Chương 5
ĐƯỜNG TRÒN

Bài 1 ĐƯỜNG TRÒN

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 Đường tròn

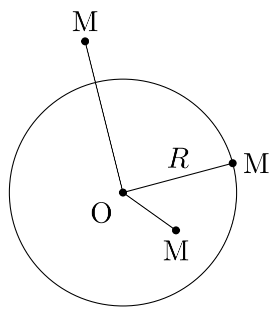
Đường tròn tâm O bán kính R ($R > 0$), kí hiệu là $(O; R)$, là hình gồm tất cả các điểm cách điểm O một khoảng bằng R.

- *Khi không cần để ý đến bán kính ta kí hiệu đường tròn tâm O là (O).*
- *Nếu A là một điểm của đường tròn (O) ta viết $A \in (O)$. Khi đó, ta còn nói đường tròn (O) đi qua điểm A, hay điểm A nằm trên đường tròn (O).*

Nhận xét.

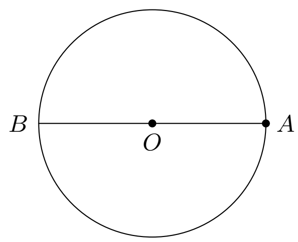
- Trên mặt phẳng cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M.

  Khi đó, ta có các trường hợp sau có thể xảy ra
  - Điểm M *nằm trên* đường tròn $(O; R)$ nếu $OM = R$.
  - Điểm M *nằm trong* đường tròn $(O; R)$ nếu $OM < R$.
  - Điểm M *nằm ngoài* đường tròn $(O; R)$ nếu $OM > R$.



- *Hình tròn* tâm O bán kính R là hình gồm các điểm nằm trên và nằm trong đường tròn $(O; R)$.

Đoạn thẳng AB trong hình bên được gọi là đường kính của đường tròn O.



2 Tính đối xứng của đường tròn

- Đường tròn là hình có tâm đối xứng; tâm của đường tròn là tâm đối xứng của nó.
- Đường tròn là hình có trục đối xứng; mỗi đường thẳng đi qua tâm của đường tròn là một trục đối xứng của nó.

Đường tròn có một tâm đối xứng nhưng có vô số trục đối xứng.

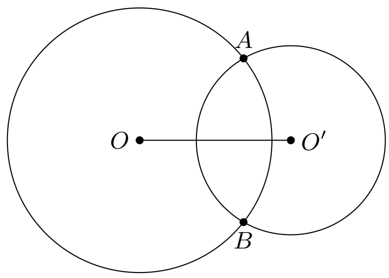
3 Dây và đường kính của đường tròn

- Đoạn thẳng nối hai điểm tùy ý của một đường tròn gọi là một dây (hay dây cung) của đường tròn.
- Mỗi dây đi qua tâm là một đường kính của đường tròn. Dễ thấy đường kính của đường tròn bán kính R có độ dài bằng $2R$.

Trong một đường tròn, đường kính là dây cung lớn nhất.

4 Hai đường tròn cắt nhau

Nếu hai đường tròn có đúng hai điểm chung thì ta nói đó là hai đường tròn cắt nhau. Hai điểm chung đó gọi là hai giao điểm của chúng.



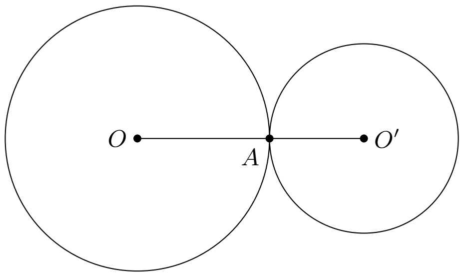
Nhận xét. Hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ cắt nhau khi

$$R - R' < OO' < R + R' \ \left(\text{với } R > R'\right).$$

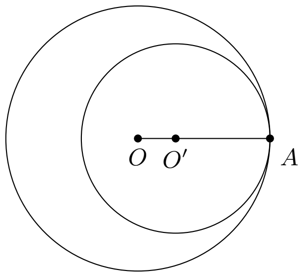
5 Hai đường tròn tiếp xúc nhau

Nếu hai đường tròn có duy nhất một điểm chung thì ta nói đó là hai đường tròn tiếp xúc nhau. Điểm chung gọi là tiếp điểm của chúng.

Người ta phân biệt hai trường hợp: hai đường tròn tiếp xúc ngoài (Hình a) và hai đường tròn tiếp xúc trong (Hình b).



Hình a)



Hình b)

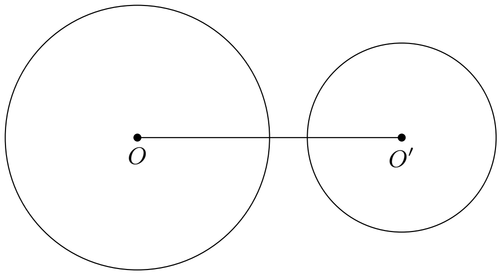
Nhận xét.

- Hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ tiếp xúc ngoài khi $OO' = R + R'$ và tiếp xúc trong khi $OO' = R - R'$ $\left(\text{với } R > R'\right)$.
- Nếu hai đường tròn tiếp xúc với nhau thì tiếp điểm thẳng hàng với hai tâm.

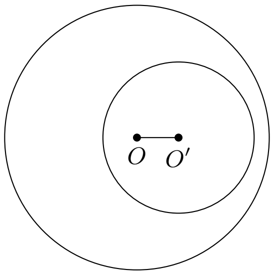
6 Hai đường tròn không giao nhau

Nếu hai đường tròn không có điểm chung nào thì ta nói đó là hai đường tròn không giao nhau.

Người ta phân biệt hai trường hợp: hai đường tròn ngoài nhau (Hình a) và đường tròn này đựng đường tròn kia (Hình b).



Hình a)



Hình a)

Nhận xét.

- Hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ ngoài nhau khi $OO' > R + R'$.
- Đường tròn $(O;R)$ đựng đường tròn $(O';R')$ khi $R > R'$ và $OO' < R - R'$. Đặc biệt khi O trùng với O' và $R \neq R'$ thì ta có hai đường tròn đồng tâm.

Ta có bảng tổng kết sau

Vị trí tương đối của$(O;R)$ và $(O;R')$ $(R \geq R')$	Số điểm chung	Hệ thức giữa OO' với R và R'
(O) và (O') cắt nhau	2	$R - R' < OO' < R + R'$
(O) và (O') tiếp xúc ngoài	1	$OO' = R + R'$
(O) và (O') tiếp xúc trong	1	$OO' = R - R' > 0$
(O) và (O') ở ngoài nhau	0	$OO' > R + R'$
(O) đựng (O')	0	$OO' < R - R'$

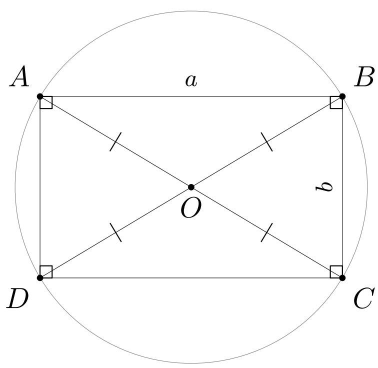
B CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Chứng minh nhiều điểm cùng nằm trên một đường tròn

Ví dụ 1. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$, $BC = b$. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm và tính bán kính của đường tròn đó.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Theo tính chất hai đường chéo của hình chữ nhật, ta có $OA = OB = OC = OD \left(= \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}BD\right)$.



Vậy bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc $\left(O;\dfrac{1}{2}AC\right)$.

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác vuông ABC, ta có

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + b^2.$$

Do đó $R = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$. □

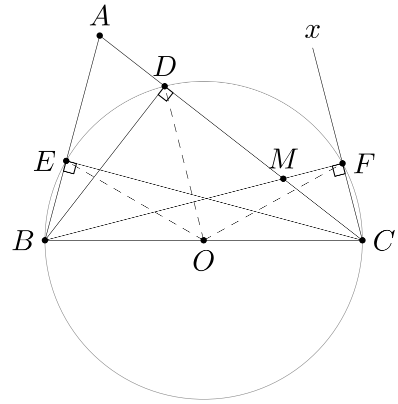
Ví dụ 2. Cho tam giác ABC, các đường cao BD và CE. Trên cạnh AC lấy điểm M. Kẻ tia Cx vuông góc với tia BM tại F. Chứng minh rằng năm điểm B, C, D, E, F cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.

Gọi O là trung điểm của BC. Ta có BD là đường cao nên $BD \perp AC$, hay tam giác BDC vuông tại D.
Trong tam giác vuông BDC có DO là trung tuyến ứng với cạnh huyền BC nên

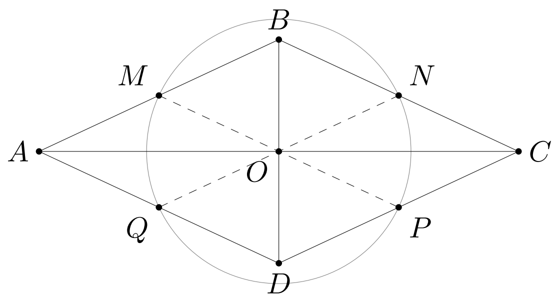
$$OD = OB = OC = \frac{1}{2}BC \qquad (1)$$

Tương tự, ta có $OE = OB = OC = \frac{1}{2}BC$. (2)
và $OF = OB = OC = \frac{1}{2}BC$. (3)
Từ (1), (2) và (3) suy ra $OB = OC = OD = OE = OF$.
Do đó năm điểm B, C, D, E, F cùng thuộc đường tròn $(O; R)$ với $R = \frac{1}{2}BC$.



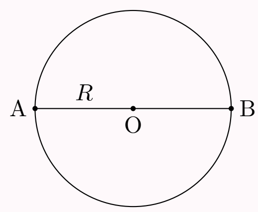
Ví dụ 3. Chứng minh rằng bốn trung điểm của bốn cạnh hình thoi cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.
Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của bốn cạnh AB, BC, CD và DA của hình thoi $ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có $AC \perp BD$. Theo tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông, ta được $OM = \frac{1}{2}AB$; $ON = \frac{1}{2}BC$; $OP = \frac{1}{2}CD$; $OQ = \frac{1}{2}AD$.
Mặt khác $AB = BC = CD = DA$ nên $OM = ON = OP = OQ$.
Do đó bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn.



Dạng 2. Xác định vị trí tương đối của điểm M với đường tròn (O)

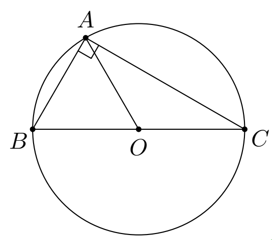
Ví dụ 4.
Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB. Chứng minh rằng đường tròn $(O; OA)$ đi qua điểm B.



Lời giải.
Vì O là trung điểm của AB nên $OA = OB$.
Do đó $B \in (O; OA)$, nói cách khác, đường tròn $(O; OA)$ đi qua điểm B.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC vuông tại A. Chứng minh rằng điểm A thuộc đường tròn đường kính BC.

Lời giải.
Gọi O là trung điểm của BC.
Theo tính chất trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền, do đó $OA = OB = OC$.
Vậy $A \in (O; OB)$, nói cách khác, A thuộc đường tròn đường kính BC.

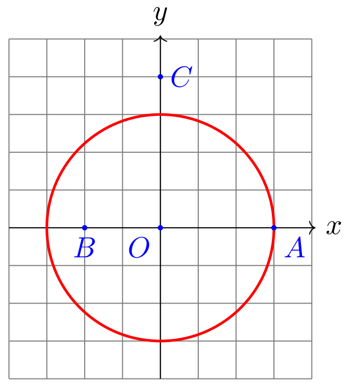


Ví dụ 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm $A(3;0)$, $B(-2;0)$, $C(0;4)$. Vẽ hình và cho biết trong các điểm đã cho, điểm nào nằm trên, điểm nào nằm trong, điểm nào nằm ngoài đường tròn $(O;3)$?

Lời giải.

Dựa vào hình vẽ ta thấy

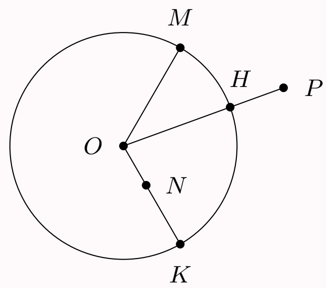
- Điểm A nằm trên đường tròn $(O;3)$.
- Điểm B nằm trong đường tròn $(O;3)$.
- Điểm C nằm ngoài đường tròn $(O;3)$.



□

Ví dụ 7.

Cho đường tròn $(O;R)$ và năm điểm M; N; P; H; K. So sánh độ dài các đoạn thẳng OM; ON; OH; OK; OP với R.



Lời giải.

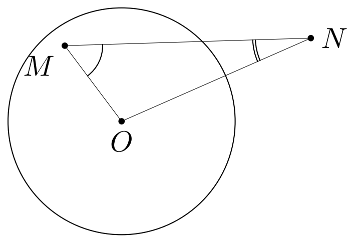
Vì M, H, K thuộc $(O;R)$ nên $OM = OH = OK = R$. Ta có: $ON < OK$ nên $ON < R$; $OP > OH$ nên $OP > R$.

□

Ví dụ 8. Cho đường tròn $(O;R)$ và hai điểm M, N sao cho M nằm trong và N nằm ngoài $(O;R)$. Hãy so sánh $\widehat{OMN}$ và $\widehat{ONM}$.

Lời giải.

Ta có M nằm trong $(O;R)$ nên $OM < R$, N nằm ngoài $(O;R)$ nên $ON > R$.
Trong tam giác OMN, có $OM < ON$ (vì $OM < R, ON > R$) nên $\widehat{OMN} > \widehat{ONM}$ (trong một tam giác, góc đối diện với cạnh lớn hơn thì lớn hơn).

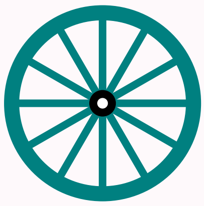


□

Dạng 3. Tâm đối xứng, trục đối xứng của đường tròn

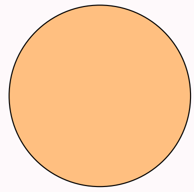
Ví dụ 9.

Xác định tâm đối xứng và trục đối xứng của bánh xe trong hình bên.



Lời giải.
Tâm đối xứng trong Hình 7 là giao điểm các đường thẳng đi qua tâm.
Trục đối xứng là các đường thẳng đi qua tâm. □

Ví dụ 10.
Nêu cách chia một cái bánh có dạng hình tròn tâm O (Hình bên) thành hai phần bằng nhau.



Lời giải.
Vẽ đường thẳng đi qua tâm khi đó đường thẳng sẽ chia cái bánh thành 2 phần bằng nhau. □

Ví dụ 11. Cho đường tròn (I).

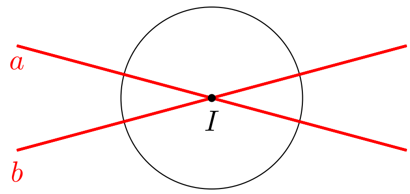
a) Tìm tâm đối xứng của (I);

b) Vẽ hai trục đối xứng của (I).

Lời giải.

a) Tâm I là tâm đối xứng của (I).

b) Vẽ hai đường thẳng a và b đi qua tâm I. Ta có a và b đều là trục đối xứng của (I).



□

Ví dụ 12. Bạn Oanh có một mảnh giấy hình tròn nhưng không còn dấu vết của tâm. Theo em, Oanh làm thế nào để tìm lại được tâm của mảnh giấy hình tròn đó?

Lời giải.
Bằng cách gấp đôi mảnh giấy hình tròn theo hai cách khác nhau, Oanh có thể tìm lại được tâm của mảnh giấy hình tròn đó. □

Ví dụ 13. Cho điểm M nằm trên đường tròn (O) đường kính AB. Sử dụng tính đối xứng của đường tròn (O), hãy nêu cách tìm

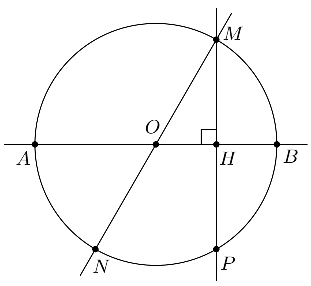
a) Điểm N đối xứng với điểm M qua tâm O;

b) Điểm P đối xứng với điểm M qua đường thẳng AB.

Lời giải.

a) Do O là tâm đối xứng của (O) nên điểm N đối xứng với điểm M qua tâm O phải vừa thuộc OM, vừa thuộc (O). Vậy N là giao điểm của đường thẳng OM với (O).

b) Do AB là trục đối xứng của (O) nên điểm P đối xứng với điểm M qua AB phải vừa thuộc (O), vừa thuộc đường thẳng vuông góc hạ từ M xuống AB. Vậy P là giao điểm của (O) với đường thẳng đi qua M và vuông góc với AB.

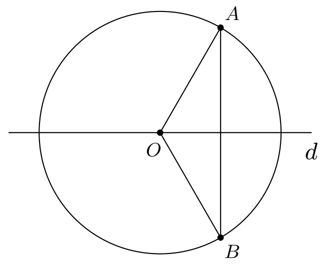


□

Ví dụ 14. Cho đường tròn tâm O và hai điểm A, B thuộc (O). Gọi d là đường trung trực của đoạn AB. Chứng minh rằng d là một trục đối xứng của (O).

Lời giải.

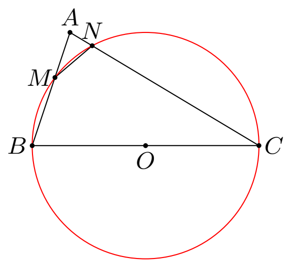
Do A, B thuộc (O) nên $OA = OB \Rightarrow O \in d$.
Vậy d là đường thẳng đi qua tâm O của (O), do đó d là một trục đối xứng của (O).



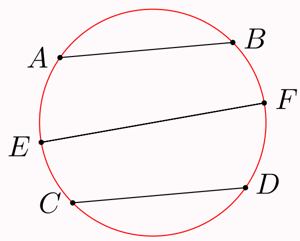
Ví dụ 15. Cho tam giác nhọn ABC. Đường tròn tâm O đường kính BC cắt các canh AB và AC lần lượt tại M và N. Chứng minh $MN < BC$.

Lời giải.

Xét (O) có BC là dây đường kính.
Suy ra BC là dây lớn nhất của đường tròn.
Suy ra $MN < BC$.



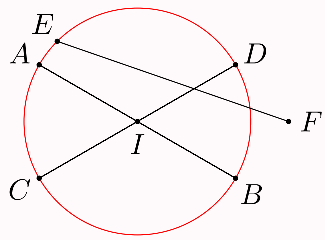
Ví dụ 16.
Bạn Mai căng ba đoạn chỉ AB, CD, EF có độ dài lần lượt là 16 cm, 14 cm và 20 cm trên một khung thêu hình tròn bán kính 10 cm. Trong ba dây trên, dây nào đi qua tâm của đường tròn?



Lời giải.

Do $AB < EF$, $CD < EF, EF = 2R$ nên trong 3 dây trên, dây đi qua tâm của đường tròn là dây EF.

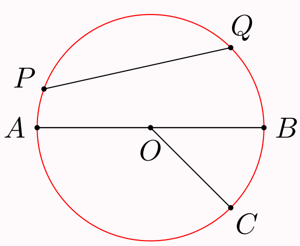
Ví dụ 17.
Cho đường tròn (I) có các dây cung AB, CD, EF. Cho biết AB và CD đi qua tâm I, EF không đi qua I. Hãy so sánh độ dài AB, CD, EF.



Lời giải.

Ta có AB là đường kính, CD là đường kính, EF là dây cung nên $AB = CD > EF$.

Ví dụ 18.
Trong hình bên, so sánh độ dài của các đoạn thẳng OC, PQ với AB.



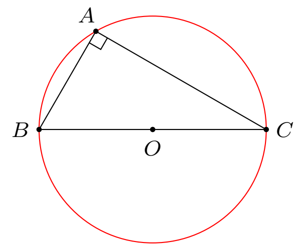
Lời giải.

Trong đường tròn (O), AB là đường kính, OC là bán kính, PQ là dây cung không đi qua O. Suy ra $OC = \dfrac{AB}{2}$ và $PQ < AB$. □

Ví dụ 19. Cho đường tròn đường kính BC. Chứng minh rằng với điểm A bất kì (khác B và C) nằm trên đường tròn, ta đều có $BC < AB + AC < 2BC$.

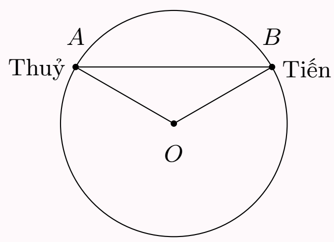
Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức hình học cho $\triangle ABC$
ta luôn có $BC < AB + AC$. (1)
Vì BC là đường kính của đường tròn nên
$\begin{rcases} AB < BC \\ AC < BC \end{rcases} \Rightarrow AB + AC < 2BC.$ (2)
Từ (1) và (2) ta suy ra $BC < AB + AC < 2BC$ (đpcm).



□

Ví dụ 20. Trong một trò chơi, hai bạn Thuỷ và Tiến cùng chạy trên một đường tròn tâm O có bán kính 20 m. Có thời điểm nào dây AB nối vị trí của hai bạn đó có độ dài bằng 41 m hay không? Vì sao?



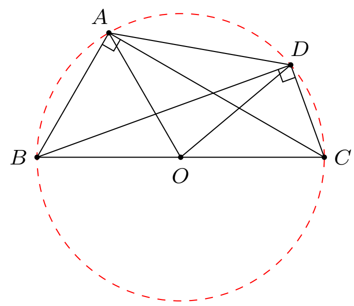
Lời giải.

Đường tròn tâm O có đường kính là $2 \cdot 20 = 40$ m.
Vì độ dài dây AB không vượt quá độ dài đường kính của đường tròn nên $AB \leq 40$.
Vậy không có thời điểm nào dây AB nối vị trí của hai bạn đó có độ dài bằng 41 m. □

Ví dụ 21. Tứ giác lồi $ABCD$ có $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$. Chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn và $AD < BC$.

Lời giải.

Gọi O là trung điểm của đoạn BC.
Tam giác $\triangle ABC$ vuông tại A $\left(\widehat{BAC} = 90^\circ\right)$ nên đường trung tuyến AO bằng nửa cạnh huyền.
Nghĩa là $OA = OB = OC = \dfrac{BC}{2}$.
Do đó điểm A nằm trên đường tròn (O) đường kính BC.
Tương tự, bằng cách xét tam giác $\triangle DBC$ ta cũng suy ra điểm D thuộc đường tròn (O).
Vậy AD là một dây (không đi qua tâm) của đường tròn (O).
Áp dụng định lí trên ta có $AD < BC$.



□

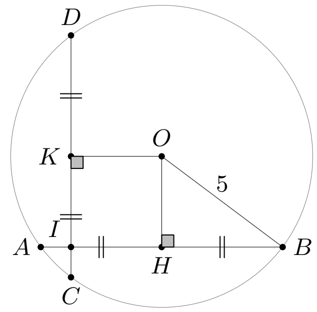
Ví dụ 22. Cho đường tròn tâm O bán kính $R = 5$ cm, dây $AB = 8$ cm. Gọi I là điểm trên dây AB sao cho $AI = 1$ cm. Kẻ dây CD đi qua điểm I và vuông góc với dây AB. Chứng minh rằng $AB = CD$.

Lời giải.

Vẽ $OH \perp AB$, $OK \perp CD$. Suy ra $HA = HB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$ cm.
Ta có $IH = AH - Al = 4 - 1 = 3$ cm.
Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác vuông HOB. ta có

$$OH^2 = OB^2 - HB^2 = 5^2 - 4^2 = 9 \Rightarrow OH = 3 \text{ cm}.$$

Suy ra tứ giác $OHIK$ là hình vuông. Do đó $OM = OK (= 3 \text{ cm}) \Rightarrow AB = CD$.



Dạng 4. Tính độ dài của một dây. Tính khoảng cách từ tâm đến dây

Ví dụ 23. Cho đường tròn $(O; 10)$. Lấy một điểm A tùy ý thuộc (O). Vẽ dây MN vuông góc với OA tại trung điểm của OA. Tính độ dài dây MN.

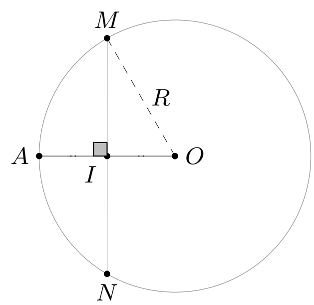
Lời giải.

Gọi I là trung điểm của OA. Ta có $OI = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$.
Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác vuông IMO, ta được

$$IM^2 = OM^2 - OI^2 = 10^2 - 5^2 = 75 \Rightarrow IM = 5\sqrt{3}$$

Ta có MN vuông góc OA tại trung điểm I của OA, nên

$$IM = IN = \frac{1}{2}MN \Rightarrow MN = 2IM = 2 \cdot 5\sqrt{3} = 10\sqrt{3}.$$



Ví dụ 24. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây $MN = R$. Hãy tính khoảng cách từ tâm O đến dây MN.

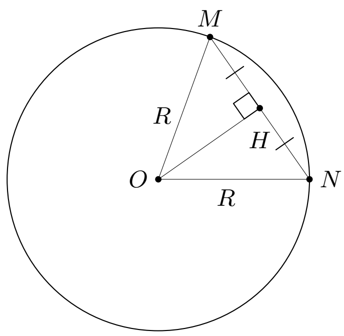
Lời giải.

Vẽ $OH \perp MN$ tại H thì $MH = HN = \frac{1}{2}MN = \frac{R}{2}$.
Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác OMH có $OM^2 = OH^2 + MH^2$.

$$\Rightarrow \quad OH^2 = OM^2 - MH^2 = R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3R^2}{4}$$

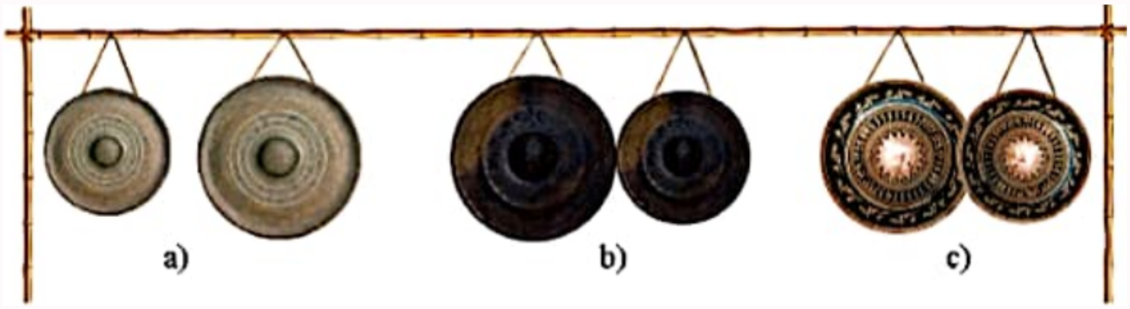
$$\Rightarrow \quad OH = \sqrt{\frac{3R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy khoảng cách từ tâm O đến dây MN là $\frac{R\sqrt{3}}{2}$.



Dạng 5. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn

Ví dụ 25. Mô tả vị trí tương đối giữa mỗi cặp đường tròn trong hình chụp bộ cồng chiêng Tây Nguyên



Lời giải.

- Hình a) là hai đường tròn ngoài nhau.
- Hình b) là hai đường tròn tiếp xúc ngoài.
- Hình c) là hai đường tròn cắt nhau.

□

Ví dụ 26. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $OO' = 12$; $R = 5$; $R' = 3$;

b) $OO' = 8$; $R = 5$; $R' = 3$;

c) $OO' = 7$; $R = 5$; $R' = 3$;

d) $OO' = 0$; $R = 5$; $R' = 4$.

Lời giải.

a) Ta có $12 > 5 + 3$ nên $OO' > R + R'$, suy ra hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ ở ngoài nhau.

b) Ta có $8 = 5 + 3$ nên $OO' = R + R'$, suy ra hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài.

c) Ta có $5 - 3 < 7 < 5 + 3$ nên $R - R' < OO' < R + R'$, suy ra hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau.

d) Ta có $0 < 5$ nên $(OO' < R - R')$, suy ra đường tròn $(O; R)$ đựng đường tròn $(O'; R')$.

□

Ví dụ 27. Xác định vị trí tương đối giữa hai đường tròn $(I; R)$ và $(J; R')$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $IJ = 5$; $R = 3$; $R' = 2$;

b) $IJ = 4$; $R = 11$; $R' = 7$;

c) $IJ = 6$; $R = 9$; $R' = 4$;

d) $IJ = 10$; $R = 4$; $R' = 1$.

Lời giải.

a) Ta có $5 = 3 + 2$ nên $IJ' = R + R'$, suy ra hai đường tròn $(I; R)$ và $(J; R')$ tiếp xúc ngoài.

b) Ta có $4 = 11 - 7$ nên $IJ = R - R'$, suy ra đường tròn $(I; R)$ và $(J; R')$ tiếp xúc trong.

c) Ta có $9 - 4 < 6 < 9 + 4$ nên $R - R' < IJ' < R + R'$, suy ra hai đường tròn $(I; R)$ và $(J; R')$ cắt nhau.

d) Ta có $10 > 4 + 1$ nên $IJ' > R + R'$, suy ra hai đường tròn $(I; R)$ và $(J; R')$ ở ngoài nhau.

□

Ví dụ 28. Cho hai điểm O và O' sao cho $OO' = 5$ cm. Hãy giải thích tại sao hai đường tròn $(O; 4\,\text{cm})$ và $(O'; 3\,\text{cm})$ cắt nhau.

Lời giải.
Đặt $R = 4$ cm; $R' = 3$ cm, ta thấy $1\,\text{cm} < 5\,\text{cm} < 7\,\text{cm}$, nên $R - R' < OO' < R + R'$.
Do đó, hai đường tròn đã cho cắt nhau. □

Ví dụ 29. Cho đường tròn $(O; 5\,\text{cm})$ và điểm I cách điểm O một khoảng 2 cm. Xác định vị trí tương đối của đường tròn đã cho và đường tròn $(I; r)$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $r = 4$ cm;

b) $r = 6$ cm.

Lời giải.

a) Đặt $R = 5$ cm, ta thấy $1\,\text{cm} < 2\,\text{cm} < 9\,\text{cm}$, nên $R - r < OI < R + r$.
Do đó, hai đường tròn đã cho cắt nhau.

b) Đặt $R = 5$ cm, ta thấy $1\,\text{cm} < 2\,\text{cm} < 11\,\text{cm}$, nên $r - R < OI < r + R$.
Do đó, hai đường tròn đã cho cắt nhau.

□

Ví dụ 30. Cho hai đường tròn $(O; 4$ cm$)$ và $(O'; 3$ cm$)$. Biết rằng $OO' = 5$ cm. Xét vị trí tương đối của hai đường tròn đó.

Lời giải.
Ta thấy bán kính của hai đường tròn (O); (O') lần lượt là $R = 4$ cm; $r = 3$ cm.
Do $R - r = 4 - 3 = 1$; $R + r = 4 + 3 = 7$ cm và $1 < 5 < 7$ nên $R - r < OO' < R + r$.
Vậy hai đường tròn $(O; 4$ cm$)$ và $(O'; 3$ cm$)$ cắt nhau. □

Ví dụ 31. Cho hai đường tròn $(O; 14$ cm$)$; $(O'; 5$ cm$)$ với $OO' = 8$ cm. Hỏi hai đường tròn đó có cắt nhau hay không?

Lời giải.
Ta thấy bán kính của hai đường tròn (O); (O') lần lượt là $R = 14$ cm; $r = 5$ cm.
Do $R - r = 14 - 5 = 9$; $R + r = 14 + 5 = 19$ cm và $8 < 9 < 14$.
Vậy hai đường tròn $(O; 14$ cm$)$ và $(O'; 5$ cm$)$ không cắt nhau. □

Ví dụ 32. Cho hai điểm O và O' sao cho $OO' = 5$ cm. Giải thích tại sao hai đường tròn $(O; 3\,\text{cm})$ và $(O'; 2\,\text{cm})$ tiếp xúc nhau. Chúng tiếp xúc trong hay tiếp xúc ngoài?

Lời giải.
Đặt $R = 3$ cm, $R' = 2$ cm ta thấy $5\,\text{cm} = 2\,\text{cm} + 3\,\text{cm}$, nghĩa là $OO' = R + R'$.
Vậy hai đường tròn đã cho tiếp xúc ngoài với nhau. □

Ví dụ 33. Cho hai điểm O và O' sao cho $OO' = 3$ cm. Giải thích tại sao hai đường tròn $(O; 8\,\text{cm})$ và $(O'; 5\,\text{cm})$ tiếp xúc nhau. Chúng tiếp xúc trong hay tiếp xúc ngoài?

Lời giải.
Đặt $R = 8$ cm, $R' = 5$ cm ta thấy $3\,\text{cm} = 8\,\text{cm} - 5\,\text{cm}$, nghĩa là $OO' = R - R'$.
Vậy hai đường tròn đã cho tiếp xúc trong với nhau. □

Ví dụ 34. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn $(O; 3\,\text{cm})$ và $(O'; 5\,\text{cm})$ biết $OO' > 8$ cm.

Lời giải.
Đặt $R = 3$ cm, $R' = 5$ cm ta có $OO' = 8\,\text{cm} > R + R'$.
Vậy hai đường tròn đã cho là hai đường tròn ngoài nhau. □

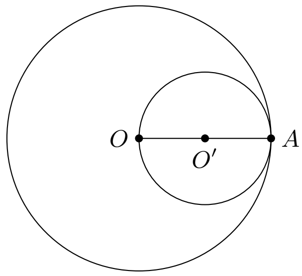
Ví dụ 35. Cho hai điểm O và O' sao cho $OO' = 2$ cm. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn $(O; 5\,\text{cm})$ và $(O'; r)$ biết rằng $r < 3$ cm.

Lời giải.

Đặt $R = 3$ cm, vì $r < 3$ nên $R - r = 5 - r > 5 - 3 = 2 = OO'$.
Vậy đường tròn $(O; 5\,\text{cm})$ đựng đường tròn $(O'; r)$. □

Ví dụ 36. Cho đường tròn tâm O, bán kính R. Lấy điểm A tùy ý trên (O). Vẽ đường tròn đường kính OA. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn.

Lời giải.
Gọi O' là tâm đường tròn đường kính OA. Ta có O' là trung điểm của OA và bán kính đường tròn (O') là $R' = \dfrac{OA}{2} = \dfrac{R}{2}$. Độ dài đoạn nối tâm $d = OO' = \dfrac{OA}{2} = \dfrac{R}{2}$.
Ta có $R - R' = \dfrac{R}{2} = d$ nên (O) và (O') tiếp xúc trong tại A.



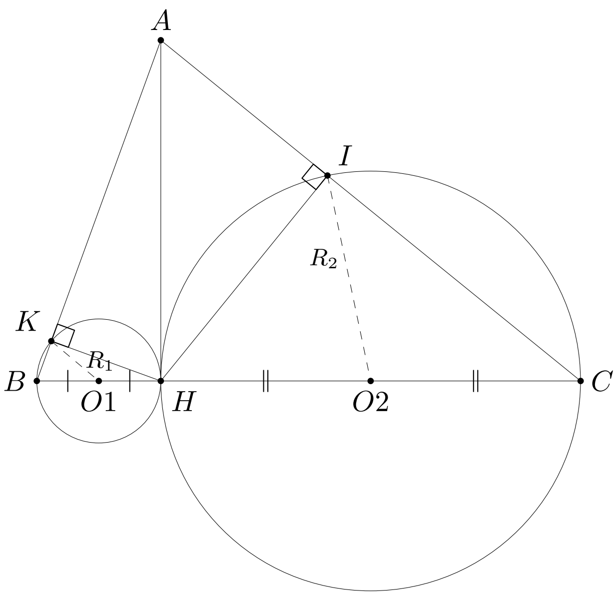
□

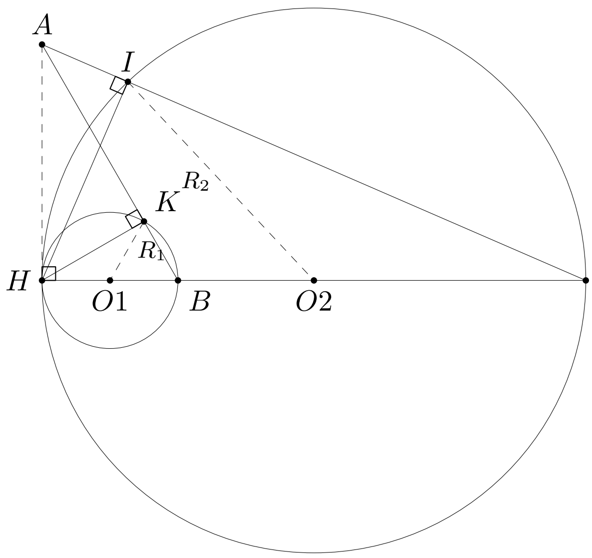
Ví dụ 37. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(-1; 1)$ và $B(3; 0)$. Vẽ các đường tròn $(A; r)$ và $(B; r')$. Khi $r = 3$ và $r' = 1$, hãy xác định vị trí tương đối của hai đường tròn.

Lời giải.
Độ dài đoạn nối tâm $d = AB = \sqrt{(3+1)^2 + 1^2} = \sqrt{17}$. (1)
Tổng hai bán kính $r + r' = 3 + 1 = 4$. (2)
Từ (1) và (2) ta thấy $\sqrt{17} > 4$ nên hai đường tròn không giao nhau; hai dường tròn (A) và (B) nằm ngoài nhau.
□

Ví dụ 38. Cho $\triangle ABC$ có $\left(\widehat{B}, \widehat{C} \neq 90^\circ\right)$, đường cao AH. Từ H kẻ HK vuông góc với AB tại K, HI vuông góc với AC tại I. Xác định vị trí tương đối của đường tròn ngoại tiếp $\triangle BHK$ và đường tròn ngoại tiếp $\triangle CHI$.

Lời giải.





- *Trường hợp 1.*
Xét $\triangle ABC$ có $\widehat{B} < 90^\circ$ và $\widehat{C} < 90^\circ$. Gọi O_1, O_2 lần lượt là trung điểm của BH và CH. Vì $\triangle BKH$ vuông tại K, O_1 là trung điểm của cạnh huyền BH nên $KO_1 = O_1B = O_1H = \dfrac{1}{2}BH = R_1 \Rightarrow (O_1; R_1)$ là đường tròn ngoại tiếp $\triangle BKH$. Tương tự, ta có $(O_2; R_2)$ là đường tròn ngoại tiếp $\triangle HIC$. Ta có, $R_1 + R_2 = O_1H + O_2H = O_1O_2$ nên $(O_1; R_1)$ tiếp xúc ngoài tại H với $(O_2; R_2)$.

Trường hợp 2. Xét $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = 90^\circ$ (hoặc $\widehat{C} = 90^\circ$). Lập luận tương tự như trường hợp 1 ta có $O_1O_2 = R_2 - R_1$ nên $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ tiếp xúc trong tại H.

□

Dạng 6. Chứng minh các tính chất về hệ thức hình học

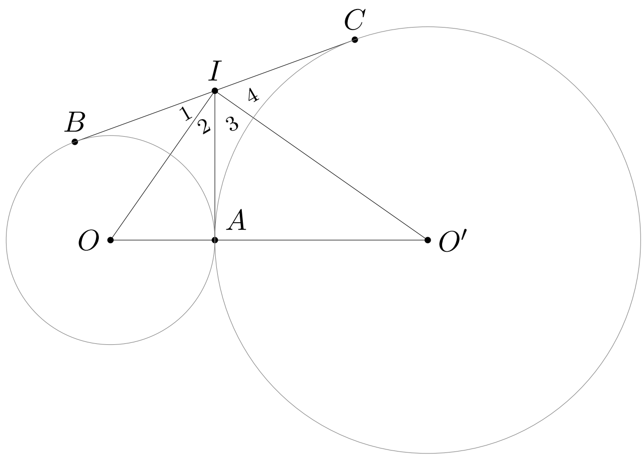
Ví dụ 39. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC, $B \in (O)$, $C \in (O')$. Tiếp tuyến chung trong tại A cắt tiếp tuyến chung ngoài BC tại I. Chứng minh rằng

a) $\widehat{OIO'} = 90^\circ$; b) $BC = 2\sqrt{RR'}$.

Lời giải.

a) Ta có IB, IA là hai tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{I_1} = \widehat{I_2}$;
IC, IA là hai tiếp tuyến của (O') nên $\widehat{I_3} = \widehat{I_4}$.
Suy ra $\widehat{OIO'} = \widehat{I_2} + \widehat{I_3} = 180^\circ : 2 = 90^\circ$.

b) Ta có IB, IA là hai tiếp tuyến của (O) nên $IB = IA$ và $IA \perp OA$, IC, IA là hai tiếp tuyến của (O') nên $IC = IA$ và $IA \perp O'A$. Suy ra $IA = IB = IC$. Ba điểm O, A, O' thẳng hàng và $IA \perp OO'$. Áp dụng hệ thức $h^2 = b' \cdot c'$ vào tam giác vuông OIO' , ta có $IA^2 = OA \cdot O'A \Rightarrow IA = \sqrt{R \cdot R'}$. Mặt khác $BC = IB + IC = 2IA$ nên $BC = 2\sqrt{R \cdot R'}$.



□

Ví dụ 40. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B, trong đó O' nằm trên đường tròn (O). Kẻ đường kính $O'C$ của đường tròn (O).

a) Chứng minh rằng CA, CB là hai tiếp tuyến của (O').

b) Đường vuông góc với AO' tại O' cắt CB tại I. Đường vuông góc với AC tại C cắt đường thẳng $O'B$ ở K. Chứng minh rằng ba điểm O, I, K thẳng hàng.

Lời giải.

a) Tam giác CAO' có đường trung tuyến AO ứng với cạnh CO' bằng nửa cạnh CO' nên $\widehat{CAO'} = 90^\circ$. Mà $A \in (O')$ nên CA là tiếp tuyến của (O') tại A.
Tương tự ta có CB là tiếp tuyến của (O').

b) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau thì $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$. (1)

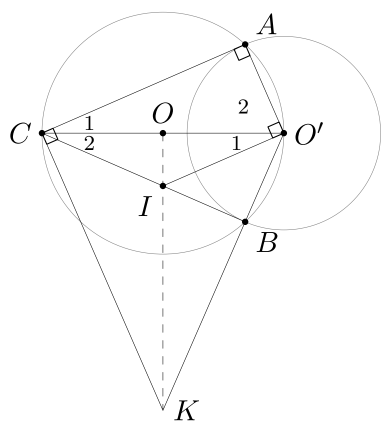
Ta có $CA \parallel IO'$ (cùng vuông góc với $O'A$) nên $\widehat{C_1} = \widehat{O'_1}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{C_2} = \widehat{O'_1}$. Do đó, $IC = IO'$. (3)

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau thì $\widehat{O'_2} = \widehat{CO'B}$. Mặt khác $CK \parallel AO'$ (cùng vuông góc với AC) nên $\widehat{O'_2} = \widehat{O;CK}$. Suy ra $\widehat{CO'B} = \widehat{O'CK}$.
Do đó, $KC = KO'$. (4)

Mà $OC = OO'$ (vì O', C cùng thuộc (O)). (5)

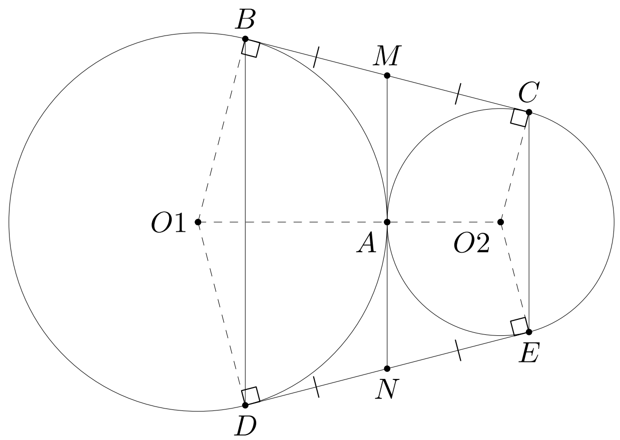
Từ (3), (4), (5) suy ra O, I, K cùng thuộc đường trung trực của CO'.
Vậy ba điểm I, O, K thẳng hàng.



□

Ví dụ 41. Cho hai đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ (với $R_1 \neq R_2$) tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ các tiếp tuyến chung ngoài BC và DE (với B, D thuộc (O_1); C, E thuộc (O_2)). Chứng minh rằng $BC + DE = BD + CE$.

Lời giải.

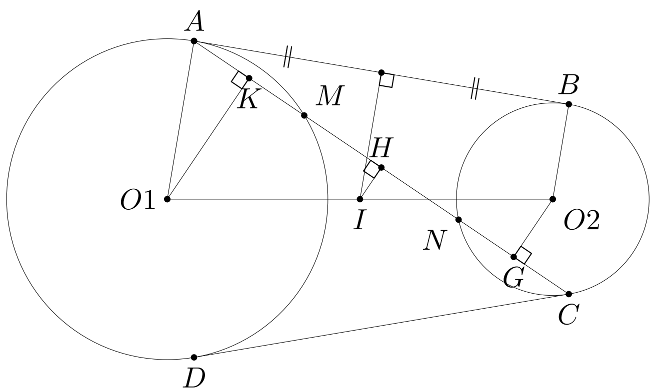


Vẽ tiếp tuyến chung tại A lần lượt cắt BC, DE tại M và N. Vì MA, MB là tiếp tuyến của (O_1) nên $MA = MB$. Vì MA, MC là tiếp tuyến của (O_2) nên $MA = MC \Rightarrow MA = MB = MC$.
Chứng minh tương tự ta có $NA = ND = NE$. $\Rightarrow BC + DE = 2MN$. (1)
Gọi giao điểm của BC và DE là K, khi đó K thuộc đường thẳng $O_1O_2 \Rightarrow KB = KD$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau). Mà $O_1B = O_1D = R_1$ nên KO_1 là trung trực của đoạn BD suy ra $O_1O_2 \perp BD$.
Chứng minh tương tự ta được $O_1O_2 \perp CE$.Suy ra tứ giác $BCED$ là hình thang (vì $BD \parallel CE$). Vì M, N lần lượt là trung điểm của BC và và DE nên $2MN = BD + CE$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $BC + DE = BD + CE$. □

Ví dụ 42. Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) ngoài nhau. Vẽ các tiếp tuyến chung ngoài AB và CD (với A, D thuộc (O_1); B, C thuộc (O_2)). Nối AC cắt (O_1) tại M; cắt (O_2) tại N $(M \neq A, N \neq C)$. Chứng minh rằng $AM = NC$.

Lời giải.
Vẽ đường trung trực d của đoạn AB, d cắt O_1O_2 tại I. Khi đó $IA = IB$. Ta có B và C đối xứng nhau qua O_1O_2 nên $IB = IC \Rightarrow IA = IC$.

Kẻ $IH \perp AC$ tại H ta có $HA = HC$ (vì $\triangle IAC$ cân tại I). Kẻ $O_1K \perp AC$ tại K, $O_2G \perp AC$ tại $G \Rightarrow O_1K \parallel IH \parallel O_2G$.
Xét hình thang ABO_2O_1 (vì $O_1A \parallel O_2G$ do cùng vuông góc với AB) ta có $d \parallel AO_1 \parallel BO_2$ và d đi qua trung điểm của AB nên d đi qua trung điểm của O_1O_2 hay I là trung điểm của O_1O_2.
Xét hình thang O_1KO_2G có $IH \parallel O_1K \parallel O_2G$ và I là trung điểm của O_1O_2 nên H là trung điểm của $KG \Rightarrow HK = HG \Rightarrow HA - HK = HC - HG$ hay $AK = GC \Rightarrow 2AK = 2GC \Rightarrow AM = CN$.

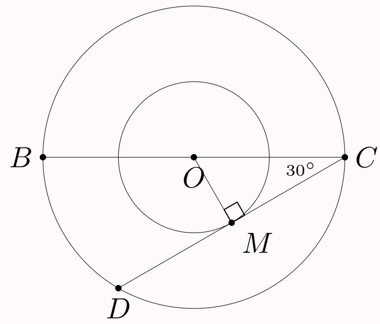


Trong ví dụ này ta đã sử dụng tính chất đường thẳng song song với hai đáy của hình thang và đi qua trung điểm của một đường chéo thì đi qua trung điểm của đường chéo còn lại

□

Dạng 7. Tính độ dài đoạn thẳng

Ví dụ 43.
Trong hình vẽ, cho hai đường tròn đồng tâm O. Cho biết BC là đường kính của đường tròn lớn và có độ dài bằng 8. Dây CD là tiếp tuyến của đường tròn nhỏ và $\widehat{BCD} = 30^\circ$. Hãy tính bán kính của đường tròn nhỏ.



Lời giải.

Ta có $BC = 8$ nên bán kính đường tròn lớn là $OC = 4$. Vì CD là tiếp tuyến của đường tròn nhỏ, nên $CD \perp OM$. Do đó $OM = OC \cdot \sin 30^\circ = 4 \cdot \dfrac{1}{2} = 2$. □

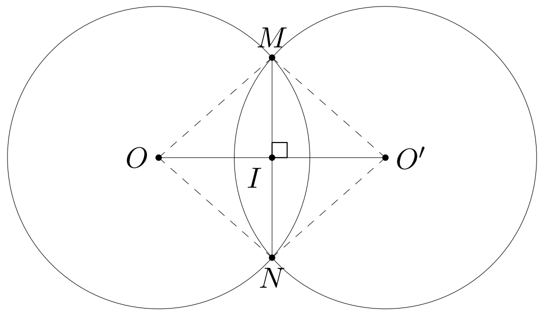
Ví dụ 44. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R)$ cắt nhau tại M và N. Biết $OO' = 24$ cm, $MN = 10$ cm. Tính R.

Lời giải.

Gọi giao điểm của OO' và MN là I. Vì $OM = ON = O'M = O'N = R$ nên tứ giác $OMO'N$ là hình thoi $\Rightarrow$ $OO' \perp MN$ tại điểm I là trung điểm của mỗi đoạn OO' và MN.
Do đó $IM = \frac{1}{2}MN = 5$ cm, $IO = \frac{1}{2}OO' = 12$ cm.
Áp dụng định lí Py-ta-go vào $\triangle MIO$, ta có:

$$R = OM = \sqrt{IM^2 + IO^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ (cm)}.$$

Vậy $R = 13$ cm.



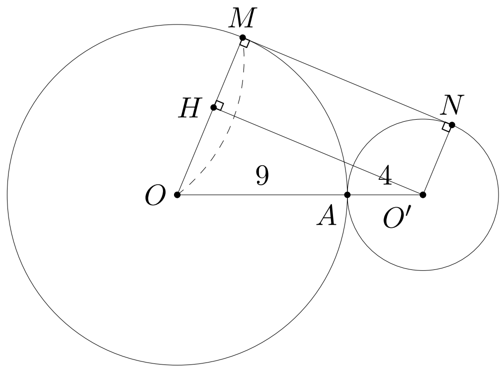
□

Ví dụ 45. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài MN với M thuộc (O), N thuộc (O'). Biết $R = 9$ cm, $R' = 4$ cm. Tính độ dài đoạn MN.

Lời giải.

Ta có: $OO' = OA + O'A = 9 + 4 = 13$ (cm).
Kẻ $OH \perp OM$ tại H
$\Rightarrow$ tứ giác $O'NMH$ là hình chữ nhật
$\Rightarrow$ $MH = O'N = 4$ (cm); $MN = O'H$
$\Rightarrow$ $OH = OM - MH = 9 - 4 = 5$ (cm).
Áp dụng định lí Py-ta-go vào $\triangle OO'H$, ta có:

$$MN = O'H = \sqrt{OO'^2 - OH^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ (cm)}.$$

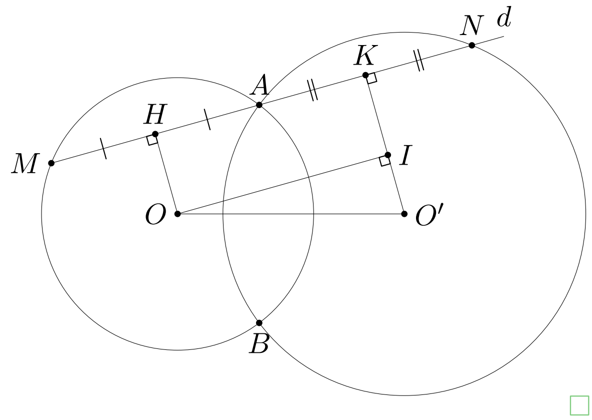


□

Ví dụ 46. Cho hai đường tròn $(O;\, 3 \text{ cm})$ và $(O';\, 4 \text{ cm})$ cắt nhau tại A và B. Qua A kẻ một cát tuyến cắt (O) tại M $(M \neq A)$, cắt (O') tại N $(N \neq A)$. Nếu $OO' = 5$ cm, hãy tính giá trị lớn nhất của MN.

Lời giải.

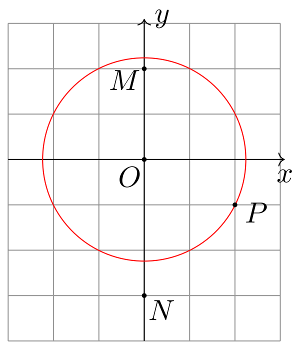
Kẻ $OH \perp AM$ tại H, $O'K \perp AN$ tại K và $OI \perp O'K$ tại I
$\Rightarrow$ $HM = HA$, $KA = KN$ và tứ giác $HOIK$ là hình chữ nhật
$\Rightarrow$ $MN = 2HK$ và $HK = OI$.
Ta có $OI \leq OO'$ (đường vuông góc và đường xiên
$\Rightarrow MN = 2HK = 2OI \leq 2OO' = 10$ (cm)
Dấu $'' ='' $ xảy ra $\Leftrightarrow$ $OI = OO' \Leftrightarrow I \equiv O' \Leftrightarrow d \parallel OO'$.
Vậy giá trị lớn nhất của MN bằng 10 cm khi cát tuyến d song song với OO'.



C BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm $M(0;2)$, $N(0;-3)$ và $P(2;-1)$. Vẽ hình và cho biết trong các điểm đã cho, điểm nào nằm trên, điểm nào nằm trong, điểm nào nằm ngoài đường tròn $\left(O;\sqrt{5}\right)$? Vì sao?

Lời giải.
Dựa vào hình vẽ ta thấy

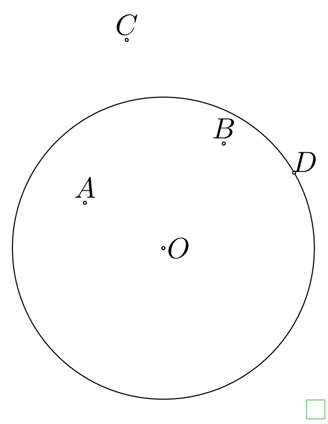


- Điểm M nằm trong đường tròn $\left(O;\sqrt{5}\right)$.
- Điểm N nằm ngoài đường tròn $\left(O;\sqrt{5}\right)$.
- Điểm P nằm trên đường tròn $\left(O;\sqrt{5}\right)$.

□

Bài 2. Cho đường tròn (O), bán kính 5 cm và bốn điểm A, B, C, D thỏa mãn $OA = 3$ cm, $OB = 4$ cm, $OC = 7$ cm, $OD = 5$ cm. Hãy cho biết mỗi điểm A, B, C, D nằm trong, nằm trên hay nằm ngoài đường tròn (O).

Lời giải.



- $OA = 3 < R = 5$ nên điểm A ở trong đường tròn.
- $OB = 4 < R = 5$ nên điểm B ở trong đường tròn.
- $OC = 7 > R = 5$ nên điểm C ở ngoài đường tròn.
- $OD = 5 = R = 5$ nên điểm D ở trên đường tròn.

□

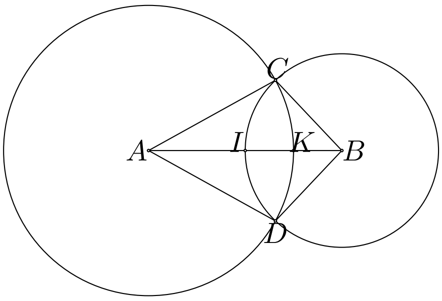
Bài 3. Cho hai đường tròn $(A;6$ cm$)$ và $(B;4$ cm$)$ cắt nhau tại C và D, $AB = 8$ cm. Gọi K, I lần lượt là giao điểm của hai đường tròn đã cho với đoạn thẳng AB.

a) Tính độ dài của các đoạn thẳng CA, CB, DA và DB.

b) Điểm I có phải là trung điểm của đoạn thẳng AB không?

c) Tính độ dài của đoạn thẳng IK.

Lời giải.



a) Hai đường tròn $(A;6\text{ cm})$ và $(B;4\text{ cm})$ cắt nhau tại C và D nên $AC = AD = 6$ cm, $BC = BD = 4$ cm.

b) $AB = 8$ cm. $BC = BD = BI = 4$ cm. Suy ra $AI = AB - IB = 8 - 4 = 4$ cm. Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

c) Ta có $AK = AC = 6$ cm nên $IK = AK - AI = 6 - 4 = 2$ cm.

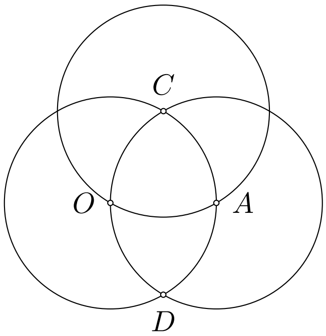
□

Bài 4. Cho hai đường tròn $(O;2\text{cm})$ và $(A;2\text{cm})$ cắt nhau tại C, D, điểm A nằm trên đường tròn tâm O.

a) Vẽ đường tròn $(C;2\text{ cm})$.

b) Đường tròn $(C;2\text{ cm})$ có đi qua hai điểm O và A không? Vì sao?

Lời giải.



a) Vẽ đường tròn $(C;2\text{ cm})$ (Hình bên).

b) Đường tròn $(O;2)$ và $(A;2)$ cắt nhau tại C, D, điểm A nằm trên đường tròn tâm O nên $OC = OD = 2$ cm, $AC = AD = 2$ cm.
Suy ra $CO = CA = 2$ cm. Do đó đường tròn $(C;2\text{ cm})$ đi qua hai điểm O và A.

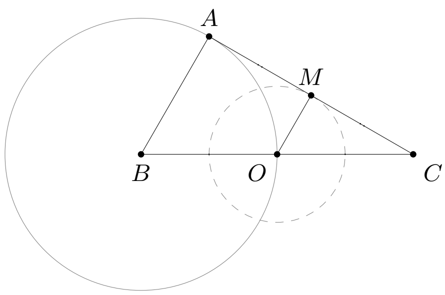
□

Bài 5. Cho tam giác ABC, cạnh BC cố định, $AB = 4$ cm.

a) Hỏi điểm A di động trên đường nào ?

b) Trung điểm M của AC di động trên đường nào ?

Lời giải.



a) Điểm B cố định. Điểm A cách B một khoảng là 4 cm nên A nằm trên đường tròn $(B;4\text{ cm})$.

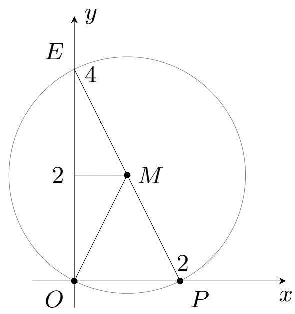
b) Gọi O là trung điểm của BC thì O là một điểm cố định. Ta có $OM = \dfrac{1}{2}AB = 2$ cm. Điểm M cách điểm O một khoảng 2 cm nên M nằm trên đường tròn $(O;2\text{ cm})$.

□

Bài 6. Trong hệ trục tọa độ Oxy cho $E(0;4)$, $P(2;0)$ và M là điểm thuộc đoạn EP sao cho tung độ của M bằng 2. Vẽ đường tròn tâm M bán kính MO. Xác định vị trí tương đối của E, P so với đường tròn $(M;MO)$.

Lời giải.

Tung độ của M bằng 2 nên M là trung điểm của PE. Tam giác POE vuông tại O nên $MO = ME = MP$. Do đó E, P thuộc $(O; MO)$.

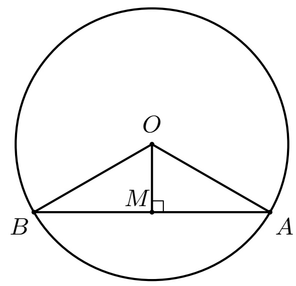


Bài 7. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây AB khác đường kính. Gọi M là trung điểm của AB.

a) Đường thẳng OM có phải là đường trung trực của đoạn thẳng AB hay không? Vì sao?

b) Tính khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng AB, biết $R = 5$ cm, $AB = 8$ cm.

Lời giải.



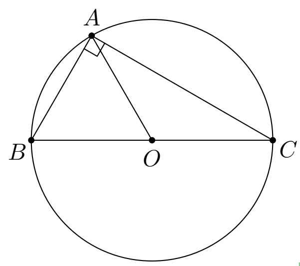
a) Ta có $\triangle OAB$ cân tại O vì $OA = OB = R$.
Mà M là trung điểm của AB nên OM là đường trung tuyến của tam giác OAB.
Khi đó OM cũng là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

b) Khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng AB chính là đoạn thẳng OM.
M là trung điểm của AB nên $AM = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$ cm.
Xét tam giác OAM vuông tại M, có $OA^2 = AM^2 + OM^2$ (pitago).
Suy ra $OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ cm.

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm. Chứng minh rằng các điểm A, B, C cùng thuộc một đường tròn. Tính bán bình đường tròn đó.

Lời giải.

Áp dụng định lí Pythago, ta có $BC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5$ cm.
Gọi O là trung điểm của BC.
Theo tính chất trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền, do đó $OA = OB = OC = 2{,}5$ cm.
Vậy $A \in (O; 2{,}5)$, bán kính của đường tròn là $R = 2{,}5$ cm.



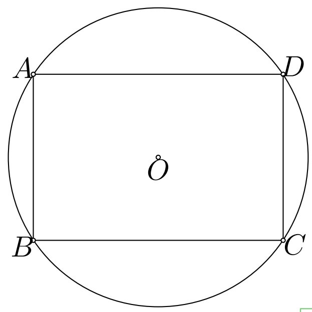
Bài 9. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 18$ cm và $CD = 12$ cm. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

Lời giải.

Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật nên $OA = OB = OC = OD$, suy ra các điểm A, B, C, D nằm trên một đường tròn tâm O.
Tam giác ABC vuông tại B có

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 9^2} = \sqrt{117}$$

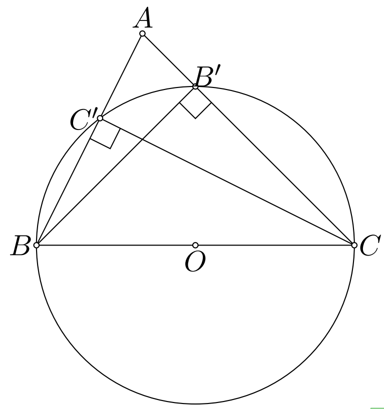
Vậy bán kính $R = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{\sqrt{117}}{2}$.



Bài 10. Cho tam giác ABC có hai đường cao BB' và CC'. Gọi O là trung điểm BC. Chứng minh đường tròn tâm O bán kính OB' đi qua B, C, C'.

Lời giải.

Tam giác ABC có hai đường cao BB' và CC' nên $\widehat{BC'C} = \widehat{BB'C} = 90^\circ$ suy ra $OB = OC = OB' = OC'$ (đường cao ứng với cạnh huyền). Do đó bốn điểm B, C', B', C cùng nằm trên đường tròn tâm O bán kính OB'.

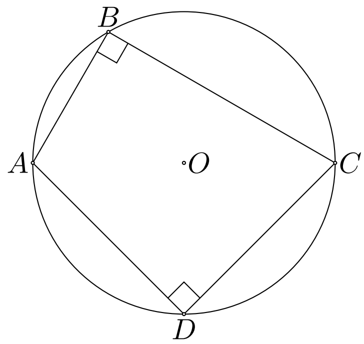


□

Bài 11. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$. Chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải.

Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$ nên $OA = OB = OC = OD$ (đường cao ứng với cạnh huyền). Suy ra bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn tâm O, đường kính là AC.



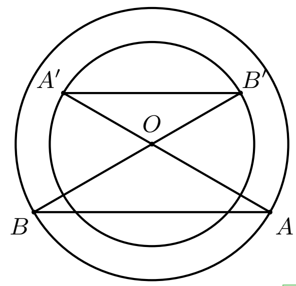
□

Bài 12. Cho hai đường tròn cùng tâm $(O; R)$, $(O; r)$ với $R > r$. Các điểm A, B thuộc đường tròn $(O; R)$, các điểm A', B' thuộc đường tròn $(O; r)$ sao cho O, A, A' thẳng hàng; O, B, B' thẳng hàng và điểm O không thuộc đường thẳng AB. Chứng minh:

a) $\dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{OB'}{OB}$.

b) $AB \parallel A'B'$.

Lời giải.



a) Từ giả thuyết, ta luôn có $\dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{r}{R}$, $\dfrac{OB'}{OB} = \dfrac{r}{R}$.

Suy ra $\dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{OB'}{OB}$.

b) Vì $\dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{OB'}{OB}$ nên theo hệ quả của định lí Ta-lét ta có $AB \parallel A'B'$.

□

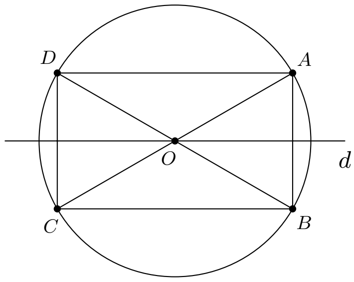
Bài 13. Cho đường tròn (O), đường thẳng d đi qua O và điểm A thuộc (O) nhưng không thuộc d. Gọi B là điểm đối xứng với A qua d; C và D lần lượt là điểm đối xứng của A và B qua O.

a) Ba điểm B, C và D có thuộc (O) không? Vì sao?

b) Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật.

c) Chứng minh rằng C và D đối xứng với nhau qua d.

Lời giải.



a) Giả sử đường tròn (O) có bán kính $R \Rightarrow OA = R \quad (1)$.
Do B là điểm đối xứng với A qua $d \Rightarrow OA = OB \quad (2)$.
Do C là điểm đối xứng của A qua $O \Rightarrow OA = OC \quad (3)$.
Do D là điểm đối xứng của B qua $O \Rightarrow OB = OD \quad (4)$.
Từ (1), (2), (3) và (4) $\Rightarrow B$, C và D cùng thuộc (O).

b) Ta thấy, AC và BD cắt nhau tại O là trung điểm của mỗi đường, suy ra $ABCD$ là hình chữ nhật.

c) Ta thấy $OC = OD \Rightarrow d$ là đường trung trực của CD.
$\Rightarrow C$ và D đối xứng với nhau qua d.

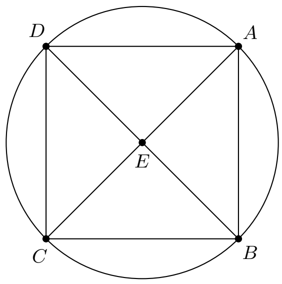
□

Bài 14. Cho hình vuông $ABCD$ có E là giao điểm của hai đường chéo.

a) Chứng minh rằng có một đường tròn đi qua các điểm A, B, C và D. Xác định tâm đối xứng và chỉ ra hai trục đối xứng của đường tròn đó.

b) Tính bán kính của đường tròn ở câu a), biết rằng hình vuông có cạnh bằng 3 cm.

Lời giải.



a) Vì hình vuông $ABCD$ có tâm $E \Rightarrow EA = EB = EC = ED$.
Do đó, các điểm A, B, C và D cùng thuộc đường tròn tâm E.
Hai trục đối xứng của đường tròn là AC và BD.

b) Cạnh hình vuông bằng 3 cm nên áp dụng định lý Pythago, ta có

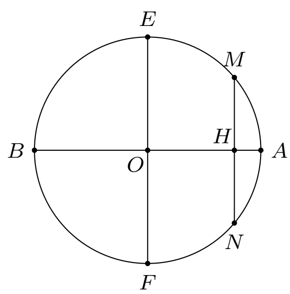
$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow EA = \frac{AC}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy bán kính của đường tròn là $R = EA = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ cm.

□

Bài 15. Cho nửa đường tròn đường kính AB và một điểm M tuỳ ý thuộc nửa đường tròn đó. Chứng minh rằng khoảng cách từ M đến AB không lớn hơn $\dfrac{AB}{2}$.

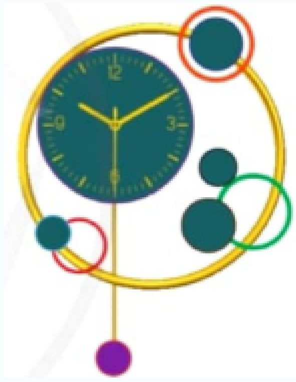
Lời giải.



Kẻ dây MN và đường kính EF như hình vẽ. Gọi H là hình chiếu của M trên AB. Ta luôn có $MN \leqslant EF$ nên $\dfrac{MN}{2} \leqslant \dfrac{EF}{2} \Leftrightarrow EO \leqslant MH$. Hay khoảng cách từ M đến AB không lớn hơn $\dfrac{AB}{2}$.

□

Bài 16.
Chiếc đồng hồ trang trí ở Hình 18 gợi nên vị trí tương đối của các đường tròn. Quan sát Hình 18 và chỉ ra một cặp đường tròn:



a) Cắt nhau.

b) Tiếp xúc ngoài.

c) Tiếp xúc trong.

d) Không giao nhau.

Lời giải.

a) Cặp đường tròn cắt nhau là vòng tròn màu tím và vòng tròn màu vàng.

b) Cặp đường tròn tiếp xúc ngoài là vòng tròn màu xanh lá cây và vòng tròn màu xanh.

c) Cặp đường tròn tiếp xúc trong là vòng tròn màu vàng và vòng tròn của đồng hồ.

d) Cặp đường tròn không giao nhau là vòng tròn màu xanh và vòng tròn màu đỏ.

□

Bài 17. Cho hai điểm O và O' cách nhau một khoảng 5 cm. Mỗi đường tròn sau đây có vị trí tương đối như thế nào đối với đường tròn $(O; 3\,\text{cm})$.

a) Đường tròn $(O'; 3\,\text{cm})$;   b) Đường tròn $(O'; 1\,\text{cm})$;   c) Đường tròn $(O'; 8\,\text{cm})$.

Lời giải.

a) Đặt $R = 3$ cm, $R' = 3$ cm ta có $OO' = 5\,\text{cm} < R + R'$. Vậy hai đường tròn đã cho cắt nhau.

b) Đặt $R = 3$ cm, $R' = 1$ cm ta có $OO' = 5\,\text{cm} > R + R'$. Vậy hai đường tròn đã cho ở ngoài nhau.

c) Đặt $R = 3$ cm, $R' = 8$ cm ta có $OO' = 5\,\text{cm} = R' - R$. Vậy hai đường tròn đã cho tiếp xúc nhau.

□

Bài 18. Xác định vị trí tương đối của $(O; R)$ và $(O'; R')$ trong mỗi trường hợp sau

a) $OO' = 18$; $R = 10$; $R' = 6$;   b) $OO' = 2$; $R = 9$; $R' = 3$;

c) $OO' = 13$; $R = 8$; $R' = 5$;   d) $OO' = 17$; $R = 15$; $R' = 4$;

Lời giải.

a) $OO' = 18$; $R = 10$; $R' = 6$.
Ta có $OO' = 18 > R + R' = 10 + 6$ nên hai đường tròn (O) và (O') ngoài nhau.

b) $OO' = 2$; $R = 9$;$R' = 3$.
Ta có $OO' = 2 < R - R' = 9 - 3 = 6$ nên hai đường tròn (O) và (O') đựng nhau.

c) $OO' = 13$; $R = 8$; $R' = 5$.
Ta có $OO' = 13 = R + R' = 8 + 5$ nên hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài với nhau.

d) $OO' = 17$; $R = 15$; $R' = 4$.
Ta có $R - R' = 11 < OO' = 17 < R + R' = 19$ nên hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau theo hai giao điểm.

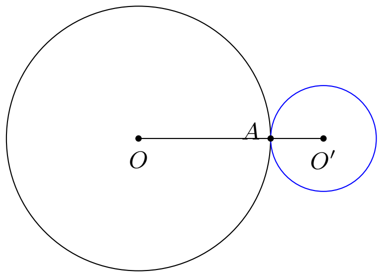
□

Bài 19. Cho ba điểm O, A và O'. Với mỗi trường hợp sau, hãy viết hệ thức giữa các độ dài OO', OA và $O'A$ rồi xét xem hai đường tròn $(O;OA)$ và $(O';O'A)$ tiếp xúc trong hay tiếp xúc ngoài với nhau; vẽ hình để khẳng định dự đoán của mình.

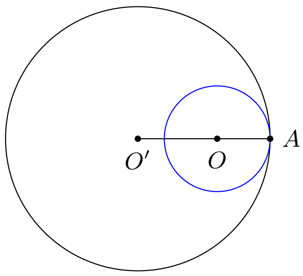
a) A nằm giữa O và O'. b) O nằm giữa A và O'. c) O' nằm giữa A và O.

Lời giải.

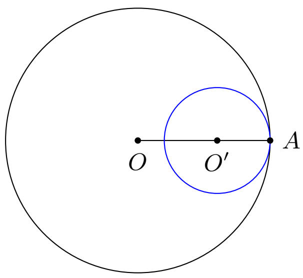
a) Vì điểm A nằm giữa hai điểm O và O' nên $OO' = OA + O'A$ nên hai đường tròn $(O;OA)$ và $(O';O'A)$ tiếp xúc ngoài.



b) Vì điểm O nằm giữa hai điểm A và O' nên $OO' = O'A - OA$ nên hai đường tròn $(O;OA)$ và $(O';O'A)$ tiếp xúc trong.



c) Vì điểm O' nằm giữa hai điểm A và O nên $OO' = OA - O'A$ nên hai đường tròn $(O;OA)$ và $(O';O'A)$ tiếp xúc trong.

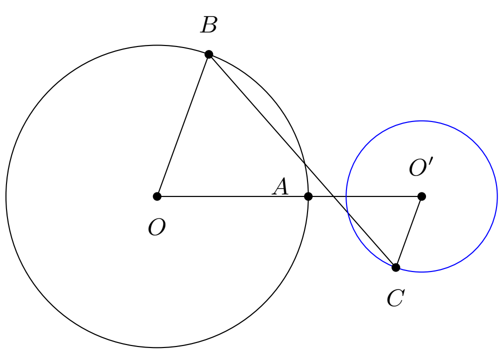


□

Bài 20. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Một đường thẳng qua A cắt (O) tại B và cắt (O') tại C. Chứng minh rằng $OB \parallel O'C$.

Lời giải.

Xét tam giác OBA cân tại O nên $\widehat{OBA} = \widehat{OAB}$.
Xét tam giác $O'CA$ cân tại O' nên $\widehat{O'CA} = \widehat{O'AC}$.
Mà $\widehat{OAB} = \widehat{O'AC}$ (hai góc đối đỉnh) nên $\widehat{OBA} = \widehat{O'CA}$.
Mà hai góc này lại ở vị trí so le trong nên suy ra $OB \parallel O'C$.

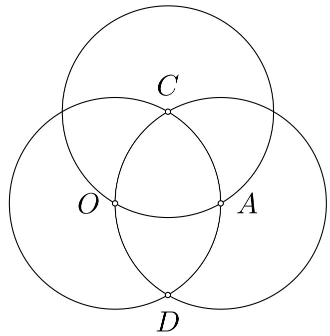


Bài 21. Cho hai đường tròn $(O; 2\text{ cm})$ và $(A; 2\text{ cm})$ cắt nhau tại C, D, điểm A nằm trên đường tròn tâm O.

a) Vẽ đường tròn $(C; 2\text{ cm})$.

b) Đường tròn $(C; 2\text{ cm})$ có đi qua hai điểm O và A không? Vì sao?

Lời giải.



a) Vẽ đường tròn $(C; 2\text{ cm})$ (Hình bên).

b) Đường tròn $(O; 2)$ và $(A; 2)$ cắt nhau tại C, D, điểm A nằm trên đường tròn tâm O nên $OC = OD = 2$ cm, $AC = AD = 2$ cm.
Suy ra $CO = CA = 2$ cm. Do đó đường tròn $(C; 2\text{ cm})$ đi qua hai điểm O và A.

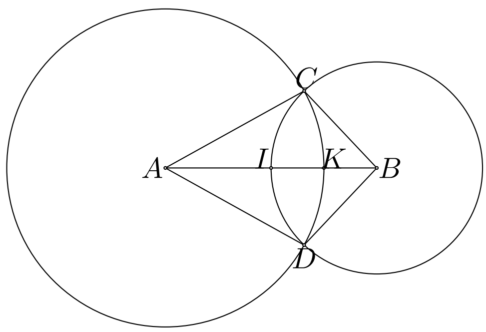
Bài 22. Cho hai đường tròn $(A; 6\text{ cm})$ và $(B; 4\text{ cm})$ cắt nhau tại C và D, $AB = 8$ cm. Gọi K, I lần lượt là giao điểm của hai đường tròn đã cho với đoạn thẳng AB.

a) Tính độ dài của các đoạn thẳng CA, CB, DA và DB.

b) Điểm I có phải là trung điểm của đoạn thẳng AB không?

c) Tính độ dài của đoạn thẳng IK.

Lời giải.



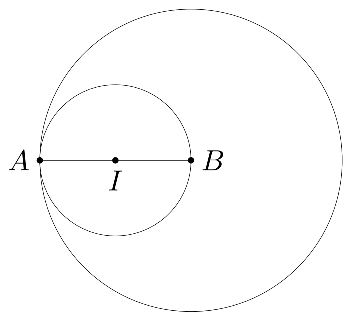
a) Hai đường tròn $(A; 6\text{ cm})$ và $(B; 4\text{ cm})$ cắt nhau tại C và D nên $AC = AD = 6$ cm, $BC = BD = 4$ cm.

b) $AB = 8$ cm. $BC = BD = BI = 4$ cm. Suy ra $AI = AB - IB = 8 - 4 = 4$ cm. Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

c) Ta có $AK = AC = 6$ cm nên $IK = AK - AI = 6 - 4 = 2$ cm.

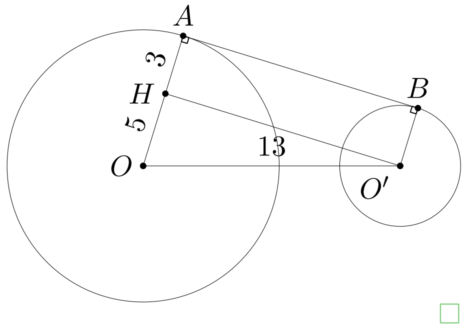
Bài 23. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn $(I; IA)$ và $(B; BA)$.

Lời giải.
Vì I là trung điểm của đoạn thẳng AB nên ta có A, I, B thẳng hàng và $BI = BA = IA$, từ đó suy ra $(I; IA)$ tiếp xúc trong với $(B; BA)$ tại A.



Bài 24. Cho hai đường tròn $(O;\, 8\text{ cm})$ và $(O';\, 3\text{ cm})$. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài AB (với A thuộc (O); B thuộc (O')). TÍnh độ dài đoạn AB nếu $OO' = 13$ cm.

Lời giải.



Kẻ $O'H \perp OA$ tại $H \Rightarrow$ tứ giác $ABO'H$ là hình chữ nhật
$\Rightarrow AB = O'H$, $AH = O'B = 3$.
Áp dụng định lí Py-ta-go vào $\triangle HOO'$ ta có

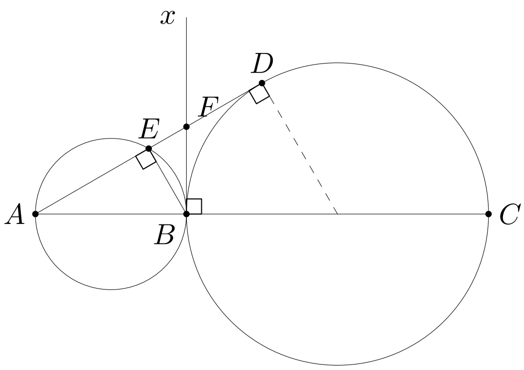
$$O'H = \sqrt{OO'^2 - OH^2} = \sqrt{13^2 - (8-3)^2} = 12.$$

Vậy $AB = 12$ cm.

□

Bài 25. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó và dựng các đường tròn đường kính AB, BC. Từ A vẽ tiếp tuyến AD với đường tròn đường kính BC (D là tiếp điểm), tiếp tuyến AD cắt đường tròn đường kính AB tại E ($E \neq A$). Chứng minh rằng tia BD là tia phân giác của góc EBC.

Lời giải.
Kẻ tiếp tuyến chung Bx; Bx cắt DE tại F như hình vẽ.



- Vì E thuộc đường tròn đường kính AB nên $\widehat{AEB} = 90^\circ$. (1)
- Vì BF là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AB tại B nên $BF \perp AB$ tại B hay $\widehat{ABF} = 90^\circ$. (2)
  Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{FAB} = \widehat{FBE}$ (cùng phụ với $\widehat{AFB}$) hay $\widehat{DAB} = \widehat{EBF}$.
- Vì DF, FB là hai tiếp tuyến của đường tròn đường kính BC nên $FD = FB$ suy ra $\triangle FDB$ cân tại $F \Rightarrow \widehat{FDB} = \widehat{FBD}$.
  Do đó $\widehat{EBD} = \widehat{EBF} + \widehat{FBD} = \widehat{DAB} + \widehat{FDB}$.
  Mà $\widehat{DBC} = \widehat{FDB} + \widehat{DAB}$ (tính chất góc ngoài của $\triangle ABD$) nên $\widehat{EBD} = \widehat{DBC}$, do đó BD là tia phân giác của $\widehat{EBC}$.

□

Bài 26. Cho hình vuông $ABCD$, lấy điểm M bất kì trên đường chéo BD ($M \neq B$; $M \neq D$). Vẽ đường tròn (O) qua M và tiếp xúc với AB tại B, vẽ đường tròn (O') qua M và tiếp xúc với AD tại D. Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại điểm thứ hai N (với $N \neq M$).

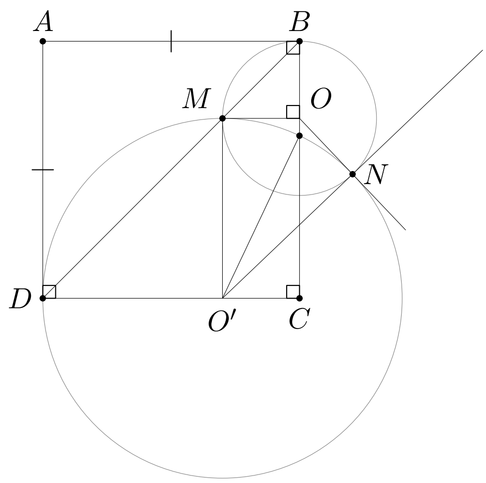
a) Chứng minh rằng $O'N$ là tiếp tuyến của đường tròn (O) và ON là tiếp tuyến của đường tròn (O').

b) Khi M di động trên BD, tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn OO' theo cạnh hình vuông $ABCD$.

Lời giải.

a) Vì AB là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên tâm O của (O) phải nằm trên đường thẳng vuông góc với AB tại B. Mà $BC \perp AB$ tại B (vì $ABCD$ là hình vuông) nên O thuộc BC.

Vì M thuộc (O) nên $ON = OM \Rightarrow \triangle OBM$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OMB} = \widehat{OBM} = \widehat{CBD} = 45^\circ \Rightarrow \triangle OBM$ vuông cân tại O
$\Rightarrow \widehat{BOM} = 90^\circ$ hay $\widehat{COM} = 90^\circ$.
Tương tự ta có $\widehat{CO'M} = 90^\circ$.
Từ đó suy ra tứ giác $COC'M$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \widehat{OMO'} = 90^\circ$.
Vì $\triangle OMO' = \triangle ONO'$ (c.c.c) nên $\widehat{ONO'} = \widehat{OMO'} = 90^\circ$
$\Rightarrow ON$ là tiếp tuyến của (O') và $O'N$ là tiếp tuyến của (O).

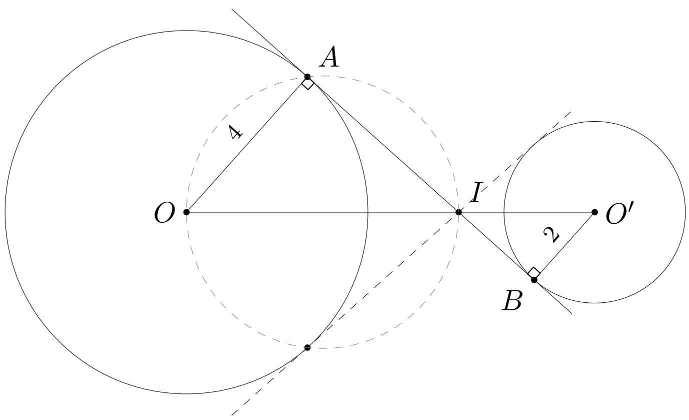


b) Vì tứ giác $OCO'M$ là hình chữ nhật nên $OO' = CM$.
OO' nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ CM nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $CM \perp BD$ tại $M \Leftrightarrow M$ là giao điểm của AC và BD.
Do đó $OO'_{\min} = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ (với $AB = BC = CD = DA = a$) khi M là tâm của hình vuông $ABCD$.

Bài 27. Cho $(O;\, 4\text{ cm})$, $(O';\, 2\text{ cm})$ và $OO' = 9$ cm. Dựng tiếp tuyến chung trong của (O) và (O').

Lời giải.

Các phần phân tích, chứng minh, biện luận dành cho bạn đọc.

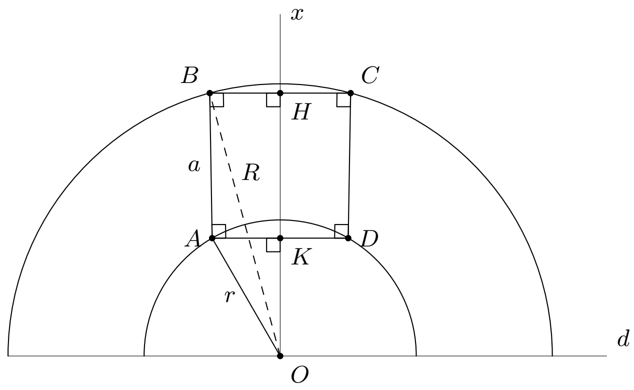


- Dựng điểm I là điểm chia trong của đoạn OO' với tỉ số $\dfrac{R}{R'} = \dfrac{2}{1}$, tức là I nằm trong đoạn OO' và $\dfrac{IO}{IO'} = \dfrac{R}{R'} = \dfrac{2}{1}$ hay $\dfrac{IO}{IO' + IO} = \dfrac{2}{2+1} \Leftrightarrow \dfrac{IO}{9} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow IO = 6$ (cm)
- Dựng đường tròn đường kính IO, đường tròn này cắt đường tròn (O) tại A và A'.
- Dựng đường thẳng AI và $A'I$ là hai tiếp tuyến chung trong cần dựng.

Bài 28. Cho đường thẳng d. Lấy điểm O thuộc d, vẽ hai nửa đường tròn $(O;\, r)$ và $(O;\, R)$ (với $0 < r < R$) trên cùng một nửa mặt phẳng bờ d. Chứng minh: điều kiện cần và đủ để có hai điểm A, D thuộc $(O;\, r)$ và hai điểm B, C thuộc $(O;\, R)$ sao cho $ABCD$ là một hình vuông là $r < R \le r\left(\sqrt{2}+1\right)$.

Lời giải.

Kẻ $Ox \perp d$ tại O; Ox cắt BC tại H, cắt AD tại K.
Ta có



$$OK = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$$
$$OH = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$$

(với $a = AB = BC = CD = DA$).

Vì $OH = OK + KH$ nên $\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} + a$
$\Rightarrow 2a^4 - 2(R^2 + r^2)a^2 + (R^2 - r^2)^2 = 0$
$\Leftrightarrow \left[a^2 - \frac{1}{2}(R^2 - r^2)\right]^2 = 4R^2r^2 - (R^2 - r^2)^2.$ $(*)$
Do đó để tồn tại hình vuông $ABCD$ thì phải tồn tại $a \Rightarrow (*)$ phải có nghĩa hay

$$\begin{aligned}
& 4R^2r^2 - (R^2 - r^2)^2 \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & 4R^2r^2 \geq (R^2 - r^2)^2 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{4R^2r^2} \geq \sqrt{(R^2 - r^2)^2} \\
\Leftrightarrow\ & 2Rr \geq R^2 - r^2 (\text{vì} R > r > 0) \\
\Leftrightarrow\ & r^2 \geq R^2 - 2Rr \\
\Leftrightarrow\ & 2r^2 \geq (R - r)^2 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{2}r \geq R - r \\
\Leftrightarrow\ & (1 + \sqrt{2})r \geq R.
\end{aligned}$$

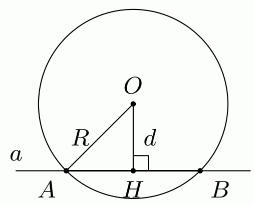
Kết hợp với điều kiện $R > r$, ta có $r < R \leq (1 + \sqrt{2})r$. □

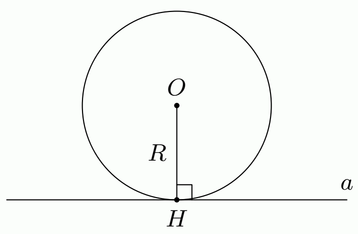
Bài 2 TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

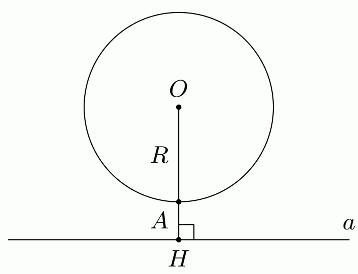
A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

- Đường thẳng a và đường tròn (O) gọi là cắt nhau nếu chúng có đúng hai điểm chung.
- Đường thẳng a và đường tròn (O) gọi là tiếp xúc với nhau nếu chúng có duy nhất một điểm chung H. Điểm chung ấy gọi là tiếp điểm. Khi đó, đường thẳng a còn gọi là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại H.
- Đường thẳng a và đường tròn (O) gọi là không giao nhau nếu chúng không có điểm chung.







Nhận xét. Đường thẳng a và đường tròn $(O; R)$ cắt nhau khi $d < R$, tiếp xúc với nhau khi $d = R$ và không giao nhau khi $d > R$.

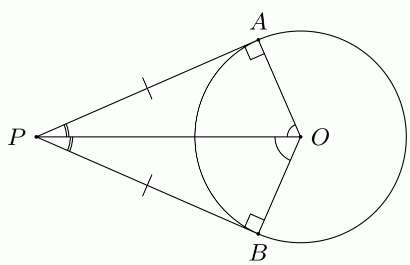
2 Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

Nếu một đường thẳng đi qua một điểm nằm trên một đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.

3 Hai tiếp tuyến cắt nhau của một đường tròn

Nếu hai tiếp tuyến của đường tròn (O) cắt nhau tại điểm P thì:

- Điểm P cách đều hai tiếp điểm;
- PO là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến;
- OP là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính qua hai tiếp điểm.



B CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Ví dụ 1. Cho đường thẳng a và điểm O cách a một khoảng bằng 4 cm. Không vẽ hình, hãy xét vị trí tương đối của đường thẳng a và đường tròn (O).

a) $(0; 3\text{ cm})$; b) $(0; 5\text{ cm})$; c) $(0; 4\text{ cm})$.

Lời giải.

a) Vì $d > R$ $(4 > 3)$ nên đường tròn $(0; 3 \text{ cm})$ không cắt đường thẳng a;

b) Vì $d < R$ $(4 < 5)$ nên đường tròn $(0; 5 \text{ cm})$ cắt đường thẳng a;

c) Vì $d = R$ $(4 = 4)$ nên đường tròn $(0; 4 \text{ cm})$ tiếp xúc đường thẳng a.

□

Ví dụ 2. Cho đường thẳng b và một điểm I cách b một khoảng $d = 6$ cm. Xác định vị trí tương đối của b với các đường tròn sau

a) Đường tròn $(I;3\text{cm})$; b) Đường tròn $(I;6\text{cm})$; c) Đường tròn $(I;8\text{cm})$.

Lời giải.

a) Ta có $d = 6\text{cm}, R = 3\text{cm}$. Vì $d > R$ nên b và đường tròn $(I; 3\text{cm})$ không giao nhau.

b) Ta có $d = 6\text{cm}, R = 6\text{cm}$. Vì $d = R$ nên b tiếp xúc với đường tròn $(I; 6\text{cm})$

c) Ta có $d = 6\text{cm}, R = 8\text{cm}$. Vì $d < R$ nên b cắt đường tròn $(I; 8\text{cm})$ tại hai điểm.

□

Ví dụ 3. Cho đường tròn $(J;5\text{cm})$ và đường thẳng c. Gọi K là chân đường vuông góc vẽ từ J xuống c, d là độ dài của đoạn thẳng JK. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng c và đường tròn $(J;5\text{cm})$ trong mỗi trường hợp sau

a) $d = 4$ cm; b) $d = 5$ cm; c) $d = 6$ cm;

Lời giải.

a) $d = 4$ cm; Ta có $d < R = 5$ cm, nên đoạn thẳng JK nằm trong đường tròn $(J;5\text{cm})$.
Do đó, đường thẳng c cắt đường tròn tại hai điểm.

b) $d = 5$ cm; Vì $d = R = 5$ cm, nên JK tiếp xúc với đường tròn tại điểm K.

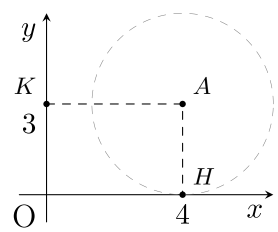
c) $d = 6$ cm; Vì $d > R = 5$ cm, nên JK nằm ngoài đường tròn.
Do đó, đường thẳng c và đường tròn không cắt nhau.

□

Ví dụ 4. Trong hệ tọa độ Oxy cho điểm $A(4; 3)$. Hãy xác định vị trí tương đối của đường tròn tâm A, bán kính $R = 3$ với các trục tọa độ.

Lời giải.

Khoảng cách từ A đến trục Ox là $d = AH = OK = 3$.
Khoảng cách từ A dến trục Oy là $d' = AK = OH = 4$.
Do đó đường tròn $(A; 3)$ tiếp xúc với trục Ox, vì $d = R = 3$; đường tròn $(A; 3)$ không cắt trục Oy vì $d' = 4 > 3 = R$.



□

Ví dụ 5. Cho đường thẳng a và một điểm O cách a một khoảng 8 cm. Vẽ đường tròn tâm O, bán kính 10 cm.

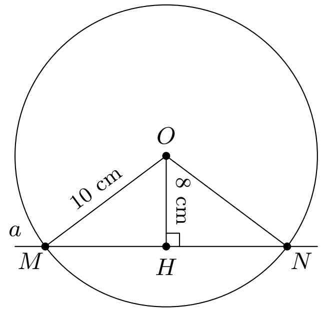
a) Giải thích vì sao a và (O) cắt nhau.

b) Gọi M và N là các giao điểm của đường thẳng a và đường tròn $(O;10\text{cm})$. Tính độ dài của dây MN.

Lời giải.

a) Vẽ OH vuông góc với a tại H. Ta có $OH = 8\text{cm}, R = 10\text{cm}$ suy ra $OH < R$ suy ra a cắt $(O; 10\text{cm})$ tại hai điểm.

b) Do M, N thuộc (O) nên ta có $OM = ON = R$ suy ra tam giác OMN cân tại O có OH là đường cao đồng thời là đường trung tuyến. Do đó, H là trung điểm của dây MN.
Trong tam giác OMH vuông tại H
Ta có $MH = \sqrt{OM^2 - OH^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6(\text{cm})$;
Suy ra $MN = 2MH = 2 \cdot 6 = 12(\text{cm})$.

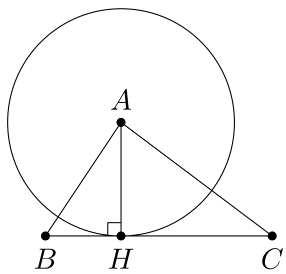


□

Ví dụ 6. Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AH. Đường thẳng BC có tiếp xúc với đường tròn $(A; AH)$ hay không? Vì sao?

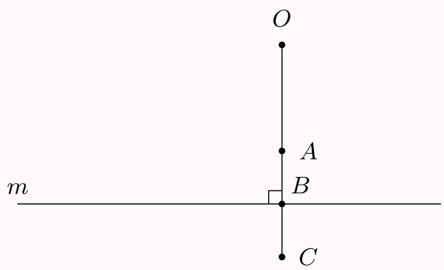
Lời giải.

Vì $AH \perp BC$ và H thuộc đường thẳng BC nên khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC bằng AH. Do đó, khoảng cách từ tâm A của đường tròn $(A; AH)$ đến đường thẳng BC bằng bán kính AH của đường tròn.
Vậy đường thẳng BC tiếp xúc với đường tròn $(A; AH)$.



□

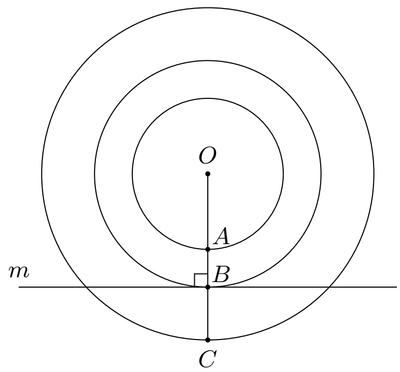
Ví dụ 7.
Cho bốn điểm O, A, B, C thẳng hàng như trong Hình. Giả sử đường thẳng m đi qua B và vuông góc với đường thẳng OC. Nêu vị trí tương đối của đường thẳng m và ba đường tròn cùng tâm O lần lượt đi qua các điểm A, B, C.



Lời giải.

Đặt $OB = d$. Khi đó, d là khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng m.

- Vì $OA < OB$ và $OB = d$ nên $OA < d$. Vậy đường thẳng m và đường tròn $(O; OA)$ không giao nhau.
- Vì $OB = d$ nên đường thẳng m và đường tròn $(O; OB)$ tiếp xúc nhau.
- Vì $OC > OB$ và $OB = d$ nên $OC > d$. Vậy đường thẳng m và đường tròn $(O; OC)$ cắt nhau.

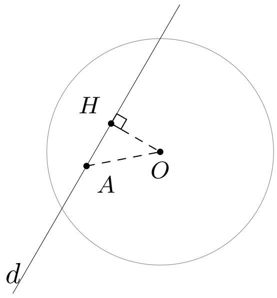


□

Ví dụ 8. Cho điểm A nằm trong đường tròn (O). Chứng minh rằng mọi đường thẳng d đi qua A đều cắt (O) ở hai điểm phân biệt.

Lời giải.

Vẽ $OH \perp d$ tại $H \Rightarrow OH \leq OA$ (quan hệ đường xiên và đường vuông góc).
Vì A nằm trong (O) nên $OA < R$.
Suy ra $OH < R \Rightarrow$ đường thẳng d luôn cắt (O) tại hai điểm phân biệt.

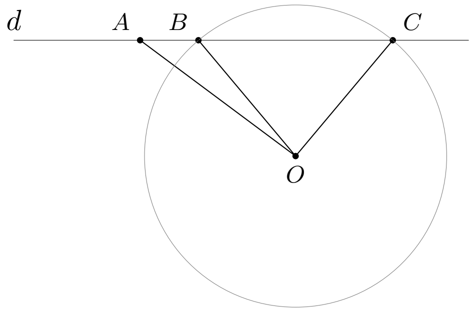


□

Ví dụ 9. Chứng minh rằng một đường thẳng và một đường tròn không thể có quá hai điểm chung.

Lời giải.

Giả sử đường thẳng d và đường tròn (O) có ba điểm chung A, B, C theo thứ tự như hình bên.
Vì A, B, C thuộc (O) nên $OA = OB = OC$. Do đó, tam giác OAB cân tại $O \Rightarrow \widehat{OBA} = \widehat{OAB} < 90^\circ$.
Tam giác OBC cân tại $O \Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB} < 90^\circ$.
Suy ra $\widehat{OBA} + \widehat{OBC} < 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, điều này vô lí vì A, B, C thẳng hàng theo thứ tự ấy thì $\widehat{OBA} + \widehat{OBC} = 180^\circ$.
Vậy điều giả sử là sai, do đó một đường thẳng và một đường tròn có không quá hai điểm chung.



□

Ví dụ 10. Cho hình thang vuông $ABCD$ $\left(\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ\right)$, $AB = 4$ cm, $BC = 13$ cm và $CD = 9$ cm. Tính AD và chứng minh rằng đường thẳng AD tiếp xúc với đường tròn có đường kính là BC.

Lời giải.

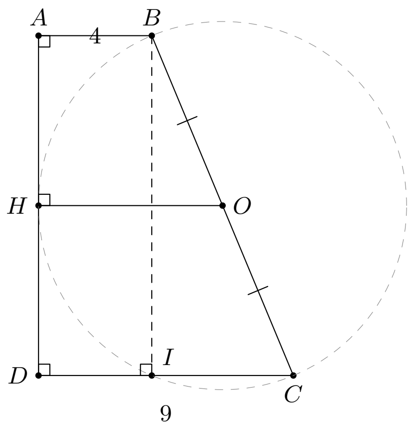
Gọi O là trung điểm của BC.
Vẽ $BI \perp CD$ tại $I \Rightarrow AD = BI$, vẽ $OH \perp AD$ tại H.
Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác BIC có

$$BI = \sqrt{BC^2 - IC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \Rightarrow AD = 12 \text{ cm}.$$

Hình thang $ABCD$ có OH là đường trung bình nên

$$OH = \frac{AB + CD}{2} = \frac{4+9}{2} = 6{,}5 = \frac{BC}{2} = R.$$

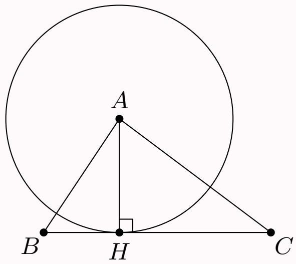
$\Rightarrow$ Đường tròn $(O; R)$ tiếp xúc với AD.



□

Dạng 2. Nhận biết một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn

Ví dụ 11.
Cho tam giác ABC có đường cao AH. Tìm tiếp tuyến của đường tròn $(A; AH)$ tại H.



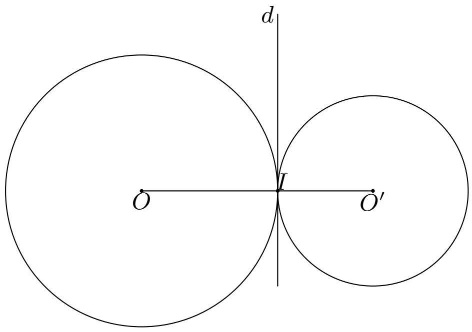
Lời giải.

Xét (A) ta có: $AH \perp BC$ tại H (AH là đường cao của $\triangle ABC$); $H \in (A)$
Suy ra BC là tuyến tuyến của (A) tại H.

Ví dụ 12. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ tiếp xúc ngoài nhau tại điểm I. Gọi d là tiếp tuyến của $(O;R)$ tại điểm I. Chứng minh d là tiếp tuyến của $(O';R')$.

Lời giải.

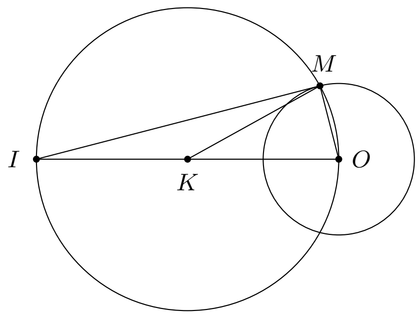
Vì (O) và (O') tiếp xúc ngoài nhau tại I nên O, I, O' thẳng hàng.
d là tiếp tuyến của $(O;R)$ tại điểm I nên $IO \perp d$.
Hay $\widehat{OId} = 90^\circ$.
Mà $\widehat{OId} + \widehat{dIO'} = 180^\circ$
Do đó $\widehat{dIO'} = 180^\circ - \widehat{OId} = 90^\circ$.
Hay $d \perp O'I$. Vậy d là tiếp tuyến của (O').



Ví dụ 13. Cho đường tròn (O) và điểm I ở ngoài đường tròn. Gọi M là giao điểm của đường tròn tâm K đường kính IO và đường tròn (O). Chứng minh đường thẳng IM là tiếp tuyến của (O) tại M.

Lời giải.

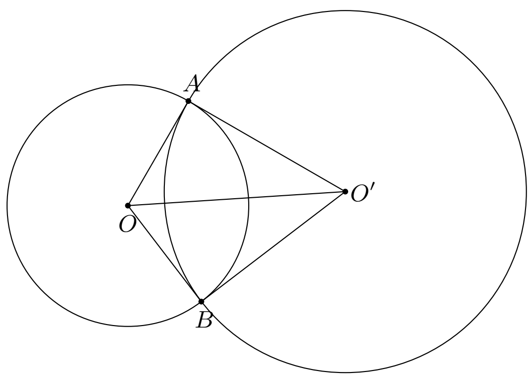
Vì IO, KM lần lượt là đường kính, bán kính của đường tròn (K) nên $KM = \dfrac{1}{2}IO$.
Xét tam giác IMO, ta có đường trung tuyến MK ứng với cạnh IO bằng nửa cạnh ấy.
Suy ra tam giác IMO vuông tại M.
Do đó $IM \perp MO$ tại M với $M \in (O)$.
Vậy đường thẳng IM là một tiếp tuyến của (O) tại M.



Ví dụ 14. Cho hai đường tròn (O), (O') cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho đường thẳng OA là tiếp tuyến của đường tròn (O'). Chứng minh đường thẳng $O'B$ là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải.

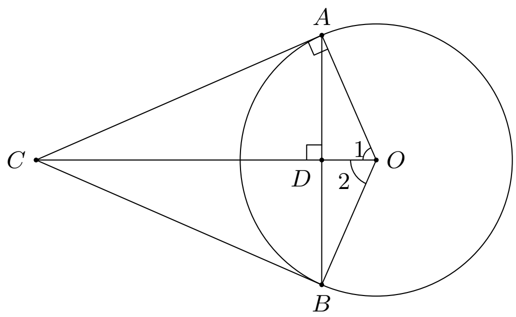
OA là tiếp tuyến của đường tròn $(O') \Rightarrow OA \perp O'A$ suy ra $\widehat{OAO'} = 90^\circ$.
Xét $\triangle OAO'$ và $\triangle OBO'$ có:
$OA = OB$ (bán kính (O)); OO' chung; $O'A = O'B$ (bán kính (O')).
Do đó $\triangle OAO' = \triangle OBO'$ suy ra $\widehat{OAO'} = \widehat{OBO'}$.
Mà $\widehat{OAO'} = 90^\circ$ suy ra $\widehat{OBO'} = 90^\circ$.
Hay $OB \perp O'B$.
Vậy $O'B$ là tiếp tuyến của đường tròn (O).



Ví dụ 15. Cho AB là một dây không đi qua tâm của đường tròn (O). Đường thẳng qua O và vuông góc với AB cắt tiếp tuyến tại A của (O) ở điểm C. Chứng minh rằng CB là một tiếp tuyến của (O).

Lời giải.

Gọi D là giao điểm của AB và OC.
Trong tam giác cân AOB ($OA = OB$), đường cao OD (do $OC \perp AB$) cũng là đường phân giác của góc O, suy ra $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$.
Ta có $\triangle AOC = \triangle BOC$ (c.g.c), vì OC là cạnh chung, $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ và $OA = OB$.
Từ đó $\widehat{OBC} = \widehat{OAC} = 90^\circ$ (do OA là tiếp tuyến).
Vậy CB vuông góc với bán kính OB tại B.
Do đó theo định lí 1, CB cũng là tiếp tuyến của (O).

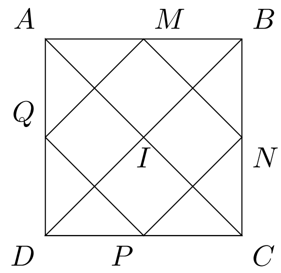


□

Ví dụ 16. Cho một hình vuông có độ dài mỗi cạnh bằng 6 cm và hai đường chéo cắt nhau tại I. Chứng minh rằng đường tròn $(l; 3\text{ cm})$ tiếp xúc với cả bốn cạnh của hình vuông.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của AB.
Xét $\triangle ABC$ có: M là trung điểm của AB, I là trung điểm của AC.
Suy ra MI là đường trung bình $\triangle ABC$.
Do đó $MI = \dfrac{1}{2}BC = 3$ và $IM//BC$, mà $BC \perp AB$ nên $MI \perp AB$.
Ta có $MI = 3$ và $MI \perp AB$ tại M nên AB tiếp xúc với $(I; 3\text{ cm})$ tại M.
Chứng minh tương tự với N, P, Q lần lượt là trung điểm của BC, CD, DA.



□

Ví dụ 17. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A nằm ngoài (O). Vẽ đường tròn đường kính OA, đường tròn này cắt (O) tại hai điểm phân biệt B và C. Kẻ BI là đường kính của đường tròn đường kính OA, kẻ BK là đường kính của đường tròn (O). Chứng minh rằng

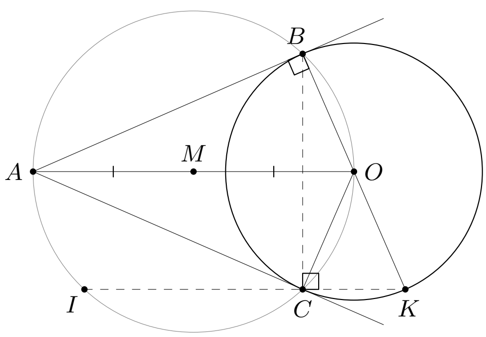
a) AB, AC là hai tiếp tuyến của (O).

b) IK là tiếp tuyến của đường tròn $(B; BC)$.

Lời giải.

a) B thuộc đường tròn đường kính OA nên $\widehat{ABO} = 90^\circ$ mà B thuộc (O) nên AB là tiếp tuyến của (O). Tương tự, ta có AC là tiếp tuyến của (O).

b) C thuộc đường tròn đường kính BI nên $\widehat{BCI} = 90^\circ$. C thuộc đường tròn đường kính BK nên $\widehat{BCK} = 90^\circ$. Từ đó suy ra ba điểm I, K, C thẳng hàng và $IK \perp BC$ tại C. Mà C thuộc đường tròn $(B; BC)$ nên IK là tiếp tuyến của $(B; BC)$.

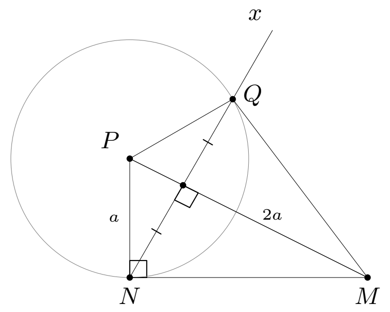


□

Ví dụ 18. Cho tam giác MNP có $\widehat{N} = 90^\circ$ và $NP = \dfrac{1}{2}MP = a$. Vẽ đường tròn tâm P tiếp xúc với MN tại N. Qua N vẽ tia Nx vuông góc với MP cắt (P) tại điểm thứ hai Q ($Q \neq N$). Chứng minh rằng MQ là tiếp tuyến của (P) và MNQ là tam giác đều.

Lời giải.

Tam giác vuông MNP có $\sin\widehat{NMP} = \dfrac{NP}{MP} = \dfrac{1}{2}$
$\Rightarrow \widehat{NMP} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{MNQ} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.
Ta có hai điểm N, Q đối xứng với nhau qua MP nên $\widehat{MQP} = \widehat{MNP} = 90^\circ$ và $\widehat{MNQ} = \widehat{MQN}$.
Do đó, MQ là tiếp tuyến của (P) và MNQ là tam giác đều.



Ví dụ 19. Cho tam giác ABC cân tại A và đường tròn (O) có tâm O nằm trên cạnh đáy BC; (O) tiếp xúc với các cạnh AB, AC. Gọi P, Q là hai điểm lần lượt nằm trên các cạnh AB và AC. Chứng minh rằng PQ tiếp xúc với đường tròn (O) khi và chỉ khi $BP \cdot CQ = \dfrac{BC^2}{4}$.

Lời giải.

- ***Phần thuận***

  Giả sử PQ tiếp xúc (O) tại H. Ta sẽ chứng minh $BP \cdot CQ = \dfrac{BC^2}{4}$. Kí hiệu các tiếp điểm, các góc như hình vẽ. Ta có $\widehat{O_2} = \widehat{O_3}$, $\widehat{O_4} = \widehat{O_5}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) và $\widehat{O_1} = \widehat{O_6}$ (vì cùng phụ với hai góc bằng nhau). Suy ra $\widehat{O_1} + \widehat{O_2} + \widehat{O_4} = \widehat{O_3} + \widehat{O_5} + \widehat{O_6} = 180^\circ : 2 = 90^\circ$. Xét tam giác OPI vuông tại I nên $\widehat{OPI} = 90^\circ - \widehat{O_2}$; tam giác COQ có $\widehat{COQ} = \widehat{O_5} + \widehat{O_6} = 90^\circ - \widehat{O_3}$. Mà $\widehat{O_2} = \widehat{O_3}$ nên $\widehat{OPI} = \widehat{COQ}$ hay $\widehat{OPB} = \widehat{COQ}$. Do đó $\triangle BPO \equiv \triangle COQ$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BP}{CO} = \dfrac{BO}{CQ}$ hay $BP \cdot CQ = BO \cdot CO = \dfrac{BC}{2} \cdot \dfrac{BC}{2} = \dfrac{BC^2}{4}$.

- ***Phần đảo***

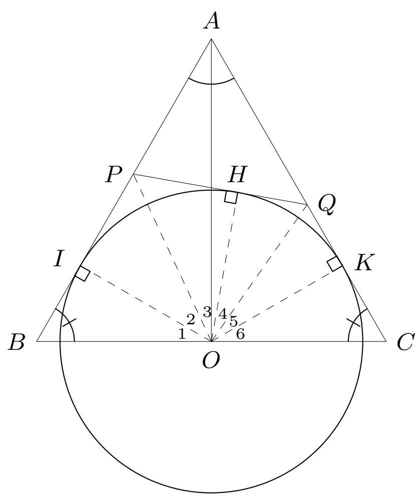
  Cho P, Q tương ứng thuộc hai cạnh AB, AC thỏa $BP \cdot CQ = \dfrac{BC^2}{4}$. Ta phải chứng minh PQ tiếp xuc với (O).

  Giả sử PQ không tiếp xúc với (O) thì ta dựng được $P'Q'$ song song với PQ và tiếp xúc với (O). Theo phần thuận ta có $BP' \cdot CQ' = \dfrac{BC^2}{4}$.

  Ta xét hai khả năng sau

  TH1. PQ cắt (O): $BP < BP'$ và $CQ < CQ'$ suy ra $BP \cdot CQ < \dfrac{BC^2}{4}$.

  TH2. PQ không cắt (O): $BP > BP'$ và $CQ > CQ'$ suy ra $BP \cdot CQ > \dfrac{BC^2}{4}$. Do đó $BP \cdot CQ \neq \dfrac{BC^2}{4}$ (mâu thuẫn với đề bài) $\Rightarrow$ điều giả sử là sai. Vậy PQ tiếp xúc với (O) khi và chỉ khi $BP \cdot CQ = \dfrac{BC^2}{4}$.



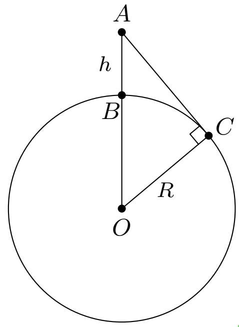
Dạng 3. Bài toán vận dụng tính chất tiếp tuyến

- Vận dụng tính chất của tiếp tuyến: Nếu đường thẳng Δ là tiếp tuyến của (O) tại A thì $\Delta \perp OA$ tại A.

Ví dụ 20. Một thuỷ thủ đang ở trên cột buồm của một con tàu, cách mặt nước biển 10 m. Biết bán kính Trái Đất là khoảng 6400 km. Tính tầm nhìn xa tối đa của thuỷ thủ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

Lời giải.

Trên hình bên, ta có điểm B biểu diễn vị trí con tàu, điểm A biểu diễn vị trí của thuỷ thủ, điểm C biểu diễn điểm xa nhất mà thuỷ thủ nhìn thấy. Khi đó độ dài đoạn thẳng AC gọi là tầm nhìn xa tối đa từ A. Đặt $h = AB, R = OB = OC$. Ta tính AC theo R và h. Do AC là tiếp tuyến với $(O; R)$ tại C nên suy ra $AC \perp OC$.

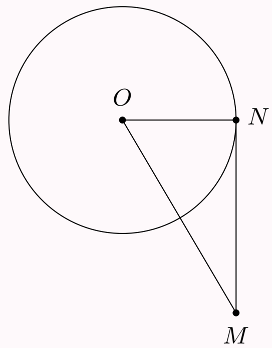


Áp dụng định lí Pythagore trong tam giác ACO vuông tại C ta có:
$AC^2 = AO^2 - OC^2 = (R+h)^2 - R^2 = 2Rh + h^2$.
Suy ra $AC = \sqrt{2Rh + h^2} = \sqrt{2 \cdot 6400 \cdot 0{,}01 + 0{,}01^2} \approx 11{,}314(\text{km})$.
Vậy tầm nhìn xa tối đa của thuỷ thủ đó là khoảng 11,314(km).

Ví dụ 21.
Cho điểm M nằm ngoài đường tròn $(O; 3\text{ cm})$ thoả mãn $OM = 5$ cm. Đường thẳng MN đi qua M và tiếp xúc với đường tròn (O) tại N.

a) Tam giác OMN có phải là tam giác vuông hay không? Vì sao?

b) Tính độ dài đoạn thẳng MN.



Lời giải.

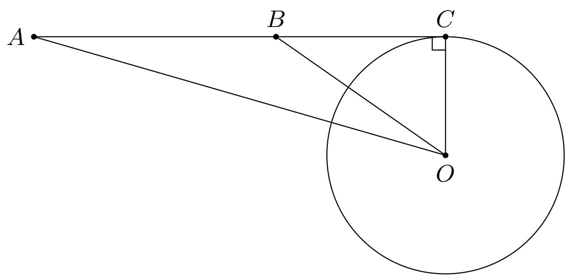
a) Vì đường thẳng MN tiếp xúc với đường tròn (O) tại N nên $ON \perp MN$.
Suy ra tam giác OMN vuông tại N.

b) Áp dụng định lí Py-ta-go cho tam giác OMN vuông tại N, ta có
$OM^2 = ON^2 + MN^2$.
Suy ra $5^2 = 3^2 + MN^2$.
Do đó $MN^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$.
Vậy $MN = \sqrt{16} = 4$ (cm).

Ví dụ 22. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng, trong đó B nằm giữa A và C. Đường tròn (O) tiếp xúc với đường thẳng AB tại điểm C. Chứng minh

$$AO^2 + BC^2 = BO^2 + AC^2.$$

Lời giải.
Vì AB tiếp xúc với (O) tại C nên $AC \perp OC$.
Khi đó áp dụng định lý Py-ta-go cho $\triangle AOC$ vuông tại C ta được
$AO^2 = AC^2 + CO^2$
Suy ra $OC^2 = AO^2 - AC^2$ (1).
Áp dụng định lý Py-ta-go cho $\triangle BOC$ vuông tại C ta được
$BO^2 = BC^2 + CO^2 \Rightarrow CO^2 = BO^2 - BC^2$ (2).
Từ (1) và (2) $\Rightarrow AO^2 - AC^2 = BO^2 - BC^2$
Vậy $AO^2 + BC^2 = BO^2 + AC^2$.



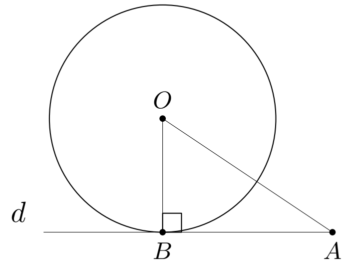
Ví dụ 23. Từ điểm A cách O một khoảng d $(d > R)$ vẽ tiếp tuyến AB với đường tròn $(O; R)$ (B là tiếp điểm). Tính độ dài đoạn AB theo d và R.

Lời giải.

Vì AB là tiếp tuyến của (O) tại B nên $AB \perp OB$ tại B.
Áp dụng định lí Py-ta-go vào $\triangle AOB$ có

$$AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = \sqrt{d^2 - R^2}.$$

Vậy $AB = \sqrt{d^2 - R^2}$.

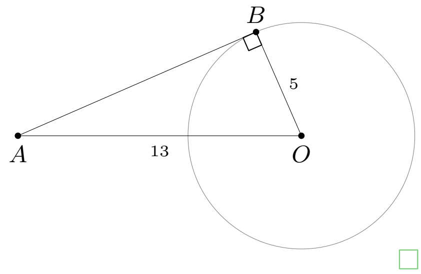


□

Ví dụ 24. Cho đường tròn tâm O, bán kính $R = 5$cm và một điểm A cách O bằng 13cm. Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (O) (B là tiếp điểm). Tính độ dài đoạn AB.

Lời giải.

Ta có AB là tiếp tuyến của (O) nên $AB \perp OB$. Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác vuông ABO, ta có
$AB^2 = OA^2 - OB^2 = 13^2 - 5^2 = 144 \Rightarrow AB = 12$.
Vậy $AB = 12$cm.



□

Ví dụ 25. Cho đường tròn $(O; 5\text{ cm})$ và dây $AB = 8$ cm. Một tiếp tuyến của (O) song song với AB cắt tia OA tại E, cắt tia OB tại F. Tính độ dài đoạn EF.

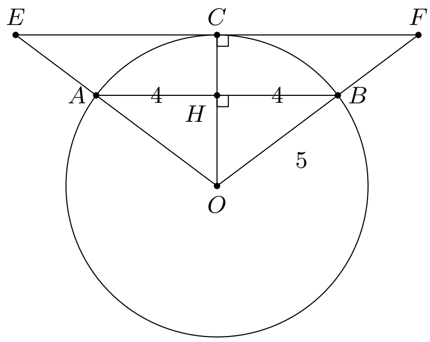
Lời giải.

Gọi C là tiếp điểm của tiếp tuyến EF với (O), H là giao điểm của OC với AB. Ta có $OC \perp EF$ tại C mà $AB \perp EF$ nên $OC \perp AB$ tại H.
$\Rightarrow HA = HB = \dfrac{1}{2}AB = 4$ cm.
Áp dụng định lí Py-ta-go vào $\triangle OHA$. ta có

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ cm}.$$

Ta có $AB \parallel EF$ nên theo định lí Ta-lét có

$$\frac{AB}{EF} = \frac{OB}{OF} = \frac{OH}{OC} = \frac{3}{5} \Rightarrow EF = \frac{5}{3} \cdot AB = \frac{5 \cdot 8}{3} = \frac{40}{3} \text{ cm}.$$

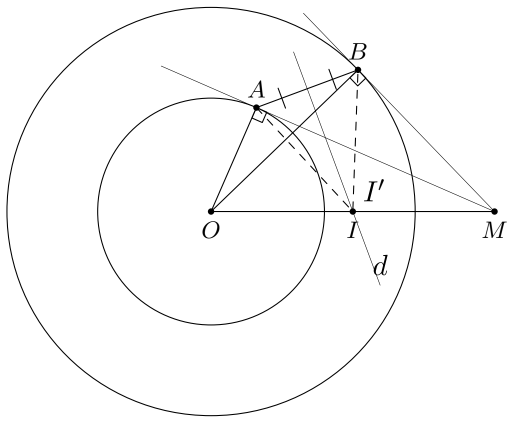


□

Ví dụ 26. Cho hai đường tròn đồng tâm $(O; R_1)$ và $(O; R_2)$ $(0 < R_1 < R_2)$. Từ điểm M nằm ngoài $(O; R_2)$, ta vẽ MA là tiếp tuyến của $(O; R_1)$, MB là tiếp tuyến của $(O; R_2)$ (với A, B là các tiếp điểm). Đường trung trực của đoạn AB cắt OM tại I. Tính tỉ số $\dfrac{MI}{MO}$.

Lời giải.

Gọi I' là trung điểm của OM. Vì MA là tiếp tuyến của $(O; R_1)$ nên $MA \perp OA$ tại A hay $\widehat{OAM} = 90^\circ$. Xét $\triangle OAM$ có $\widehat{OAM} = 90^\circ$, AI' là trung tuyến ứng với cạnh huyền MO nên $AI' = \dfrac{1}{2}OM$.
Tương tự ta có $BI' = \dfrac{1}{2}OM \Rightarrow AI' = BI' = \dfrac{1}{2}OM \Rightarrow I'$ thuộc đường trung trực d của đoạn $AB \Rightarrow I' \equiv I \Rightarrow \dfrac{MI}{MO} = \dfrac{MI'}{MO} = \dfrac{1}{2}$.



Ví dụ 27. Cho đường tròn (O), bán kính $R = 3$, dây MN vuông góc với bán kính OP tại trung điểm của OP. Tiếp tuyến tại M của (O) cắt tia OP tại I. Tính độ dài MI.

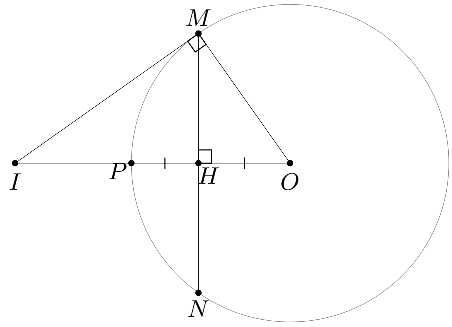
Lời giải.

Gọi H là giao điểm của MN và OP.

Ta có $MH = \sqrt{OM^2 - OH^2} = \sqrt{3^2 - \left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Do đó, $\sin \widehat{OMH} = \dfrac{OH}{OM} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{OMH} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{MIO} = 30^\circ$.

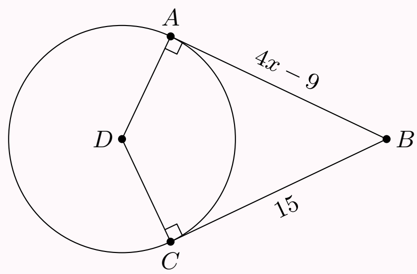
Từ đó suy ra $MI = 2MH = 3\sqrt{3}$.



Dạng 4. Bài toán vận dụng tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

Ví dụ 28.

Tìm giá trị của x.



Lời giải.

Vì AB và BC là hai tiếp tuyến của (O) nên $AB = BC$.

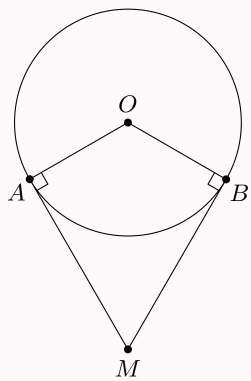
Suy ra $4x - 9 = 15 \Rightarrow 4x = 24 \Rightarrow x = 6$

Ví dụ 29.

Bánh đà của một động cơ được thiết kế có dạng là một đường tròn tâm O, bán kính 15 cm được kéo bởi một dây curoa. Trục của mô tơ truyền lực được biểu diễn bởi điểm M. Cho biết khoảng cách OM là 35 cm.

a) Tính độ dài của hai đoạn dây curoa MA và MB (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

b) Tính số đo $\widehat{AMB}$ tạo bởi hai tiếp tuyến AM, BM và số đo $\widehat{AOB}$ (kết quả làm tròn đến phút).



Lời giải.

a) Xét $\triangle AMO$ vuông tại A ta có:
$MA^2 + OA^2 = OM^2$(định lí Pythagore)
$\Rightarrow MA^2 + 15^2 = 35^2 \Rightarrow MA^2 + 225 = 1225 \Rightarrow MA^2 = 1000 \Rightarrow MA = 10\sqrt{10} \Rightarrow MA = 31{,}2$(cm)
Mà $MA = MB$ nên $MB = 31{,}2$(cm).

b) Xét $\triangle AMO$ vuông tại E ta có:

$\sin\widehat{OMA} = \dfrac{OA}{OM}$(TSLG) $\Rightarrow \sin\widehat{OMA} = \dfrac{15}{35} = \dfrac{3}{7} \Rightarrow \widehat{OMA} \approx 25°23'$
Xét (O), ta có:
Hai tiếp tuyến MA, MB cắt nhau tại M (gt)
$\Rightarrow MO$ là tia phân giác của $\widehat{AMB}$
$\Rightarrow \widehat{AMB} = 2\widehat{OMA} = 2 \cdot 25°23' = 50°46'$.

□

Ví dụ 30. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn $(O; R)$. Vẽ đường tròn đường kính AO cắt đường tròn $(O; R)$ tại hai điểm B và C.

a) Chứng minh AB và AC là các tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$.

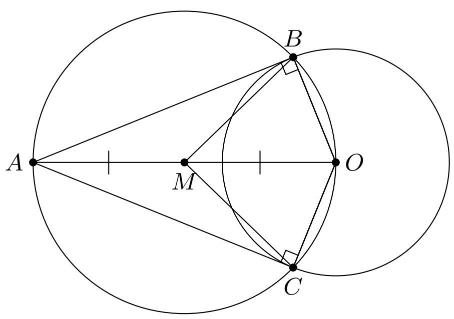
b) Chứng minh $AB = AC$.

c) Xác định tia phân giác của $\widehat{BAC}$ và $\widehat{BOC}$.

Lời giải.

a) Gọi M là trung điểm của AO.

Ta có M là tâm của đường tròn đường kính AO, suy ra $MB = MC = \dfrac{AO}{2}$.
Do đó, tam giác ABO vuông tại B và tam giác ACO vuông tại C.
Vì AB vuông góc với bán kính OB tại B và AC vuông góc với bán kính OC tại C nên AB và AC là hai tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và C.



b) Giao điểm A của hai tiếp tuyến AB, AC cách đều hai tiếp điểm B và C nên $AB = AC$.

c) Hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại A, suy ra tia AO là phân giác của $\widehat{BAC}$ và tia OA là phân giác của $\widehat{BOC}$.

□

Ví dụ 31. Cho điểm M nằm ngoài đường tròn $(I; 6\text{cm})$ và ME, MF là hai tiếp tuyến của đường tròn này tại E và F. Cho biết $\widehat{EMF} = 60°$.

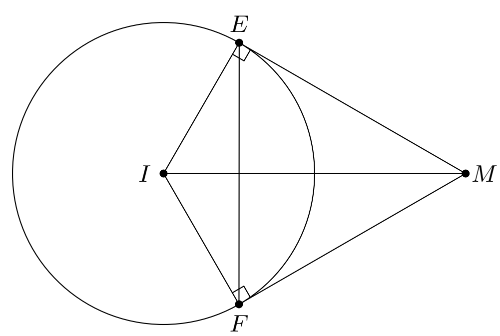
a) Tính số đo $\widehat{EMI}$ và $\widehat{EIF}$.

b) Tính độ dài MI.

Lời giải.

a) Xét (O), ta có: Hai tiếp tuyến ME, MF cắt nhau tại $M(gt)$

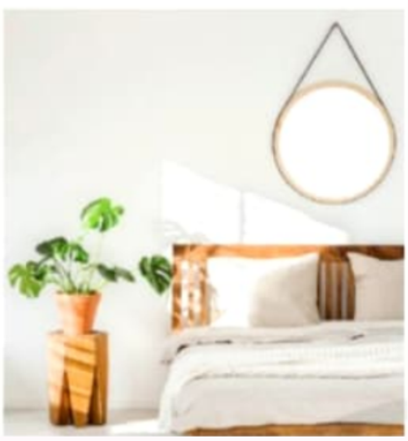
$\Rightarrow MI$ là tia phân giác của $\widehat{EMF} \Rightarrow \widehat{EMI} = \dfrac{\widehat{EMF}}{2} = \dfrac{60°}{2} = 30°$. Xét tứ giác $IEMF$, ta có:
$\widehat{EIF} + \widehat{FM} + \widehat{EMF} + \widehat{MEI} = 360°$(tổng 4 góc trong một tứ giác)
$\Rightarrow \widehat{EIF} + 90° + 60° + 90° = 360°$
$\Rightarrow \widehat{EIF} = 120°$



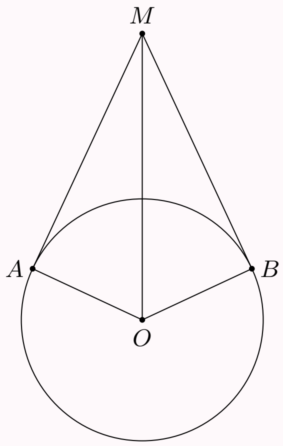
b) Xét $\triangle EMI$ vuông tại E ta có:
$\sin\widehat{EMI} = \dfrac{IE}{IM}$(TSLG)
$\Rightarrow \sin 30° = \dfrac{6}{IM} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{6}{IM} \Rightarrow IM = 12$ (cm).

□

Ví dụ 32. Một chiếc gương có dạng hình tròn được treo bằng hai sợi dây không dãn, mỗi sợi dây đều tiếp xúc với gương (Hình a). Biết tổng độ dài hai dây treo là 6 dm và góc giữa hai sợi dây là 60°. Hỏi bán kính của chiếc gương là bao nhiêu decimét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Hình a



Hình b

Lời giải.

Giả sử chiếc gương được minh hoạ bởi đường tròn (O), hai sợi dây treo là hai tiếp tuyến cắt nhau MA, MB của đường tròn (O), trong đó $MA + MB = 6$ dm và $\widehat{AMB} = 60^\circ$ (Hình b).

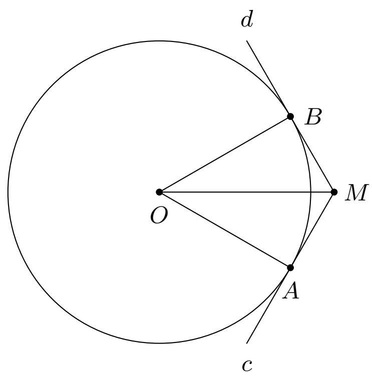
Vì MA, MB là các tiếp tuyến của (O) nên $MA = MB$ và $\widehat{OMA} = \widehat{OMB}$, suy ra $MA = 3$dm và $\widehat{OMA} = 30^\circ$.

Xét tam giác OMA vuông tại A, ta có $OA = MA \cdot \tan\widehat{OMA} = 3 \cdot \tan 30^\circ = 3 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}73$ (dm).

Vậy bán kính của chiếc gương là khoảng 1,73 dm. □

Ví dụ 33. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M nằm ngoài đường tròn. Hai đường thẳng c, d qua M lần lượt tiếp xúc với (O) tại A, B. Biết $\widehat{AMB} = 120^\circ$. Chứng minh $AB = R$.

Lời giải.



Đường thẳng c, d qua M lần lượt tiếp xúc với (O) tại A, B nên $MB \perp OB$ và $MA \perp OA$.

Đường thẳng c, d là hai tiếp tuyến cắt nhau tại M.

Khi đó OM là tia phân giác của góc $\widehat{AOB}$

MO là tia phân giác của góc $\widehat{AMB} \Rightarrow \widehat{BMO} = \widehat{AMO} = 60^\circ$.

Xét $\triangle OMB$ có $\widehat{BOM} + \widehat{OMB} + \widehat{MBO} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{OBM} = 30^\circ$.

OM là tia phân giác của góc $\widehat{AOB}$ nên $\widehat{AOM} = \widehat{MOB} = 30^\circ$.

Xét $\triangle AOB$ có $\begin{cases} OA = OB \\ \widehat{AOB} = 60^\circ \end{cases}$ suy ra $\triangle AOB$ đều.

Do đó $AB = R$. □

Ví dụ 34. Cho hai tiếp tuyến PA và PB của đường tròn $(O; R)$ (A và B là hai tiếp điểm).

a) Chứng minh rằng $OP \perp AB$;

b) Tính PA và PB, biết $R = 2$ cm và $PO = 4$ cm.

Lời giải.

a) Do OA và OB là hai tiếp tuyến cắt nhau của (O) nên ta có OP là tia phân giác của góc AOB. Trong tam giác cân AOB $(OA = OB)$, đường phân giác OP cũng là đường cao nên ta có $OP \perp AB$.

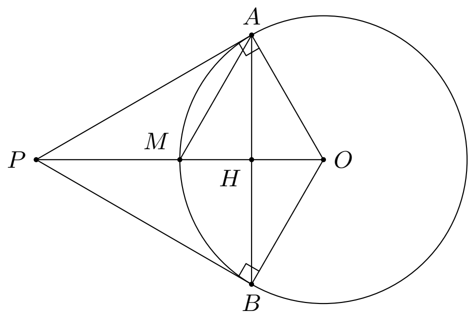
b) Tam giác OAP có $\widehat{OAP} = 90^\circ$ (do PA tiếp xúc với đường tròn (O) tại A) và $OA = R = 2$ cm và $OP = 4$ cm (giả thiết).

Áp dụng định lí Pythagore vào tam giác vuông OAP ta có

$$AP^2 + OA^2 = OP^2.$$

Từ đó suy ra $AP^2 = OP^2 - OA^2 = 4^2 - 2^2 = 12$.
Vậy $AP = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ (cm).
Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta cũng có

$$BP = AP = 2\sqrt{3} \text{ cm}.$$



□

Dạng 5. Chứng minh một số tính chất và hệ thức hình học

- Chứng minh hai đường thẳng vuông góc nhờ tính chất của tiếp tuyến.
- Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau, hai góc bằng nhau nhờ tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau.
- Áp dụng định lý Py-ta-go, hệ thức lượng trong tam giác vuông để chứng minh đẳng thức về đoạn thẳng, diện tích, $\cdots$

Ví dụ 35. Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm A nằm ngoài (O). Từ A kẻ các tiếp tuyến AB, AC với (O). Vẽ đường kính CD. Chứng minh rằng

a) $OA \perp BC$; b) $BD \parallel OA$.

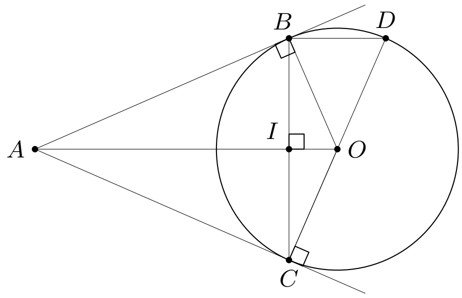
Lời giải.

a) Ta có AB, AC là tiếp tuyến của (O) nên $AB = AC$. (1)

B, C thuộc (O) nên $OB = OC = R$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra A và O cách đều hai đầu đoạn thẳng BC nên AO là đường trung trực của đoạn BC. Suy ra $OA \perp BC$.

b) Gọi I là giao điểm của OA và BC, vì OA là trung trực của BC nên I là trung điểm của BC. Do đó OI là đường trung bình của tam giác BCD. Suy ra $BD \parallel OI$ hay $OA \parallel BD$. (có thể chứng minh bằng cách chỉ ra BD, OA cùng vuông góc với BC).

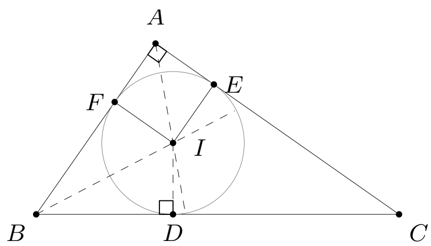


□

Ví dụ 36. Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc cạnh BC tại D. Chứng minh rằng $S_{\triangle ABC} = BD \cdot DC$.

Lời giải.

- Đặt $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC (I là giao điểm của ba đường phân giác trong của tam giác ABC). Gọi E, F là các điểm tiếp xúc của (I) với AC, AB. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có $BD = BF$, $CD = CE$, $AE = AF$.



- Mặt khác, ta lại có

$$\begin{aligned} BD + BF &= AB + BC - (AF + CD) \Leftrightarrow 2BD = BA + BC - (AE + CE) \\ &\Leftrightarrow 2BD = c + a - b \Leftrightarrow BD = \frac{a + c - b}{2} = \frac{a - (b - c)}{2} \end{aligned}$$

- Tương tự, ta co $DC = \dfrac{a + (b - c)}{2}$.

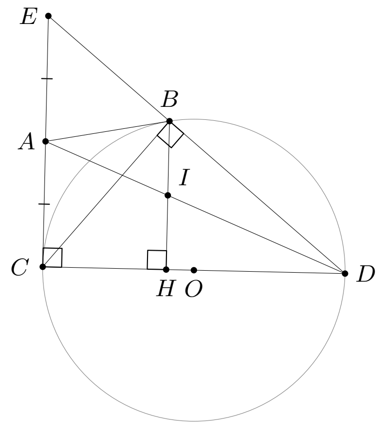
- Do đó

$$\begin{aligned} BD \cdot DC &= \frac{a-(b-c)}{2} \cdot \\ \Leftrightarrow \frac{a+(b-c)}{2} &= \frac{a^2-(b-c)^2}{4} \\ &= \frac{\left[a^2-(b^2+c^2)\right]+2bc}{4} = \frac{2bc}{4} = \frac{bc}{2} (\text{ vì } a^2=b^2+c^2) = S_{\triangle ABC} \end{aligned}$$

□

Ví dụ 37. Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là chân đường vuông góc vẽ từ B xuống đường kính CD của (O). Chứng minh rằng $IB = IH$ với I là giao điểm của AD và BH.

Lời giải.



- Gọi E là giao điểm của CA và DB. Vì AB, AC là các tiếp tuyến của (O) nên ta có $AB = AC$, suy ra tam giác ABC cân tại $A \Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{ABC}$.
- Vì B thuộc đường tròn đường kính CD nên $\widehat{CBD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CBE} = 90^\circ$.
- Do đó $\widehat{AEB} + \widehat{BCA} = \widehat{ABE} + \widehat{ABC} = 90^\circ$. Mà $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$ nên $\widehat{AEB} = \widehat{ABE} \Rightarrow$ tam giác ABE cân tại $A \Rightarrow AE = AB \Rightarrow AB = AC = AE$.
- Vì AC là tiếp tuyến của (O) nên $AC \perp CD \Rightarrow AC \parallel BH$ (vì cùng vuông góc với CD).

  Xét tam giác ACD có $IH \parallel AC$ nên $\dfrac{IH}{AC} = \dfrac{DI}{DA}$. (1)

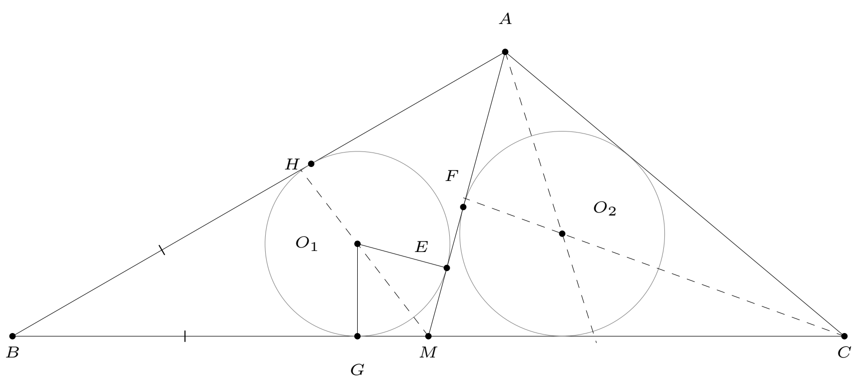
  Xét tam giác ADE có $IB \parallel AE$ nên $\dfrac{IB}{AE} = \dfrac{DI}{DA}$. (2)
- Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{IH}{AC} = \dfrac{IB}{AE} \Rightarrow IH = IB$ (vì $AC = AE$).

□

Ví dụ 38. Cho tam giác ABC có $AB > AC$, $\widehat{A} > 90^\circ$; trung tuyến AM. Các đường tròn nội tiếp tam giác ABM và tam giác ACM tiếp xúc với AM lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng

a) $ME = \dfrac{MA + MB - AB}{2}$;   b) $EF = \dfrac{AB - AC}{2}$.

Lời giải.



a) Gọi G, H là tiếp điểm của BM, BA với (O_1) (đường tròn nội tiếp tam giác ABM). Vì MG, ME là hai tiếp tuyến của (O_1) nên $MG = ME$.

Tương tự, ta có $AH = AE$ và $BH = BG$. Ta có

$$ME = MA - AE = MA - AH;$$

$$ME = MG = MB - BG = MB - BH$$

$$\Rightarrow 2ME = ME + MG = MA + MB - (AH + BH) = MA + MB - AB$$

$$\Rightarrow ME = \frac{MA + MB - AB}{2}$$

.

b) Tương tự câu trên, ta có $MF = \dfrac{MA + MC - AC}{2}$

$\Rightarrow EF = MF - ME = \dfrac{MA + MC - AC}{2} - \dfrac{MA + MB - AB}{2} = \dfrac{AB - AC}{2}$.

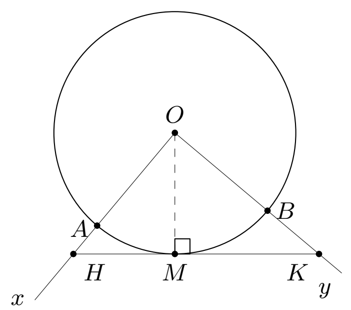
□

Dạng 6. * Một số bài toán liên quan đến cực trị hình học

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng, trung bình nhân (bất đẳng thức Cô-si):
Với mọi a, b không âm, ta có $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (dấu $'' ='' $ xảy ra khi $a = b$). Hoặc $a \cdot b \leq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ (dấu $'' ='' $ xảy ra khi $a = b$).

Ví dụ 39. Cho đường tròn $(O; R)$ và góc vuông Oxy. Tia Ox cắt (O) tại A, tia Oy cắt (O) tại B. Lấy điểm M trên cung nhỏ AB, vẽ tiếp tuyến tại M với (O). Tiếp tuyến này cắt Ox, Oy lần lượt tịa H và K. Xác định vị trí của M để độ dài đoạn HK nhỏ nhất.

Lời giải.

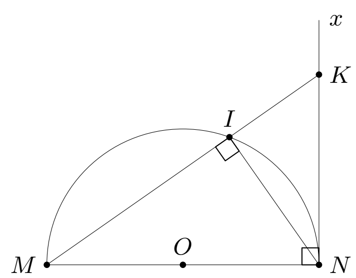


Ta có HK là tiếp tuyến của (O) tại M nên $HK \perp OM$ tại M. Áp dụng hệ thức $a' \cdot b' = h^2$ vào tam giác vuông HOK, ta có $HM \cdot MK = R^2$. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có $HK = HM + MK \geq \sqrt{HM \cdot MK} = 2\sqrt{R^2} = 2R$.
Dấu $'' ='' $ xảy ra khi $HM = MK \Leftrightarrow OM$ vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến của tam giác $OHK \Leftrightarrow OM$ là đường phân giác của góc xOy.
Vậy nếu M trên cung nhỏ AB sao cho OM là đường phân giác của góc AOB thì HK đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2R$.

□

Ví dụ 40. Cho nửa đường tròn $(O; R)$, đường kính MN. Vẽ tiếp tuyến Nx tại N của (O). Gọi K là một điểm tùy ý trên tia Nx, nối MK cắt (O) tại I. Tìm giá trị nhỏ nhất của $(2MI + MK)$.

Lời giải.

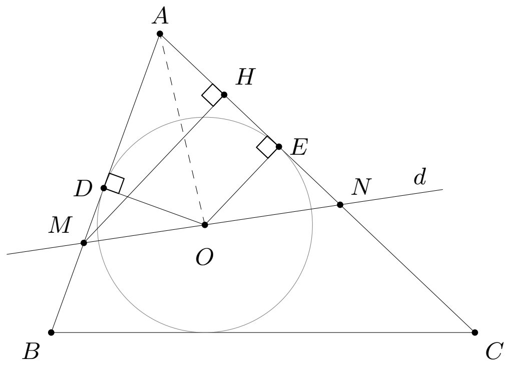


Vì Nx là tia tiếp tuyến của (O) nên $Nx \perp MN$ tại $N \Rightarrow \widehat{MNK} = 90^\circ$. Vì I thuộc đường tròn đường kính MN nên $\widehat{MIN} = 90^\circ$ hay $NI \perp MK$ tại I. Áp dụng hệ thức $b' \cdot a = b^2$ vào tam giác vuông MNK, ta có $MI \cdot MK = MN^2 = (2R)^2 = 4R^2$. Áp dụng bất đẳng thức Co-si, ta có $2MI + MK \geq 2\sqrt{MI \cdot MK} = 2\sqrt{2 \cdot 4R^2} = 4\sqrt{2}R$.
Dấu $'' ='' $ xảy ra $\Leftrightarrow 2MI = MK \Leftrightarrow MI = IK \Leftrightarrow NK = 2R$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của $(2MI + MK)$ bằng $4\sqrt{2}R$ khi $NK = 3R$.

□

Ví dụ 41. Cho đường tròn cố định tâm O, bán kính $R = 1$cm. Tam giác ABC thay đổi nhưng luôn ngoại tiếp $(O; 1\text{cm})$. Một đường thẳng đi qua tâm O cắt các đoạn AB, AC lần lượt tại M, N. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AMN.

Lời giải.



Giả sử (O) tiếp xúc với AB, AC lần lượt tại D và $E \Rightarrow OD \perp AB$, $OE \perp AN$ và $OD = OE = 1\text{cm}$ (tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow S_{OAM} = \frac{1}{2}OD \cdot AM = \frac{1}{2}AM$; $S_{AON} = \frac{1}{2}OE \cdot AN = \frac{1}{2}AN$

$\Rightarrow S_{AMN} = S_{OAM} + S_{AON} = \frac{1}{2}(AM + AN)$.

Vẽ $MH \perp AC$ tại $H \Rightarrow MH \leq MA$ (tính chất đường xiên và đường vuông góc) và $S_{AMN} = \frac{1}{2}MH \cdot AN$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$S_{AMN} = \frac{AM + AN}{2} \geq \sqrt{AM \cdot AN}\sqrt{MH \cdot AN} = \sqrt{2S_{AMN}}$$

$$\Leftrightarrow S^2_{AMN} \geq 2S_{AMN} \Leftrightarrow S_{AMN} \geq 2$$

(vì $S_{AMN} > 0$).

Dấu $''=''$ xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} AM = AN \\ AM = MH \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d \perp OA \text{ tại } O \\ \widehat{BAC} = 90^\circ. \end{cases}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AMN là 2cm^2 đạt được khi $\widehat{BAC} = 90^\circ$ và $d \perp OA$ tại O (hay $MN \perp OA$ tại O).

□

Người ta còn sử dụng một số bất đẳng thức đại số khác để giải bài toán cực trị hình học, ví dụ như

a) $(ax + by) \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$.

b) $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$ (*với* $x, y > 0$).

c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$; $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$ (*với* $x, y, z > 0$).

C BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Bạn Thanh cắt 4 hình tròn bằng giấy có bán kính lần lượt là 4 cm, 6 cm, 7 cm và 8 cm để dán trang trí trên một mảnh giấy, trên đó có vẽ trước hai đường thẳng a và b. Biết rằng a và b là hai đường thẳng song song với nhau và cách nhau một khoảng 6 cm (nghĩa là mọi điểm trên đường thẳng b đều cách a một khoảng 6 cm). Hỏi nếu bạn Thanh dán sao cho tâm của cả 4 hình tròn đều nằm trên đường thẳng b thì hình nào đè lên đường thẳng a, hình nào không đè lên đường thẳng a?

Lời giải.

Vì a và b là hai đường thẳng song song với nhau và cách nhau một khoảng 6 cm nên khi bạn Thanh dán sao cho tâm của cả 4 hình tròn đều nằm trên đường thẳng b thì khoảng cách từ các tâm đường tròn đến đường thẳng a đều bằng 6 cm.

Vì $d > R$ $(6 > 4)$ nên đường tròn có bán kính là 4 cm không đè lên đường thẳng a.

Vì $d = R$ $(6 = 6)$ nên đường tròn có bán kính là 6 cm tiếp xúc với đường thẳng a.

Vì $d < R$ $(6 < 7)$ nên đường tròn có bán kính là 7 cm đè lên đường thẳng a. Vì $d < R$ $(6 < 8)$ nên đường tròn có bán kính là 8 cm đè lên đường thẳng a.

□

Bài 2. Trên mặt phẳng, một vật nhỏ chuyển động trên đường tròn tâm O bán kính 2 m, một vật nhỏ khác chuyển động trên đường thẳng a sao cho khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a bằng 3 m. Hai vật nhỏ có bao giờ gặp nhau không?

Lời giải.

Vì khoảng cách từ tâm O đường tròn đến đường thẳng a bằng 3 m luôn lớn hơn bán kính của đường tròn là 2

m. Nên hai quỹ đạo chuyển động của 2 vật này không thể giao nhau. Suy ra hai vật nhỏ này không bao giờ gặp nhau. □

Bài 3. Cho bốn điểm O, M, N, P cùng nằm trên một đường thẳng sao cho điểm M nằm giữa hai điểm O và N; điểm N nằm giữa hai điểm M và P. Gọi a, b, c lần lượt là các đường thẳng đi qua M, N, P và vuông góc với đường thẳng OP. Xác định vị trí tương đối của mỗi đường thẳng a, b, c và đường tròn $(O; ON)$.

Lời giải.

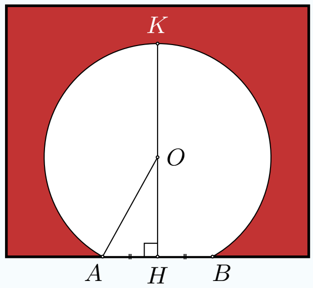
Xét $(O; ON)$ có bán kính $R = ON$.

- M nằm giữa O và N nên $OM < ON$ hay $OM < R$ suy ra đường thẳng a cắt đường tròn $(O; ON)$.
- Hiển nhiên N nằm trên đường tròn $(O; ON)$ cho nên đường thẳng b tiếp xúc đường tròn $(O; ON)$.
- N nằm giữa M và P nên $OM < ON < OP$ hay $R < OP$ suy ra đường thẳng c không cắt đường tròn $(O; ON)$.

□

Bài 4.

Trong hình bên, mép ngoài cửa ra vào có dạng một phần của đường tròn bán kính 1,6 m. Hãy tính chiều cao HK của cửa đó, biết $AH = 0{,}9$ m.



Lời giải.

Áp dụng pytago vào tam giác vuông $\triangle HAO$.

Ta có $OH^2 = OA^2 - AH^2 = 1{,}6^2 - 0{,}9^2 = \dfrac{7}{4}$.

Nên $OH = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$ m.

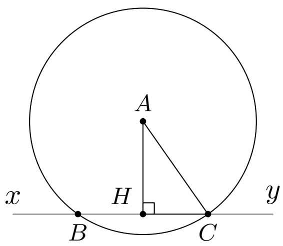
Từ đó suy ra $HK = KO + OH = 1{,}6 + \dfrac{\sqrt{7}}{2} = \dfrac{16 + 5\sqrt{7}}{10} \approx 2{,}92$ m □

Bài 5. Cho điểm A cách đường thẳng xy một đoạn 12cm. Vẽ đường tròn $(A; 13\text{cm})$. Chứng minh rằng xy cắt $(A; 13\text{cm})$ tại hai điểm phân biệt B và C. Tính độ dại đoạn BC.

Lời giải.

Kẻ $AH \perp xy$ tại H. Vì $AH = 12\text{cm}(gt) < 13\text{cm} = R$ nên đường thẳng xy cắt đường tròn $(A; 13\text{cm})$ tại hai điểm phân biệt B và C. Vì $AH \perp BC$ tại H nên $BH = HC = \dfrac{1}{2}BC$.

Mặt khác $HC = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5\text{cm} \Rightarrow BC = 10\text{cm}$.

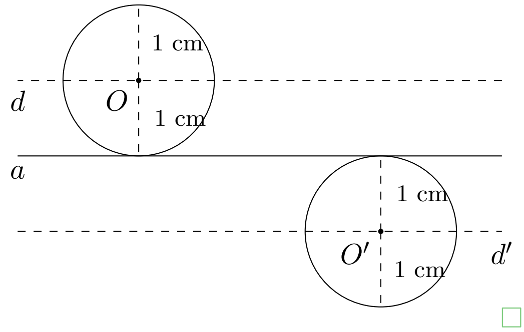


□

Bài 6. Cho trước đường thẳng a. Tâm O của tất cả các đường tròn có đường kính 2cm và tiếp xúc với đường thẳng a nằm trên đường tròn nào?

Lời giải.

Đường kính bằng 2cm nên bán kính bằng 1cm. Tâm O nằm trên hai đường thẳng d và d' song song với a và cách a là 1cm.

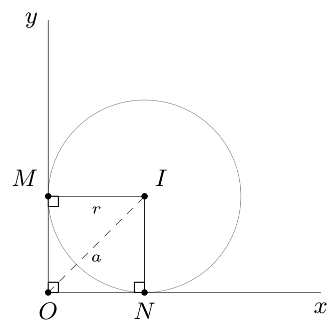


Bài 7. Cho góc vuông Oxy và đường tròn tâm I tiếp xúc với hai cạnh của góc Oxy tương ứng tại M và N. Biết $OI = a$, tính OM.

Lời giải.

Ta có Ox là tiếp tuyến của (I) nên $\widehat{M} = 90°$; Oy là tiếp tuyến của (I) nên $\widehat{N} = 90°$ và $IM = IN = r$. Do đó tứ giác $OMIN$ là hình vuông, suy ra $OM + MI = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

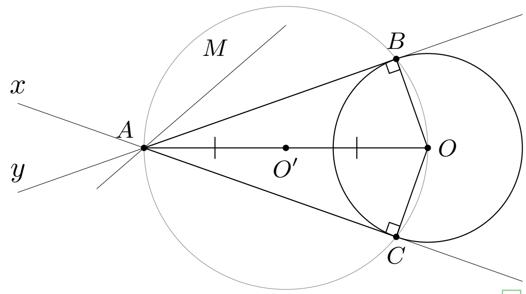
Vậy $OM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



Bài 8. Cho đường trong (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Những điểm M sao cho đường thẳng AM không có điểm chung với đường tròn (O) thì nằm ở đâu?

Lời giải.

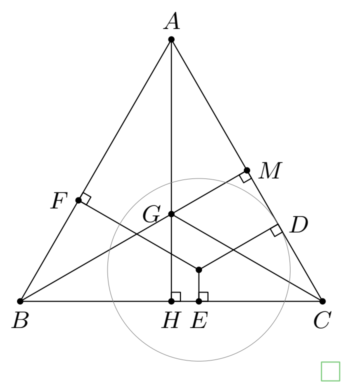
Vẽ Đường tròn đường kính OA, đường tròn này cắt (O) tại B và C. Vì B thuộc đường tròn đường kính OA nên $\widehat{ABO} = 90°$. $\Rightarrow OB \perp AB$ $\Rightarrow$ khoảng cách từ O đến đường thẳng AB bằng bán kính $R \Rightarrow AB$ tiếp xúc với (O) tại C. Do đó, M nằm trong góc $\widehat{xAB}$ và $\widehat{yAC}$ thì AM không cắt (O).



Bài 9. Cho tam giác ABC đều cạnh a. Gọi H là chân đường cao vẽ từ đỉnh A và G là trọng tâm của tam giác. Lấy một điểm I bất kì bên trong tam giác CGH rồi vẽ đường tròn (I) tiếp xúc với cạnh AC. Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng AB và BC với đường tròn (I).

Lời giải.

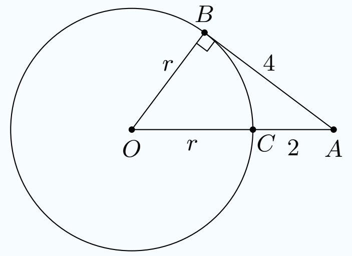
Kẻ ID, IE, IF lần lượt vuông góc với các cạnh AC, BC, AB của $\triangle ABC$. Vì I nằm trong tam giác CGH và CG là phân giác của $\widehat{BCA}$ nên $\widehat{ICE} < \widehat{ICD} \Rightarrow \sin \widehat{ICE} < \sin \widehat{ICD} \Rightarrow \dfrac{IE}{IC} < \dfrac{ID}{IC} \Rightarrow IE < ID$ nên đường thẳng BC cắt $(I; ID)$ tại hai điểm phân biệt. Tương tự, ta có $IF > ID$ nên đường thẳng AB và $(I; ID)$ không có điểm chung.



Bài 10.
Trong hình vẽ bên, AB là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B.

a) Tính bán kính r của đường tròn (O).

b) Tính chiều dài cạnh OA của tam giác ABO.



Lời giải.

a) Xét $\triangle OAB$ vuông tại B ta có $OB^2 + OA^2 = OA^2$ (định lý Pythagore).

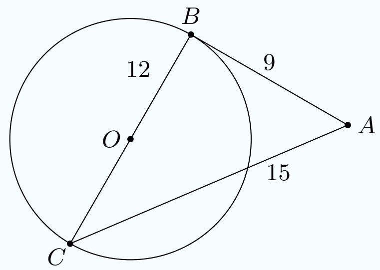
$$\begin{aligned} OB^2 + OA^2 &= OA^2 \\ r^2 + 4^2 &= (r+2)^2 \\ 4r - 12 &= 0 \\ r = 3. \end{aligned}$$

Vậy bán kính của (O) bằng 3.

b) Ta có $OA = OC + CA = 3 + 2 = 5$.

□

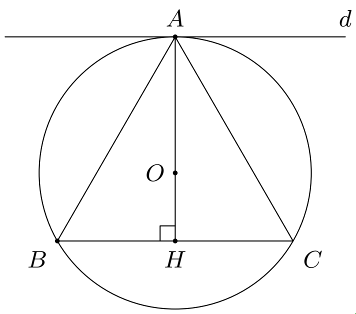
Bài 11.
Trong hình bên, $AB = 9$, $BC = 12$, $AC = 15$ và BC là đường kính của đường. Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn (O)



Lời giải.
Ta có $AB^2 = 9^2 = 81$; $AC^2 = 15^2 = 225$; $BC^2 = 12^2 = 144$.
Ta có $BC^2 = AB^2 + BC^2$ $(225 = 144 + 81)$ nên $\triangle ABC$ vuông tại B (định lý Pythagore đảo).
Ta có $\widehat{OBA} = 90^\circ$ mà $B \in (O)$ nên AB là tiếp tuyến của đường tròn (O). □

Bài 12. Cho đường tròn (O) đi qua ba đỉnh A, B và C của một tam giác cân tại A. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua A và song song với BC là một tiếp tuyến của (O).

Lời giải.
Gọi đường thẳng đi qua A và song song với BC và d.
Ta có $AB = AC$ ($\triangle ABC$ cân tại A), $OB = OC = R$.
Suy ra AO là trung trực của BC.
Do đó $AO \perp BC$, mà $BC \parallel d$ nên $AO \perp d$.
Ta có $AO \perp d$ tại A, suy ra d là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A.

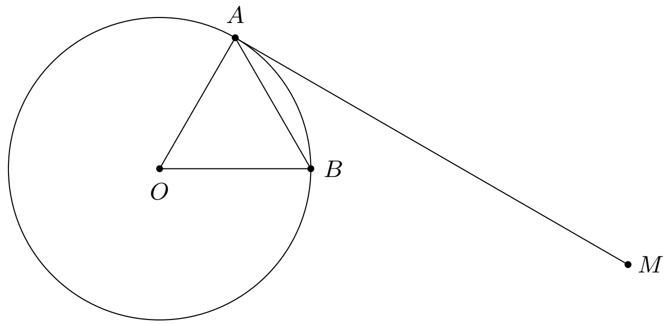


□

Bài 13. Cho đường tròn (O) và dây AB. Điểm M nằm ngoài đường tròn (O) thoả mãn điểm B nằm trong góc MAO và $\widehat{MAB} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOB}$. Chứng minh đường thẳng MA là tiếp tuyến của đường tròn (O).

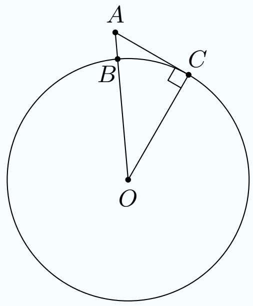
Lời giải.

$\widehat{MAB} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOB}$ suy ra $\widehat{AOB} = 2\widehat{MAB}$.
Xét $\triangle AOB$ có $OA = OB$ nên $\triangle AOB$ cân tại O.
Suy ra $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$.
Xét $\triangle AOB$ có $\widehat{AOB}\widehat{OAB} + \widehat{OBA} = 180^\circ$
Hay $2\widehat{MAB} + 2\widehat{OAB} = 180^\circ$
suy ra $2(\widehat{MAB} + \widehat{OAB}) = 180^\circ$ hay $\widehat{MAB} + \widehat{OAB} = 90^\circ$
Mà $\widehat{MAB} + \widehat{OAB} = \widehat{OAM}$.
Hay $AO \perp AM$ suy ra AM là tiếp tuyến của (O).



□

Bài 14.
Một người quan sát đặt mắt ở vị trí A có độ cao cách mực nước biển là $AB = 5$ m. Cắt bề mặt Trái Đất bởi một mặt phẳng đi qua điểm A và tâm của Trái Đất thì phần chung giữa chúng là một đường tròn lớn tâm O như hình bên. Tầm quan sát tối đa từ vị trí A là đoạn thẳng AC, trong đó C là tiếp điểm của tiếp tuyến đi qua A với đường tròn (O). Tính độ dài đoạn thẳng AC (theo đơn vị kilômét và làm tròn kết quả đến hàng phần mười), biết bán kính Trái Đất là $OB = OC \approx 6400$ (km)



Lời giải.

Vì AC là tiếp tuyến của đường tròn tại C nên $\triangle AOC$ vuông tại C.
Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác AOC vuông tại C ta được
$OA^2 = OC^2 + AC^2$
$AC^2 = OA^2 - OC^2 = 6405^2 - 6400^2 = 64025$.
Do đó $AC = \sqrt{64025} \approx 253$ (km). □

Bài 15. Cho hệ trục Oxy, điểm $A(-1; 2)$. Vẽ đường tròn tâm A, bán kính $r = \sqrt{5}$, đường tròn này cắt trục tung tại điểm N (N không trùng O). Lấy điểm $M(x; 0)$ trên trục hoành. Xác định x để MN là tiếp tuyến của $(A; r)$.

Lời giải.

Ta có $\left(A; \sqrt{5}\right)$ cắt Oy tại $N(0; 4)$.
Do đó $AN^2 = r^2 = 5$; $MN^2 = x^2 + 4^2$; $AM^2 = (x+1)^2 + 2^2$.
MN là tiếp tuyến của (A) khi $MN \perp AN \Leftrightarrow AM^2 = MN^2 + AN^2 \Leftrightarrow x = 8$. □

Bài 16. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB. Từ một điểm M trên đường tròn ta vẽ tiếp tuyến xy với nửa đường tròn. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A và B trên xy. Chứng minh rằng

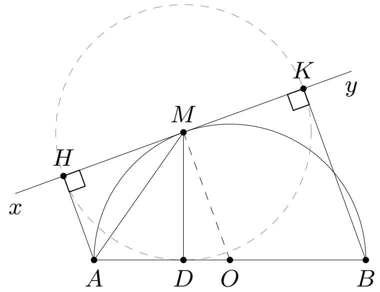
a) M là trung điểm của HK.

b) Đường tròn đường kính HK tiếp xúc với AB.

Lời giải.

a) Vì xy là tiếp tuyến nên $OM \perp xy$. Suy ra $AH \parallel BK \parallel OM$. Mà $OA = OB$ nên $MH = MK$.

b) Vẽ $MD \perp AB$, $D \in AB$, ta có $\widehat{MAH} = \widehat{AMO}$ (so le trong), mà $\widehat{AMO} = \widehat{MAO}$ nên $\widehat{MAH} = \widehat{MAO}$. $\triangle MAH = \triangle MAD$ nên $MH = MD = MK$. Do đó đường tròn đường kính HK đi qua D. Ta có $AB \perp MD$ tại D nên AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính HK.



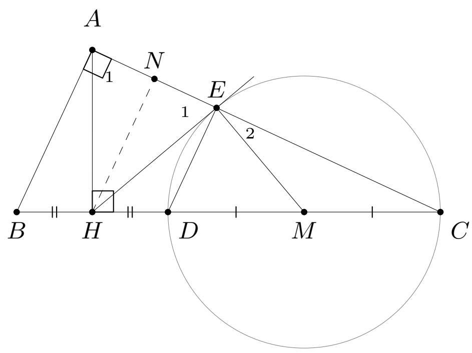
□

Bài 17. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH. Gọi D là điểm đối xứng của B qua H. Vẽ $DE \parallel AB$ (E thuộc AC). Chứng minh rằng

a) Tam giác HAE cân tại H;

b) HE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE.

Lời giải.



a) Vẽ $HN \parallel AB$. Xét hình thang $ABDE$, ta chứng minh được $NA = NE$ và $HN \perp AE$. Suy ra tam giác HAE cân tại H.

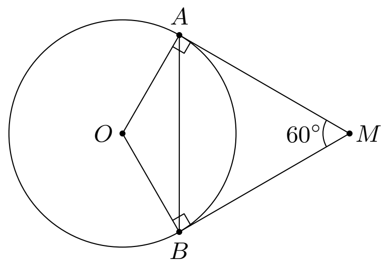
b) Gọi M là trung điểm của CD. Vì tam giác CDE vuông tại E nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE. Ta có $\widehat{E_2} = \widehat{C}$ và $\widehat{E_1} = \widehat{A_1}$ nên $\widehat{E_2} + \widehat{E_1} = \widehat{C} + \widehat{A_1} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HEM} = 90^\circ$.

□

Bài 18. Cho đường tròn (O), điểm M nằm ngoài (O) sao cho MA và MB là hai tiếp tuyến (A, B là hai tiếp điểm) thoả mãn $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Biết chu vi tam giác MAB là 18 cm, tính độ dài dây AB.

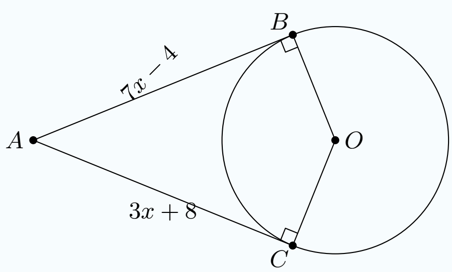
Lời giải.

Ta có $MA = MB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) mà $\widehat{AMB} = 60^\circ$ nên $\triangle AMB$ đều.
Khi đó $AB = 18 : 3 = 6$ cm.



□

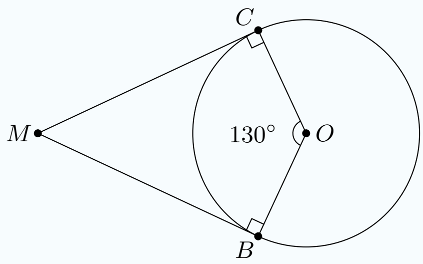
Bài 19.
Quan sát hình bên. Biết AB, AC lần lượt là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B, C. Tính giá trị của x.



Lời giải.

Ta có $AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) nên $7x - 4 = 3x + 8 \Leftrightarrow x = 3$. □

Bài 20.
Ở hình vẽ bên, MB, MC lần lượt là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B, C; $\widehat{COB} = 130^\circ$. Tính số đo $\widehat{CMB}$.

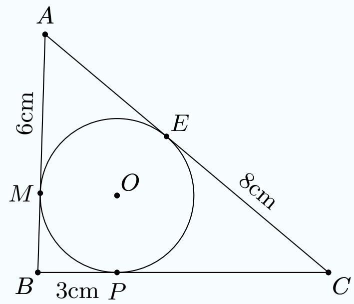


Lời giải.
Ta có $\widehat{MCO} = \widehat{MBO} = 90^\circ$ (MC, MB lần lượt là tiếp tuyến (O)).
Xét tứ giác $MBOC$ ta có

$$\begin{aligned}\widehat{M} + \widehat{B} + \widehat{O} + \widehat{C} &= 360^\circ\\ \widehat{M} + 90^\circ + 130^\circ + 90^\circ &= 360^\circ\\ \widehat{M} &= 360^\circ - 90^\circ - 130^\circ - 90^\circ\\ \widehat{M} &= 50^\circ.\end{aligned}$$

Vậy $\widehat{CMB} = 50^\circ$. □

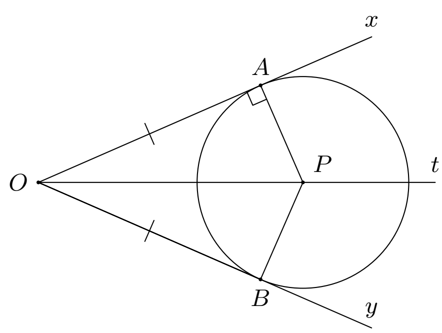
Bài 21.
Cho tam giác ABC có đường tròn (O) nằm trong và tiếp xúc với ba cạnh của tam giác. Biết $AM = 6$ cm, $BP = 3$ cm, $CE = 8$ cm. Tính chu vi tam giác ABC.



Lời giải.
Ta có BP, BM lần lượt là hai tiếp tuyến của đường tròn (O). Khi đó $BP = BM = 3$ cm (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).
Tương tự, ta có $AM = AE = 6$ cm và $CE = CP = 8$ cm.
Khi đó $AB = 9$ cm; $BC = 11$ cm và $AC = 14$ cm là độ dài ba cạnh $\triangle ABC$.
Vậy chu vi $\triangle ABC$ là $9 + 11 + 14 = 34$ cm. □

Bài 22. Cho góc xOy với đường phân giác Ot và điểm A trên cạnh Ox, điểm B trên cạnh Oy sao cho $OA = OB$. Đường thẳng qua A và vuông góc với Ox cắt Ot tại P. Chứng minh rằng OA và OB là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn $(P; PA)$.

Lời giải.
Xét $\triangle OAP$ và $\triangle OBP$ ta có:
$OA = OB$ (gt), OP cạnh chung, $\widehat{AOP} = \widehat{BOP}$ (Ot là tia phân giác góc xOy).
Suy ra $\triangle OAP = \triangle OBP$ (c.g.c), do đó $\widehat{PAO} = \widehat{PBO}$ (2 góc tương ứng).
Mà $\widehat{PAO} = 90^o$ nên $\widehat{PBO} = 90^o$.
Ta có $PA \perp AO$ tại A và $PB \perp BO$ tại B nên OA, OB là hai tiếp tuyến cắt nhau của $(P; PA)$.



□

Bài 23. Cho SA và SB là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn (O)(A và B là hai tiếp điểm). Gọi M là một điểm tuỳ ý trên cung nhỏ AB. Tiếp tuyến của (O) tại M cắt SA tại E và cắt SB tại F.

a) Chứng minh rằng chu vi của tam giác SEF bằng $SA + SB$.

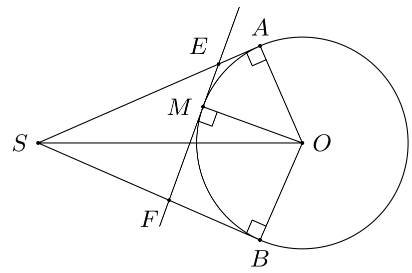
b) Giả sử M là giao điểm của đoạn SO với đường tròn (O). Chứng minh rằng $SE = SF$.

Lời giải.

a)

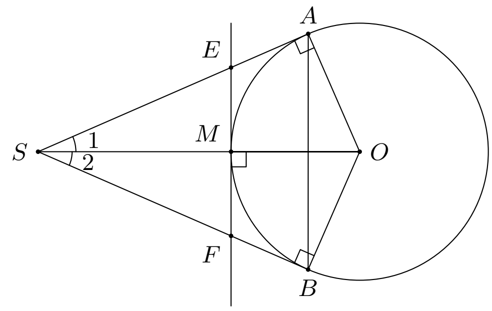
Tiếp tuyến tại A và M cắt nhau tại E nên theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $AE = EM$.
Tiếp tuyến tại B và M cắt nhau tại F nên theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $BF = FM$.
Suy ra chu vi của tam giác SEF:

$$SE+EF+FS = SE+EM+MF+FS = SE+EA+BF+FS = SA+SB.$$



b)

Tiếp tuyến tại A và B cắt nhau tại S nên theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có SO là tia phân giác của $\widehat{ASB}$.
Vì M là giao điểm của đoạn SO với đường tròn (O) nên SM là tia phân giác của $\widehat{ASB}$ hay SM là tia phân giác của $\widehat{ESF}$ ($E \in SA$, $F \in SB$).
Vì M là giao điểm của đoạn SO với đường tròn (O) nên S, O, M thẳng hàng. Mà $OM \perp EF$ suy ra $SM \perp EF$.
Xét $\triangle SEF$ có SM vừa là đường cao, vừa là tia phân giác nên suy ra $\triangle SEF$ cân tại S.
Do đó $SE = SF$.



□

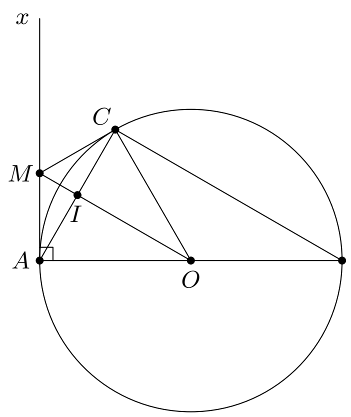
Bài 24. Cho đường tròn $(O; R)$ có đường kính AB. Vẽ dây AC sao cho $AC = R$. Gọi I là trung điểm của dây AC. Đường thẳng OI cắt tiếp tuyến Ax tại M. Chứng minh rằng

a) $\overset{\frown}{ACB}$ có số đo bằng 90°, từ đó suy ra độ dài của BC theo R;

b) OM là tia phân giác của $\widehat{COA}$;

c) MC là tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$.

Lời giải.



a) $\triangle ACO$ đều ($AC = AO = CO = R$) nên $\widehat{ACO} = \widehat{COA} = 60^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{COB} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Xét $\triangle COB$ cân tại O ta có $\widehat{OCB} = \widehat{OBC} = \dfrac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$.

Vậy $\widehat{ACB} = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại C ta có $BC = AB \cdot \cos(30) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}R$.

b) Ta có I là trung điểm AC mà $OC = OA = R$ nên OI là trung trực đoạn thẳng AC.
Do $\triangle OAC$ đều nên OI là phân giác $\widehat{COA}$.

c) Xét $\triangle AOM$ và $\triangle COM$ ta có $\begin{cases} OA = OC = R \\ \widehat{AOM} = \widehat{COM} \\ \overline{MO} \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle AOM = \triangle COM$ (c–g–c).

Khi đó $\widehat{MCO} = \widehat{MAO} = 90^\circ$ (góc tương ứng bằng nhau).
Mà $C \in (O)$ nên MC là tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$.

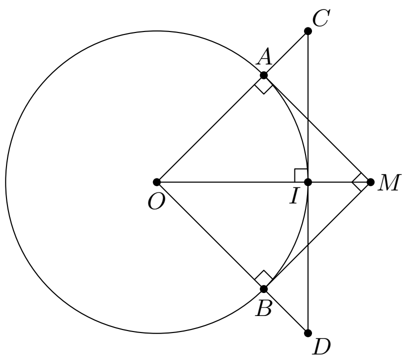
□

Bài 25. Cho đường tròn $(O; 5\text{cm})$, điểm M nằm ngoài (O) sao cho hai tiếp tuyến MA và MB (A, B là hai tiếp điểm) vuông góc với nhau tại M.

a) Tính độ dài của MA và MB.

b) Qua giao điểm I của đoạn thẳng MO và đường tròn (O), vẽ một tiếp tuyến cắt OA, OB lần lượt tại C, D. Tính độ dài của CD.

Lời giải.



a) Ta có MA; MB là tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{OAM} = \widehat{OBM} = 90^\circ$.
Mặt khác $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (gt) nên tứ giác $OABM$ là hình chữ nhật.
Do $MA = MB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) nên tứ giác $OABM$ là hình vuông.
Vậy $MA = MB = OA = OB = R = 5$ cm.

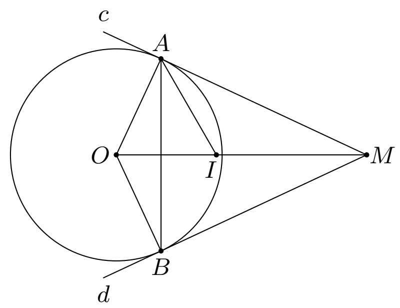
b) Ta có CD là tiếp tuyến của (O) nên $OI \perp CD$.
Xét $\triangle IOC$ và $\triangle AOM$ ta có
$\begin{cases} \widehat{I} = \widehat{A} = 90^\circ \\ IO = AO = R \\ \widehat{O} \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle IOC = \triangle AOM$ (g – c – g).
Khi đó $IO = AM = 5$ cm.
Tương tự, ta có $ID = BM = 5$ cm.
Khi đó $CD = CI + ID = 5 + 5 = 10$ cm.

□

Bài 26. Cho đường tròn (O) và điểm M nằm ngoài đường tròn. Hai đường thẳng c, d đi qua M lần lượt tiếp xúc với (O) tại A, B. Tia phân giác của góc MAB cắt MO tại I. Chứng minh điểm I cách đều ba đường thẳng MA, MB và AB.

Lời giải.

c, d đi qua M lần lượt tiếp xúc với (O) tại A, B. Do đó c, d là hai tiếp tuyến nên MO là tia phân giác của góc AMB.
Lại có AI là tia phân giác của góc MAB.
Mà ba đường phân giác của một tam giác đi qua một điểm và điểm đó cách đều ba cạnh của tam giác. Do đó I cách đều ba đường thẳng MA, MB và AB.



□

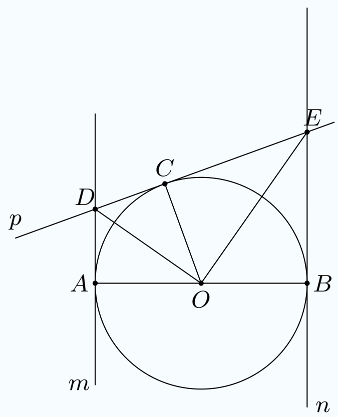
Bài 27.
Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB và các đường thẳng m, n, p lần lượt tiếp xúc với đường tròn tại A, B, C. Chứng minh:

a) $AD + BE = DE$;

b) $\widehat{COD} = \frac{1}{2}\widehat{COA}$ và $\widehat{COE} = \frac{1}{2}\widehat{COB}$;

c) Tam giác ODE vuông;

d) $\dfrac{OD \cdot OE}{DE} = R$.



Lời giải.

a) Đường thẳng m, n, p tiếp xúc với đường tròn tại các điểm A, B, C. Do đó m, n, p là các tiếp tuyến của đường tròn.
Hai tiếp tuyến p và m cắt nhau tại D, suy ra $DA = DC$ (1).
Hai tiếp tuyến n và p cắt nhau tại E, suy ra $EB = EC$ (2).
Khi đó $DE = DC + CE = DA + EB$.
Vậy $AD + BE = DE$.

b) Hai tiếp tuyến p và m cắt nhau tại D, suy ra OD là tia phân giác của góc AOC.
Hay $\widehat{COD} = \frac{1}{2}\widehat{COA}$.
Hai tiếp tuyến n và p cắt nhau tại E, suy ra OE là tia phân giác của góc BOC.
Hay $\widehat{COE} = \frac{1}{2}\widehat{COB}$.

c) Ta có $\widehat{AOD} + \widehat{DOC} + \widehat{COE} + \widehat{EOB} = 180^\circ$.
OD là tia phân giác của góc AOC
OE là tia phân giác của góc BOC
nên $2\widehat{DOC} + 2\widehat{COE} = 180^\circ$ hay $\widehat{DOE} = 90^\circ$.
Do đó tam giác ODE vuông;

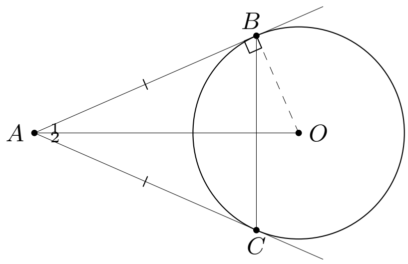
d) $\triangle DOE$ vuông tại O có OC là đường cao.
Áp dụng hệ thức lượng trong $\triangle DOE$ ta được $OD \cdot OE = OC \cdot DE$
Suy ra $OC = \dfrac{OD \cdot OE}{DE} = R$.

□

Bài 28. Cho đường tròn $(O;R)$. Từ một điểm A cách O một khoảng $2R$ ta vẽ hai tiếp tuyến AB, AC (B, C là tiếp điểm). Chứng minh rằng ABC là tam giác đều.

Lời giải.

Vì AB, AC là hai tiếp tuyến nên $AB = AC$ và $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$. Ta có $OB \perp AB$. Xét tam giác AOB vuông tại B có $OB = \dfrac{1}{2}OA$ nên $\widehat{A_1} = 30^\circ$, suy ra $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tam giác ABC cân tại A, lại có $\widehat{A} = 60^\circ$ nên là tam giác đều.

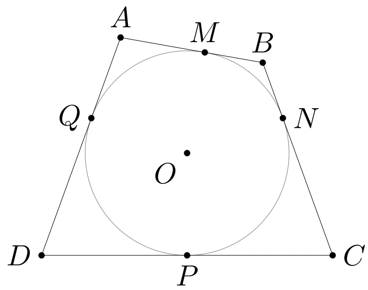


□

Bài 29. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (O) (bốn cạnh AB, BC, CD và DA đều tiếp xúc với (O)). Chứng minh rằng $AB + CD = AD + BC$.

Lời giải.

Vì tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (O) nên AB, BC, CD và DA tiếp xúc với (O). Gọi các tiếp điểm lần lượt tại M, N, P, Q. Vì AM, AQ là tiếp tuyến của (O) nên $AM = AQ$. Tương tự ta có $BM = BN$, $CN = CP$, $DP = DQ$. Suy ra $AB + CD = AM + MB + CP = DP = AQ + BN + CN + DQ = (AQ + DQ) + (BN + NC) = AD + BC$ (ĐPCM).



□

Bài 30. Cho đường tròn $(O;R)$ và đường thẳng xy không giao nhau. Trên xy lấy điểm M. Từ M vẽ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn $(O;R)$ (A, B là các tiếp điểm). Vẽ $OH \perp xy$ ($H \in xy$). Dây AB cắt OH tại E, cắt OM tại F. Chứng minh rằng

a) $OE \cdot OH = OF \cdot OM$;

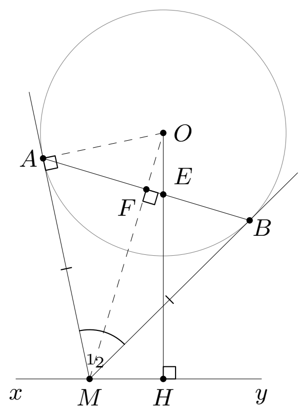
b) $OE \cdot OH = R^2$, từ đó suy ra dây AB luôn đi qua một điểm cố định là điểm E.

Lời giải.

a) Ta có $MA = MB$ và $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ suy ra $MO \perp AB$. Tam giác FOE đồng dạng với tam giác HOM nên
$$\frac{OE}{OM} = \frac{OF}{OH} \Rightarrow OE \cdot OH = OF \cdot OM. \quad (1)$$

b) Ta có $OA \perp MA$ (tính chất tiếp tuyến). Tam giác AOM đồng dạng với tam giác FAM, từ đó ta có $OA^2 = OF \cdot OM$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OE \cdot OH = OA^2 = R^2$. Suy ra $OE = \dfrac{R^2}{OH}$ (không đổi). Điểm E nằm trên tia OH cố định, mà OE không đổi nên E là điểm cố định.

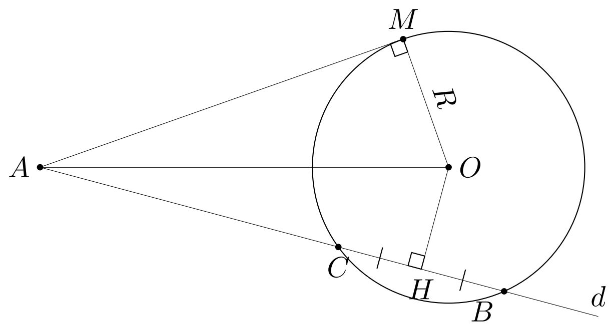


□

Bài 31. Cho $(O;R)$ và điểm A cố định nằm ngoài đường tròn. Qua A vẽ đường thẳng d cắt $(O;R)$ tại B, C ($AB \leq AC$), vẽ tiếp tuyến AM với $(O;R)$ (với M là tiếp điểm). Chứng minh rằng $AB + AC \geq 2AM$.

Lời giải.

Kẻ $OH \perp BC$ tại H nên $HB = HC$ suy ra $AB + AC = 2AH$. Ta sẽ chứng minh $AH \geq AM$. Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác vuông AOH và tam giác vuông AOM, ta có $OA^2 = OH^2 + AH^2$, $OA^2 = OM^2 + AM^2$. Vì d có điểm chung với đường tròn (O) nên $OH \leq R = OM \Rightarrow OH^2 \leq OM^2$ mà $OH^2 + AH^2 = OM^2 + AM^2$ nên $AH^2 \geq AM^2$ hay $AH \geq AM$ nên $AB + AC \geq 2AM$. Dấu $''=''$ xảy ra $\Leftrightarrow OH = R \Leftrightarrow d$ tiếp xúc với (O).



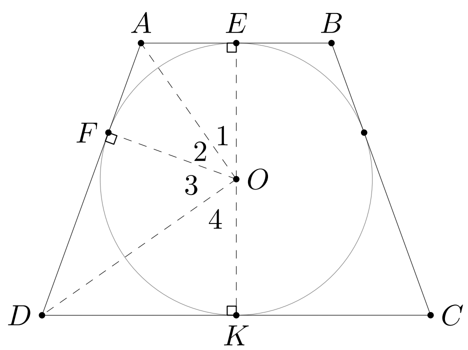
□

Bài 32. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \mathbin{/\mkern-6mu/} CD$) ngoại tiếp đường tròn $(O; R)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $AB + CD$ theo R.

Lời giải.

Dễ thấy $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$; $\widehat{O_3} = \widehat{O_4} \Rightarrow \widehat{O_2} + \widehat{O_3} = 90^\circ$. Áp dụng hệ thức $h^2 = b' \cdot c'$ vào tam giác vuông AOD, ta có $OF^2 = AF \cdot FD = AE \cdot DK = \dfrac{AB}{2} \cdot \dfrac{CD}{2}$
$\Rightarrow AB \cdot CD = 4OF^2 = 4R^2$ (vì $AF = AE = \dfrac{1}{2}AB$, $DF = DK = \dfrac{1}{2}DC$ và $OF = R$).

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có $AB + CD \geq 2\sqrt{AB \cdot CD} = 2\sqrt{4R^2} = 4R$. Dấu $''=''$ xảy ra khi và chỉ khi $AB = CD = 2R$. Vậy $AB + CD$ nhỏ nhất bằng $4R$ khi $ABCD$ là hình vuông.



□

Bài 3 GÓC Ở TÂM, GÓC NỘI TIẾP

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

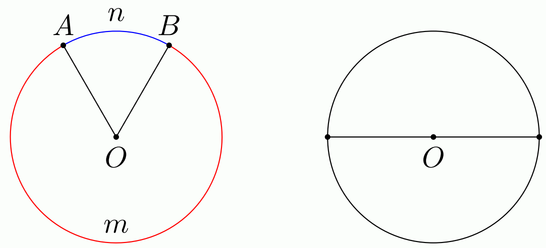
1 Góc ở tâm

Góc ở tâm là góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn.

2 Cung, số đo cung

2.1. Cung

Mỗi phần đường tròn giới hạn bởi hai điểm A, B trên đường tròn gọi là một *cung* AB, kí hiệu là $\overset{\frown}{AB}$.



- Trong hình trên, ta nói góc ở tâm $\widehat{AOB}$ chắn cung AnB hay cung AnB bị chắn bởi góc ở tâm $\widehat{AOB}$.
  Khi $0^\circ < \widehat{AOB} < 180^\circ$, để phân biệt hai cung có chung các mút là A và B, $\overset{\frown}{AnB}$ là *cung nhỏ* và $\overset{\frown}{AmB}$ là *cung lớn*.
  Khi AB là đường kính thì gọi cung AB là cung nửa đường tròn.
- Khi nói "góc ở tâm $\widehat{AOB}$ chắn cung AB" thì ta hiểu là góc ở tâm chắn cung nhỏ AB.
- Nếu EF là đường kính thì mỗi cung EF là một nửa đường tròn. Góc bẹt $\widehat{EOF}$ chắn nửa đường tròn.

2.2. Số đo cung

- Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó. Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa 360° và số đo của cung nhỏ có chung hai đầu mút với cung lớn.
- Số đo của cung nửa đường tròn bằng 180°.
- Số đo của cung AB được kí hiệu là sđ$\overset{\frown}{AB}$.

— *Cung nhỏ có số đo nhỏ hơn* 180°, *cung lớn có số đo lớn hơn* 180°. *Cung nửa đường tròn có số đo* 180°.

— *Khi hai mút của cung trùng nhau, ta có cung không với số đo* 0° *và cung cả đường tròn có số đo* 360°.

— *Một cung có số đo* n° *thường được gọi tắt là cung* n°.

— *Trong một đường tròn, hai cung được gọi là bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau.*

Trên đường tròn (O), cho B là một điểm nằm trên cung AC. Ta nói điểm B chia cung AC thành hai cung $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$. Một cách tổng quát, ta có

$$\text{sđ}\overset{\frown}{AC} = \text{sđ}\overset{\frown}{AB} + \text{sđ}\overset{\frown}{BC}.$$

3 Góc nội tiếp

3.1. Nhận biết góc nội tiếp

Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó. Cung nằm bên trong góc được gọi là *cung bị chắn.*

3.2. Số đo góc nội tiếp

Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.

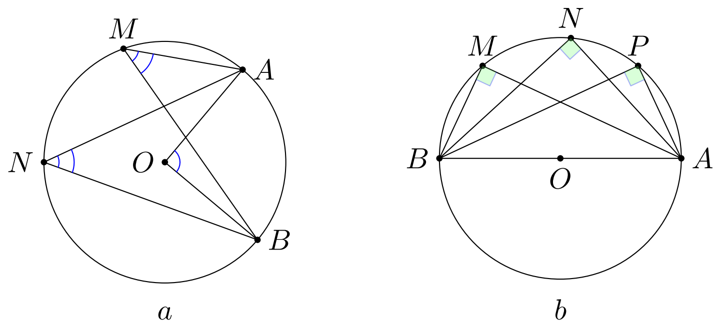
Trong một đường tròn

— *Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.*

— *Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.*

— *Góc nội tiếp nhỏ hơn hoặc bằng 90° có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.*

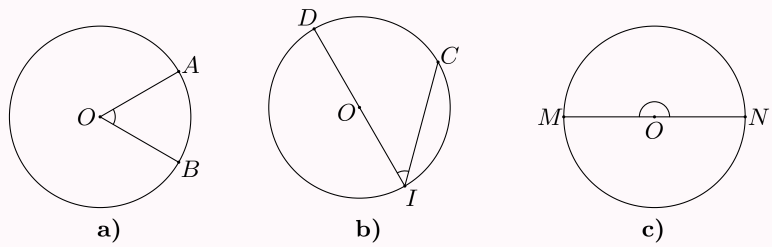
— *Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.*



CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Nhận biết góc ở tâm, góc nội tiếp, cung tròn

Ví dụ 1. Trong các góc AOB, CID, MON ở hình sau, góc nào là góc ở tâm, góc nào không là góc ở tâm?

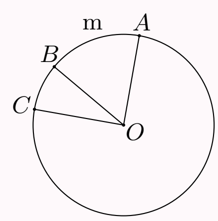


Lời giải.
Hai góc AOB và MON là góc ở tâm vì có đỉnh trùng với tâm đường tròn. Góc CID không là góc ở tâm vì có đỉnh không trùng với tâm đường tròn. □

Ví dụ 2.
Trong hình bên, hãy cho biết:

a) Cung AmB bị chắn bởi góc ở tâm nào?

b) Góc ở tâm AOC chắn cung nào?



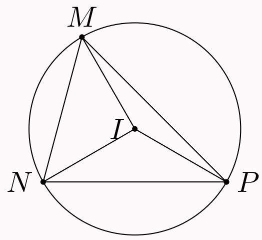
Lời giải.

a) Cung AmB bị chắn bởi góc ở tâm AOB.

b) Góc ở tâm AOC chắn cung ABC.

□

Ví dụ 3.
Cho tam giác MNP có ba đỉnh nằm trên đường tròn (I). Xác định các góc ở tâm của đường tròn.

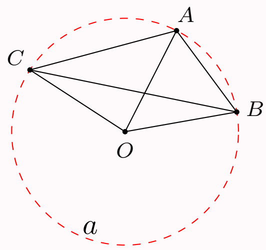


Lời giải.
Trong hình, đường tròn (I) có các góc ở tâm là $\widehat{MIN}$, $\widehat{NIP}$, $\widehat{PIM}$. □

Ví dụ 4.
Cho ba điểm A, B và C thuộc đường tròn (O) như hình bên.

a) Tìm các góc ở tâm có hai cạnh đi qua hai trong ba điểm A, B, C.

b) Tìm các cung có hai mút là hai trong ba điểm A, B, C.



Lời giải.

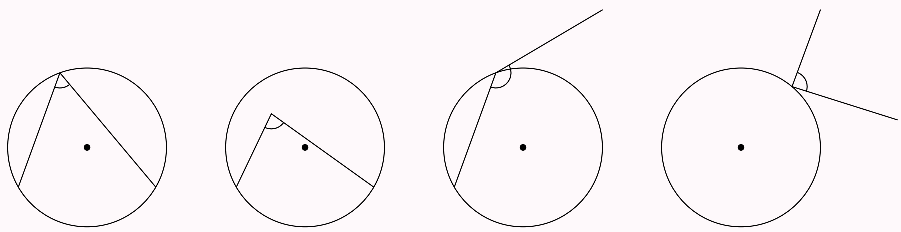
a) Các góc ở tâm cần tìm là $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ và $\widehat{COA}$.

b) Các cung có hai mút A, B là $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{ACB}$.

- Các cung có hai mút A, C là $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{ABC}$.
- Các cung có hai mút B, C là $\overset{\frown}{BAC}$, $\overset{\frown}{BaC}$.

□

Ví dụ 5. Quan sát các hình a, b, c, d, góc ở hình nào là góc nội tiếp, góc ở hình nào không là góc nội tiếp? Vì sao?



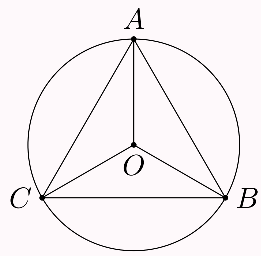
Lời giải.
Góc ở Hình 56a là góc nội tiếp vì góc có đỉnh thuộc đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó.
Góc ở Hình 56b không là góc nội tiếp vì đỉnh không thuộc đường tròn.
Góc ở Hình 56c không là góc nội tiếp vì một cạnh không chứa dây cung.
Góc ở Hình 56d không là góc nội tiếp vì cả hai cạnh không chứa dây cung. □

Ví dụ 6. Cho hai điểm E và F nằm trên đường tròn (O). Có bao nhiêu góc nội tiếp chắn cung EF?

Lời giải.

Với mỗi điểm M bất kì thuộc đường tròn ta xác định được góc $\widehat{EMF}$ là góc nội tiếp đường tròn (O) chắn cung EF. Có vô số điểm M như vậy nên có vô số góc nội tiếp chắn cung EF. □

Ví dụ 7.
Tìm góc nội tiếp chắn cung AB của đường tròn (O) trong Hình 9.



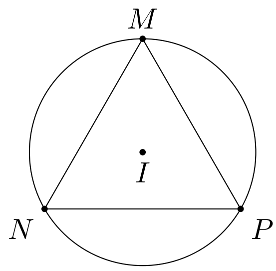
Lời giải.

Trong hình, $\widehat{ACB}$ là góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn (O). □

Ví dụ 8. Cho tam giác đều MNP có ba đỉnh nằm trên đường tròn (I). Hãy chỉ ra các góc nội tiếp của đường tròn (I) và tính số đo của các góc nội tiếp đó.

Lời giải.

Theo Hình 10, ta có $\widehat{MNP}$, $\widehat{NPM}$ và $\widehat{NMP}$ là các góc nội tiếp của đường tròn (I).
Vì MNP là tam giác đều nên $\widehat{MNP} = \widehat{NPM} = \widehat{NMP} = 60°$.



□

Dạng 2. Tính số đo góc ở tâm, số đo cung tròn

Ví dụ 9. Tính số đo góc ở tâm được tạo thành khi kim giờ quay

a) Từ 7 giờ đến 9 giờ;

b) Từ 9 giờ đến 12 giờ.

Lời giải.

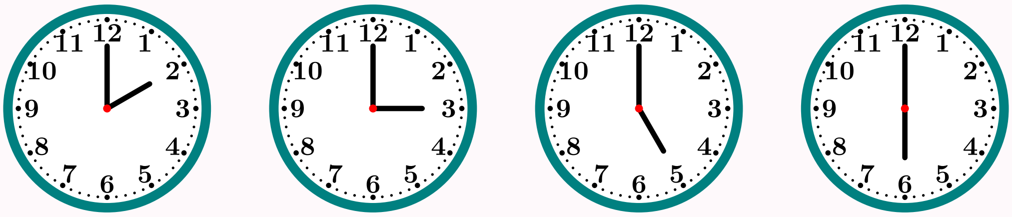
Cứ mỗi giờ, kim giờ quay được một góc là $360° : 12 = 30°$.

a) Từ 7 giờ đến 9 giờ, kim giờ quay được một góc $30° \cdot 2 = 60°$.

b) Từ 9 giờ đến 12 giờ, kim giờ quay được một góc $30° \cdot 3 = 90°$.

□

Ví dụ 10. Trong hình sau, coi mỗi khung đồng hồ là một đường tròn, kim giờ, kim phút là các tia. Số đo góc ở tâm trong mỗi hình a, b, c, d là bao nhiêu?


a) b) c) d)

Lời giải.

a) Hình a): Góc ở tâm tạo bởi kim giờ và kim phút tạo thành góc có số đo bằng 60°.

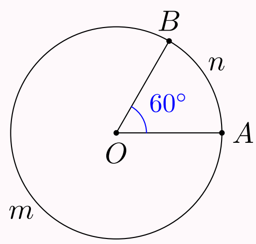
b) Hình b): Góc ở tâm tạo bởi kim giờ và kim phút tạo thành góc có số đo bằng 90°.

c) Hình c): Góc ở tâm tạo bởi kim giờ và kim phút tạo thành góc có số đo bằng 150°.

d) Hình d): Góc ở tâm tạo bởi kim giờ và kim phút tạo thành góc có số đo bằng 180°.

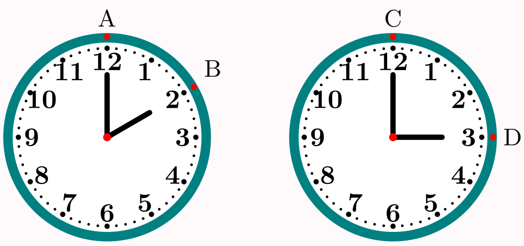
□

Ví dụ 11.
Tính số đo các cung $\overset\frown{AnB}$ và $\overset\frown{AmB}$ trong hình bên.



Lời giải.
Trong hình, ta có $\overset\frown{AnB}$ bị chắn bởi góc ở tâm $\widehat{AOB}$ có số đo bằng 60°, suy ra sđ$\overset\frown{AnB} = 60^\circ$ và sđ$\overset\frown{AmB} = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$. □

Ví dụ 12. Trong hình sau, coi mỗi vành đồng hồ là một đường tròn. Tìm số đo của cung nhỏ AB và cung lớn CD.



a) b)

Lời giải.

- Vì số đo của cung cả đường tròn gấp sáu lần số đo cung nhỏ AB và cung cả đường tròn có số đo 360° nên

$$\text{sđ } \overset\frown{AB} = \frac{1}{6} \cdot 360^\circ = 60^\circ.$$

- Vì số đo của cung cả đường tròn gấp bốn lần số đo cung nhỏ CD và cung cả đường tròn có số đo 360° nên

$$\text{sđ } \overset\frown{CD} = \frac{1}{4} \cdot 360^\circ = 90^\circ.$$

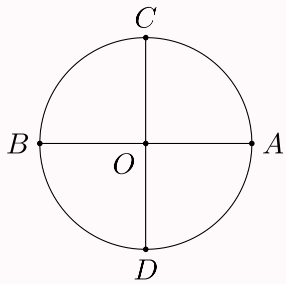
Vậy sđ $\overset\frown{CnD} = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$. □

Ví dụ 13. Trên cung AB có số đo 90° của đường tròn (O), lấy điểm M sao cho cung AM có số đo 15°. Tính số đo của cung MB.

Lời giải.

Vì sđ$\overset{\frown}{AM}$ < sđ$\overset{\frown}{MB}$ nên điểm M nằm giữa A và B.
Do đó ta có sđ$\overset{\frown}{AB}$ = sđ$\overset{\frown}{AM}$ + sđ$\overset{\frown}{MB}$.
Suy ra sđ$\overset{\frown}{MB}$ = sđ$\overset{\frown}{AB}$ − sđ$\overset{\frown}{AM}$ $= 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$. □

Ví dụ 14.
Cho đường tròn (O) có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Xác định số đo của các cung $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$ và $\overset{\frown}{AD}$.

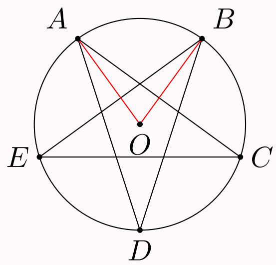


Lời giải.

- Vì AB là đường kính của đường tròn (O) nên cung $\overset{\frown}{AB}$ là cung nửa đường tròn.
  Do đó sđ$\overset{\frown}{AB} = 180^\circ$.
- Ta có $\widehat{AOC} = 90^\circ$ là góc ở tâm chắn cung $\overset{\frown}{AC}$.
  Suy ra cung nhỏ $\overset{\frown}{AC}$ có sđ$\overset{\frown}{AC} = 90^\circ$ và cung lớn $\overset{\frown}{AC}$ có sđ$\overset{\frown}{ADC} = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$.
- Ta có $\widehat{AOD} = 90^\circ$ là góc ở tâm chắn cung $\overset{\frown}{AD}$.
  Suy ra cung nhỏ $\overset{\frown}{AD}$ có sđ$\overset{\frown}{AD} = 90^\circ$ và cung lớn $\overset{\frown}{AD}$ có sđ$\overset{\frown}{DBA} = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$.

□

Ví dụ 15.
Xác định số đo cung AB trong hình ngôi sao năm cánh.



Lời giải.

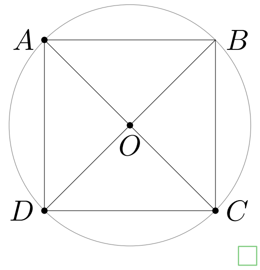
Các điểm A, B, C, D và E chia đường tròn thành 5 phần bằng nhau.
Do đó $\widehat{AOB} = \dfrac{360^\circ}{5} = 72^\circ$.
Ta có $\widehat{AOB} = 72^\circ$ là góc ở tâm chắn cung $\overset{\frown}{AB}$.
Suy ra cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ có sđ$\overset{\frown}{AD} = 72^\circ$ và cung lớn $\overset{\frown}{AD}$ có sđ$\overset{\frown}{DBA} = 360^\circ - 72^\circ = 288^\circ$. □

Ví dụ 16. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi O là tâm đường tròn đi qua bốn điểm A, B, C, D.

a) Tính số đo góc ở tâm $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$.

b) Tính số đo cung nhỏ AB, CD.

Lời giải.

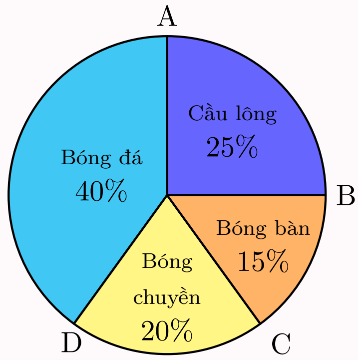


a) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Do $ABCD$ là hình vuông nên $OA = OB = OC = OD$. Vậy O là tâm đường tròn đi qua A, B, C, D. $ABCD$ là hình vuông nên $AC \perp BD$, vậy $\widehat{AOB} = 90^\circ$, $\widehat{BOC} = 90^\circ$.

b) Ta có $\widehat{AOB} = 90^\circ \Rightarrow$ sđ$\overset{\frown}{AB} = 90^\circ$; $\widehat{COD} = 90^\circ \Rightarrow$ sđ$\overset{\frown}{CD} = 90^\circ$.

□

Ví dụ 17.
Biểu đồ hình quạt tròn ở hình bên biểu diễn kết quả thống kê (tính theo tỉ số phần trăm) chọn môn thể thao ưa thích nhất trong bốn môn: Cầu lông, Bóng bàn, Bóng chuyền, Bóng đá của 300 học sinh khối lớp 9 ở một trường trung học cơ sở (mỗi học sinh chỉ được chọn một môn thể thao khi được hỏi ý kiến). Tìm số đo của các góc ở tâm: $\widehat{AOB}$; $\widehat{COD}$; $\widehat{BOC}$; $\widehat{DOA}$.

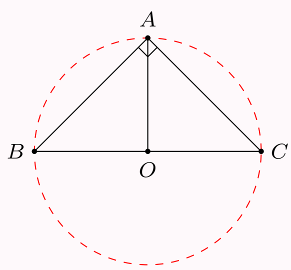


Lời giải.

- Do số học sinh chọn môn Cầu lông chiếm 25% số lượng học sinh nên số đo cung nhỏ AB bằng 25% số đo của cung cả đường tròn.
  Vì thế, sđ $\overset{\frown}{AB} = \dfrac{25}{100} \cdot 360^\circ = 90^\circ$.
  Vì số đo của cung nhỏ AB bằng số đo của góc ở tâm AOB chắn cung đó nên $\widehat{AOB} = 90^\circ$.
- Do số học sinh chọn môn Bóng chuyển chiếm 20% số lượng học sinh nên số đo cung nhỏ AB bằng 20% số đo của cung cả đường tròn.
  Vì thế, sđ $\overset{\frown}{CD} = \dfrac{20}{100} \cdot 360^\circ = 72^\circ$.
  Vì số đo của cung nhỏ CD bằng số đo của góc ở tâm COD chắn cung đó nên $\widehat{COD} = 72^\circ$
- Do số học sinh chọn môn Bóng bàn chiếm 15% số lượng học sinh nên số đo cung nhỏ AB bằng 15% số đo của cung cả đường tròn.
  Vì thế, sđ $\overset{\frown}{BC} = \dfrac{15}{100} \cdot 360^\circ = 54^\circ$.
  Vì số đo của cung nhỏ AB bằng số đo của góc ở tâm BOC chắn cung đó nên $\widehat{BOC} = 54^\circ$.
- Do số học sinh chọn môn Bóng đá chiếm 40% số lượng học sinh nên số đo cung nhỏ AD bằng 40% số đo của cung cả đường tròn.
  Vì thế, sđ $\overset{\frown}{AD} = \dfrac{40}{100} \cdot 360^\circ = 144^\circ$.
  Vì số đo của cung nhỏ AD bằng số đo của góc ở tâm AOD chắn cung đó nên $\widehat{AOD} = 144^\circ$.

□

Ví dụ 18.
Tính số đo của các cung có các đầu mút là hai trong các điểm A, B, C trong hình bên, biết rằng ABC là tam giác vuông cân tại đỉnh A.



Lời giải.

- Ta thấy $\overset{\frown}{AB}$ và $\overset{\frown}{AC}$ là các cung nhỏ bị chắn bởi các góc ở tâm thứ tự là $\widehat{AOB}$ và $\widehat{AOC}$.
Do tam giác ABC vuông cân tại A nên đường trung tuyến AO cũng là đường cao, tức là $AO \perp BC$.
Do đó $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 90^\circ$, suy ra sđ$\overset{\frown}{AB}$ = sđ$\overset{\frown}{AC} = 90^\circ$.

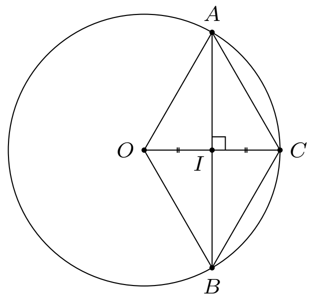
- $\overset{\frown}{ACB}$ là cung lớn có chung hai mút A, B với cung nhỏ AB nên
$$\text{sđ}\overset{\frown}{ACB} = 360^\circ - \text{sđ}\overset{\frown}{AB} = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ.$$
Tương tự, ta có sđ$\overset{\frown}{ABC} = 360^\circ -$ sđ$\overset{\frown}{AC} = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$.
Ngoài ra còn có hai nửa đường tròn có chung hai mút A và B, có số đo bằng 180°.

□

Ví dụ 19. Cho C là điểm trên đường tròn (O). Đường trung trực của đoạn OC cắt (O) tại A và B. Tính số đo của các cung $\overset{\frown}{ACB}$ và $\overset{\frown}{ABC}$.

Lời giải.

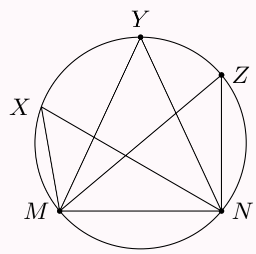
Vì AB là trung trực của OC nên $AO = AC$; $BO = BC$. Mà $OA = OB = R$.
Do đó $AO = OB = BC = CA = R$.
Hay $\triangle AOC$ và $\triangle BOC$ là hai tam giác đều.
Nên $\widehat{AOC} = \widehat{BOC} = 60^\circ$ suy ra $\widehat{AOB} = 120^\circ$.
Vậy sđ $\overset{\frown}{ACB} = 120^\circ$.
Và sđ$\overset{\frown}{ABC} = 360^\circ -$ sđ$\overset{\frown}{AC} = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$.



□

Dạng 3. Tính số đo góc ở tâm, số đo cung tròn

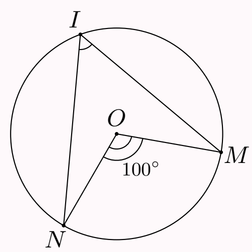
Ví dụ 20.
Một huấn luyện viên cho cầu thủ tập sút bóng vào cầu môn MN (hình bên). Nếu bóng được đặt ở điểm X thì $\widehat{MXN}$ gọi là góc sút từ vị trí X. Hãy so sánh các góc sút $\widehat{MXN}, \widehat{MYN}, \widehat{MZN}$.



Lời giải.

Ta thấy $\widehat{MXN} = \widehat{MYN} = \widehat{MZN} = \dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{MN}$. (các góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{MN}$) □

Ví dụ 21.
Tính số đo góc MIN ở hình bên.



Lời giải.

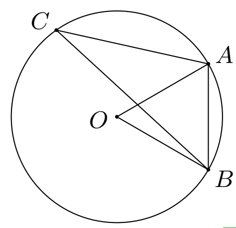
Xét đường tròn (O) có $\widehat{MON}$ là góc ở tâm và $\widehat{MIN}$ là góc nội tiếp cùng chắn cung MN nên

$$\widehat{MIN} = \frac{1}{2}\widehat{MON} = \frac{1}{2}\cdot 100^\circ = 50^\circ.$$

Vậy $\widehat{MIN} = 50^\circ$. □

Ví dụ 22. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung $AB = R$. Điểm C thuộc cung lớn AB, C khác A và B. Tính số đo góc ACB.

Lời giải.

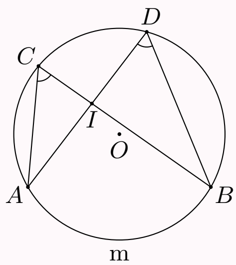


Ta có $OA = OB = AB$ nên tam giác AOB đều nên $\widehat{BOC} = 60^\circ$.
Xét đường tròn (O) có $\widehat{AOB}$ là góc ở tâm và $\widehat{ACB}$ là góc nội tiếp cùng chắn cung AB nên

$$\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \frac{1}{2}\cdot 60^\circ = 30^\circ.$$

Vậy $\widehat{ACB} = 30^\circ$. □

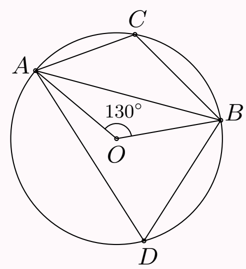
Ví dụ 23.
Trong hình bên, gọi I là giao điểm của AD và BC. Chứng minh $IA \cdot ID = IB \cdot IC$.



Lời giải.
Xét đường tròn (O), ta có:
- Các góc nội tiếp ACB và ADB cùng chắn cung AB nên $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$ hay $\widehat{ACI} = \widehat{ADI}$.
- Các góc nội tiếp CAD và CBD cùng chắn cung CD nên $\widehat{CDA} = \widehat{CBD}$ hay $\widehat{CAI} = \widehat{DBI}$.

Xét hai tam giác IAC và IBD có $\widehat{ACI} = \widehat{ADI}$ và $\widehat{CAI} = \widehat{DBI}$ nên $\triangle IAC \backsim \triangle IBD$ (gg).
Suy ra $\dfrac{IA}{IB} = \dfrac{IC}{ID}$ hay $IA \cdot ID = IB \cdot IC$. □

Ví dụ 24.
Tìm số đo cung ADB và số đo góc ACB ở hình bên.



Lời giải.
Xét đường tròn (O), ta có:

$$\begin{aligned} \text{sđ } \overset{\frown}{ADB} &= 360^\circ - \text{sđ } \overset{\frown}{ACB} \\ &= 360^\circ - \widehat{AOB} = 360^\circ - 130^\circ = 230^\circ. \end{aligned}$$

Vì $\widehat{ACB}$ là góc nội tiếp chắn cung ADB nên

$$\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\text{sđ } \overset{\frown}{ADB} = \frac{1}{2}\cdot 230^\circ = 115^\circ.$$

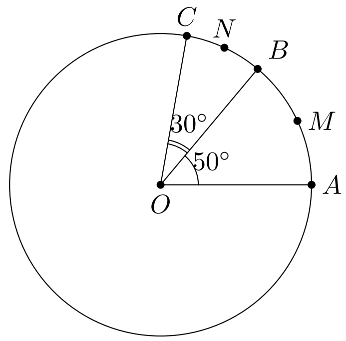
Vậy sđ $\overset{\frown}{ADB} = 230°$; $\widehat{ACB} = 115°$. □

Ví dụ 25. Cho ba điểm A, B, C nằm trên đường tròn (O) sao cho $\widehat{AOB} = 50°$, $\widehat{BOC} = 30°$, điểm B thuộc cung nhỏ AC. Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên hai cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$ và chia mỗi cung đó thành hai cung bằng nhau. Tìm số đo các góc sau:

a) $\widehat{BCA}$, $\widehat{BAC}$;

b) $\widehat{MBA}$, $\widehat{BAN}$.

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{BCA} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOB} = \dfrac{1}{2} \cdot 50° = 25°$. (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cùng $\overset{\frown}{AB}$).
Ta có $\widehat{BAC} = \dfrac{1}{2}\widehat{BOC} = \dfrac{1}{2} \cdot 30° = 15°$. (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cùng $\overset{\frown}{BC}$)

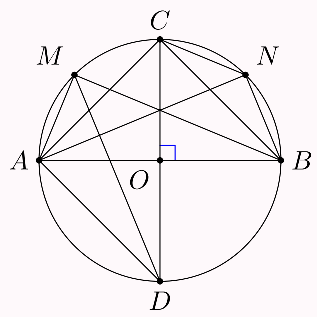
b) Ta có $\widehat{MBA} = \dfrac{1}{2}\widehat{MOA} = \dfrac{1}{2} \cdot 25° = 12{,}5°$. (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cùng $\overset{\frown}{MA}$)
Ta có $\widehat{BAN} = \dfrac{1}{2}\widehat{BON} = \dfrac{1}{2} \cdot 15° = 7{,}5°$. (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cùng $\overset{\frown}{BN}$)

□

Ví dụ 26.
Cho AB và CD là hai đường kính vuông góc của đường tròn (O). Gọi M, N là hai điểm lần lượt trên hai cung nhỏ $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{BC}$ và chia mỗi cung đó thành hai cung bằng nhau. Tìn số đo các góc sau:

a) $\widehat{ACB}$, $\widehat{ADC}$;

b) $\widehat{ADM}$, $\widehat{NCB}$.



Lời giải.

a) Ta có $\widehat{ACB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn,suy ra $\widehat{ACB} = 90°$.
Ta có $\widehat{ADC}$ và $\widehat{AOC}$ lần lượt là góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung AC, suy ra

$$\widehat{ADC} = \frac{\widehat{AOC}}{2} = \frac{90°}{2} = 45°.$$

b) Do hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau tại tâm O của (O) nên $\widehat{AOC} = \widehat{COB} = \widehat{BOD} = \widehat{DOA} = 90°$ suy ra sđ$\overset{\frown}{AC} =$ sđ$\overset{\frown}{CB} =$ sđ$\overset{\frown}{BD} =$ sđ$\overset{\frown}{DA} = 90°$.
Vì M, N lần lượt chia $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{CB}$ thành hai cung có số đo bằng nhau nên

$$\text{sđ}\overset{\frown}{AM} = \text{sđ}\overset{\frown}{MC} = \text{sđ}\frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = 45°, \text{sđ}\overset{\frown}{CN} = \text{sđ}\overset{\frown}{NB} = \text{sđ}\frac{\overset{\frown}{CB}}{2} = 45°.$$

Ta có $\widehat{ADM}$ là góc nội tiếp chắn cung AM, suy ra

$$\widehat{ADM} = \frac{\text{sđ}\overset{\frown}{AM}}{2} = \frac{45°}{2} = 22{,}5°.$$

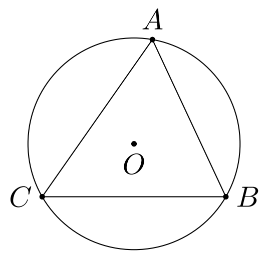
Ta có $\widehat{NCB}$ là góc nội tiếp chắn cung NB, suy ra

$$\widehat{NCB} = \frac{\text{sđ}\overset{\frown}{BN}}{2} = \frac{45°}{2} = 22{,}5°.$$

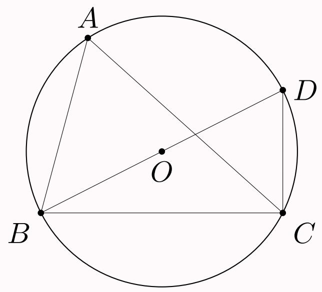
Ví dụ 27. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O). Các cung nhỏ AB, BC, AC có số đo lần lượt là $x + 10^\circ$, $x + 20^\circ$, $x + 30^\circ$. Tính số đo các góc của tam giác ABC.

Lời giải.

Ta có sđ$\overset{\frown}{AB}$ + sđ$\overset{\frown}{BC}$ + sđ$\overset{\frown}{AC} = 360^\circ$ nên $x + 10^\circ + x + 20^\circ + x + 30^\circ = 360^\circ \Rightarrow x = 100^\circ$.
Do đó, sđ$\overset{\frown}{AB} = 110^\circ$, sđ$\overset{\frown}{BC} = 120^\circ$, sđ$\overset{\frown}{AC} = 130^\circ$. Vậy $\widehat{C} = 55^\circ$, $\widehat{A} = 60^\circ$, $\widehat{B} = 65^\circ$.



Ví dụ 28.
Cho hình bên, biết BD là đường kính của (O), $\widehat{BAC} = 40^\circ$. Tính số đo của góc $\widehat{CBD}$.



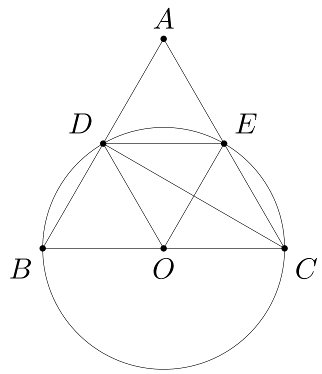
Lời giải.

$\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ (hệ quả góc nội tiếp) nên $\widehat{40^\circ}$; BD là đường kính nên $\widehat{BCD} = 90^\circ$ nên $\triangle BCD$ vuông. Do đó $\widehat{CBD} + \widehat{BDC} = 90^\circ$. Vậy $\widehat{CBD} = 50^\circ$.

Ví dụ 29. Cho $\triangle ABC$ nhọn có $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Vẽ đường tròn đường kính BC tâm O cắt AB, AC tại D và E. Chứng minh $\widehat{ODE} = 60^\circ$.

Lời giải.

$\widehat{BDC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên
$\widehat{ADC} = 90^\circ$ do đó $\triangle ADC$ vuông tại D. Ta có $\widehat{DAC} + \widehat{ACD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ACD} = 30^\circ$.
Mặt khác, $\widehat{DCE} = \dfrac{1}{2}\widehat{DOE}$ (hệ quả góc nội tiếp) nên $\widehat{DOE} = 60^\circ$.
Ta có $OD = OE$ (bán kính) do đó $\triangle ODE$ đều. Vậy $\widehat{ODE} = 60^\circ$.

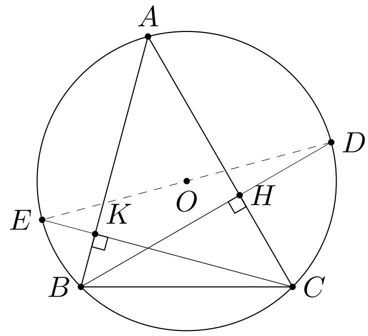


Dạng 4. Chứng minh ba điểm thẳng hàng. Hai đường thẳng vuông góc

Ví dụ 30. Cho $\triangle ABC$ nhọn có $\widehat{BAC} = 45^\circ$ nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BH, CK cắt đường tròn (O) tại D, E. Chứng minh D, O, E thẳng hàng.

Lời giải.

Ta có $BH \perp AC$ nên $\triangle ABH$ vuông tại H. Mà $\widehat{BAH} = 45°$ nên $\widehat{ABH} = 45°$. Mặt khác $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AD}$) nên $\widehat{ACD} = 45°$. (1)
$CK \perp AB$ nên $\triangle ACK$ vuông tại K. Mà $\widehat{CAK} = 45°$ nên $\widehat{ACK} = 45°$. (2)
Từ (1) và (2) ta có $\widehat{DCE} = 90°$ nên DE là đường kính. Vậy D, O, E thẳng hàng.

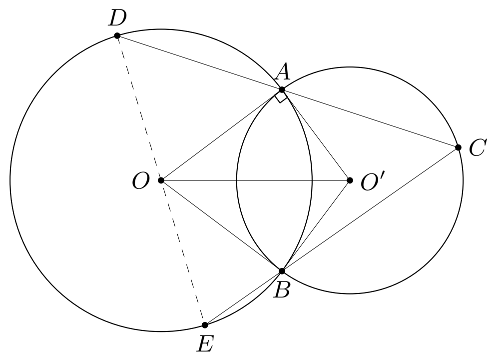


□

Ví dụ 31. Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B sao cho $\widehat{OAO'} = 90°$, lấy điểm C thuộc (O') và ở bên ngoài đường tròn (O). Kẻ các tia CA, CB cắt đường tròn (O) tại D, E. Chứng minh rằng D, O, E thẳng hàng.

Lời giải.

- Xét (O) ta có $\widehat{AEB} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AOB}$. (1)
- Xét (O') ta có $\widehat{ACB} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AO'B}$. (2)
- Từ (1) và (2) ta có $\widehat{AEB} + \widehat{ACB} = \dfrac{1}{2}\cdot\left(\widehat{AOB} + \widehat{AO'B}\right) = 90°$. Nên $\widehat{EAC} = 90°$, do đó $\widehat{DAE} = 90°$. Vậy D, E, O thẳng hàng.

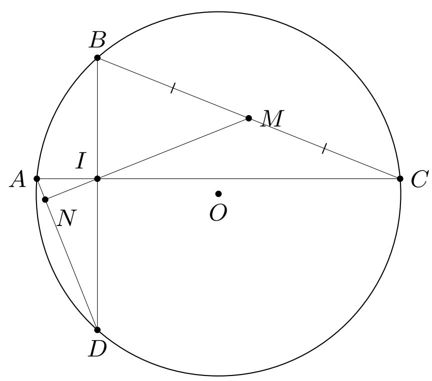


□

Ví dụ 32. Cho đường tròn (O) có dây cung AC và BD vuông góc với nhau tại I. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh $IM \perp AD$.

Lời giải.

Gọi N là giao điểm của MI và AD; $AC \perp BD$ tại I nên $\triangle BCI$ vuông tại I. Mà $MB = MC \Rightarrow MI = MB$ (tính chất đường trung tuyến của tam giác vuông) nên $\triangle MBI$ cân.
Do đó, $\widehat{MIB} = \widehat{MBI}$ mà $\widehat{NID} = \widehat{BIM}$ (đối đỉnh) do đó $\widehat{MBI} = \widehat{NID}$. (1)
Ta có $\widehat{BDA} = \widehat{BCA}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AB}$). (2)
Mà $\widehat{BCA} + \widehat{MBI} = 90°$ ($\triangle BCI$ vuông tại I) nên từ (1) và (2) ta có $\widehat{NID} + \widehat{BDA} = 90°$ hay $\triangle IND$ vuông tại N. Vậy $MN \perp AD$.

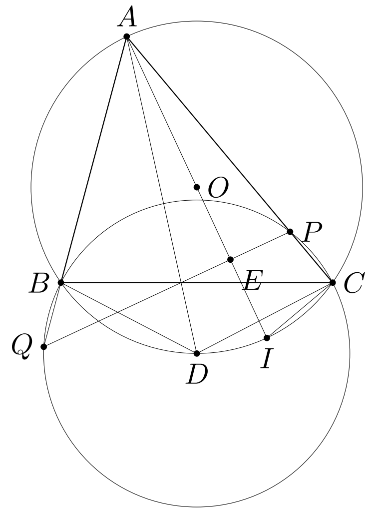


□

Ví dụ 33. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tia phân giác góc BAC cắt đường tròn (O) tại D. Đường tròn tâm D, bán kính DB cắt đường thẳng AB tại Q (khác B), cắt đường thẳng AC tại P (khác C). Chứng minh $AO \perp PQ$.

Lời giải.

Gọi I và E là giao điểm của AO với đường tròn tâm O và PQ. Ta có $\widehat{QBC} = \widehat{CPQ}$. Suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{APQ}$ mà $\widehat{ABC} = \widehat{AIC}$ nên $\widehat{APQ} = \widehat{AIC}$. Do $\widehat{AIC} + \widehat{EAC} = 90°$ nên $\widehat{AEP} = 90°$.
Vậy $AO \perp PQ$.



□

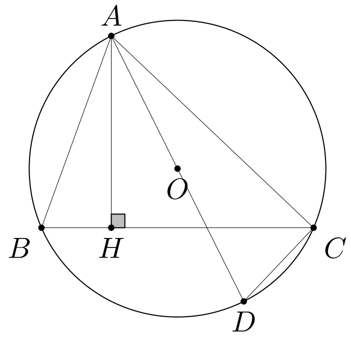
Dạng 5. Chứng minh một số hệ thức hình học

Ví dụ 34. Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O) có đường cao AH. Kẻ đường kính AD.

a) Tính góc $\widehat{ACD}$.

b) Chứng minh $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$.

Lời giải.



a) AD là đường kính của (O) nên $\widehat{ACD} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

b) $\widehat{ACD} = 90°$ nên $\triangle ACD$ vuông tại C do đó,
$\widehat{DAC} + \widehat{ADC} = 90°$. (1)
AH là đường cao nên $\triangle ABH$ vuông tại H do đó, $\widehat{BAH} + \widehat{ABH} = 90°$. (2)
Mặt khác, $\widehat{ABH} = \widehat{ADC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AC}$). Từ (1) và (2) ta có $\widehat{DAC} = \widehat{BAH}$.

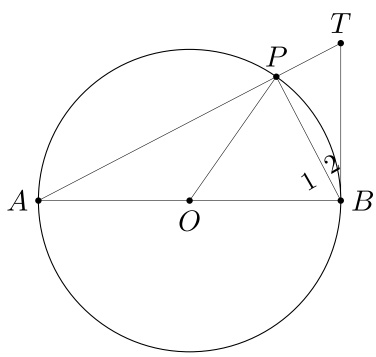
□

Ví dụ 35. Cho đường tròn (O) đường kính AB và một dây cung AP. Tia AP cắt tiếp tuyến tại B của đường tròn ở T. Chứng minh

a) $\widehat{AOP} = 2 \cdot \widehat{ATB}$.

b) $\widehat{APO} = \widehat{PBT}$.

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{ATB} = \widehat{B_1}$ (cùng phụ với $\widehat{B_2}$). Mà $\widehat{B_1} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOP}$ (hệ quả). Nên $\widehat{ATB} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOP}$ hay $\widehat{AOP} = 2 \cdot \widehat{ATB}$.

b) $AO = PO$ nên $\triangle AOP$ cân tại O suy ra $\widehat{PAO} = \widehat{OPA}$. Mà $\widehat{PAO} = \widehat{PBT}$ (cùng phụ với $\widehat{B_1}$), suy ra $\widehat{OPA} = \widehat{PBT}$.

□

Ví dụ 36. Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường cao AD, BE của $\triangle ABC$ cắt nhau tại H. AD cắt đường tròn tại I. Chứng minh $DH = DI$.

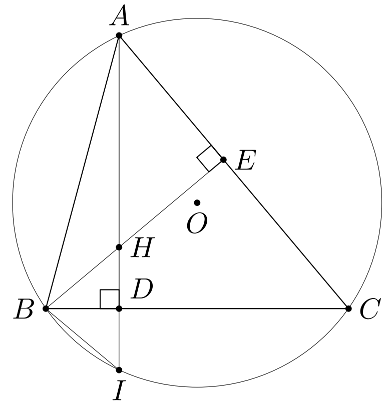
Lời giải.

Ta có $\widehat{IAC} = \widehat{CBI}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{CI}$); $\widehat{IAC} = \widehat{EBC}$ (phụ với góc C).

Do đó $\widehat{IBC} = \widehat{EBC}$.

Xét $\triangle HBI$ có BD là đường phân giác; BD là đường cao ($AD \perp BC$). Nên $\triangle HBI$ cân tại B, do đó BD là trung tuyến.

Vậy $DH = DI$.



□

Ví dụ 37. Cho $\triangle ABC$ đều nội tiếp đường tròn (O). Lấy M nằm trên cung BC. Chứng minh rằng $AM = BM + CM$.

Lời giải.

Trên dây MA lấy N sao cho $MN = BM$. (1)

Ta có $\widehat{BMN} = \widehat{BCA}$ (góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{AB}$) nên $\widehat{BMN} = 60^\circ$ (do $\widehat{BCA} = 60^\circ$).

$\triangle BMN$ có $MN = BM$, $\widehat{BMN} = 60^\circ$ nên $\triangle BMN$ đều, do đó $BN = BM$, $\widehat{MBN} = 60^\circ$.

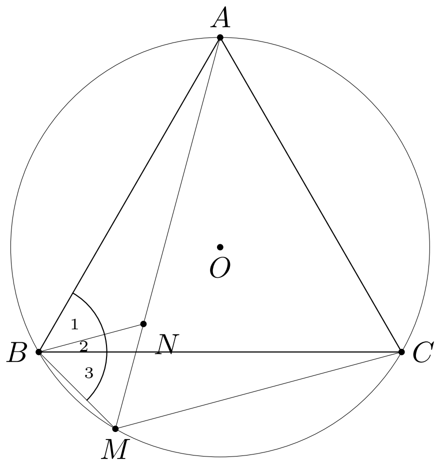
Ta có $\widehat{B_1} + \widehat{B_2} = 60^\circ$ (do $\triangle ABC$ đều); $\widehat{B_2} + \widehat{B_3} = 60^\circ$ (do $\triangle BMN$ đều), nên $\widehat{B_1} = \widehat{B_3}$.

Xét $\triangle ABN$ và $\triangle CBM$ có

$NB = MB$ (chứng minh trên); (2)

$\widehat{B_1} = \widehat{B_3}$ (chứng minh trên); $AB = CB$ ($\triangle ABC$ đều) nên $\triangle ABN = \triangle CBM$ (c.g.c). Do đó $AN = CM$. (3)

Từ (1) và (2) suy ra $AM = BM + CM$.



□

Ví dụ 38. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A, B. Trên đoạn AB lấy điểm I. Qua I kẻ dây MN của đường tròn (O), kẻ dây CD của đường tròn (O'). Chứng minh $IM \cdot IN = IC \cdot ID$.

Lời giải.

Xét $\triangle AIM$ và $\triangle NIB$ có

$\widehat{AMI} = \widehat{NBI}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AN}$);

$\widehat{AIM} = \widehat{BIN}$ (đối đỉnh).

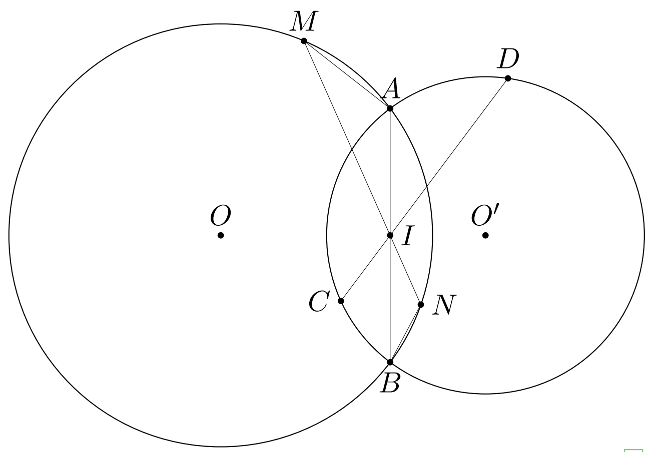
Do đó $\triangle AIM$ đồng dạng với $\triangle NIB$ (g.g).

Suy ra $\dfrac{AI}{NI} = \dfrac{MI}{BI}$ do đó $AI \cdot BI = MI \cdot NI$.

Chứng minh tương tự ta có $AI \cdot BI = CI \cdot DI$.

Vậy $MI \cdot NI = CI \cdot DI$.

Nhận xét. Cách chứng minh trên là chứng minh hệ thức lượng trong đường tròn. Nhiều bài toán chứng ta có thể nhìn dưới góc độ hệ thức lượng trong đường tròn để phán đoán, tìm hướng chứng minh.



□

Ví dụ 39. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O). Tia phân giác góc A cắt BC tại F, cắt đường tròn tại E. Chứng minh

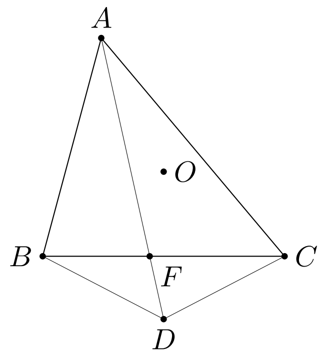
a) $\triangle BEC$ cân.

b) $\widehat{BEC} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB}$.

c) $AB \cdot AC = AE \cdot AF$.

d) $AF^2 = AB \cdot AC - BF \cdot CF$.

Lời giải.



a) $\widehat{BAE} = \widehat{CAE} \Rightarrow \overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CE} \Rightarrow BE = CE$. Do đó $\triangle BEC$ cân tại E.

b) Ta có $\widehat{AEB} = \widehat{ACB}$; $\widehat{AEC} = \widehat{ABC}$ nên $\widehat{BEC} = \widehat{AEB} + \widehat{AEC} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC}$.

c) Ta có $\widehat{AEB} = \widehat{ACB}$ và $\widehat{BAE} = \widehat{FAC}$ nên $\triangle AEB$ đồng dạng $\triangle ACF$ (g.g) suy ra $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AB}{AF}$. (1)
hay $AB \cdot AC = AE \cdot AF$.

d) Ta có $\widehat{AEB} = \widehat{ACB}$ và $\widehat{BFE} = \widehat{AFC}$ nên $\triangle AFC \backsim \triangle BFE$ (g.g)
$\Rightarrow \dfrac{AF}{BF} = \dfrac{CF}{EF} \Rightarrow BF \cdot CF = AF \cdot EF$. (2)
Từ (1) và (2) ta có $AB \cdot AC - BF \cdot CF - BF \cdot CF = AE \cdot AF - AF \cdot EF = AF \cdot (AE - EF) = AF^2$.

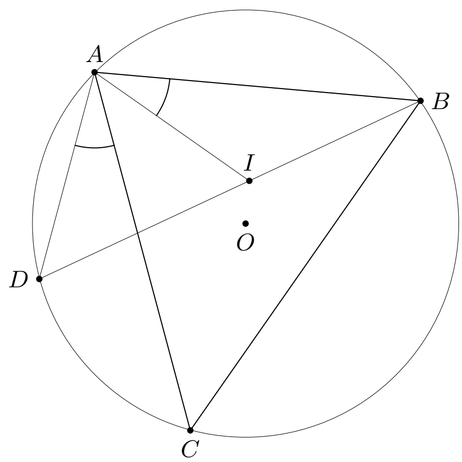
Nhận xét. Câu cuối chính là một tính chất của đường phân giác trong tam giác.

□

Ví dụ 40. Cho tứ giác $ABCD$ có bốn đỉnh thuộc đường tròn (O). Chứng minh rằng $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ (Định lí Ptô-lê-mê).

Lời giải.

Lấy điểm I thuộc BD sao cho $\widehat{BAI} = \widehat{CAD}$.



- Tam giác ACD và tam giác ABI có $\widehat{ABI} = \widehat{ACD}$; $\widehat{BAI} = \widehat{CAD}$ nên tam giác ACD đồng dạng với tam giác ABI, suy ra $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{CD}{BI}$
$\Rightarrow AB \cdot CD = AC \cdot BI$. (1)

- Tam giác ADI và tam giác ACB có $\widehat{ADI} = \widehat{ACB}$; $\widehat{DAI} = \widehat{CAB}$. Vậy tam giác ADI đồng dạng với tam giác ACB suy ra $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{DI}{BC}$
$\Rightarrow AD \cdot BC = AC \cdot DI$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BI + AC \cdot DI$
$\Rightarrow AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

□

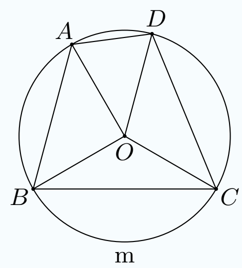
C BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1.

Quan sát hình bên, hãy cho biết:

a) 6 góc ở tâm có hai cạnh lần lượt chứa hai điểm trong bốn điểm A, B, C, D;

b) 4 góc nội tiếp có hai cạnh lần lượt chứa ba điểm trong bốn điểm A, B, C, D.



Lời giải.

a) 6 góc ở tâm là $\widehat{AOB}$; $\widehat{AOD}$;$\widehat{AOC}$; $\widehat{DOC}$; $\widehat{BOC}$; $\widehat{BOD}$.

b) 4 góc nội tiếp là $\widehat{BAC}$; $\widehat{BDC}$; $\widehat{ADB}$; $\widehat{ACB}$.

□

Bài 2. Cho dây AB của $(O; R)$. Tính số đo các cung nhỏ và cung lớn AB trong các trường hợp sau

a) $AB = R$. b) $AB = R\sqrt{2}$. c) $AB = R\sqrt{3}$.

Lời giải.

a) 60°; 300°. b) 90°; 270°. c) 120°; 240°.

□

Bài 3.
Trong hình bên , cho biết $AB = OA$.

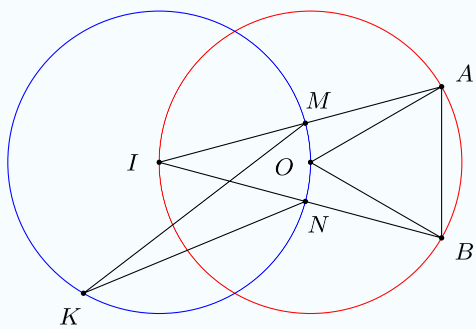
a) Tính số đo góc AOB.

b) Tính số đo cung nhỏ AB và cung lớn AB của (O).

c) Tính số đo góc MIN.

d) Tính số đo cung nhỏ MN và cung lớn MN của (I).

e) Tính số đo góc MKN.



Lời giải.

a) Ta có $OA = OB = AB$ (gt), suy ra $\triangle OAB$ đều, suy ra $\widehat{AOB} = 60^\circ$.

b) Ta có góc ở tâm AOB bằng 60°, suy ra $\overset{\frown}{AB} = 60^\circ$.
Suy ra số đo cung lớn AB là $360^\circ -$ sđ $\overset{\frown}{AB} = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$.

c) Ta có góc MIN là góc nội tiếp của (O) và góc ở tâm AOB cùng chắn một cung là AB, suy ra $\widehat{MIN} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$.

d) Xét đường tròn (I) có $\widehat{MIN}$ là góc ở tâm chắn cung MN nên

$$\text{sđ } \overset{\frown}{MN} = \widehat{MIN} = 30^\circ.$$

Suy ra số đo cung lớn MN là $360^\circ -$ sđ $\overset{\frown}{MN} = 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$.

e) Xét đường tròn (I) có $\widehat{MIN}$ là góc ở tâm và $\widehat{MKN}$ là góc nội tiếp cùng chắn cung MN nên

$$\widehat{MKN} = \frac{1}{2}\widehat{MIN} = \frac{1}{2} \cdot 30^\circ = 15^\circ.$$

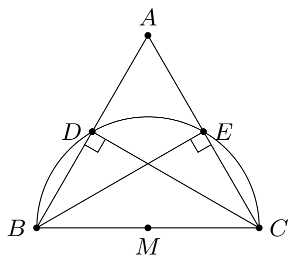
Vậy $\widehat{MKN} = 15^\circ$.

□

Bài 4. Cho tam giác đều ABC. Vẽ nửa đường tròn đường kính BC cắt cạnh AB và AC lần lượt tại D và E. Hãy so sánh các cung $\overset{\frown}{BD}, \overset{\frown}{DE}, \overset{\frown}{EC}$.

Lời giải.

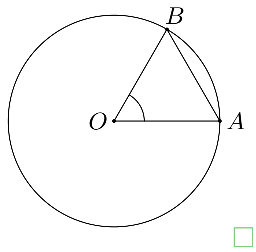
Ta có BE, CD lần lượt là các đường cao của tam giác đều ABC (vì các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính BC).
Suy ra BE, CD cũng là đường phân giác trong tam giác đều ABC.
Suy ra $\widehat{EBC} = \widehat{DCB} = 30^\circ$.
Suy ra sđ$\overset{\frown}{BD}$ = sđ$\overset{\frown}{EC} = 60^\circ$ (2 góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau).
Suy ra sđ$\overset{\frown}{BD}$ = sđ$\overset{\frown}{EC}$ = sđ$\overset{\frown}{DE} = 60^\circ$ (vì sđ$\overset{\frown}{BD}$ + sđ$\overset{\frown}{DE}$ + sđ$\overset{\frown}{EC} = 180^\circ$)



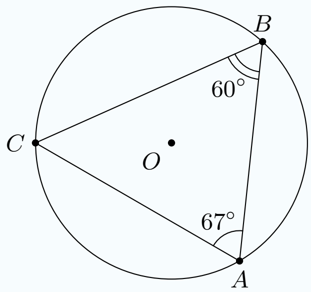
Bài 5. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây $AB = R$. Tính số đo góc AOB.

Lời giải.

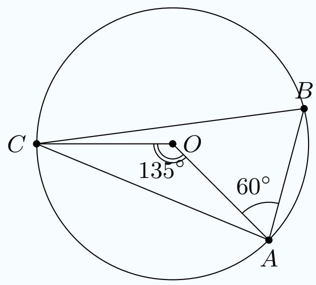
Ta có $OA = OB = AB = R$ nên tam giác OAB là tam giác đều.
Khi đó góc AOB bằng 60°.



Bài 6. Xác định số đo các cung $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ trong mỗi hình vẽ sau.



Hình a



Hình b

Lời giải.

a) sđ$\overset{\frown}{BC} = 2\widehat{BAC} = 2 \cdot 67^\circ = 134^\circ$.
sđ$\overset{\frown}{AC} = 2\widehat{ABC} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$.
$\widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{ABC} - \widehat{CAB} = 180^\circ - 67^\circ - 60^\circ = 53^\circ$.
Suy ra sđ$\overset{\frown}{AB} = 2\widehat{ACB} = 2 \cdot 53^\circ = 106^\circ$.

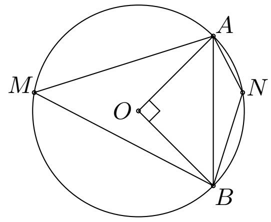
b) sđ$\overset{\frown}{AC} = \widehat{AOC} = 135^\circ$.
$\widehat{AOB} = 180^\circ - \widehat{BAO} - \widehat{ABO} = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$. (do $\triangle ABO$ cân tại O)
Suy ra sđ$\overset{\frown}{AB} = \widehat{AOB} = 60^\circ$.
sđ$\overset{\frown}{BC} = 360^\circ -$ sđ$\overset{\frown}{AB} -$ sđ$\overset{\frown}{AC} = 360^\circ - 135^\circ - 60^\circ = 165^\circ$.

Bài 7. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây AB sao cho $\widehat{AOB} = 90^\circ$. Giả sử M, N lần lượt là các điểm thuộc cung lớn AB và cung nhỏ AB (M, N khác A và B).

a) Tính độ dài đoạn thẳng AB theo R.

b) Tính số đo các góc ANB và AMB.

Lời giải.



a) Tam giác ABC vuông tại O, ta có $AB^2 = OA^2 + OB^2$.
Suy ra $AB = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$.

b) Xét đường tròn (O) có $\widehat{AOB}$ là góc ở tâm và $\widehat{AMB}$ là góc nội tiếp cùng chắn cung AB nên

$$\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ.$$

Xét đường tròn (O) có $\widehat{AOB}$ là góc ở tâm và $\widehat{AOB} = 90^\circ$ nên sđ $\overset{\frown}{AB} = 90^\circ$.
Suy ra số đo cung lớn AB là $360^\circ -$ sđ $\overset{\frown}{AB} = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$.
Mà $\widehat{ANB}$ là góc nội tiếp cùng chắn cung lớn AB nên

$$\widehat{ANB} = \frac{1}{2}\text{sđ } \overset{\frown}{AMB} = \frac{1}{2} \cdot 270^\circ = 135^\circ.$$

□

Bài 8.
Trên mặt một chiếc đồng hồ có các vạch chia như hình bên. Hỏi cứ sau mỗi khoảng thời gian 36 phút:

a) Đầu kim phút vạch nên một cung có số đo bằng bao nhiêu độ?

b) Đầu kim giờ vạch nên một cung có số đo bằng bao nhiêu độ?

Lời giải.

Sau mỗi khoảng 60 phút thì kim phút quay được 1 vòng tròn là 360° và kim giờ sẽ quay được $\frac{1}{12}$ vòng tròn là $\frac{1}{12} \times 360^\circ = 30^\circ$.

Ta có 36 phút chiếm $\frac{36}{60} \times 100\% = 60\%$ trong tổng 60 phút.

a) Như vậy cứ 36 phút thì kim phút sẽ vạch được $60\% \times 360^\circ = 216^\circ$.

b) Như vậy cứ 36 phút thì kim giờ sẽ vạch được $60\% \times 30^\circ = 18^\circ$.

□

Bài 9. Kim giờ và kim phút của đồng hồ tạo thành một góc ở tâm có số đo là bao nhiêu vào những thời điểm sau?

a) 2 giờ; b) 8 giờ; c) 21 giờ.

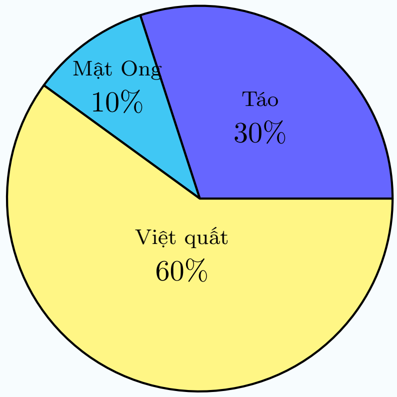
Lời giải.

a) Vào lúc 2 giờ thì kim giờ và kim phút tạo thành góc ở tâm có số đo là 60°.

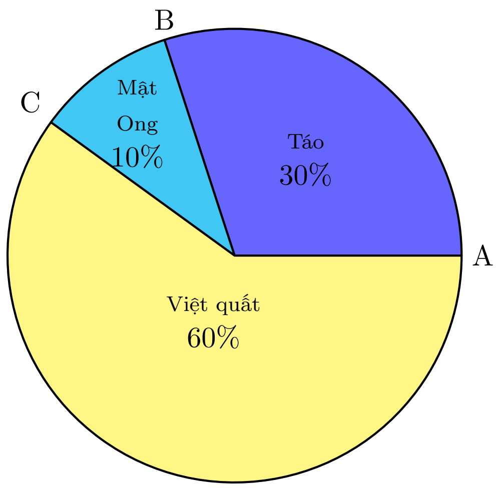
b) Vào lúc 8 giờ thì kim giờ và kim phút tạo thành góc ở tâm có số đo là 120°.

c) Vào lúc 21 giờ thì kim giờ và kim phút tạo thành góc ở tâm có số đo là 30°.

Bài 10.
Biểu đồ hình quạt tròn ở hình bên mô tả các thành phần của một chai nước ép hoa quả (tính theo tỉ số phần trăm). Hãy cho biết các cung tương ứng với phần biểu diễn thành phần việt quất, táo, mật ong lần lượt có số đo là bao nhiêu độ.



Lời giải.



a) Do thành phần Tóa quất chiếm 30% nên số đo cung nhỏ AB bằng 30% số đo của cung cả đường tròn.
Vì thế, sđ $\overset{\frown}{AB} = \dfrac{30}{100} \cdot 360^\circ = 108^\circ$.

b) Do thành phần Tóa quất chiếm 10% nên số đo cung nhỏ BC bằng 10% số đo của cung cả đường tròn.
Vì thế, sđ $\overset{\frown}{AB} = \dfrac{10}{100} \cdot 360^\circ = 36^\circ$.

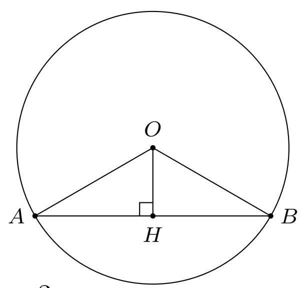
c) Số đo cung BC là sđ $\overset{\frown}{BC} =$ sđ $\overset{\frown}{AB} +$ sđ $\overset{\frown}{BC} = 108^\circ + 36^\circ = 144^\circ$.
Suy ra sô đo cung tròn của phần Việt quất là $360 -$ sđ $\overset{\frown}{BC} = 360^\circ - 144^\circ = 216^\circ$.

Bài 11. Cho đường tròn $(O; 5\text{ cm})$ và AB là một dây bất kì của đường tròn đó. Biết $AB = 6$ cm.

a) Tính khoảng cách từ O đến đường thẳng AB.

b) Tính $\tan\alpha$ nếu góc ở tâm chắn cung AB bằng 2α.

Lời giải.



Kẻ OH vuông góc AB tại H.
Vì OH là đường kính vuông góc dây cung AB, nên H là trung điểm AB. Nên $AH = 3$ cm.
Áp dụng pytago cho tam giác $\triangle AOH$ ta có:
$OH^2 = AO^2 - AH^2 = 5^2 - 3^2 = 16$.
Hay khoảng cách OH của tâm O đến đường AB là 4 cm.
Góc ở tâm chắn cung $\overset{\frown}{AB}$ là góc $\widehat{AOB}$. Hay góc $\widehat{AOB} = 2\alpha$.

Lại có $\widehat{AOB} = 2\widehat{AOH}$, nên $\widehat{AOH} = \alpha$. Xét tam giác vuông $\triangle AOH$ có $\tan\widehat{AOH} = \dfrac{AH}{OH} = \dfrac{3}{4}$.

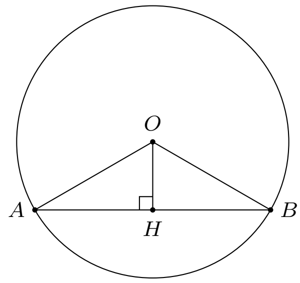
Bài 12. Tâm O của một đường tròn cách dây AB của nó một khoảng 3 cm. Tính bán kính của đường tròn (O), biết rằng cung nhỏ AB có số đo bằng 100° (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải.

Kẻ OH vuông góc AB tại H, khi đó H là trung điểm AB hay $AH = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{3}{2}$.

Vì cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ bằng 100° nên góc $\widehat{AOB} = 100^\circ$,
hay góc $\widehat{AOH} = 50^\circ$.

Ta có $AO = \dfrac{AH}{\sin \widehat{AOH}} = \dfrac{3}{2\sin 50^\circ} \approx 2{,}0$ cm.



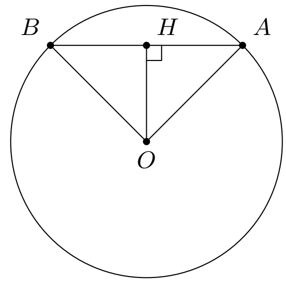
□

Bài 13. Dây cung AB chia đường tròn (O) thành hai cung. Cung lớn có số đo bằng ba lần cung nhỏ.

a) Tính số đo mỗi cung.

b) Chứng minh khoảng cách OH từ tâm O đến dây cung AB có độ dài bằng $\dfrac{AB}{2}$.

Lời giải.



a) Ta có sđ$\overset{\frown}{AB}_{\text{nhỏ}} +$ sđ$\overset{\frown}{AB}_{\text{lớn}} = 360^\circ$ mà sđ$\overset{\frown}{AB}_{\text{lớn}} = 3$sđ$\overset{\frown}{AB}_{\text{nhỏ}}$.
Suy ra sđ$\overset{\frown}{AB}_{\text{nhỏ}} = 90^\circ$, sđ$\overset{\frown}{AB}_{\text{lớn}} = 270^\circ$.

b) Ta có $\widehat{AOB} =$ sđ$\overset{\frown}{AB}_{\text{nhỏ}} = 90^\circ$, mà $OA = OB =$ bán kính
Suy ra tam giác OAB vuông cân tại O.
Mặt khác OH vuông góc với AB tại H.
Suy ra tam giác OHA vuông cân tại H.
Suy ra $OH = HA = \dfrac{AB}{2}$.

□

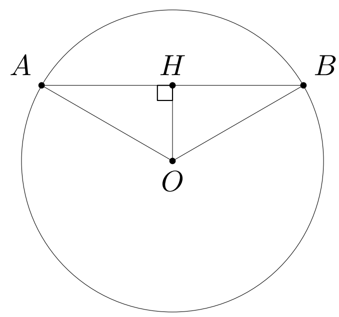
Bài 14. Cho đường tròn $(O;R)$ và một dây cung AB sao cho số đo cung lớn AB gấp đôi số đo cung nhỏ AB. Tính độ dài dây AB.

Lời giải.

sđ$\overset{\frown}{AB}_{\text{lớn}} +$ sđ$\overset{\frown}{AB}_{\text{nhỏ}} = 360^\circ$ mà sđ$\overset{\frown}{AB}_{\text{lớn}} = 2 \cdot$ sđ$\overset{\frown}{AB}_{\text{nhỏ}}$ nên sđ$\overset{\frown}{AB}_{\text{nhỏ}} = 120^\circ$. Suy ra $\widehat{120^\circ}$. Vẽ $OH \perp AB$, ta có $\widehat{AOH} = \widehat{HOB} = 60^\circ$ và $AH = HB = \dfrac{1}{2}AB$.

Tam giác AOH có $\widehat{AHO} = 90^\circ$, $\widehat{AOH} = 60^\circ$ nên $OH = \dfrac{1}{2}AO = \dfrac{1}{2}R$. Áp dụng định lí Py-ta-go ta có $AH^2 = AO^2 - OH^2 = \dfrac{3R^2}{4} \Rightarrow AH = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $AB = 2 \cdot AH = R\sqrt{3}$.

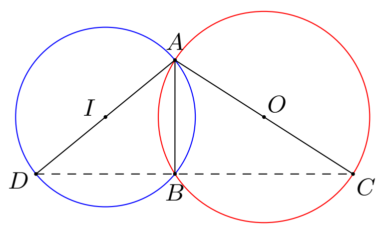


□

Bài 15. Cho hai đường tròn $(O), (I)$ cắt nhau tại hai điểm A, B. Kẻ các đoạn thẳng AC, AD lần lượt là các đường kính của hai đường tròn $(O), (I)$. Chứng minh ba điểm B, C, D thẳng hàng.

Lời giải.

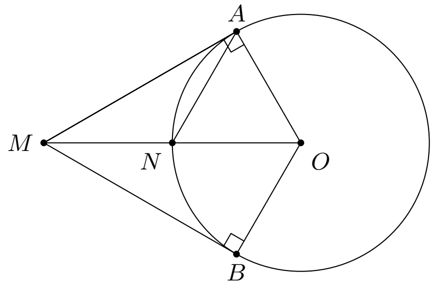
Ta có $\widehat{ABD}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường (I) nên $\widehat{ABD} = 90^\circ$.
Ta có $\widehat{ABC}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường (O) nên $\widehat{ABC} = 90^\circ$. Suy ra $\widehat{ABD} + \widehat{ABC} = 90^\circ + 90^\circ 180^\circ$ hay $\widehat{DBC} = 180^\circ$.
Vậy ba điểm B, D, C thẳng hàng.



□

Bài 16. Cho đường tròn $(O; 5\text{ cm})$ và điểm M sao cho $OM = 10$ cm. Qua M vẽ hai tiếp tuyến với đường tròn tại A và B. Tính số đo góc ở tâm được tạo bởi hai tia OA và OB.

Lời giải.

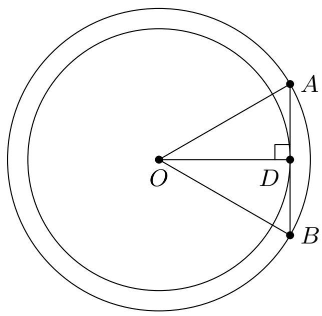


Gọi N là giao điểm MO và (O). Suy ra N là trung điểm MO.
Mà $\triangle MAO$ vuông tại A.
Suy ra $AN = NO = AO = 5$ cm.
Suy ra $\triangle ANO$ đều.
Suy ra $\widehat{AON} = 60^\circ$.
Suy ra $\widehat{AOB} = 120^\circ$.

□

Bài 17. Cho hai đường tròn đồng tâm $(O; R)$ và $\left(O; \dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right)$. Một tiếp tuyến của đường tròn nhỏ cắt đường tròn lớn tại hai điểm A và B. Tính số đo cung AB.

Lời giải.

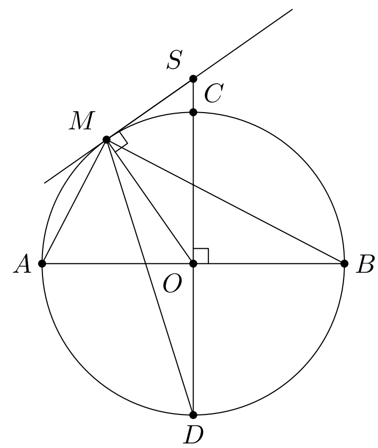


Gọi D là tiếp điểm của (O, R). Ta có tam giác ADO vuông tại D, suy ra
$\cos \widehat{AOD} = \dfrac{OD}{OA} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{AOD} = 30^\circ$.
Tương tự $\cos \widehat{BOD} = \dfrac{OD}{OB} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \widehat{BOD} = 30^\circ$.
Vậy sđ$\overset{\frown}{AB} = \widehat{AOB} = \widehat{AOD} + \widehat{BOD} = 60^\circ$.

□

Bài 18. Cho đường tròn (O) có hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. Lấy một điểm M trên cung nhỏ AC rồi vẽ tiếp tuyến với đường tròn (O) tại M. Tiếp tuyến này cắt đường thẳng CD tại S. Chứng minh rằng $\widehat{MSD} = 2\widehat{MBA}$.

Lời giải.



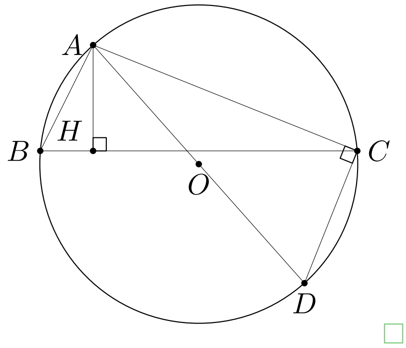
Ta có $\widehat{MBA} = \dfrac{1}{2}\widehat{MOA}$.
Mà $\widehat{MOA} = \widehat{MSD}$ (cùng phụ $\widehat{MOS}$).
Suy ra $\widehat{MSD} = 2\widehat{MBA}$.

□

Bài 19. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$ có $AB = 8$cm, $AC = 15$cm; đường cao $AH = 5$cm và $\widehat{BAC} > 90^\circ$. Tính bán kính R.

Lời giải.

Kẻ đường kính AD của đường tròn $(O;R)$.
Xét tam giác AHB và ACD có:
$\widehat{AHB}=\widehat{ACD}=90^\circ$;
$\widehat{ABH}=\widehat{ADC}$.
Do đó $\triangle AHB\sim\triangle ACD$ (g.g) nên $\dfrac{AH}{AC}=\dfrac{AB}{AD}$
$\Rightarrow \dfrac{5}{15}=\dfrac{8}{AD}\Rightarrow AD=24$ cm. Vậy $R=12$ cm.

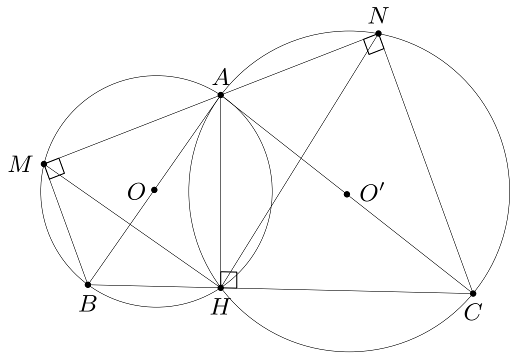


Bài 20. Cho $\triangle ABC$. Đường tròn (O) đường kính AB cắt đường tròn (O') đường kính AC tại giao điểm thứ hai là H. Một đường thẳng (d) quay quanh A cắt đường tròn (O) và (O') tại M và N sao cho A nằm giữa M và N.

a) Chứng minh H thuộc cạnh BC và $BCNM$ là hình thang vuông.

b) Chứng minh tỉ số $\dfrac{HM}{HN}$ không đổi.

Lời giải.



a) Sử dụng góc nội tiếp chắn nửa đường tròn bằng 90°, ta có

- $\widehat{AHB}=90^\circ$; $\widehat{AHC}=90^\circ$ suy ra B, H, C thẳng hàng hay H thuộc BC.
- $\widehat{BMA}=90^\circ$, $\widehat{CNA}=90^\circ$ suy ra $BM\parallel CN$ hay $BMNC$ là hình thang vuông.

b) Xét (O) có $\widehat{ABH}=\widehat{AMH}$ (góc nội tiếp). Xét $(O;)$ có $\widehat{ACH}=\widehat{ANH}$ (góc nội tiếp). Suy ra $\triangle ABC$ đồng dạng $\triangle HMN$ nên $\dfrac{HM}{HN}=\dfrac{AB}{AC}$ không đổi.

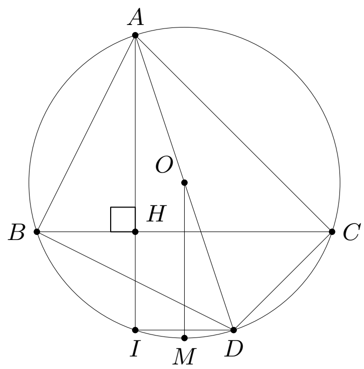
Bài 21. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường cao AH cắt đường tròn tại I. Gọi AD là đường kính của đường tròn (O). Tia phân giác góc BAC cắt đường tròn tại M. Chứng minh rằng

a) $OM\perp BC$.

b) AM là tia phân giác của góc IAD.

c) $ID\parallel BC$.

Lời giải.



a) $\overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{CM}$, suy ra điều phải chứng minh.

b) $\widehat{ABC}=\widehat{ADC}\Rightarrow\widehat{BAH}=\widehat{DAC}$, suy ra điều phải chứng minh.

c) ID và BC cùng vuông góc với AI.

Bài 4 HÌNH QUẠT TRÒN VÀ HÌNH VÀNH KHUYÊN

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 Độ dài cung tròn

Người ta chứng minh được rằng tỉ số giữa chu vi và đường kính của một đường tròn luôn bằng một số vô tỉ không đổi gọi là số π (đọc là pi). Ta có thể tìm được giá trị gần đúng của π nhờ máy tính cầm tay. Trong đời sống, ta thường lấy $\pi \approx 3{,}14$. Do đó, ta có công thức tính độ dài C của đường tròn $(O; R)$, đường kính $d = 2R$ là

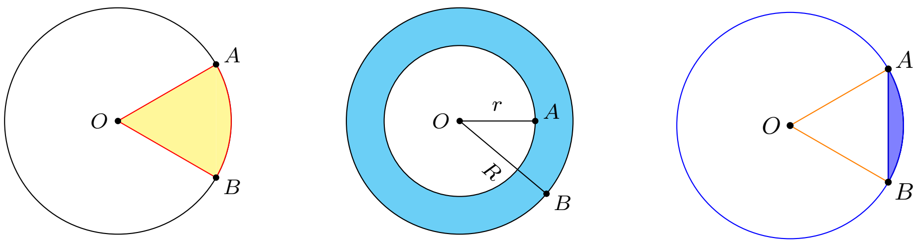
$$C = \pi d = 2\pi R. \tag{1}$$

Ta có công thức tính độ dài l của cung n° trên đường tròn $(O; R)$ là

$$l = \frac{\pi R n}{180}. \tag{2}$$

Nhận xét. Từ hai công thức (1) và (2), ta được $l = \dfrac{n}{360}\pi d = \dfrac{n}{360}C$ hay $\dfrac{l}{C} = \dfrac{n}{360}$, nghĩa là tỉ số giữa độ dài cung n° và độ dài đường tròn (cùng bán kính) đúng bằng $\dfrac{n}{360}$.

2 Hình quạt tròn và hình vành khuyên



Hình a — Hình b — Hình c

- Hình quạt tròn là phần hình tròn giới hạn bởi một cung tròn và hai bán kính đi qua hai đầu mút của cung đó (Hình a).
- Hình vành khuyên (còn gọi là hình vành khăn) là phần nằm giữa hai đường tròn có cùng tâm và bán kính khác nhau (còn gọi là hai đường tròn đồng tâm) (Hình b).
- Hình viên phân là phần hình tròn được giới hạn bởi một cung và dây căng cung (Hình c).

- Diện tích S_{q} của hình quạt tròn bán kính R ứng với cung n° là

$$S_q = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{lR}{2}. \tag{3}$$

- Diện tích S_{v} của hình vành khuyên tạo bởi hai đường tròn đồng tâm có bán kính R và r.

$$S_v = \pi\left(R^2 - r^2\right) \text{ (với } R > r). \tag{4}$$

Nhận xét. Công thức (3) có thể viết là $S_{\text{q}} = \dfrac{n}{360}S$ hay $\dfrac{S_{\text{q}}}{S} = \dfrac{n}{360} = \dfrac{l}{C}$, nghĩa là tỉ số giữa diện tích hình quạt tròn ứng với cung n° và diện tích hình tròn (cùng bán kính) đúng bằng $\dfrac{n}{360}$ và bằng tỉ số giữa độ dài cung n° và độ dài đường tròn.

B CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Tính độ dài đường tròn, cung tròn hoặc các đại lượng liên quan

Ví dụ 1.

a) Tính chu vi đường tròn biết đường kính là 5 cm.

b) Tính độ dài cung 120° của đường tròn bán kính 4 cm.

Lời giải.

a) Chu vi đường tròn $C = 2\pi R = 5\pi$ (cm).

b) Độ dài cung 120° của đường tròn bán kính 4 cm là $l = \dfrac{\pi R n}{180} = \dfrac{\pi \cdot 4 \cdot 120}{180} = \dfrac{8\pi}{3}$ (cm).

□

Ví dụ 2. Tính độ dài cung 40° của đường tròn bán kính 9 cm.

Lời giải.

Độ dài cung 40° của đường tròn bán kính 9 cm là $l = \dfrac{40}{180} \cdot \pi \cdot 9 = 2\pi$ (cm). □

Ví dụ 3. Tính độ dài cung 30° của một đường tròn có bán kính 10 cm.

Lời giải.

Cung 30°, bán kính $\mathrm{R} = 10$ cm có độ dài là: $l = \dfrac{\pi \mathrm{Rn}}{180} = \dfrac{\pi \cdot 10 \cdot 30}{180} = \dfrac{5\pi}{3}$ (cm). □

Ví dụ 4. Tính độ dài cung 72° của một đường tròn có bán kính 25 cm. (Lấy π theo máy tính và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.)

Lời giải.

Cung 72°, bán kính $\mathrm{R} = 25$ cm có độ dài là: $l = \dfrac{\pi \mathrm{Rn}}{180} = \dfrac{\pi \cdot 25 \cdot 72}{180} = 10\pi \approx 31{,}4$ (cm). □

Ví dụ 5. Cung có số đo 100° của đường tròn bán kính 8 cm dài bao nhiêu centimét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải.

Độ dài cung tròn đó là $\dfrac{100 \cdot \pi \cdot 8}{180} = \dfrac{40\pi}{9} \approx 14$ (cm). □

Ví dụ 6. Cho đường tròn $(O; R)$ độ dài $\overparen{AB}$ là $\dfrac{\pi R}{4}$. Tính sđ$\overparen{AB}$.

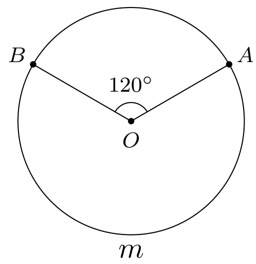
Lời giải.

Gọi n là số đo của cung nhỏ $\overparen{AB}$. Ta có $l = \dfrac{\pi R n}{180} \Rightarrow \dfrac{\pi R}{4} = \dfrac{\pi R n}{180} \Rightarrow n = \dfrac{180}{4} = 45$. Do đó sđ$\overparen{AB} = 45^\circ$. □

Ví dụ 7. Cho A và B là hai điểm trên đường tròn $(O; 3\text{ cm})$ sao cho $\widehat{AOB} = 120^\circ$. Tính số đo và độ dài các cung có hai mút A, B.

Lời giải.

Ta có hai cung:



- Cung nhỏ AB bị chắn bởi góc ở tâm AOB.
  Do đó sđ$\overset{\frown}{AB} = \widehat{AOB} = 120°$;
  Độ dài l_1 của cung AB là $l_1 = \dfrac{120}{180} \cdot \pi \cdot 3 = 2\pi$ (cm).
- Cung lớn AmB có số đo là sđ$\overset{\frown}{AmB} = 360° - 120° = 240°$.
  Độ dài l_2 của cung AmB là $l_2 = \dfrac{240}{180} \cdot \pi \cdot 3 = 4\pi$ (cm).

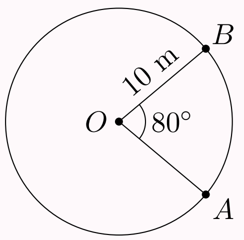
□

Ví dụ 8. Một chất điểm chuyển động trên một đường tròn có bán kính $r = 0{,}3$ m với tốc độ không đổi. Chất điểm chuyển động hết một vòng quanh đường tròn đó trong 20 s. Tính tốc độ của chất điểm (theo đơn vị mét trên giây và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải.

Chu vi của đường tròn là $C = 2\pi \cdot 0,3 = 0,6\pi$ (m).
Vậy tốc độ của chất điểm là $v = \dfrac{0{,}6\pi}{20} \approx 0{,}09$ (m/s). □

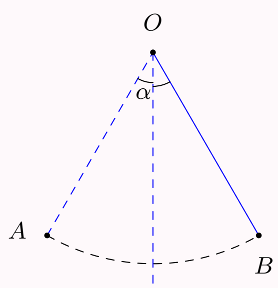
Ví dụ 9.
Tính độ dài của đoạn hàng rào từ A đến B của sân cỏ trong hình bên, cho biết $\overset{\frown}{AOB} = 80°$.



Lời giải.

Cung $80°$, bán kính $R = 10$ m có độ dài là $l = \dfrac{\pi R n}{180} = \dfrac{\pi \cdot 10 \cdot 80}{180} = 8\pi \approx 25{,}13$ (m). □

Ví dụ 10.
Một con lắc di chuyển từ vị trí A đến vị trí B. Tính độ dài quãng đường AB mà con lắc đó đã di chuyển, biết rằng sợi dây OA có độ dài bằng l và tia OA tạo với phương thẳng đứng góc α.

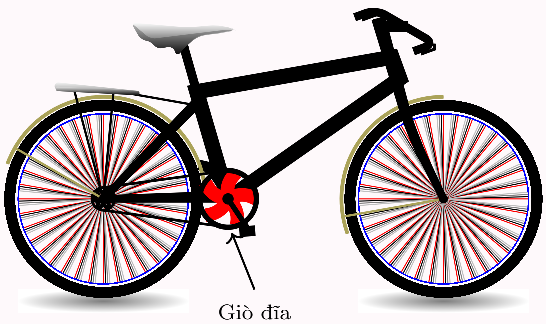


Lời giải.

Góc được tạo thành khi con lắc di chuyển từ vị trí A đến vị trí B là 2α.
Khi đó độ dài quãng đường con lắc đi được là $AB = \dfrac{\pi R \cdot 2\alpha}{180} = \dfrac{\pi R \cdot \alpha}{90}$ (đvđd). □

Ví dụ 11.

Bánh xe (khi bơm căng) của một chiếc xe đạp có đường kính 650 mm. Biết rằng khi giò đĩa quay một vòng thì bánh xe quay được khoảng 3,3 vòng. Hỏi chiếc xe đạp di chuyển được quãng đường dài bao nhiêu mét sau khi người đi xe đạp 10 vòng liên tục?
Hướng dẫn: Khi bánh xe quay 3,3 vòng thì mỗi điểm trên bánh xe di chuyển được một độ dài bằng 3,3 lần chu vi đường tròn.



Lời giải.
Chu vi của bánh xe là

$$C = \pi \cdot 650 = 650\pi \text{ (mm)}.$$

Khi đạp giò đĩa 10 vòng thì bánh xe quay được

$$10 \cdot 3{,}3 = 33 \text{ (vòng)}.$$

Khi đó mỗi điểm trên bánh xe di chuyển được quãng đường là

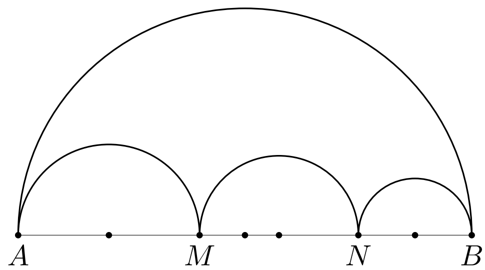
$$l = 33 \cdot 650\pi \approx 33 \cdot 650 \cdot 3{,}14 = 67353 \text{ (mm)} = 67{,}353 \text{ (m)}.$$

Vậy người đi xe đạp giò đĩa 10 vòng liên tục thì xe đạp di chuyển được quãng đường xấp xỉ 67,353 m. □

Ví dụ 12. Cho nửa đường tròn đường kính AB. Trong đoạn thẳng AB lấy hai điểm M, N (M nằm giữa A và N). Vẽ các nửa đường tròn đường kính AM, MN, NB. Chứng minh tổng độ dài của ba đường tròn đường kính AM, MN, NB bằng độ dài nửa đường tròn đường kính AB.

Lời giải.
Gọi C_1, C_2, C_3, C lần lượt là độ dài của nửa đường tròn đường kính AM, MN, NB, AB.
Ta có $C_1 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot AM$, $C_2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot MN$, $C_3 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot NB$ và $C = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot AB$.
Khi đó

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 &= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot AM + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot MN + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot NB \\ &= \frac{1}{2} \cdot \pi (AM + MN + NB) = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot AB. \end{aligned}$$



Do đó $C_1 + C_2 + C_3 = C$. □

Dạng 2. Tính diện tích hình tròn, hình quạt tròn và những yếu tố liên quan

Ví dụ 13.

a) Tính diện tích hình tròn bán kính 5 cm.

b) Tính diện tích hình quạt tròn bán kính 6 cm có số đo cung là 60°.

Lời giải.

a) Diện tích hình tròn bán kính 5 cm là: $S = \pi R^2 = 25\pi$ (cm^2).

b) Diện tích hình quạt tròn là: $S_q = \dfrac{\pi R^2 n}{360} = \dfrac{\pi \cdot 6^2 \cdot 60}{360} = 6\pi$ (cm^2).

□

Ví dụ 14.
Bề mặt phía trên của một chiếc trống có dạng hình tròn bán kính 8 cm. Diện tích bề mặt phía trên của trống đó bằng bao nhiêu centimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải.
Diện tích bề mặt phía trên của chiếc trống đó là $S = \pi \cdot 8^2 = 64\pi \approx 201$ (cm^2).

Ví dụ 15. Tính diện tích của hình quạt tròn bán kính 5 cm và có độ dài cung tương ứng với nó bằng 4π cm.

Lời giải.
Theo đề bài, hình quạt tròn có độ dài cung tương ứng với nó là $l = 4\pi$ cm, bán kính là $R = 5$ cm.
Do đó, diện tích S của nó là

$$S = \frac{l \cdot R}{2} = \frac{4\pi \cdot 5}{2} = 10\pi\left(\mathrm{cm}^2\right).$$

Ví dụ 16. Tính diện tích hình quạt tròn bán kính R = 10 cm, ứng với cung 60° (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của cm^2).

Lời giải.
Hình quạt tròn bán kính R = 10 cm, ứng với cung 60° có diện tích là

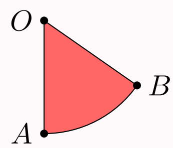
$$S = \frac{\pi \mathrm{R}^2 \mathrm{n}}{360} = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 60}{360} \approx 52{,}36\ \left(\mathrm{cm}^2\right).$$

Ví dụ 17. Tính diện tích hình quạt tròn bán kính R = 20 cm, ứng với cung 72°.

Lời giải.
Diện tích hình quạt tròn là

$$S = \frac{\pi \mathrm{R}^2 \cdot 72}{360} = \frac{\pi \cdot 20 \cdot 72}{360} = 4\pi \approx 12{,}57\ \left(\mathrm{cm}^2\right).$$

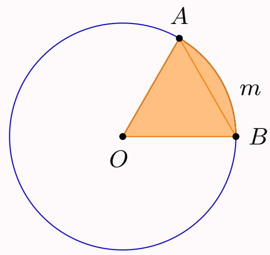
Ví dụ 18.
Tính diện tích của miếng bánh pizza có dạng hình quạt tròn trong hình bên. Biết $OA = 15$ cm và $\widehat{AOB} = 55°$.



Lời giải.
Diện tích của miếng bánh pizza là

$$S = \frac{\pi \mathrm{OA}^2 \cdot \widehat{AOB}}{360} = \frac{\pi \cdot 15 \cdot 55}{360} \approx 7{,}2\ \left(\mathrm{cm}^2\right).$$

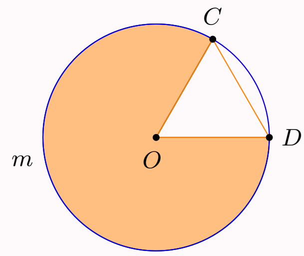
Ví dụ 19.
Cho hình quạt tròn AOB giới hạn bởi hai bán kính OA, OB và cung AmB sao cho $OA = AB$. Hãy tìm số đo cung AmB ứng với hình quạt đó.



Lời giải.

Do $OA = AB$ nên tam giác AOB là tam giác đều, suy ra $\widehat{AOB} = 60^\circ$.
Vì góc AOB là góc ở tâm chắn cung AmB nên sđ$\widehat{AOB} = 60^\circ$. □

Ví dụ 20.
Cho hình quạt tròn COD giới hạn bởi hai bán kính OC, OD và cung CmD sao cho $OC = CD$. Hãy tìm số đo cung CmD ứng với hình quạt đó.



Lời giải.

Do $OC = CDB$ nên tam giác COD là tam giác đều, suy ra $\widehat{COD} = 60^\circ$.
Vì góc COD là góc ở tâm chắn cung CnD nên sđ$\widehat{COD} = 60^\circ$.
Do đó sđ$\widehat{CmD} = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$. □

Ví dụ 21.
Một hoạ tiết trang trí có dạng hình tròn bán kính 4 dm được chia thành nhiều hình quạt tròn, mỗi hình quạt tròn có góc ở tâm là 7,5°. Diện tích của mỗi hình quạt đó là bao nhiêu dm^2 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

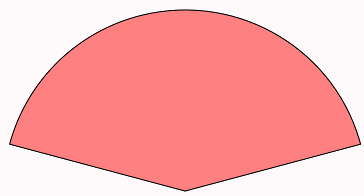
Lời giải.

Diện tích của mỗi hình quạt là $\dfrac{\pi \cdot 4^2 \cdot 7{,}5}{360} \approx 1{,}05$ (dm^2). □

Ví dụ 22.
Hình quạt ở hình bên có bán kính bằng 2 dm và góc ở tâm bằng 150°.

a) Tính diện tích của hình quạt đó theo đơn vị decimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

b) Tính chiều dài cung tương ứng với hình quạt tròn đó.



Lời giải.

a) Diện tích của hình quạt là $\dfrac{\pi \cdot 2^2 \cdot 150}{360} \approx 5{,}24$ (dm^2).

b) Ta có $S = \dfrac{lR}{2}$ nên chiều dài cung tương ứng với hình quạt tròn là $l = \dfrac{2S}{R} = \dfrac{2 \cdot 5{,}24}{2} \approx 5{,}24$ (dm).

Dạng 3. Tính diện tích hình vành khăn, hình viên phân và những yếu tố liên quan

Ví dụ 23. Tính diện tích của hình vành khuyên nằm giữa hai đường tròn đồng tâm có bán kính là 3m và 5m.

Lời giải.
Diện tích hình vành khuyên nằm giữa hai đường tròn đồng tâm có bán kính là 3m và 5m là

$$S = \pi\left(\mathrm{R}^2 - \mathrm{r}^2\right) = \pi\left(5^2 - 3^2\right) = 16\pi\,(\mathrm{m}^2).$$

Ví dụ 24. Tính diện tích của hình vành khuyên, biết hình vành khuyên đó giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm và có bán kính lần lượt là 2,5 cm; 2 cm.

Lời giải.
Tính diện tích của hình vành khuyên nằm giữa hai đường tròn đồng tâm có bán kính là 2,5 cm và 2 cm là

$$S = \pi\left(\mathrm{R}^2 - \mathrm{r}^2\right) = \pi\left(2{,}5^2 - 2^2\right) = \frac{9\pi}{4} \approx 7{,}07\,(\mathrm{cm}^2).$$

Ví dụ 25. Tính diện tích hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn $(O; 5 \text{ cm})$ và $(O; 8 \text{ cm})$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải.
Diện tích hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn $(O; 5 \text{ cm})$ và $(O; 8 \text{ cm})$ là

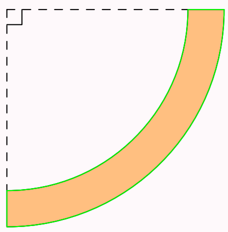
$$S = \pi\left(\mathrm{R}^2 - \mathrm{r}^2\right) = \pi\left(8^2 - 5^2\right) = 39\pi \approx 122{,}52\ \left(\mathrm{cm}^2\right).$$

Ví dụ 26. Tính diện tích hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn $(O; 10 \text{ cm})$ và $(O; 20 \text{ cm})$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải.
Diện tích hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn $(O; 10 \text{ cm})$ và $(O; 20 \text{ cm})$ là

$$S = \pi\left(\mathrm{R}^2 - \mathrm{r}^2\right) = \pi\left(20^2 - 10^2\right) = 300\pi \approx 942{,}48\ \left(\mathrm{cm}^2\right).$$

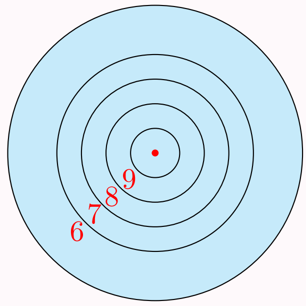
Ví dụ 27.
Hình bên mô tả mặt cắt của một khúc gỗ có dạng một phần tư hình vành khuyên, trong đó hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm và có bán kính lần lượt là 4 dm và 3 dm. Diện tích mặt cắt đó là bao nhiêu decimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Lời giải.

Diện tích của mặt cắt là $\dfrac{1}{4}\pi\left(4^2 - 3^2\right) = \dfrac{7\pi}{4} \approx 5{,}5$ (dm^2).

Ví dụ 28.
Một tấm bia tạo bởi năm đường tròn đồng tâm lần lượt có bán kính là 5 cm, 10 cm, 15 cm, 20 cm và 30 cm. Giả thiết rằng người chơi ném phi tiêu một cách ngẫu nhiên và luôn trúng bia. Tính xác suất ném trúng vòng 8 (hình vành khuyên nằm giữa đường tròn thứ hai và thứ ba), biết rằng xác suất cần tìm bằng tỉ số giữa diện tích của hình vành khuyên tương ứng với diện tích của hình tròn lớn nhất.



Lời giải.
Diện tích hình vành khuyên nằm giữa đường tròn thứ hai và thứ ba là

$$S_8 = \pi\left(15^2 - 10^2\right) = 125\pi \ \left(\mathrm{cm}^2\right).$$

Diện tích hình tròn lớn nhất

$$S = \pi \cdot 30^2 = 900\pi \ \left(\mathrm{cm}^2\right).$$

Xác suất ném trúng vòng 8 là

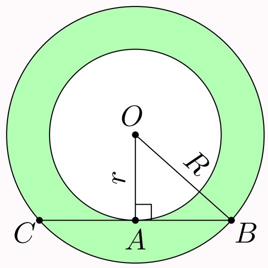
$$\frac{125\pi}{900\pi} = \frac{5}{36}.$$

□

Ví dụ 29.
Cho hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn $(O;\mathrm{r})$ và $(O;\mathrm{R})$ với $\mathrm{R} > \mathrm{r}$. Trên đường tròn $(O;\mathrm{R})$ lấy hai điểm B, C sao cho BC vừa là dây cung của $(O;\mathrm{R})$, vừa vuông góc với bán kính của đường tròn $(O;\mathrm{r})$ tại A (hình bên).

a) Tính độ dài đoạn thẳng BC theo r và R.

b) Cho $BC = a\sqrt{3}$. Tính diện tích hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn $(O;\mathrm{r})$ và $(O;\mathrm{R})$ theo a.



Lời giải.

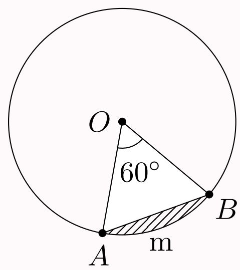
a) $BC = 2AB = 2\sqrt{OB^2 - OA^2} = 2\sqrt{\mathrm{R}^2 - \mathrm{r}^2}$..

b) Diện tích hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn $(O;\mathrm{r})$ và $(O;\mathrm{R})$ là

$$S = \pi\left(\mathrm{R}^2 - \mathrm{r}^2\right) = \pi\left(\frac{BC}{2}\right)^2 = \pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3\pi}{4}a^2 \ \left(\mathrm{cm}^2\right).$$

□

Ví dụ 30.
Phần hình tròn được giới hạn bởi một cung và dây căng cung đó gọi là *hình viên phân*. Tính diện tích hình viên phân AmB, biết góc ở tâm $\widehat{AOB} = 60^\circ$ và bán kính đường tròn là 5,1 cm (hình bên) (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của cm^2).



Lời giải.
Ta có OAB là tam giác đều cạnh R, suy ra

$$S_{OAB} = \frac{\mathrm{R}^2\sqrt{3}}{4} = \frac{5{,}1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \approx 11{,}26 \ \left(\mathrm{cm}^2\right).$$

Diện tích hình quạt tròn $OAmB$ là

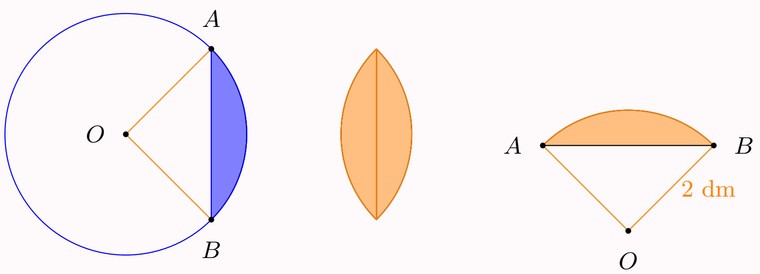
$$S_{OAmB}=\frac{\pi R^2\cdot 60}{360}=\frac{\pi\cdot 5{,}1^2\cdot 60}{360}\approx 13{,}62\ \left(\mathrm{cm}^2\right).$$

Suy ra diện tích hình viên phân AmB là

$$S_{AmB}=S_{OAMB}-S_{OAB}\approx 13{,}62-11{,}26=2{,}36\ \left(\mathrm{cm}^2\right).$$

□

Ví dụ 31. Hình viên phân là hình giới hạn bởi một cung tròn và dây cung (tương ứng) của đường tròn (minh hoạ bởi phần tô đậm ở Hình a). Người ta làm một hoạ tiết trang trí bằng cách ghép hai hình viên phân bằng nhau (Hình b), mỗi hình viên phân đó có góc ở tâm tương ứng là 90° và bán kính đường tròn tương ứng là 2 dm (Hình c). Tính diện tích của hoạ tiết trang trí đó (theo đơn vị decimét vuông và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Hình a   Hình b   Hình c

Lời giải.

Trong Hình 79, ta có

- Diện tích tam giác OAB là $S_1=\dfrac{1}{2}OA\cdot OB=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2\ (\mathrm{dm}^2)$;
- Do sđ$\overset{\frown}{AB}=90^\circ$ nên diện tích hình quạt tròn AOB tương ứng là
  $S_2=\dfrac{\pi\cdot 2^2\cdot 90}{360}=\pi\ (\mathrm{dm}^2)$.

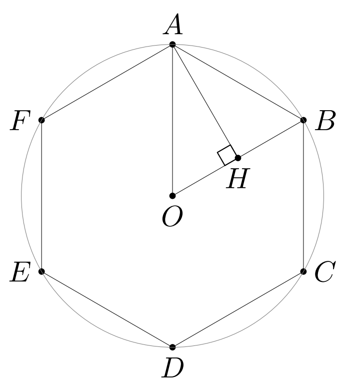
Suy ra diện tích hình viên phân là $S_3=S_2-S_1=\pi-2\ (\mathrm{dm}^2)$.
Vậy diện tích của hoạ tiết trang trí đó là $S=2S_3=2(\pi-2)\approx 2{,}28\ (\mathrm{dm}^2)$. □

Ví dụ 32. Cho lục giác đều $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn $(O;\,2\text{ cm})$. Tính diện tích phần hình tròn nằm bên ngoài hình lục giác.

Lời giải.

Số đo cung AB là: $\dfrac{360^\circ}{6}=60^\circ$.
Diện tích hình quạt OAB là

$$S_{\text{q}}=\frac{\pi R^2 n}{360}=\frac{\pi\cdot 2^2\cdot 60}{360}=\frac{2\pi}{3}.$$



$\triangle AOB$ có $OA=OB$, $\widehat{AOB}=60^\circ$ nên $\triangle AOB$ đều, do đó $AB=OA=OB=R$.
Vẽ $AH\perp AB$, ta có: $OH=HB=\dfrac{R}{2}$.

Áp dụng định lí Pi-ta-go ta có $AH^2=AB^2-BH^2=R^2-\dfrac{R^2}{4}=\dfrac{3R^2}{4}$ hay $AH=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

Vậy diện tích $\triangle AOB$ là: $S_{AOB}=\dfrac{1}{2}\cdot OB\cdot AH=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

Do đó ta có diện tích hình viên phân cung AB là

$$S_{VP(\overset{\frown}{AB})} = S_{\text{q}} - S_{AOB} = \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\ (\text{cm}^2).$$

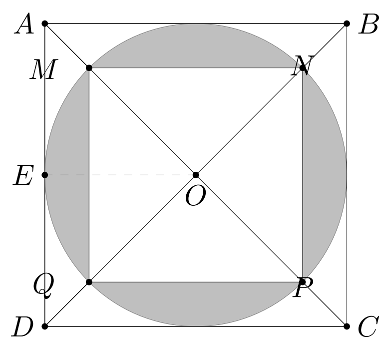
Vậy diện tích phần hình tròn (kí hiệu S) nằm bên ngoài hình lục giác là

$$S = 6 \cdot S_{VP(\overset{\frown}{AB})} = 6 \cdot \left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\right)\ (\text{cm}^2).$$

Hay $S = 4\pi - 6\sqrt{3}\ (\text{cm}^2)$. □

Ví dụ 33. Cho đường tròn $(O;\ R)$ nội tiếp hình vuông $ABCD$ và ngoại tiếp hình vuông $MNPQ$. Biết rằng $BD = 12$ cm. Tính diện tích phần tô đen.

Lời giải.



Để tính diện tích phần tô đen, ta chỉ cần tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi cung MQ và dây MQ.

$BD = 12$ cm thì $AB = 6\sqrt{2}$ cm. $OE = 3\sqrt{2}$ cm. Diện tích hình quạt $OMEQO$ là

$$S_1 = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi\left(3\sqrt{2}\right)^2 90}{360} = \frac{9\pi}{2}\ (\text{cm}^2).$$

Diện tích tam giác MOQ là: $S_2 = \frac{1}{2}OM \cdot OQ = 9\ (\text{cm}^2)$.

Do đó diện tích hình viên phân giới hạn bởi cung MQ và dây MQ là

$$S_3 = S_1 - S_2 = \frac{9\pi}{2} - 9 = \frac{9(\pi - 2)}{2}\ (\text{cm}^2).$$

Vậy diện tích phần tô đen là $S = 4 \cdot S_3 = 18(\pi - 2)\ (\text{cm}^2)$. □

C BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Tính độ dài các cung 30°; 90°; 120° của đường tròn $(O; 6\text{ cm})$.

Lời giải.

Độ dài cung 30° là $\dfrac{\pi \cdot 6 \cdot 30}{180} = \pi \approx 3{,}14\ (\text{cm}^2)$.

Độ dài cung 90° là $\dfrac{\pi \cdot 6 \cdot 30}{180} = 3\pi \approx 9{,}42\ (\text{cm}^2)$.

Độ dài cung 120° là $\dfrac{\pi \cdot 6 \cdot 30}{180} = 4\pi \approx 12{,}57\ (\text{cm}^2)$. □

Bài 2. Một máy kéo nông nghiệp có đường kính bánh xe sau là 124 cm và đường kính bánh xe trước là 80 cm. Hỏi khi bánh xe sau lăn được 20 vòng thì bánh xe trước lăn được bao nhiêu vòng?

Lời giải.

Gọi n là số vòng bánh xe trước lăn được.

Vì đường kính bánh xe và số vòng lăn của bánh xe là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên $124 \cdot 20 = 80 \cdot n \Rightarrow n = 31$.

Vậy bánh xe trước lăn được 31 vòng. □

Bài 3. Thành phố Đà Lạt nằm vào khoảng $11^\circ 58'$ vĩ độ Bắc. Mỗi vòng kinh tuyến của Trái Đất dài khoảng 40 000 km. Hãy tính độ dài cung kinh tuyến từ Đà Lạt đến xích đạo.

Lời giải.

Độ dài cung kính tuyến từ Đà Lạt đến Xích đạo là $\dfrac{40\ 000 \cdot 58}{360} \approx 6\ 444{,}4$ km. □

Bài 4. Cho đường tròn $(O; 4\text{ cm})$ và ba điểm A, B, C trên đường tròn đó sao cho tam giác ABC cân tại đỉnh A và số đo của cung nhỏ BC bằng 70°.

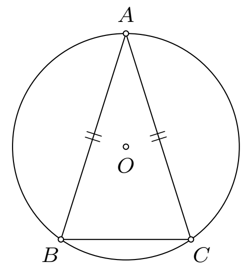
a) Giải thích tại sao hai cung nhỏ AB và AC bằng nhau.

b) Tính độ dài của các cung BC, AB và AC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải.

a) Trong đường tròn O có $AB = AC$ ($\triangle ABC$ cân tại A).
Suy ra hai cung nhỏ AB và AC bằng nhau (hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau).

b) Độ dài cung BC là $l_{BC} = \dfrac{70}{180} \cdot \pi \cdot 4 \approx 4{,}9$ (cm).
Số đo mỗi cung AB và AC là $(360^\circ - 70^\circ) : 2 = 145^\circ$.
Độ dài mỗi cung AB và AC là $l_{AB} = l_{AC} = \dfrac{145}{180} \cdot \pi \cdot 4 \approx 10{,}1$ (cm).



Bài 5. Cho đường tròn $(O; R)$ và một dây cung AB.

a) Nếu biết sđ$\overset{\frown}{AB} = 90^\circ$. Tính chu vi hình viên phân giới hạn bởi dây AB và cung nhỏ AB.

b) Nếu độ dài cung AB là $\dfrac{5\pi R}{6}$. Tính số đo góc $\widehat{AOB}$.

Lời giải.

a) Gọi l là độ dài cung nhỏ AB. Do giả thiết suy ra $l = \dfrac{\pi \cdot R \cdot 90}{180} = \dfrac{\pi R}{2}$.
Do tam giác OAB vuông cân đỉnh O, theo định lí Py-ta-go ta có

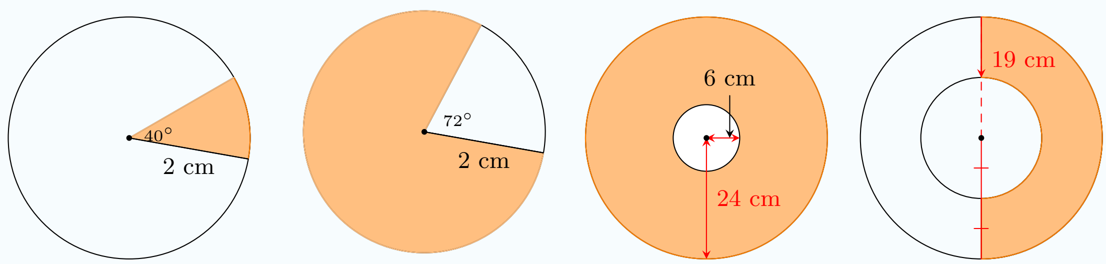
$$AB^2 = OA^2 + OB^2 = 2R^2 \Rightarrow AB = R\sqrt{2}.$$

Do đó chu vi hình viên phân giới hạn bởi dây AB và cung nhỏ AB là

$$\frac{\pi R}{2} + \sqrt{2}R = \frac{\left(\pi + 2\sqrt{2}\right) R}{2}.$$

b) Gọi n là số đo góc $\widehat{AOB}$. Theo công thức $l = \dfrac{\pi R n}{180}$ nên $\dfrac{5\pi R}{6} = \dfrac{\pi R n}{180} \Rightarrow n = 150$.
Vậy số đo góc $\widehat{AOB} = 150^\circ$.

Bài 6. Quan sát các hình sau.



Hình a Hình b Hình c Hình d

a) Tính diện tích phần được tô màu trong mỗi hình đó.

b) Tính độ dài cung tròn được tô màu xanh ở mỗi hình a, b.

Lời giải.

a)

- Xét hình a.
$S = \dfrac{\pi \cdot 2^2 \cdot 40}{360} = \dfrac{4}{9}\pi \approx 1{,}4\ \text{cm}^2.$
- Xét hình b.
$S = \dfrac{\pi \cdot 2^2 \cdot 72}{360} = \dfrac{4}{5}\pi \approx 2{,}5\ \text{cm}^2.$
- Xét hình c.
$S = \dfrac{1}{4}\pi\left(24^2 - 6^2\right) = 135\ (\text{cm}^2).$
- Xét hình d.
$S = \dfrac{\frac{1}{4}\pi\left(38^2 - 19^2\right)}{2} = \dfrac{1083}{3} \approx 135{,}4\ (\text{cm}^2).$

b)

- Xét hình a.
$S = \dfrac{\pi \cdot 2^2 \cdot 320}{360} = \dfrac{32}{9}\pi \approx 11{,}2\ \text{cm}^2.$
- Xét hình b.
$S = \dfrac{\pi \cdot 2^2 \cdot 288}{360} = \dfrac{16}{5}\pi \approx 10{,}1\ \text{cm}^2.$

□

Bài 7. Tính diện tích các hình quạt tròn ứng với cung có số đo lần lượt là 30°; 90°; 120° của hình tròn $(O; 12\ \text{cm})$.

Lời giải.

a) Diện tích hình quạt tròn ứng với cung 30° là $\dfrac{\pi \cdot 12^2 \cdot 30}{360} = 12\pi \approx 37{,}7\ (\text{cm}^2).$

b) Diện tích hình quạt tròn ứng với cung 60° là $\dfrac{\pi \cdot 12^2 \cdot 90}{360} = 36\pi \approx 113{,}1\ (\text{cm}^2).$

c) Diện tích hình quạt tròn ứng với cung 30° là $\dfrac{\pi \cdot 12^2 \cdot 120}{360} = 48\pi \approx 150{,}8\ (\text{cm}^2).$

□

Bài 8. Tính diện tích các hình quạt tròn ứng với cung có độ dài lần lượt là 8 cm, 15 cm của hình tròn $(O; 5\ \text{cm})$.

Lời giải.
Vì diện tích hình quạt tròn tỉ lệ thuận với độ dài cung ứng với nó nên diện tích hình quạt tròn ứng với cung có độ dài là l được tính theo công thức là $S = \pi \mathrm{R}^2 \cdot \dfrac{l}{2\pi \mathrm{R}} = \dfrac{\mathrm{R}l}{2}$. Khi đó:

a) Diện tích các hình quạt tròn ứng với cung có độ dài 8 cm là $\dfrac{5 \cdot 8}{2} = 20\ \text{cm}^2.$

b) Diện tích các hình quạt tròn ứng với cung có độ dài 15 cm là $\dfrac{5 \cdot 15}{2} = 37{,}5\ \text{cm}^2.$

□

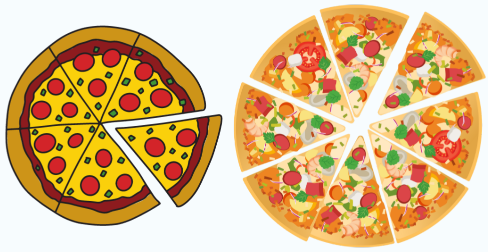
Bài 9. Tính diện tích của hình quạt tròn bán kính 4 cm, ứng với cung 36°.

Lời giải.

Diện tích của hình quạt tròn bán kính 4 cm, ứng với cung 36° là $S_q = \dfrac{36}{360} \cdot \pi \cdot 4^2 = 1{,}6\pi \ \left(\text{cm}^2\right)$. □

Bài 10.

Có hai chiếc bánh pizza hình tròn. Chiếc bánh thứ nhất có đường kính 16 cm được cắt thành 6 miếng đều nhau có dạng hình quạt tròn. Chiếc bánh thứ hai có đường kính 18 cm được cắt thành 8 miếng đều nhau có dạng hình quạt tròn. Hãy so sánh diện tích bề mặt của hai miếng bánh cắt ra từ chiếc bánh thứ nhất và thứ hai.



Lời giải.

Diện tích miếng bánh được cắt ra từ chiếc bánh thứ nhất là

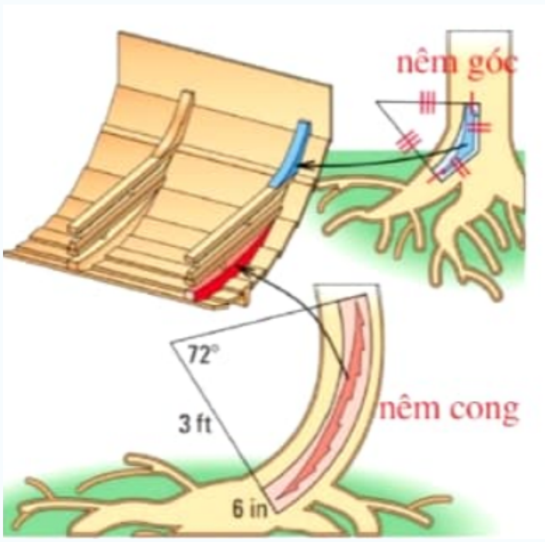
$$S_1 = \frac{360}{360} \cdot \pi \cdot 16^2 : 6 = \frac{128\pi}{3} \ \left(\text{cm}^2\right).$$

Diện tích miếng bánh được cắt ra từ chiếc bánh thứ hai là

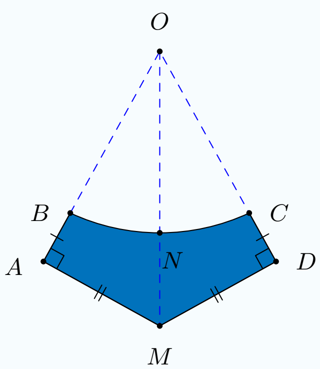
$$S_2 = \frac{360}{360} \cdot \pi \cdot 18^2 : 8 = \frac{81\pi}{2} \ \left(\text{cm}^2\right).$$

Vì $\dfrac{128\pi}{3} > \dfrac{81\pi}{2}$ nên diện tích miếng bánh được cắt ra từ chiếc bánh thứ nhất lớn hơn diện tích miếng bánh được cắt ra từ chiếc bánh thứ hai. □

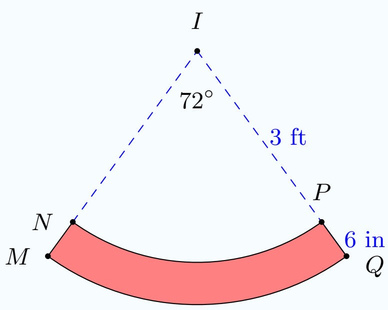
Bài 11. Khi đóng đáy thuyền cho những con thuyền vượt biển, người Vikings sử dụng hai loại nêm nêm góc và nêm cong (lần lượt tô màu xanh, màu đỏ trong Hình a). Mặt cắt $ABCD$ của nêm góc có dạng hai tam giác vuông OAE, ODE bằng nhau với cạnh huyền chung và bỏ đi hình quạt tròn OBC (Hình b), được làm từ những thân cây mọc thẳng. Mặt cắt $MNPQ$ của nêm cong có dạng một phần của hình vành khuyên (Hình c), được làm từ những thân cây cong. Kích thước của nêm cong được cho như ở Hình c.



Hình a



Hình b



Hình c

a) Diện tích của nêm cong là bao nhiêu centimét vuông (lấy 1ft = 30 cm, 1in = 2,54 cm, $\pi = 3{,}14$ và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

b) Cần phải biết những kích thước nào của nêm góc để tính được diện tích của nêm đó?

Lời giải.

a) Diện tích của nêm cong là
$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 3,14 \cdot 6 \cdot 2{,}54 \approx 2{,}4 \text{ cm}^2$.

b) Cần phải biết OA, OB và OM thì tính được diện tích của nêm.
Khi đó $S_{(\text{nêm})} = 2\left(S_{\triangle OAM} - S_{\text{quạt}BON}\right)$.

Bài 12. Tính diện tích hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn $(O; 9 \text{ cm})$ và $(O; 12 \text{ cm})$.

Lời giải.
Diện tích hình vành khuyên là $S = \pi(12^2 - 9^2) = 63\pi \approx 197{,}92 \text{ cm}^2$.

Bài 13. Tính diện tích hình vành khuyên nằm giữa hai đường tròn đồng tâm có bán kính là 6 cm và 4 cm.

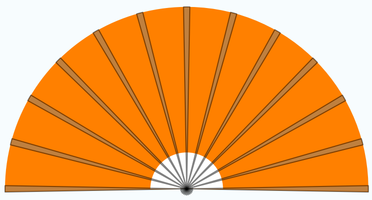
Lời giải.
Diện tích hình vành khuyên nằm giữa hai đường tròn đồng tâm có bán kính là 6 cm và 4 cm là

$$S_v = \pi\left(6^2 - 4^2\right) = 20\pi \ \left(\text{cm}^2\right).$$

Bài 14.
Hình bên mô tả mặt cắt của một chiếc đèn led có dạng hai hình vành khuyên màu trắng với bán kính các đường tròn lần lượt là 15 cm, 18 cm, 21 cm, 24 cm. Tính diện tích hai hình vành khuyên đó.

Lời giải.
$S_1 = \frac{1}{4}\pi\left(18^2 - 15^2\right) = \frac{99\pi}{4} \approx 77{,}8 \ (\text{cm}^2)$.
$S_2 = \frac{1}{4}\pi\left(24^2 - 21^2\right) = \frac{135\pi}{4} \approx 106 \ (\text{cm}^2)$.

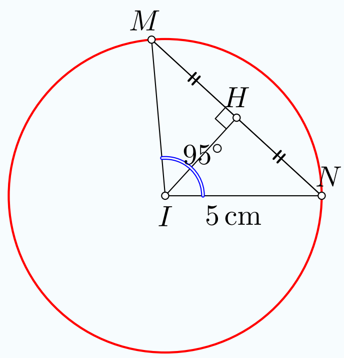
Bài 15.
Một chiếc quạt giấy khi xoè ra có dạng nửa hình tròn bán kính 2,2 dm như hình bên. Tính diện tích phần giấy của chiếc quạt, biết rằng khi gấp lại, phần giấy có chiều dài khoảng 1,6 dm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của dm^2).



Lời giải.
Phần giấy của chiếc quạt là một hình vành khuyên với bán kính đường tròn lớn là 2,2 dm và bán kính đường tròn nhỏ là $2{,}2 - 1{,}6 = 0{,}6$ dm.
Vậy diện tích phần giấy của chiếc quạt là

$$S = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left[(2{,}2)^2 - (0{,}6)^2\right] \approx 7{,}04 \ \left(\text{dm}^2\right).$$

Bài 16.
Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây cung có độ dài là 55 cm và cung có số đo là 95°.



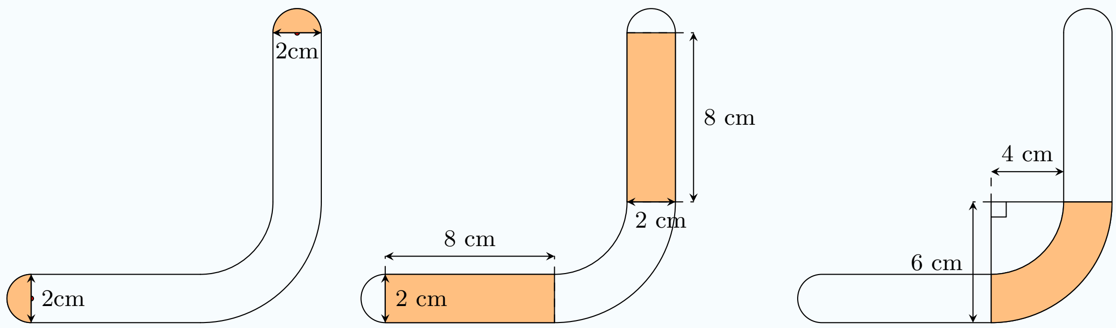
Lời giải.

Diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi IM, IN và cung nhỏ MN là $S_{\text{quạt}} = \dfrac{\pi \cdot 5^2 \cdot 95}{360} = \dfrac{475\pi}{72}\,(\text{cm}^2)$.

Diện tích tam giác MIN là $S_{MIN} = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sin 95^\circ\,(\text{cm}^2)$.

Diện tích của hình viên phân giới hạn bởi dây cung MN là $S = S_{\text{quạt}} - S_{MIN} \approx 12{,}2\,(\text{cm}^2)$. □

Bài 17. Hình dưới mô tả mặt cắt của một khung gỗ có dạng ghép của năm hình: hai nửa đường tròn đường kính 2 cm; hai hình chữ nhật kích thước 2 cm ×8 cm; một phần tư hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm có bán kính lần lượt là 4 dm và 6 dm. Tính diện tích của mặt cắt của khung gỗ đó.



Lời giải.

Diện tích mặt cắt $S = 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 + 2 \cdot 2 \cdot 8 + \dfrac{1}{4}\pi(6^2 - 4^2) \approx 50{,}85\text{ cm}^2$. □

Bài 18. Cho đường tròn $(O; R)$.

a) Tính $\widehat{AOB}$ biết độ dài cung AB là $\dfrac{\pi R}{3}$.

b) Trên cung lớn AB lấy điểm C sao cho $\triangle AOC$ vuông cân tại O. Tính độ dài $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{BC}$ lớn.

Lời giải.

a) Theo công thức $l = \dfrac{\pi R n}{180}$ nên $\dfrac{\pi R}{3} = \dfrac{\pi R n}{180} \Rightarrow n = 60$.
Vậy $n^\circ = 60^\circ$ hay $\widehat{AOB} = 60^\circ$.

b) Do giả thiết suy ra sđ$\overset{\frown}{AC} = 90^\circ$ nên độ dài $\overset{\frown}{AC}$ là $\dfrac{\pi \cdot R \cdot 90}{180} = \dfrac{\pi R}{2}$.
Mặt khác số đo cung lớn BC là $360^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 210^\circ$.
Khi đó độ dài $\overset{\frown}{BC}$ là $\dfrac{\pi \cdot R \cdot 210}{180} = \dfrac{7\pi R}{6}$.

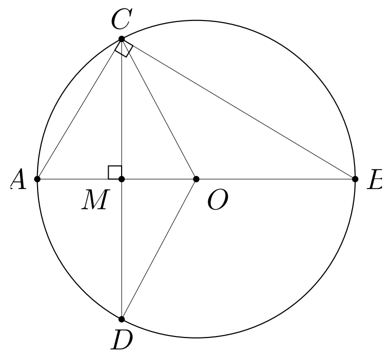
□

Bài 19. Cho đường tròn đường tròn đường kính AB. Vẽ dây CD vuông góc với AB tại M. Giả sử $AM = 1\,\text{cm}$, $CD = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$.

a) Tính độ dài đường tròn.

b) Tính độ dài cung $\overset{\frown}{CAD}$.

Lời giải.



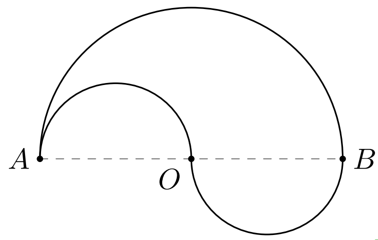
a) Do giả thiết suy ra $\triangle ABC$ vuông tại C. Áp dụng hệ thức lượng trong $\triangle ABC$, ta có $CM^2 = AM \cdot MB$.
Vì $CD \perp AB$ nên $MC = MD = \dfrac{CD}{2} = \sqrt{3}$ (cm) do đó $MB = 3$ (cm) và $AB = AM + MB = 4$ (cm).
Khi đó độ dài đường tròn là $2\pi R = 4\pi$ (cm).

b) Áp dụng định lí Py-ta-go trong $\triangle AMC$ vuông, ta có $AC^2 = AM^2 + CM^2 = 1 + 3 = 4 \Rightarrow AC = 2$ (cm). Suy ra $OA = OC = AC$ hay $\triangle AOC$ là tam giác đều nên $\widehat{AOC} = 60°$.

Mà $\widehat{COD} = 2\widehat{AOC} = 2 \cdot 60° = 120°$. Khi đó độ dài cung $\overset{\frown}{CAD}$ là $\dfrac{\pi \cdot R \cdot n}{180} = \dfrac{\pi \cdot R \cdot 120}{180} = \dfrac{2\pi R}{3}$. □

Bài 20. Tính chu vi hình vẽ bên, biết $OA = 4\,\text{cm}$.

Lời giải.



Do giả thiết suy ra $OA = OB = 4\,\text{cm}$ và $AB = 2OA = 8\,\text{cm}$.
Gọi C là chu vi hình khi đó

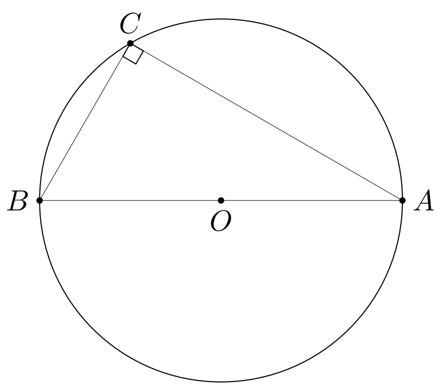
$$C = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \cdot 4 \cdot 180}{180} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \cdot 4 \cdot 180}{180} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \cdot 8 \cdot 180}{180} = 8\pi.$$

Vậy chu vi hình là 8π. □

Bài 21. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Biết rằng $\dfrac{\text{sđ}\overset{\frown}{BC}}{1} = \dfrac{\text{sđ}\overset{\frown}{CA}}{2} = \dfrac{\text{sđ}\overset{\frown}{AB}}{3}$. Gọi a, b, c lần lượt là độ dài các đường tròn đường kính BC, CA, AB. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{\sqrt{3}} = \frac{c}{2}.$$

Lời giải.



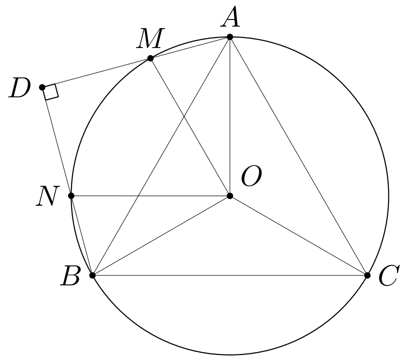
Đặt $x = \text{sđ}\overset{\frown}{BC}$, $y = \text{sđ}\overset{\frown}{CA}$ và $z = \text{sđ}\overset{\frown}{AB}$.
Do giả thiết $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3} = \dfrac{x+y+z}{1+2+3}$.
Mà $x + y + z = 360°$ do đó $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3} = \dfrac{360°}{6} = 60°$.

- Khi $\dfrac{x}{1} = 60°$ suy ra $x = 60°$.
- Khi $\dfrac{y}{2} = 60°$ suy ra $y = 2 \cdot 60° = 120°$.
- Khi $\dfrac{z}{3} = 60°$ suy ra $z = 3 \cdot 60° = 180°$.

Nên $\triangle ABC$ có $\widehat{BAC} = 90°$, $\widehat{CBA} = 60°$ và $\widehat{BAC} = 30°$. Suy ra $AB = 2R$, $CB = R$ và $AC = \sqrt{3}R$.
Khi đó $a = \pi R$, $b = \sqrt{3}\pi R$ và $c = 2\pi R$ suy ra $\dfrac{a}{1} = \dfrac{b}{\sqrt{3}} = \dfrac{c}{2}$. □

Bài 22. Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn $(O; 6\,\text{cm})$. Vẽ bên ngoài tam giác ABD vuông cân tại D. Các đường thẳng AD, DB lần lượt cắt đường tròn (O) tại M, N. Tính độ dài cung nhỏ AM, BN, MN và MC.

Lời giải.



Ta có $\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AB}$ mà $\widehat{ACB} = 60^\circ$ suy ra $\text{sđ}\overset{\frown}{AB} = 120^\circ$.
Tương tự $\widehat{MAB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{MB}$ mà $\widehat{MAB} = 45^\circ$ suy ra $\text{sđ}\overset{\frown}{MB} = 90^\circ$.
Suy ra $\text{sđ}\overset{\frown}{MA} = \text{sđ}\overset{\frown}{AB} - \text{sđ}\overset{\frown}{MB} = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$.
Gọi l là độ dài cung $\overset{\frown}{MA}$, ta có

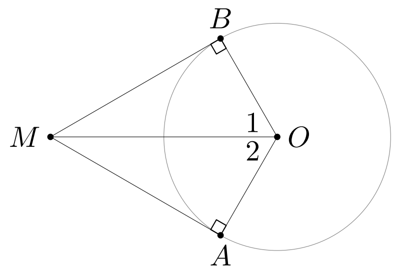
$$l = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi \cdot 6 \cdot 30}{180} = \pi.$$

Dễ thấy độ dài cung $\overset{\frown}{NB}$ bằng π.

Mặt khác $\text{sđ}\overset{\frown}{MN} = \text{sđ}\overset{\frown}{AB} - \text{sđ}\overset{\frown}{MA} - \text{sđ}\overset{\frown}{NB} = 120^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.
Khi đó, gọi l' là độ dài cung MN ta có $l' = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi \cdot 6 \cdot 60}{180} = 2\pi$.
Gọi l'' là độ dài cung AC suy ra $l'' = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi \cdot 6 \cdot 120}{180} = 4\pi$.
Do đó độ dài cung MC bằng $\pi + 4\pi = 5\pi$. □

Bài 23. Cho hình tròn $(O;\ 3\ \text{cm})$ và điểm M nằm ngoài đường tròn. Qua M kẻ tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn. Biết $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Tính diện tích hình giới hạn bởi MA, MB và cung nhỏ AB.

Lời giải.



Ta có $\widehat{AMB} = 60^\circ$ nên $\widehat{AOB} = 120^\circ$.
MA, MB là tiếp tuyến của đường tròn nên

$$\widehat{O_1} = \widehat{O_2} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = 60^\circ.$$

Ta có $MA = AO \cdot \tan\widehat{AOM} = 3\sqrt{3}$ (cm). Diện tích tứ giác $MAOB$ là

$$\begin{aligned} S_1 &= 2 \cdot S_{MAO} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot MA \cdot AO \\ &= 3\sqrt{3} \cdot 3 = 9\sqrt{3}\ (\text{cm}^2). \end{aligned}$$

Diện tích hình quạt OAB là:

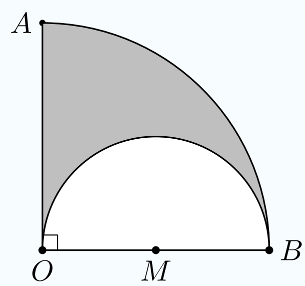
$$S_q = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi \cdot 9 \cdot 120}{360} = 3\pi\ (\text{cm}^2).$$

Vậy diện tích hình giới hạn bởi MA, MB và cung nhỏ AB là

$$S = S_1 - S_q = 9\sqrt{3} - 3\pi = 3\left(3\sqrt{3} - \pi\right)\ (\text{cm}^2).$$

□

Bài 24.
Cho hình vẽ. Biết rằng $\widehat{AOB} = 90^\circ$; $OA = OB = 6\text{cm}$. Tính diện tích phần tô đen.



Lời giải.
Diện tích hình quạt (OAB) là

$$S_1 = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 90}{360} = 9\pi\ (\mathrm{cm}^2).$$

Diện tích nửa hình tròn đường kính OB là

$$S_2 = \frac{1}{2}\pi \cdot 3^2 = \frac{9}{2}\pi\ (cm^2).$$

Vậy diện tích phần tô đen là $S_1 - S_2 = 9\pi - \dfrac{9}{2}\pi = 4,5\pi\ (\mathrm{cm}^2)$. □

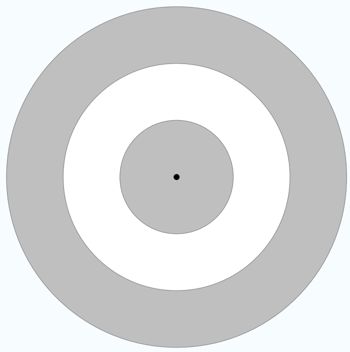
Bài 25. Trên đường tròn $(O;\, R)$ có hai điểm A, B sao cho $s\O\ \overset{\frown}{AB} = 60^\circ$; Trên $(O';\, R')$ có hai điểm C, D sao cho $s\O\ \overset{\frown}{CD} = 45^\circ$. Biết rằng hai cung nhỏ AB và CD có độ dài bằng nhau. Tính tỉ số diện tích hai hình tròn $(O;\, R)$ và $(O';\, R')$.

Lời giải.
Từ đề bài ta có $\dfrac{\pi R 360}{180} = \dfrac{\pi R' 45}{180}$ nên $\dfrac{R}{3} = \dfrac{R'}{4} \Rightarrow \dfrac{R}{R'} = \dfrac{3}{4}$.
Do đó ta có

$$\frac{S}{S'} = \frac{\pi R^2}{\pi R'^2} = \left(\frac{R}{R'}\right)^2 = \frac{9}{16}.$$

□

Bài 26.
Một mục tiêu bắn súng hình tròn gồm các vành có bề rộng 1 cm như hình vẽ. Bán kính đường tròn trong cùng là 1 cm. Vậy diện tích vòng ngoài cùng lớn gấp mấy lần diện tích hình tròn trong cùng?

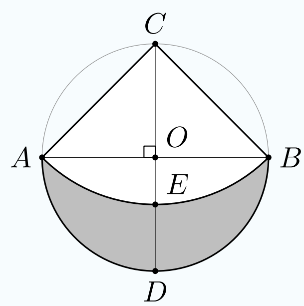


Lời giải.
Diện tích hình tròn ngoài cùng là $S_1 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi\ (\mathrm{cm}^2)$.
Diện tích hình tròn thứ hai là $S_2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi\ (\mathrm{cm}^2)$.
Diện tích vành ngoài cùng là $S_3 = S_1 - S_2 = 5\pi\ (\mathrm{cm}^2)$.
Diện tích hình tròn trong cùng là $S_4 = \pi \cdot 1^2 = \pi\ (\mathrm{cm}^2)$.
Vậy ta có $S_3 = 5S_4$. □

Bài 27.
Cho đường tròn $(O;\, R)$. Kẻ hai đường kính vuông góc với nhau AB và CD. Lấy C làm tâm, vẽ cung AB ở trong đường tròn (O), cung này cắt CD ở E.

a) Tính diện tích hình lưỡi liềm $ADBEA$.

b) So sánh diện tích hình $ADBEA$ và diện tích $\triangle ABC$.



Lời giải.

a) Diện tích hình quạt ACB là:

$$S_{\text{q}} = \frac{\pi AC^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi R^2}{2}.$$

Diện tích $\triangle ABC$ là $S_\triangle = \dfrac{1}{2}AB \cdot OC = R^2$.

Diện tích nửa đường tròn đường kính AB là $S_1 = \dfrac{\pi R^2}{2}$.

Do đó diện tích hình lưỡi liềm $ADBEA$ là $S = S_1 + S_\triangle - S_{\text{q}} = R^2$

b) So sánh diện tích hình $ADBEA$ và diện tích $\triangle ABC$ bằng nhau.

Bài 28. Cho tam giác đều, hình vuông và hình tròn có cùng chu vi. Hỏi diện tích hình nào lớn nhất?

Lời giải.

Đặt chu vi mỗi hình là c.

Độ dài cạnh tam giác đều là $\dfrac{c}{3}$. Do đó diện tích tam giác đều là

$$S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{c^2\sqrt{3}}{36}.$$

Độ dài cạnh hình vuông là $\dfrac{c}{4}$. Do đó diện tích hình vuông là

$$S_2 = a^2 = \frac{c^2}{16}.$$

Bán kính hình tròn là $R = \dfrac{c}{2\pi}$. Do đó diện tích hình tròn là

$$S = \pi R^2 = \pi \cdot \frac{c^2}{4\pi^2} = \frac{c^2}{4\pi}.$$

Ta có

$$\frac{c^2\sqrt{3}}{36} < \frac{c^2}{16} < \frac{c^2}{4\pi}.$$

Vậy diện tích hình tròn là lớn nhất.

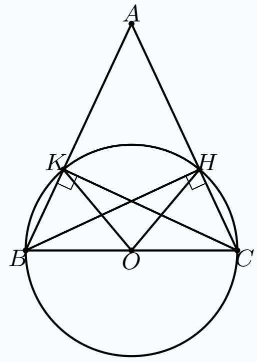
LUYỆN TẬP CHUNG

Bài 1.
Cho tam giác nhọn ABC cân tại A. Từ B và C kẻ lần lượt hai đường cao BH và CK của tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng đường tròn tâm O đường kính BC đi qua K và H.

b) Chứng minh rằng hai cung nhỏ BH và CK bằng nhau.

c) Tính số đo của cung nhỏ KH nếu $\widehat{BAC} = 40°$.



Lời giải.

a) Đặt $R = \dfrac{BC}{2} = OB = OC$.
Khi đó $(O; R)$ là đường tròn đường kính BC. Dễ thấy HO là trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông HBC nên $OH = \dfrac{BC}{2} = R$.
Do đó $H \in (O; R)$.
Tương tự, ta cũng có $K \in (O; R)$.
Vậy đường tròn $(O; R)$ đi qua các điểm K và H.

b) Hai tam giác vuông HBC và KCB có chung cạnh huyền BC và $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ (do tam giác ABC cân tại A) nên $\triangle HBC = \triangle KCB$, suy ra $BH = CK$.
Do đó $\triangle BOH = \triangle COK$ (vì $BO = CO, OH = OK, BH = CK$).
Từ đó ta có $\widehat{BOH} = \widehat{COK}$.
Mặt khác, sđ $\overset{\frown}{BH} = \widehat{BOH}$, sđ $\overset{\frown}{CK} = \widehat{COK}$, do đó sđ $\overset{\frown}{BH} =$ sđ $\overset{\frown}{CK}$.

c) Ba tam giác cân ABC, OCH và OBK có các góc ở đáy bằng nhau nên ba góc ở đỉnh cũng bằng nhau. Bởi vậy ta có

$$\widehat{BOK} = \widehat{HOC} = \widehat{BAC} = 40°.$$

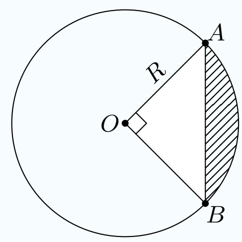
Mặt khác, $\widehat{BOK} + \widehat{KOH} + \widehat{HOC} = \widehat{BOC} = 180°$. Do đó

$$\widehat{KOH} = 180° - \widehat{BOK} - \widehat{HOC} = 100°.$$

Do $\widehat{KOH}$ là góc ở tâm khác góc bẹt nên sđ $\overset{\frown}{KH}$ là cung nhỏ.
Do đó sđ $\overset{\frown}{KH} = \widehat{KOH} = 100°$.

□

Bài 2.
Ta gọi hình giới hạn bởi một cung nhỏ của một đường tròn và dây căng cung đó là hình viên phân. Lập công thức tính diện tích hình viên phân ứng với cung $90°$, biết bán kính của đường tròn là R.



Lời giải.
Giả sử AB là cung có số đo $90°$; S là diện tích hình viên phân (phần tô đậm trên hình) và S_q là diện tích của hình quạt ứng với cung đó; S_t là diện tích hình tam giác OAB.

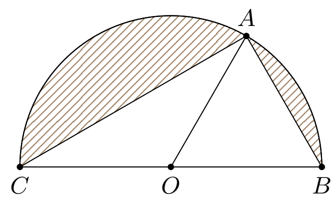
Ta có $S_q = \frac{90}{360}\pi R^2 = \frac{1}{4}\pi R^2, S_t = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2}R^2$. Do đó
$S = S_q - S_t = \frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2 = R^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$.

□

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 10$ m, $B = 60°$. Vẽ nửa đường tròn (O) đường kính BC và đi qua điểm A. Tính tổng diện tích hai hình viên phân ứng với cung AB và AC.

Lời giải.

Tổng diện tích hai hình viên phân bằng diện tích nửa hình tròn trừ đi diện tích $\triangle ABC$.



Diện tích nửa hình tròn: $\frac{\pi \cdot OB^2}{2} = \frac{\pi \cdot 100}{2} = 50\pi$ (m^2).

Với $\triangle ABC$ ta có $AC = AB \cdot \tan 60° = 10\sqrt{3}$ m; $BC = 2AB = 20$ m.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10\sqrt{3} = 50\sqrt{3} \text{ (m}^2\text{)}.$$

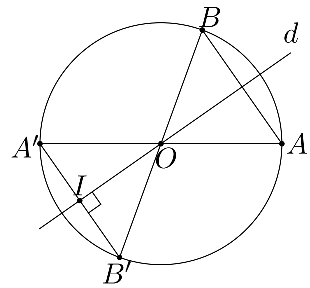
Tổng diện tích hai hình viên phân là $50\pi - 50\sqrt{3} = 50(\pi - \sqrt{3})$ (m^2).

□

Bài 4. Cho dây AB không qua tâm của đường tròn (O). Gọi A' và B' là hai điểm lần lượt đối xứng với A và B qua O. Hỏi đường trung trực của $A'B'$ có phải là trục đối xứng của (O) hay không? Tại sao?

Lời giải.

A' và B' là hai điểm lần lượt đối xứng với A và B qua O suy ra A' và B' đều thuộc (O).



Gọi d là đường trung trực của $A'B'$, mà $\triangle OA'B'$ cân tại O ($OA' = OB' = R$).

Suy ra d đi qua O hay d chứa đường kính của (O).

Vậy d là một trục đối xứng của (O).

□

Bài 5. Cho tam giác ABC không là tam giác vuông. Gọi H và K là chân các đường vuông góc lần lượt hạ từ B và C xuống AC và AB. Chứng minh rằng:

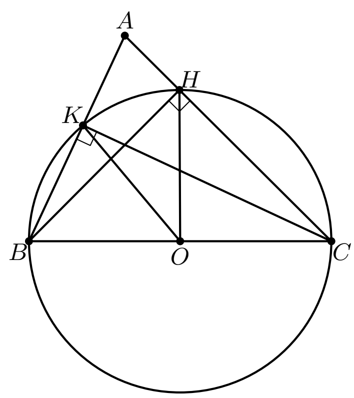
a) Đường tròn đường kính BC đi qua các điểm H và K;

b) $KH < BC$.

Lời giải.

a) Đặt $R = \frac{BC}{2} = OB = OC$.

Khi đó $(O; R)$ là đường tròn đường kính BC.



Xét $\triangle BHC$ có HO là trung tuyến (Olà trung điểm BC) suy ra

$HO = OB = \frac{1}{2}BC = R$.

Do đó $H \in (O; R)$.

Xét $\triangle BKC$ vuông tại K có KO là trung tuyến (O là trung điểm BC) suy ra

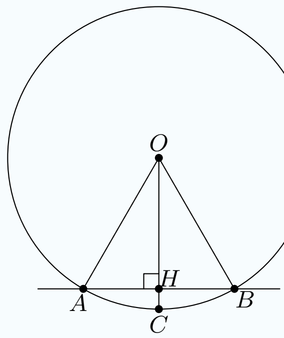
$KO = OB = \frac{1}{2}BC = R$.

Do đó $K \in (O; R)$.

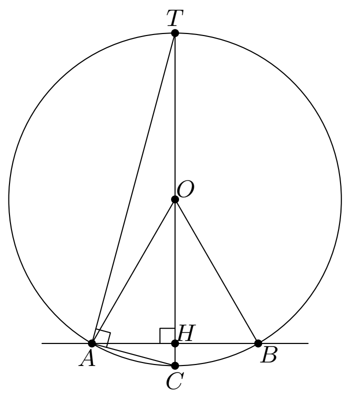
Vậy đường tròn $(O; R)$ đi qua các điểm K và H.

b) Xét (O) có BC là đường kính, KH là dây không qua tâm suy ra $KH < BC$.

Bài 6. Có thể xem guồng nước (còn gọi là cọn nước) là một công cụ hay cổ máy có dạng hình tròn, quay được nhờ sức nước chảy. Guồng nước thường thấy ở các vùng miền núi. Nhiều guồng nước được làm bằng tre, dùng để đưa nước lên ruộng cao, giã gạo hoặc làm một số việc khác.
Giả sử ngấn nước ngăn cách giữa phần trên và phần dưới nước của một guồng nước được biểu thị bởi cung ứng với một dây dài 4 m và điểm ngập sâu nhất là 0,5 m (trên hình điểm ngập sâu nhất là điểm C ta có $AB = 4$ m và $HC = 0{,}5$ m). Dựa vào đó, em hãy tính bán kính của guồng nước.



Lời giải.



Kẻ đường kính CT của (O).
Xét (O) có CT là đường kính, $A \in (O)$.
Suy ra $\triangle ACT$ vuông tại A, suy ra.
$AC^2 = AH^2 + HC^2$ (định lý Py-ta-go) hay $AC^2 = 2^2 + 0{,}5^2 = 4{,}25$.
Xét $\triangle AOB$ cân tại O ($OA = OB = R$) có OH là đường cao nên cũng là trung tuyến.
Suy ra H là trung điểm $AB \Rightarrow AH = \dfrac{1}{2}AB = 4 : 2 = 2$ m.
Xét $\triangle ACT$ vuông tại A có AH là đường cao ($AH \perp CT$ tại H) suy ra
$AC^2 = CH \cdot CT$ (hệ thức lượng).
$4{,}25 = 0{,}5 \cdot CT$ hay $CT = 8{,}5$ m.
Vậy bán kính của guồng nước là $R = CT : 2 = 4{,}25$ m.

Bài 7. Ba bộ phận truyền chuyển động của một chiếc xe đạp gồm một giò đĩa (bánh răng gắn với bàn đạp), một chiếc líp (cũng có dạng bánh răng) gắn với bánh xe và bộ xích. Biết rằng giò đĩa có bán kính 15 cm, líp có bán kính 4 cm và bánh xe có đường kính 65 cm. Hỏi khi người đi xe đạp một vòng thì xe chạy được quãng đường dài bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng phần chục)?

Lời giải.
Chu vi của giò đĩa là $C = 2 \cdot \pi \cdot 15 = 30\pi$ cm.
Chu vi của líp là $C = 2 \cdot \pi \cdot 4 = 8\pi$ cm.
Chu vi của bánh xe là $C = \pi \cdot 65 = 65\pi$ cm.
Tỉ số chu vi của giò đĩa và chu vi của líp là $\dfrac{30\pi}{8\pi} = \dfrac{15}{4}$.
Tỉ số vòng quay của líp và vòng quay của giò đĩa là $\dfrac{15}{4}$.

Khi líp quay được 1 vòng thì bánh xe cũng quay được 1 vòng tương ứng.
Suy ra khi giò đĩa quay 1 vòng thì bánh xe quay được $\dfrac{15}{4}$ vòng.
Khi đó mỗi điểm trên bánh xe di chuyển được quãng đường là $l = \dfrac{15}{4} \cdot 65\pi \approx 765{,}8$ (cm) $= 7{,}7$ (m).
Vậy người đi xe đạp giò đĩa 1 vòng liên tục thì xe đạp di chuyển được quãng đường xấp xỉ 7,7 m. □

Bài 8. Cho tam giác đều ABC có $AB = 2\sqrt{3}$ cm. Nửa đường tròn đường kính BC cắt hai cạnh AB và AC lần lượt tại D và E (khác B và C).

a) Chứng tỏ rằng ba cung nhỏ BD, DE và EC bằng nhau. Tính số đo mỗi cung ấy.

b) Tính diện tích của hình viên phân giới hạn bởi dây BD và cung nhỏ BD.

Lời giải.

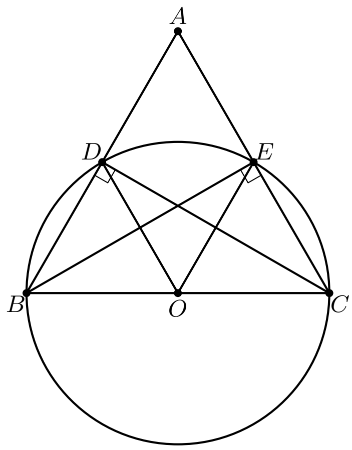
a) Xét (O) có BC là đường kính (giả thiết); $D \in (O)$ ((O) cắt AB tại D);
Suy ra $\triangle BDC$ vuông tại D hay $CD \perp AB$ tại D.
Xét (O) có BC là đường kính (giả thiết); $E \in (O)$ ((O) cắt AC tại E);
Suy ra $\triangle BEC$ vuông tại E hay $BE \perp AC$ tại E.
Xét $\triangle ABC$ đều có CD là đường cao ($CD \perp AB$ tại D);
Suy ra CD là đường phân giác hay $\widehat{ACD} = \widehat{BCD} = \dfrac{1}{2}\widehat{ACB} = 30^\circ$.

Do đó $\widehat{ECD} = \widehat{BCD} = 30^\circ$.
Chứng minh tương tự $\widehat{CBE} = 30^\circ$.
Xét (O) có

$$\widehat{ECD} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{ED} \text{ (góc nội tiếp chắn cung } ED).$$

$$\widehat{BCD} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BD} \text{ (góc nội tiếp chắn cung } BD).$$

$$\widehat{BCD} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{CE} \text{ (góc nội tiếp chắn cung } CE).$$

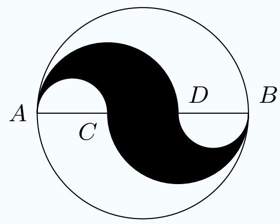


Mà $\widehat{BCD} = \widehat{ECD} = \widehat{CBE} = 30^\circ$.
Vậy sđ$\overset{\frown}{ED}$ = sđ$\overset{\frown}{BD}$ = sđ$\overset{\frown}{CE} = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$ hay $\overset{\frown}{ED} = \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CE}$.

b) Gọi S là diện tích hình viên phân (phần tô màu trên hình) và S_{q} là diện tích của hình quạt ứng với cung đó; S_{t} là diện tích hình tam giác OAB.
Ta có bán kính đường tròn (O) là $R = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ cm.
Ta có $S_{\text{q}} = \dfrac{60}{360}\pi(\sqrt{3})^2 = \dfrac{1}{2}\pi$; $S_{\text{t}} = OB^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} = (\sqrt{3})^2\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. Do đó
$S = S_{\text{q}} - S_{\text{t}} = \dfrac{1}{2}\pi - \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ cm^2.

□

Bài 9.
Cho đường tròn có đường kính AB. Trên đoạn AB lấy hai điểm C và D sao cho $AC = CD = DB$. Vẽ về một phía của AB hai nửa đường tròn đường kính AC và AD. Vẽ về phía bên khia AB hai nửa đường tròn đường kính CB, DB. So sánh diện tích phần tô đen và diện tích mỗi phần còn lại.



Lời giải.
Đặt $AC = CD = DB = 2a$ thì $AB = 6a$.

Diện tích nửa hình tròn đường kính AB là $S_1 = \frac{1}{2}\pi(3a)^2 = \frac{9\pi a^2}{2}$ (đvdt).
Diện tích nửa hình tròn đường kính $AC = DB = 2a$ là $S_2 = \frac{1}{2}\pi a^2$ (đvdt).
Diện tích nửa hình tròn đường kính $AD = CB = 4a$ là $S_3 = \frac{1}{2}\pi(2a)^2 = 2\pi a^2$ (đvdt).
Diện tích hình tròn đường kính AB là $S = \pi(3a)^2 = 9\pi a^2$ (đvdt).
Nên diện tích mỗi phần còn lại của hình tròn bằng

$$S_1 + S_2 - S_3 = \frac{3\pi a^2}{2} + \frac{\pi a^2}{2} - 2\pi a^2 = 3\pi a^2 = \frac{1}{3}S.$$

Diện tích phần tô đen bằng $S - \frac{2}{3}S = \frac{1}{3}S$.
Vậy diện tích mỗi phần bằng $\frac{1}{3}$ diện tích hình tròn đường kính AB. □

ÔN TẬP CHƯƠNG V

A BÀI TẬP TỰ LUẬN

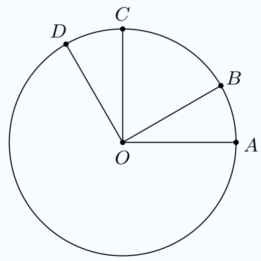
Bài 1.
Quan sát hình bên. Biết $\widehat{DOA} = 120°, OA \perp OC, OB \perp OD$.

a) Đọc tên các góc ở tâm có trong hình.

b) Tính số đo của mỗi góc ở tâm tìm được ở câu a).

c) Tìm các cặp cung bằng nhau và có số đo nhỏ hơn $180°$.

d) So sánh hai cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ và $\overset{\frown}{CD}$.



Lời giải.

a) Các góc ở tâm có trong hình là $\widehat{AOB}$, $\widehat{AOC}$, $\widehat{AOD}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{BOD}$, $\widehat{COD}$.

b) Ta có $OA \perp OC$, $OB \perp OD$ nên $\widehat{AOC} = 90°$, $\widehat{BOD} = 90°$.
Khi đó $\widehat{AOB} = \widehat{AOD} - \widehat{BOD} = 120° - 90° = 30°$,
$\widehat{COD} = \widehat{AOD} - \widehat{AOC} = 120° - 90° = 30°$,
$\widehat{BOC} = \widehat{AOC} - \widehat{AOB} = 90° - 30° = 60°$.

c) Ta có $\widehat{AOC} = \widehat{BOD} \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$;
$\widehat{AOB} = \widehat{DOC} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$;

d) Ta thấy $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

□

Bài 2. Chứng minh trong một đường tròn:

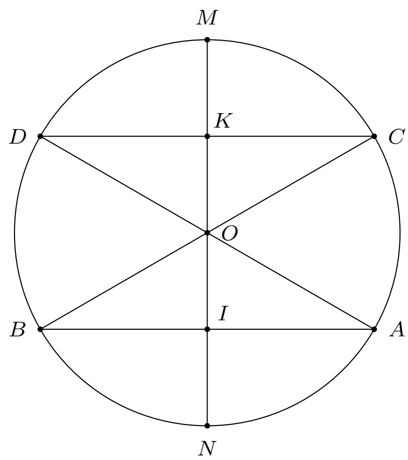
a) Đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy;

b) Đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy;

c) Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm;

d) Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

Lời giải.



a) Giả sử đường kính MN vuông góc với dây AB tại I.
Khi đó $\triangle OIA = \triangle OIB$ (c-g-c). Suy ra $IA = IB$ hay I là trung điểm của AB.

b) Giả sử đường kính MN đi qua trung điểm I của dây không đi qua tâm AB.
Khi đó $\triangle OIA = \triangle OIB$ (c-c-c). Suy ra $\widehat{OIA} = \widehat{OIB} = 90°$ hay $OI \perp AB$.

c) Cho hai dây $AB = CD$. Gọi I, K lần lượt là hình chiếu của O trên AB, CD.
Khi đó ta có $IA = IB = KC = KD$. Sử dụng tam giác bằng nhau suy ra $OI = OK$ hay hai dây cách đều tâm.

d) Cho hai dây AB, CD có I, K lần lượt là hình chiếu của O trên AB, CD và $OI = OK$. Sử dụng tam giác bằng nhau ta có $IA = IB = KC = KD$ hay $AB = CD$.

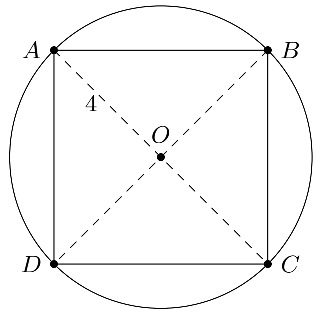
□

Bài 3. Cho AB là một dây bất kì (không phải là đường kính) của đường tròn $(O; 4\text{cm})$. Gọi C và D lần lượt là các điểm đối xứng với A và B qua tâm O.

a) Hai điểm C và D có nằm trên đường tròn (O) không? Vì sao?

b) Biết rằng $ABCD$ là một hình vuông. Tính độ dài cung lớn AB và diện tích hình quạt tròn tạo bởi hai bán kính OA và OB.

Lời giải.



a) Vì C và D lần lượt là các điểm đối xứng với A và B qua tâm O nên
$\begin{cases} OA = OC \\ OB = OD \end{cases} \Rightarrow OA = OB = OC = OD.$
$\Rightarrow A, B, C, D$ cách đều O.
Suy ra hai điểm C và D có nằm trên đường tròn (O).

b) Vì $ABCD$ là hình vuông nên ΔABO là tam giác vuông cân tại O.
Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác ABO vuông tại O có
$AB = \sqrt{AO^2 + OB^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ (cm).
Độ dài cung lớn AB là $l = \dfrac{360 - 90}{360} \cdot \pi \cdot 4 = 3\pi$ (cm).
Diện tích hình quạt tròn tạo bởi hai bán kính OA và OB là $S_q = \dfrac{90}{360} \cdot \pi \cdot 4^2 = 4\pi$ (cm^2).

□

Bài 4. Hãy hoàn thành bảng số liệu sau vào vở (lấy $\pi = 3{,}14$ và làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

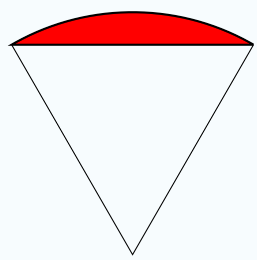
Bán kính R	20 cm	?	12 cm	32,6 cm	?
Số đo n° của cung tròn	160°	144°	?	42°	15°
Độ dài l của cung tròn	?	16,8 cm	60 cm	?	96 cm

Lời giải.

Bán kính R	20 cm	6,7 cm	12 cm	32,6 cm	366,8 cm
Số đo n° của cung tròn	160°	144°	$286{,}6^\circ$	42°	15°
Độ dài l của cung tròn	55,8 cm	16,8 cm	60 cm	23,9 cm	96 cm

□

Bài 5.
Logo ở hình bên có dạng một hình quạt tròn bán kính 8cm và góc ở tâm bằng 60°. Tính diện tích mỗi hình sau (theo đơn vị centimét vuông và làm tròn kết quả đến hàng phần mười):



a) Toàn bộ logo;

b) Phần logo màu đỏ có dạng hình viên phân.

Lời giải.

a) Diện tích toàn bộ logo là $S_1 = \dfrac{\pi \cdot 8^2 \cdot 60}{360} = 10{,}67 \cdot 3{,}14 = 33{,}5$ (cm^2).

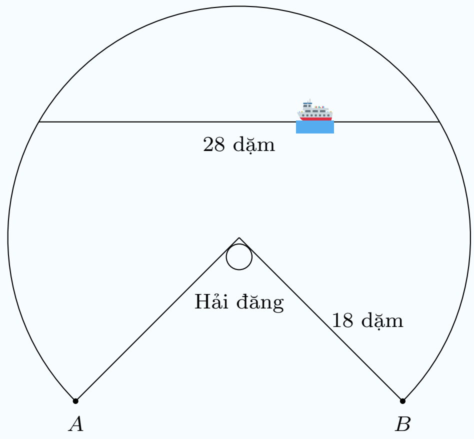
b) Diện tích tam giác là $S_2 = \dfrac{8^2\sqrt{3}}{4} = 27{,}7$ (cm^2).
Suy ra diện tích phần logo màu đỏ là $S_1 - S_2 = 5{,}8$ (cm^2).

□

Bài 6.
Hình bên biểu diễn vùng biển được chiếu sáng bởi một hải đăng có dạng một hình quạt tròn với bán ính 18 dặm, cung AmB có số đo 245°.

a) Hãy tính diện tích vùng biển có thể nhìn thấy ánh sáng từ hải đăng theo đơn vị kilômét vuông (lấy 1 dặm = 1 600m, $\pi = 3{,}14$ và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

b) Giả sử một con thuyền di chuyển dọc theo dây cung có độ dài 28 dặm của đường tròn với tâm là tâm của hình quạt tròn, bán kính là 18 dặm. Tính khoảng cách nhỏ nhất từ con thuyền đến hải đăng (theo đơn vị dặm và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Lời giải.
Đổi 18 dặm = 28,8 km; 28 dặm = 44,8 km.

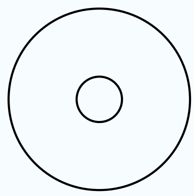
a) Diện tích vùng biển có thể nhìn thấy ánh sáng từ hải đăng là

$$\frac{\pi \cdot 28{,}8^2 \cdot 245}{360} = 1\ 722{,}5 \text{ (km}^2\text{)}.$$

b) Khoảng cách nhỏ nhất từ con thuyền đến ngọn hải đăng là khoảng cách từ tâm đến dây cung và bằng $\sqrt{18^2 - \left(\dfrac{28}{2}\right)^2} = \sqrt{128} = 11{,}3$ (dặm).

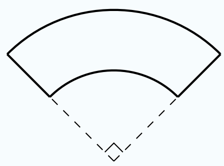
□

Bài 7.
Mặt đĩa CD ở hình bên có dạng hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn có bán kính lần lượt là 1,5cm và 6cm. Hình vành khuyên đó có diện tích bằng bao nhiêu centimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Lời giải.
Diện tích đường tròn to là $S_1 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi$ (cm^2).
Diện tích đường tròn nhỏ là $S_2 = \pi \cdot 1{,}5^2 = 2{,}25\pi$ (cm^2).
Diện tích hình vành khuyên là $S_1 - S_2 = (36 - 2{,}25)\pi = 33{,}75 \cdot 3{,}14 \approx 106$ (cm^2). □

Bài 8.
Hình bên mô tả mảnh vải có dạng một phần tư hình vành khuyên, trong đó hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm và có các bán kính lần lượt là 3dm và 5dm. Diện tích của mảnh vải đó bằng bao nhiêu decimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



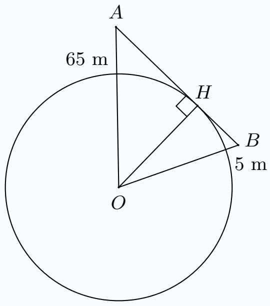
Lời giải.

Diện tích hình quạt to là $S_1 = \dfrac{\pi \cdot 5^2 \cdot 90}{360} = 6{,}25\pi$ (dm^2).

Diện tích hình quạt nhỏ là $S_2 = \dfrac{\pi \cdot 3^2 \cdot 90}{360} = 2{,}25\pi$ (dm^2).

Diện tích mảnh vải là $S_1 - S_2 = (6{,}25 - 2,25)\pi = 4 \cdot 3{,}14 = 12{,}6$ (dm^2). □

Bài 9. Hải đăng Kê Gà tọa lạc tại xã Tân Thanh huyện Hàm Thuận Năm, tỉnh Bình Thuận. Biết ngọn hải đăng cao 65 m so với mực nước biển. Với khoảng cách bao nhiêu kilômét thì người quan sát trên tàu bắt đầu trông thấy ngọn hải đăng này? Cho biết mắt người quan sát ở độ cao 5 m so với mực nước biển và bán kính Trái Đất gần bằng 6 400 km.



Lời giải.

Ta có $\triangle OHA$ và $\triangle OHB$ là các tam giác vuông tại H, theo định lí Pythagore

$AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{(6400 + 65 \cdot 10^{-3})^2 - 6400^2} \approx 28{,}844$ km.

$BH = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{(6400 + 5 \cdot 10^{-3})^2 - 6400^2} \approx 8$ km. Khoảng cách để người quan sát trên tàu trông thấy ngọn hải đăng là $AB = AH + HB = 28{,}844 + 8 = 36{,}844$ km. □

Bài 10. Cho đường tròn (O) đường kính BC và điểm A (khác B và C).

a) Chứng minh rằng nếu A nằm trên (O) thì ABC là một tam giác vuông; ngược lại, nếu ABC là tam giác vuông tại A thì A nằm trên (O).

b) Giả sử A là một trong hai giao điểm của đường tròn $(B; BO)$ với đường tròn (O). Tính các góc của tam giác ABC.

c) Với cùng giả thiết câu b, tính độ dài cung AC và diện tích hình quạt nằm trong (O) giới hạn bởi các bán kính OA và OC, biết rằng $BC = 6$cm.

Lời giải.

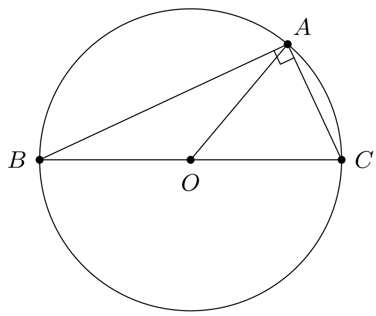
a) Xét tam giác ABC nội tiếp đường tròn O đường kính BC, ta có: $OA = OB = OC$.

Tam giác ABC có đường trung tuyến AO bằng nửa cạnh BC nên suy ra tam giác ABC vuông tại A. (đpcm)

Vì tam giác ABC vuông tại A, theo tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông, ta có

$$OA = OB = OC$$

Suy ra O cách đều A, B, C. Hay A, B, C thuộc đường tròn tâm O. Nói cách khác thì A nằm trên (O). (đpcm)



b) Vì O, A nằm trên (B, BO) suy ra $BO = BA$. (1)

Vì A, B nằm trên (O, AO) suy ra

$$\begin{cases} OB = OA & (2) \\ \widehat{BAO} = 90^\circ. & \text{(theo câu a)} \end{cases}$$

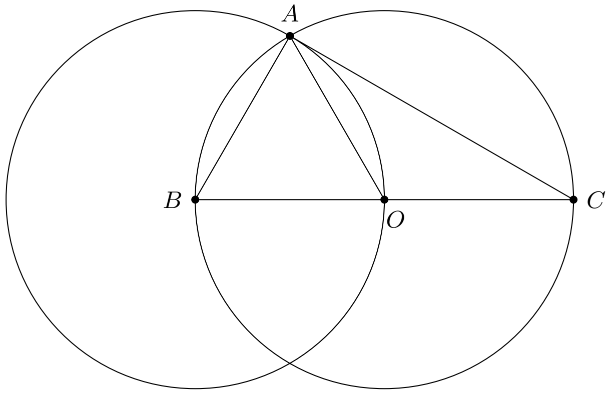
Từ (1) và (2) suy ra

$OA = OB = AB \Rightarrow \Delta ABO$ đều.

$\Rightarrow \widehat{ABO} = 60^\circ$.

Xét ΔABC ta có

$$\widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} = 180^\circ$$
$$\Rightarrow \widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{ABC} - \widehat{BAC}$$
$$\Rightarrow \widehat{ACB} = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ.$$



c) Bán kính đường tròn tâm O là $R = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$ (cm).

Suy ra độ dài l của cung AC là $l = \dfrac{60}{180} \cdot \pi \cdot 3 = \pi$ (cm).

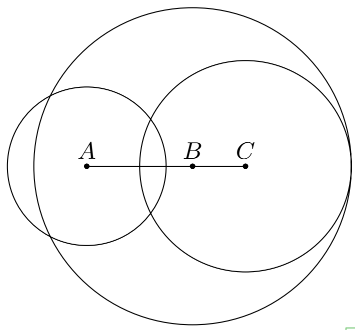
Ta có $\widehat{AOC} = 180^\circ - \widehat{AOB} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ (do $\triangle ABO$ đều).

Suy ra diện tích hình quạt cần tính là $S_q = \dfrac{120}{360} \cdot \pi \cdot 3^2 = 3\pi$ (cm^2).

Bài 11. Cho điểm B nằm giữa hai điểm A và C, sao cho $AB = 2$cm và $BC = 1$cm. Vẽ các đường tròn $(A; 1{,}5\text{cm})$, $(B; 3\text{cm})$ và $(C; 2\text{cm})$. Hãy xác định các cặp đường tròn:

a) Cắt nhau; b) Không giao nhau; c) Tiếp xúc với nhau.

Lời giải.



a) $(A; 1{,}5\text{cm})$ với $(B; 3\text{cm})$, $(A; 1{,}5\text{cm})$ với $(C; 2\text{cm})$.

b) Không có.

c) $(B; 3\text{cm})$ với $(C; 2\text{cm})$.

Bài 12. Cho tam giác vuông ABC ($\widehat{A}$ vuông). Vẽ hai đường tròn $(B; BA)$ và $(C; CA)$ cắt nhau tại A và A'. Chứng minh rằng:

a) BA và BA' là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn $(C; CA)$.

b) CA và CA' là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn $(B; BA)$.

Lời giải.

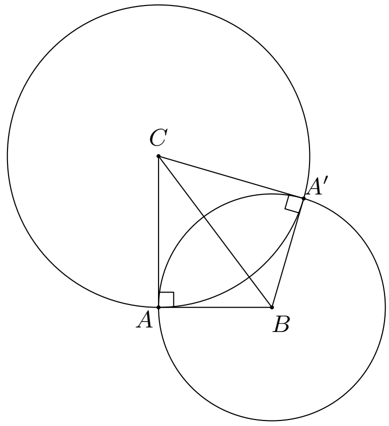
a) Xét $\triangle ABC$ và $\triangle A'BC$ có

- $AB = A'B$ (bán kính (B))
- $CA = C'A$ (bán kính (C))
- BC chung

Suy ra $\triangle ABC = \triangle A'BC$ (c-c-c).
Nên $\widehat{BAC} = \widehat{BA'C} = 90^\circ$ (2 góc tương ứng).
Tức là

- BA' vuông góc bán kính CA' tại A', hay BA' là tiếp tuyến của (C). (1)
- BA vuông góc bán kính CA tại A, hay BA là tiếp tuyến của (C). (2)

Lại có AC giao $A'C$ tại C. (3)
Từ (1), (2) và (3) suy ra BA và BA' là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn $(C; CA)$.



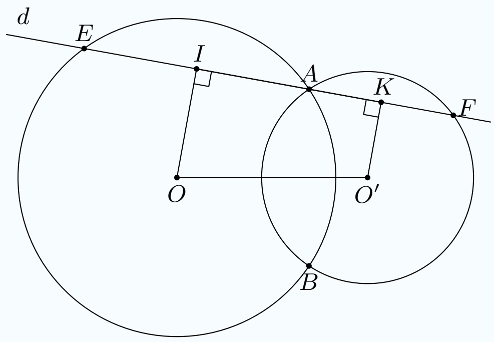
b) Vì $\widehat{BAC} = \widehat{BA'C} = 90^\circ$ (chứng minh trên).
Tức là

- CA' vuông góc bán kính BA' tại A', hay CA' là tiếp tuyến của (B). (1)
- CA vuông góc bán kính BA tại A, hay CA là tiếp tuyến của (B). (2)

Lại có AB giao $A'B$ tại C. (3)
Từ (1), (2) và (3) suy ra CA và CA' là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn $(B; BA)$.

□

Bài 13. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng d đi qua A cắt (O) tại E và cắt (O') tại F(E và F khác A). Biết điểm A nằm trong đoạn EF. Gọi I và K lần lượt là trung điểm của AE và AF.



a) Chứng minh rằng tứ giác $OO'KI$ là một hình thang vuông.

b) Chứng minh rằng $IK = \dfrac{1}{2}EF$.

c) Khi d ở vị trí nào (d vẫn qua A) thì $OO'KI$ là một hình chữ nhật?

Lời giải.

a) Do $\begin{cases} OI \perp EF \\ O'K \perp EF \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OI \parallel O'K & \text{(từ vuông góc đến song song)} \\ \widehat{OIK} = 90^\circ \end{cases}$

$\Rightarrow$ tứ giác $OO'KI$ là hình thang vuông.

b) Vì I và K lần lượt là trung điểm của AE và AF nên $\begin{cases} IA = \dfrac{1}{2}AE & (1) \\ KA = \dfrac{1}{2}AF. & (2) \end{cases}$

Cộng (1) và (2) theo vế ta được

$$IA + AK = \frac{1}{2}AE + \frac{1}{2}AF$$
$$\Rightarrow IK = \frac{1}{2}(AE + AF)$$
$$\Rightarrow IK = \frac{1}{2}EF.$$

c) Vì tứ giác $OO'KI$ là hình thang vuông, nên để tứ giác $OO'KI$ là hình chữ nhật thì $IK \parallel OO'$, hay $d \parallel OO'$.

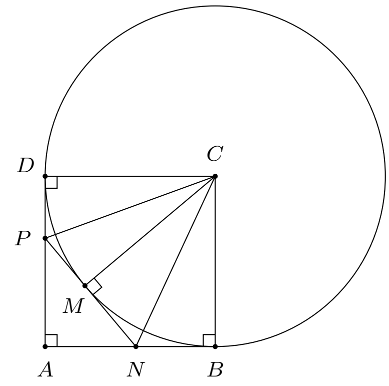
□

Bài 14. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh r và đường tròn $(C; r)$. Giả sử M là một điểm nằm trên đường tròn $(C; r)$ sao cho điểm M nằm trong hình vuông $ABCD$. Tiếp tuyến của đường tròn $(C; r)$ tại tiếp điểm M cắt các đoạn thẳng AB, AD lần lượt tại N, P. Chứng minh:

a) Các đường thẳng NB, PD là các tiếp tuyến của đường tròn $(C; r)$;

b) $\widehat{NCP} = \widehat{NCB} + \widehat{PCD} = 45^\circ$.

Lời giải.



a) Vì $ABCD$ là hình vuông nên $NB \perp CB$, do đó NB là tiếp tuyến của $(C; r)$.
Tương tự PD là tiếp tuyến của $(C; r)$.

b) Ta có $\widehat{MCN} = \widehat{NCB}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).
Tương tự, $\widehat{PCM} = \widehat{PCD}$.
Do đó $\widehat{NCP} = \widehat{NCM} + \widehat{MCP} = \widehat{NCB} + \widehat{PCD}$.
Ta lại có $\widehat{BCN} + \widehat{NCM} + \widehat{MCP} + \widehat{PCD} = 90^\circ$. Do đó $\widehat{NCP} = 45^\circ$.

□

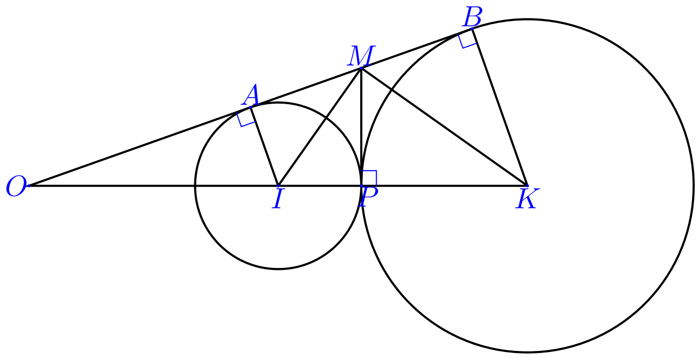
Bài 15. Cho hai đường tròn $(I; r)$ và $(K; R)$ tiếp xúc ngoài với nhau tại P với $R \neq r$, đường thẳng a lần lượt tiếp xúc với $(I; r)$ và $(K; R)$ tại A và B, a cắt KI tại O. Đường thẳng qua P vuông góc với IK cắt đường thẳng a tại M. Chứng minh:

a) $\dfrac{OI}{OK} = \dfrac{r}{R}$;

b) $AB = 2MP$;

c) $\widehat{IMK} = 90^\circ$.

Lời giải.



a) Vì IA là tiếp tuyến của $(I; r)$ nên $IA \perp OA$.
Tương tự $KB \perp OB$.
Do đó $\triangle OAI \backsim \triangle OBK$ (g-g).
Suy ra $\dfrac{OI}{OK} = \dfrac{IA}{IB} = \dfrac{r}{R}$.

b) Ta có $MA = MP$ (hai tiếp tuyến cắt nhau) và $MB = MP$ (hai tiếp tuyến cắt nhau). Suy ra

$$AB = MA + MB = 2MP.$$

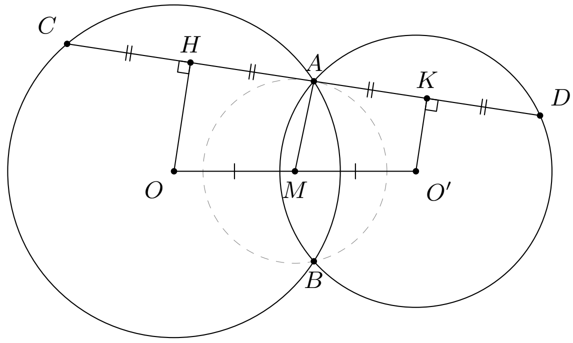
c) Ta có $\triangle AMI = \triangle PMI$ nên $\widehat{AMI} = \widehat{PMI}$. Tương tự $\widehat{BMK} = \widehat{PMK}$.
Khi đó $\widehat{IMK} = \widehat{IMP} + \widehat{PMK} = \dfrac{1}{2}\widehat{AMB} = 90^\circ$.

□

Bài 16. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Qua A vẽ một cát tuyến cắt đường tròn (O) và (O') lần lượt tại C và D sao cho $AC = AD$. Gọi M là trung điểm của OO'. Chứng minh đường tròn $(M; MA)$ tiếp xúc với CD.

Lời giải.

Kẻ $OH \perp AC$ tại H, $O'K \perp AD$ tại K.
$\Rightarrow\ HA = HC = \dfrac{1}{2}CA$;
$KA = KD = \dfrac{1}{2}AD$.
Mà $AC = AD$ (giả thiết) nên $AH = AK$
$\Rightarrow\ MA$ là đường trung bình của hình thang $OHKO'$
$\Rightarrow\ MA \perp DK \Rightarrow\ MA \perp CD$
$\Rightarrow\ CD$ tiếp xúc với $(M;\ MA)$.

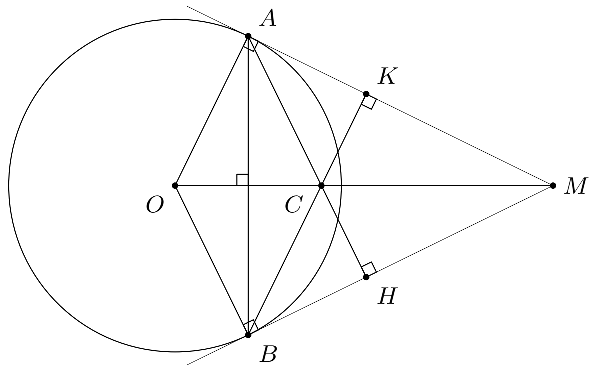


Bài 17. Từ một điểm M ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Vẽ $AH \perp MB$, $BK \perp MA$ ($H \in MB$, $K \in MA$). Gọi C là giao điểm của AH và BK. Chứng minh:

a) Tứ giác $AOBC$ là hình thoi;

b) Ba điểm M, O, C thẳng hàng.

Lời giải.



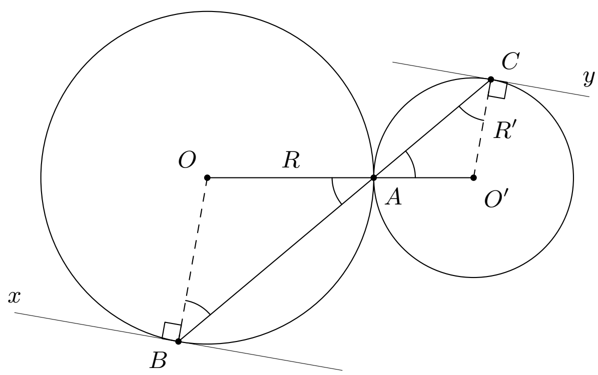
a) Ta có MA là tiếp tuyến của (O)
$\Rightarrow\ OA \perp MA$ tại A
$\Rightarrow\ OA \parallel BC$ (vì cùng vuông góc với AM).
Tương tự ta có $OB \parallel CA$
$\Rightarrow\ OACB$ là hình bình hành.
Mà $OA = OB = R$ nên $OACB$ là hình thoi.

b) Vì $OACB$ là hình thoi nên $OC \perp AB$.
Vì MA, MB là tiếp tuyến của (O) nên $OM \perp AB$
$\Rightarrow\ O$, C, M thẳng hàng.

Bài 18. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Qua A vẽ một đường thẳng cắt các đường tròn (O) và (O') lần lượt tại B và C. Từ B vẽ tiếp tuyến Bx với (O) và từ C vẽ tiếp tuyến Cy với (O'). Chứng minh $Bx \parallel Cy$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (đối đỉnh)
$\Rightarrow\ \widehat{B_1} = \widehat{C_2}$
$\Rightarrow\ OB \parallel O'C$.
Vì $Bx \perp OB$; $Cy \perp O'C$ nên $Bx \parallel Cy$.

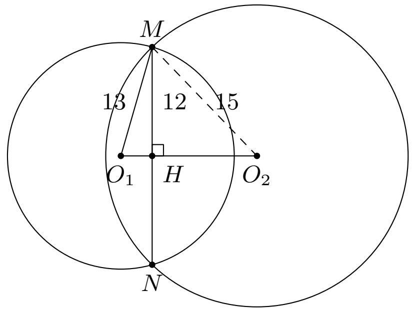


Bài 19. Cho hai đường tròn $(O_1;\ 13\text{ cm})$ và $(O_2;\ 15\text{ cm})$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt M, N sao cho $MN = 24$ cm. Tính độ dài đoạn nối tâm O_1O_2.

Lời giải.

Ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: O_1 và O_2 nằm khác phía so với dây cung MN. Vì O_1O_2 là đường trung trực của MN nên $O_1O_2 \perp MN$ tại H và $MH = NH = \frac{1}{2}MN = 12$.



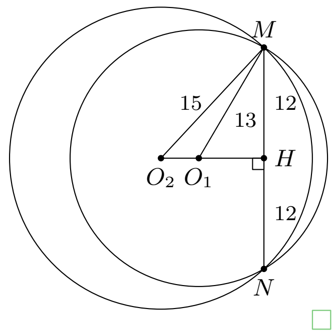
Áp dụng định lí Py-ta-go vào $\triangle O_1MH$ ta có:

$$O_1H = \sqrt{O_1M^2 - MH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5.$$

Tương tự ta có

$$O_2H = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$$
$$\Rightarrow\ O_1O_2 = O_1H + O_2H = 5 + 9 = 14\ (\text{cm}).$$

Trường hợp 2: O_1 và O_2 nằm cùng phía so với dây chung MN. Tính toán tương tự trên ta có

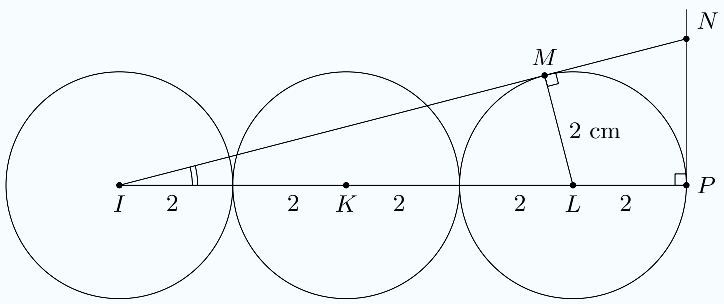


$$\begin{aligned} O_1O_2 &= O_2H - O_1H \\ &= 9 - 5 \\ &= 4\ (\text{cm}). \end{aligned}$$

Vậy $O_1O_2 = 14$ cm hoặc $O_1O_2 = 4$ cm.

□

Bài 20. Trong hình vẽ, cho biết ba đường tròn (I), (K), (L) có bán kính bằng nhau và bằng 2 cm; (I) tiếp xúc với (K); (K) tiếp xúc với (L) và IM, NP là tiếp tuyến của (L). Tính độ dài đoạn MN.



Lời giải.

Vì IM là tiếp tuyến của đường tròn (L) nên $IM \perp ML$ tại M

$$\Rightarrow\ \widehat{IML} = 90^\circ \Rightarrow\ \sin I = \frac{ML}{IL} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow\ \cos I = \sqrt{1 - \sin^2 I} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Do đó: $\tan I = \dfrac{\sin I}{\cos I} = \dfrac{1}{\sqrt{15}}$. (1)

Mặt khác $\tan I = \dfrac{NP}{IP} = \dfrac{NP}{10} = \dfrac{MN}{10}$ (2)

(vì MN, NP là tiếp tuyến của (L) nên $MN = NP$).

Từ (1) và (2) suy ra

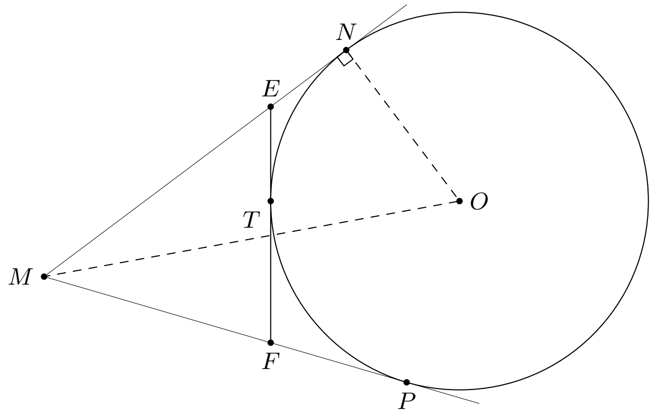
$$\frac{MN}{10} = \frac{1}{\sqrt{15}} \Rightarrow\ MN = \frac{10}{\sqrt{15}} = \frac{2\sqrt{15}}{3}.$$

Vậy $MN = \dfrac{2\sqrt{15}}{3}$ (cm).

□

Bài 21. Cho đường tròn $(O; 6\text{ cm})$ và điểm M nằm ngoài đường tròn. Vẽ hai tiếp tuyến MN và MP với (O) (N, P là các tiếp điểm). Lấy điểm T bất kì trên đường tròn (O) sao cho T và O nằm khác phía với NP. Vẽ tiếp tuyến tại T của (O) cắt MN, MP lần lượt tại E và F. Nếu $MO = 10$ cm, tính chu vi tam giác MEF.

Lời giải.



Ta có MN là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow MN \perp NO$ tại N.
Áp dụng định lí Py-ta-go vào $\triangle MNO$ có:

$$\begin{aligned} MN &= \sqrt{MO^2 - ON^2} \\ &= \sqrt{10^2 - 6^2} = 8\ (\text{cm}). \end{aligned}$$

Vì MN, MP là tiếp tuyến của (O) nên $MN = MP$;
EN, ET là tiếp tuyến của (O) nên $EN = ET$;
FT, FP là tiếp tuyến của (O) nên $FT = FP$.

Do đó

$$\begin{aligned} ME + EF + MF &= ME + ET + FT + MF \\ &= ME + EN + FP + MF \\ &= MN + MP \\ &= 2MN = 2 \cdot 8 = 16\ (\text{cm}). \end{aligned}$$

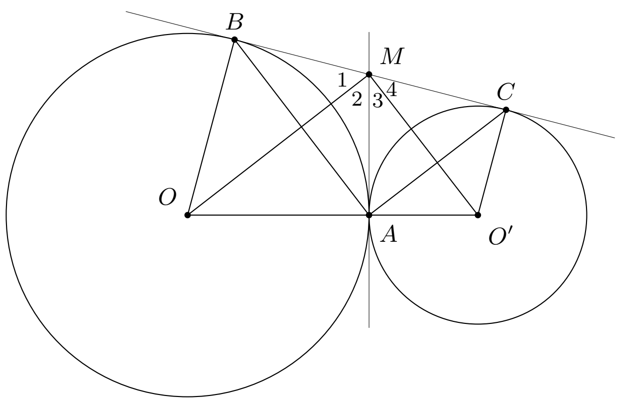
Vậy chu vi $\triangle MEF$ bằng 16 cm. □

Bài 22. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài BC với $B \in (O)$ và $C \in (O')$. Tiếp tuyến chung tại A cắt BC tại M.

a) Chứng minh $\triangle ABC$ vuông.

b) Chứng minh $\triangle OMO'$ vuông.

Lời giải.



a) Ta có $MA = MB$; $MA = MC$
$\Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại A.

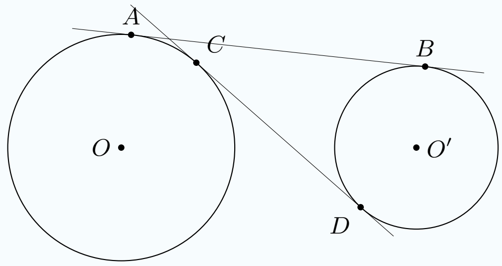
b) Ta có:

$\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$; $\widehat{M_3} = \widehat{M_4}$.
Mà $\widehat{M_1} + \widehat{M_2} + \widehat{M_3} + \widehat{M_4} = 180^\circ$
nên $\widehat{OMO'} = \widehat{M_2} + \widehat{M_3} = 90^\circ$
$\Rightarrow \triangle MOO'$ vuông tại M.

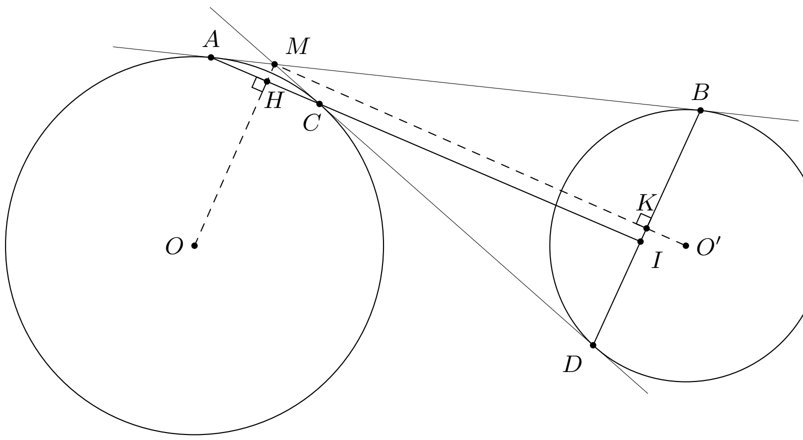
□

Bài 23.

Trong hình vẽ, cho biết AB là tiếp tuyến chung ngoài; CD là tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn (O) và (O'). Chứng minh $AC \perp BD$.



Lời giải.



+ Gọi I là giao điểm của AC và BD.
+ Gọi giao điểm của hai đường thẳng AB và CD là M. Vì AM, MC là tiếp tuyến của (O) nên OM là đường trung trực của đoạn AC và

$$\widehat{AMO} = \widehat{CMO} = \frac{1}{2}\widehat{AMC}$$
$$\Rightarrow OM \perp AC \text{ tại } H.$$

Tương tự:

$$O'M \perp BD \text{ tại } K \text{ và } \widehat{DMO'} = \widehat{BMO'} = \frac{1}{2}\widehat{DMB}$$
$$\Rightarrow \widehat{HMK} = \widehat{OMO'} = \widehat{OMC} + \widehat{DMO'}$$
$$= \frac{1}{2}\widehat{AMC} + \frac{1}{2}\widehat{DMB} = \frac{1}{2}\left(\widehat{AMC} + \widehat{DMB}\right) = 90^\circ.$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $HMKI$ là hình chữ nhật
$\Rightarrow \widehat{HIK} = 90^\circ \Rightarrow AC \perp BD.$ □

Bài 24. Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AB và AC với (O) (B, C là các tiếp điểm). Trên đoạn OB lấy điểm N sao cho $BN = 2ON$. Đường trung trực của đoạn thẳng CN cắt OA tại M. Chứng minh $OA = 3AM$.

Lời giải.
Ta có AB, AC là tiếp tuyến của (O) nên $AB = AC$ và $\widehat{BAO} = \widehat{CAO}$ hay $\widehat{MAB} = \widehat{MAC}$

$$\Rightarrow \triangle MAB = \triangle MAC \text{ (c.g.c)}$$
$$\Rightarrow MB = MC. (1)$$

Vì M thuộc đường trung trực d của NC nên $MN = MC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MB = MN \Rightarrow \triangle MBN$ cân tại M.

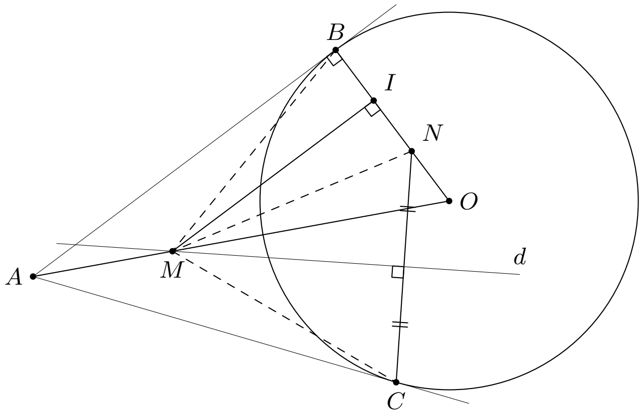
Lấy I là trung điểm của $BN \Rightarrow MI \perp BN$ tại I.

Vì $BN = 2ON$ nên $BI = IN = NO = \dfrac{1}{3}BO$.

Vì AB là tiếp tuyến của (O) nên $AB \perp BO$ tại B.

Do đó

$$AB \parallel MI \Rightarrow \frac{AM}{AO} = \frac{BI}{BO} = \frac{1}{3} \Rightarrow AO = 3AM.$$



☐

Bài 25. Cho đường tròn $(O;\, R)$ và đường thẳng d cố định (d và (O) không có điểm chung). Lấy ba điểm M, N, P phân biệt trên d. Từ M, N, P lần lượt kẻ các tiếp tuyến MA, MB, NC, ND, PE và PF đến (O) (với A, B, C, D, E, F là các tiếp điểm). Chứng minh ba đường thẳng AB, CD và EF đồng quy.

Lời giải.

Ta sẽ chứng minh AB, CD và EF cùng đi qua một điểm cố định. Do vai trò của M, N, P như nhau nên ta chỉ cần chứng minh AB đi qua một điểm cố định I. Từ đó suy ra CD và EF cũng đi qua I. Kẻ $OH \perp d$ tại $H \Rightarrow H$ cố định. Gọi I là giao điểm của AB với OH; K là giao điểm của AB với OM.

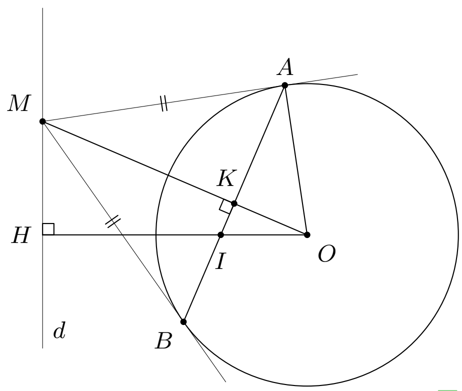
Vì MA, MB là tiếp tuyến của (O) nên $OM \perp AB$ tại K

$\Rightarrow \triangle IOK \backsim \triangle OMH$ (g.g).

$\Rightarrow IO \cdot OH = OM \cdot OK$.

Mặt khác, trong tam giác vuông OMA có $OK \cdot OM = OA^2 = R^2 \Rightarrow OI \cdot OH = R^2 \Rightarrow OI\dfrac{R^2}{OH} \Rightarrow I$ cố định.

Vậy AB, CD và EF đồng quy tại I với I thuộc đoạn OH và $OI = \dfrac{R^2}{OH}$.



☐

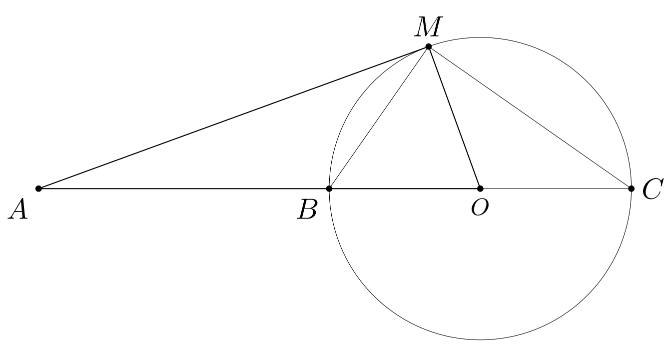
Bài 26. Cho điểm A và đường tròn $(O;\, R)$ cố định ($OA > R$). Tìm điểm M thuộc (O) sao cho:

a) AM lớn nhất.

b) AM nhỏ nhất.

Lời giải.

Kẻ AO cắt (O) tại B, C (với $AB < AC$) $\Rightarrow B$, C cố định.



a) Áp dụng bất đẳng thức tam giác vào ba điểm A, O, M có:

$AM \le OA + OM$ (dấu $'' ='' $ xảy ra $\Leftrightarrow$ O nằm giữa A và M)

$$\Leftrightarrow\ AM \le OA + OC(\text{ vì } OM = OC = R)$$
$$\Leftrightarrow\ AM \le AC$$
$$\Rightarrow\ \max AM = AC \text{ khi } M \text{ trùng } C.$$

b) Áp dụng bất đẳng thức tam giác vào ba điểm A, O, M có:
$AM \ge AO - OM$ (dấu $'' ='' $ xảy ra $\Leftrightarrow$ O nằm giữa A và M)

$$\Leftrightarrow\ AM \ge AO - OB(\text{ vì } OM = OB = R)$$
$$\Leftrightarrow\ AM \le AB$$
$$\Rightarrow\ \min AM = AB \text{ khi } M \text{ trùng } B.$$

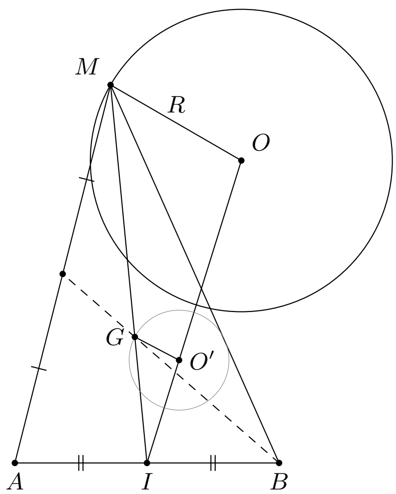
Chú ý: Nếu đặt $d = OA$ ta có $d - R \le AM \le d + R$.

Bài 27. Cho A, B nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ cố định (đường thẳng AB không có điểm chung với (O)). Lấy M bất kì trên (O), gọi G là trọng tâm $\triangle MAB$. Chứng minh G chạy trên một đường tròn cố định khi M di động trên (O).

Lời giải.
Lấy I là trung điểm $AB \Rightarrow$ I cố định.
Qua G kẻ GO' song song với OM (O' thuộc IO).
Ta có $GO' \parallel MO$ nên

$$\frac{IO'}{IO} = \frac{O'G}{OM} = \frac{IG}{IM}.$$

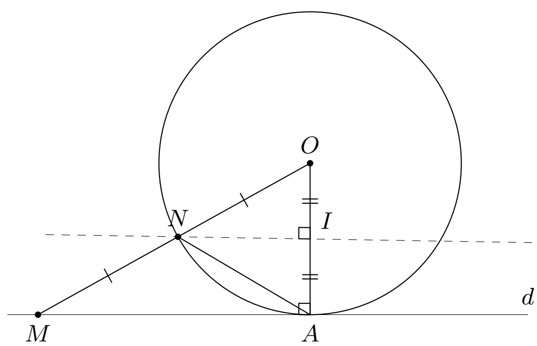
Vì G là trọng tâm $\triangle ABM$ nên $\dfrac{IG}{IM} = \dfrac{1}{3}$ nên $\dfrac{O'G}{OM} = \dfrac{1}{3} = \dfrac{IO'}{IO}$
$\Rightarrow\ O'G = \dfrac{1}{3}OM = \dfrac{1}{3}R$
$IO' = \dfrac{1}{3}IO \Rightarrow$ O' cố định (vì I, O cố định).
Suy ra G thuộc $\left(O; \dfrac{1}{3}R\right)$.
Vậy khi M di động trên $(O; R)$ thì G chạy trên một đường tròn cố định.



Ta có thể thay yêu cầu bài toán bằng câu hỏi: Tìm vị trí điểm M để độ dài đoạn GA lớn nhất (hoặc nhỏ nhất).

Bài 28. Cho đường tròn (O) và điểm A cố định thuộc (O). Vẽ tiếp tuyến d tại A của (O). Lấy M bất kì thuộc d, gọi N là trung điểm của đoạn OM. Chứng minh rằng khi M di động trên d thì N chạy trên một đường cố định.

Lời giải.
Vì d là tiếp tuyến của (O) tại A nên $OA \perp d$ tại A.
Gọi I là trung điểm của đoạn OA.
Trường hợp 1: M trùng A.
Vì M trùng A nên N trùng I.
Trường hợp 2: M khác A.
Xét tam giác vuông OMA có trung tuyến AN ứng với cạnh huyền OM nên

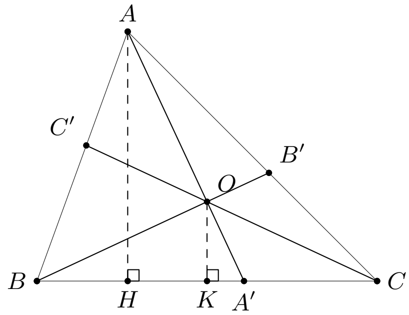


$$AN = \frac{1}{2}OM = ON = OA$$
$$\Rightarrow\ NA = NO\left(= \frac{1}{2}MO\right)$$

$\Rightarrow$ N thuộc đường trung trực của đoạn OA (cố định vì O, A cố định).
Vậy khi M di động trên d thì N chạy trên một đường thẳng cố định. □

Bài 29. Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Các đường thẳng AO, BO, CO lần lượt cắt BC, CA, AB tại A', B', C'. Chứng minh $OA' + OB' + OC' \geq \dfrac{3R}{2}$.

Lời giải.



Vẽ $AH \perp BC$ tại H, $OK \perp BC$ tại K.

$$\Rightarrow OK \parallel AH \Rightarrow \frac{OA'}{AA'} = \frac{OK}{AH}.$$

Mặt khác

$$\frac{OA'}{AA'} = \frac{S_{BOC}}{S_{ABC}}. \qquad (1)$$

Đặt $S_{BOC} = x$, $S_{COA} = y$, $S_{AOB} = z$ $(x, y, z > 0$
$\Rightarrow$ $S_{ABC} = x + y + z$.

Từ (1) $\Rightarrow$ $\dfrac{OA'}{AA' - OA'} = \dfrac{x}{(x+y+z) - x}$ hay $\dfrac{OA'}{R} = \dfrac{x}{x+y}$
$\Rightarrow$ $OA' = R \cdot \dfrac{x}{y+z}$.
Chứng minh tương tự ta có $OB' = R \cdot \dfrac{y}{x+z}$; $OC' = R \cdot \dfrac{z}{y+x}$

$$\Rightarrow OA' + OB' + OC' = R\left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y}\right) \geq \frac{3}{2}R.$$

Dấu $'' ='' $ xảy ra khi $x = y = z \Leftrightarrow \triangle ABC$ đều.
Chú ý: Ta đã sử dụng bất đẳng thức đại số "rất quen thuộc" là

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \text{ với mọi } a, b, c > 0.$$

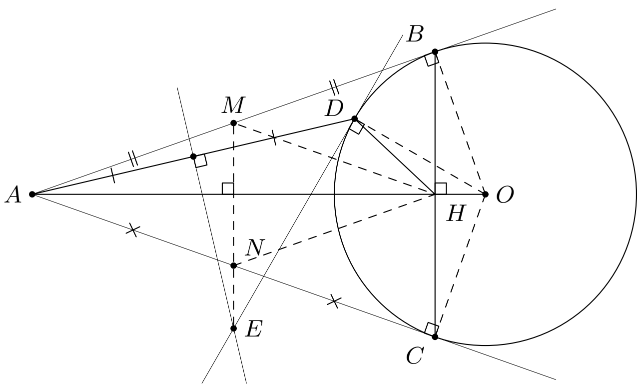
□

Bài 30. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ hai tiếp tuyến AB, AC (B, C là các tiếp điểm); D là một điểm tùy ý trên cung nhỏ BC. Tiếp tuyến tại D của đường tròn cắt đường trung trực của đoạn thẳng AD ở E. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Gọi H là giao điểm của OA và BC. Chứng minh

a) $\triangle ODH \backsim \triangle OAD$

b) Ba điểm M, E, N thẳng hàng.

Lời giải.



a) Ta có

$$OH \cdot OA = OB^2 = R^2 = OD^2$$
$$\Rightarrow \frac{OD}{OH} = \frac{OA}{OD}$$
$$\Rightarrow \triangle OHD \backsim \triangle ODA \text{ (c.g.c).}$$

b) Từ $\triangle OHD \backsim \triangle ODA$

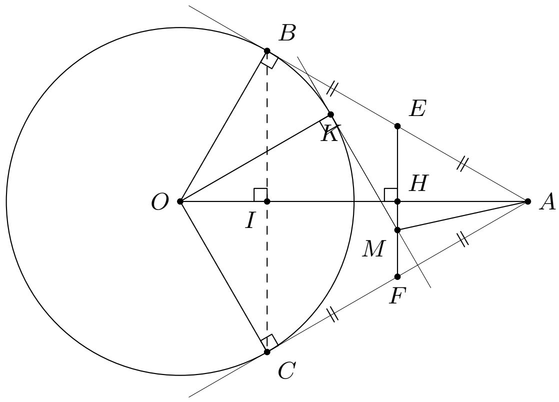
$$\Rightarrow \widehat{ODH} = \widehat{OAD}$$
$\Rightarrow$ E là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ADH$
$$\Rightarrow EA = EH$$
$\Rightarrow$ E thuộc đường trung trực của AH.

Mà M, N thuộc đường trung trực của AH nên ba điểm M, E, N thẳng hàng.

□

Bài 31. Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn (O), ta kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Gọi M là một điểm bất kì trên đường thẳng đi qua các trung điểm của AB, AC. Kẻ tiếp tuyến MK với (O). Chứng minh $MK = MA$.

Lời giải.



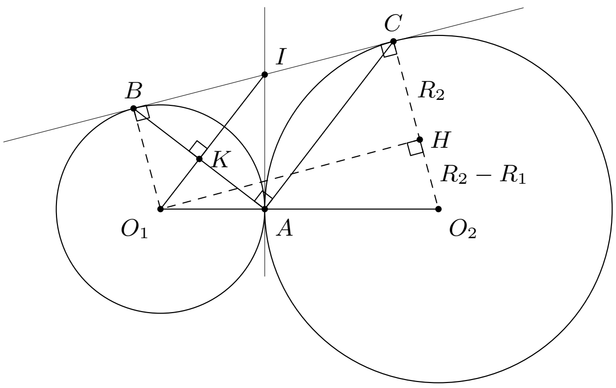
Gọi I là giao điểm của OA với BC.
Gọi E, F tương ứng là trung điểm của AB, AC.
Gọi H là giao điểm của OA và EF.
Ta có $MK^2 = MO^2 - OK^2 = OH^2 + MH^2 - OK^2$.
Ta có

$$AM^2 = AH^2 + MH^2$$
$$\Rightarrow MK^2 - AM^2 = \left(OH^2 - AH^2\right) - OK^2$$
$$= (OH - AH)(OH + AH) - OC^2 \text{ (vì } OC = OK = R)$$
$$= (OI + IH - AH) \cdot OA - OC^2$$
$$= OI \cdot OA - OC^2 \text{ (vì } IH = AH).$$

Mặt khác, trong tam giác vuông OAC có $OC^2 = OI \cdot OA$ nên ta có $MK^2 - AM^2 = 0 \Rightarrow MK = MA$. □

Bài 32. Cho hai đường tròn $(O_1;\, R_1)$ và $(O_2;\, R_2)$ tiếp xúc ngoài tại A. BC là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn (B thuộc (O_1), C thuộc (O_2)). Tính độ dài các cạnh của $\triangle ABC$.

Lời giải.



Giả sử $R_2 > R_1$.
Đặt $O_1O_2 = d = R_1 + R_2$.

Ta có:

$$\begin{aligned}BC = O_1H &= \sqrt{O_1O_2^2 - O_2H^2}\\ &= \sqrt{d^2 - (R_2 - R_1)^2}\\ &= \sqrt{(R_1 + R_2)^2 - (R_2 - R_1)^2}\\ &= 2\sqrt{R_1R_2}.\end{aligned}$$

Vẽ tiếp tuyến chung của (O_1), (O_2) tại A cắt BC tại I
$\Rightarrow\ O_1I \perp AB$ tại K
$\Rightarrow\ KA = KB = \dfrac{1}{2}AB$ và $IB = IC = \dfrac{1}{2}BC = \sqrt{R_1R_2}$.
Áp dụng hệ thức

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

vào $\triangle O_1BI$ có:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{O_1B^2} + \frac{1}{BI^2} = \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_1R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1^2R_2}\\ &\Rightarrow\ BK = \sqrt{\frac{R_1^2R_2}{R_1 + R_2}} = R_1\sqrt{\frac{R_2}{R_1 + R_2}}\\ &\Rightarrow\ AB = 2BK = 2R_2\sqrt{\frac{R_2}{R_1 + R_2}}.\end{aligned}$$

Dễ thấy $\triangle ABC$ vuông tại A nên

$$\begin{aligned}&AC^2 = BC^2 - AB^2 = 4R_1R_2 - \frac{4R_1^2R_2}{R_1 + R_2} = \frac{4R_1R_2^2}{R_1 + R_2}\\ &\Rightarrow\ AC = 2R_2\sqrt{\frac{R_1}{R_1 + R_2}}.\end{aligned}$$

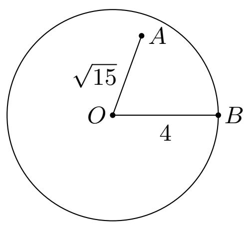
Vậy $BC = 2R_2\sqrt{R_1R_2}$; $AB = 2R_1\sqrt{\dfrac{R_2}{R_1 + R_2}}$; $AC = 2R_2\sqrt{\dfrac{R_1}{R_1 + R_2}}$. □

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho đường tròn $(O; 4\text{cm})$ và hai điểm A, B. Biết rằng $OA = \sqrt{15}\text{cm}$ và $OB = 4\text{cm}$. Khi đó:

Ⓐ Điểm A nằm trong (O), điểm B nằm ngoài (O).
Ⓑ Điểm A nằm ngoài (O), điểm B nằm trên (O).
Ⓒ Điểm A nằm trên (O), điểm B nằm trong (O).
Ⓓ Điểm A nằm trong (O), điểm B nằm trên (O).

Lời giải.
Vì $OA = \sqrt{15} < R \Rightarrow A$ nằm trong đường tròn.
Vì $OB = 4 = R \Rightarrow B$ nằm trên đường tròn.

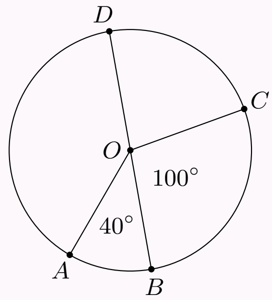


Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 2.

Cho hình bên, trong đó BD là đường kính, $\widehat{AOB}=40^\circ$; $\widehat{BOC}=100^\circ$. Khi đó:

Ⓐ sđ $\overset{\frown}{DC}=80^\circ$ và sđ $\overset{\frown}{AD}=220^\circ$.
Ⓑ sđ $\overset{\frown}{DC}=280^\circ$ và sđ $\overset{\frown}{AD}=220^\circ$.
Ⓒ sđ $\overset{\frown}{DC}=280^\circ$ và sđ $\overset{\frown}{AD}=140^\circ$.
Ⓓ sđ $\overset{\frown}{DC}=80^\circ$ và sđ $\overset{\frown}{AD}=140^\circ$.

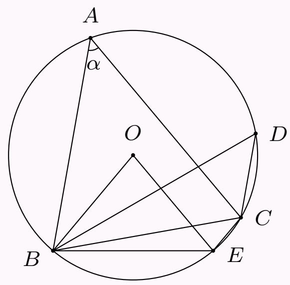


Lời giải.

Vì BD là đường kính nên
sđ $\overset{\frown}{BC}$ + sđ $\overset{\frown}{CD}=180^\circ \Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{DC}=180^\circ-$ sđ $\overset{\frown}{BC}=180^\circ-100^\circ=80^\circ$.
Vì BD là đường kính nên
sđ $\overset{\frown}{BA}$ + sđ $\overset{\frown}{AD}=180^\circ \Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{DA}=180^\circ-$ sđ $\overset{\frown}{BA}=180^\circ-40^\circ=140^\circ$.
Chọn đáp án D □

Câu 3. Trong hình bên, cho các điểm A,B,C,D,E thuộc đường tròn (O). Số đo góc BOC là

Ⓐ α.
Ⓑ 2α.
Ⓒ $180^\circ-\alpha$.
Ⓓ $180^\circ-2\alpha$.



Lời giải.

Vì BOC là góc ở tâm chắn cung $\overset{\frown}{BC}$ nên $\widehat{BOC}=2\widehat{BAC}=2\alpha$.
Chọn đáp án B □

Câu 4. Hình quạt tròn bán kính R, ứng với cung 90° có diện tích bằng

Ⓐ πR^2.
Ⓑ $\dfrac{\pi R^2}{2}$.
Ⓒ $\dfrac{\pi R^2}{4}$.
Ⓓ $\dfrac{\pi R^2}{8}$.

Lời giải.

Hình quạt tròn bán kính R, ứng với cung 90° có diện tích $S=\dfrac{\pi\cdot R^2\cdot 90^\circ}{360}=\dfrac{\pi R^2}{4}$.
Chọn đáp án C □

Câu 5. Hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn $(O;2\,\text{cm})$ và $(O;4\,\text{cm})$ có diện tích bằng

Ⓐ $12\,\text{cm}^2$.
Ⓑ $24\,\text{cm}^2$.
Ⓒ $4\pi\,\text{cm}^2$.
Ⓓ $12\pi\,\text{cm}^2$.

Lời giải.

Hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn $(O;2\,\text{cm})$ và $(O;4\,\text{cm})$ có diện tích

$$S=\pi(4^2-2^2)=12\pi\ \text{cm}^2.$$

□

Câu 6. Độ dài cung tròn có số đo 30° của đường tròn bán kính R là

Ⓐ $\dfrac{\pi R}{180}$.
Ⓑ $\dfrac{\pi R}{360}$.
Ⓒ $30\pi R$.
Ⓓ $\dfrac{\pi R}{6}$.

Lời giải.

Độ dài cung tròn là $30 \cdot \dfrac{\pi}{180} R = \dfrac{\pi R}{6}$.

Chọn đáp án D

Câu 7. Diện tích của hình quạt tròn tâm O, bán kính R, cung có số đo 45° là

A $\dfrac{\pi R^2}{45}$. B $\dfrac{\pi R^2}{4}$. C $\dfrac{\pi R^2}{8}$. D $\dfrac{\pi R^2}{16}$.

Lời giải.

Diện tích hình quạt tròn là $S = \dfrac{\pi R^2 \cdot 45}{360} = \dfrac{\pi R^2}{8}$.

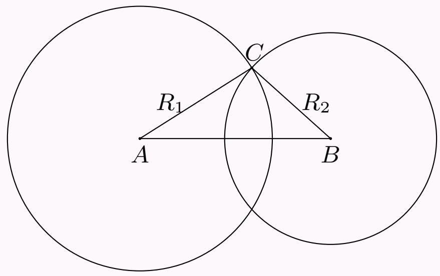
Chọn đáp án C

Câu 8.

Cho hai đường tròn $(A; R_1)$, $(B; R_2)$, trong đó $R_2 < R_1$. Biết rằng hai đường tròn (A) và (B) cắt nhau (H.5.44). Khi đó:

A $AB < R_1 - R_2$. B $R_1 - R_2 < AB < R_1 + R_2$.

C $AB > R_1 + R_2$. D $AB = R_1 + R_2$.



Lời giải.

Do A, B, C không thẳng hàng nên 3 điểm đó tạo thành tam giác. Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta được $|AC - BC| < AB < AC + BC \Rightarrow |R_1 - R_2| < AB < R_1 + R_2$.

Mà $R_1 > R_2 \Rightarrow R_1 - R_2 < AB < R_1 + R_2$.

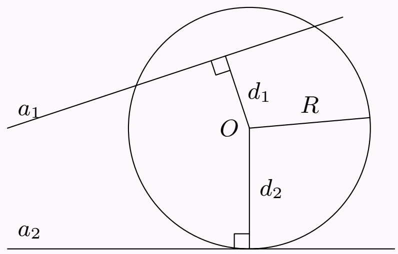
Chọn đáp án B

Câu 9.

Cho đường tròn $(O; R)$; hai đường thẳng a_1 và a_2. Gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ điểm O đến a_1 và a_2. Biết rằng (O) cắt a_1 và tiếp xúc với a_2. Khi đó:

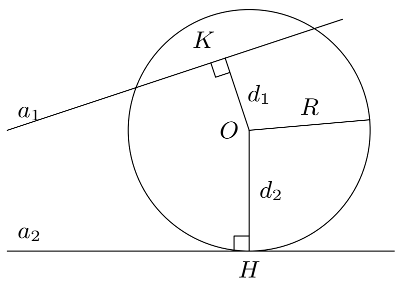
A $d_1 < R$ và $d_2 = R$. B $d_1 = R$ và $d_2 < R$.

C $d_1 > R$ và $d_2 = R$. D $d_1 < R$ và $d_2 < R$.



Lời giải.

Gọi H, K là chân đường vuông góc lần lượt hạ từ O đến a_1 và a_2.



- Ta có $d_1 = OK$, mà K nằm trong đường tròn nên $OK < R \Rightarrow d_1 < R$.
- Ta có $d_2 = OH$, mà H nằm trên đường tròn nên $OH = R \Rightarrow d_2 = R$.

Chọn đáp án A

Câu 10. Cho hai đường tròn $(O; 5\,\text{cm})$, $(O'; 4\,\text{cm})$ với $OO' = 9\,\text{cm}$. Kết luận nào sau đây đúng về vị trí tương đối của hai đường tròn?

A Hai đường tròn cắt nhau. B Hai đường tròn ở ngoài nhau.

C Hai đường tròn tiếp xúc ngoài. D Hai đường tròn tiếp xúc trong.

Lời giải.

Đường tròn (O) có bán kính $R = 5$ cm và đường tròn (O') có bán kính $R' = 4$ cm.
Ta thấy $R + R' = 5 + 4 = 9$ cm $= OO'$. Do đó hai đường tròn tiếp xúc ngoài.
Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Cho đường tròn $(0; 6\,\text{cm})$ và đường thẳng a với khoảng cách từ O đến a là $4\,\text{cm}$. Kết luận nào sau đây đúng về vi trí giữa đường tròn (O) và đường thẳng a?

(A) (O) và a cắt nhau tại hai điểm.
(B) (O) và a tiếp xúc.
(C) (O) và a không có điểm chung.
(D) (O) và a có duy nhất điểm chung.

Lời giải.
Ta thấy khoảng cách từ O đến đường thẳng a là 4 cm nhỏ hơn bán kính của đường tròn (O) (6 cm) nên đường tròn (O) cắt đường thẳng a tại hai điểm.
Chọn đáp án (A) □

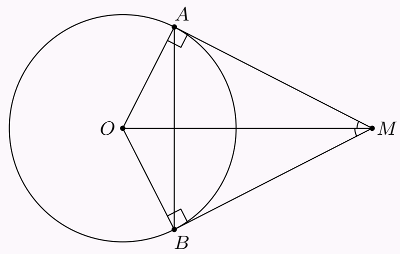
Câu 12. Góc ở tâm là góc

(A) có đỉnh nằm trên đường tròn.
(B) có đỉnh nằm trên bán kính của đường tròn.
(C) có hai cạnh là hai đường kính của đường tròn.
(D) có đỉnh trùng với tâm đường tròn.

Lời giải.
Theo định nghĩa thì góc ở tâm là góc có đỉnh nằm trên đường tròn.
Chọn đáp án (A) □

Câu 13.
Cho hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B cắt nhau tại M (hình bên). Biết $\widehat{AMB} = 50^\circ$. Số đo cung nhỏ AB là

(A) 140°.
(B) 230°.
(C) 130°.
(D) 150°.



Lời giải.
Tứ giác $AOBM$ có $\widehat{AOB} = 360^\circ - \widehat{MAO} - \widehat{MBO} - \widehat{AMB} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.
Khi đó sđ$\overparen{AB} = \widehat{AOB} = 130^\circ$.
Chọn đáp án (C) □