} = (a-1)(2a+1).$$

$$b) B = \sqrt{b^2+6b+9} = \sqrt{(b+3)^2} = -(b+3).$$

$$c) C = \sqrt{(c+5)^2} - \sqrt{(c-5)^2} = (c+5) - (5-c) = 2c.$$

$$d) D = \frac{1-d}{\sqrt{(d-1)^2}} + \frac{\sqrt{(d-2)^2}}{d-2} = \frac{1-d}{d-1} + \frac{d-2}{d-2} = (-1) + 1 = 0.$$

□

☞ **Bài 23.** Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \sqrt{\frac{(x-1)^2}{16}} \text{ với } x \geq 1;$$

$$b) \sqrt{\frac{x^4}{(a-1)^2}} \text{ với } a < 1.$$

☞ **Lời giải.**

a) Vì $(x-1)^2 \geq 0$ và $16 > 0$ nên ta có

$$\sqrt{\frac{(x-1)^2}{16}} = \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{\sqrt{16}} = \frac{|x-1|}{4} \underset{\text{vì } x \geq 1}{=} \frac{x-1}{4}.$$

b) Vì $x^4 \geq 0$ và $(a-1)^2 > 0$ nên ta có

$$\sqrt{\frac{x^4}{(a-1)^2}} = \frac{\sqrt{x^4}}{\sqrt{(a-1)^2}} = \frac{x^2}{|a-1|} \underset{\text{vì } a < 1}{=} \frac{x^2}{1-a}.$$

□

☞ **Bài 24.** Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \frac{\sqrt{27(x-5)^2}}{\sqrt{3}} \text{ với } x \geq 5;$$

$$b) \frac{\sqrt{(x-4)^4}}{\sqrt{9(x-4)^2}} \text{ với } x < 4.$$

☞ **Lời giải.**

a) Với $x \geq 5$ ta có

$$\frac{\sqrt{27(x-5)^2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27(x-5)^2}{3}} = \sqrt{9(x-5)^2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{(x-5)^2} = 3 \cdot |x-5| \underset{\text{vì } x \geq 5}{=} 3(x-5).$$

b) Với $x < 4$ ta có

$$\frac{\sqrt{(x-4)^4}}{\sqrt{9(x-4)^2}} = \sqrt{\frac{(x-4)^4}{9(x-4)^2}} = \sqrt{\frac{(x-4)^2}{9}} = \frac{\sqrt{(x-4)^2}}{\sqrt{9}} = \frac{|x-4|}{3} \underset{\text{vì } x < 4}{=} \frac{4-x}{3}.$$

□

☞ **Bài 25.** Rút gọn các biểu thức:

$$\text{a) } A = \sqrt{\frac{a^2}{b}} \cdot \sqrt{\frac{a^6}{b^3}}, \text{ với } b > 0;$$

$$\text{b) } B = b^5 \sqrt{\frac{a^2 + 6a + 9}{b^8}}.$$

🗨️ Lời giải.

a) Ta sử dụng quy tắc nhân hai căn bậc hai rồi biến đổi tiếp

$$A = \sqrt{\frac{a^2}{b}} \cdot \sqrt{\frac{a^6}{b^3}} = \sqrt{\frac{a^2}{b} \cdot \frac{a^6}{b^3}} = \sqrt{\frac{a^8}{b^4}} = \frac{\sqrt{a^8}}{\sqrt{b^4}} = \frac{a^4}{b^2}.$$

b) Ta biến đổi

$$\begin{aligned} B &= b^5 \cdot \sqrt{\frac{(a+3)^2}{b^8}} = b^5 \cdot \frac{\sqrt{(a+3)^2}}{\sqrt{b^8}} = b^5 \cdot \frac{|a+3|}{b^4} = b \cdot |a+3| \\ &= \begin{cases} b \cdot (a+3) & \text{nếu } a \geq -3 \\ -b \cdot (a+3) & \text{nếu } a < -3. \end{cases} \end{aligned}$$

□

🔗 **Bài 26.** Rút gọn biểu thức với điều kiện đã cho và tính giá trị của nó:

a) $\sqrt{\frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{x + 2\sqrt{x} + 1}}$ với $x \geq 0$; tính giá trị tại $x = 4$.

b) $\sqrt{\frac{(x-2)^4}{(3-x)^2}} + \frac{x^2-1}{x-3}$ với $x < 3$; tính giá trị tại $x = 0,5$.

🗨️ Lời giải.

a) Với $x \geq 0$ ta có

$$\sqrt{\frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{x + 2\sqrt{x} + 1}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{(\sqrt{x} + 1)^2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{x} - 1)^2}}{\sqrt{(\sqrt{x} + 1)^2}} = \frac{|\sqrt{x} - 1|}{|\sqrt{x} + 1|} = \frac{|\sqrt{x} - 1|}{\sqrt{x} + 1}.$$

Thay $x = 4$ vào ta có

$$\frac{|\sqrt{4} - 1|}{\sqrt{4} + 1} = \frac{1}{3}.$$

b) Với $x < 3$ ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{(x-2)^4}{(3-x)^2}} + \frac{x^2-1}{x-3} &= \frac{\sqrt{(x-2)^4}}{\sqrt{(3-x)^2}} + \frac{x^2-1}{x-3} = \frac{(x-2)^2}{|3-x|} + \frac{x^2-1}{x-3} \\ &= \frac{x^2-4x+4}{3-x} - \frac{x^2-1}{3-x} \\ &= \frac{-4x+5}{3-x}. \end{aligned}$$

Thay $x = 0,5$ vào ta có

$$\frac{-4 \cdot 0,5 + 5}{3 - 0,5} = \frac{6}{5}.$$

□

🔗 **Bài 27.** Phân tích các biểu thức sau thành nhân tử

a) $A = \sqrt{x^2 - 16} + \sqrt{x^2 - 4x}$ với $x > 4$;

$$\text{b) } B = \sqrt{x^3 - 8} + \sqrt{x(x+2) + 4} \text{ với } x > 2;$$

$$\text{c) } C = \sqrt{4x^2 + 4x + 1} - \sqrt{4x^2 + 4x} \text{ với } x > 0.$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \sqrt{x^2 - 16} + \sqrt{x^2 - 4x} \\ &= \sqrt{x-4} \cdot \sqrt{x+4} + \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-4} \\ &= \sqrt{x-4} (\sqrt{x+4} + \sqrt{x}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \sqrt{x^3 - 8} + \sqrt{x(x+2) + 4} \\ &= \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 4} + \sqrt{x^2 + 2x + 4} \\ &= \sqrt{x^2 + 2x + 4} (\sqrt{x-2} + 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } C &= \sqrt{4x^2 + 4x + 1} - \sqrt{4x^2 + 4x} \\ &= \sqrt{(2x+1)^2} - \sqrt{4x(x+1)} \\ &= 2x+1 + 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+1} \\ &= (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})^2. \end{aligned}$$

◀ **Bài 28.** Cho biểu thức $P = \frac{x\sqrt{x} + 1}{x - \sqrt{x} + 1} - 1$ với $x \geq 0$.

- a) Viết $x\sqrt{x} + 1$ thành tổng hai lập phương rồi phân tích thành nhân tử để rút gọn biểu thức đã cho.
b) Tính giá trị của P tại $x = 100$.

Lời giải.

Sử dụng hằng đẳng thức của tổng hai lập phương, ta có

$$\text{a) Ta có } x\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x})^3 + 1^3 = (\sqrt{x} + 1) [(\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} \cdot 1 + 1^2] = (\sqrt{x} + 1) (x - \sqrt{x} + 1).$$

$$\text{Từ đó } P = (\sqrt{x} + 1) - 1 = \sqrt{x}.$$

$$\text{b) Tại } x = 100 \text{ (thỏa mãn điều kiện) thì } P = \sqrt{100} = 10.$$

◀ **Bài 29.** Cho căn thức $\sqrt{x^2 - 4x + 4}$.

- a) Hãy chứng tỏ rằng căn thức xác định với mọi giá trị của x ;
b) Rút gọn căn thức đã cho với $x \geq 2$;
c) Chứng tỏ rằng với mọi $x \geq 2$, biểu thức $\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 4x + 4}}$ có giá trị không đổi.

Lời giải.

$$\text{a) } x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = (x - 2)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{căn thức xác định với mọi giá trị của } x.$$

$$\text{b) Ta có } \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2| = x-2 \text{ (vì } x \geq 2).$$

$$\text{c) Với mọi } x \geq 2, \text{ ta có } \sqrt{x^2 - 4x + 4} = x - 2 \text{ (câu b).}$$

$$\text{Ta có } \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 4x + 4}} = \sqrt{x - (x-2)} = \sqrt{x-x+2} = \sqrt{2} \Rightarrow \text{có giá trị không đổi.}$$

◀ **Bài 30.** Trong Vật lí, tốc độ (m/s) của một vật đang bay được cho bởi công thức $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$, trong đó E là động năng của vật (tính bằng Joule, kí hiệu là J) và m (kg) là khối lượng của vật (Theo sách *Vật lí đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016*). Tính tốc độ bay của một vật khi biết vật đó có khối lượng 2,5 kg và động năng 281,25 J.

Lời giải.

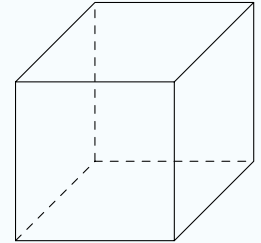
Tốc độ bay của vật là

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 281,25}{2,5}} = \sqrt{225} = 15 \text{ (m/s)}.$$

□

Bài 31.

Người ta cần làm một thùng hình lập phương bằng bìa cứng không có nắp trên và có thể tích 216 dm^3 để đựng đồ. Tính diện tích bìa cứng cần dùng để làm thùng đựng đó (coi diện tích các mép nối là không đáng kể).

**Lời giải.**

Gọi x (dm, $x > 0$) là độ dài cạnh của thùng hình lập phương cần làm.

Ta có $x^3 = 216$, suy ra $x = \sqrt[3]{216} = 6$ (dm).

Vì thùng đựng không có nắp nên thùng gồm 4 mặt bên và 1 mặt đáy, mỗi mặt là một hình vuông cạnh 6 dm. Do đó diện tích bìa cứng cần dùng là

$$S = 5 \cdot 6^2 = 180. \text{ (dm}^2\text{)}$$

□

Bài 4

BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI



TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 Đưa thừa số ra ngoài dấu căn, vào trong dấu căn

- ☑ Nếu a là một số và b là một số không âm thì $\sqrt{a^2b} = |a|\sqrt{b}$.
- ☑ Nếu a và b là hai số không âm thì $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$.
- ☑ Nếu a là số âm và b là số không âm thì $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2b}$.

2 Trục căn thức ở mẫu

Đối với những biểu thức chứa căn thức ở mẫu, ta thường biến đổi để khử căn thức ở mẫu đó. Phép biến đổi như vậy gọi là *trục căn thức ở mẫu*.

Chẳng hạn, với biểu thức $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ($a \geq 0, b > 0$), ta biến đổi:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$$

⚠ Với số thực a không âm và số thực b dương, ta thường biến đổi

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b} \text{ hoặc } \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{b^2} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$$

để khử mẫu của biểu thức dưới căn.

Tổng quát hơn, với hai biểu thức A và B thỏa mãn $AB \geq 0, B \neq 0$, ta có:

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{AB}{B^2}} = \frac{\sqrt{AB}}{B^2} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|}$$



— Với hai biểu thức A, B mà $B > 0$, ta có $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$.

— Với các biểu thức A, B, C , mà $A \geq 0$ và $A \neq B^2$, ta có:

$$\frac{C}{\sqrt{A+B}} = \frac{C(\sqrt{A}-B)}{A-B^2}; \quad \frac{C}{\sqrt{A}-B} = \frac{C(\sqrt{A}+B)}{A-B^2}.$$

— Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0, B \geq 0$ và $A \neq B$, ta có

$$\frac{C}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A}-\sqrt{B})}{A-B}; \quad \frac{C}{\sqrt{A}-\sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A}+\sqrt{B})}{A-B}.$$

3 Rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai

Khi rút gọn biểu thức có chứa căn thức bậc hai, ta cần phối hợp các phép tính (cộng, trừ, nhân, chia) và các phép biến đổi đã học (đưa thừa số ra ngoài hoặc vào trong dấu căn; khử mẫu của biểu thức lấy căn; trục căn thức ở mẫu).

B

CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

❖ Ví dụ 1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

- a) $\sqrt{45}$; b) $\sqrt{2400}$; c) $\sqrt{147}$; d) $\sqrt{1,25}$;
 e) $\sqrt{12}$; f) $3\sqrt{27}$; g) $5\sqrt{48}$; h) $\sqrt{45}$.

🗨️ Lời giải.

- a) $\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$; b) $\sqrt{2400} = \sqrt{400 \cdot 6} = 20\sqrt{6}$;
 c) $\sqrt{147} = \sqrt{49 \cdot 3} = 7\sqrt{3}$; d) $\sqrt{1,25} = \sqrt{0,25 \cdot 5} = 0,5\sqrt{5}$;
 e) $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$; f) $3\sqrt{27} = 3\sqrt{3^2 \cdot 3} = 9\sqrt{3}$;
 g) $5\sqrt{48} = 5\sqrt{4^2 \cdot 3} = 20\sqrt{3}$; h) $\sqrt{45} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$.

□

❖ Ví dụ 2. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

- a) $\sqrt{50 \cdot 6}$; b) $\sqrt{14 \cdot 21}$; c) $\sqrt{32 \cdot 45}$; d) $\sqrt{125 \cdot 27}$.

🗨️ Lời giải.

- a) $\sqrt{50 \cdot 6} = \sqrt{100 \cdot 3} = 10\sqrt{3}$;
 b) $\sqrt{14 \cdot 21} = \sqrt{7 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3} = 7\sqrt{6}$;
 c) $\sqrt{32 \cdot 45} = \sqrt{16 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 5} = \sqrt{16 \cdot 9 \cdot 10} = 4 \cdot 3\sqrt{10} = 12\sqrt{10}$;
 d) $\sqrt{125 \cdot 27} = \sqrt{25 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 3} = \sqrt{25 \cdot 9 \cdot 15} = 5 \cdot 3\sqrt{15} = 15\sqrt{15}$.

□

❖ Ví dụ 3. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

- a) $\sqrt{18x}$; b) $\sqrt{75x^2y}$; c) $\sqrt{605x^3y^2}$;
 d) $\sqrt{128(x-y)^2}$; e) $\sqrt{150(4x^2-4x+1)}$; f) $\sqrt{x^3-6x^2+12x-8}$.

🗨️ Lời giải.

- a) $\sqrt{18x} = \sqrt{9 \cdot 2x} = 3\sqrt{2x}$ (với $x \geq 0$).
 b) $\sqrt{75x^2y} = \sqrt{25x^2 \cdot 3y} = 5|x|\sqrt{3y}$ ($y \geq 0$)

$$= \begin{cases} 5x\sqrt{3y} & \text{nếu } x \geq 0 \\ -5x\sqrt{3y} & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

 c) $\sqrt{605x^3y^2} = \sqrt{121x^2y^2 \cdot 5x} = 11|x|y\sqrt{5x}$ ($x \geq 0$)

$$= \begin{cases} 11xy\sqrt{5x} & \text{nếu } y \geq 0 \\ -11xy\sqrt{5x} & \text{nếu } y < 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \sqrt{128(x-y)^2} &= \sqrt{64(x-y)^2 \cdot 2} = 8|x-y|\sqrt{2} \\ &= \begin{cases} 8(x-y)\sqrt{2} & \text{nếu } x \geq y \\ 8(y-x)\sqrt{2} & \text{nếu } x < y. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \sqrt{150(4x^2 - 4x + 1)} &= \sqrt{25 \cdot 6(2x-1)^2} \\ &= 5|2x-1|\sqrt{6} = \begin{cases} 5(2x-1)\sqrt{6} & \text{nếu } x \geq \frac{1}{2} \\ 5(1-2x)\sqrt{6} & \text{nếu } x < \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{f) } \sqrt{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} = \sqrt{(x-2)^3} = \sqrt{(x-2)^2 \cdot (x-2)} = (x-2)\sqrt{x-2} \text{ (với } x \geq 2\text{)}.$$

□

► Dạng 2. Đưa thừa số vào trong dấu căn

◆ **Ví dụ 4.** Đưa thừa số vào trong dấu căn

- | | | | |
|-------------------|-------------------|-----------------------------|------------------------|
| a) $3\sqrt{5}$; | b) $5\sqrt{6}$; | c) $\frac{2}{7}\sqrt{35}$; | d) $5\sqrt{3}$; |
| e) $-5\sqrt{2}$; | f) $-2\sqrt{7}$; | g) $-4\sqrt{\frac{1}{8}}$; | h) $-0,06\sqrt{250}$. |

► **Lời giải.**

$$\text{a) } 3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{45}.$$

$$\text{b) } 5\sqrt{6} = \sqrt{5^2 \cdot 6} = \sqrt{150}.$$

$$\text{c) } \frac{2}{7}\sqrt{35} = \sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^2 \cdot 35} = \sqrt{\frac{20}{7}};$$

$$\text{d) } 5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{75}.$$

$$\text{e) } -5\sqrt{2} = -\sqrt{5^2 \cdot 2} = -\sqrt{50}.$$

$$\text{f) } -2\sqrt{7} = -\sqrt{2^2 \cdot 7} = -\sqrt{28}.$$

$$\text{g) } -4\sqrt{\frac{1}{8}} = -\sqrt{4^2 \cdot \frac{1}{8}} = -\sqrt{2}.$$

$$\text{h) } -0,06\sqrt{250} = -\sqrt{(0,06)^2 \cdot 250} = -\sqrt{0,9}.$$

□

◆ **Ví dụ 5.** Đưa thừa số vào trong dấu căn

- | | | | |
|--|--|--|---|
| a) $-2\sqrt{a} \text{ (} a \geq 0\text{)}$; | b) $2a\sqrt{\frac{3}{10a}} \text{ với } a > 0$; | c) $-x\sqrt{\frac{3}{x}} \text{ với } x > 0$; | d) $-x\sqrt{\frac{-1}{x}} \text{ với } x < 0$. |
|--|--|--|---|

► **Lời giải.**

$$\text{a) } -2\sqrt{a} = -\sqrt{2^2 \cdot a} = -\sqrt{4a}.$$

$$\text{b) } 2a\sqrt{\frac{3}{10a}} = \sqrt{4a^2 \cdot \frac{3}{10a}} = \sqrt{\frac{6a}{5}} \text{ (vì } a > 0\text{)}.$$

$$\text{c) } -x\sqrt{\frac{3}{x}} = -\sqrt{x^2 \cdot \frac{3}{x}} = -\sqrt{3x} \text{ với } x > 0.$$

$$\text{d) } -x\sqrt{\frac{-1}{x}} = \sqrt{(-x)^2 \cdot \left(\frac{-1}{x}\right)} = \sqrt{-x} \text{ với } x < 0.$$

□

◀ **Ví dụ 6.** Chỉ ra chỗ sai trong các biến đổi sau:

$$\text{a) } x\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{3x^2}{7}};$$

$$\text{b) } xy\sqrt{\frac{y}{x}} = y\sqrt{x^2 \cdot \frac{y}{x}} = y\sqrt{xy}.$$

☞ **Lời giải.**

a) Biến đổi $x\sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{3x^2}{7}$ chỉ đúng khi $x \geq 0$.

$$\text{Nếu } x < 0 \text{ thì } x\sqrt{\frac{3}{7}} = -\sqrt{\frac{3x^2}{7}}.$$

b) Biến đổi $xy\frac{y}{x} = y\sqrt{x^2\frac{y}{x}} = y\sqrt{xy}$ chỉ đúng khi $x > 0$.

$$\text{Nếu } x < 0 \text{ thì } xy\sqrt{\frac{y}{x}} = -y\sqrt{x^2 \cdot \frac{y}{x}} = -y\sqrt{xy}.$$

□

◀ **Ví dụ 7.** Đưa thừa số vào trong dấu căn

$$\text{a) } x\sqrt{x};$$

$$\text{b) } y\sqrt{\frac{x}{y}};$$

$$\text{c) } \frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

☞ **Lời giải.**

a) $x\sqrt{x} = \sqrt{x^2 \cdot x} = \sqrt{x^3}$ ($x \geq 0$);

b) Điều kiện: $x \cdot y \geq 0$; $y \neq 0$.

$$\text{Xét trường hợp } x \geq 0; y > 0, \text{ ta có } y\sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt{y^2 \cdot \frac{x}{y}} = \sqrt{xy}.$$

$$\text{Xét trường hợp } x < 0; y < 0, \text{ ta có } y\sqrt{\frac{x}{y}} = -\sqrt{y^2 \cdot \frac{x}{y}} = -\sqrt{xy}.$$

c) Điều kiện: $xy > 0$. Ta có $\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}} = \sqrt{\frac{x^2}{y^2} \cdot \frac{y}{x}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$.

□

📁 Dạng 3. Khử mẫu của biểu thức lấy căn

◀ **Ví dụ 8.** Khử mẫu của biểu thức lấy căn

$$\text{a) } \sqrt{\frac{2a}{3b}} \text{ với } ab > 0;$$

$$\text{b) } a\sqrt{\frac{2}{5a}} \text{ với } a > 0;$$

$$\text{c) } 4x\sqrt{\frac{3}{4xy}} \text{ với } x > 0, y > 0.$$

☞ **Lời giải.**

$$\text{a) } \sqrt{\frac{2a}{3b}} = \sqrt{\frac{2a \cdot 3b}{3b \cdot 3b}} = \frac{\sqrt{6ab}}{\sqrt{(3b)^2}} = \frac{\sqrt{6ab}}{3|b|}.$$

$$\text{b) } a\sqrt{\frac{2}{5a}} = a\sqrt{\frac{2 \cdot 5a}{5a \cdot 5a}} = a\frac{\sqrt{10a}}{\sqrt{(5a)^2}} = a\frac{\sqrt{10a}}{5|a|} = a\frac{\sqrt{10a}}{5a} = \frac{\sqrt{10a}}{5}.$$

$$\text{c) } 4x\sqrt{\frac{3}{4xy}} = 4x\sqrt{\frac{3 \cdot 4xy}{4xy \cdot 4xy}} = 4x\frac{\sqrt{12xy}}{\sqrt{(4xy)^2}} = \frac{\sqrt{12xy}}{y}.$$

□

◊ **Ví dụ 9.** Khử mẫu của biểu thức lấy căn

a) $\sqrt{\frac{4}{7}}$;

b) $\sqrt{\frac{3}{5}}$;

c) $\sqrt{\frac{11}{2}}$;

d) $\sqrt{\frac{11}{6}}$.

☞ **Lời giải.**

a) $\sqrt{\frac{4}{7}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 7}{7^2}} = \sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^2 \cdot 7} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$.

b) $\sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 5}{5^2}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

c) $\sqrt{\frac{11}{2}} = \sqrt{\frac{11 \cdot 2}{2 \cdot 2}} = \frac{\sqrt{22}}{\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{22}}{2}$.

d) $\sqrt{\frac{11}{6}} = \sqrt{\frac{11 \cdot 6}{6 \cdot 6}} = \frac{\sqrt{66}}{\sqrt{6^2}} = \frac{\sqrt{66}}{6}$.

□

◊ **Ví dụ 10.** Khử mẫu của biểu thức lấy căn $\sqrt{\frac{5}{72}}$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\sqrt{\frac{5}{72}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 2}{72 \cdot 2}} = \sqrt{\frac{10}{144}} = \frac{1}{12}\sqrt{10}$.

⚠ Nếu nhân cả tử và mẫu của phân số $\frac{5}{72}$ với 72 thì vẫn ra kết quả nhưng biến đổi phức tạp hơn:

$$\sqrt{\frac{5}{72}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 72}{72^2}} = \sqrt{\frac{360}{72^2}} = \frac{6}{72}\sqrt{10} = \frac{1}{12}\sqrt{10}.$$

Vậy tìm thừa số phụ như thế nào cho hợp lí?

Trước hết, phân tích mẫu số ra thừa số nguyên tố: $72 = 2^3 \cdot 3^2$. Ta thấy ngay thừa số phụ là 2, lúc đó số mũ của các thừa số nguyên tố đều chẵn.

□

◊ **Ví dụ 11.** Khử mẫu của biểu thức lấy căn

a) $\sqrt{\frac{11}{27x}}$;

b) $\sqrt{\frac{3x}{5y^3}}$;

c) $\sqrt{\frac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}}$;

d) $\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}$.

☞ **Lời giải.**

a) $\sqrt{\frac{11}{27x}} = \sqrt{\frac{11 \cdot 3x}{27x \cdot 3x}} = \sqrt{\frac{33x}{81x^2}} = \frac{1}{9x}\sqrt{33x}$ (Điều kiện: $x > 0$).

b) $\sqrt{\frac{3x}{5y^3}} = \sqrt{\frac{3x \cdot 5y}{5y^3 \cdot 5y}} = \sqrt{\frac{15xy}{25y^4}} = \frac{1}{5y^2}\sqrt{15xy}$ (Điều kiện: $xy \geq 0$; $y \neq 0$).

c) $\sqrt{\frac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}} = \sqrt{\frac{1}{(x+1)^3}} = \sqrt{\frac{x+1}{(x+1)^4}}$
 $= \frac{1}{(x+1)^2}\sqrt{x+1}$ (Điều kiện $x > -1$).

d) $\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} = \sqrt{\frac{x-1}{x^3}} = \sqrt{\frac{x(x-1)}{x^4}}$
 $= \frac{1}{x^2}\sqrt{x(x-1)}$ (Điều kiện: $x \geq 1$ hoặc $x < 0$).

□

Dạng 4. Trục căn thức ở mẫu

◀ Ví dụ 12. Trục căn thức ở mẫu các biểu thức sau:

$$\begin{array}{lllll} \text{a) } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}; & \text{b) } \frac{3}{2\sqrt{6}}; & \text{c) } -\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}; & \text{d) } \frac{9}{2\sqrt{3}}; & \text{e) } \frac{2}{3\sqrt{5}}; \\ \text{f) } \frac{3}{\sqrt{7}}; & \text{g) } \frac{3+\sqrt{3}}{5\sqrt{3}}; & \text{h) } \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}; & \text{i) } -\frac{10}{3\sqrt{5}}; & \text{j) } \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{40}}; \end{array}$$

☞ Lời giải.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}. & \text{b) } \frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{3 \cdot \sqrt{6}}{2\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{2 \cdot 6} = \frac{\sqrt{6}}{4}. \\ \text{c) } -\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = -\frac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{4\sqrt{6}}{2} = -2\sqrt{6}. & \text{d) } \frac{9}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{9} \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}. \\ \text{e) } \frac{2}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{3(\sqrt{5})^2} = \frac{2\sqrt{5}}{3 \cdot 5} = \frac{2\sqrt{5}}{15}. & \text{f) } \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}. \\ \text{g) } \frac{3+\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{5}. & \text{h) } \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}. \\ \text{i) } -\frac{10}{3\sqrt{5}} = -\frac{10 \cdot \sqrt{5}}{3\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = -\frac{10\sqrt{5}}{3 \cdot 5} = -\frac{2\sqrt{5}}{3}. & \text{j) } \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{40}} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{40}}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{40}} = \frac{8\sqrt{5}}{40} = \frac{\sqrt{5}}{5}. \end{array}$$

□

◀ Ví dụ 13. Trục căn thức ở mẫu

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \frac{2}{\sqrt{3}-1}; & \text{b) } \frac{3}{\sqrt{15}+4}; & \text{c) } \frac{4}{\sqrt{3}-1}; & \text{d) } \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}; \\ \text{e) } \frac{5}{2+\sqrt{3}}; & \text{f) } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}; & \text{g) } \frac{7}{3-\sqrt{2}}; & \text{h) } \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}. \end{array}$$

☞ Lời giải.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3}+1. \\ \text{b) } \frac{3}{\sqrt{15}+4} = \frac{3(\sqrt{15}-4)}{(\sqrt{15}+4)(\sqrt{15}-4)} = \frac{3(\sqrt{15}-4)}{15-16} = 3(4-\sqrt{15}). \\ \text{c) } \frac{4}{\sqrt{3}-1} = \frac{4(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3})^2-1} = \frac{4(\sqrt{3}+1)}{3-1} = 2\sqrt{3}+2. \\ \text{d) } \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} = \sqrt{5}-\sqrt{3}. \\ \text{e) } \text{Ta có } \frac{5}{2+\sqrt{3}} = \frac{5 \cdot (2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3}) \cdot (2-\sqrt{3})} = \frac{10-5\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{10-5\sqrt{3}}{4-3} = 10-5\sqrt{3}. \\ \text{f) } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{10}+2}{5-2} = \frac{\sqrt{10}+2}{3}. \end{array}$$

$$g) \frac{7}{3-\sqrt{2}} = \frac{7 \cdot (3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} = \frac{7 \cdot (3+\sqrt{2})}{7} = 3 + \sqrt{2}.$$

$$h) \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{5-2\sqrt{6}}{1} = 5 - 2\sqrt{6}.$$

□

◇ **Ví dụ 14.** Trục căn thức ở mẫu

$$a) \frac{a}{3-2\sqrt{2}};$$

$$b) \frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}};$$

$$c) \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}.$$

☞ **Lời giải.**

$$a) \frac{a}{3-2\sqrt{2}} = \frac{a(3+2\sqrt{2})}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})} = \frac{a(3+2\sqrt{2})}{3^2-(2\sqrt{2})^2} = \frac{a(3+2\sqrt{2})}{9-8} = (3+2\sqrt{2})a.$$

$$b) \frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}} = \frac{(5\sqrt{3}-3\sqrt{5})^2}{(5\sqrt{3}+3\sqrt{5})(5\sqrt{3}-3\sqrt{5})} = \frac{75+45-30\sqrt{15}}{75-45} = \frac{30(4-\sqrt{15})}{30} = 4-\sqrt{15}.$$

$$\begin{aligned} c) \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})} \\ &= \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1-\sqrt{2})^2-3} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{1-2\sqrt{2}+2-3} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{-2\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{2}. \end{aligned}$$

□

◇ **Ví dụ 15.** Trục căn thức ở mẫu:

$$a) \frac{2}{\sqrt{a}} \text{ với } a > 0;$$

$$b) \frac{5}{\sqrt{x}+3} \text{ với } x \geq 0, x \neq 9;$$

$$c) \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} \text{ với } x \geq 0, x \neq 3;$$

$$d) \frac{1-\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} \text{ với } a \geq 0, a \neq 1;$$

$$e) \frac{1}{\sqrt{x}+1} \text{ với } x > -1;$$

$$f) \frac{1}{\sqrt{x}-3} \text{ với } x \geq 0 \text{ và } x \neq 9.$$

☞ **Lời giải.**

$$a) \frac{2}{\sqrt{a}} = \frac{2 \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{2\sqrt{a}}{a}.$$

$$b) \frac{5}{\sqrt{x}+3} = \frac{5 \cdot (\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3) \cdot (\sqrt{x}+3)} = \frac{5(\sqrt{x}-3)}{x-9}.$$

$$c) \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{(\sqrt{x}-\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{x}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{x-3}.$$

$$d) \frac{1-\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} = \frac{(1-\sqrt{a})^2}{(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a})} = \frac{1-2\sqrt{a}+a}{1-a}.$$

$$e) \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1 \cdot \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1})^2} = \frac{\sqrt{x+1}}{x+1}.$$

$$f) \frac{1}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}+3}{x-9}.$$

□

◀ Ví dụ 16. Trục căn thức ở mẫu của các biểu thức

$$\text{a) } \frac{-5\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{3}};$$

$$\text{b) } \frac{a^2-2a}{\sqrt{a}+\sqrt{2}} \quad (a \geq 0, a \neq 2);$$

$$\text{c) } \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \quad \text{với } x \geq 0, x \neq 1;$$

$$\text{d) } \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+\sqrt{y}} \quad \text{với } x \geq 0, y \geq 0, 4x \neq y.$$

☞ Lời giải.

$$\text{a) } \frac{-5\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{3}} = \frac{-5\sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{-5\sqrt{3(x^2+1)}}{6}.$$

$$\text{b) } \frac{a^2-2a}{\sqrt{a}+\sqrt{2}} = \frac{(a^2-2a)(\sqrt{a}-\sqrt{2})}{(\sqrt{a}+\sqrt{2})(\sqrt{a}-\sqrt{2})} = \frac{a(a-2)(\sqrt{a}-\sqrt{2})}{a-2} = a(\sqrt{a}-\sqrt{2}).$$

$$\text{c) } \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(x-1) \cdot (\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1) \cdot (\sqrt{x}+1)} = \frac{(x-1) \cdot (\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})^2-1^2} = \frac{(x-1) \cdot (\sqrt{x}+1)}{x-1} = \sqrt{x}+1.$$

$$\text{d) } \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(2\sqrt{x}+\sqrt{y})(2\sqrt{x}-\sqrt{y})} = \frac{2x-\sqrt{xy}}{4x-y}.$$

□

◀ Ví dụ 17. Trục căn thức ở mẫu

$$\text{a) } \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} \quad \text{với } x > 1.$$

$$\text{b) } \frac{a+1}{\sqrt{2a+3}-\sqrt{a+2}} \quad \text{với } a > -1.$$

$$\text{c) } \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} \quad \text{với } x \geq 0.$$

$$\text{d) } \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-1}; \quad \text{với } a > 0; b > 0; ab = \frac{1}{4}.$$

☞ Lời giải.

$$\text{a) } \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(x^2-1) \cdot \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-1}} = \frac{(x^2-1) \cdot \sqrt{x-1}}{(\sqrt{x-1})^2} = \frac{(x-1)(x+1) \cdot \sqrt{x-1}}{x-1} = (x+1)\sqrt{x-1}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{a+1}{\sqrt{2a+3}-\sqrt{a+2}} &= \frac{(a+1)(\sqrt{2a+3}+\sqrt{a+2})}{(\sqrt{2a+3}-\sqrt{a+2})(\sqrt{2a+3}+\sqrt{a+2})} \\ &= \frac{(a+1)(\sqrt{2a+3}+\sqrt{a+2})}{(\sqrt{2a+3})^2-(\sqrt{a+2})^2} \\ &= \frac{(a+1)(\sqrt{2a+3}+\sqrt{a+2})}{(2a+3)-(a+2)} \\ &= \frac{(a+1)(\sqrt{2a+3}+\sqrt{a+2})}{a+1} \\ &= \sqrt{2a+3}+\sqrt{a+2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} &= \frac{1 \cdot (\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} \\ &= \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{(x+1)-x} \\ &= \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{1} \\ &= \sqrt{x+1}+\sqrt{x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1} &= \frac{1 \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b} + 1)}{(\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1)(\sqrt{a} + \sqrt{b} + 1)} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + 1}{a + b + 2\sqrt{ab} - 1} \\ &= \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + 1}{a + b + 2\sqrt{\frac{1}{4}} - 1} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + 1}{a + b}. \end{aligned}$$

□

Dạng 5. So sánh hai số chứa căn

◀ Ví dụ 18. Không dùng MTCT, hãy so sánh

a) $a = 3\sqrt{2}$ và $b = 2\sqrt{3}$

b) $a = 5\sqrt{6}$ và $b = 7\sqrt{3}$;

c) $a = 3\sqrt{2\frac{2}{3}}$ và $b = 5\sqrt{1\frac{1}{5}}$.

☞ Lời giải.

a) Ta có $3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{18}$; $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$.
 Vì $\sqrt{12} < \sqrt{18}$ nên $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$. Vậy $a > b$.

b) Ta có $a = 5\sqrt{6} = \sqrt{25 \cdot 6} = \sqrt{150}$; $b = 7\sqrt{3} = \sqrt{49 \cdot 3} = \sqrt{147}$.
 Vì $\sqrt{150} > \sqrt{147}$ nên $5\sqrt{6} > 7\sqrt{3}$. Vậy $a > b$.

c) Ta có $a = 3\sqrt{2\frac{2}{3}} = \sqrt{9 \cdot \frac{8}{3}} = \sqrt{24}$; $b = 5\sqrt{1\frac{1}{5}} = \sqrt{25 \cdot \frac{6}{5}} = \sqrt{30}$.
 Vì $\sqrt{24} < \sqrt{30}$ nên $3\sqrt{2\frac{2}{3}} < 5\sqrt{1\frac{1}{5}}$. Vậy $a < b$.

□

◀ Ví dụ 19. Không dùng máy tính hoặc bảng số, hãy so sánh

a) $\frac{5}{4}\sqrt{2}$ và $\frac{2}{3}\sqrt{7}$;

b) $-3\sqrt{11}$ và $-2\sqrt{23}$.

☞ Lời giải.

a) Ta có $\frac{5}{4}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{25}{16} \cdot 2} = \sqrt{\frac{25}{8}} = \sqrt{3\frac{1}{8}}$; $\frac{2}{3}\sqrt{7} = \sqrt{\frac{4}{9} \cdot 7} = \sqrt{\frac{28}{9}} = \sqrt{3\frac{1}{9}}$.
 Vì $\sqrt{3\frac{1}{8}} > \sqrt{3\frac{1}{9}}$ nên $\frac{5}{4}\sqrt{2} > \frac{2}{3}\sqrt{7}$.

b) Ta có $-3\sqrt{11} = -\sqrt{9 \cdot 11} = -\sqrt{99}$; $-2\sqrt{23} = -\sqrt{4 \cdot 23} = -\sqrt{92}$.
 Vì $-\sqrt{99} < -\sqrt{92}$ nên $-3\sqrt{11} < -2\sqrt{23}$.

□

◀ Ví dụ 20. Sắp xếp theo thứ tự tăng dần

a) $6\sqrt{3}$, $7\sqrt{2}$, $15\sqrt{\frac{2}{5}}$, $9\sqrt{1\frac{2}{9}}$;

b) $-\sqrt{71}$, $\frac{2}{3}\sqrt{12}$, $\frac{1}{2}\sqrt{21}$, $-5\sqrt{3}$.

☞ Lời giải.

a) Ta có $6\sqrt{3} = \sqrt{36 \cdot 3} = \sqrt{108}$; $7\sqrt{2} = \sqrt{49 \cdot 2} = \sqrt{98}$;

$$15\sqrt{\frac{2}{5}} = \sqrt{225 \cdot \frac{2}{5}} = \sqrt{90}; \quad 9\sqrt{1\frac{2}{9}} = \sqrt{81 \cdot \frac{11}{9}} = \sqrt{99}.$$

Vì $\sqrt{90} < \sqrt{98} < \sqrt{99} < \sqrt{108}$ nên $15\sqrt{\frac{2}{5}} < 7\sqrt{2} < 9\sqrt{1\frac{2}{9}} < 6\sqrt{3}$.

$$\text{b) Ta có } \frac{2}{3}\sqrt{12} = \sqrt{\frac{4}{9} \cdot 12} = \sqrt{\frac{16}{3}} = \sqrt{5\frac{1}{3}}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{21} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 21} = \sqrt{\frac{21}{4}} = \sqrt{5\frac{1}{4}}$$

$$-5\sqrt{3} = -\sqrt{25 \cdot 3} = -\sqrt{75}.$$

$$\text{Vì } -\sqrt{75} < -\sqrt{71} < \sqrt{5\frac{1}{4}} < \sqrt{5\frac{1}{3}} \text{ nên } -5\sqrt{3} < -\sqrt{71} < \frac{1}{2}\sqrt{21} < \frac{2}{3}\sqrt{12}.$$

□

📁 Dạng 6. Rút gọn biểu thức chứa căn

❖ **Ví dụ 21.** Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{24} - 4\sqrt{6};$

b) $\sqrt{20} - \sqrt{5};$

c) $\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48};$

d) $\sqrt{20} - \sqrt{80} + \sqrt{45};$

e) $\sqrt{18} - \sqrt{50} + \sqrt{98};$

f) $(\sqrt{8} + \sqrt{3})\sqrt{6}.$

🗨 **Lời giải.**

a) $\sqrt{24} - 4\sqrt{6} = \sqrt{2^2 \cdot 6} - 4\sqrt{6} = 2\sqrt{6} - 4\sqrt{6} = (2 - 4)\sqrt{6} = -2\sqrt{6}.$

b) $\sqrt{20} - \sqrt{5} = \sqrt{2^2 \cdot 5} - \sqrt{5} = 2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5}.$

c) $\sqrt{20} - \sqrt{80} + \sqrt{45} = 2\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = \sqrt{5}.$

d) $\sqrt{18} - \sqrt{50} + \sqrt{98} = 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$

e) $\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48} = \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{3^2 \cdot 3} - \sqrt{4^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = (2 + 3 - 4)\sqrt{3} = \sqrt{3}.$

f) $(\sqrt{8} + \sqrt{3})\sqrt{6} = \sqrt{8} \cdot \sqrt{6} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{8 \cdot 6} + \sqrt{3 \cdot 6} = \sqrt{4^2 \cdot 3} + \sqrt{3^2 \cdot 2} = 4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}.$

□

❖ **Ví dụ 22.** Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{4,5} - \frac{1}{2}\sqrt{72} + 5\sqrt{\frac{1}{2}};$

b) $\sqrt{32} - \sqrt{18} + \frac{4}{\sqrt{2}};$

c) $40\sqrt{\frac{25}{6}} - 10\sqrt{\frac{3}{2}} - 12\sqrt{\frac{98}{3}};$

d) $\sqrt{200} - \sqrt{50} + 4\sqrt{\frac{1}{8}};$

e) $4\sqrt{\frac{2}{9}} + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{18}};$

f) $2\sqrt{3} - \sqrt{75} + \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}.$

🗨 **Lời giải.**

a) $\sqrt{4,5} - \frac{1}{2}\sqrt{72} + 5\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 2}{2 \cdot 2}} - \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} + \frac{5}{2}\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + \frac{5}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2}.$

b) $\sqrt{32} - \sqrt{18} + \frac{4}{\sqrt{2}} = \sqrt{4^2 \cdot 2} - \sqrt{3^2 \cdot 2} + \frac{4\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$

c) $42\sqrt{\frac{25}{6}} - 10\sqrt{\frac{3}{2}} - 12\sqrt{\frac{98}{3}} = 42 \cdot \frac{5}{6}\sqrt{6} - 10 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{6} - 12 \cdot \frac{7}{3}\sqrt{6} = 35\sqrt{6} - 5\sqrt{6} - 28\sqrt{6} = 2\sqrt{6}.$

d) $\sqrt{200} - \sqrt{50} + 4\sqrt{\frac{1}{8}} = 10\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 4 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{2} = 6\sqrt{2}.$

e) $4\sqrt{\frac{2}{9}} + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{18}} = \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{6}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$

f) $2\sqrt{3} - \sqrt{75} + \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + |1 - \sqrt{3}| = 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 = -1 - 2\sqrt{3}.$

□

◊ **Ví dụ 23.** Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } (2 - \sqrt{10})(\sqrt{2} - \sqrt{5}). \quad \text{b) } \sqrt{3}(\sqrt{72} + \sqrt{4,5} - \sqrt{12,5}). \quad \text{c) } 12\left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{3}{2}}\right);$$

☞ **Lời giải.**

$$\begin{aligned} \text{a) } (2 - \sqrt{10})(\sqrt{2} - \sqrt{5}) &= \sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{5}) \\ &= \sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{5})^2 \\ &= \sqrt{2}(2 - 2\sqrt{10} + 5) \\ &= \sqrt{2}(7 - 2\sqrt{10}) \\ &= 7\sqrt{2} - 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sqrt{3}(\sqrt{72} + \sqrt{4,5} - \sqrt{12,5}) &= \sqrt{216} + \sqrt{13,5} - \sqrt{37,5} \\ &= 6\sqrt{6} + \sqrt{\frac{27}{2}} - \sqrt{\frac{75}{2}} \\ &= 6\sqrt{6} + \frac{3}{2}\sqrt{6} - \frac{5}{2}\sqrt{6} \\ &= 5\sqrt{6}. \end{aligned}$$

$$\text{c) } 12\left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 12\left(\frac{1}{3}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\sqrt{6}\right) = 4\sqrt{6} - 6\sqrt{6} = -2\sqrt{6};$$

□

◊ **Ví dụ 24.** Rút gọn các biểu thức

$$\text{a) } A = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}; \quad \text{b) } B = \frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}}.$$

☞ **Lời giải.**

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} - \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{4}} - \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{4}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} \\ &= \frac{1}{2}[(\sqrt{3} + 1) - (\sqrt{3} - 1)] \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}} \\ &= \frac{3(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{5 - 2} + \frac{4(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{6 - 2} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5}}{6 - 5} \\ &= (\sqrt{5} + \sqrt{2}) + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) + \sqrt{6} - \sqrt{5} \\ &= 2\sqrt{6}. \end{aligned}$$

□

◊ **Ví dụ 25.** Rút gọn biểu thức sau

$$\left(\frac{\sqrt{22} - \sqrt{11}}{1 - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{21} - \sqrt{7}}{1 - \sqrt{3}}\right)(\sqrt{7} - \sqrt{11}).$$

☞ **Lời giải.**

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sqrt{22}-\sqrt{11}}{1-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{21}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{3}}\right)(\sqrt{7}-\sqrt{11}) &= \left(\frac{\sqrt{11}(\sqrt{2}-1)}{1-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{7}(\sqrt{3}-1)}{1-\sqrt{3}}\right)(\sqrt{7}-\sqrt{11}) \\
&= (-\sqrt{11}-\sqrt{7})(\sqrt{7}-\sqrt{11}) \\
&= -(\sqrt{11}+\sqrt{7})(\sqrt{7}-\sqrt{11}) \\
&= -(7-11)=4.
\end{aligned}$$

□

❖ **Ví dụ 26.** Rút gọn các biểu thức sau

- a) $A = \frac{1+a\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}}$ với $a \geq 0$.
- b) $A = 2x\sqrt{16xy^3} + 7\sqrt{25x^3y^3} - 3y\sqrt{36x^3y}$ với $x \geq 0, y \geq 0$;
- c) $B = \sqrt{9ab} + 7\sqrt{\frac{a}{b}} - 5\sqrt{\frac{b}{a}} - 3ab\sqrt{\frac{1}{ab}}$ với $a, b > 0$;
- d) $C = \frac{2}{3}\sqrt{9x^3} + 4x\sqrt{\frac{x}{4}} - x^2\sqrt{\frac{1}{x}}$ với $x > 0$;
- e) $D = \sqrt{9a} + \sqrt{\frac{a}{4}} - a\sqrt{\frac{4}{a}} + \frac{1}{2a}\sqrt{a^3}$ với $a > 0$;

☞ **Lời giải.**

- a) $\frac{1+a\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} = \frac{1+(\sqrt{a})^3}{1+\sqrt{a}} = \frac{(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a}+a)}{1+\sqrt{a}} = 1-\sqrt{a}+a$
- b) $A = 8xy\sqrt{xy} + 35xy\sqrt{xy} - 18xy\sqrt{xy} = 25xy\sqrt{xy}$.
- c) $B = 3\sqrt{ab} + \frac{7}{b}\sqrt{ab} - \frac{5}{a}\sqrt{ab} - 3ab \cdot \frac{1}{ab}\sqrt{ab} = \left(\frac{7}{b} - \frac{5}{a}\right)\sqrt{ab}$.
- d) $C = \frac{2}{3}\sqrt{(3x)^2 \cdot x} + 4x\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4}} - x^2\sqrt{\frac{x}{x^2}} = \frac{2}{3} \cdot 3x\sqrt{x} + 4x\frac{\sqrt{x}}{2} - x^2\frac{\sqrt{x}}{x} = 2x\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} - x\sqrt{x} = 3x\sqrt{x}$
- e) $D = \sqrt{9a} + \sqrt{\frac{a}{4}} - a\sqrt{\frac{4}{a}} + \frac{1}{2a}\sqrt{a^3} = 3\sqrt{a} + \frac{\sqrt{a}}{2} - a\sqrt{\frac{4a}{a^2}} + \frac{1}{2a}\sqrt{a^2 \cdot a} = 3\sqrt{a} + \frac{\sqrt{a}}{2} - 2\sqrt{a} + \frac{1}{2}\sqrt{a} = 2\sqrt{a}$

□

❖ **Ví dụ 27.**

- a) Trục căn thức ở mẫu của biểu thức $\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}; \frac{x^2-x}{\sqrt{x}+1}$ với $x > 1$.
- b) Sử dụng kết quả của a), rút gọn biểu thức $P = \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x^2-x}{\sqrt{x}+1}$ với $x > 1$.

☞ **Lời giải.**

- a) $\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(x^2-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = (x+1)(\sqrt{x}+1)$.
- $\frac{x^2-x}{\sqrt{x}+1} = \frac{(x^2-x)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{x(x-1)(\sqrt{x}-1)}{x-1} = x(\sqrt{x}-1)$.
- b) $P = \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x^2-x}{\sqrt{x}+1} = (x+1)(\sqrt{x}+1) - x(\sqrt{x}-1) = x\sqrt{x} + x + \sqrt{x} + 1 - x\sqrt{x} + x = 2x + \sqrt{x} + 1$.

□

◇ **Ví dụ 28.** Rút gọn biểu thức: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{2b}{a-b}$ với $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$.

☞ **Lời giải.**

Với $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$, ta có

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{2b}{a-b} \\ &= \frac{\sqrt{a} \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})} - \frac{\sqrt{b} \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})} - \frac{2b}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \\ &= \frac{a + \sqrt{ab} - \sqrt{ab} + b - 2b}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \\ &= \frac{a - b}{a - b} = 1. \end{aligned}$$

□

◇ **Ví dụ 29.** Trong thuyết tương đối, khối lượng m (kg) của một vật khi chuyển động với tốc độ v (m/s) được cho bởi công thức

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

trong đó m_0 (kg) là khối lượng của vật khi đứng yên, c (m/s) là tốc độ của ánh sáng trong chân không (Theo sách Vật lý đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam 2016).

- Viết lại công thức tính khối lượng m dưới dạng không có căn thức ở mẫu.
- Tính khối lượng m theo m_0 (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba) khi vật chuyển động với tốc độ $v = \frac{1}{10}c$.

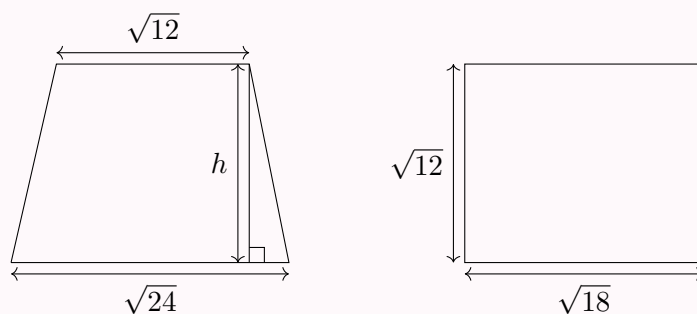
☞ **Lời giải.**

a) Ta có $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 c}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{m_0 c \sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 - v^2}$.

b) Với tốc độ $v = \frac{1}{10}c$, ta có $m = \frac{m_0 c \sqrt{c^2 - \frac{1}{100}c^2}}{c^2 - \frac{1}{100}c^2} = \frac{10m_0 c \sqrt{99}c}{99c^2} \approx 1,005m_0$.

□

◇ **Ví dụ 30.** Biết rằng hình thang và hình chữ nhật ở hình dưới có diện tích bằng nhau. Tính chiều cao h của hình thang.



☞ **Lời giải.**

Diện tích hình chữ nhật là: $S_1 = \sqrt{12} \cdot \sqrt{18} = 6\sqrt{6}$.

Diện tích hình thang là: $S_2 = \frac{(\sqrt{12} + \sqrt{24}) \cdot h}{2}$.

Vì $S_2 = S_1$ nên

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{12} + \sqrt{24}) \cdot h}{2} &= 6\sqrt{6} \\ (\sqrt{12} + \sqrt{24}) \cdot h &= 12\sqrt{6} \\ h &= \frac{12\sqrt{6}}{\sqrt{12} + \sqrt{24}} \\ &= \frac{12\sqrt{6}(\sqrt{12} - \sqrt{24})}{(\sqrt{12} + \sqrt{24})(\sqrt{12} - \sqrt{24})} \\ &= \frac{12\sqrt{6}(\sqrt{12} - \sqrt{24})}{12 - 24} \\ &= \frac{72\sqrt{2} - 144}{-12} = 12 - 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

□

► Dạng 7. Rút gọn biểu thức chứa căn thức dạng phân thức đại số và bài toán đi kèm

◆ **Ví dụ 31.** Rút gọn biểu thức $P = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{xy} - x} - \frac{\sqrt{x}}{y - \sqrt{xy}}$.

☞ **Lời giải.**

Điều kiện: $x > 0, y > 0, x \neq y$. Khi đó ta có

$$P = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}(\sqrt{y} - \sqrt{x})} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}(\sqrt{y} - \sqrt{x})} = \frac{y - x}{\sqrt{xy}(\sqrt{y} - \sqrt{x})} = \frac{(\sqrt{y} - \sqrt{x})(\sqrt{y} + \sqrt{x})}{\sqrt{xy}(\sqrt{y} - \sqrt{x})} = \frac{\sqrt{y} + \sqrt{x}}{\sqrt{xy}}$$

□

◆ **Ví dụ 32.** Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} - 3\right) : \frac{\sqrt{xy}}{x + 3\sqrt{xy}}$.

☞ **Lời giải.**

Điều kiện: $x > 0, y > 0$. Khi đó ta có

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} - 3\right) : \frac{\sqrt{xy}}{x + 3\sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{x} - 3\sqrt{y}}{\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 3\sqrt{y})}{\sqrt{xy}} = \frac{x - 9y}{y}$$

□

◆ **Ví dụ 33.** Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \sqrt{xy}\right) : (x - y)$.

☞ **Lời giải.**

Điều kiện: $x \geq 0, y \geq 0, x \neq y$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} P &= \left[\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + \sqrt{xy} + y)}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \sqrt{xy} \right] : (x - y) \\ &= (x + 2\sqrt{xy} + y) \cdot \frac{1}{x - y} \\ &= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}.$$

◇ Ví dụ 34. Rút gọn biểu thức $P = \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}\right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} - 1}$.

🗨️ Lời giải.

Điều kiện: $0 \leq x \neq 1$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{x + \sqrt{x} + 1 + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} \cdot \frac{x\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} \\ &= \frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x} + 1} \cdot \frac{x\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} \\ &= \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{x + \sqrt{x} + 1} \cdot \frac{(\sqrt{x} - 1) \cdot (x + \sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} + 1} \\ &= x - 1. \end{aligned}$$

◇ Ví dụ 35. Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} - \frac{3\sqrt{x} - 1}{1 - x}\right) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}\right)$.

🗨️ Lời giải.

Điều kiện: $0 < x \neq 1$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{(\sqrt{x} - 1)^2 + 2\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) + 3\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{2\sqrt{x} - 2}{x} \\ &= \frac{x - 2\sqrt{x} + 1 + 2x + 2\sqrt{x} + 3\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{x} \\ &= \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{x} = \frac{6}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

◇ Ví dụ 36. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} + \frac{2 - 5\sqrt{x}}{4 - x}$.

a) Rút gọn P .

b) Tính giá trị của P với $x = \frac{2}{2 - \sqrt{3}}$.

🗨️ Lời giải.

a) Điều kiện: $0 \leq x \neq 4$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2) - 2\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2) - (2 - 5\sqrt{x})}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} \\ &= \frac{x - 3\sqrt{x} + 2 - 2x - 4\sqrt{x} - 2 + 5\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} \\ &= \frac{-x - 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} \\ &= \frac{-\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}. \end{aligned}$$

$$\text{b) Ta có } x = \frac{2}{2 - \sqrt{3}} = 2(2 + \sqrt{3}) = (\sqrt{3} + 1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{3} + 1.$$

$$\text{Do đó: } P = \frac{\sqrt{3} + 1}{2 - (\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{-2} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} = -(2 + \sqrt{3}).$$

□

◇ **Ví dụ 37.** Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x} + 2}{x - 1} - \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 2\sqrt{x} + 1} \right) : \frac{4x}{(x - 1)^2}$.

a) Rút gọn P .

b) Tính giá trị của P , biết $|x - 5| = 4$.

🗨️ Lời giải.

a) Điều kiện: $0 < x \neq 1$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} P &= \left[\frac{\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} - \frac{\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 1)^2} \right] \cdot \frac{(x - 1)^2}{4x} \\ &= \frac{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1) - (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)^2(\sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{(x - 1)^2}{4x} \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 1)^2(\sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{(\sqrt{x} - 1)^2 \cdot (\sqrt{x} + 1)^2}{4x} \\ &= \frac{\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

$$\text{b) Ta có } |x - 5| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 = 4 \\ x - 5 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = 1. \end{cases}$$

🕒 Với $x = 9$, ta có $P = \frac{\sqrt{9} + 1}{2\sqrt{9}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

🕒 Với $x = 1$, không thỏa mãn điều kiện đã nêu nên biểu thức P không có giá trị.

□

◇ **Ví dụ 38.** Cho biểu thức $P = \left(\frac{2\sqrt{xy}}{x - y} - \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2\sqrt{x} - 2\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$.

a) Rút gọn P .

b) Tính giá trị của P , biết $\frac{x}{y} = \frac{4}{9}$.

🗨️ Lời giải.

a) Điều kiện: $x, y \geq 0, x \neq y$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} P &= \left[\frac{2\sqrt{xy}}{x - y} - \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2(\sqrt{x} - \sqrt{y})} \right] \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \\ &= \frac{4\sqrt{xy} - (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{2(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \\ &= \frac{4\sqrt{xy} - x - 2\sqrt{xy} - y}{2(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \\ &= \frac{-(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{2(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \\ &= \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}. \end{aligned}$$

$$\text{b) Ta có } \frac{x}{y} = \frac{4}{9} \Rightarrow y = \frac{9x}{4}.$$

$$\text{Do đó } P = \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{\frac{9x}{4}}} = \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt{x}} = \frac{-\sqrt{x}}{\frac{5}{2}\sqrt{x}} = -\frac{2}{5}.$$

□

◇ **Ví dụ 39.** Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{2}{x+4\sqrt{x}+4} \right) : \left(\frac{2}{x-4} - \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right)$.

a) Rút gọn P .

b) Tìm x để $P = -\frac{1}{2}$.

☞ **Lời giải.**

a) Điều kiện: $0 \leq x \neq 4$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} P &= \left[\frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{2}{(\sqrt{x}+2)^2} \right] : \left(\frac{2}{x-4} - \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{x}+2-2}{(\sqrt{x}+2)^2} : \frac{2-(\sqrt{x}+2)}{x-4} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)^2} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{-\sqrt{x}} \\ &= \frac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

$$\text{b) Ta có } P = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x}-4 = \sqrt{x}+2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 6 \Leftrightarrow x = 36 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

□

◇ **Ví dụ 40.** Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+3} + \frac{3}{x\sqrt{x}-9\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{3\sqrt{x}-3}{x+3\sqrt{x}} \right)$.

a) Rút gọn P .

b) Tìm x để $P > 1$.

☞ **Lời giải.**

a) Điều kiện: $0 \leq x \neq 9$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)+3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} : \frac{x-3\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{x-3\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{x-3\sqrt{x}+3} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}-3}. \end{aligned}$$

$$\text{b) Ta có } P > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-3} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-3} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-3} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-4 > 0 \\ \sqrt{x}-3 < 0 \end{cases} \text{ hoặc}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x}-4 < 0 \\ \sqrt{x}-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 9 < x < 16 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

□

❖ **Ví dụ 41.** Chứng minh rằng giá trị của biểu thức sau là hằng số với mọi giá trị thích hợp của x và y :

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy} - y} + \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{xy} - x} \right) \cdot \frac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}.$$

🗨 **Lời giải.**

Điều kiện: $x, y > 0, x \neq y$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}(\sqrt{x} - \sqrt{y})} + \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x}(\sqrt{y} - \sqrt{x})} \right] \cdot \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2} \\ &= \frac{x - 2\sqrt{xy} + y}{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})} \cdot \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2} \\ &= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})} \cdot \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức A là hằng số với mọi giá trị thích hợp của x và y . □

❖ **Ví dụ 42.** Cho biểu thức $B = \frac{x+2}{x\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1}$.

- Rút gọn B .
- Chứng minh rằng B luôn luôn có giá trị không âm với mọi giá trị thích hợp của x .

🗨 **Lời giải.**

a) Điều kiện: $x \geq 0$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} B &= \frac{x+2 + (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1) - (x-\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{x+2+x-1-x+\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{x+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}. \end{aligned}$$

b) Ta có $x \geq 0$ nên $\sqrt{x} \geq 0$ và $x - \sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ với mọi x .

Do đó $B = \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} \geq 0$ với mọi $x \geq 0$. □

❖ **Ví dụ 43.** Cho biểu thức $C = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{x+1} - 1 \right)$.

- Rút gọn C .
- Chứng minh rằng C luôn luôn có giá trị âm với mọi giá trị thích hợp của x .

🗨 **Lời giải.**

a) Điều kiện: $0 \leq x \neq 1$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} C &= \left[\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{(\sqrt{x}-1)(x+1)} \right] : \frac{\sqrt{x}-x-1}{x+1} \\ &= \frac{x+1-2}{(\sqrt{x}-1)(x+1)} \cdot \frac{-(x+1)}{x-\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+1)} \cdot \frac{-(x+1)}{x-\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{-(\sqrt{x}+1)}{x-\sqrt{x}+1}. \end{aligned}$$

b) Ta có $0 \leq x \neq 1$ nên $-(\sqrt{x}+1) < 0$; $x-\sqrt{x}+1 = \left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$.

Do đó $C = \frac{-(\sqrt{x}+1)}{x-\sqrt{x}+1} < 0$ với mọi giá trị thích hợp của x .

◇ Ví dụ 44. Cho biểu thức $D = \left(2 - \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-3}\right) : \left[\frac{6\sqrt{x}+1}{(2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right]$.

a) Rút gọn D .

b) Chứng minh rằng $D < \frac{3}{2}$.

☞ Lời giải.

a) Điều kiện: $0 \leq x \neq \frac{9}{4}$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} D &= \frac{2(2\sqrt{x}-3) - (\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}-3} : \frac{6\sqrt{x}+1 + \sqrt{x}(2\sqrt{x}-3)}{(2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{4\sqrt{x}-6 - \sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-3} : \frac{6\sqrt{x}+1 + 2x - 3\sqrt{x}}{(2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{3\sqrt{x}-5}{2\sqrt{x}-3} \cdot \frac{(2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)}{2x+3\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{3\sqrt{x}-5}{2\sqrt{x}-3} \cdot \frac{(2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)}{(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{3\sqrt{x}-5}{2\sqrt{x}+1}. \end{aligned}$$

b) Xét hiệu $D - \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{x}-5}{2\sqrt{x}+1} - \frac{3}{2} = \frac{6\sqrt{x}-10-6\sqrt{x}-3}{2(2\sqrt{x}+1)} = \frac{-13}{2(2\sqrt{x}+1)} < 0$. Vậy $D < \frac{3}{2}$.

◇ Ví dụ 45. Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{x-1}\right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-1}\right)$.

a) Rút gọn P .

b) Tìm giá trị lớn nhất của P .

☞ Lời giải.

a) Điều kiện: $0 \leq x \neq 1$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{(\sqrt{x}+1)+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} : \frac{2(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}-4)}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}+1}. \end{aligned}$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 VT &= \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{4\sqrt{xy}}{x - y} \right) : \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x}} \\
 &= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 4\sqrt{xy}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \\
 &= \frac{x + 2\sqrt{xy} + y - 4\sqrt{xy}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \\
 &= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \\
 &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\
 &= VP.
 \end{aligned}$$

□

◀ **Ví dụ 49.** Chứng minh đẳng thức sau với $x > 0$, $y > 0$ và $x \neq y$.

$$\left(\frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \sqrt{xy} \right) : (x - y) = 1 - \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 VT &= \left[\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y)}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \sqrt{xy} \right] \cdot \frac{1}{x - y} \\
 &= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\
 &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}. \\
 VP &= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y} - 2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.
 \end{aligned}$$

Từ đó ta có đẳng thức phải chứng minh.

□

**BÀI TẬP VẬN DỤNG**

◀ **Bài 1.** Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a) $\sqrt{75}$;

b) $\sqrt{27a}$;

c) $\sqrt{50\sqrt{2} + 100}$;

d) $\sqrt{9\sqrt{5} - 18}$.

Lời giải.

a) Ta có $\sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 5^2} = 5\sqrt{3}$;

b) Ta có $\sqrt{27a} = \sqrt{3^2 \cdot 3a} = 3\sqrt{3a}$;

c) Ta có $\sqrt{50\sqrt{2} + 100} = \sqrt{50(\sqrt{2} + 1)} = \sqrt{5^2 \cdot 2(\sqrt{2} + 1)} = 5\sqrt{2(\sqrt{2} + 1)}$;

d) Ta có $\sqrt{9\sqrt{5} - 18} = \sqrt{9(\sqrt{5} - 1)} = 3\sqrt{\sqrt{5} - 1}$.

□

⇨ **Bài 2.** Đưa thừa số vào trong dấu căn

a) $3\sqrt{2}$;

b) $-2\sqrt{7}$;

c) $4\sqrt{\frac{15}{2}}$;

d) $-5\sqrt{\frac{16}{5}}$;

☞ **Lời giải.**

a) Ta có $3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{18}$;

b) Ta có $-2\sqrt{7} = -\sqrt{2^2 \cdot 7} = -\sqrt{28}$;

c) Ta có $4\sqrt{\frac{15}{2}} = \sqrt{4^2 \cdot \frac{15}{2}} = \sqrt{120}$;

d) Ta có $-5\sqrt{\frac{16}{5}} = -\sqrt{5^2 \cdot \frac{16}{5}} = -\sqrt{80}$.

□

⇨ **Bài 3.** Khử mẫu trong dấu căn

a) $\sqrt{\frac{4}{7}}$;

b) $\sqrt{\frac{5}{24}}$;

c) $2a \cdot \sqrt{\frac{3}{5}}$.

☞ **Lời giải.**

a) $\sqrt{\frac{4}{7}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 7}{7 \cdot 7}} = \frac{\sqrt{28}}{7}$.

b) $\sqrt{\frac{5}{24}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 24}{24 \cdot 24}} = \frac{2\sqrt{30}}{24} = \frac{\sqrt{30}}{12}$.

c) $2a \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} = 2a \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot 5}{5^2}} = 2a \cdot \frac{\sqrt{15}}{5}$.

□

⇨ **Bài 4.** Khử mẫu của biểu thức lấy căn:

a) $-3x \cdot \sqrt{\frac{5}{x}} \ (x > 0)$;

b) $-\sqrt{\frac{3a}{b}} \ (a \geq 0, b > 0)$;

c) $\sqrt{\frac{2}{3a^3}}$ với $a > 0$;

d) $2ab\sqrt{\frac{a^2}{2b}}$ với $a < 0, b > 0$.

☞ **Lời giải.**

a) $-3x \cdot \sqrt{\frac{5}{x}} = -3x \cdot \sqrt{\frac{5x}{x^2}} = -3x \cdot \frac{\sqrt{5x}}{x} = -3\sqrt{5x}$.

b) $-\sqrt{\frac{3a}{b}} = -\sqrt{\frac{3ab}{b^2}} = -\frac{\sqrt{3ab}}{b}$.

c) $\sqrt{\frac{2}{3a^3}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3a^3}{3a^3 \cdot 3a^3}} = \frac{\sqrt{a^2 \cdot 6a}}{3a^3} = \frac{a\sqrt{6a}}{3a^3} = \frac{\sqrt{6a}}{3a^2}$.

d) $2ab\sqrt{\frac{a^2}{2b}} = 2ab\sqrt{\frac{a^2 \cdot 2b}{2b \cdot 2b}} = 2ab \frac{-a \cdot \sqrt{2b}}{2b} = -a^2\sqrt{2b}$.

□

⇨ **Bài 5.** Trục căn thức ở mẫu

a) $\frac{4+3\sqrt{5}}{\sqrt{5}};$

b) $\frac{1}{\sqrt{5}-2};$

c) $\frac{3+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}};$

d) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.$

☞ **Lời giải.**

a) Ta có $\frac{4+3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{(4+3\sqrt{5}) \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}+15}{5};$

b) Ta có $\frac{1}{\sqrt{5}-2} = \frac{1 \cdot (\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \frac{\sqrt{5}+2}{5-4} = \sqrt{5}+2;$

c) Ta có $\frac{3+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{(3+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = \frac{3+3\sqrt{3}+\sqrt{3}+3}{1-3} = -3-2\sqrt{3};$

d) Ta có $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{6}-2}{3-2} = \sqrt{6}-2.$

□

⇨ **Bài 6.** Trục căn thức ở mẫu các biểu thức sau:

a) $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}};$

b) $\frac{10}{3\sqrt{5}};$

c) $\frac{9}{2\sqrt{3}};$

d) $\frac{2}{\sqrt{a}}$ với $a > 0;$

e) $\frac{7}{3-\sqrt{2}};$

f) $\frac{4}{\sqrt{13}-3};$

g) $\frac{10}{5+2\sqrt{5}};$

h) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.$

☞ **Lời giải.**

a) $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}.$

b) $\frac{10}{3\sqrt{5}} = \frac{10 \cdot 3\sqrt{5}}{3\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5}} = \frac{30\sqrt{5}}{45} = \frac{2\sqrt{5}}{3}.$

c) $\frac{9}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{9} \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$

d) $\frac{2}{\sqrt{a}} = \frac{2 \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{2\sqrt{a}}{a}.$

e) $\frac{7}{3-\sqrt{2}} = \frac{7 \cdot (3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} = \frac{7 \cdot (3+\sqrt{2})}{7} = 3+\sqrt{2}.$

f) $\frac{4}{\sqrt{13}-3} = \frac{4(\sqrt{13}+3)}{(\sqrt{13}-3)(\sqrt{13}+3)} = \frac{4(\sqrt{13}+3)}{13-9} = \frac{4(\sqrt{13}+3)}{4} = \sqrt{13}+3.$

g) $\frac{10}{5+2\sqrt{5}} = \frac{10(5-2\sqrt{5})}{(5+2\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})} = \frac{10(5-2\sqrt{5})}{25-20} = \frac{10(5-2\sqrt{5})}{5} = 10-4\sqrt{5}.$

h) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{5-2\sqrt{6}}{1} = 5-2\sqrt{6}.$

□

⇨ **Bài 7.** Trục căn thức ở mẫu:

a) $-\frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{12a}}$ với $a > 0$;

b) $\frac{5}{\sqrt{x}+3}$ với $x > 0, x \neq 9$;

c) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ với $a > 0, b > 0, a \neq b$

d) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$ với $x > 0, x \neq 3$.

☞ **Lời giải.**

a) $-\frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{12a}} = -\frac{3\sqrt{a} \cdot \sqrt{12a}}{\sqrt{12a} \cdot \sqrt{12a}} = -\frac{3\sqrt{(2a)^2 \cdot 3}}{12a} = -\frac{6a\sqrt{3}}{12a} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\frac{5}{\sqrt{x}+3} = \frac{5 \cdot (\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3) \cdot (\sqrt{x}+3)} = \frac{5(\sqrt{x}-3)}{x-9}$.

c) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a-b} = \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{a-b}$.

d) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{(\sqrt{x}-\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{x}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{x-3}$.

□

⇨ **Bài 8.** Tính:

a) $\left(\sqrt{\frac{4}{3}} + \sqrt{3}\right)\sqrt{6}$;

b) $(1-2\sqrt{5})^2$;

c) $2\sqrt{3}-\sqrt{27}$;

d) $\sqrt{45}-\sqrt{20}+\sqrt{5}$;

☞ **Lời giải.**

a) $\left(\sqrt{\frac{4}{3}} + \sqrt{3}\right)\sqrt{6} = \left(\sqrt{\frac{4 \cdot 3}{3^2}} + \sqrt{3}\right)\sqrt{6} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}\right)\sqrt{6} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}}{3} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

b) $(1-2\sqrt{5})^2 = 1-4\sqrt{5}+(2\sqrt{5})^2 = 1-4\sqrt{5}+20 = 21-4\sqrt{5}$.

c) $2\sqrt{3}-\sqrt{27} = 2\sqrt{3}-3\sqrt{3} = -\sqrt{3}$.

d) $\sqrt{45}-\sqrt{20}+\sqrt{5} = 3\sqrt{5}-2\sqrt{5}+\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$;

□

⇨ **Bài 9.** Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{18} : \sqrt{6} + \sqrt{8} \cdot \sqrt{\frac{27}{2}}$;

b) $\sqrt{64a} - \sqrt{18} - a\sqrt{\frac{9}{a}} + \sqrt{50}$ với $a > 0$.

☞ **Lời giải.**

a) $\sqrt{18} : \sqrt{6} + \sqrt{8} \cdot \sqrt{\frac{27}{2}} = \sqrt{18 : 6} + \sqrt{8} \cdot \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} + 2 \cdot 3\sqrt{3} = \sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$;

b) $\sqrt{64a} - \sqrt{18} - a\sqrt{\frac{9}{a}} + \sqrt{50} = 8\sqrt{a} - 3\sqrt{2} - 3\sqrt{a} + 5\sqrt{2} = 5\sqrt{a} + 2\sqrt{2}$.

□

⇨ **Bài 10.** Rút gọn biểu thức sau

a) $2\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{\frac{3}{2}}$;

b) $\frac{5\sqrt{48} - 3\sqrt{27} + 2\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$;

c) $\frac{1}{3+2\sqrt{2}} + \frac{4\sqrt{2}-4}{2-\sqrt{2}}$.

☞ **Lời giải.**

$$\begin{aligned}
 \text{a) Ta có } 2\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{\frac{3}{2}} &= 2\sqrt{\frac{2 \cdot 3}{3^2}} - 4\sqrt{\frac{3 \cdot 2}{2^2}} \\
 &= 2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} - 4 \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \\
 &= 2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} - 2 \cdot \sqrt{6} \\
 &= -\frac{4\sqrt{6}}{3}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) Ta có } \frac{5\sqrt{48} - 3\sqrt{27} + 2\sqrt{12}}{\sqrt{3}} &= \frac{5\sqrt{4^2 \cdot 3} - 3\sqrt{3^2 \cdot 3} + 2\sqrt{2^2 \cdot 3}}{\sqrt{3}} \\
 &= \frac{20\sqrt{3} - 9\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\
 &= \frac{15\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\
 &= 15.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) Ta có } \frac{1}{3+2\sqrt{2}} + \frac{4\sqrt{2}-4}{2-\sqrt{2}} &= \frac{1 \cdot (3-2\sqrt{2})}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} + \frac{4(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} \\
 &= \frac{3-2\sqrt{2}}{9-8} + \frac{4}{\sqrt{2}} \\
 &= 3-2\sqrt{2}+2\sqrt{2} \\
 &= 3.
 \end{aligned}$$

□

◀▶ **Bài 11.** Rút gọn biểu thức: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{2b}{a-b}$ với $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$.

☞ **Lời giải.**

Với $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$, ta có

$$\begin{aligned}
 &\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{2b}{a-b} \\
 &= \frac{\sqrt{a} \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a}-\sqrt{b})} - \frac{\sqrt{b} \cdot (\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a}-\sqrt{b})} - \frac{2b}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} \\
 &= \frac{a + \sqrt{ab} - \sqrt{ab} + b - 2b}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} \\
 &= \frac{a-b}{a-b} = 1.
 \end{aligned}$$

□

◀▶ **Bài 12.** Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{x} \left(\frac{1}{\sqrt{x}+3} - \frac{1}{3-\sqrt{x}} \right)$ với $x \geq 0$ và $x \neq 3$.

☞ **Lời giải.**

$$\begin{aligned}
 A &= \sqrt{x} \left(\frac{1}{\sqrt{x}+3} - \frac{1}{3-\sqrt{x}} \right) \\
 &= \sqrt{x} \left(\frac{3-\sqrt{x}}{(3-\sqrt{x})(\sqrt{x}+3)} - \frac{\sqrt{x}+3}{(3-\sqrt{x})(\sqrt{x}+3)} \right) \\
 &= \sqrt{x} \cdot \frac{3-\sqrt{x}-\sqrt{x}-3}{(3-\sqrt{x})(\sqrt{x}+3)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{x} \cdot \frac{-2\sqrt{x}}{9-x} \\
 &= \frac{-2x}{9-x}.
 \end{aligned}$$

□

⇨ **Bài 13.** Chứng minh rằng:

a) $\frac{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} : \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = a - b$ với $a > 0, b > 0$;

b) $\left(1 + \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1}\right) \left(1 - \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1}\right) = 1 - a$ với $a \geq 0$ và $a \neq 1$.

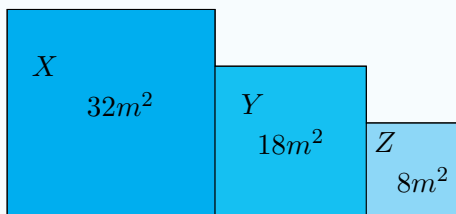
☞ **Lời giải.**

a)
$$\begin{aligned}
 VT &= \frac{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} : \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{ab}} \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \\
 &= (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \\
 &= a - b = VP \text{ (điều phải chứng minh)}.
 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
 VT &= \left(1 + \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1}\right) \left(1 - \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1}\right) = \left(1 + \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)}{\sqrt{a} + 1}\right) \left(1 - \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)}{\sqrt{a} - 1}\right) \\
 &= (1 + \sqrt{a})(1 - \sqrt{a}) \\
 &= 1 - a = VP \text{ (điều phải chứng minh)}.
 \end{aligned}$$

□

⇨ **Bài 14.** Một vườn hoa gồm ba thửa hình vuông X, Y, Z lần lượt có diện tích như hình dưới. Tính chu vi của vườn hoa đó.



☞ **Lời giải.**

Độ dài một cạnh của thửa ruộng X là: $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ (m).

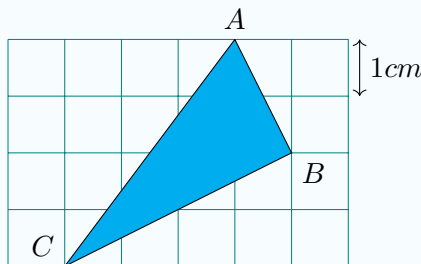
Độ dài một cạnh của thửa ruộng Y là: $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ (m).

Độ dài một cạnh của thửa ruộng Z là: $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ (m).

Chu vi của vườn hoa là: $4(4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) - 2(3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) = 26\sqrt{2}$ (m).

□

⇨ **Bài 15.** Tam giác ABC được vẽ trên lưới ô vuông như hình dưới. Tính diện tích và chu vi tam giác ABC .



☞ **Lời giải.**

Độ dài cạnh $AB = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ (cm).

Độ dài cạnh $AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ (cm).

Độ dài cạnh $BC = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ (cm).

Ta có $AC^2 = 5^2 = 25$

$$AB^2 + BC^2 = (\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2 = 25$$

Do đó $AC^2 = AB^2 + BC^2$

Vậy tam giác ABC vuông tại B .

Diện tích tam giác ABC là: $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 5$ (cm²).

Chu vi tam giác ABC là: $C_{ABC} = AB + AC + BC = \sqrt{5} + 5 + 2\sqrt{5} = 5 + 3\sqrt{5}$ (cm). □

LUYỆN TẬP CHUNG 2

◀▶ **Bài 1.** Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

a) $\sqrt{75a^3}$;

b) $\sqrt{98a^5(b^2 - 6b + 9)}$.

☞ **Lời giải.**

a) $\sqrt{75a^3} = 5a\sqrt{3a} \ (a \geq 0)$;

b) $\sqrt{98a^5(b^2 - 6b + 9)} = \begin{cases} 7a^2(b-3)\sqrt{2a} & \text{nếu } b \geq 3 \\ 7a^2(3-b)\sqrt{2a} & \text{nếu } b < 3. \end{cases}$

□

◀▶ **Bài 2.** Rút gọn biểu thức

a) $2\sqrt{125} - 5\sqrt{45} + 6\sqrt{20}$;

b) $2\sqrt{75} - 4\sqrt{27} + \sqrt{12}$.

☞ **Lời giải.**

a) $2\sqrt{125} - 5\sqrt{45} + 6\sqrt{20} = 7\sqrt{5}$;

b) $2\sqrt{75} - 4\sqrt{27} + \sqrt{12} = 0$.

□

◀▶ **Bài 3.** So sánh các số sau

a) $3\sqrt{7}$ và $2\sqrt{15}$;

b) $-4\sqrt{5}$ và $-5\sqrt{3}$.

☞ **Lời giải.**

a) $3\sqrt{7} > 2\sqrt{15}$;

b) $-4\sqrt{5} < -5\sqrt{3}$.

□

◀▶ **Bài 4.** Khử mẫu của biểu thức lấy căn

a) $\sqrt{\frac{3}{80}}$;

b) $\sqrt{\frac{2}{75}}$.

☞ **Lời giải.**

a) $\sqrt{\frac{3}{80}} = \frac{1}{20}\sqrt{15}$;

b) $\sqrt{\frac{2}{75}} = \frac{1}{15}\sqrt{6}$.

□

◀▶ **Bài 5.** Trục căn thức ở mẫu

a) $\frac{a - 2\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 2}$;

b) $\frac{13}{2\sqrt{3} - 5}$;

c) $\frac{-\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}}$.

☞ **Lời giải.**

a) $\frac{a - 2\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 2} = \sqrt{a}$;

b) $\frac{13}{2\sqrt{3} - 5} = -(2\sqrt{3} + 5)$;

c) $\frac{-\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$.

□

⇨ **Bài 6.** Trục căn thức ở mẫu

$$a) \frac{8}{\sqrt{5}-3};$$

$$b) \frac{1}{5\sqrt{2}-2\sqrt{5}};$$

$$c) \frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}.$$

☞ **Lời giải.**

$$a) \frac{8}{\sqrt{5}-3} = -2(\sqrt{5}+3);$$

$$b) \frac{1}{5\sqrt{2}-2\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{30};$$

$$c) \frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} = \sqrt{35}-6.$$

⇨ **Bài 7.** Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \sqrt{6} + 3\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{\frac{3}{2}} + 12\sqrt{\frac{1}{6}};$$

$$b) 6\sqrt{a} + 3\sqrt{25a^3} - 2\sqrt{36ab^2} - 2\sqrt{9a} \text{ với } a, b > 0.$$

☞ **Lời giải.**

$$a) 2\sqrt{6};$$

$$b) 3(5a-4b)\sqrt{a}.$$

⇨ **Bài 8.** Rút gọn các biểu thức sau

$$a) \frac{5+3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}-2};$$

$$b) \sqrt{(\sqrt{7}-2)^2} - \sqrt{63} + \frac{\sqrt{56}}{\sqrt{2}};$$

$$c) \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}}{2\sqrt{12}};$$

$$d) \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} - \sqrt{3(\sqrt{3}+1)^2} + \sqrt{4}.$$

☞ **Lời giải.**

$$a) \frac{5+3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+3)}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}^2-2^2} = \sqrt{5}+3 - \sqrt{5}-2 = 1.$$

$$b) \sqrt{(\sqrt{7}-2)^2} - \sqrt{63} + \frac{\sqrt{56}}{\sqrt{2}} = \sqrt{7}-2 - 3\sqrt{7} + 2\sqrt{7} = -2.$$

$$c) \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}}{2\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2} + \sqrt{3}-\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}.$$

$$d) \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} + \sqrt{2^2} = (\sqrt{3}+1) - \sqrt{3}(\sqrt{3}+1) + 2 = 0.$$

⇨ **Bài 9.** Tính giá trị của các biểu thức sau

$$a) 3\sqrt{45} + \frac{5\sqrt{15}}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{245};$$

$$b) \frac{\sqrt{12}-\sqrt{4}}{\sqrt{3}-1} - \frac{\sqrt{21}+\sqrt{7}}{\sqrt{3}+1} + \sqrt{7};$$

$$c) \frac{3-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} + \sqrt{3}(2\sqrt{3}-1) + \sqrt{12};$$

$$d) \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} - \frac{6}{\sqrt{6}}.$$

☞ **Lời giải.**

$$a) 3\sqrt{45} + \frac{5\sqrt{15}}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{245} = 3\sqrt{5 \cdot 9} + \frac{5\sqrt{5}\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{5 \cdot 49} = 9\sqrt{5} + 5\sqrt{5} - 14\sqrt{5} = 0.$$

- b) $\frac{\sqrt{12} - \sqrt{4}}{\sqrt{3} - 1} - \frac{\sqrt{21} + \sqrt{7}}{\sqrt{3} + 1} + \sqrt{7} = \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3} - 1} - \frac{\sqrt{7}(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{3} + 1} + \sqrt{7} = 2 - \sqrt{7} + \sqrt{7} = 2.$
- c) $\frac{3 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} + \sqrt{3}(2\sqrt{3} - 1) + \sqrt{12} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{1 - \sqrt{3}} + 6 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = -\sqrt{3} + 6 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 6.$
- d) $\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - 1} - \frac{6}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} - \sqrt{6} = \frac{2\sqrt{6}}{2} - \sqrt{6} = 0.$

□

❖ **Bài 10.** Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$ với $x > 1$.

- a) Rút gọn P .
- b) Sử dụng kết quả câu a, tính giá trị của P khi $x = 101$.

☞ **Lời giải.**

- a) $P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) + \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{x - \sqrt{x} + x + \sqrt{x}}{x - 1} = \frac{2x}{x - 1}.$
- b) Khi $x = 101$ (thỏa mãn điều kiện) giá trị của $P = \frac{2 \cdot 101}{101 - 1} = \frac{202}{100} = 2,02.$

□

❖ **Bài 11.** Giả sử lực F của gió khi thổi theo phương vuông góc với bề mặt cánh buồm của một con thuyền tỉ lệ thuận với bình phương tốc độ của gió, hệ số tỉ lệ là 30. Trong đó, lực F được tính bằng N (Newton) và tốc độ được tính bằng m/s .

- a) Khi tốc độ của gió là $10 m/s$ thì lực F là bao nhiêu Newton?
- b) Nếu cánh buồm chỉ có thể chịu được một áp lực tối đa là $12\,000 N$ thì con thuyền đó có thể đi được trong gió với tốc độ gió tối đa là bao nhiêu?

☞ **Lời giải.**

- a) Gọi tốc độ gió là $v (m/s)$.
Với $v = 10$ thì $F = 30 \cdot 10^2 = 3\,000.$
- b) Cánh buồm chịu được một áp lực tối đa là $12\,000 N$ thì con thuyền có thể đi được trong gió với tốc độ gió tối đa là $\sqrt{\frac{12\,000}{30}} = \sqrt{400} = 20 (m/s).$

□

❖ **Bài 12.** Tính

- a) $\left(\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}\right)^2;$
- b) $\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}.$

☞ **Lời giải.**

- a) $\left(\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}\right)^2 = 5 + 2\sqrt{6};$
- b) $\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}} = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - 2} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 - 3} + \dots + \frac{\sqrt{99} - \sqrt{100}}{99 - 100} = \sqrt{100} - 1 = 9.$

❖ **Bài 13.** Cho $x = \frac{\sqrt{75} + \sqrt{12}}{\sqrt{147} - \sqrt{48}}$. Chứng minh rằng $3x$ là một số nguyên.

🗨 **Lời giải.**

Ta có $x = \frac{\sqrt{75} + \sqrt{12}}{\sqrt{147} - \sqrt{48}} = \frac{7}{3}$, do đó $3x = 7 \in \mathbb{Z}$.

❖ **Bài 14.** Biến đổi $\frac{26}{10 + 4\sqrt{3}}$ về dạng $a + b\sqrt{3}$. Tính tích $a \cdot b$.

🗨 **Lời giải.**

$$\frac{26}{10 + 4\sqrt{3}} = \frac{13}{5 + 2\sqrt{3}} = 5 - 2\sqrt{3}.$$

Vậy $a = 5$; $b = -2$. Do đó $a \cdot b = 5 \cdot (-2) = -10$.

❖ **Bài 15.** Tìm các cặp số nguyên dương $(x; y)$ trong đó $x < y$ sao cho $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{539}$.

🗨 **Lời giải.**

$$\sqrt{539} = \sqrt{49 \cdot 11} = 7\sqrt{11}. \text{ Ta có } 7\sqrt{11} = \sqrt{11} + 6\sqrt{11} = 2\sqrt{11} + 5\sqrt{11} = 3\sqrt{11} + 4\sqrt{11}$$

$$7\sqrt{11} = \sqrt{11} + \sqrt{36 \cdot 11} = \sqrt{4 \cdot 11} + \sqrt{25 \cdot 11} = \sqrt{9 \cdot 11} + \sqrt{16 \cdot 11}$$

$$7\sqrt{11} = \sqrt{11} + \sqrt{396} = \sqrt{44} + \sqrt{275} = \sqrt{99} + \sqrt{176}.$$

Vậy có ba cặp số thỏa yêu cầu bài: $(11; 396)$; $(44; 275)$; $(99; 176)$.

❖ **Bài 16.** Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức P với $x = 0,36$:

$$P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} - \frac{3}{3 - \sqrt{x}} - \frac{6\sqrt{x}}{x - 9}.$$

🗨 **Lời giải.**

$P = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 3}$ với điều kiện $0 \leq x \neq 9$. Khi $x = 0,36$, ta có $P = -\frac{2}{3}$.

❖ **Bài 17.** Chứng minh đẳng thức sau với $x \geq 0, y > 0, y \neq 1, x \neq y$:

$$\left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right) \cdot \frac{\sqrt{y} - 1}{y - \sqrt{y}} = \frac{4\sqrt{x}}{x - y}.$$

🗨 **Lời giải.**

Rút gọn về trái được $\frac{4\sqrt{xy}}{x - y} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{4\sqrt{x}}{x - y}$.

❖ **Bài 18.** Cho biểu thức $P = \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x - \sqrt{x} + 1} - \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right)$.

a) Rút gọn P .

b) Tìm các giá trị nguyên của x để P có giá trị nguyên.

🗨 **Lời giải.**

a) $P = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$;

b) $x \in \{1; 4\}$.

❖ **Bài 19.** Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{x-36} - \frac{\sqrt{x}-6}{x+6\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{x\sqrt{x}-36\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}-3)(x-2\sqrt{x}+3)}$.

- a) Rút gọn P .
 b) Với giá trị nào của x thì P có giá trị lớn nhất? Giá trị lớn nhất đó là bao nhiêu?

🗨 **Lời giải.**

a) $P = \frac{6}{x-2\sqrt{x}+3}$ với điều kiện $x > 0, x \neq 9, x \neq 36$.

b) $P = \frac{6}{(\sqrt{x}-1)^2+2} \leq \frac{6}{2} = 3$ vì $(\sqrt{x}-1)^2 \geq 0$.
 Suy ra $\max P = 3$ đạt được khi $x = 1$.

□

❖ **Bài 20.** Cho biểu thức $P = \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} - \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3}$.

- a) Rút gọn P .
 b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P .

🗨 **Lời giải.**

a) $P = \frac{5\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

b) $P = \frac{5\sqrt{x}+15-17}{\sqrt{x}+3} = 5 - \frac{17}{\sqrt{x}+3}$. Do đó $P \geq 5 - \frac{17}{3} = -\frac{2}{3}$ vì $\sqrt{x} \geq 0$.
 Vậy $\min P = -\frac{2}{3}$ khi $x = 0$.

□

ÔN TẬP CHƯƠNG III

A BÀI TẬP TỰ LUẬN

⇨ **Bài 1.** Áp dụng quy tắc khai phương một thương, hãy tính

a) $\sqrt{\frac{121}{9}}$; b) $\sqrt{\frac{144}{169}}$; c) $\sqrt{3\frac{6}{25}}$; d) $\sqrt{4\frac{21}{25}}$.

☞ **Lời giải.**

a) $\sqrt{\frac{121}{9}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{9}} = \frac{11}{3}$. b) $\sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{169}} = \frac{12}{13}$.

c) $\sqrt{3\frac{6}{25}} = \sqrt{\frac{81}{25}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{25}} = \frac{9}{5}$. d) $\sqrt{4\frac{21}{25}} = \sqrt{\frac{121}{25}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{25}} = \frac{11}{5}$.

⇨ **Bài 2.** Áp dụng quy tắc chia hai căn bậc hai, hãy tính

a) $\frac{\sqrt{999}}{\sqrt{444}}$; b) $\frac{\sqrt{160}}{\sqrt{0,4}}$; c) $\frac{\sqrt{9+6\sqrt{2}}}{\sqrt{3}}$; d) $\sqrt{2+\sqrt{3}} : \sqrt{\frac{1}{2}}$.

☞ **Lời giải.**

a) $\frac{\sqrt{999}}{\sqrt{444}} = \sqrt{\frac{999}{444}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$.

b) $\frac{\sqrt{160}}{\sqrt{0,4}} = \sqrt{\frac{160}{0,4}} = \sqrt{\frac{1600}{4}} = \frac{\sqrt{1600}}{\sqrt{4}} = \frac{40}{2} = 20$.

c) $\frac{\sqrt{9+6\sqrt{2}}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{9+6\sqrt{2}}{3}} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1$;

d) $\sqrt{2+\sqrt{3}} : \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{(2+\sqrt{3}) : \frac{1}{2}} = \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{3}+1$.

⇨ **Bài 3.** Không sử dụng MTCT, tính giá trị của biểu thức

$$A = \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{4(2+\sqrt{3})^2} - \frac{1}{2-\sqrt{3}}$$

☞ **Lời giải.**

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{4(2+\sqrt{3})^2} - \frac{1}{2-\sqrt{3}} \\ &= |\sqrt{3}-2| + 2|2+\sqrt{3}| - \frac{2+\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2} \\ &= 2-\sqrt{3}+4+2\sqrt{3}-2-\sqrt{3} \\ &= 4. \end{aligned}$$

◀ **Bài 4.** Tìm x , biết:

a) $x^2 = 10$;

b) $\sqrt{x} = 8$;

c) $x^3 = -0,027$;

d) $\sqrt[3]{x} = -\frac{2}{3}$.

☞ **Lời giải.**

a) Vì $x^2 = 10$ nên $x = \sqrt{10}$ hoặc $x = -\sqrt{10}$.

b) Ta có $\sqrt{x} = 8$ suy ra $x = 8^2 = 64$.

c) Ta có $x^3 = -0,027$ suy ra $x = \sqrt[3]{-0,027} = -0,3$

d) Ta có $\sqrt[3]{x} = -\frac{2}{3}$ suy ra $x = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}$.

□

◀ **Bài 5.** Biết rằng $1 < a < 5$, rút gọn biểu thức $A = \sqrt{(a-1)^2} + \sqrt{(a-5)^2}$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $A = \sqrt{(a-1)^2} + \sqrt{(a-5)^2} = |a-1| + |a-5| = a-1 + 5-a = 4$.

□

◀ **Bài 6.** Rút gọn các biểu thức sau

a) $\sqrt{1\frac{9}{16} \cdot 5\frac{4}{9} \cdot 0,01}$;

b) $\sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}}$;

c) $\sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}}$.

☞ **Lời giải.**

a) $\sqrt{1\frac{9}{16} \cdot 5\frac{4}{9} \cdot 0,01} = \sqrt{\frac{25}{16} \cdot \frac{49}{9} \cdot \frac{1}{100}} = \sqrt{\frac{25}{16}} \cdot \sqrt{\frac{49}{9}} \cdot \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{10} = \frac{7}{24}$.

b) $\sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}} = \sqrt{\frac{(165-124)(165+124)}{164}} = \sqrt{\frac{41 \cdot 289}{164}} = \sqrt{\frac{289}{4}} = \frac{\sqrt{289}}{\sqrt{4}} = \frac{17}{2}$.

c) $\sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}} = \sqrt{\frac{(149-76)(149+76)}{(457-384)(457+384)}} = \sqrt{\frac{73 \cdot 225}{73 \cdot 841}} = \sqrt{\frac{225}{841}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{841}} = \frac{15}{29}$.

□

◀ **Bài 7.** Rút gọn các biểu thức sau

a) $\frac{\sqrt{96x^5}}{\sqrt{24x}}$ ($x > 0$);

b) $\frac{\sqrt{18(x+1)^3}}{\sqrt{2x+\sqrt{2}}}$ ($x > -1$);

c) $\frac{\sqrt{3x^4y^4}}{\sqrt{27x^2y^4}}$ ($x < 0, y > 0$).

☞ **Lời giải.**

a) $\frac{\sqrt{96x^5}}{\sqrt{24x}} = \sqrt{\frac{96x^5}{24x}} = \sqrt{4x^4} = 2x^2$.

b) $\frac{\sqrt{18(x+1)^3}}{\sqrt{2x+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{18(x+1)^3}}{\sqrt{2(x+1)^2}} = \sqrt{\frac{18(x+1)^3}{2(x+1)^2}} = \sqrt{9(x+1)} = 3\sqrt{x+1}$ (với $x > -1$).

c) $\frac{\sqrt{3x^4y^4}}{\sqrt{27x^2y^4}} = \sqrt{\frac{3x^4y^4}{27x^2y^4}} = \sqrt{\frac{x^2}{9}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{9}} = \frac{-x}{3}$ (với $x < 0, y > 0$).

□

⇨ **Bài 8.** Rút gọn các biểu thức sau

$$\text{a) } (2x - 2) \sqrt{\frac{(x-2)^4}{(x-1)^2}} \quad (x < 1);$$

$$\text{b) } \sqrt{\frac{4 + 12a + 9a^2}{b^2}} \quad (a \leq -\frac{2}{3}).$$

☞ **Lời giải.**

$$\text{a) } (2x - 2) \sqrt{\frac{(x-2)^4}{(x-1)^2}} = 2(x-1) \cdot \frac{\sqrt{(x-2)^4}}{\sqrt{(x-1)^2}} = 2(x-1) \cdot \frac{(x-2)^2}{-(x-1)} = -2(x-2)^2 \quad (\text{với } x < 1).$$

$$\text{b) } \sqrt{\frac{4 + 12a + 9a^2}{b^2}} = \sqrt{\frac{(2+3a)^2}{b^2}} = \frac{\sqrt{(2+3a)^2}}{\sqrt{b^2}} = \frac{-(2+3a)}{|b|} \quad (\text{với } a \leq -\frac{2}{3}).$$

⇨ **Bài 9.** Trục căn thức ở mẫu các biểu thức sau

$$\text{a) } \frac{4 - 2\sqrt{6}}{\sqrt{48}};$$

$$\text{b) } \frac{3 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}$$

$$\text{c) } \frac{a}{a - \sqrt{a}} \quad \text{với } a > 0, a \neq 1.$$

☞ **Lời giải.**

$$\text{a) } \frac{4 - 2\sqrt{6}}{\sqrt{48}} = \frac{(4 - 2\sqrt{6})\sqrt{48}}{48} = \frac{2 \cdot (2 - \sqrt{6}) \cdot 4\sqrt{3}}{48} = \frac{(2 - \sqrt{6}) \cdot \sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{6}.$$

$$\text{b) } \frac{3 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} = \frac{(3 - \sqrt{5})^2}{3^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{9 - 6\sqrt{5} + 5}{9 - 5} = \frac{14 - 6\sqrt{5}}{4} = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{c) } \frac{a}{a - \sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a})^2}{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)}{a - 1} = \frac{a + \sqrt{a}}{a - 1}$$

⇨ **Bài 10.** Biết rằng $a > 0, b > 0$ và $ab = 16$. Tính giá trị của biểu thức $A = a\sqrt{\frac{12b}{a}} + b\sqrt{\frac{3a}{b}}$.

☞ **Lời giải.**

$$\begin{aligned} A &= a\sqrt{\frac{12b}{a}} + b\sqrt{\frac{3a}{b}} \\ &= \sqrt{12ab} + \sqrt{3ab} \\ &= \sqrt{12 \cdot 16} + \sqrt{3 \cdot 16} \\ &= \sqrt{192} + \sqrt{48} \\ &= 8\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3}. \end{aligned}$$

⇨ **Bài 11.** Tính $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \\ &= \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{3 + 2\sqrt{6} + 2 + 3 - 2\sqrt{6} + 2}{3 - 2} \\ &= \frac{10}{1} = 10. \end{aligned}$$

Bài 12. Rút gọn biểu thức

a) $A = \sqrt{40^2 - 24^2};$

b) $B = (\sqrt{12} + 2\sqrt{3} - \sqrt{27}) \cdot \sqrt{3};$

c) $C = \frac{\sqrt{63^3 + 1}}{\sqrt{63^2 - 62}};$

d) $D = \sqrt{60} - 5\sqrt{\frac{3}{5}} - 3\sqrt{\frac{5}{3}}.$

Lời giải.

a) $A = \sqrt{40^2 - 24^2} = \sqrt{(40 + 24)(40 - 24)} = \sqrt{64 \cdot 16} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{16} = 8 \cdot 4 = 32;$

b) $B = (\sqrt{12} + 2\sqrt{3} - \sqrt{27}) \cdot \sqrt{3} = (\sqrt{2^2 \cdot 3} + 2\sqrt{3} - \sqrt{3^3}) \cdot \sqrt{3} = (2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} \\ = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3;$

c) $C = \frac{\sqrt{63^3 + 1}}{\sqrt{63^2 - 62}} = \sqrt{\frac{(63 + 1)(63^2 - 63 + 1)}{63^2 - 62}} = \sqrt{\frac{64 \cdot (63^2 - 62)}{63^2 - 62}} = 8;$

d) $D = \sqrt{60} - 5\sqrt{\frac{3}{5}} - 3\sqrt{\frac{5}{3}} = \sqrt{4 \cdot 15} - \sqrt{5^2 \cdot \frac{3}{5}} - \sqrt{3^2 \cdot \frac{5}{3}} = 2\sqrt{15} - \sqrt{15} - \sqrt{15} = 0.$

Bài 13. Trục căn thức ở mẫu

a) $\frac{x^2 + x}{\sqrt{x + 1}}$ với $x > -1;$

b) $\frac{3}{\sqrt{x} - 2}$ với $x > 0, x \neq 4;$

c) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}};$

d) $\frac{x^2 - 90}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$ với $x > 0, x \neq 3.$

Lời giải.

a) Với $x > -1$. Ta có $\frac{x^2 + x}{\sqrt{x + 1}} = \frac{x(x + 1)}{\sqrt{x + 1}} = \frac{x \cdot (\sqrt{x + 1})^2}{\sqrt{x + 1}} = x\sqrt{x + 1};$

b) Với $x > 0, x \neq 4$. Ta có $\frac{3}{\sqrt{x} - 2} = \frac{3(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{3(\sqrt{x} + 2)}{x - 4};$

c) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{5})}{(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{5})} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2}{3 - 5} = \frac{8 - 2\sqrt{15}}{-2} = \sqrt{15} - 4;$

d) Với $x > 0, x \neq 3$.

Ta có $\frac{x^2 - 90}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3})(x + 3)}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} = (\sqrt{x} + \sqrt{3})(x + 3).$

◀ **Bài 14.** So sánh

a) $2\sqrt{3}$ và $3\sqrt{2}$;

b) $7\sqrt{\frac{3}{7}}$ và $\sqrt{2} \cdot \sqrt{11}$;

c) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ và $\frac{6}{\sqrt{10}}$.

☞ **Lời giải.**

a) Ta có $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$; $3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{18}$.
Mà $\sqrt{12} < \sqrt{18}$ nên $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$.

b) Ta có $7\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{7^2 \cdot \frac{3}{7}} = \sqrt{21}$; $\sqrt{2} \cdot \sqrt{11} = \sqrt{2 \cdot 11} = \sqrt{22}$.
Mà $\sqrt{21} < \sqrt{22}$ nên $7\sqrt{\frac{3}{7}} < \sqrt{2} \cdot \sqrt{11}$.

c) Ta có $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{20}}{5}$; $\frac{6\sqrt{10}}{10} = \frac{3\sqrt{10}}{5} = \frac{\sqrt{90}}{5}$.
Mà $\frac{\sqrt{20}}{5} < \frac{\sqrt{90}}{5}$ nên $\frac{2}{\sqrt{5}} < \frac{6}{\sqrt{10}}$.

□

◀ **Bài 15.** Cho biểu thức $M = \frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ với $a > 0, b > 0$.

a) Rút gọn biểu thức M .

b) Tính giá trị của biểu thức tại $a = 2, b = 8$.

☞ **Lời giải.**

a) Với $a > 0, b > 0$. Ta có

$$M = \frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a^2} - \sqrt{ab} + \sqrt{b^2})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = a + b - \sqrt{ab}.$$

b) Với $a = 2, b = 8$, ta có $M = 2 + 8 - \sqrt{2 \cdot 8} = 6$.

□

◀ **Bài 16.** Cho biểu thức $N = \frac{x\sqrt{x} + 8}{x - 4} - \frac{x + 4}{\sqrt{x} - 2}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức N .

b) Tính giá trị của biểu thức tại $x = 9$.

☞ **Lời giải.**

a)

$$\begin{aligned}
N &= \frac{x\sqrt{x} + 8}{x - 4} - \frac{x + 4}{\sqrt{x} - 2} \\
&= \frac{x\sqrt{x} + 8}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} - \frac{x + 4}{\sqrt{x} - 2} \\
&= \frac{x\sqrt{x} + 8}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} - \frac{(x + 4)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \\
&= \frac{x\sqrt{x} + 8 - (x + 4)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \\
&= \frac{(\sqrt{x} + 2)(x - 2\sqrt{x} + 4) - (x + 4)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \\
&= \frac{(\sqrt{x} + 2)[(x - 2\sqrt{x} + 4) - (x + 4)]}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \\
&= \frac{(x - 2\sqrt{x} + 4) - (x + 4)}{\sqrt{x} - 2} \\
&= \frac{x - 2\sqrt{x} + 4 - x - 4}{\sqrt{x} - 2} \\
&= \frac{-2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}.
\end{aligned}$$

Do đó $N = \frac{-2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}$.

b) Với $x = 9 \Rightarrow N = \frac{-2\sqrt{9}}{\sqrt{9} - 2} = \frac{-6}{1} = -6$.

◀ **Bài 17.** Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 2} - \frac{4}{\sqrt{x} + 2}$ ($x > 0, x \neq 4$).

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tính giá trị của A tại $x = 14$.

🗨 **Lời giải.**

a) Với $x > 0, x \neq 4$ ta có $A = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 2} - \frac{4}{\sqrt{x} + 2}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\sqrt{x} + 2)^2 - 4(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \\
&= \frac{x + 4\sqrt{x} + 4 - 4\sqrt{x} + 8}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \\
&= \frac{x + 12}{x - 4}.
\end{aligned}$$

b) Tại $x = 14$ (thỏa mãn $x > 0, x \neq 4$), giá trị của biểu thức A là $\frac{14 + 12}{14 - 4} = \frac{13}{5}$.

◀ **Bài 18.** Rút gọn các biểu thức sau

a) $\left(a\sqrt{\frac{3}{a}} + 3\sqrt{\frac{a}{3}} + \sqrt{12a^3}\right) : \sqrt{3a}$ với $a > 0$; b) $\frac{1 - a}{1 + \sqrt{a}} + \frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}}$ với $a \geq 0, a \neq 1$.

🗨 **Lời giải.**

a) Với $a > 0$, ta có

$$\begin{aligned}
 & \left(a\sqrt{\frac{3}{a}} + 3\sqrt{\frac{a}{3}} + \sqrt{12a^3} \right) : \sqrt{3a} \\
 &= (\sqrt{3a} + \sqrt{3a} + 2a\sqrt{3a}) : \sqrt{3a} \\
 &= \frac{\sqrt{3a} + \sqrt{3a} + 2a\sqrt{3a}}{\sqrt{3a}} \\
 &= \frac{2\sqrt{3a} + 2a\sqrt{3a}}{\sqrt{3a}} \\
 &= \frac{\sqrt{3a}(2 + 2a)}{\sqrt{3a}} \\
 &= 2 + 2a.
 \end{aligned}$$

b) Với $a \geq 0$, $a \neq 1$, ta có

$$\begin{aligned}
 & \frac{1-a}{1+\sqrt{a}} + \frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} \\
 &= \frac{1-(\sqrt{a})^2}{1+\sqrt{a}} + \frac{1-(\sqrt{a})^3}{1-\sqrt{a}} \\
 &= \frac{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})}{1+\sqrt{a}} + \frac{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a}+a)}{1-\sqrt{a}} \\
 &= 1-\sqrt{a}+1+\sqrt{a}+a \\
 &= 2+a.
 \end{aligned}$$

□

◆ **Bài 19.** Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{a+\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a}+1} \right) : \frac{\sqrt{a}-1}{a+2\sqrt{a}+1}$ với $a > 0$ và $a \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tính giá trị của P khi $a = 0,25$.

☞ **Lời giải.**

a) Với $a > 0$ và $a \neq 1$, ta có

$$\begin{aligned}
 P &= \left(\frac{1}{a+\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a}+1} \right) : \frac{\sqrt{a}-1}{a+2\sqrt{a}+1} \\
 &= \left[\frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)} \right] : \frac{\sqrt{a}-1}{(\sqrt{a}+1)^2} \\
 &= \frac{1-\sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)} \cdot \frac{(\sqrt{a}+1)^2}{\sqrt{a}-1} \\
 &= -\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} \\
 &= -\frac{a+\sqrt{a}}{a}.
 \end{aligned}$$

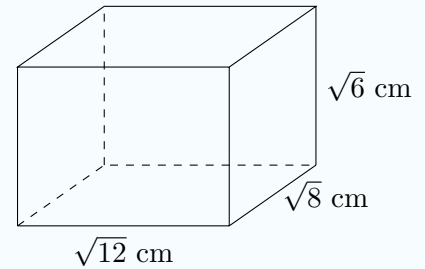
b) Với $a = 0,25$ thỏa $a > 0$ và $a \neq 1$, ta có

$$P = -\frac{0,25 + \sqrt{0,25}}{0,25} = -\frac{0,25 + 0,5}{0,25} = -\frac{0,75}{0,25} = -3.$$

□

❖ Bài 20.

Cho hình hộp chữ nhật có chiều dài $\sqrt{12}$ cm, chiều rộng $\sqrt{8}$ cm, chiều cao $\sqrt{6}$ cm như hình bên.



- Tính thể tích của hình hộp chữ nhật đó.
- Tính diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật đó.

🗨️ Lời giải.

- Thể tích của hình hộp chữ nhật trên là

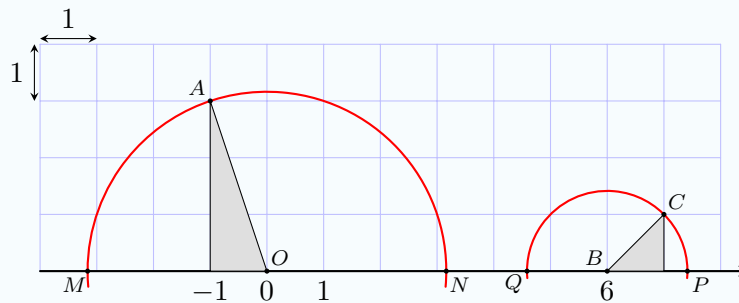
$$\sqrt{12} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{6} = 14 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

- Diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật là

$$2 \cdot (\sqrt{12} + \sqrt{8}) \cdot \sqrt{6} = 8\sqrt{3} + 12\sqrt{2} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

□

❖ Bài 21. Một trục số được vẽ trên lưới ô vuông như hình dưới.



Hình 1

- Đường tròn tâm O bán kính OA cắt trục số tại hai điểm M và N . Hai điểm M và N biểu diễn hai số thực nào?
- Đường tròn tâm B bán kính BC cắt trục số tại hai điểm P và Q . Hai điểm P và Q biểu diễn hai số thực nào?

🗨️ Lời giải.

- Ta có $OA = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ (Định lý Pythagoras). Suy ra $OM = ON = \sqrt{10}$.
Vậy điểm M biểu diễn số $-\sqrt{10}$; điểm N biểu diễn số $\sqrt{10}$.
- Ta có $BC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ (Định lý Pythagoras). Suy ra $OQ = 6 - \sqrt{2}$; $OP = 6 + \sqrt{2}$.
Vậy điểm P biểu diễn số $6 + \sqrt{2}$; điểm Q biểu diễn số $6 - \sqrt{2}$.

□

❖ Bài 22. Biết rằng nhiệt lượng tỏa ra trên dây dẫn được tính bởi công thức $Q = I^2Rt$, trong đó Q là nhiệt lượng tính bằng đơn vị Joule (J), R là điện trở tính bằng đơn vị Ohm (Ω), I là cường độ dòng điện tính bằng đơn vị Ampe (A), t là thời gian tính bằng giây (s). Dòng điện chạy qua một dây dẫn có $R = 10 \Omega$ trong thời gian 5 giây.

- Thay dấu “?” trong bảng sau bằng các giá trị thích hợp.

$I (A)$	1	1,5	2
$Q (J)$?	?	?

b) Cường độ dòng điện là bao nhiêu Ampe để nhiệt lượng tỏa trên dây dẫn đạt 800 J?

Lời giải.

a)

$I (A)$	1	1,5	2
$Q (J)$	50	112,5	200

b) Từ công thức $Q = I^2 R t$ suy ra $I = \sqrt{\frac{Q}{R t}} = \sqrt{\frac{800}{10 \cdot 5}} = 4 (A)$.

Vậy khi nhiệt lượng tỏa ra trên dây dẫn đạt 800 J thì cường độ dòng điện là 4 (A). □

❖ **Bài 23.** Ngày 28/9/2018, sau trận động đất 7,5 độ Richter, cơn sóng thần (tiếng Anh là Tsunami) cao hơn 6 m đã tràn vào đảo Sulawesicuar (Indonesia) và tàn phá thành phố Palu gây thiệt hại vô cùng to lớn. Tốc độ cơn sóng thần v (m/s) và chiều sâu đại dương d (m) của nơi bắt đầu sóng thần liên hệ bởi công thức $v = \sqrt{dg}$, trong đó $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

- Hãy tính tốc độ cơn sóng thần xuất phát từ Thái Bình Dương, ở độ sâu trung bình 400 m (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét trên giây).
- Theo tính toán của các nhà khoa học địa chất, tốc độ cơn sóng thần ngày 28/9/2018 là 800 km/h, hãy tính chiều sâu đại dương của nơi tâm chấn động đất gây ra sóng thần (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).

Lời giải.

a) $v = \sqrt{dg} = \sqrt{400 \cdot 9,81} \approx 62,64 \text{ (m/s)}$.

b) Đổi đơn vị $800 \text{ (km/h)} = \frac{2000}{9} \text{ (m/s)}$.

Ta có $v = \sqrt{dg} \Rightarrow v^2 = dg \Rightarrow d = \frac{v^2}{g} = \frac{\left(\frac{2000}{9}\right)^2}{9,81} \approx 5033,9 \text{ (m)}$.

❖ **Bài 24.** Khi bay vào không gian, trọng lượng P (N) của một phi hành gia ở vị trí cách mặt đất một độ cao h (m) được tính theo công thức

$$P = \frac{28014 \cdot 10^{12}}{(64 \cdot 10^5 + h)^2}$$

(Nguồn: Chuyên đề Vật lí 11, NXB Đại học Sư phạm, năm 2023)

- Trọng lượng của phi hành gia là bao nhiêu Newton khi cách mặt đất 10000 m (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?
- Ở độ cao bao nhiêu mét thì trọng lượng của phi hành gia là 619 N (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Lời giải.

a) $P = \frac{28014 \cdot 10^{12}}{(64 \cdot 10^5 + h)^2} = \frac{28014 \cdot 10^{12}}{(64 \cdot 10^5 + 10000)^2} \approx 681,8 \text{ (N)}$.

Vậy khi cách mặt đất 10000 m thì trọng lượng của phi hành gia là 681,8 N.

b)

$$\begin{aligned}
 619 &= \frac{28\,014 \cdot 10^{12}}{(64 \cdot 10^5 + h)^2} \\
 28\,014 \cdot 10^{12} &= 619 \cdot (64 \cdot 10^5 + h)^2 \\
 \frac{28\,014 \cdot 10^{12}}{619} &= (64 \cdot 10^5 + h)^2 \\
 \sqrt{\frac{28\,014 \cdot 10^{12}}{619}} &= 64 \cdot 10^5 + h \\
 h &= \sqrt{\frac{28\,014 \cdot 10^{12}}{619}} - 64 \cdot 10^5 \\
 h &= 327\,322,34.
 \end{aligned}$$

Vậy ở độ cao 327 322,34 thì trọng lượng của phi hành gia là 619 N. □

❖ **Bài 25.** Áp suất P (lb/in²) cần thiết để ép nước qua một ống dài L (ft) và đường kính d (in) với tốc độ v (ft/s) được cho bởi công thức $P = 0,00161 \cdot \frac{v^2 L}{d}$
 (Nguồn: John W. Cell, *Engineering Problems Illustrating Mathematics*, McGraw-Hill Book Company, Inc. New York and London, năm 1943).

a) Hãy tính v theo P , L và d .

b) Cho $P = 198,5$; $L = 11\,560$; $d = 6$. Hãy tính tốc độ v (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của feet trên giây).
 Biết rằng 1 in = 2,54 cm; 1 ft(feet) = 0,3048 m; 1 lb(pound) = 0,45359237 kg; 1 lb/in² = 6 894,75729 Pa(Pascal).

🗨️ Lời giải.

a)

$$\begin{aligned}
 P &= 0,00161 \cdot \frac{v^2 L}{d} \\
 Pd &= 0,00161 \cdot v^2 \cdot L \\
 v^2 &= \frac{Pd}{0,00161 \cdot L} \\
 v &= \sqrt{\frac{Pd}{0,00161 \cdot L}}.
 \end{aligned}$$

$$b) v = \sqrt{\frac{Pd}{0,00161 \cdot L}} = \sqrt{\frac{198,5 \cdot 6}{0,00161 \cdot 11\,560}} \approx 8,0.$$

❖ **Bài 26.** Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} - \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$.

b) $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$.

c) $(2 + \sqrt{7})\sqrt{11 - 4\sqrt{7}}$.

d) $\sqrt{(3 + \sqrt{2})^2} + \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$.

e) $\sqrt{9 - 3\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

f) $\frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$.

g) $\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$.

h) $\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{4 - \sqrt{15}}} + 6\sqrt{\frac{1}{3}}$.

$$\text{i) } \frac{1}{2}\sqrt{12-8\sqrt{2}} + \sqrt{17-12\sqrt{2}} - 4\sqrt{2}.$$

$$\text{j) } \sqrt{19-8\sqrt{3}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}.$$

$$\text{k) } \sqrt{12+3\sqrt{3}} + \sqrt{4+2\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}.$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \sqrt{9+2-2\cdot 3\cdot \sqrt{2}} - \sqrt{9+2+2\cdot 3\cdot \sqrt{2}} \\ &= \sqrt{(3-\sqrt{2})^2} - \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} \\ &= 3-\sqrt{2}-3-\sqrt{2} \\ &= -2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} + \sqrt{9+5-2\cdot 3\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{5}-2 + \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} \\ &= \sqrt{5}-2+3-\sqrt{5} \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & (2+\sqrt{7})\sqrt{7+4-2\cdot 2\sqrt{7}} \\ &= (2+\sqrt{7})\sqrt{(\sqrt{7}-2)^2} \\ &= (\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}-2) \\ &= 7-4 \\ &= 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } & 3+\sqrt{2} + \sqrt{4+2-2\cdot 2\sqrt{2}} \\ &= 3+\sqrt{2} + \sqrt{(2-\sqrt{2})^2} \\ &= 3+\sqrt{2}+2-\sqrt{2} \\ &= 5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } & \sqrt{9-3\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} - \sqrt{2-\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{6+3-2\sqrt{6}\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3+2-2\sqrt{3}\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{8-4\sqrt{3}}}{2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} - \frac{\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}}{2} \\ &= \sqrt{6}-\sqrt{3} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3}-\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } & \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}-\sqrt{6}} + \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2\sqrt{2}+\sqrt{6}} \\ &= \frac{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}-\sqrt{6}} + \frac{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}+\sqrt{6}} \\ &= \frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} + \frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \\ &= \frac{(2\sqrt{2}-\sqrt{6})(3-\sqrt{3}) + (2\sqrt{2}+\sqrt{6})(3+\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} \\ &= \frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{6}-3\sqrt{6}+3\sqrt{2}+6\sqrt{2}+2\sqrt{6}+3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} \\ &= 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\text{g) } \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{11-6\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1 + \sqrt{(3-\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}-1+3-\sqrt{2} = 2.$$

$$\begin{aligned} \text{h) } & \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{4-\sqrt{15}}} + 6\sqrt{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2} - \sqrt{2(4+\sqrt{15})} + \frac{6\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{8 + 2\sqrt{15}} + 2\sqrt{3} \\
&= \sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2} \\
&= \sqrt{5} + \sqrt{3} - (\sqrt{5} + \sqrt{3}) = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{i)} \quad &\frac{1}{2}\sqrt{12 - 8\sqrt{2}} + \sqrt{17 - 12\sqrt{2}} - 4\sqrt{2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{2} - 2)^2} + \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})^2} - 4\sqrt{2} \\
&= \frac{1}{2}|2\sqrt{2} - 2| + |3 - 2\sqrt{2}| - 4\sqrt{2} \\
&= \frac{1}{2}(2\sqrt{2} - 2) + 3 - 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} \\
&= -5\sqrt{2} + 2.
\end{aligned}$$

$$\text{j)} \quad \sqrt{19 - 8\sqrt{3}} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(4 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = 4 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 = 3.$$

$$\begin{aligned}
\text{k)} \quad &\sqrt{12 + 3\sqrt{3}} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - 2\sqrt{3} = \sqrt{12 + 3\sqrt{3}} + \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} - 2\sqrt{3} \\
&= \sqrt{12 + 3\sqrt{3}} + 1 + \sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{13 + 4\sqrt{3}} - 2\sqrt{3} \\
&= \sqrt{(2\sqrt{3} + 1)^2} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 1 - 2\sqrt{3} = 1.
\end{aligned}$$

□

↔ **Bài 27.** Cho các biểu thức

$$A = \sqrt{20a + 92 + \sqrt{a^4 + 16a^2 + 64}}. \quad B = a^4 + 20a^3 + 100a^2.$$

a) Rút gọn A .

b) Tìm a để $A + B = 0$.

☞ **Lời giải.**

$$\text{a)} \quad A = \sqrt{20a + 92 + \sqrt{(a^2 + 8)^2}} = \sqrt{(a + 10)^2} = |a + 10|.$$

$$\text{b)} \quad A + B = |a + 10| + a^2 \cdot (a + 10)^2 = 0 \Rightarrow a = -10.$$

□

↔ **Bài 28.** Rút gọn các biểu thức sau

$$\text{a)} \quad \sqrt{48} - 2\sqrt{75} + \sqrt{108} - \frac{1}{7}\sqrt{147};$$

$$\text{b)} \quad (\sqrt{44} + \sqrt{11})\sqrt{11};$$

$$\text{c)} \quad \sqrt{24} - 6\sqrt{\frac{1}{6}} - \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}};$$

$$\text{d)} \quad \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} - \sqrt{11 + 6\sqrt{2}};$$

$$\text{e)} \quad \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}};$$

$$\text{f)} \quad (2 + \sqrt{7})\sqrt{11 - 4\sqrt{7}};$$

$$\text{g)} \quad \sqrt{(3 + \sqrt{2})^2} + \sqrt{6 - 4\sqrt{2}};$$

$$\text{h)} \quad \sqrt{9 - 3\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

☞ **Lời giải.**

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad &\sqrt{48} - 2\sqrt{75} + \sqrt{108} - \frac{1}{7}\sqrt{147} = 4\sqrt{3} - 2 \cdot 5\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - \frac{1}{7} \cdot 7\sqrt{3} \\
&= \sqrt{3} \left(4 - 2 \cdot 5 + 6 - \frac{1}{7} \cdot 7 \right) = -\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad (\sqrt{44} + \sqrt{11})\sqrt{11} = (2\sqrt{11} + \sqrt{11})\sqrt{11} = 3\sqrt{11} \cdot \sqrt{11} = 3 \cdot 11 = 33.$$

$$c) \sqrt{24} - 6\sqrt{\frac{1}{6}} - \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{6} - \sqrt{6} - \sqrt{6} = 0.$$

$$\begin{aligned} d) \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} - \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} &= \sqrt{9 + 2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}} - \sqrt{9 + 2 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}} \\ &= \sqrt{(3 - \sqrt{2})^2} - \sqrt{(3 + \sqrt{2})^2} \\ &= 3 - \sqrt{2} - (3 + \sqrt{2}) = -2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e) \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}} &= \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2} + \sqrt{9 + 5 - 2 \cdot 3\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{5} - 2 + \sqrt{(3 - \sqrt{5})^2} \\ &= \sqrt{5} - 2 + 3 - \sqrt{5} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f) (2 + \sqrt{7})\sqrt{11 - 4\sqrt{7}} &= (2 + \sqrt{7})\sqrt{7 + 4 - 2 \cdot 2\sqrt{7}} \\ &= (2 + \sqrt{7})\sqrt{(\sqrt{7} - 2)^2} \\ &= (\sqrt{7} + 2)(\sqrt{7} - 2) = 7 - 4 = 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g) \sqrt{(3 + \sqrt{2})^2} + \sqrt{6 - 4\sqrt{2}} &= 3 + \sqrt{2} + \sqrt{4 + 2 - 2 \cdot 2\sqrt{2}} \\ &= 3 + \sqrt{2} + \sqrt{(2 - \sqrt{2})^2} \\ &= 3 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h) \sqrt{9 - 3\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}} \\ &= \sqrt{6 + 3 - 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + \sqrt{3 + 2 - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}}{2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{3})^2} - \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} - \frac{\sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}}{2} \\ &= \sqrt{6} - \sqrt{3} - \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} = 0. \end{aligned}$$

□

◀ **Bài 29.** Rút gọn các biểu thức sau

$$a) A = x + 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 9}, \quad (x \leq 3).$$

$$c) C = \sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2}, \quad (-2 \leq x \leq 0).$$

$$b) B = |x - 2| + \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2}, \quad (x < 2).$$

$$d) D = 2x - 1 - \frac{\sqrt{x^2 - 10x + 25}}{x - 5}.$$

🗨 **Lời giải.**

$$a) A = x + 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = x + 3 + |x - 3| = x + 3 + (3 - x) = 6.$$

$$b) B = |x - 2| + \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2} = -(x - 2) + \frac{|x - 2|}{x - 2} = -x + 2 + \frac{2 - x}{x - 2} = -x + 1.$$

$$c) C = \sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2} = |x + 2| + |x| = x + 2 - x = 2.$$

$$d) D = 2x - 1 - \frac{\sqrt{x^2 - 10x + 25}}{x - 5} = 2x - 1 - \frac{|x - 5|}{x - 5}$$

$$\text{☺ Với } x \geq 5 \text{ thì } D = 2x - 1 - \frac{x - 5}{x - 5} = 2x - 1 - 1 = 2x - 2.$$

☑ Với $x < 5$ thì $D = 2x - 1 - \frac{-(x-5)}{x-5} = 2x - 1 + 1 = 2x$.

❖ **Bài 30.** Phân tích biểu thức sau thành nhân tử

a) $A = \sqrt{x^2 - 4} - \sqrt{x^2 + 2x}, (x > 2);$ c) $C = x - 2\sqrt{x-1}, (x > 1);$
 b) $B = \sqrt{x^3 + 1} + \sqrt{x(x+2) + 1}, (x > -1);$ d) $D = x + \sqrt{x} - 2, (x > 0).$

☞ **Lời giải.**

a) $A = \sqrt{x^2 - 4} - \sqrt{x^2 + 2x}$
 $= \sqrt{(x-2)(x+2)} - \sqrt{x(x+2)}$
 $= \sqrt{x+2}(\sqrt{x-2} - \sqrt{x}).$

b) $B = \sqrt{x^3 + 1} + \sqrt{x(x+2) + 1}$
 $= \sqrt{(x+1)(x^2 - x + 1)} + \sqrt{(x+1)^2}$
 $= \sqrt{x+1}(\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x+1}).$

c) $C = x - 2\sqrt{x-1}$
 $= x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1$
 $= (\sqrt{x-1} + 1)^2.$

d) $D = x + \sqrt{x} - 2$
 $= x - \sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 2$
 $= \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) + 2(\sqrt{x} - 1)$
 $= (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2).$

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

❖ **Câu 1.** Căn bậc hai của 4 là

- (A) 2. (B) -2. (C) 2 và -2. (D) $\sqrt{2}$ và $-\sqrt{2}$.

☞ **Lời giải.**

Căn bậc hai của 4 là 2 và -2.

Chọn đáp án (C)

❖ **Câu 2.** Căn bậc hai của 16 là

- (A) 4. (B) 4 và -4. (C) 256. (D) 256 và -256.

☞ **Lời giải.**

Căn bậc hai của 16 là 4 và -4.

Chọn đáp án (B)

❖ **Câu 3.** Căn bậc hai số học của 49 là

- (A) 7. (B) -7. (C) 7 và -7. (D) $\sqrt{7}$ và $-\sqrt{7}$.

☞ **Lời giải.**

Căn bậc hai số học của 49 là 7.

Chọn đáp án (A)

❖ **Câu 4.** Nếu $\sqrt{x} = 9$ thì x bằng

- (A) 3. (B) 3 hoặc -3. (C) 81. (D) 81 hoặc -81.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\sqrt{81} = 9$ nên $x = 81$.

❖ **Câu 5.** Rút gọn biểu thức $\sqrt[3]{(4 - \sqrt{17})^3}$ ta được

(A) $4 + \sqrt{17}$.

(B) $4 - \sqrt{17}$.

(C) $\sqrt{17} - 4$.

(D) $-4 - \sqrt{17}$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\sqrt[3]{(4 - \sqrt{17})^3} = 4 - \sqrt{17}$.

Chọn đáp án (B) □

❖ **Câu 6.** Độ dài đường kính (mét) của hình tròn có diện tích 4 m^2 sau khi làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai bằng

(A) 2,66.

(B) 2,50.

(C) 1,13.

(D) 1,12.

☞ **Lời giải.**

Ta có diện tích hình tròn $S = \frac{\pi d^2}{4}$ suy ra $d = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 4}{\pi}} \approx 2,26$.

Chọn đáp án (A) □

❖ **Câu 7.** Một vật rơi tự do từ độ cao 396,9 m. Biết quãng đường chuyển động S (mét) của vật phụ thuộc vào thời gian t (giây) bởi công thức $S = 4,9t^2$. Vật chạm đất sau

(A) 8 giây.

(B) 5 giây.

(C) 11 giây.

(D) 9 giây.

☞ **Lời giải.**

Từ công thức $S = 4,9t^2$ suy ra $t = \sqrt{\frac{S}{4,9}} = \sqrt{\frac{396,9}{4}} = 9$.

Chọn đáp án (D) □

❖ **Câu 8.** Biểu thức nào sau đây có giá trị khác với các biểu thức còn lại?

(A) $(-\sqrt{5})^2$.

(B) $\sqrt{5^2}$.

(C) $\sqrt{(-5)^2}$.

(D) $-(\sqrt{5})^2$.

☞ **Lời giải.**

Ta có

☑ $(-\sqrt{5})^2 = \sqrt{5^2} = \sqrt{(-5)^2} = 5$;

☑ $-(\sqrt{5})^2 = -5$.

Biểu thức $-(\sqrt{5})^2$ có giá trị khác với các biểu thức còn lại.

Chọn đáp án (D) □

❖ **Câu 9.** Có bao nhiêu số tự nhiên x để $\sqrt{16 - x}$ là số nguyên?

(A) 2.

(B) 3.

(C) 4.

(D) 5.

☞ **Lời giải.**

Điều kiện $x \leq 16$.

Để $\sqrt{16 - x}$ là số nguyên thì $16 - x$ phải là số chính phương.

Suy ra $16 - x \in \{0; 1; 4; 9; 16; 25; \dots\}$.

Suy ra $x \in \{16; 15; 11; 7; 0; -9; \dots\}$.

Mà $x \in \mathbb{N}$ nên $x \in \{0; 7; 11; 15; 16\}$. Vậy có 5 giá trị.

Chọn đáp án (D) □

❖ **Câu 10.** Giá trị của biểu thức $\sqrt{16} + \sqrt[3]{-64}$ bằng

(A) 0.

(B) -2.

(C) 8.

(D) -4.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{16} + \sqrt[3]{-64} = \sqrt{4^2} + \sqrt[3]{(-4)^3} = 4 + (-4) = 0$.

Chọn đáp án **(A)** □

❖ **Câu 11.** Dạng thức nào sau đây không đúng?

(A) $\sqrt{16} + \sqrt{144} = 16$.

(B) $\sqrt{0,64} \cdot \sqrt{9} = 2,4$.

(C) $\sqrt{(-18)^2} : \sqrt{6^2} = 3$.

(D) $\sqrt{(-3)^2} - \sqrt{7^2} = -10$.

Lời giải.

Ta có

(A) $\sqrt{16} + \sqrt{144} = 4 + 12 = 16$;

(B) $\sqrt{0,64} \cdot \sqrt{9} = 0,8 \cdot 3 = 2,4$;

(C) $\sqrt{(-18)^2} : \sqrt{6^2} = 18 : 6 = 3$;

(D) $\sqrt{(-3)^2} - \sqrt{7^2} = 3 - 7 = -4$.

Chọn đáp án **(D)** □

❖ **Câu 12.** Biết rằng $2,6^2 = 6,76$. Giá trị của biểu thức $\sqrt{0,0676}$ bằng

(A) 0,0026.

(B) 0,026.

(C) 0,26.

(D) 2,6.

Lời giải.

Ta có $2,6^2 = 6,76 \Rightarrow 0,0676 = \frac{2,6^2}{10^2} = \left(\frac{2,6}{10}\right)^2 = 0,26^2$.

Vậy $\sqrt{0,0676} = 0,26$. □

❖ **Câu 13.** Rút gọn biểu thức $\sqrt{9a} - \sqrt{16a} + \sqrt{64a}$ với $a \geq 0$, ta có kết quả

(A) $15\sqrt{a}$.

(B) $15a$.

(C) $7\sqrt{a}$.

(D) $7a$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{9a} - \sqrt{16a} + \sqrt{64a} = 3\sqrt{a} - 4\sqrt{a} + 8\sqrt{a} = 7\sqrt{a}$.

Chọn đáp án **(C)** □

❖ **Câu 14.** Cho $a = 2\sqrt{3} + \sqrt{2}$, $b = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$. Rút gọn biểu thức $\sqrt{3a} - \sqrt{2b}$, ta có kết quả

(A) $3\sqrt{6}$.

(B) $-\sqrt{6}$.

(C) $6\sqrt{3}$.

(D) $12 - \sqrt{6}$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{3a} - \sqrt{2b} = \sqrt{3} \cdot (2\sqrt{3} + \sqrt{2}) - \sqrt{2} \cdot (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) = 6 + \sqrt{6} - 6 + 2\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$.

Chọn đáp án **(A)** □

❖ **Câu 15.** Trục căn thức ở mẫu biểu thức $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{\sqrt{3a}}$ với $a > 0$, ta có kết quả

(A) $\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{a}}$.

(B) $\frac{(\sqrt{6} - \sqrt{3})\sqrt{a}}{3a}$.

(C) $\frac{(\sqrt{2} - 1)\sqrt{a}}{a}$.

(D) $\sqrt{2a} - \sqrt{a}$.

Lời giải.

Ta có $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{\sqrt{3a}} = \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{3})\sqrt{3a}}{3a} = \frac{(3\sqrt{2} - 3)\sqrt{a}}{3a} = \frac{(\sqrt{2} - 1)\sqrt{a}}{a}$.

Chọn đáp án **(C)** □

⚡ **Câu 16.** Kết quả của phép tính $\sqrt{27} : \sqrt{6} \cdot 2\sqrt{18}$ là

(A) 12.

(B) 18.

(C) 72.

(D) 144.

🗨 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \sqrt{27} : \sqrt{6} \cdot 2\sqrt{18} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} \cdot 2 \cdot 3\sqrt{2} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot 6\sqrt{2} = 18.$$

Chọn đáp án (B) □

⚡ **Câu 17.** Rút gọn biểu thức $\frac{1}{2\sqrt{a} + \sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{a} - \sqrt{2}}$ với $a \geq 0, a \neq \frac{1}{2}$, ta có kết quả

(A) $\frac{\sqrt{2}}{1 - 2a}$.

(B) $\frac{\sqrt{2}}{2a - 1}$.

(C) $\frac{\sqrt{a}}{2a - 1}$.

(D) $\frac{\sqrt{2}}{1 - a}$.

🗨 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{a} + \sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{a} - \sqrt{2}} &= \frac{(2\sqrt{a} - \sqrt{2}) - (2\sqrt{a} + \sqrt{2})}{(2\sqrt{a} + \sqrt{2})(2\sqrt{a} - \sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{a} - \sqrt{2} - 2\sqrt{a} - \sqrt{2}}{(2\sqrt{2}) - (\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{-2\sqrt{2}}{4a - 2} = \frac{\sqrt{2}}{1 - 2a} \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

ÔN TẬP CHƯƠNG III (2)

🔗 **Bài 1.** Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} - \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$;

b) $B = \sqrt{x^2 - 10x + 25} + x$ với $x < 0$.

🗨 **Lời giải.**

a) $A = 4$;

b) $B = 5$.

🔗 **Bài 2.** Tính

a) $(\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{5})(\sqrt{50} - \sqrt{5})$;

b) $\frac{\sqrt{3} - 1}{2} + \frac{\sqrt{3} + 2}{3} - \frac{2\sqrt{3} - 1}{4}$.

🗨 **Lời giải.**

a) 45;

b) $\frac{4\sqrt{3} + 5}{12}$.

🔗 **Bài 3.** Rút gọn các biểu thức sau

a) $\sqrt{\frac{9}{16} : \frac{25}{36}} - \sqrt{\frac{49}{8} : \sqrt{3\frac{1}{8}}}$;

b) $\sqrt{45,8^2 - 44,2^2} - \sqrt{6[(\sqrt{2} + 1)^2 + (\sqrt{2} - 1)^2]}$.

🗨 **Lời giải.**

a) Ta có $\sqrt{\frac{9}{16} : \frac{25}{36}} - \sqrt{\frac{49}{8} : \sqrt{3\frac{1}{8}}} = \sqrt{\frac{9}{16} : \frac{25}{36}} - \sqrt{\frac{49}{8} : \frac{25}{8}} = \frac{3}{4} : \frac{5}{6} - \sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{9}{10} - \frac{7}{5} = -\frac{1}{2}$.

b) $\sqrt{45,8^2 - 44,2^2} - \sqrt{6[(\sqrt{2} + 1)^2 + (\sqrt{2} - 1)^2]} = \sqrt{1,6 \cdot 90} - \sqrt{6 \cdot 6} = 4 \cdot 3 - 6 = 6$

🔗 **Bài 4.** Rút gọn các biểu thức sau

a) $\frac{1}{34}\sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}} + 4\sqrt{\frac{32}{176^2 - 112^2}}$;

b) $\frac{5(\sqrt{6} - 1)}{\sqrt{6} + 1} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$.

🗨 **Lời giải.**

a)
$$\begin{aligned} & \frac{1}{34}\sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}} + 4\sqrt{\frac{32}{176^2 - 112^2}} \\ &= \frac{1}{34}\sqrt{\frac{41 \cdot 289}{164}} + 4\sqrt{\frac{32}{64 \cdot 288}} \\ &= \frac{1}{34}\sqrt{\frac{289}{4}} + 4\sqrt{\frac{1}{576}} \\ &= \frac{1}{34} \cdot \frac{17}{2} + 4 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} & \frac{5(\sqrt{6} - 1)}{\sqrt{6} + 1} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \\ &= \frac{5(\sqrt{6} - 1)^2}{6 - 1} + \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2}{2 - 3} \\ &= 7 - 2\sqrt{6} - 5 + 2\sqrt{6} = 2. \end{aligned}$$

🔗 **Bài 5.** Rút gọn biểu thức

$$a) \frac{3 + 3\sqrt{5} - \sqrt{2} - \sqrt{10}}{6 + 2\sqrt{5}};$$

$$b) \frac{x\sqrt{x} + x\sqrt{y} - y\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{x - y + y\sqrt{x} - y\sqrt{y}}.$$

☞ **Lời giải.**

$$a) \text{ Ta có } \frac{3 + 3\sqrt{5} - \sqrt{2} - \sqrt{10}}{6 + 2\sqrt{5}} = \frac{3(1 + \sqrt{5}) - \sqrt{2}(1 + \sqrt{5})}{(1 + \sqrt{5})^2} = \frac{(1 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{2})}{(1 + \sqrt{5})^2} = \frac{3 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{5}}.$$

$$b) \frac{x\sqrt{x} + x\sqrt{y} - y\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{x - y + y\sqrt{x} - y\sqrt{y}} = \frac{x(\sqrt{x} + \sqrt{y}) - y(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + y(\sqrt{x} - \sqrt{y})}$$

$$= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - y)}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y} + y)} = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y} + y)} = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + y}.$$

Điều kiện $x \geq 0; y \geq 0; x \neq y$.

□

☞ **Bài 6.** Rút gọn biểu thức $P = \frac{2\sqrt{x} - 9}{x - 5\sqrt{x} + 6} - \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2\sqrt{x} + 1}{3 - \sqrt{x}}$.

☞ **Lời giải.**

Điều kiện: $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$. Khi đó ta có

$$P = \frac{2\sqrt{x} - 9}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} - \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2\sqrt{x} + 1}{3 - \sqrt{x}}$$

$$= \frac{2\sqrt{x} - 9 - (\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3) + (2\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)}$$

$$= \frac{2\sqrt{x} - 9 - x + 9 + 2x - 4\sqrt{x} + \sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)}$$

$$= \frac{x - \sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3}.$$

□

☞ **Bài 7.** Cho biểu thức $P = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} + \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} + \frac{3 - 11\sqrt{x}}{9 - x}$.

a) Rút gọn P .

b) Tính giá trị của P với $x = \frac{7 + 4\sqrt{3}}{4}$.

☞ **Lời giải.**

a) Điều kiện: $x \geq 0; x \neq 9$. Khi đó ta có

$$P = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3) + (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 3) - 3 + 11\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)}$$

$$= \frac{2x - 6\sqrt{x} + x + 4\sqrt{x} + 3 - 3 + 11\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)}$$

$$= \frac{3x + 9\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3}$$

b) Ta có $x = \frac{7 + 4\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$.

Do đó

$$P = \frac{3 \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2}}{\frac{2 + \sqrt{3}}{2} - 3} = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3} - 4}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{6 + 3\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 4} = \frac{(6 + 3\sqrt{3})(\sqrt{3} + 4)}{(\sqrt{3} - 4)(\sqrt{3} + 4)} \\
&= \frac{6\sqrt{3} + 24 + 9 + 12\sqrt{3}}{3 - 16} = \frac{-(33 + 18\sqrt{3})}{13}.
\end{aligned}$$

□

◀ **Bài 8.** Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 3} + \frac{5}{\sqrt{x} - 3} - \frac{6}{9 - x} \right) : \frac{6}{\sqrt{x} + 2}$.

- a) Rút gọn P .
b) Tính các giá trị nguyên của x để P có giá trị nguyên.

🗨 **Lời giải.**

- a) Điều kiện $x \geq 0; x \neq 9$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}
P &= \frac{(\sqrt{x} - 3) + 5(\sqrt{x} + 3) + 6}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{6} \\
&= \frac{\sqrt{x} - 3 + 5\sqrt{x} + 15 + 6}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{6} \\
&= \frac{6\sqrt{x} + 18}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{6} \\
&= \frac{6(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{6} \\
&= \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 3}.
\end{aligned}$$

b) Ta có $P = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 3} = \frac{\sqrt{x} - 3 + 5}{\sqrt{x} - 3} = 1 + \frac{5}{\sqrt{x} - 3}$.

P có giá trị nguyên $\Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x} - 3}$ có giá trị nguyên

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \sqrt{x} - 3 \in \text{U}(5) \\
&\Rightarrow \sqrt{x} - 3 \in \{\pm 1; \pm 5\}.
\end{aligned}$$

Ta có bảng sau

$\sqrt{x} - 3$	1	-1	5	-5
\sqrt{x}	4	2	8	-2
x	16	4	64	

Vậy khi $x \in \{4; 16; 64\}$ thì P có giá trị nguyên.

□

◀ **Bài 9.** Cho biểu thức $P = \frac{2}{\sqrt{xy}} : \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right)^2 - \frac{x + y}{x - 2\sqrt{xy} + y}$.

Chứng minh rằng với mọi giá trị của x và y làm cho biểu thức P có nghĩa thì giá trị của P không phụ thuộc vào x và y .

🗨 **Lời giải.**

Điều kiện $x, y > 0; x \neq y$. Khi đó ta có

$$P = \frac{2}{\sqrt{xy}} : \left(\frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{\sqrt{xy}} \right)^2 - \frac{x + y}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{(\sqrt{xy})^2}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2} - \frac{x+y}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2} \\
&= \frac{2\sqrt{xy}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2} - \frac{x+y}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2} \\
&= \frac{-(x - 2\sqrt{xy} + y)}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2} = -\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2} = -1.
\end{aligned}$$

Vậy giá trị của P không phụ thuộc vào x và y . □

◆ **Bài 10.** Cho biểu thức $P = \left(\frac{x+3}{x-9} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$.

a) Rút gọn P .

b) Chứng minh rằng $P > \frac{1}{3}$.

☞ **Lời giải.**

a) Điều kiện $x > 0; x \neq 9$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}
P &= \frac{x+3+\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}} \\
&= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}} \\
&= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}.
\end{aligned}$$

b) Xét hiệu $P - \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} - \frac{1}{3} = \frac{3\sqrt{x}+3-\sqrt{x}-3}{3(\sqrt{x}+3)} = \frac{2\sqrt{x}}{3(\sqrt{x}+3)} > 0$ (vì $x > 0$).
Do đó $P > \frac{1}{3}$. □

◆ **Bài 11.** Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{x+2}{x\sqrt{x}+1} \right) : \frac{2}{\sqrt{x}}$

a) Rút gọn P .

b) Chứng minh rằng biểu thức P luôn luôn âm với mọi giá trị của x làm P xác định.

☞ **Lời giải.**

a) Điều kiện $x > 0$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}
P &= \frac{(x - \sqrt{x} + 1) - (x + 2)}{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)} : \frac{2}{\sqrt{x}} \\
&= \frac{-(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2} \\
&= \frac{-\sqrt{x}}{2(x - \sqrt{x} + 1)}.
\end{aligned}$$

b) Ta có $x > 0$ nên $-\sqrt{x} < 0 \Rightarrow x - \sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} > 0$.
Do đó $P < 0$ với mọi $x > 0$. □

❖ **Bài 12.** Cho biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x} + x}{\sqrt{x} + 1}$.

- a) Rút gọn P .
 b) Chứng minh rằng biểu thức P luôn luôn không âm với mọi giá trị của x làm P xác định.

☞ **Lời giải.**

- a) Điều kiện $x \geq 1$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x}}{(\sqrt{x-1} + \sqrt{x})(\sqrt{x-1} - \sqrt{x})} + \frac{x(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} + 1} \\ &= \frac{2\sqrt{x-1}}{-1} + x \\ &= x - 2\sqrt{x-1}. \end{aligned}$$

- b) Ta có $P = x - 2\sqrt{x-1} = (x-1) - 2\sqrt{x-1} + 1 = (\sqrt{x-1} - 1)^2 \geq 0$.
 Vậy P luôn luôn không âm với mọi $x \geq 1$.

□

❖ **Bài 13.** Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} : \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \right)$.

- a) Rút gọn P .
 b) Tìm giá trị lớn nhất của P .

☞ **Lời giải.**

- a) Điều kiện $x > 0$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} : \frac{\sqrt{x} + 1 + x}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{x + \sqrt{x} + 1} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}. \end{aligned}$$

- b) Ta có $P = \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}$.

Xét biểu thức ở mẫu $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1 = 3$.

Ta có $P = \frac{1}{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 1} \leq \frac{1}{3}$.

Do đó $\max P = \frac{1}{3}$, đạt được khi $\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow x = 1$.

□

❖ **Bài 14.** Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x} + 1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$.

- a) Rút gọn P .
 b) Tính giá trị của P khi $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

c) Tìm x để $P = 1$.

☞ **Lời giải.**

a) $\frac{2}{\sqrt{x+1}}$;

b) $\sqrt{2}$;

c) $x = 1$.

□

☞ **Bài 15.** Cho biểu thức $P = \frac{3}{\sqrt{x}} + \left(\frac{x}{x-\sqrt{x}} + \frac{x+1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x-1}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x+1}}$.

a) Rút gọn P .

b) Tìm các giá trị của x để $P \geq 10$.

c) Tìm các giá trị nguyên của x để P có giá trị nguyên.

☞ **Lời giải.**

a) $\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}}$;

b) $0 < x \leq \frac{1}{9}$;

c) $x \in \{1; 9\}$.

□

☞ **Bài 16.** Tìm x biết

a) $\sqrt{25(3x-1)^2} = 10$;

b) $\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}} = \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x-2}}$.

☞ **Lời giải.**

a) Ta có $\sqrt{25(3x-1)^2} = 10 \Rightarrow 5|3x-1| = 10 \Rightarrow |3x-1| = 2 \Rightarrow \begin{cases} 3x-1=2 \\ 3x-1=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{1}{3} \end{cases}$.

b) $\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}} = \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x-2}}$. (*)

Điều kiện: $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} (*) &\Rightarrow (\sqrt{x+3})(\sqrt{x-2}) = (\sqrt{x+5})(\sqrt{x-3}) \\ &\Rightarrow x + \sqrt{x} - 6 = x + 2\sqrt{x} - 15 \\ &\Rightarrow -\sqrt{x} = -9 \\ &\Rightarrow \sqrt{x} = 9 \\ &\Rightarrow x = 81 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}. \end{aligned}$$

□

☞ **Bài 17.** Tìm x biết

a) $5x - \sqrt{(2x-1)^2} = 2$;

b) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = x$.

☞ **Lời giải.**

a) $5x - \sqrt{(2x-1)^2} = 2 \Rightarrow 5x - |2x-1| = 2$.

☉ Nếu $x \geq \frac{1}{2}$ thì (1) $\Rightarrow 5x - (2x-1) = 2$
 $\Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$ (loại).

$$\begin{aligned} \text{☑ Nếu } x < \frac{1}{2} \text{ thì (1) } &\Rightarrow 5x + (2x - 1) = 2 \\ &\Rightarrow 7x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{7} \text{ (thỏa mãn).} \end{aligned}$$

b) Điều kiện: $x \geq 1$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} &\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = x \\ \Rightarrow &\sqrt{x-1 + 2\sqrt{x-1} + 1} = x \\ \Rightarrow &\sqrt{(\sqrt{x-1} + 1)^2} = x \\ \Rightarrow &|\sqrt{x-1} + 1| = x \\ \Rightarrow &\sqrt{x-1} + 1 - x = 0 \\ \Rightarrow &\sqrt{x-1}(1 - \sqrt{x-1}) = 0 \\ \Rightarrow &\begin{cases} \sqrt{x-1} = 0 \\ \sqrt{x-1} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2. \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).} \end{aligned}$$

□

$$\text{🔗 Bài 18. Chứng minh rằng } \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1}}{2+1} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3+2} + \dots + \frac{\sqrt{100} - \sqrt{99}}{100+99} < \frac{9}{20}.$$

🗨 Lời giải.

Xét dạng tổng quát của các số hạng $\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{(n+1) + n}$ trong đó $n \in \mathbb{N}^*$.

Để thấy $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0$; $(n+1) + n > 0$.

Do đó

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{(n+1) + n} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{(2n+1)^2}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{4n^2 + 4n + 1}} < \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{4n^2 + 4n}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{2\sqrt{n+1}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức này với n lấy từ 1 đến 99 ta được

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{2} - \sqrt{1}}{2+1} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3+2} + \dots + \frac{\sqrt{100} - \sqrt{99}}{100+99} < \frac{1}{2\sqrt{1}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2\sqrt{99}} - \frac{1}{2\sqrt{100}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1}} - \frac{1}{2\sqrt{100}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{20} = \frac{9}{20}. \end{aligned}$$

□