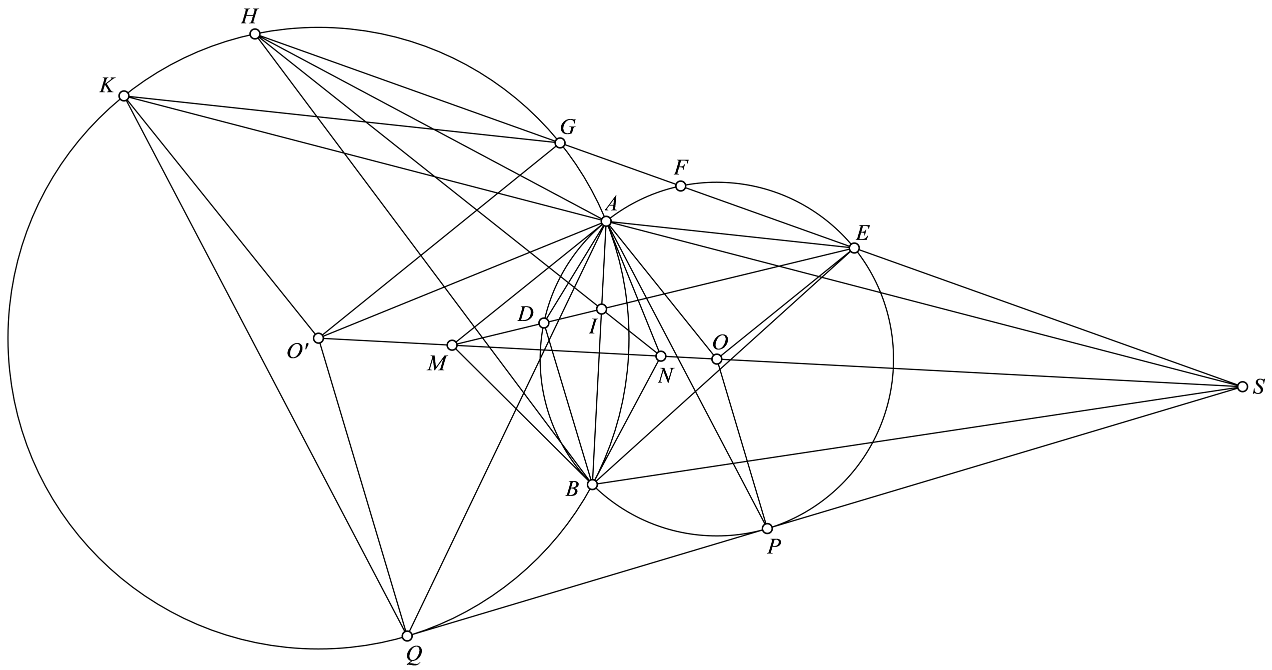
Các chuyên đề và bài tập tổng hợp hình học 9

Nguyễn Ngọc Sơn

Trường THPT Chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội - 8/2024



Lời nói đầu

Hình học là môn học đặc biệt gắn liền với mỗi học sinh chúng ta. Hình học phẳng xuất hiện trong mọi mặt của đời sống, từ hình vuông, hình tam giác, hình tròn... Bản thân của chúng ta từ bé đã được tiếp cận với những loại hình ấy thông qua cuộc sống diệu kì. Khi bước đến cấp bậc THCS, hình học được giảng dạy bài bản, thể hiện thông qua các định lý như Pythagoras, Thales,... Càng học hình nhiều, người ta càng say mê với vẻ đẹp của bộ môn này. Có lẽ vì vậy, rất nhiều bạn học sinh yêu thích bộ môn hình học, và tôi cũng vậy. Từ những ngày đầu cấp hai, tôi đã có thể dành nhiều giờ để chỉ để vẽ hình, tìm hiểu những vấn đề hình học thú vị từ cơ bản đến nâng cao. Những vấn đề ấy dù dễ dàng hay khó khăn đều mang cho tôi một cảm giác thích thú đến lạ kì. Để rồi giải được một bài toán hình, tôi lại càng cảm thấy vui sướng hơn.

Niềm say mê với cái môn ấy đã theo tôi đến mái trường cấp ba và cuốn tài liệu các bạn đang đọc chính là kết tinh của niềm đam mê ấy. Là một học sinh dưới mái trường THPT Chuyên ĐHSPHN, tôi đã được tiếp cận với những kiến thức hình sâu sắc hơn, lí thú hơn. Chính vì vậy, tôi đã ấp ủ riêng cho mình một dự án - một dự án về hình học. Tôi luôn muốn lan toả những kiến thức mình đã học hỏi được, và có lẽ không có ai phù hợp hơn là những học sinh lớp 9 - những học sinh chuẩn bị bước vào kì thi tuyển sinh vào lớp 10.

Hình học là một phần quan trọng trong các kì thi, đặc biệt là kì thi vào lớp 10. Hình học cũng là một khía cạnh rất sâu sắc về toán, là nơi mà các bạn học sinh luôn tìm được cho mình những hướng đi mới lạ, thậm chí có phần "không giống ai". Do đó, cuốn tài liệu này sẽ càng trở nên có ích hơn trên con đường của các bạn học sinh chinh phục kì thi tuyển sinh vào lớp 10 các trường THPT công lập đại trà và THPT chuyên.

Trong tài liệu này, chúng ta sẽ cùng nhau khám phá, luyện tập những chuyên đề hình học lớp 9

1. Hệ thức lượng trong tam giác vuông - Lượng giác.
2. Đường tròn.
3. Bài tập tổng hợp.

Tôi hi vọng tài liệu này sẽ là một tài liệu thiết thực và bổ ích giúp các bạn học sinh tìm hiểu sâu sắc những kiến thức toán đã học, giúp các em nâng cao khả năng của bản thân với bộ môn hình học.

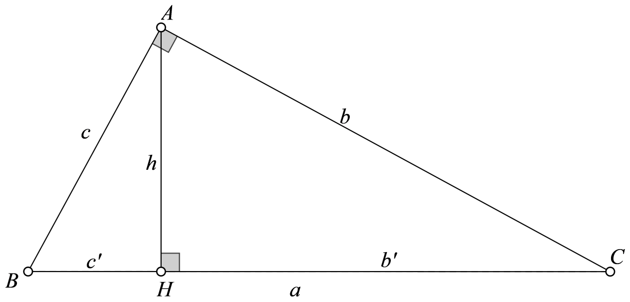
Trong quá trình biên soạn, tôi đã hết sức nghiêm túc và cẩn thận song vẫn không thể tránh khỏi những thiếu sót. Vì vậy, tác giả mong nhận được góp ý và đánh giá từ phía độc giả.

Tác giả: Nguyễn Ngọc Sơn

Mục lục

1 Hệ thức lượng trong tam giác vuông - Lượng giác

1.1 Hệ thức lượng trong tam giác vuông



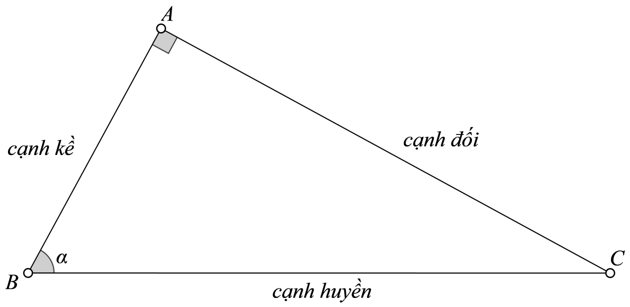
Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi độ dài các đoạn thẳng BC, AC, AB, CH, BH và AH lần lượt là a, b, c, b', c' và h. Từ đây, ta có những hệ thức sau

1. $a^2 = b^2 + c^2$.
2. $b^2 = b'.a$; $c^2 = c'.a$.
3. $h^2 = b'.c'$.
4. $a.h = b.c$.
5. $\dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{1}{h^2}$.

Các công thức trên đều có thể được chứng minh bằng tam giác đồng dạng.

1.2 Lượng giác

Định nghĩa



- Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh huyền được gọi là sin của góc α, kí hiệu là $\sin\alpha$.
- Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh huyền được gọi là cos của góc α, kí hiệu là $\cos\alpha$.
- Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề được gọi là tang của góc α, kí hiệu là $\tan\alpha$.
- Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh đối được gọi là côtang của góc α, kí hiệu là $\cot\alpha$.

Như hình trên, ta có

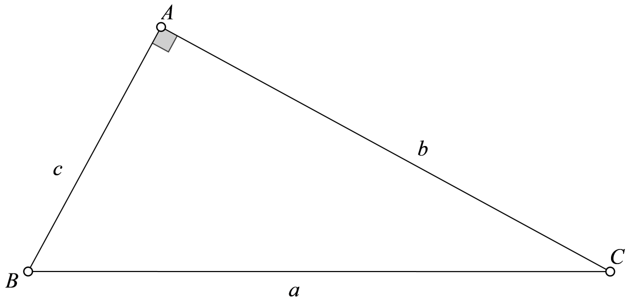
$$\sin\alpha = \frac{AC}{BC}\ ,\ \cos\alpha = \frac{AB}{BC}\ ,\ \tan\alpha = \frac{AC}{AB}\ ,\ \cot\alpha = \frac{AB}{AC}.$$

Tỉ số lượng giác của góc nhọn

Ta có các tính chất sau

- $0 < \sin\alpha < 1$, $0 < \cos\alpha < 1$.
- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.
- $\tan\alpha.\cot\alpha = 1$.
- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.
- $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.
- 2 góc α và β thoả mãn $\alpha + \beta = 90^\circ$. Khi đó, $\sin\alpha = \cos\beta$, $\tan\alpha = \cot\beta$, $\cot\alpha = \tan\beta$.

Hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông

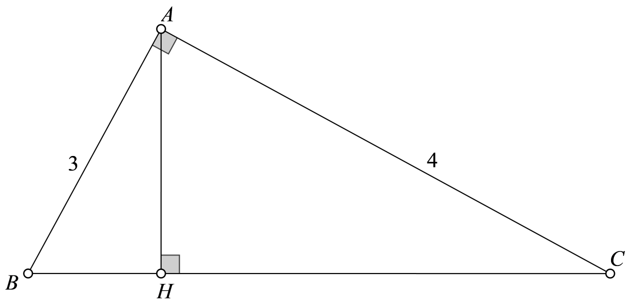


- $b = a.\sin\widehat{ABC} = a.\cos\widehat{ACB}$.
- $b = c.\tan\widehat{ABC} = c.\cot\widehat{ACB}$.
- $c = a.\sin\widehat{ACB} = a.\cos\widehat{ABC}$.
- $c = b.\tan\widehat{ACB} = b.\cot\widehat{ABC}$.

1.3 Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm. Tính BC, AH, BH, CH.

Lời giải



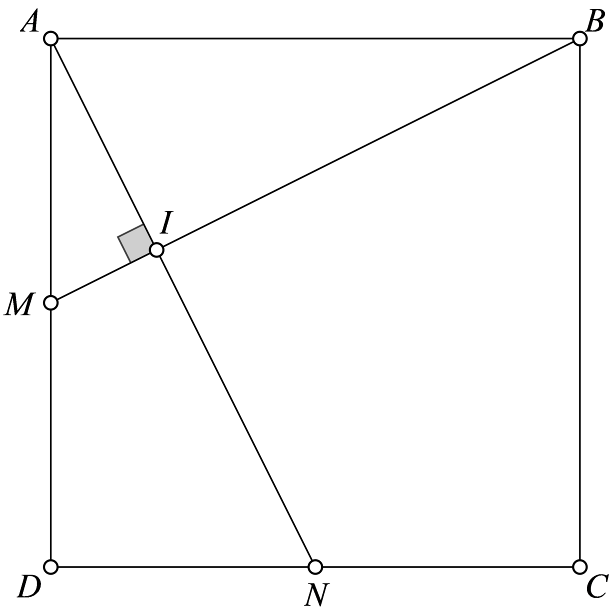
Ta có

- $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow BC = 5$ cm.
- $AH.BC = AB.AC = 3.4 = 12 \Rightarrow AH = \dfrac{12}{BC} = \dfrac{12}{5} = 2,4$ cm.
- $BH.BC = AB^2 = 9 \Rightarrow BH = \dfrac{9}{5} = 1,8$ cm.
- $CH = BC - BH = 5 - 1,8 = 3,2$ cm.

Ví dụ 2. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $2\sqrt{5}$ cm. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, DC và I là giao điểm của AN và BM.

1. Chứng minh AN vuông góc với MB.
2. Tính AI, MI.
3. Tính diện tích tứ giác $BINC$.

Lời giải



1. Xét hai tam giác ADN và BAM có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90°$, $AD = AB, DN = AM$. Suy ra $\triangle ADN = \triangle BAM$ (c-g-c), do đó $\widehat{DAN} = \widehat{ABM}$. Suy ra

$$\widehat{MAI} + \widehat{AMI} = \widehat{DAN} + \widehat{AMB} = \widehat{ABM} + \widehat{AMB} = 90°.$$

2. Ta có $BM^2 = AM^2 + AB^2 = 5 + 20 = 25 \Rightarrow BM = 5$ cm.
   Suy ra $MI = \dfrac{AM^2}{MB} = 1$ cm, $AI^2 = AM^2 - MI^2 = 5 - 1 = 4 \Rightarrow AI = 2$ cm.

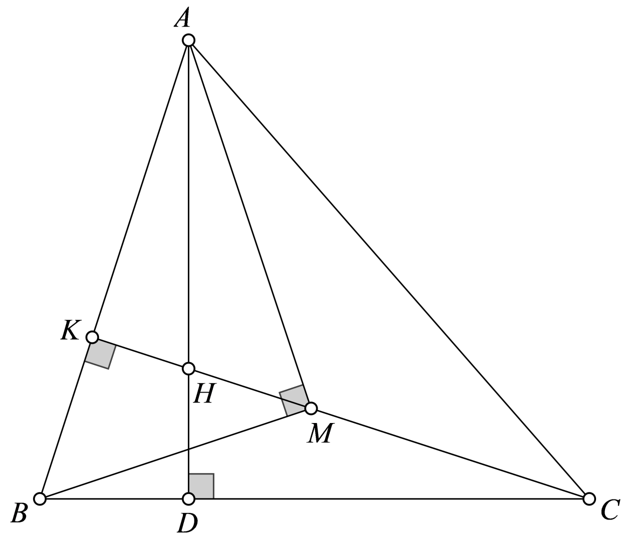
3. Ta có $S_{BCNI} = S_{BCN} + S_{BIN} = \dfrac{1}{2}(BI.IN + BC.CN) = 11$ cm^2.

Ví dụ 3. Cho tam giác nhọn ABC, đường cao CK; H là trực tâm của tam giác ABC.Gọi M là một điểm trên CK sao cho $\widehat{AMB} = 90°$. Gọi S, S_1, S_2 theo thứ tự là diện tích các tam giác AMB, ABC và ABH. Chứng minh rằng $S = \sqrt{S_1.S_2}$.

Lời giải

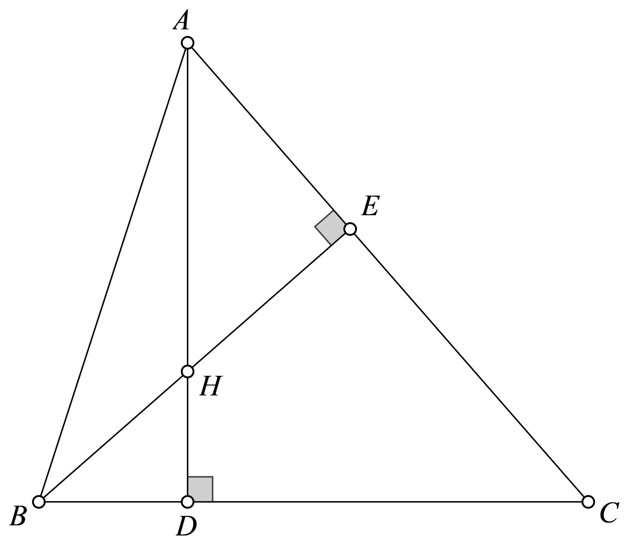
Tam giác AMB vuông tại M, có $MK \perp AB$ nên $MK^2 = BK.AK$ (1). Mặt khác, $\triangle AHK \sim \triangle CBK$ (g-g). Suy ra $\dfrac{AK}{CK} = \dfrac{HK}{BK}$, do đó $AK.KB = CK.KH$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $MK^2 = CK.KH$ nên $MK = \sqrt{CK.KH}$.
Ta có

$$S = S_{AMB} = \frac{1}{2}AB.MK = \frac{1}{2}AB.\sqrt{CK.KH} = \sqrt{\frac{1}{2}AB.CK.\frac{1}{2}AB.HK} = \sqrt{S_1.S_2}.$$



Ví dụ 4. Cho tam giác nhọn ABC, hai đường cao AD và BE cắt nhau tại H. Biết $\dfrac{HD}{HA} = \dfrac{1}{2}$, chứng minh rằng $\tan\widehat{ABC}.\tan\widehat{ACB} = 3$.

Lời giải



Ta có $\tan\widehat{ABC} = \dfrac{AD}{BD}$, $\tan\widehat{ACB} = \dfrac{AD}{CD}$. Suy ra $\tan\widehat{ABC}.\tan\widehat{ACB} = \dfrac{AD^2}{BD.CD}$ (1).
Mặt khác, ta có $\triangle BDH \sim \triangle ADC$ (g-g), suy ra $\dfrac{DH}{DC} = \dfrac{BD}{AD}$, do đó $BD.DC = DH.AD$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\tan\widehat{ABC}.\tan\widehat{ACB} = \dfrac{AD}{DH}$ (3). Theo đề bài, ta có $\dfrac{HD}{HA} = \dfrac{1}{2}$. Do đó, $\dfrac{AD}{DH} = 3$ (4). Kết hợp (3) và (4), ta có điều phải chứng minh.

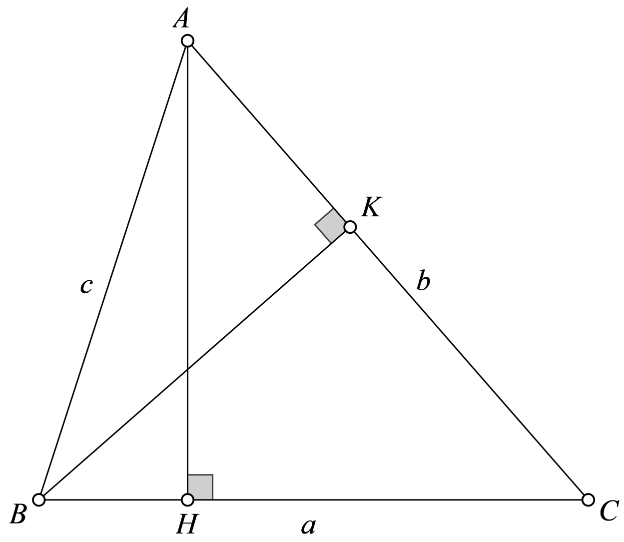
Ví dụ 5. Cho tam giác ABC với ba góc nhọn. Đặt $BC = a, AC = b, AB = c$.

1. Chứng minh rằng $\dfrac{a}{\sin\widehat{BAC}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{ABC}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{ACB}}$.

2. Chứng minh các đẳng thức sau

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\widehat{BAC}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\widehat{ABC}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\widehat{ACB}.$$

Lời giải



1. Kẻ $AK \perp BC$, ta có $AK = c.\sin\widehat{ABC} = b.\sin\widehat{ACB}$. Suy ra $\sin\widehat{ABC} = \dfrac{AK}{c}, \sin\widehat{ACB} = \dfrac{AK}{b}$. Chia theo vế, ta được

$$\frac{\sin\widehat{ABC}}{\sin\widehat{ACB}} = \frac{AK}{c}.\frac{b}{AK} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{b}{\sin\widehat{ABC}} = \frac{c}{\sin\widehat{ACB}}\ (1).$$

Tương tự, kẻ $BH \perp AC$, ta cũng chứng minh được $\dfrac{a}{\sin\widehat{BAC}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{ACB}}$ (2). Từ (1) và (2), ta suy ra điều phải chứng minh.

2. Áp dụng định lý Pythagoras cho hai tam giác vuông ACH và ABH, ta có $AH^2 + CH^2 = AC^2$ và $AH^2 + BH^2 = AB^2$. Trừ theo vế của 2 đẳng thức trên, ta được

$$CH^2 - BH^2 = AC^2 - AB^2 \Rightarrow BC^2 - 2BC.BH = AC^2 - AB^2.$$

Hay

$$BH = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\ (1).$$

Trong tam giác vuông ABH có $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{BH}{AB}$. Kết hợp với (1), ta suy ra $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ hay $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\widehat{ABC}$. Tương tự, ta cũng chứng minh được 2 hệ thức còn lại.

1.4 Bài tập tự luyện

Bài toán 1. Cho tam giác ABC nhọn, trực tâm H. Trên đoạn BH lấy điểm M và trên đoạn CH lấy điểm N sao cho $\widehat{AMC} = \widehat{ANB} = 90^\circ$. Chứng minh rằng $AM = AN$.

Bài toán 2. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H lên AB, AC. Chứng minh rằng $\sqrt[3]{BC^2} = \sqrt[3]{BD^2} + \sqrt[3]{CE^2}$.

Bài toán 3. Cho hình thang cân $ABCD$, đáy lớn $CD = 10$, AH là đường cao, $AH = AB$, đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính độ dài đường cao của hình thang cân đó.

Bài toán 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Kẻ HE, HF lần lượt vuông góc với AB, AC. Chứng minh rằng

1. $\dfrac{EB}{FC} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^3$.

2. $BC.BE.CF = AH^3$.

Bài toán 5. Cho hình chữ nhật $ABCD$ và một điểm O nằm trong hình chữ nhật. Chứng minh rằng

$$OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2.$$

Bài toán 6. Cho hình vuông $ABCD$ và điểm I thay đổi nằm giữa A và B. Tia DI cắt BC tại E. Đường thẳng kẻ qua D vuông góc với DE cắt BC tại F. Chứng minh rằng tổng $\dfrac{1}{DI^2} + \dfrac{1}{DE^2}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm I.

Bài toán 7. Cho tam giác ABC, các đường cao ứng với các cạnh a, b, c lần lượt là h_a, h_b, h_c (trong đó $BC = a, CA = b, AB = c$). Chứng minh rằng nếu $\dfrac{1}{h_a^2} = \dfrac{1}{h_b^2} + \dfrac{1}{h_c^2}$ khi và chỉ khi tam giác ABC vuông tại A.

Bài toán 8. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Kẻ $HE \perp AB, HF \perp AC$. Gọi O là giao điểm của AH và EF. Chứng minh rằng $HB.HC = 4OE.OF$.

Bài toán 9. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a.

1. M là một điểm trên cạnh AD sao cho $\widehat{ABM} = 30°$. Tính AM, BM theo a.

2. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với BM tại F, đường thẳng này cắt CD tại N. Tính độ dài các đoạn thẳng AF, MF, BF theo a.

Bài toán 10. Chứng minh rằng diện tích của một tam giác bằng một nửa tích của hai cạnh với sin của góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng chứa hai cạnh ấy.

Bài toán 11. Cho tam giác ABC nhọn, đặt $BC = a, CA = b, AB = C$. Đặt $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. Chứng minh rằng $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. *(Công thức Heron)*

Bài toán 12. Cho $\sin\alpha.\cos\alpha = \dfrac{12}{25}$. Tính $\sin\alpha, \cos\alpha$.

Bài toán 13. Cho tam giác ABC nhọn, đặt $BC = a, CA = b, AB = c$. Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là các đường cao ứng với các cạnh a, b, c. Chứng minh các hệ thức sau

$$h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$$
$$h_b = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{b}$$
$$h_c = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c}.$$

Bài toán 14. Cho tam giác ABC không phải tam giác tù. Gọi AM là đường trung tuyến ứng với cạnh BC của tam giác ABC. Gọi $BC = a, AC = b, AB = c, AM = m_a$. Chứng minh rằng $m_a^2 = \dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$.

Bài toán 15.

1. Cho $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$. Tính $A = 5\sin^2\alpha + 6\cos^2\alpha$.

2. Cho $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$. Tính $B = 4\sin^2\alpha - 5\cos^2\alpha$.

Bài toán 16. Tìm góc nhọn α, biết $\sin\alpha.\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Bài toán 17. Cho tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{ACB} = \alpha < 45°$, trung tuyến AM, đường cao AH, $BC = a$. Chứng minh các công thức sau

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$.

2. $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$.

3. $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$.

2 Đường tròn

2.1 Kiến thức cơ bản

1. Đường tròn tâm O, bán kính R là hình gồm các điểm cách đều O một khoảng bằng R. Một đường tròn được xác định khi biết tâm và bán kính, hoặc khi biết một đoạn thẳng là đường kính của nó.

2. Qua ba điểm không thẳng hàng, ta chỉ vẽ được duy nhất một đường tròn đi qua cả 3 điểm nó (tâm của đường tròn này giao điểm của ba đường trung trực tạo bởi các đoạn thẳng nối các điểm cho trước).

3. Tâm của đường tròn là *tâm đối xứng* của đường tròn đó.

4. Bất kì đường thẳng nào chứa một đường kính của đường tròn cũng là *trục đối xứng* của đường tròn đó.

5. Trong các dây, dây lớn nhất là đường kính.

6. Trong đường tròn

    (a) Đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.

    (b) Đường kính đi qua trung điểm của một dây (không phải đường kính) thì vuông góc với dây ấy.

7. Tam giác nội tiếp đường tròn có một cạnh là đường kính của đường tròn khi và chỉ khi tam giác đó là tam giác vuông.

8. Trong một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau:

    (a) Hai dây cung bằng nhau khi và chỉ khi chúng cách đều tâm.

    (b) Trong hai dây cung không bằng nhau, dây cung lớn hơn khi và chỉ khi nó gần tâm hơn.

2.2 Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn, đường tròn và đường tròn

Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

1. Khi đường thẳng a và đường tròn (O) có hai điểm chung, ta nói đường thẳng a và đường tròn (O) cắt nhau. Đường thẳng a còn gọi là cát tuyến.

2. Khi đường thẳng a và đường tròn (O) chỉ có một điểm chung, ta nói đường thẳng a và đường tròn (O) tiếp xúc nhau. Đường thẳng a là tiếp tuyến của đường tròn (O). Điểm chung gọi là tiếp điểm.

3. Khi đường thẳng a là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

4. Khi đường thẳng a và đường tròn (O) không có điểm chung, ta nói đường thẳng a và đường tròn (O) không giao nhau.

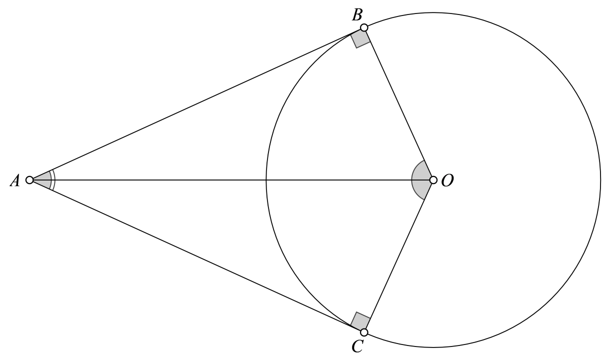
5. Nếu một đường thẳng đi qua một tiếp điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là tiếp tuyến của đường tròn.

6. Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

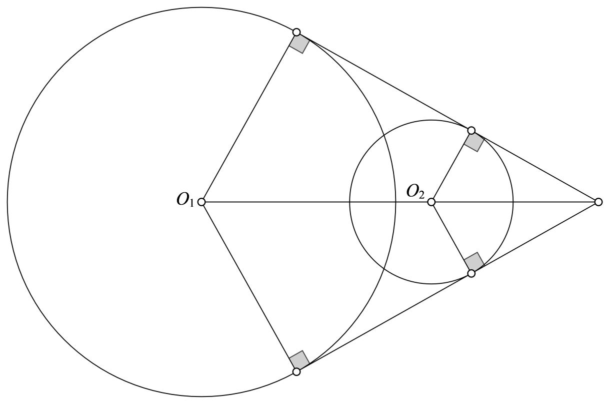
    (a) Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.

    (b) Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.

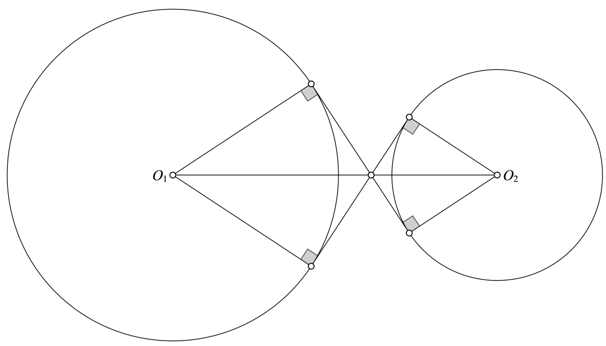
    (c) Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.



7. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn



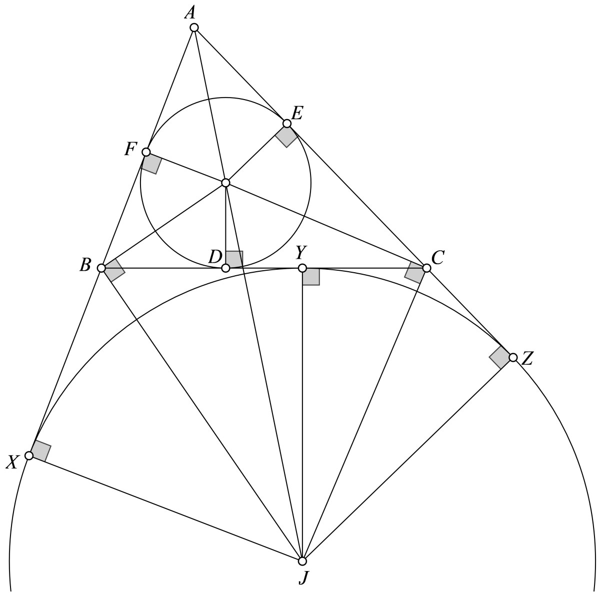
Hình 1: Tiếp tuyến chung ngoài



Hình 2: Tiếp tuyến chung trong

8. Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác gọi là đường tròn nội tiếp tam giác, còn tam giác gọi là tam giác ngoại tiếp đường tròn. Tâm của đường tròn nội tiếp là giao điểm các đường phân giác trong của tam giác.

9. Đường tròn tiếp xúc với một cạnh tam giác và tiếp xúc với các phần kéo dài của hai cạnh kia được gọi là đường tròn bàng tiếp tam giác. Với một tam giác có ba đường tròn bàng tiếp ứng với ba góc tam giác. Tâm của đường tròn bàng tiếp là giao điểm của hai đường phân giác ngoài, hoặc đường phân giác trong và một đường phân giác ngoài.



Kiến thức bổ sung

1. Nếu I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC thì $\widehat{BIC} = 90^\circ + \dfrac{\widehat{A}}{2}$.

2. Nếu I là điểm nằm trong tam giác ABC và $\widehat{BIC} = 90^\circ + \dfrac{\widehat{A}}{2}$, $\widehat{AIC} = 90^\circ + \dfrac{\widehat{ABC}}{2}$ thì I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

3. Nếu J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC thì $\widehat{BJC} = 90^o - \dfrac{\widehat{A}}{2}$.

4. Cho tam giác ABC, đặt $BC = a, CA = b, AB = c, a + b + c = 2p; r$ là bán kính đường tròn nội tiếp, S là diện tích tam giác ABC thì $r = (p-a)\tan\dfrac{\widehat{A}}{2} = (p-b)\tan\dfrac{\widehat{B}}{2} = (p-c)\tan\dfrac{\widehat{C}}{2}$, $S = pr$.

5. Nếu đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AB, AC tại F, E thì

$$AE = AF = \frac{AB + AC - BC}{2} = \frac{b + c - a}{2}.$$

5 kiến thức bổ sung trên được coi như bài tập. Bạn đọc tự chứng minh.

Vị trí tương đối của hai đường tròn

1. Hai đường tròn cắt nhau: Cho hai đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$. Ta nói đường tròn $(O_1; R_1)$ cắt đường tròn $(O_2; R_2)$ khi và chỉ khi $R_1 + R_2 < O_1O_2$.

2. Hai đường tròn tiếp xúc nhau: Cho hai đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ với $R_1 > R_2$. Ta nói hai đường tròn này tiếp xúc nhau khi và chỉ khi $O_1O_2 = R_1 + R_2$ (tiếp xúc ngoài) hoặc $O_1O_2 = R_1 - R_2$ (tiếp xúc trong).

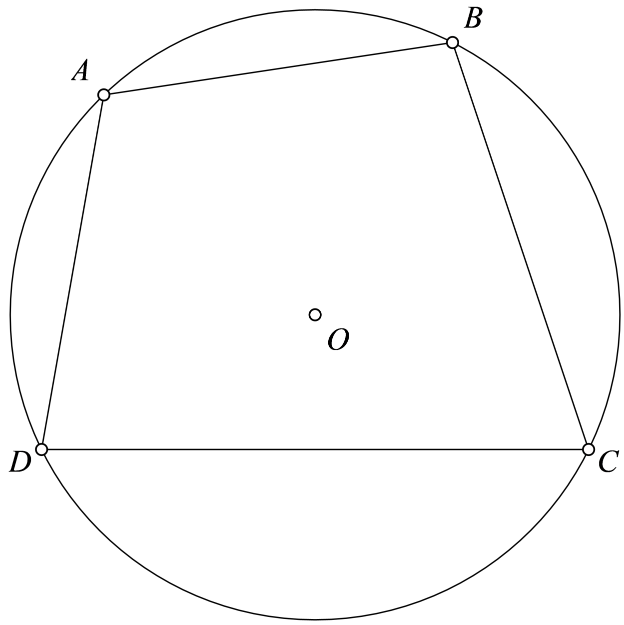
3. Hai đường tròn không giao nhau: Cho hai đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ với $R_1 > R_2$. Ta nói đường tròn (O_1) và đường tròn (O_2) nằm ngoài nhau khi và chỉ khi $O_1O_2 < R_1 + R_2$. Ta nói đường tròn (O_1) đựng đường tròn (O_2) khi và chỉ khi $O_1O_2 < R_1 - R_2$. Ta nói hai đường tròn này đồng tâm khi và chỉ khi $O_1O_2 = 0$.

2.3 Các góc với đường tròn

(Kiến thức cơ bản, bạn đọc tìm hiểu trong sách giáo khoa)

2.4 Tứ giác nội tiếp

Định nghĩa: Là một tứ giác lồi có bốn đỉnh cùng thuộc một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp.



Dấu hiệu nhận biết:

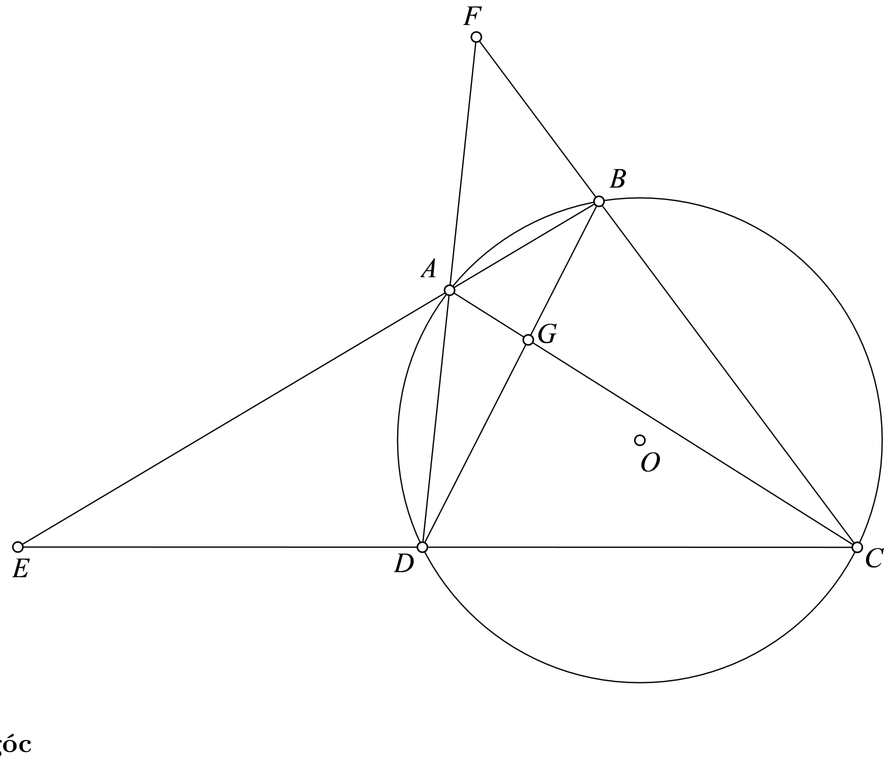
-Tứ giác có tổng các góc đối bằng 180°.

-Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện.

-Tứ giác có hai đỉnh kề nhau nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc α

-Tứ giác có 4 đỉnh cách đều một điểm cố định (có thể xác định được). Điểm này là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó.

Tính chất (Điều kiện cần và đủ) Cho tứ giác $ABCD$. Gọi AB giao CD tại E. AD giao BC tại F. AC giao BD tại G. Ta có các điều kiện sau là tương đương:



Tính chất về góc

1. Tứ giác ABCD nội tiếp một đường tròn.

2. $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ (Tính chất góc kề nhau).

3. $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$ (Tính chất góc đối nhau).

4. $\widehat{FBA} = \widehat{ADC}$ (Tính chất góc ngoài).

Tính chất về lượng

Với bán kính đường tròn ngoại tiếp tâm O có độ dài là R

1. $EA.EB = ED.EC = OE^2$ - R^2 (Tính chất lượng của cạnh đối).

2. $FB.FC = FA.FD = OF^2$ - R^2 (Tính chất lượng của cạnh đối)

3. $GA.GC = GB.GD = R^2$ - OG^2 (Tính chất lượng của đường chéo).

Mở rộng tính chất lượng:

Mở rộng tính chất lượng của cạnh đối $\dfrac{ED}{EC} = \dfrac{AD}{AC}.\dfrac{BD}{BC}$

Mở rộng tính chất lượng của cạnh đối $\dfrac{EA}{EB} = \dfrac{DA}{DB}.\dfrac{CA}{CB}$

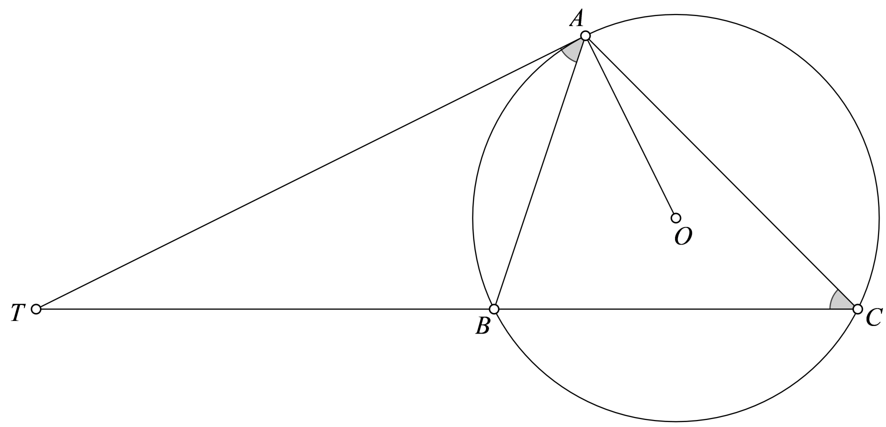
Mở rộng tính chất lượng của cạnh đối $\dfrac{FA}{FB} = \dfrac{BA}{BD}.\dfrac{CA}{CD}$

Mở rộng tính chất lượng của cạnh đối $\dfrac{FB}{FC} = \dfrac{AB}{AC}.\dfrac{DB}{DC}$

Mở rộng tính chất lượng của đường chéo $\dfrac{GA}{GC} = \dfrac{DA}{DC}.\dfrac{BA}{BC}$

Mở rộng tính chất lượng của đường chéo $\dfrac{GB}{GD} = \dfrac{BA}{BC}.\dfrac{DA}{DC}$

Tính chất liên quan đến tiếp tuyến:



1. Đường thẳng TA tiếp xúc đường tròn (O).

2. $\widehat{TAB} = \widehat{ACB}$ (Tính chất góc của tiếp tuyến).

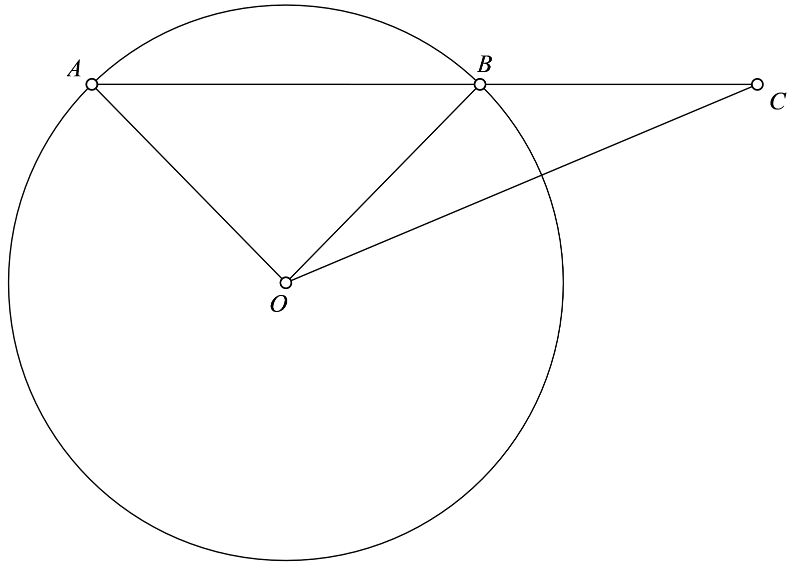
3. $TA^2 = TB.TC$ (Tính chất lượng của tiếp tuyến).

4. $\dfrac{TB}{TC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$ (Tính chất lượng của tiếp tuyến).

2.5 Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây AB. Kéo dài AB về phía B, lấy điểm C sao cho $BC = R$. Chứng minh rằng $\widehat{AOC} = 180^\circ - 3\widehat{ACO}$.

Lời giải

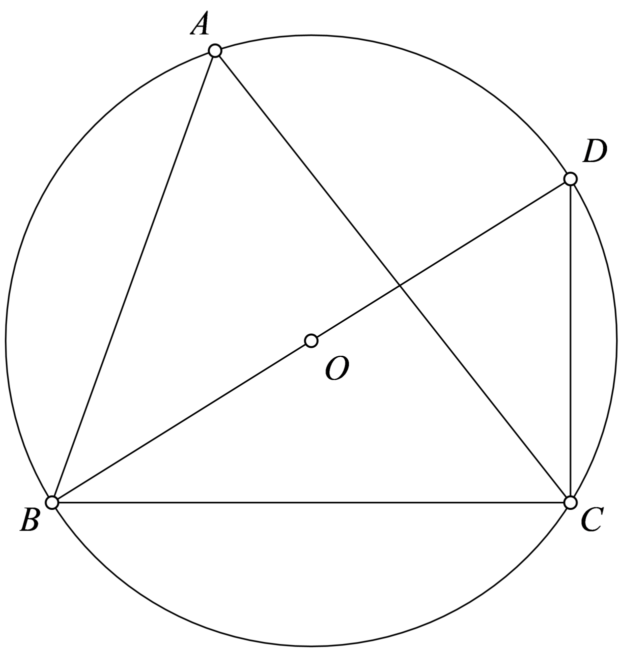


Ta có các tam giác OAB và OBC cân, $\widehat{OBA}$ là góc ngoài đỉnh B của tam giác OBC nên $\widehat{OBA} = \widehat{OAB} = 2\widehat{ACO}$. Ta có biến đổi góc như sau

$$\widehat{AOC} = \widehat{AOB} + \widehat{OBC} = 180^\circ - 2\widehat{OBA} + \widehat{ACO} = 180^\circ - 4\widehat{ACO} + \widehat{ACO} = 180^\circ - 3\widehat{ACO}.$$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC nhọn. Đặt $BC = a, AC = b, AB = c$. Chứng minh rằng $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R$.

Lời giải



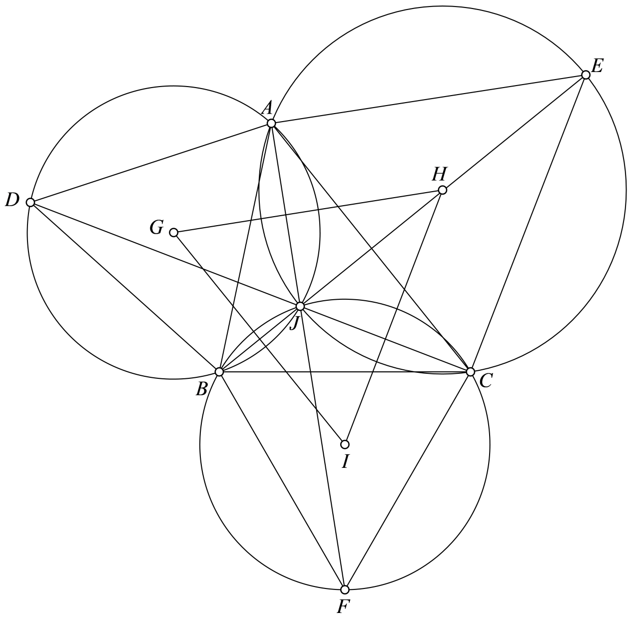
Kẻ đường kính BD của đường tròn (O). Khi đó, $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{BC}{\sin\widehat{BDC}} = BD = 2R$. Tương tự, ta cũng chứng minh được các hệ thức còn lại.

Ví dụ 3 *(Bài toán Napoleon)* Cho tam giác ABC nhọn. Dựng về phía ngoài của tam giác ABC các tam đều ABD, ACE và BCF.

1. Chứng minh rằng các đường thẳng AF, BE, CD đồng quy tại một điểm. *(Điểm Fermat - Torricelli)*

2. Gọi G, H, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD, ACE, BCF. Chứng minh rằng tam giác GHI là tam giác đều.

Lời giải



1. Gọi giao điểm thứ hai của đường tròn (ABD) và (ACE) là J. Ta có $\widehat{AJB} = 180^\circ - \widehat{ADB} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Tương tự $\widehat{AJC} = 120^\circ$. Do đó, ta cũng có $\widehat{BJC} = 360^\circ - \widehat{AJB} - \widehat{AJC} = 120^\circ$. Vậy nên, $J \in (BJC)$. Mặt khác, ta có $\widehat{BJF} = \widehat{BCF} = 60^\circ = 180^\circ - 120^\circ = 180^\circ - \widehat{AJB}$ nên ba điểm A, J, F thẳng hàng. Chứng minh tương tự, ta cũng có bộ ba điểm (B, J, E) và (C, J, D) thẳng hàng.

2. Dễ thấy $GH \perp AJ$ và $AI \perp BJ$ nên $\widehat{HGI} = 180^\circ - \widehat{AJB} = 60^\circ$. Tương tự, ta cũng có $\widehat{GHI} = \widehat{GIH} = 60^\circ$. Do đó, tam giác GHI là tam giác đều. Ta kết thúc bài toán tại đây.

2.6 Một số mô hình cơ bản của hình học phẳng THCS

2.6.1 Mô hình trực tâm

Vấn đề. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H, các đường thẳng AH, BH, CH kéo dài cắt (O) tại giao điểm thứ hai là P, Q, R (P khác B, Q khác C, R khác A). Gọi M, I lần lượt là trung điểm của BC, AH, đường thẳng EF cắt AH tại K. Chứng minh rằng

1. Các tứ giác $BFHD, CEHD, BFEC$ nội tiếp.

2. H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

3. Dựng đường kính AN của (O). Khi đó tứ giác $BHCN$ là hình bình hành. Suy ra H, M, N thẳng hàng. H, G, O thẳng hàng *(Đường thẳng Euler)* và $HO = 3GO$ với G là trọng tâm của tam giác ABC.

4. P, Q, R là các điểm đối xứng với H qua BC, CA, AB.

5. OA vuông góc EF, tam giác AQR cân.

6. Đường thẳng EF kéo dài cắt đường tròn (O) lần lượt tại E_1, F_1 (E nằm giữa E_1 và F). Khi đó AE_1, AF_1 lần lượt là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp các tam giác CEE_1, BFF_1.

7. Gọi X, Y, Z, T lần lượt là trung điểm của AB, AC, HB, HC. Khi đó 9 điểm $D, E, F, X, Y, M, I, Z, T$ nằm trên cùng một đường tròn có tâm là trung điểm của OH *(gọi là đường tròn Euler của tam giác ABC)*.

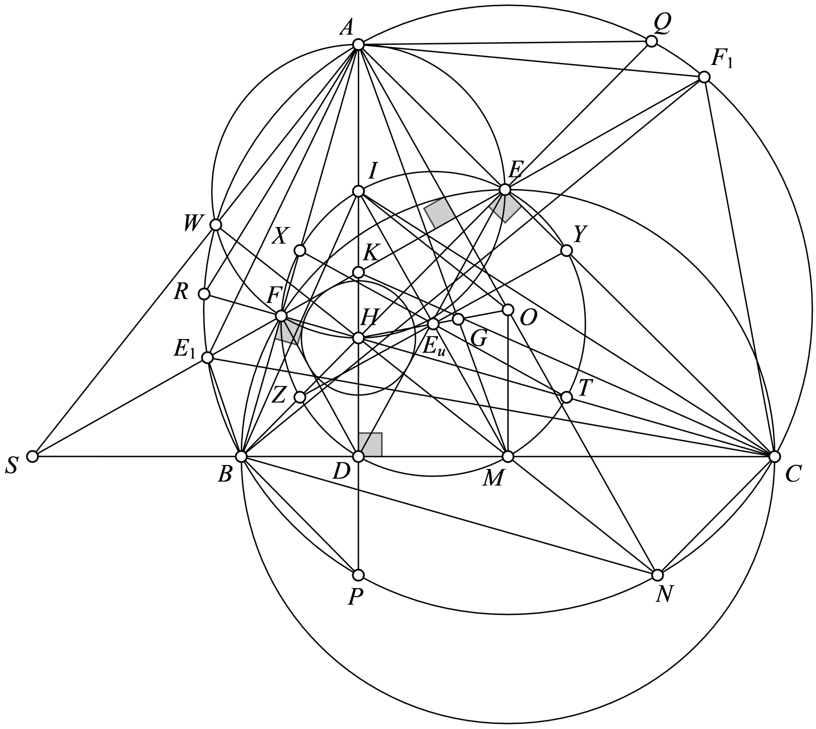
8. K là trực tâm của tam giác IBC.

9. ME, MF là các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF.

10. Gọi W là giao điểm thứ hai của đường tròn (AEF) và đường tròn (O). Khi đó, bốn điểm W, H, M, N thẳng hàng.

11. Ba đường thẳng AW, EF, BC đồng quy tại một điểm.

Lời giải



1. Bạn đọc tự chứng minh.

2. Ta có các tứ giác $BDHF, CDHE$ và $BFEC$ nội tiếp nên $\widehat{HDF} = \widehat{HBF} = \widehat{HCE} = \widehat{HDE}$. Do đó, DH là tia phân giác của $\widehat{FDE}$. Tương tự, ta cũng có EH là tia phân giác của $\widehat{FED}$, FH là tia phân giác của $\widehat{EFD}$. Suy ra H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DFE.

3. Ta có $\widehat{ABN} = 90^\circ$ vì nó là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AN. Do đó, $AB \perp BN$. Mà $CH \perp AB$ nên $BN \parallel CH$. Tương tự, ta cũng có $BH \parallel CN$. Từ đây suy ra tứ giác $BHCN$ là hình bình hành. Kết hợp với M là trung điểm của BC, ta suy ra M cũng là trung điểm của HN.
Dễ chứng minh $AH = 2OM$ theo tính chất đường trung bình. Gọi $AM \cap OH = G'$. Theo định lý Thales, ta có $\dfrac{AG'}{G'M} = \dfrac{AH}{OM} = 2$. Mặt khác, vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\dfrac{AG}{GM} = 2$. Suy ra $G \equiv G'$, hay ba điểm H, G, O thẳng hàng và $HO = 3GO$.

4. Ta có $\widehat{CBP} = \widehat{CAP} = \widehat{HBC}$. Do đó, H đối xứng với P qua BC. Các điểm còn lại cũng chứng minh tương tự.

5. Có $\widehat{OAE} = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\widehat{AOC} = 90^\circ - \widehat{ABC} = 90^\circ - \widehat{AEF}$. Do đó, $OA \perp EF$. Mặt khác, theo chứng minh trên, ta có R đối xứng H qua AB và Q đối xứng H qua AC nên $AR = AH = AQ$. Suy ra tam giác ARQ cân tại A.

6. Vì $OA \perp EF$ nên $AE_1 = AF_1$. Vì vậy, dễ thấy $\triangle AE_1E \sim \triangle ACE_1$ (g-g) nên $AE_1^2 = AE.AC$. Do đó, AE_1 là tiếp tuyến của đường tròn (CEE_1). Chứng minh tương tự, AF_1 là tiếp tuyến của đường tròn (BFF_1).

7. Gọi E_u là trung điểm của OH. Dễ thấy tứ giác $HIOM$ là hình bình hành nên E_u là trung điểm của IM. Tương tự, ta có E_u là trung điểm của XT và YZ. Bằng tính chất của đường trung bình, ta chứng minh được $IM = YZ = XT = R$ với R là độ dài bán kính của đường tròn (O). Từ đây dễ dàng suy ra 9 điểm $D, E, F, X, Y, M, I, Z, T$ cùng thuộc một đường tròn.

8. Ta có $\widehat{IBC} = \widehat{IBE} + \widehat{EBC} = 90^\circ - \widehat{ACB}$ (1).
   Chú ý rằng các tứ giác $EIBP, EKPC$ nội tiếp nên ta có biến đổi góc như sau
   $$\widehat{IBE} = \widehat{IPE} = \widehat{KCE} = \widehat{ACB} - \widehat{KCB} \text{ (2).}$$
   Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{IBC} + \widehat{KCB} = 90^\circ$. Do đó, K là trực tâm của tam giác IBC.

9. Ta có
   $$\widehat{IEF} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{FIE} = 90^\circ - \widehat{FAE} = \widehat{FBE} = \widehat{IME}. \text{ (Vì sao?)}$$
   Do đó, $IE \perp ME$ (Vì sao?). Tương tự, ta cũng có $IF \perp MF$.

10. Ta có $\widehat{AWH} = 90^\circ$. Mà $\widehat{AWN} = 90^\circ$ nên ba điểm W, M, N thẳng hàng. Mà ba điểm H, M, N thẳng hàng nên bốn điểm W, H, M, N thẳng hàng.

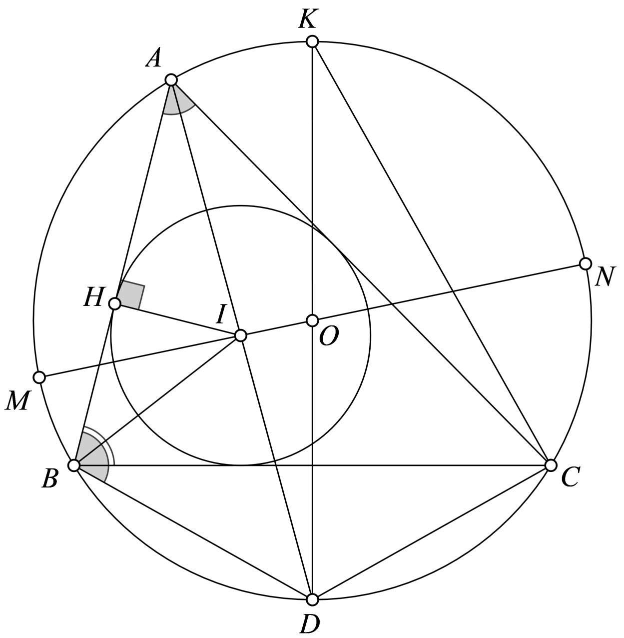
11. Gọi $EF \cap BC = \{S\}, AS \cap (O) = \{W'\}$ $(W' \neq A)$. Theo phương tích, ta có
    $$SF.SE = SB.SC = SW'.SA.$$
    Do đó, tứ giác $AW'FE$ nội tiếp. Suy ra $W \equiv W'$, ta có điều phải chứng minh.

2.6.2 Mô hình tâm đường tròn nội tiếp

Vấn đề. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$ và ngoại tiếp đường tròn $(I; r)$, H là tiếp điểm của đường tròn (I) với AB. Gọi D là giao điểm thứ hai của AI và đường tròn (O), DK là đường kính của đường tròn (O). Gọi d là độ dài của đoạn thẳng OI. Chứng minh rằng

1. Tam giác AHI và tam giác KCD đồng dạng.
2. $DI = DB = DC$.
3. $IA.ID = R^2 - d^2$.
4. *(Hệ thức Euler)* $d^2 = R^2 - 2R.r$.

Lời giải



1. Hai tam giác KCD và AHI có $\widehat{KCD} = \widehat{AHI} = 90^\circ$ và $\widehat{DKC} = \widehat{DAC} = \widehat{IAH}$ nên hai tam giác này đồng dạng theo trường hợp góc - góc.

2. Ta có $\widehat{DIB} = \widehat{BAI} + \widehat{ABI} = \widehat{DAC} + \widehat{IBC} = \widehat{DBC} + \widehat{IBC} = \widehat{DBI}$ nên tam giác DBI cân tại D. Suy ra $DB = DI$. Tương tự, ta cũng chứng minh được $DI = DC$. Vậy $DB = DI = DC$.

3. Kẻ đường kính MN đi qua điểm I của đường tròn (O). Ta có
$$IA.ID = IM.IN = (R-d)(R+d) = R^2 - d^2.$$

4. Từ câu (1.) suy ra $\dfrac{IA}{DK} = \dfrac{IH}{DC}$ nên
$$IA.DC = DK.IH = 2Rr. \ (3)$$
Mặt khác, theo câu (2.), ta có $DI = DC$ nên $IA.DC = IA.ID = R^2 - d^2$ (4). Từ (3) và (4) suy ra $R^2 - d^2 = 2Rr$ hay $d^2 = R^2 - 2Rr$.

Mô hình tâm đường tròn nội tiếp nâng cao

Vấn đề. Cho tam giác ABC, D, E, F thứ tự là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp (I) tam giác ABC với các cạnh $BC, CA, AB; H$ là hình chiếu của D trên EF. Chứng minh

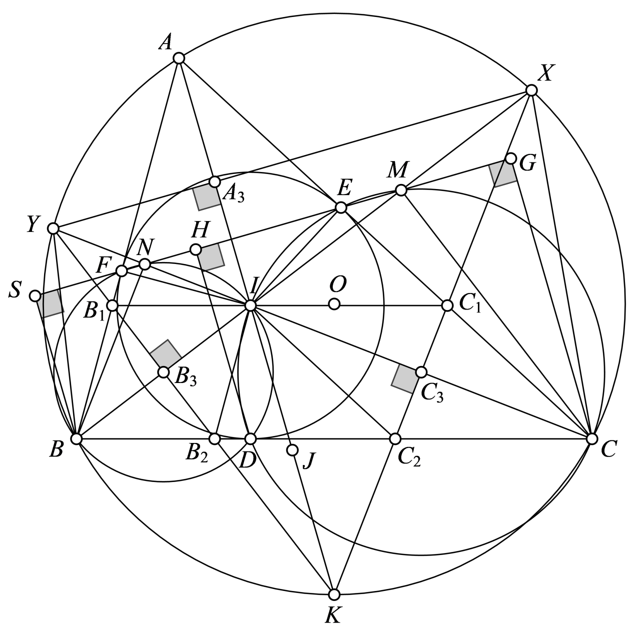
1. HD là tia phân giác của góc BHC.

2. Đường thẳng BI, CI cắt EF lần lượt tại M, N. Khi đó bốn điểm I, E, M, C cùng nằm trên một đường tròn; bốn điểm I, N, F, B cùng nằm trên một đường tròn.

3. Gọi giao của AI, BI, CI với đường tròn (O) lần lượt là K, X, Y. Đường thẳng KY cắt AB, BC, BI lần lượt tại B_1, B_2, B_3. Đường thẳng KX cắt AC, BC, CI lần lượt tại C_1, C_2, C_3. Khi đó
   - BB_1B_2, CC_1C_2 là các tam giác cân.
   - B_1, I, C_1 thẳng hàng.
   - I là trực tâm tam giác KXY.

4. Gọi J là trung điểm IK, A_3 là giao điểm của XY và AI. Khi đó bốn điểm A, B_3, C_3, J cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải



1. Gọi S, G lần lượt là hình chiếu của B, C lên EF. Ta có tam giác AFE là tam giác cân nên $\widehat{BFS} = \widehat{AFE} = \widehat{AEF} = \widehat{CEG}$. Kết hợp với $\widehat{BIF} = \widehat{CGE} = 90^\circ$, ta được hai tam giác BFS và CEG đồng dạng. Suy ra
$$\frac{BF}{BS} = \frac{CE}{CG} \Rightarrow \frac{BS}{CG} = \frac{BD}{CD} = \frac{SH}{HG}.$$
Suy ra $\triangle BHS \sim \triangle CHG$. Vậy nên $\widehat{BHS} = \widehat{CHG}$. Do đó, $\widehat{BHD} = \widehat{CHD}$ hay HD là tia phân giác của góc BHC. Ta kết thúc bài toán.

2. Ta có $\widehat{MIC} = 180^\circ - \widehat{BIC} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{AEF} = \widehat{MEC}$. Do đó, tứ giác $MEIC$ nội tiếp. Tương tự, ta cũng có tứ giác $INFB$ nội tiếp.

3.
   - Bằng tính chất của tam giác cân, dễ dàng chứng minh được $KX \perp CI = \{C_3\}$ và $KY \perp BI = \{B_3\}$. Do đó, các tam giác BB_1B_2 và CC_1C_2 là các tam giác cân.
   - Do các tam giác YBI và BB_1B_2 cân nên ta suy ra được B_3 là trung điểm của B_1B_2 và BI. Mà $B_1B_2 \perp BI = \{B_3\}$ nên tứ giác BB_1IB_2 là hình thoi. Suy ra $B_1I \parallel BC$. Tương tự, ta cũng thấy $C_1I \parallel BC$ nên ba điểm B_1, I, C_1 thẳng hàng.
   - Vì $XB_3 \perp KY$ và $YC_3 \perp KX$ nên hiển nhiên I là trực tâm của tam giác KXY.

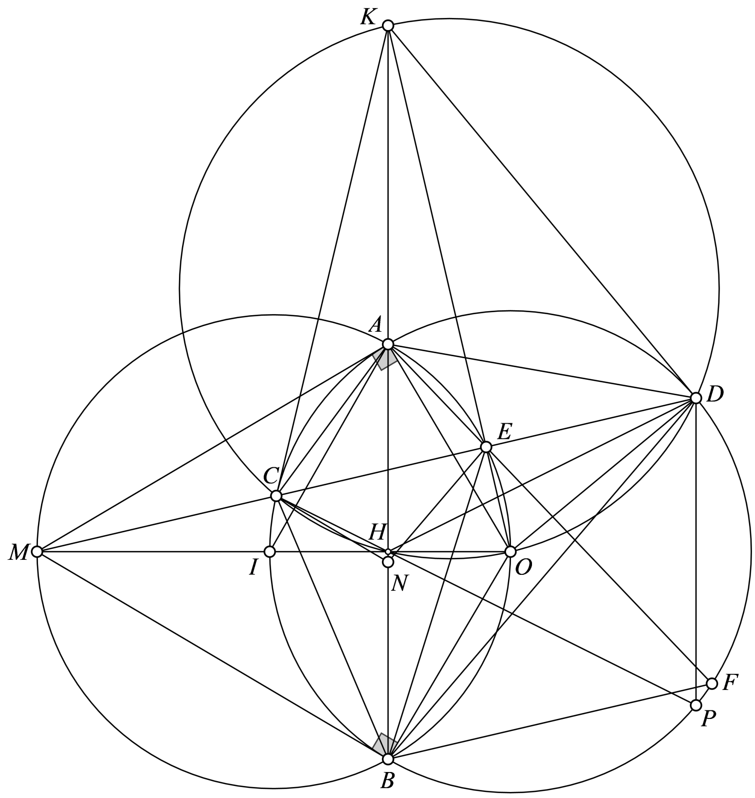
4. Vì A_3, B_3, C_3 là ba chân đường cao trong tam giác KXY và J là trung điểm của KI nên bốn điểm này cùng thuộc đường tròn Euler của tam giác KXY.

2.6.3 Mô hình tiếp tuyến

Vấn đề. Cho đường tròn (O, R) và một điểm M nằm ngoài đường tròn (O). Qua M kẻ các tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm) và dựng cát tuyến MCD sao cho $MC < MD$. Gọi E là trung điểm của CD, đoạn thẳng MO cắt (O) và AB lần lượt tại I, H. Khi đó hãy chứng minh các tính chất hình học sau

1. 5 điểm M, A, E, O, B nằm trên một đường tròn.
2. ME là tia phân giác của góc $\widehat{AEB}$.
3. $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$. *(Tứ giác ACBD được gọi là tứ giác điều hoà)*
4. I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB.
5. Tứ giác $CHOD$ nội tiếp.
6. AB chứa đường phân giác của góc $\widehat{CHD}$.
7. $\widehat{CAD} = \widehat{BHD}$.
8. OE kéo dài cắt AB tại K thì KC và KD là tiếp tuyến của (O).
9. AE cắt (O) tại giao điểm thứ hai là F ($F \neq A$). Khi đó $BF \parallel CD$.
10. Tia CH cắt đường tròn (O) tại giao điểm thứ hai là P ($P \neq C$) thì $DP \parallel AB$.
11. Đường thẳng qua E song song với BD cắt AB tại N. Khi đó $CN \perp OB$.

Lời giải



1. Vì E là trung điểm của CD nên $OE \perp CD = \{E\}$. Do đó, $\widehat{OEM} = 90^\circ$. Vì vậy, dễ dàng suy ra 5 điểm M, A, E, O, B cùng thuộc đường tròn đường kính OM.

2. Trong đường tròn (OM) có $MA = MB$ nên sđ$\overset{\frown}{MB} =$ sđ$\overset{\frown}{MB}$. Vì vậy $\widehat{AEM} = \widehat{BEM}$, nên EM là tia phân giác của $\widehat{AEB}$.

3. Ta có các cặp tam giác đồng dạng là $\triangle MCB \sim \triangle MBD$ (g-g) và $\triangle MCA \sim \triangle MAD$ (g-g) nên ta có
$$\frac{AC}{AD} = \frac{MC}{MA} = \frac{MC}{MB} = \frac{BC}{BD}.$$

4. Ta có $\widehat{MAI} = \frac{1}{2}\widehat{AOI} = \frac{1}{2}\widehat{IOB} = \widehat{IAB}$. Do đó, AI là tia phân giác $\widehat{MAB}$. Kết hợp với MI là tia phân giác của $\widehat{AMB}$, ta có điều phải chứng minh.

5. Ta có $MH.MO = MA^2 = MC.MD$ nên tứ giác $CHOD$ nội tiếp theo phương tích.

6. Ta có $\widehat{MHC} = \widehat{MDO} = \widehat{OCD} = \widehat{OHD}$. Suy ra $\widehat{CHD} = 90^\circ - \widehat{MHC} = 90^\circ - \widehat{OHD} = \widehat{AHD}$. Ta có điều phải chứng minh.

7. Ta có $\widehat{BHD} = 180^\circ - \widehat{AHD} = 180^\circ - \frac{1}{2}\widehat{CHD} = 180^\circ - \frac{1}{2}\widehat{COD} = 180^\circ - \widehat{CBD} = \widehat{CAD}$.

8. Dễ thấy tứ giác $KEHM$ nội tiếp đường tròn đường kính AM nên $OE.OK = ON.OM = OA^2 = OD^2$. Mà $OK \perp CD = \{E\}$ nên dễ dàng suy ra KC, KD là hai tiếp tuyến của (O).

9. Ta có $\widehat{AEM} = \widehat{AOM} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \widehat{AFB}$. Mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $BF \parallel CD$.

10. Ta có $\widehat{CHA} = \frac{1}{2}\widehat{CHD} = \frac{1}{2}\widehat{COD} = \widehat{CPD}$. Mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $DP \parallel AB$.

11. Ta có $\widehat{CEN} = \widehat{CDB} = \widehat{CAB}$. Suy ra tứ giác $AENC$ nội tiếp. Do đó, $\widehat{AHC} = \widehat{AEC} = \widehat{ABM}$. Mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $CN \parallel MB$. Suy ra $CN \perp OB$.

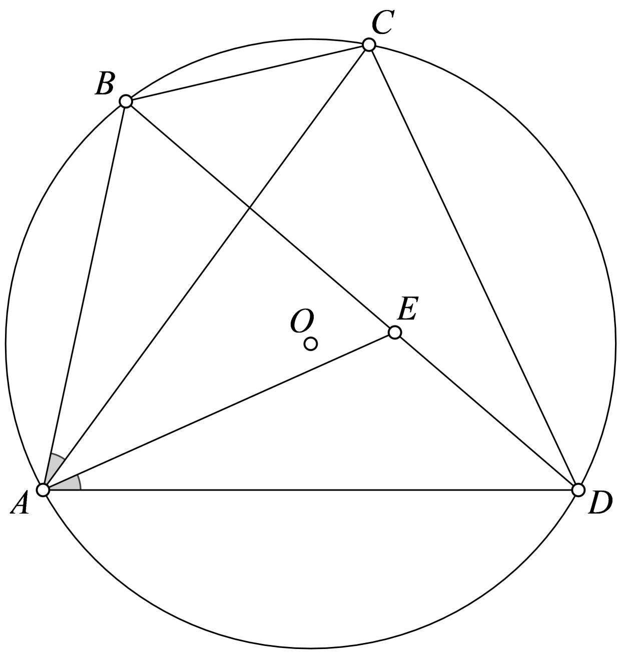
2.7 Những định lý hình học nổi tiếng trong đường tròn

2.7.1 Định lý Ptolemy

Định lý phát biểu: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O) Khi đó ta có:

$$AB.CD + AD.BC = AC.BD.$$

Chứng minh



Trên đường chéo BD lấy điểm E sao cho $\widehat{DAE} = \widehat{BAC}$. Ta có $\widehat{DAE} = \widehat{BAC}$ và $\widehat{ADE} = \widehat{ACB}$ (cùng chắn cung AB) nên

$$\triangle ADE \sim \triangle ACB \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow AD.BC = AC.DE \text{ (1)}.$$

Do $\widehat{DAE} = \widehat{BAC}$ nên $\widehat{DAC} = \widehat{EAB}$, lại có $\widehat{ABE} = \widehat{ACD}$ (cùng chắn cung AD) suy ra

$$\triangle ABE \sim \triangle ACD \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD} \Rightarrow AB.CD = AC.BE \text{ (2)}.$$

Từ (1) và (2) suy ra $AB.CD + AD.BC = AC(BE + DE) = AC.BD$
Bài toán được chứng minh. Mở rộng hơn cho tứ giác bất kỳ: $AB.CD + AB.BC \geqslant AC.BD$.

Một số bài toán ứng dụng của định lý Ptolemy

Bài toán 18. (Hồng Kông TST 2000) Cho tam giác ABC có $BC > CA > AB$. Gọi D là một điểm trên cạnh BC, E là một điểm trên cạnh AB kéo dài về phía điểm A sao cho $BD = BE = CA$. Gọi P là một điểm trên cạnh AC sao cho bốn điểm E, B, D, P đồng viên. Q là giao điểm thứ hai của BP với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $AQ + CQ = BP$.

Bài toán 19. (Quảng Trị 2005) Cho tam giác đều ABC có độ dài các cạnh bằng a ($a > 0$). Trên đoạn AC lấy điểm Q di động, trên tia đối của tia CB lấy điểm P di động sao cho $AQ.BP = a^2$. Gọi M là giao điểm của BQ và AP. Chứng minh rằng $AM + MC = BM$.

Bài toán 20. (Vũ Hữu Bình) Vận dụng định lý Ptolemy để giải bài toán sau: Chứng minh rằng tổng khoảng các từ tâm của đường tròn ngoại tiếp một tam giác nhọn đến các cạnh của tam giác bằng tổng các bán kính của đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp tam giác đó. *(Định lý Carnot)*

Bài toán 21. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (O') tiếp xúc trong với (O) tại T thuộc cung nhỏ BC. Kẻ các tiếp tuyến AA', BB', CC' tới (O'). Chứng minh rằng $AA'.BC = BB'.AC + CC'.AB$.

Bài toán 22. (HSG các vùng của Mĩ 1987) Cho một tứ giác nội tiếp có các cạnh là a, b, c, d (a đối diện c, b đối diện d). Gọi p, q là độ dài hai đường chéo của tứ giác trên. Chứng minh rằng $pq \leqslant \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$.

2.7.2 Định lý Brocard

Định lý phát biểu: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là giao điểm của AB và CD; N là giao điểm của AD và BC; I là giao điểm của AC và BD. Suy ra I là trực tâm của tam giác OMN.

Chứng minh

Gọi E là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABI và CDI.
Trước tiên ta chứng minh E, I, M thẳng hàng. Thật vậy giả sử MI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AIB tại E' thì $MI.ME' = MB.MA = MC.MD$. Suy ra 4 điểm D, E', I, C nằm trên một đường tròn suy ra E' trùng E suy ra M, I, E thẳng hàng. Ta có:

$$\widehat{AED} = 360° - \widehat{DEI} - \widehat{AEI} = 180° - \widehat{DEI} + 180° - \widehat{AEI} = \widehat{ABD} + \widehat{ACD} = \widehat{AOD}$$

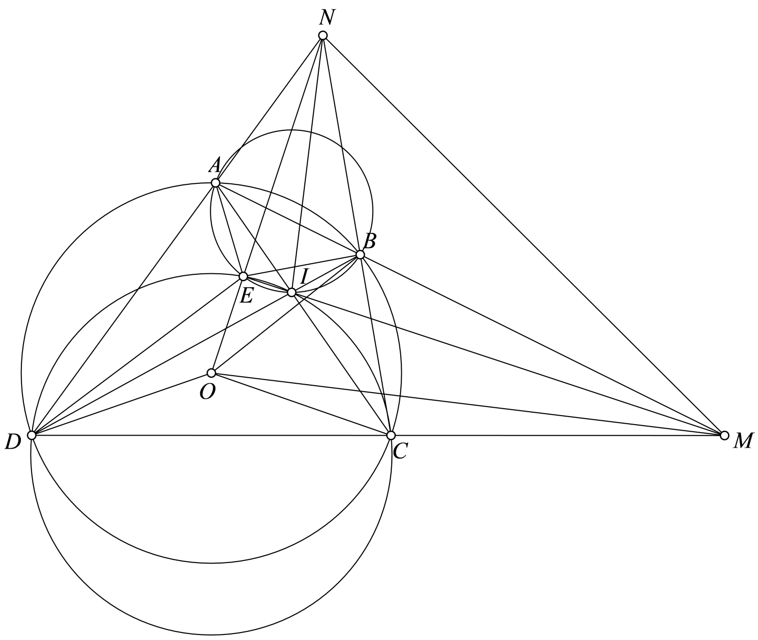
nên tứ giác $AEOD$ nội tiếp. Ta cũng có:

$$\widehat{BEC} = \widehat{BEI} + \widehat{IEC} = \widehat{BAC} + \widehat{BDC} = \widehat{BOC}$$

nên tứ giác $BEOC$ nội tiếp. Từ đó ta cũng suy ra N, E, O thẳng hàng. Ta có:

$$\widehat{OEM} = \widehat{OEC} + \widehat{CEM} = \widehat{OBC} + \widehat{BDC} = \frac{180° - \widehat{BOC}}{2} + \widehat{BDC} = 90°$$

suy ra $ME \perp ON$. Chứng minh tương tự ta cũng có: $NI \perp OM$. Suy ra I là trực tâm của tam giác OMN. Bài toán được chứng minh.



Một số bài tập ứng dụng định lý Brocard

Bài toán 23. (CSP V1 2013) Cho tam giác ABC không cân có ba góc nhọn, nội tiếp (O), các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 cắt nhau tại H. Các đường thẳng A_1C_1, AC cắt nhau tại D. Gọi X là giao điểm của BD với (O).

1. Chứng minh $DX.DB = DC_1.DA_1$.

2. Gọi M là trung điểm AC. Chứng minh DH vuông góc BM.

Bài toán 24. (HSG TPHCM 2013) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn O. Các tia AB, DC cắt nhau tại E, các tia AD, BC cắt nhau tại F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác CDF tại M. Chứng minh rằng

1. Ba điểm E, M, F thẳng hàng và bốn điểm A, D, M, E nằm trên một đường tròn.

2. OM vuông góc với EF.

3. Ba đường thẳng OM, AC, BD đồng quy tại một điểm I.

Bài toán 25. (Hải Dương 2008) Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) có các đường cao BD, CE cắt nhau tại H. Gọi I là trung điểm của BC, đường tròn ngoại tiếp tam giác BEI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác CDI tại K khác I. Đường thẳng DE cắt BC tại M. Chứng minh rằng ba điểm M, H, K thẳng hàng.

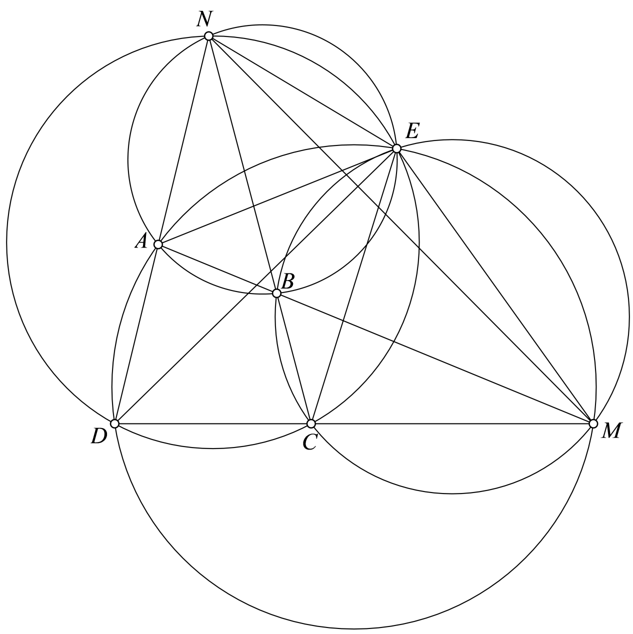
2.7.3 Điểm Miquel - Định lý Miquel

a) Điểm Miquel của tứ giác:

Định lý phát biểu: Cho tứ giác $ABCD$ có cạnh AB, CD cắt nhau tại M, cạnh AD, BC cắt nhau tại N. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABN, BCM, MAD, NCD cùng đi qua một điểm E (Gọi là điểm Miquel của tứ giác $ABCD$).

Chứng minh

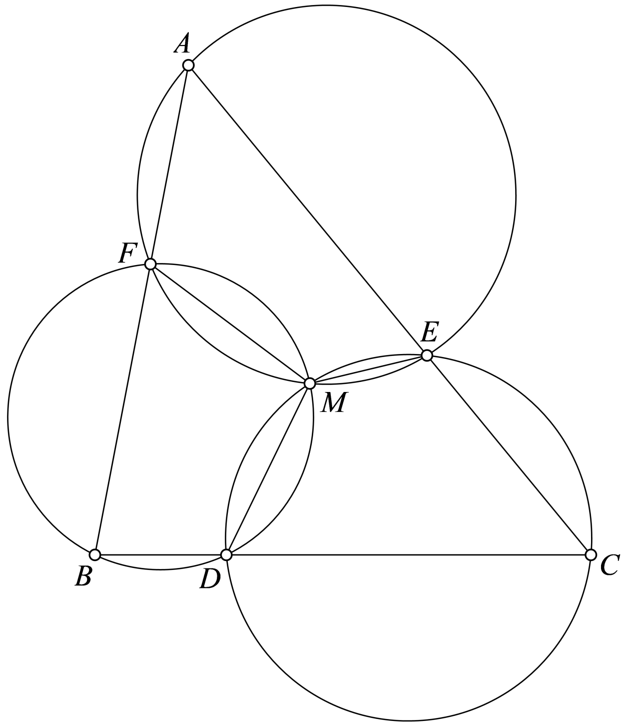
Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác MAD, NCD cắt nhau tại giao điểm thứ hai là E (khác D). Ta chứng minh E thuộc đường tròn ngoại tiếp các tam giác MBC, NAB.
Tức là chứng minh các tứ giác $MBCE, NBAE$ nội tiếp. Thật vậy tứ giác $DCNE$ nội tiếp nên: $\widehat{MDE}=\widehat{CNE}$. Tứ giác $ADEM$ nội tiếp nên $\widehat{MAE} = \widehat{MDE}$ kéo theo $\widehat{MAE} = \widehat{CNE}$ suy ra $ABNE$ nội tiếp. Mặt khác ta cũng có: $\widehat{ECN} = \widehat{EDN}$ và $\widehat{EDN} = \widehat{AME}$. Từ đó $\widehat{AME} = \widehat{ECN}$ suy ra $BMEC$ nội tiếp. Như vậy các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABN, BCM, MAD, NCD cùng đi qua một điểm E. Bài toán được chứng minh.



b) Định lý Miquel đối với tam giác:

Định lý phát biểu: Định lý Miquel đối với tam giác: Trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt lấy các điểm F, D, E. Khi đó ba đường tròn ngoại tiếp các tam giác AFE, BDF, CED cắt nhau tại một điểm M (Gọi là điểm Miquel trong tam giác ABC).

Chứng minh



Giả sử đường tròn ngoại tiếp các tam giác AEF và BDF cắt nhau tại M. Ta có:

$$\widehat{EMD} = 360° - \widehat{EMF} - \widehat{DMF} = 180° - \widehat{FAE} + 180° - \widehat{EMF} = \widehat{A} + \widehat{B} = 180° - \widehat{C}$$

Vậy $EMDC$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra ba đường tròn ngoại tiếp các tam giác AFE, BDF, CED cắt nhau tại một điểm M. Bài toán được chứng minh.

Một số bài toán ứng dụng của định lý Miquel

Bài toán 26. Cho tứ giác $ABCD$ có E là giao điểm của AB và CD, F là giao điểm của AD và BC. Gọi M là điểm Miquel và O_1, O_2, O_3, O_4 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác EBC, CDF, EAD, ABF. Chứng minh rằng 5 điểm M, O_1, O_2, O_3, O_4 cùng thuộc một đường tròn.

Bài toán 27. (Hà Nội TST 2017) Cho tam giác ABC $(AB < AC)$ nhọn nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là trung điểm của BC. AM cắt (O) tại các điểm A, D. Giả sử $BD \cap AC = \{F\}, CD \cap AB = \{E\}, (ABF) \cap (ACE) = \{P\}$ $(P \neq A)$. Gọi (S_1) là đường tròn đi qua C tiếp xúc với AB tại A. Gọi (S_2) là đường tròn đi qua B và tiếp xúc với AC tại A, $(S_1) \cap (S_2) = \{Q\}$ $(Q \neq A)$. Chứng minh rằng tam giác OPQ là tam giác vuông.

2.7.4 Định lý con bướm

Định lý phát biểu: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi E là giao điểm của AC và BD. Đường thẳng qua E cắt AD, BC tại M, N thì E là trung điểm của MN khi và chỉ khi $MN \perp OE$.

Chứng minh

Gọi M_1 và M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các đoạn thẳng AE và DE. Tương tự gọi N_1 và N_2 lần lượt là hình chiếu của N trên đoạn thẳng BE và CE. Kéo dài MN cắt đường tròn tâm (O) tại 2 điểm P, Q. Do $MN \perp OE$, mà P, Q thuộc đường thẳng MN nên $OE \perp PQ$ suy ra E là trung điểm PQ. Do

$$\triangle EMM_1 \sim \triangle ENN_1 \Rightarrow \frac{EM}{EN} = \frac{MM_1}{NN_1}$$

$$\triangle EMM_2 \sim \triangle ENN_2 \Rightarrow \frac{EM}{EN} = \frac{MM_2}{NN_2}$$

$$\triangle AMM_1 \sim \triangle BNN_2 \Rightarrow \frac{AM}{BN} = \frac{MM_1}{NN_2}$$

$$\triangle DMM_2 \sim \triangle CNN_1 \Rightarrow \frac{DM}{CN} = \frac{MM_2}{NN_1}$$

Từ các đẳng thức trên, ta có:

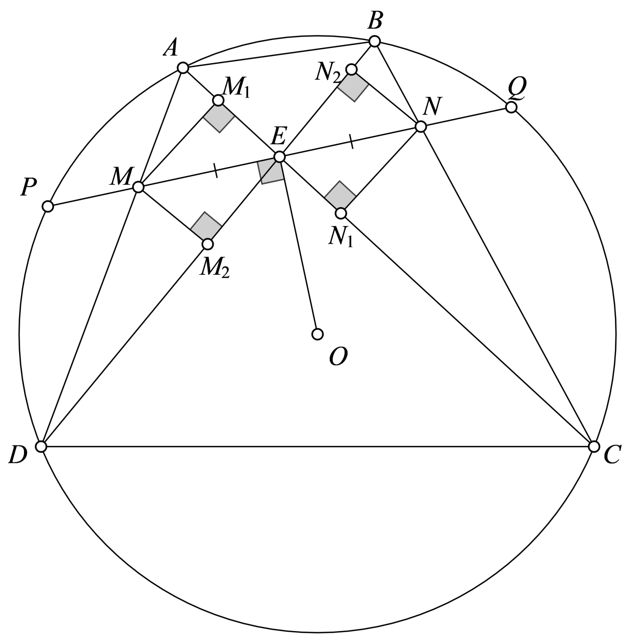
$$\frac{EM^2}{EN^2} = \frac{MM_1}{NN_1}.\frac{MM_2}{NN_2} = \frac{AM}{CN}.\frac{DM}{BN} = \frac{PM.QN}{PN.QN} = \frac{PM.QN}{PN.QN}$$

$$= \frac{(PE - ME).(EQ + ME)}{(PE + EN).(QE - EN)} = \frac{PE^2 - EM^2}{PE^2 - EN^2}$$

(theo phương tích và E là trung điểm PQ) Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{EM^2}{EN^2} = \frac{PE^2 - EM^2}{PE^2 - EN^2} = \frac{PE^2}{PE^2} = 1$$

Suy ra $EM = EN$ nên E là trung điểm MN Bài toán được chứng minh.



Một số bài toán ứng dụng định lý con bướm

Bài toán 28. (Moldova TST 2010) Cho tam giác nhọn ABC có H là trực tâm và M là trung điểm BC. Kẻ đường thẳng qua H vuông góc với HM và cắt AB, AC lần lượt tại P và Q. Chứng minh rằng $MP = MQ$.

Bài toán 29. Cho đường tròn (O) và dây AB. Lấy I là một điểm bất kì thuộc dây AB, vẽ hai dây CD, EF cùng đi qua I (C và E nằm về cùng một phía với AB). Gọi giao điểm của CF, DE với AB lần lượt là M và N. Chứng minh rằng $\frac{1}{IA} + \frac{1}{IN} = \frac{1}{IB} + \frac{1}{IM}$.

Bài toán 30. Cho tam giác nhọn ABC có AD là đường cao, O và H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của tam giác ABC. Kẻ đường thẳng qua D và vuông góc với OD , cắt AB ở K. Chứng minh rằng $\widehat{DHK} + \widehat{AHC} = 180°$.

Bài toán 31. (Singapore 2011) Cho tam giác ABC nhọn, không cân, O, H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của tam giác ABC, $AB > AC$. Q là điểm trên AC, kéo dài HQ cắt BC ở P sao cho $DP = DB$ với D là chân đường vuông góc hạ từ A xuống BC. Chứng minh rằng $\widehat{ODQ} = 90°$.

Bài toán 32. *(Định lý con bướm mở rộng)* Cho bốn điểm A, B, C, D nằm trên đường trong tâm O. Gọi P là giao điểm của AC và BD. Một đường thẳng d tùy ý đi qua P sao cho P là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng d. Gọi X là giao điểm của d và AB, Z là giao điểm của d và CD. Chứng minh P là trung điểm XZ.

Bài toán 33. (Mông Cổ TST 2008) Cho tam giác nhọn ABC có CD là đường cao, H là trực tâm và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Một đường thẳng đi qua điểm D, vuông góc với OD và cắt BC tại E. Chứng minh rằng $\widehat{DHE} = \widehat{ABC}$.

Bài toán 34. (MOP 1998) Cho hai đường tròn (C) và (C') có cùng bán kính, cắt nhau tại hai điểm A, B. Gọi O là trung điểm AB. Dây cung CD của đường tròn (C) qua điểm O. Lấy P là giao điểm của đoạn thẳng CD với (C'). EF là dây cung (C') qua O và đoạn thẳng EF cắt (C') tại Q. Chứng minh rằng AB, CQ, EP đồng quy.

2.7.5 Định lý về đường thẳng Simson

Định lý phát biểu: Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gỉa sử S là một điểm nằm trên (O) sao cho S không trùng với ba đỉnh của tam giác. Khi đó hình chiếu vuông góc A', B', C' của điểm S lần lượt trên BC, CA, AB cùng nằm trên cùng một đường thẳng. (Đường thẳng này gọi là đường thẳng Simson của điểm S đối với tam giác ABC).

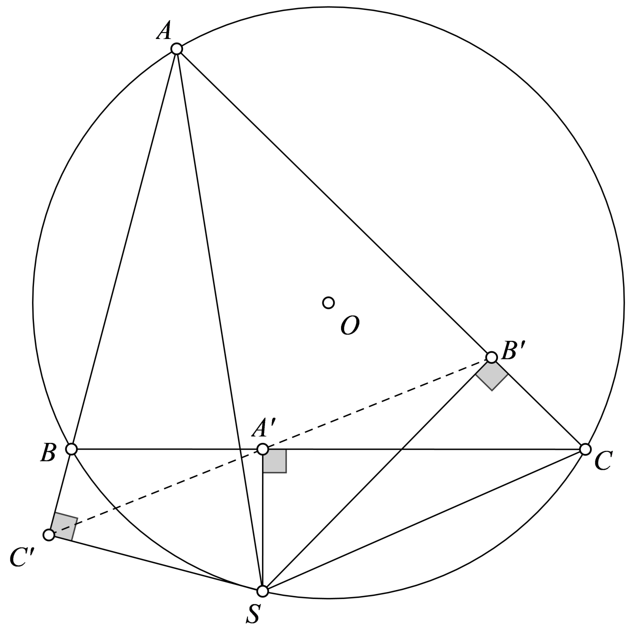
Chứng minh

Ta có: $\widehat{CB'S} = \widehat{CAD'S} = 90°$, suy ra tứ giác $A'B'CS$ nội tiếp, suy ra $\widehat{B'A'C} = \widehat{B'SC}$. Mặt khác vì $ABSC$ nội tiếp nên

$$\widehat{C'BS} = \widehat{ACS} = \widehat{B'CS} \Rightarrow \triangle SC'B \sim \triangle SB'S \ (g.g)$$

$$\Rightarrow \widehat{BSC'} = \widehat{CSB'} \Rightarrow \widehat{BSC'} = \widehat{B'A'C}$$

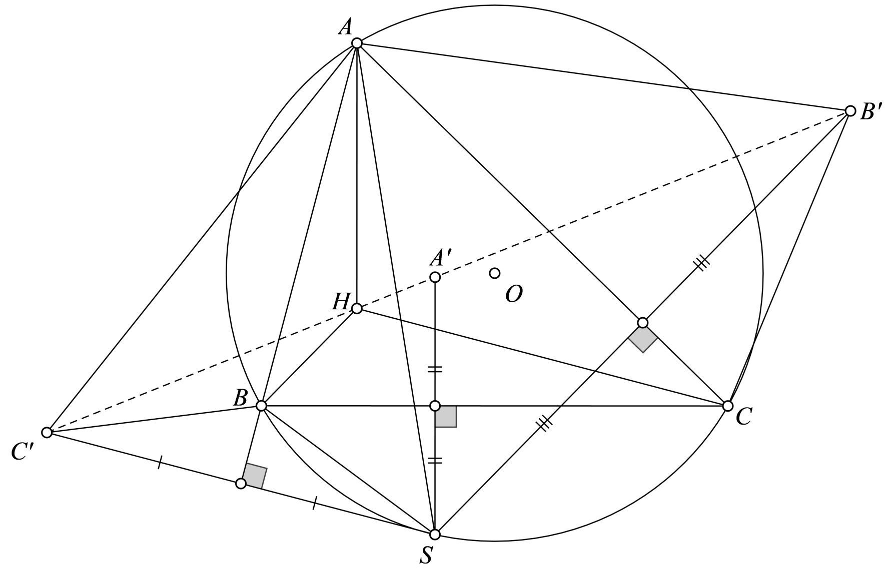
Nhưng vì $A'BC'S$ là tứ giác nội tiếp ($\widehat{BA'S} = \widehat{BC'S} = 90°$) nên $\widehat{BSC'} = \widehat{BA'C'}$ suy ra $\widehat{B'A'C} = \widehat{BA'C'}$ Vậy A', B', C' cùng thuộc một đường thẳng. Bài toán được chứng minh.



2.7.6 Định lý về đường thẳng Steiner

Định lý phát biểu: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, điểm S bất kì thuộc đường tròn sao cho S không trùng với các đỉnh của tam giác. Gọi A', B', C' lần lượt là điểm đối xứng với S qua các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó ba điểm A', B', C' và trực tâm H của tam giác ABC cùng nằm trên một đường thẳng (Đường thẳng này là đường thẳng Steiner của điểm S đối với tam giác ABC).

Chứng minh



Ta có: $\widehat{AC'B} + \widehat{AHB} = \widehat{ASB} + (180^\circ - \widehat{ACB})$ mà $\widehat{ASB} = \widehat{ACB}$ nên $\widehat{AC'B} + \widehat{AHB} = 180^\circ$, suy ra $AHBC'$ là tứ giác nội tiếp. Từ đó $\widehat{AHC'} = \widehat{ABC'} = \widehat{ABS}$ Hoàn toàn tương tự, tứ giác $AHCB'$ nội tiếp nên $\widehat{AHB'} = \widehat{ACB'} = \widehat{ACS}$ Lại có $\widehat{ACS} + \widehat{ABS} = 180^\circ$ (tứ giác $ABSC$ nội tiếp). Do đó $\widehat{AHB'} + \widehat{AHC'} = 180^\circ$, suy ra H, B', C' thẳng hàng. Vậy A', B', C', H cùng thuộc một đường thẳng. Bài toán được chứng minh.

Một số bài toán ứng dụng đường thẳng Simson, đường thẳng Steiner

Bài toán 35. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O. Điểm M thuộc cung nhỏ BC. Vẽ ME, MF lần lượt vuông góc AC, AB tại E, F.Gọi H là trực tâm của tam giác ABC, đường thẳng EF cắt HM tại I. Chứng minh I là trung điểm HM.

Bài toán 36. Cho đường tròn (O) và ba dây cung AB, AC, AD bất kì. Các đường tròn đường kính AB, AC, AD đôi một cắt nhau lần thứ hai tại M, N, P. Chứng minh rằng ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Bài toán 37. Cho tam giác ABC, các đường cao AD, BE, CF. Từ E kẻ EH, EK lần lượt vuông góc với CF, BC. Chứng minh rằng HK đi qua trung điểm EF.

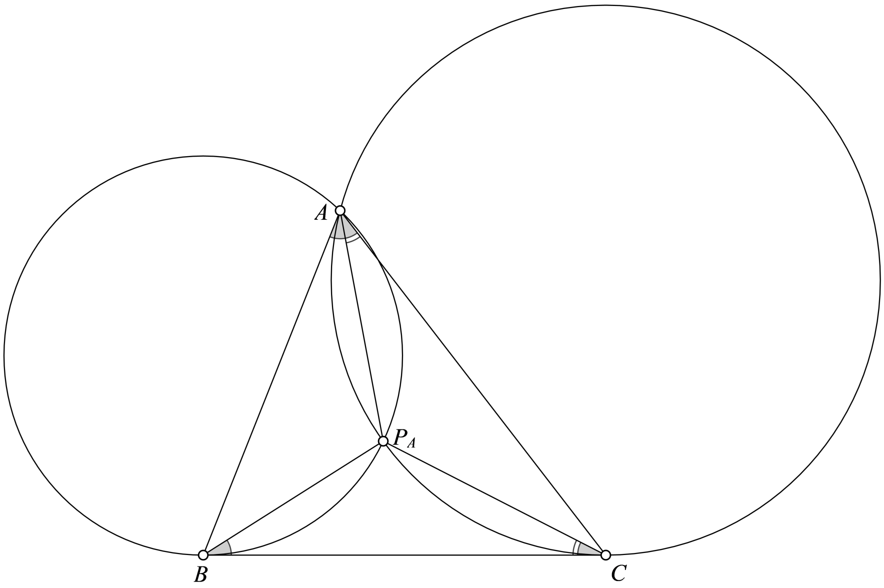
Bài toán 38. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là một điểm bất kì nằm trên cung nhỏ BC của (O). Kẻ đường thẳng qua P vuông góc với BC, cắt (O) tại điểm thứ hai K. Chứng minh rằng AK song song với đường thẳng Simson của P ứng với tam giác ABC.

Bài toán 39. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi X, Y, Z lần lượt là hình chiếu của D trên BC, CA, AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, XY. Chứng minh rằng $\widehat{MND} = 90^\circ$.

2.7.7 Điểm Humpty - Điểm Dumpty

Điểm Humpty

Định nghĩa: Cho tam giác ABC. Điểm P_A nằm trong tam giác thoả mãn $\widehat{P_AAB} = \widehat{P_ABC}, \widehat{P_AAC} = \widehat{P_ACB}$ được gọi là điểm A - Humpty của tam giác ABC. Khi đó, dễ thấy giao điểm của đường tròn đi qua A, B và tiếp xúc BC tại B với đường tròn đi qua A, C và tiếp xúc với BC tại C chính là điểm A - Humpty. Các điểm B - Humpty và C - Humpty được định nghĩa tương tự.

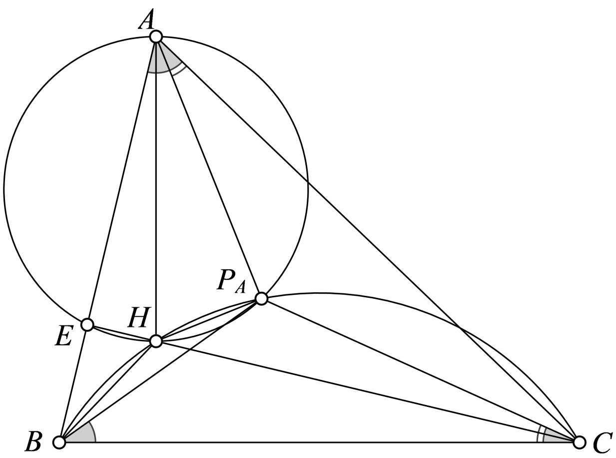


Các tính chất:

Tính chất 1: Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Khi đó, giao điểm thứ hai của đường tròn (AH) và đường tròn (BHC) là điểm A - Humpty.

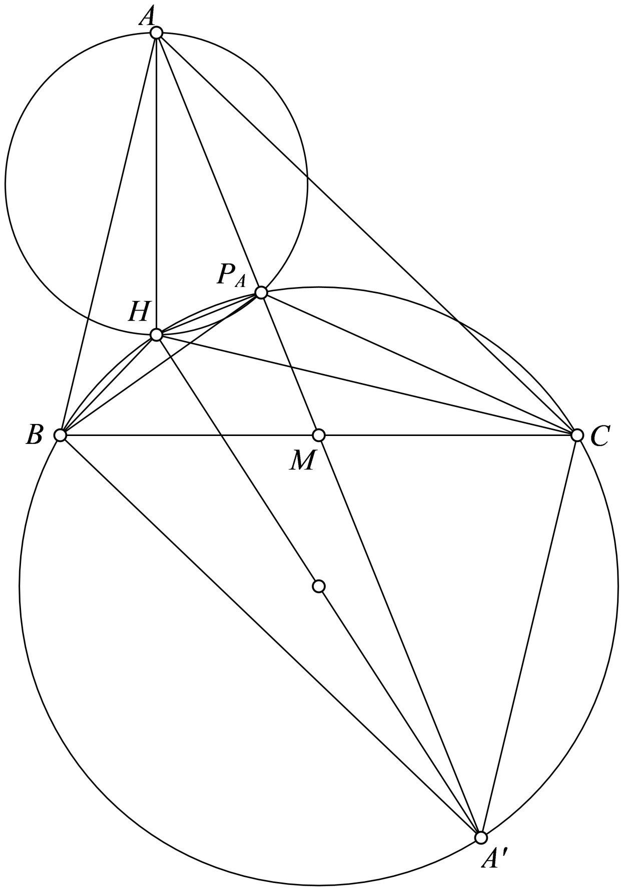
Chứng minh

Gọi $CH \cap AB = \{E\}, (AH) \cap (BHC) = \{P_A\}$. Khi đó, $\widehat{P_ABC} = \widehat{P_AHC} = \widehat{P_AAB}$. Tương tự, ta có $\widehat{P_ACB} = \widehat{P_AAC}$ nên P_A là điểm A - Humpty của tam giác ABC.



Tính chất 2: P_A thuộc đường trung tuyến AM của tam giác ABC.

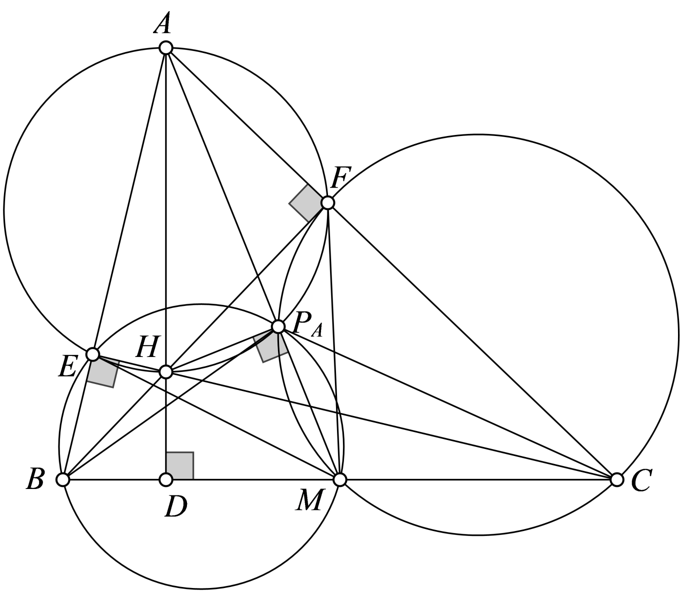
Chứng minh



Kẻ đường kính HA' của đường tròn (BHC). Dễ thấy tứ giác $ABA'C$ là hình bình hành và M là trung điểm của BC nên M là trung điểm của AA' hay ba điểm A, M, A' thẳng hàng. Theo **tính chất 2**, ta có $\widehat{AP_AH} = 90°$. Do $P_A \in (BHC)$ nên $HP_AA' = 90°$. Từ đây, ta sẽ có được ba điểm A, P_A, M thẳng hàng.

Tính chất 3: Gọi BF, CE là hai đường cao của tam giác ABC, trực tâm H, M là trung điểm của BC. Khi đó $(MBE) \cap (MCF) = \{P_A\}$.

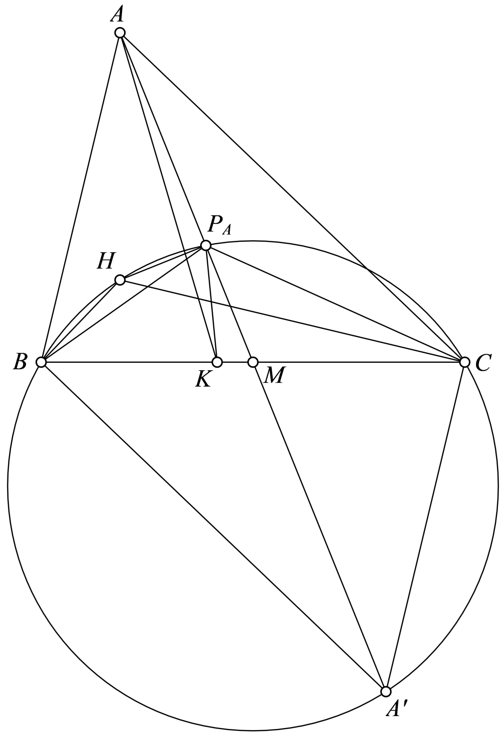
Chứng minh



Theo **tính chất 3**, ta có $\widehat{HP_AM} = 90°$. Kẻ đường cao AD của tam giác ABC. Suy ra tứ giác HP_AMD nội tiếp. Do đó, theo phương tích, ta có $AP_A.AM = AH.AD = AE.AB$. Vậy nên tứ giác EP_AMB nội tiếp. Tương tự, ta cũng có tứ giác FP_AMC nội tiếp.

Tính chất 4: Tia phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt tia phân giác của $\widehat{BP_AC}$ tại một điểm trên BC.

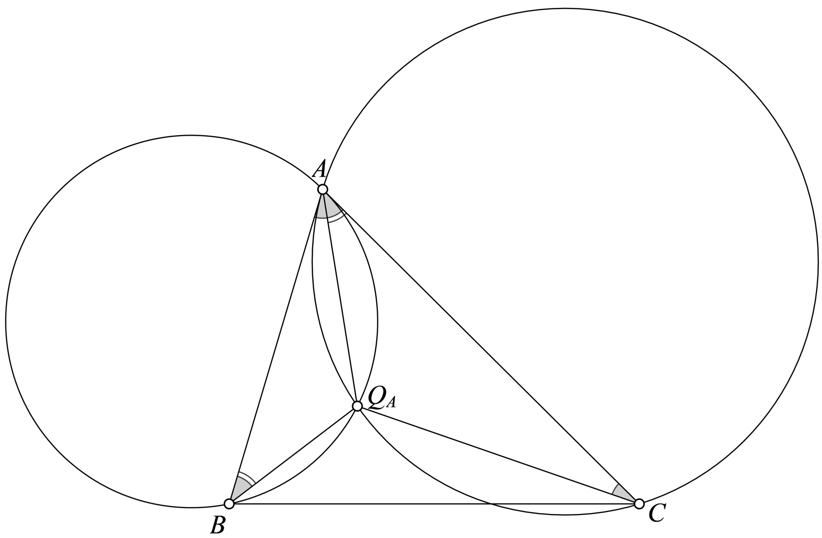
Chứng minh



Gọi AK là tia phân giác của $\widehat{BAC}$, $K \in BC$. Điều phải chứng minh tương đương với $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{P_AB}{P_AC}$. Dựa vào **tính chất 3**, ta biết tứ giác $ABA'C$ là hình bình hành nên $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{A'C}{A'B}$. Mặt khác, vì tứ giác BP_ACA' nội tiếp nên ta có $\dfrac{A'C}{P_AB} = \dfrac{MC}{MP_A} = \dfrac{MB}{MP_A} = \dfrac{A'B}{P_AC} \Rightarrow \dfrac{A'C}{A'B} = \dfrac{P_AB}{P_AC}$. Do đó, ta có điều phải chứng minh.

Điểm Dumpty

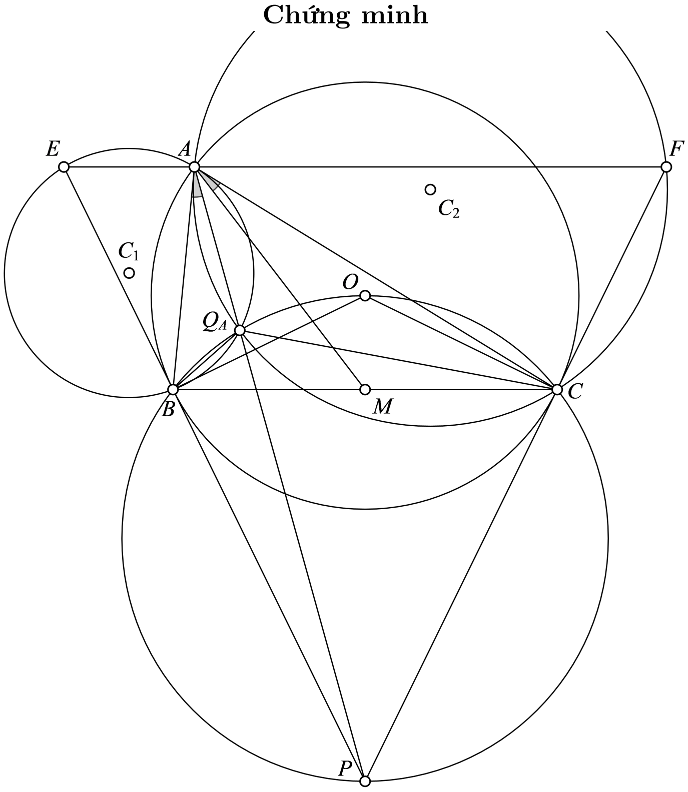
Định nghĩa: Cho tam giác ABC. Điểm Q_A thoả mãn $\widehat{Q_AAB} = \widehat{Q_ACA}, \widehat{Q_ABA} = \widehat{Q_AAC}$ được gọi là điểm A - Dumpty. Khi đó, dễ thấy Q_A là giao điểm thứ hai của đường tròn đi qua A, C và tiếp xúc AB tại A với đường tròn đi qua A, B tiếp xúc với AC tại A. Các điểm B - Dumpty và C - Dumpty được định nghĩa tương tự.



Các tính chất:

Tính chất 1: Cho tam giác ABC với điểm Q_A là điểm A - Dumpty. Gọi M là trung điểm của BC. Khi đó, $\widehat{BAQ_A} = \widehat{CAM}$.

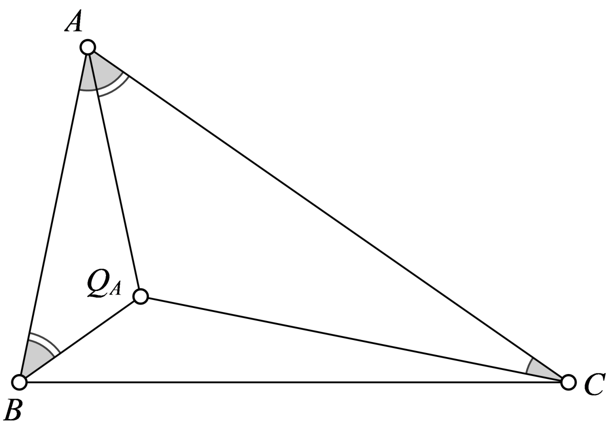
Chứng minh



Gọi C_1, C_2, O lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác AQ_AB, AQ_AC, ABC. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt $(C_1), (C_2)$ lần lượt tại E, F, lấy P là giao điểm của EB và FC. Áp dụng định lý Miquel cho tam giác EPF, ta được tứ giác Q_ABPC nội tiếp. Mặt khác, ta có $\widehat{BEF} = \widehat{BAC} = \widehat{CFE}$ nên tứ giác $BEFC$ là hình thang cân. Chú ý các tứ giác EAQ_AB, FAQ_AC, BQ_ACP nội tiếp nên ta có biến đổi góc như sau $\widehat{BQ_AP} = \widehat{BCP} = \widehat{AFC} = \widehat{BEA} = 180^\circ - \widehat{AQ_AB}$. Do đó, ba điểm A, Q_A, P thẳng hàng. Ngoài ra, $\widehat{PBC} = \widehat{AFC} = \widehat{BAC}$ nên PB là tiếp tuyến của đường tròn (O). Tương tự, ta cũng có PC là tiếp tuyến của đường tròn (O). Gọi $AP \cap (O) = \{L\}$, theo **mô hình tiếp tuyến**, ta có $\widehat{ABL} = \widehat{AMC}$. Kết hợp với $\widehat{ALB} = \widehat{ACM}$, ta thu được $\widehat{BAQ_A} = \widehat{CAM}$. Ta kết thúc bài toán.

Tính chất 2: $\dfrac{Q_AB}{Q_AC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$.

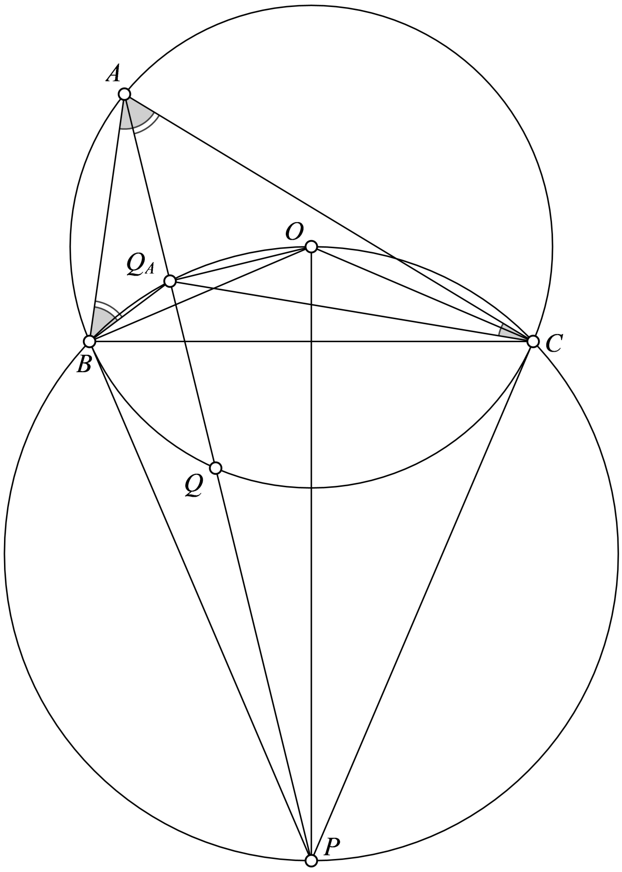
Chứng minh



Theo định nghĩa của điểm A - Dumpty, ta được $\triangle Q_AAB \sim \triangle Q_AAC$ (g-g). Do đó $\dfrac{Q_AB}{Q_AA} = \dfrac{AB}{AC}, \dfrac{Q_AA}{Q_AC} = \dfrac{AB}{AC}$. Suy ra $\dfrac{Q_AB}{Q_AC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$.

Tính chất 3: Gọi Q là giao điểm của AQ_A và đường tròn (ABC). Khi đó, Q_A là trung điểm của AQ.

Chứng minh



Kẻ PB và PC là tiếp tuyến của đường tròn (ABC). Theo **tính chất 1**, ta có tứ giác BQ_AOC nội tiếp và bốn điểm A, Q_A, Q, P thẳng hàng. Do đó, $\widehat{OQ_AP} = 90^\circ$. Vậy nên Q_A là trung điểm của AQ.

Tính chất 4: Q_A là giao điểm thứ hai của đường tròn (BOC) và đường tròn đường kính AO (với O là tâm đường tròn ngoại tiếp ABC).

Chứng minh

Tính chất này hiển nhiên theo **tính chất 3** và **tính chất 1**.

Một số bài tập ứng dụng điểm Humpty - điểm Dumpty

Bài toán 40. (Romania 2016) Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A, B. Một tiếp tuyến chung của (O) và (O') (nằm gần về phía B) tiếp xúc với (O) và (O') lần lượt tại P và Q. Gọi C là điểm đối xứng với B qua PQ. Chứng minh rằng $\widehat{CAP} = \widehat{BAQ}$.

Bài toán 41. (Olympic Toán học trẻ Thổ Nhĩ Kỳ 2015) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), D là trung điểm của BC. Gọi (ω_1) là đường tròn đi qua D và tiếp xúc với AB tại B, (ω_2) là đường tròn đi qua D và tiếp xúc với AC tại C. Hai đường tròn này cắt nhau tại điểm thứ hai là M. Lấy M' đối xứng với M qua BC. Chứng minh rằng ba điểm A, M', D thẳng hàng.

Bài toán 42. (Brazil 2017) Cho tam giác nhọn ABC, hai đường cao BD, CE cắt nhau tại H. Gọi giao điểm thứ hai của đường tròn (ABC) và (ADE) là F. Chứng minh rằng các đường phân giác trong của $\widehat{FBC}$, $\widehat{BHC}$ và BC đồng quy tại một điểm.

Bài toán 43. (Bắc Macedonia 2017) Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$ nội tiếp (O). Gọi D là hình chiếu vuông góc của A lên BC, M là trung điểm của BC. BO và CO lần lượt cắt AD tại E, F. P là giao điểm thứ hai của đường tròn (ABE) và (ACF). Chứng minh rằng đường phân giác trong của $\widehat{PAM}$ đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Bài toán 44. (Mĩ TST 2008) Cho tam giác ABC. P là điểm di động trên cạnh BC. Q, R lần lượt thuộc AC và AB sao cho $PQ \parallel AB, PR \parallel AC$. Chứng minh rằng đường tròn (AQR) luôn đi qua một điểm cố định khi P thay đổi.

2.8 Bài tập tự luyện

Bài toán 45. Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Một đường tròn (J) tiếp xúc với AC, AB lần lượt tại E, F và tiếp xúc trong với (O) tại T.

1. Chứng minh rằng TF đi qua điểm M chính giữa cung nhỏ AB.

2. MC cắt EF tại I. Chứng minh rằng tứ giác $TIEC$ nội tiếp.

3. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

4. Chứng minh rằng TI đi qua điểm chính giữa cung BAC.

Bài toán 46. (HSG TP Hà Nội 2023) Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Các tiếp tuyến tại A và C của đường tròn (O) cắt nhau tại S. Trên tia đối của tia CA lấy điểm M ($M \neq C$). Qua S kẻ đường thẳng vuông góc với OM, cắt đường tròn (O) tại hai điểm phân biệt E và F (E nằm giữa S và F).

1. Chứng minh rằng ME là tiếp tuyến của đường tròn (O).

2. Gọi D là chân đường vuông góc kẻ từ M xuống đường thẳng BC. Chứng minh EC là tia phân giác của $\widehat{FED}$.

3. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của MD với hai đường thẳng BE và BF. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BPQ. Chứng minh rằng $\widehat{SDK} = 90°$.

Bài toán 47. Cho tam giác ABC, có $AB < BC < CA$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Các điểm E, F lần lượt thuộc tia CA, AB sao cho $BF = BC = CE$. Kẻ BE cắt CF tại G.

1. Chứng minh bốn điểm C, I, E, G cùng thuộc một đường tròn.

2. Gọi K thuộc AC sao cho $CK = AB$. Chứng minh tam giác GIE đồng dạng với tam giác GCK.

3. Trên nửa mặt phẳng bờ BG không chứa C, kẻ GH song song với AC và $GH = AF$. Chứng minh
$$\widehat{GHE} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}.$$

Bài toán 48. (CSP V2 2023) Cho tam giác ABC. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại các điểm D, E, G. Hai đường thẳng DE, DG lần lượt cắt đường phân giác ngoài của góc BAC tại M, N. Hai đường thẳng MG, NE cắt nhau tại P. Chứng minh

1. EG song song với MN.

2. Điểm P thuộc đường tròn (I).

Bài toán 49. (CSP V2 2015) Cho hình vuông $ABCD$ với tâm O. Gọi M là trung điểm AB, các điểm N,P thuộc BC,CD sao cho MN song song với AP. Chứng minh rằng

1. Tam giác BNO đồng dạng với tam giác DOP và $\widehat{NOP} = 45^o$.

2. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác NOP thuộc OC.

3. Ba đường thẳng BD, AN, PM đồng quy.

Bài toán 50. (Vĩnh Phúc 2024) Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đương tròn (O) và $\widehat{BAC} = 60\circ$. Các đường thẳng qua hai điểm C và B song song với đường thẳng AO cắt đường tròn (O) lần lượt tại E và F $(E \neq C, F \neq B)$. Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Đường thẳng BH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là X $(X \neq B)$; đường thẳng CH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là Y $(Y \neq C)$.

1. Chứng minh rằng tam giác AEF đồng dạng với tam giác HBC.

2. Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng XF và AC; N là giao điểm của hai đường thẳng YE và AB. Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với đường thẳng BC.

3. Chứng minh rằng ba đường thẳng MN, XY và FE đồng quy.

Bài toán 51. (IMO 2024) Cho tam giác ABC thoả mãn $AB < AC < BC$. Tâm đường tròn nội tiếp và đường tròn nội tiếp của tam giác ABC lần lượt là I và ω. X là một điểm nằm trên BC sao cho đường thẳng đi qua X song song với AC là tiếp tuyến của (ω). Tương tự, Y là một điểm nằm trên BC sao cho đường thẳng đi qua Y song song với AB là tiếp tuyến của (ω). Gọi giao điểm thứ hai của AI và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là điểm P khác A. Gọi trung điểm của AC, AB lần lượt là K, L. Chứng minh rằng $\widehat{KIL} + \widehat{YPX} = 180°$.

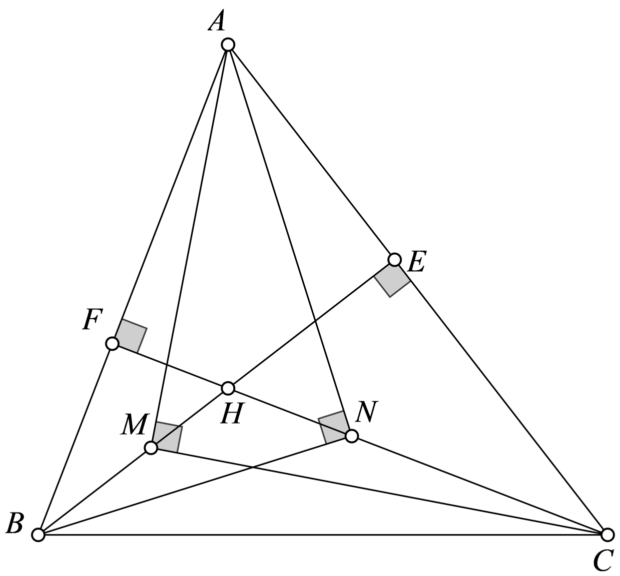
Bài toán 52. Cho tam giác ABC nhọn không cân có l là phân giác của $\widehat{BAC}$. Một đường tròn tâm O thay đổi đi qua B, C và cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự ở D, E. Gọi T là giao điểm của BE và CD. Dựng hình bình hành $DTEK$. Chứng minh rằng AT, AK đối xứng nhau qua l.

3 Lời giải

Bài toán 1. Cho tam giác ABC nhọn, trực tâm H. Trên đoạn BH lấy điểm M và trên đoạn CH lấy điểm N sao cho $\widehat{AMC} = \widehat{ANB} = 90°$. Chứng minh rằng $AM = AN$.

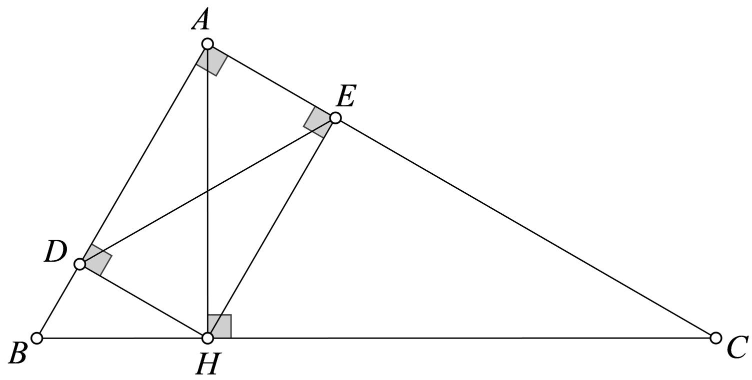
Lời giải

Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B, C tương ứng lên AC và AB. Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có $AM^2 = AE.AC$ và $AN^2 = AF.AB$. Mặt khác, hai tam giác AFC và ANB đồng dạng (g-g) nên ta có $\dfrac{AF}{AC} = \dfrac{AE}{AB}$. Suy ra $AE.AC = AF.AB$, hay $AM^2 = AN^2$. Vậy $AM = AN$.



Bài toán 2. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H lên AB, AC. Chứng minh rằng $\sqrt[3]{BC^2} = \sqrt[3]{BD^2} + \sqrt[3]{CE^2}$.

Lời giải



Ta có $BD = \dfrac{BH^2}{BC}, BC = \dfrac{AB^2}{BH}$ nên

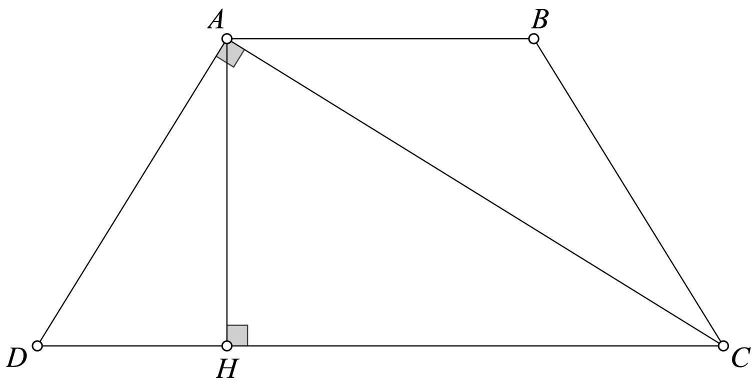
$$\frac{BD^2}{BC^2} = \frac{BH^4}{AB^2}.\frac{BH^2}{AB^4} = \frac{BH^6}{AB^6} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{BD^2}{BC^2}} = \frac{BH^2}{AB^2} = \frac{BH^2}{BH.BC} = \frac{BH}{BC}.$$

Tương tự, ta cũng có $\sqrt[3]{\dfrac{CE^2}{BC^2}} = \dfrac{CH}{BC}$. Do đó, ta có

$$\sqrt[3]{\frac{BD^2}{BC^2}} + \sqrt[3]{\frac{CE^2}{BC^2}} = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{BC^2} = \sqrt[3]{BD^2} + \sqrt[3]{CE^2}.$$

Bài toán 3. Cho hình thang cân $ABCD$, đáy lớn $CD = 10$, AH là đường cao, $AH = AB$, đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính độ dài đường cao của hình thang cân đó.

Lời giải



Gọi độ dài đường cao là $AH = x$. Suy ra

$$HD = \frac{10-x}{2} \Rightarrow AD^2 = HD^2 + AH^2 = \left(\frac{10-x}{2}\right)^2 + x^2 \ (1).$$

Mặt khác, tam giác DAC vuông tại A nên

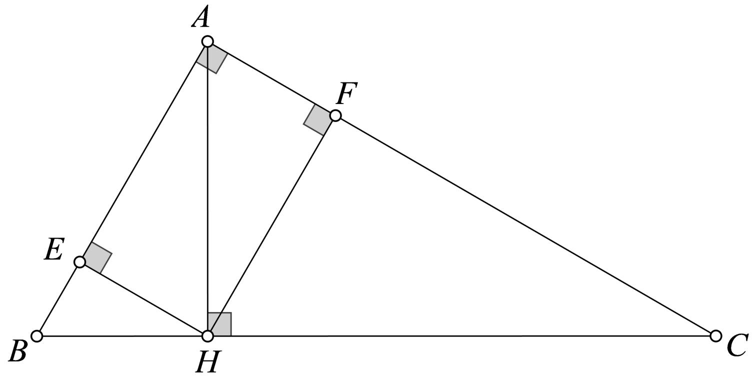
$$AD^2 = DH.DC = 10\left(\frac{10-x}{2}\right) = 5.(10-x) \ (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $5.(10-x) = \left(\dfrac{10-x}{2}\right)^2 + x^2$. Ta giải ra được $x = 2\sqrt{5}$.

Bài toán 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Kẻ HE, HF lần lượt vuông góc với AB, AC. Chứng minh rằng

1. $\dfrac{EB}{FC} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^3$.
2. $BC.BE.CF = AH^3$.

Lời giải

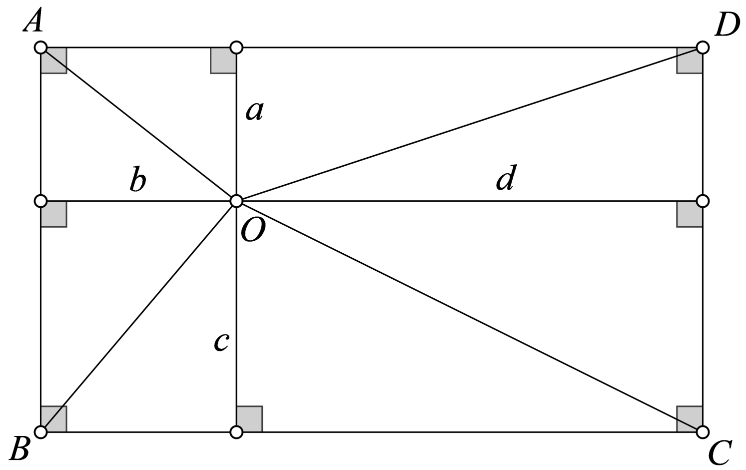


1. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông vào các tam giác AHB và AHC, ta được $BH^2 = BE.BA$ và $CH^2 = CF.CA$. Do đó, $\left(\dfrac{BH}{CH}\right)^2 = \dfrac{BE}{CF}.\dfrac{AB}{AC}$ (1). Mặt khác, theo hệ thức lượng trong tam giác ABC vuông tại A, ta có $AB^2 = BH.BC$ và $AC^2 = CH.BC$
$$\Rightarrow \frac{BH}{CH} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \text{ (2)}.$$
Từ (1) và (2), ta suy ra điều phải chứng minh.

2. Ta có $\triangle ABC \sim \triangle EBH$ (g-g) nên $\dfrac{BE}{BA} = \dfrac{BH}{BC} \Rightarrow BE = \dfrac{BH.BA}{BC}$. Mà $BH.BC = AB^2$ nên $BE = \dfrac{AB^3}{BC^2}$. Tương tự, ta cũng có $CF = \dfrac{AC^3}{BC^2}$. Mà $AH.BC = AB.AC \Rightarrow AH = \dfrac{AB.AC}{BC}$. Suy ra
$$BC.BE.CF = \frac{AC^3}{BC^2}.\frac{AB^3}{BC^2}.BC = \left(\frac{AB.AC}{BC}\right)^3 = AH^3.$$

Bài toán 5. Cho hình chữ nhật $ABCD$ và một điểm O nằm trong hình chữ nhật. Chứng minh rằng
$$OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2.$$

Lời giải

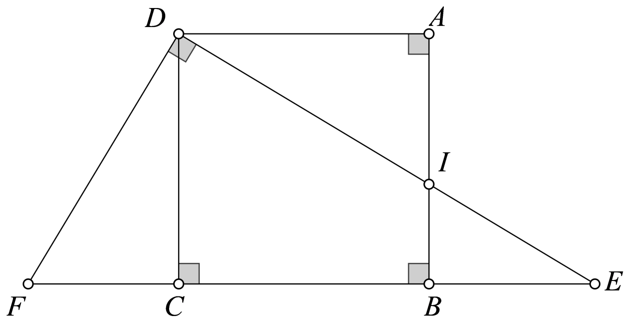


Gọi khoảng cách từ O tới các cạnh AC, AB, BD, CD lần lượt là a, b, c, d như hình trên. Theo Pythagoras, ta có $OA^2 + OC^2 = (a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) = (b^2 + c^2) + (a^2 + d^2) = OB^2 + OD^2$.

Bài toán 6. Cho hình vuông $ABCD$ và điểm I thay đổi nằm giữa A và B. Tia DI cắt BC tại E. Đường thẳng kẻ qua D vuông góc với DE cắt BC tại F. Chứng minh rằng tổng $\dfrac{1}{DI^2} + \dfrac{1}{DE^2}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm I.

Lời giải

Ta có $\triangle DIA = \triangle DFC$ (g-c-g) nên $DI = DF$. Lại có $DC \perp EF$ nên $\dfrac{1}{DI^2} + \dfrac{1}{DE^2} = \dfrac{1}{DF^2} + \dfrac{1}{DE^2} = \dfrac{1}{DC^2}$ (không đổi). Vậy ta có điều phải chứng minh.



Bài toán 7. Cho tam giác ABC, các đường cao ứng với các cạnh a, b, c lần lượt là h_a, h_b, h_c (trong đó $BC = a, CA = b, AB = c$). Chứng minh rằng nếu $\dfrac{1}{h_a^2} = \dfrac{1}{h_b^2} + \dfrac{1}{h_c^2}$ khi và chỉ khi tam giác ABC vuông tại A.

Lời giải

Gọi S là diện tích của tam giác ABC, ta có

$$S = \frac{1}{2}a.h_a \Rightarrow a = \frac{2S}{h_a} \Rightarrow a^2 = \frac{4S^2}{h_a^2}.$$

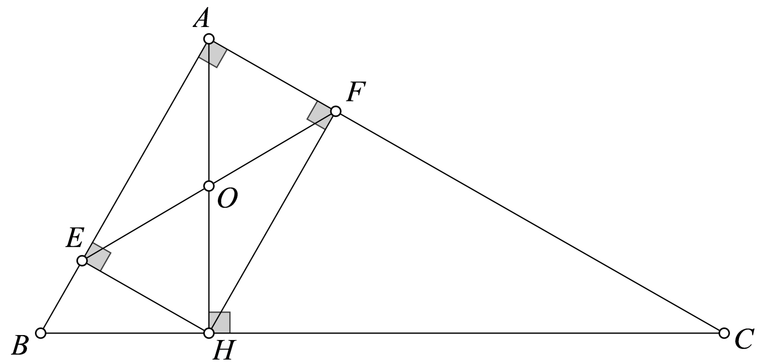
Tương tự, ta cũng có $b^2 = \dfrac{4S^2}{h_b^2}, c^2 = \dfrac{4S^2}{h_c^2}$. Suy ra

$$b^2 + c^2 = 4S^2\left(\frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2}\right) = \frac{4S^2}{h_a^2} = a^2.$$

Do đó, điều này chỉ xảy ra khi tam giác ABC vuông tại A.

Bài toán 8. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Kẻ $HE \perp AB, HF \perp AC$. Gọi O là giao điểm của AH và EF. Chứng minh rằng $HB.HC = 4OE.OF$.

Lời giải



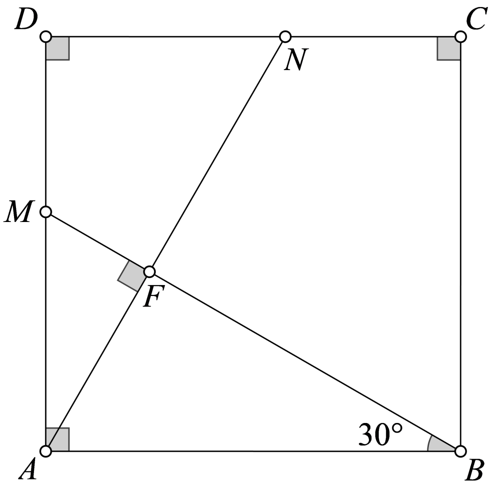
Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có $HB.HC = AH^2$ (1). Mặt khác, dễ thấy tứ giác $AEHF$ là hình chữ nhật nên $OA = OH = OE = OF$ (2). Kết hợp (1) và (2), ta được $HB.HC = 2OE.2OF = 4OE.OF$.

Bài toán 9. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a.

1. M là một điểm trên cạnh AD sao cho $\widehat{ABM} = 30°$. Tính AM, BM theo a.

2. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với BM tại F, đường thẳng này cắt CD tại N. Tính độ dài các đoạn thẳng AF, MF, BF theo a.

Lời giải



1. Ta có tam giác ABM vuông tại A có $\widehat{ABM} = 30^\circ$ nên $BM = 2AM$. Do đó

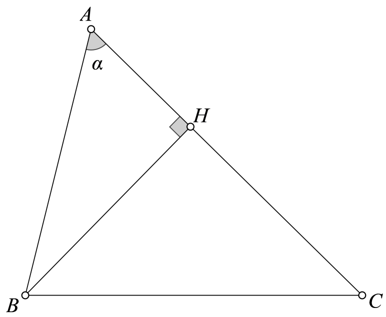
$$(2AM)^2 = AM^2 + a^2 \Rightarrow 3AM^2 = a^2 \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow BM = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

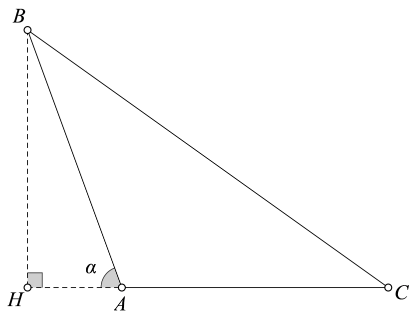
2. Ta có $\widehat{MAF} = \widehat{ABF} = 30^\circ$ (cùng phụ với $\widehat{FAB}$). Từ đó ta có

$$AF = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}, MF = \frac{AM}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}. \; AF^2 = FM.FB \Rightarrow FB = \frac{AM^2}{FM} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Bài toán 10. Chứng minh rằng diện tích của một tam giác bằng một nửa tích của hai cạnh với sin của góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng chứa hai cạnh ấy.

Lời giải





Kẻ $BH \perp AC$, gọi α là góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng AB, AC. Ta có

$$\frac{1}{2}.AB.AC.\sin\alpha = \frac{1}{2}.\frac{BH}{AB}.AB.AC = \frac{1}{2}.BH.AC = S_{ABC}.$$

Do đó, ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 11. Cho tam giác ABC nhọn, đặt $BC = a, CA = b, AB = C$. Đặt $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. Chứng minh rằng $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. *(Công thức Heron)*

Lời giải

Từ định lý Cosin (Ví dụ 5 - Phần 1), ta có

$$\cos\widehat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Từ đó, ta có

$$\sin\widehat{C} = \sqrt{1 - \cos^2\widehat{C}} = \frac{\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}}{2ab}.$$

Từ bài toán 10, ta có công thức tính diện tích tam giác ABC như sau

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2}ab.\sin\widehat{C} = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{[2ab-(a^2+b^2-c^2)][2ab+(a^2+b^2-c^2)]} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \end{aligned}$$

Bài toán 12. Cho $\sin\alpha.\cos\alpha = \frac{12}{25}$. Tính $\sin\alpha, \cos\alpha$.

Lời giải

Ta có

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha.\cos\alpha = 1+2.\frac{12}{25} = \frac{49}{25}.$$

Suy ra $\sin\alpha+\cos\alpha = \frac{7}{5}$, nên $\sin\alpha = \frac{7}{5}-\cos\alpha$. Từ đó, ta có

$$\cos\alpha.\left(\frac{7}{5}-\cos\alpha\right) = \frac{12}{25}.$$

Suy ra $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ hoặc $\cos\alpha = \frac{3}{5}$.

- Nếu $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ thì $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.
- Nếu $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ thì $\sin\alpha = \frac{4}{5}$.

Vậy $\sin\alpha = \frac{3}{5}, \cos\alpha = \frac{4}{5}$ hoặc $\sin\alpha = \frac{4}{5}, \cos\alpha = \frac{3}{5}$.

Bài toán 13. Cho tam giác ABC nhọn, đặt $BC = a, CA = b, AB = c$. Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là các đường cao ứng với các cạnh a, b, c. Chứng minh các hệ thức sau

$$\begin{aligned} h_a &= \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a} \\ h_b &= \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{b} \\ h_c &= \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c}. \end{aligned}$$

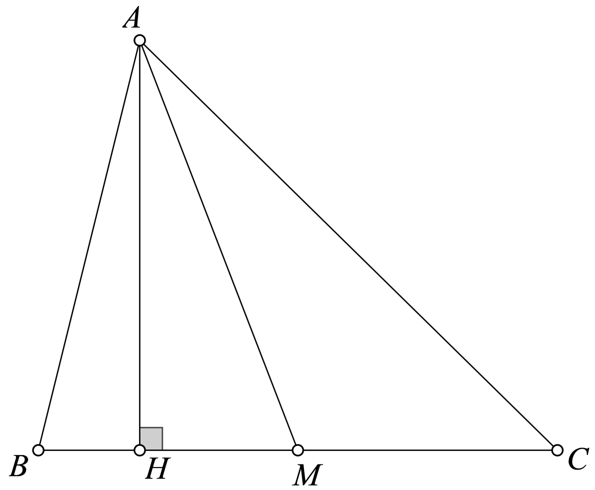
Lời giải

Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}h_a.a$. Do đó, $h_a = \frac{2S_{ABC}}{a} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$. Các hệ thức còn lại cũng tương tự.

Bài toán 14. Cho tam giác ABC không phải tam giác tù. Gọi AM là đường trung tuyến ứng với cạnh BC của tam giác ABC. Gọi $BC = a, AC = b, AB = c, AM = m_a$. Chứng minh rằng $m_a^2 = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$.

Lời giải

- Nếu tam giác ABC vuông tại A thì đẳng thức trên hiển nhiên đúng.
- Nếu tam giác ABC là tam giác nhọn.



Giả sử $AB < AC$ thì $BH < BM$ nên

$$HM = BM - BH = \frac{a}{2} - \frac{a^2+c^2-b^2}{2a} = \frac{b^2-c^2}{2a}$$

Từ đó

$$m_a^2 = AM^2 = AH^2 + MH^2 = AB^2 - BH^2 + MH^2 = c^2 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2 + \left(\frac{b^2-c^2}{2a}\right)^2 = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}.$$

Bài toán 15. 1. Cho $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. Tính $A = 5\sin^2\alpha + 6\cos^2\alpha$.

2. Cho $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. Tính $B = 4\sin^2\alpha - 5\cos^2\alpha$.

Lời giải 1.

Ta có $A = 5\sin^2\alpha + 6\cos^2\alpha = 5\sin^2\alpha + 6(1-\cos^2\alpha) = 6 - \sin^2\alpha = \frac{141}{25}$.

2. Ta có $B = 4\sin^2 - 5\cos^2\alpha = 4(1-\cos^2\alpha) - 5\cos^2\alpha = 4 - 9\cos^2\alpha = \frac{-44}{25}$.

Bài toán 16. Tìm góc nhọn α, biết $\sin\alpha.\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Dễ dàng tính được $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$. Từ đó, ta có phương trình

$$\sin^2\alpha - \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0.$$

Suy ra $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ hoặc $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- Nếu $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ thì $\alpha = 30^\circ$.
- Nếu $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ thì $\alpha = 60^\circ$.

Vậy $\alpha = 30^\circ$ hoặc $\alpha = 60^\circ$.

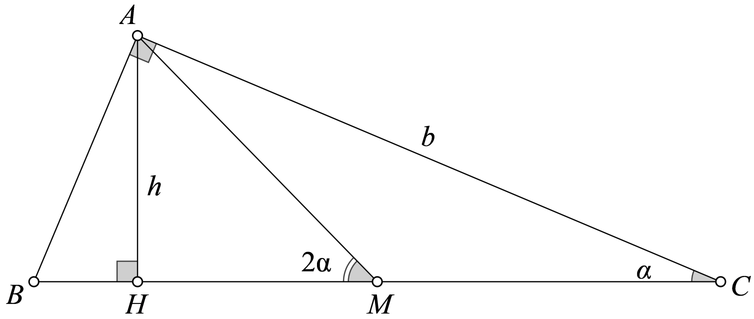
Bài toán 17. Cho tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{ACB} = \alpha < 45^\circ$, trung tuyến AM, đường cao AH, $BC = a$. Chứng minh các công thức sau

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$.

2. $1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$.

3. $1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$.

Lời giải



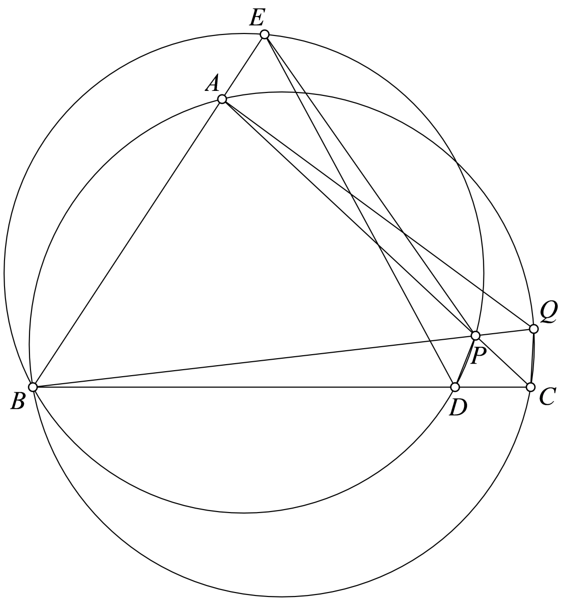
1. Ta có $\sin\alpha = \dfrac{h}{b}, \cos\alpha = \dfrac{b}{a}$. Mặt khác, $\sin 2\alpha = \dfrac{AH}{AM} = \dfrac{2h}{a}$. Do đó, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$.

2. Ta có $2\cos^2\alpha = 2\left(\dfrac{CH}{AC}\right)^2 = \dfrac{2CH^2}{HC.BC} = \dfrac{2HC}{a}$. Mặt khác, ta lại có $1+\cos 2\alpha = 1+\dfrac{HM}{AM} = \dfrac{a+2HM}{a} = \dfrac{2CH}{a}$. Do đó $1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$.

3. Thay $\cos^2\alpha$ bởi $1-\sin^2\alpha$ vào $1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$, ta được $1+\cos 2\alpha = 2-2\sin^2\alpha$, suy ra $1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$.

Bài toán 18. (Hồng Kông TST 2000) Cho tam giác ABC có $BC > CA > AB$. Gọi D là một điểm trên cạnh BC, E là một điểm trên cạnh AB kéo dài về phía điểm A sao cho $BD = BE = CA$. Gọi P là một điểm trên cạnh AC sao cho bốn điểm E, B, D, P đồng viên. Q là giao điểm thứ hai của BP với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $AQ + CQ = BP$.

Lời giải



Vì các tứ giác $ABCQ$ và $BEPD$ nội tiếp nên $\widehat{CAQ} = \widehat{CBQ} = \widehat{DEP}$. Do đó, dễ thấy $\triangle AQC \sim \triangle EPD$ (g-g). Do đó, ta có

$$\frac{AC}{ED} = \frac{QC}{PD} \Rightarrow ED.QC = AC.PD = BE.PD \ (1).$$

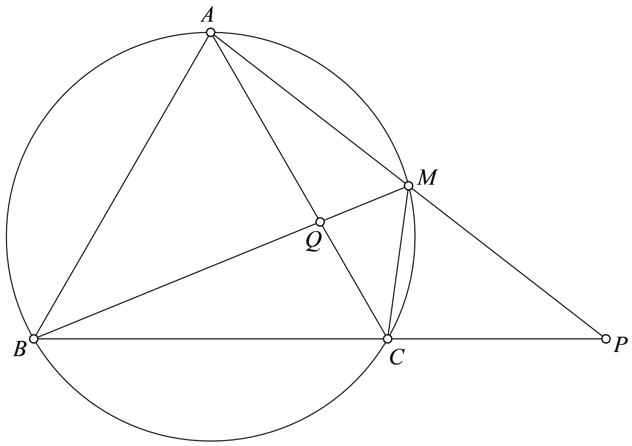
Và

$$\frac{AQ}{AC} = \frac{EP}{ED} \Rightarrow AQ.ED = AC.EP = EP.BD \ (2).$$

Mặt khác, áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $BEPD$, ta có $EP.BD + BE.PD = ED.BP$ (3).
Từ (1), (2) và (3) suy ra $AQ.ED + QC.ED = ED.BP$. Do đó, $QC + AQ = BP$.

Bài toán 19. (Quảng Trị 2005) Cho tam giác đều ABC có độ dài các cạnh bằng a ($a > 0$). Trên đoạn AC lấy điểm Q di động, trên tia đối của tia CB lấy điểm P di động sao cho $AQ.BP = a^2$. Gọi M là giao điểm của BQ và AP. Chứng minh rằng $AM + MC = BM$.

Lời giải

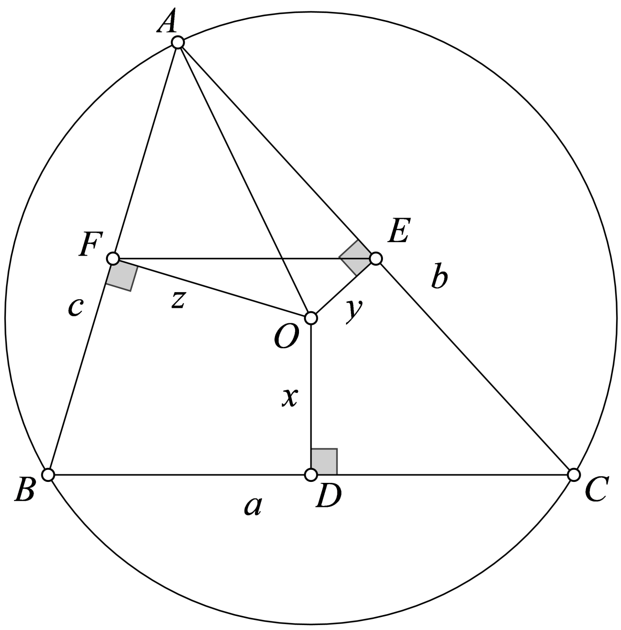


Từ giả thiết $AQ.BP = a^2$, ta có được $\dfrac{AQ}{AB} = \dfrac{AB}{BP}$. Kết hợp với $\widehat{BAQ} = \widehat{PBA} = 60^\circ$, ta được $\triangle AQB \sim \triangle BAP$ (c-g-c). Suy ra $\widehat{ABQ} = \widehat{BPA}$. Mà $\widehat{ABQ} + \widehat{MBC} = 60^\circ$ và $\widehat{APB} + \widehat{MAC} = \widehat{ACB} = 60^\circ$ nên $\widehat{MBC} = \widehat{MAC}$. Nói cách khác, $M \in ABC$. Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $ABCM$ cùng giả thiết $AB = BC = CA$, ta được

$$AB.MC + BC.AM = BM.AC \Rightarrow AM + MC = BM.$$

Bài toán 20. (Vũ Hữu Bình) Vận dụng định lý Ptolemy để giải bài toán sau: Chứng minh rằng tổng khoảng các từ tâm của đường tròn ngoại tiếp một tam giác nhọn đến các cạnh của tam giác bằng tổng các bán kính của đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp tam giác đó. *(Định lý Carnot)*

Lời giải



Xét tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Gọi OD, OE, OF lần lượt là khoảng cách từ O đến BC, AC, AB. Đặt $BC = a, AC = b, AB = c, OD = x, OE = y, OF = z$. Áp dụng định lý Ptolemy vào tứ giác nội tiếp $AEOF$, ta có

$$OA.EF = AF.OE + AE.OF \Rightarrow R.\frac{a}{2} = \frac{c}{2}.y + \frac{b}{2}.z \Rightarrow aR = cy + bz.$$

Tương tự ta có $bR = az + cx, cR = ay + bx$. Suy ra

$$R(a+b+c) = a(y+z) + b(x+z) + c(x+y) \text{ (1)}.$$

Gọi r là bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác ABC, ta có

$$r(a+b+c) = 2S_{ABC} = ax + by + cz \text{ (2)}.$$

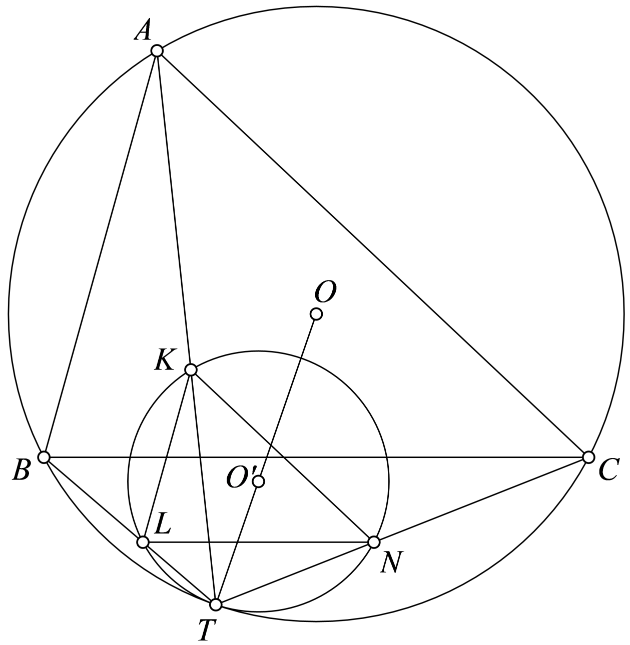
Từ (1) và (2) suy ra

$$(a+b+c)(R+r) = a(x+y+z) + b(x+y+z) + c(x+y+z).$$

Do đó $R + r = x + y + z$. Ta kết thúc bài toán.

Bài toán 21. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (O') tiếp xúc trong với (O) tại T thuộc cung nhỏ BC. Kẻ các tiếp tuyến AA', BB', CC' tới (O'). Chứng minh rằng $AA'.BC = BB'.AC + CC'.AB$.

Lời giải



Gọi K, L, N lần lượt là giao điểm của AT, BT, CT với đường tròn (O'). Suy ra $AA'^2 = AK.AT, BB'^2 = BL.BT, CC'^2 = CN.CT$. Khi đó, điều cần chứng minh tương đương với

$$BC.\sqrt{AK.AT} = CA.\sqrt{BL.BT} + AB.\sqrt{CN.CT} \text{ (1)}.$$

Thật vậy, dễ thấy $LN \parallel BC, LK \parallel AB, KN \parallel AC$. Suy ra $\dfrac{AK}{AT} = \dfrac{BL}{BT} = \dfrac{CN}{CT} = k$. Khi đó, (1) tương đương với

$$BC.\sqrt{k.AT^2} = CA.\sqrt{k.BT^2} + AB.\sqrt{k.CT^2} \Rightarrow CB.AT = AB.CT + AC.BT.$$

Đẳng thức cuối đúng do định lý Ptolemy. Ta kết thúc bài toán.

Bài toán 22. (HSG các vùng của Mĩ 1987) Cho một tứ giác nội tiếp có các cạnh là a, b, c, d (a đối diện c, b đối diện d). Gọi p, q là độ dài hai đường chéo của tứ giác trên. Chứng minh rằng $pq \leqslant \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$.

Lời giải

Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác đó, ta có $pa = ac + bd$. Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$p^2q^2 = (ac+bd)^2 \leqslant (a^2+b^2)(c^2+d^2).$$

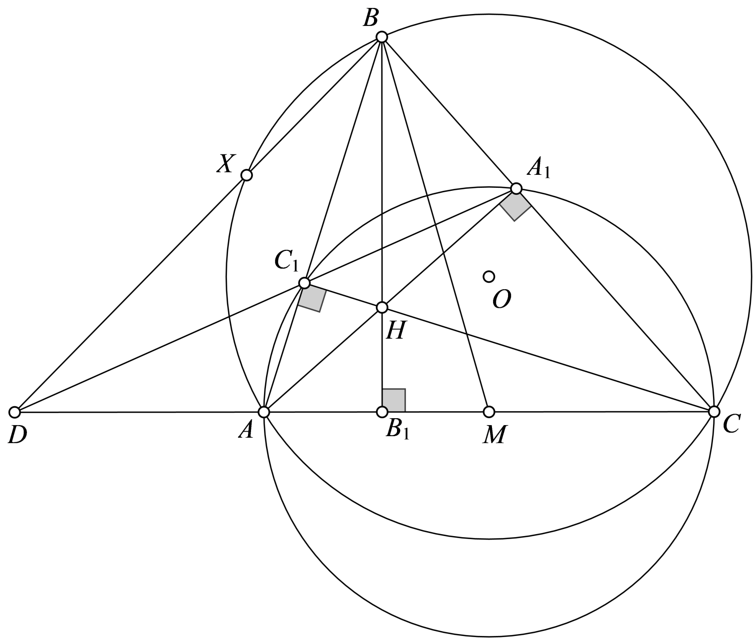
Đây là bất đẳng thức Bunyakovsky quen thuộc. Ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 23. (CSP V1 2013) Cho tam giác ABC không cân có ba góc nhọn, nội tiếp (O), các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 cắt nhau tại H. Các đường thẳng A_1C_1, AC cắt nhau tại D. Gọi X là giao điểm của BD với (O).

1. Chứng minh $DX.DB = DC_1.DA_1$.

2. Gọi M là trung điểm AC. Chứng minh DH vuông góc BM.

Lời giải



1. Đây là mô hình trực tâm, bạn đọc có thể xem lại và tự tìm cách chứng minh.

2. Áp dụng định lý Brocard với tứ giác AC_1A_1C nội tiếp đường tròn tâm M và $AC_1 \cap CA_1 = \{B\}, A_1C_1 \cap AC = \{D\}$, ta được M là trực tâm của tam giác DBH. Suy ra DH vuông góc với BM.

Bài toán 24. (HSG TPHCM 2013) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn O. Các tia AB, DC cắt nhau tại E, các tia AD, BC cắt nhau tại F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác CDF tại M. Chứng minh rằng

1. Ba điểm E, M, F thẳng hàng và bốn điểm A, D, M, E nằm trên một đường tròn.

2. OM vuông góc với EF.

3. Ba đường thẳng OM, AC, BD đồng quy tại một điểm I.

Lời giải 1.

Ta có $\widehat{FMC} = \widehat{FDC} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{EMC}$. Suy ra ba điểm E, M, F thẳng hàng. Do đó, theo phương tích, ta thu được

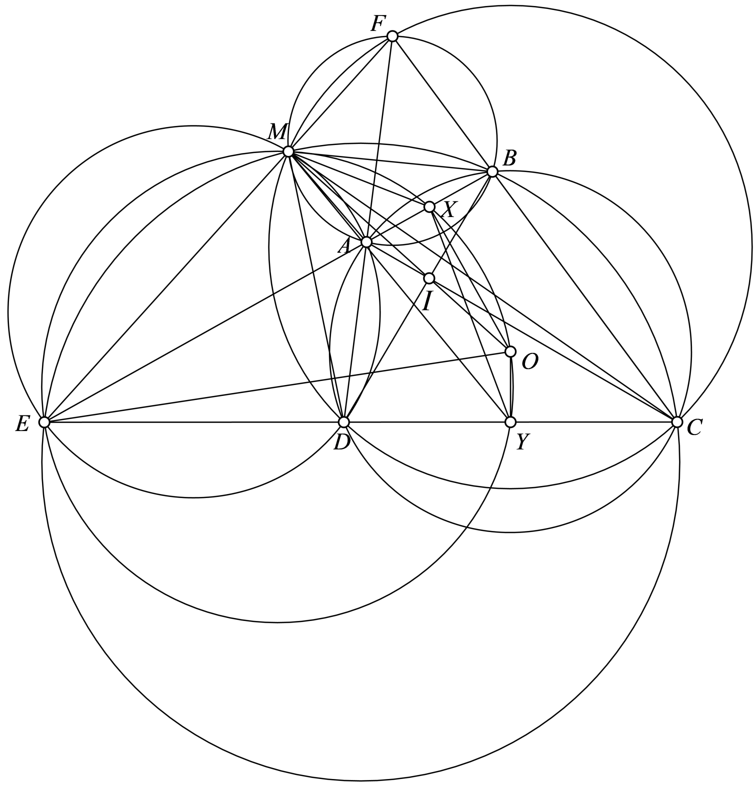
$$FA.FD = FB.FC = FM.FE.$$

Suy ra tứ giác $MADE$ nội tiếp.

2. Dễ thấy tứ giác $AMFB$ nội tiếp. Do đó, $\widehat{MBA} = \widehat{MFA} = \widehat{MCD}$. Kết hợp với $\widehat{MAB} = \widehat{MDC}$ (cùng bù $\widehat{MFC}$), ta được $\triangle MAB \sim \triangle MDC$ (g-g). Gọi X, Y lần lượt là trung điểm của AB, CD, ta được cặp tam giác đồng dạng mới là $\triangle MBX \sim \triangle MCY$ (c-g-c). Suy ra $\widehat{MXB} = \widehat{MYC} \Rightarrow \widehat{MXE} = \widehat{MYE}$. Vậy nên tứ

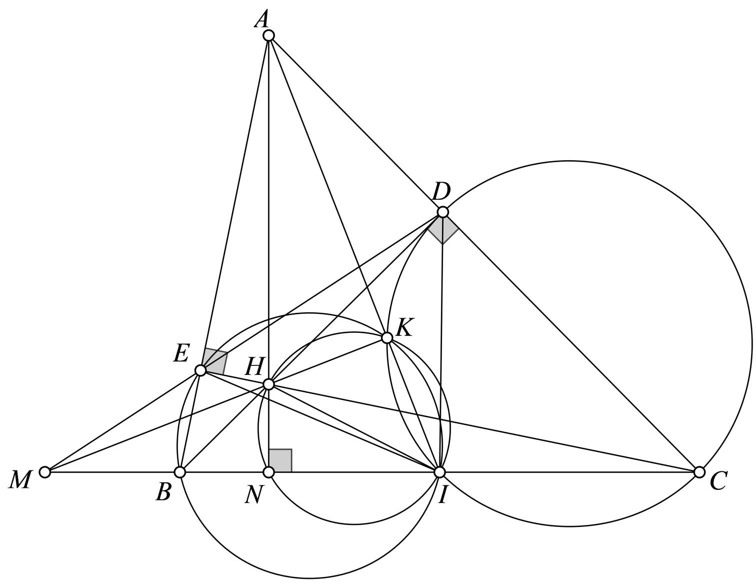
giác $MXYE$ nội tiếp. Mặt khác, tứ giác $OXEY$ nội tiếp đường tròn đường kính OE nên ta suy ra được 5 điểm O, X, M, E, Y cùng thuộc đường tròn đường kính OE. Do đó, $\widehat{OME} = 90°$. Ta có điều phải chứng minh.

3. Gọi $AC \cap BD = \{I\}$, theo định lý Brocard, ta có O là trực tâm của tam giác FIE. Suy ra $OI \perp EF$. Mà $OM \perp EF$ nên ba điểm O, I, M thẳng hàng. Ta kết thúc bài toán tại đây.



Bài toán 25. (Hải Dương 2008) Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) có các đường cao BD, CE cắt nhau tại H. Gọi I là trung điểm của BC, đường tròn ngoại tiếp tam giác BEI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác CDI tại K khác I. Đường thẳng DE cắt BC tại M. Chứng minh rằng ba điểm M, H, K thẳng hàng.

Lời giải



Áp dụng định lý Brocard cho tứ giác $BEDC$ nội tiếp đường tròn tâm I với $BE \cap CD = \{A\}, DE \cap BC = \{M\}$, ta được I là trực tâm của tam giác AHM. Do đó, $MH \perp AI$ (1).

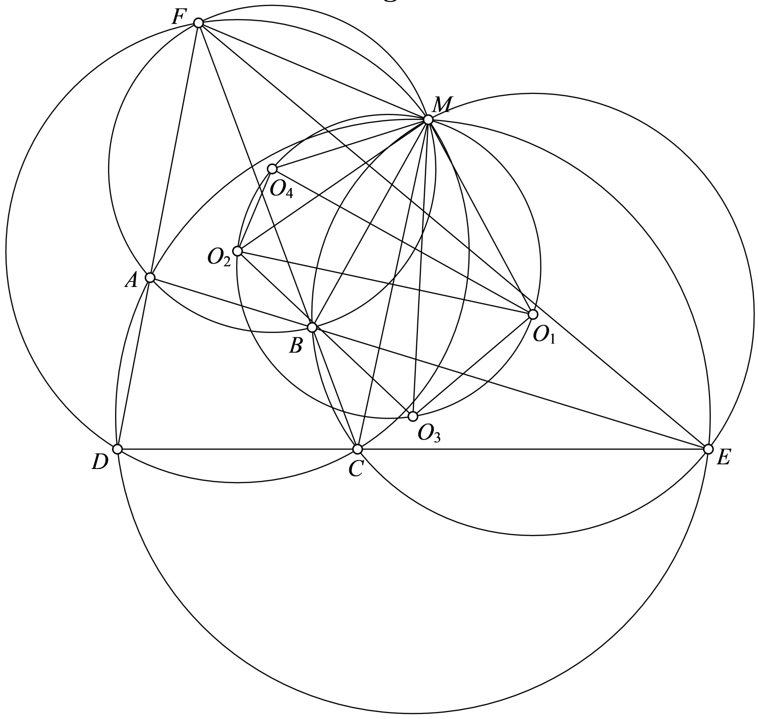
Gọi $AI \cap (BEI) = \{K'\}$, AN là đường cao của tam giác ABC. Theo phương tích, ta có

$$AK'.AI = AE.AB = AF.AC.$$

Do đó, tứ giác $DK'IC$ nội tiếp. Nói cách khác, $K \equiv K'$ nên ba điểm A, K, I thẳng hàng. Mặt khác, có $AK.AI = AE.AB = AH.AN$ nên tứ giác $HNIK$ nội tiếp. Suy ra $HK \perp AI$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra ba điểm M, H, K thẳng hàng.

Bài toán 26. Cho tứ giác $ABCD$ có E là giao điểm của AB và CD, F là giao điểm của AD và BC. Gọi M là điểm Miquel và O_1, O_2, O_3, O_4 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác EBC, CDF, EAD, ABF. Chứng minh rằng 5 điểm M, O_1, O_2, O_3, O_4 cùng thuộc một đường tròn.

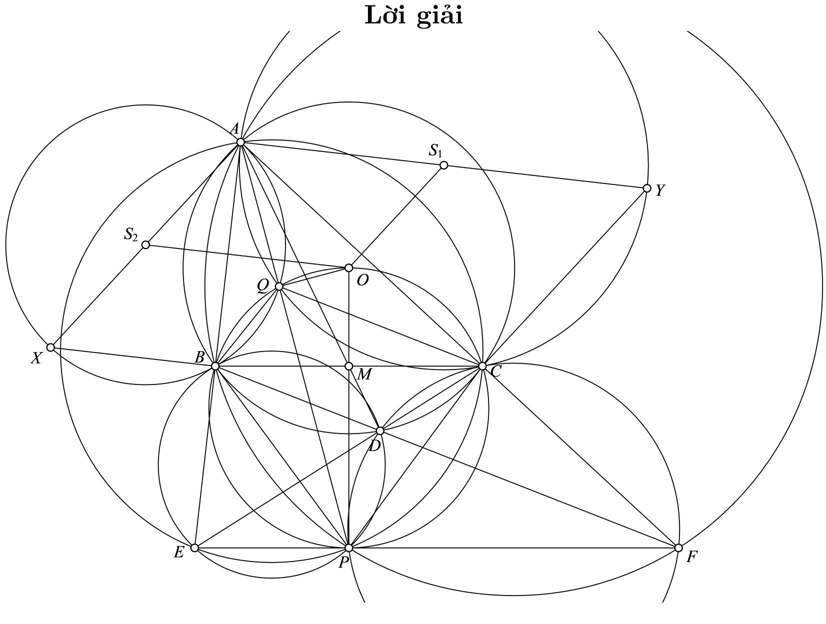
Lời giải



Ta có $\widehat{MO_4O_1} = \dfrac{1}{2}\widehat{MO_4B} = \widehat{MFC} = \dfrac{1}{2}\widehat{MO_2C} = \widehat{MO_2O_1}$ nên tứ giác $MO_4O_2O_1$ nội tiếp. Tương tự, ta cũng có tứ giác $MO_4O_3O_1$ nội tiếp nên 5 điểm M, O_1, O_2, O_3, O_4 cùng thuộc một đường tròn.

Bài toán 27. (Hà Nội TST 2017) Cho tam giác ABC $(AB < AC)$ nhọn nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là trung điểm của BC. AM cắt (O) tại các điểm A, D. Giả sử $BD \cap AC = \{F\}, CD \cap AB = \{E\}, (ABF) \cap (ACE) = \{P\}$ $(P \neq A)$. Gọi (S_1) là đường tròn đi qua C tiếp xúc với AB tại A. Gọi (S_2) là đường tròn đi qua B và tiếp xúc với AC tại A, $(S_1) \cap (S_2) = \{Q\}$ $(Q \neq A)$. Chứng minh rằng tam giác OPQ là tam giác vuông.

Lời giải



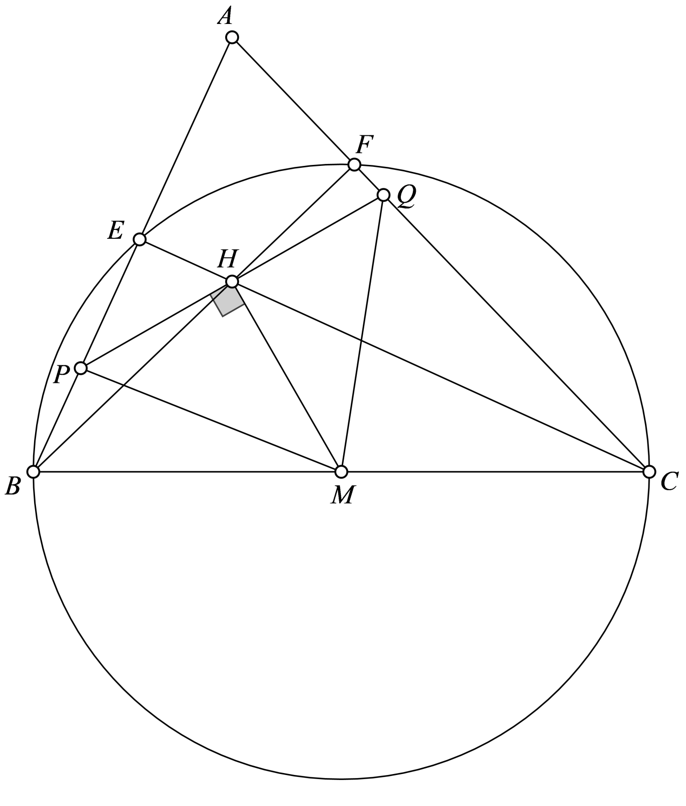
Dễ thấy P là điểm Miquel của tứ giác $ABCD$ nên ta cũng có các tứ giác $BDPE, CDPF$ nội tiếp. Ta có $\widehat{APE} = \widehat{ACE} = 180^\circ - \widehat{ABF} = 180^\circ - \widehat{APF}$ nên ba điểm P, E, F thẳng hàng. Theo định lý Brocard, ta có $OM \perp EF$. Mà $OM \perp BC$ nên $BC \parallel EF$. Do đó, $\widehat{BCD} = \widehat{DEP} = \widehat{DBP}$ nên PB là tiếp tuyến của đường tròn (O). Tương tự, ta cũng có PC là tiếp tuyến của đường tròn (O). Vì vậy, bốn điểm P, B, O, C cùng thuộc đường tròn đường kính OP. Kẻ AX, AY lần lượt là đường kính của đường tròn $(S_2), (S_1)$. Ta có $\widehat{AQB} = 180^\circ - \widehat{AXB} = 180^\circ - \widehat{AS_2O}$. Tương tự, ta cũng có $\widehat{AQC} = 180^\circ - \widehat{AS_1O}$. Vậy nên

$$\widehat{AQB} + \widehat{AQC} = 360^\circ - 2\widehat{AS_1O} = 360^\circ - 2\widehat{BAC} \text{ (Vì sao?)}$$

Do đó, $\widehat{BQC} = 2\widehat{BAC}$. Suy ra 5 điểm O, Q, B, P, C cùng thuộc một đường tròn. Ta dễ dàng suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 28. (Moldova TST 2010) Cho tam giác nhọn ABC có H là trực tâm và M là trung điểm BC. Kẻ đường thẳng qua H vuông góc với HM và cắt AB, AC lần lượt tại P và Q. Chứng minh rằng $MP = MQ$.

Lời giải



Kẻ các đường cao BD, CE của tam giác ABC. Suy ra tứ giác $BEDC$ nội tiếp đường tròn đường kính BC. Theo định lý con bướm, dễ thấy H là trung điểm của PQ nên $MP = MQ$.

Bài toán 29. Cho đường tròn (O) và dây AB. Lấy I là một điểm bất kì thuộc dây AB, vẽ hai dây CD, EF cùng đi qua I (C và E nằm về cùng một phía với AB). Gọi giao điểm của CF, DE với AB lần lượt là M và N. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{IA} + \dfrac{1}{IN} = \dfrac{1}{IB} + \dfrac{1}{IM}$.

Lời giải

Trước hết, ta chứng minh kết quả sau: $\dfrac{AM.IB}{IM} = \dfrac{BN.IA}{IN}$ *(Bổ đề Haruki)*. Thật vậy, vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác CMD, đường tròn này cắt AB tại điểm thứ hai là K. Theo phương tích, ta có

$$IM.IK = IC.ID = IA.IB \Rightarrow IM.(IB + BK) = (AM + IM).IB \Rightarrow \frac{AM.IB}{IM} = BK.$$

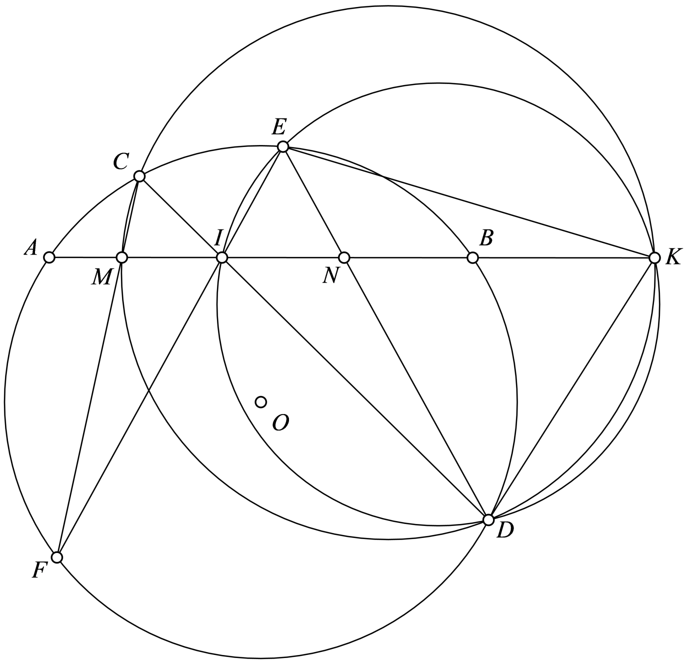
Mặt khác, vì $\widehat{IKD} = \widehat{FCD} = \widehat{IED}$ nên tứ giác $EKDI$ nội tiếp. Áp dụng phương tích tương tự như trên, ta cũng có $\dfrac{BN.IA}{IN} = BK$. Do đó, $\dfrac{AM.IB}{IM} = \dfrac{BN.IA}{IN}$.

Đặt $IA = a, IB = b, IM = m, IN = n$, ta được $\dfrac{(a-m)b}{m} = \dfrac{(b-n)a}{n}$.

$$(a-m).bn = (b-n).am \Rightarrow abn - bmn = abm - amn.$$

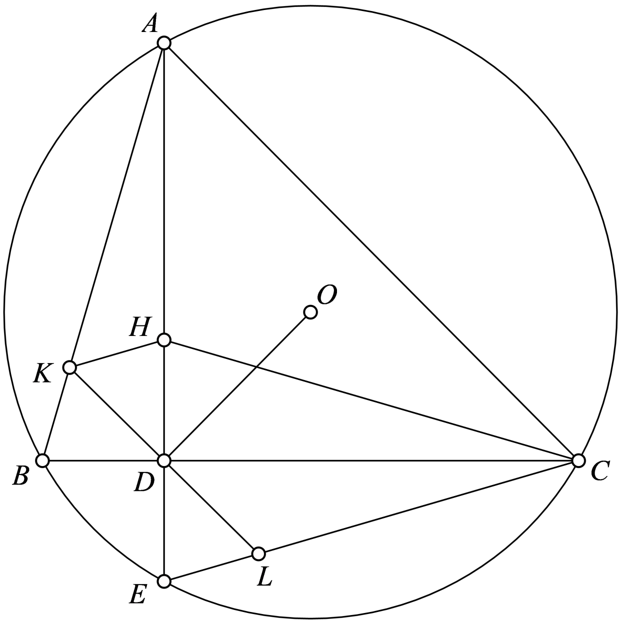
Chia cả hai vế cho $abmn$, ta được

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{a} = \frac{1}{n} - \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{IA} + \frac{1}{IN} = \frac{1}{IB} + \frac{1}{IM}.$$



Bài toán 30. Cho tam giác nhọn ABC có AD là đường cao, O và H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của tam giác ABC. Kẻ đường thẳng qua D và vuông góc với OD , cắt AB ở K. Chứng minh rằng $\widehat{DHK} + \widehat{AHC} = 180°$.

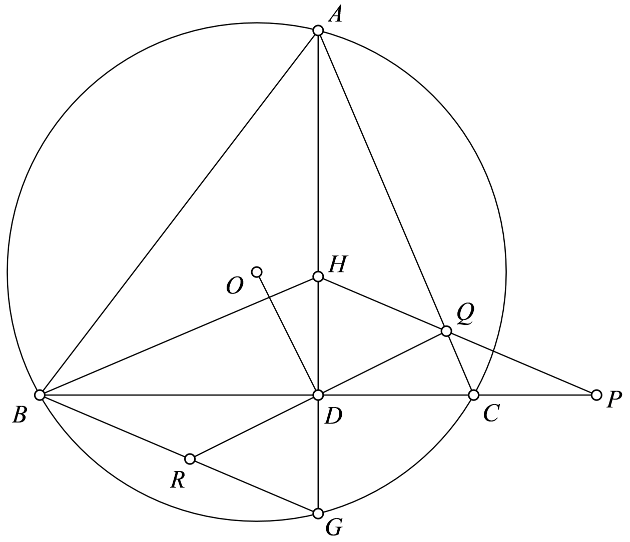
Lời giải



Gọi giao điểm thứ hai của AD và đường tròn (O). Khi đó E đối xứng với H qua D. Lấy $KD \cap EC = \{L\}$. Theo định lý con bướm, ta có $DK = DL$. Suy ra $\triangle DHK = \triangle DEL$ (c-g-c). Do đó, $\widehat{DHK} = \widehat{DEL} = \widehat{DHC} = 180° - \widehat{AHC}$. Ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 31. (Singapore 2011) Cho tam giác ABC nhọn, không cân, O, H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của tam giác ABC, $AB > AC$. Q là điểm trên AC, kéo dài HQ cắt BC ở P sao cho $DP = DB$ với D là chân đường vuông góc hạ từ A xuống BC. Chứng minh rằng $\widehat{ODQ} = 90°$.

Lời giải

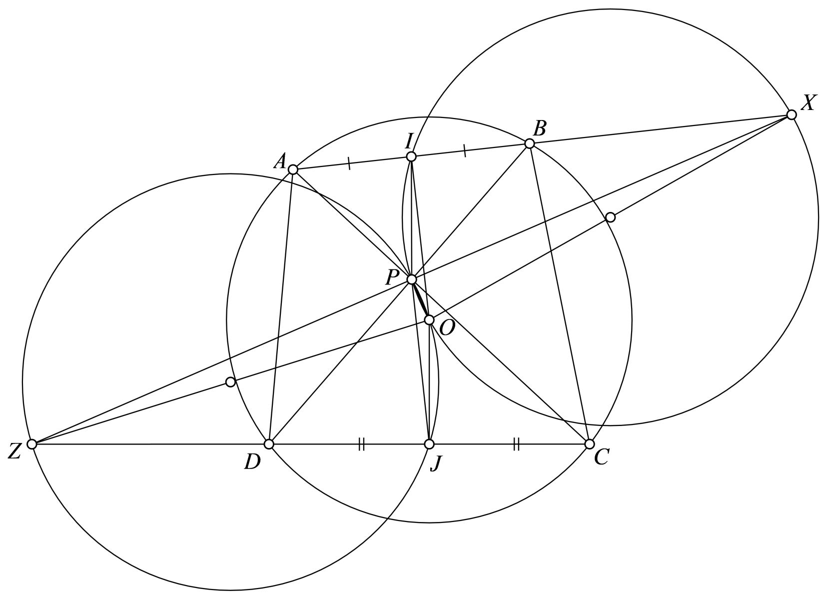


Gọi giao điểm thứ hai của AH và đường tròn (O) là G, khi đó G đối xứng H qua BC. Ta có $\widehat{QPD} = \widehat{HBD} = \widehat{RBD}$, kết hợp với $DP = DB$, ta được $\triangle DPQ = \triangle DBR$ (g-c-g). Do đó, $DR = DQ$. Theo định lý con bướm thì $OD \perp QR$ hay $\widehat{ODQ} = 90°$.

Bài toán 32. *(Định lý con bướm mở rộng)* Cho bốn điểm A, B, C, D nằm trên đường trong tâm O. Gọi P là giao điểm của AC và BD. Một đường thẳng d tùy ý đi qua P sao cho P là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng d. Gọi X là giao điểm của d và AB, Z là giao điểm của d và CD. Chứng minh P là trung điểm XZ.

Lời giải

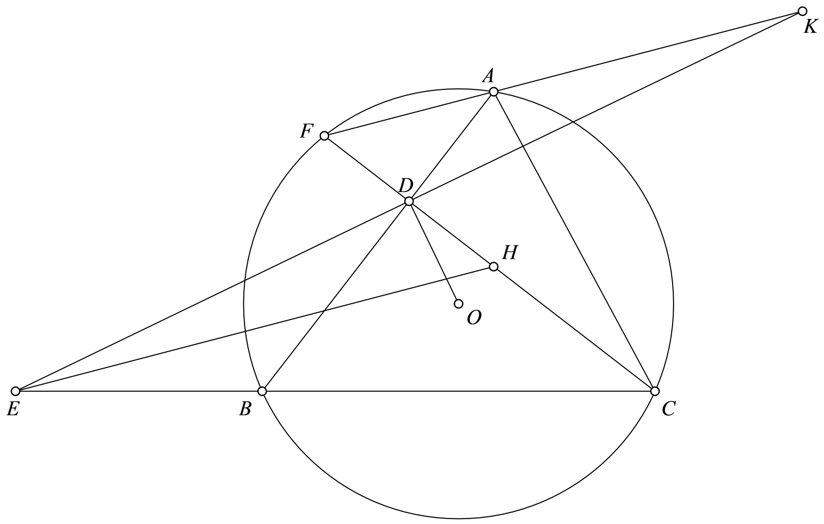
Ta xét thế hình như sau



Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD. Ta được các tứ giác $OPZJ, OPIX$ nội tiếp. Do đó, $\widehat{OZP} = \widehat{OJP}$ và $\widehat{OXP} = \widehat{OIP}$. Mặt khác, có $\triangle PAB \sim \triangle PDC$ (g-g), mà I, J tương ứng là trung điểm của AB, CD nên $\triangle IAP \sim \triangle JDP$ (c-g-c). Vậy nên $\widehat{AIP} = \widehat{DJP}$. Suy ra $\widehat{OIP} = \widehat{OJP}$, hay $\widehat{OZP} = \widehat{OXP}$. Từ đó, ta được P là trung điểm của XZ.

Bài toán 33. (Mông Cổ TST 2008) Cho tam giác nhọn ABC có CD là đường cao, H là trực tâm và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Một đường thẳng đi qua điểm D, vuông góc với OD và cắt BC tại E. Chứng minh rằng $\widehat{DHE} = \widehat{ABC}$.

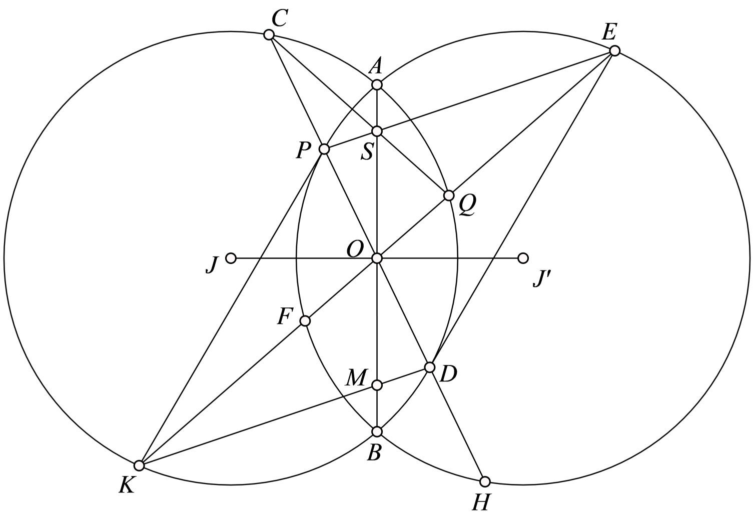
Lời giải



Gọi F là giao điểm của đường tròn (O) và CD, K là giao điểm của AF và DE. Áp dụng định lý con bướm, ta được $DE = DK$. Kết hợp với $DH = DF$, ta được $\triangle DHE = \triangle DFK$ (c-g-c) nên $\widehat{DHE} = \widehat{DFK} = \widehat{ABC}$.

Bài toán 34. (MOP 1998) Cho hai đường tròn (C) và (C') có cùng bán kính, cắt nhau tại hai điểm A, B. Gọi O là trung điểm AB. Dây cung CD của đường tròn (C) qua điểm O. Lấy P là giao điểm của đoạn thẳng CD với (C'). EF là dây cung (C') qua O và đoạn thẳng EF cắt (C') tại Q. Chứng minh rằng AB, CQ, EP đồng quy.

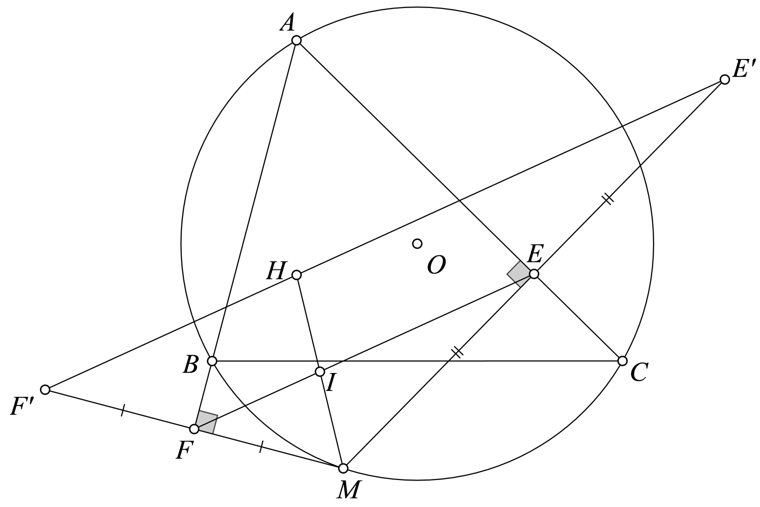
Lời giải



Gọi giao điểm của CQ, EP với AB lần lượt là S, S', M là giao điểm của DK và AB. Theo định lý con bướm, ta có O là trung điểm của SM. Mặt khác, dễ thấy O cũng phải là trung điểm của PD, EK nên tứ giác $PEDK$ là hình bình hành. Do đó, dễ dàng suy ra $\triangle OS'Q = \triangle OMK$ (g-c-g) nên O là trung điểm của MS'. Vậy nên $S \equiv S'$, ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 35. Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn tâm O. Điểm M thuộc cung nhỏ BC. Vẽ ME, MF lần lượt vuông góc AC, AB tại E, F.Gọi H là trực tâm của tam giác ABC, đường thẳng EF cắt HM tại I. Chứng minh I là trung điểm HM.

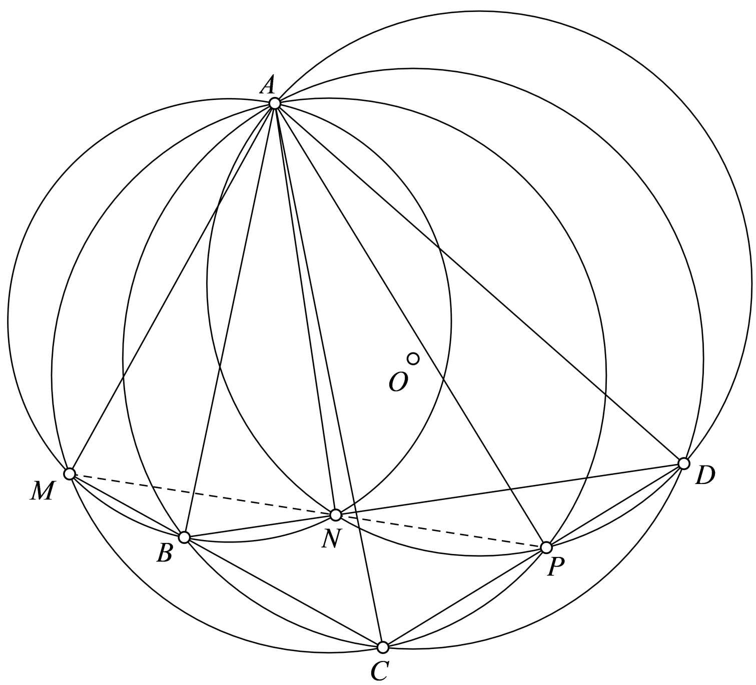
Lời giải



Gọi E', F' lần lượt là điểm đối xứng với M qua AC, AB. Suy ra $E'F'$ là đường thẳng Steiner của điểm M đối với tam giác ABC. Do đó, ba điểm E', H, F' thẳng hàng. Kết hợp với việc F là trung điểm của $F'M$ và E là trung điểm của $E'M$, ta dễ dàng chứng minh được I là trung điểm của HM.

Bài toán 36. Cho đường tròn (O) và ba dây cung AB, AC, AD bất kì. Các đường tròn đường kính AB, AC, AD đôi một cắt nhau lần thứ hai tại M, N, P. Chứng minh rằng ba điểm M, N, P thẳng hàng.

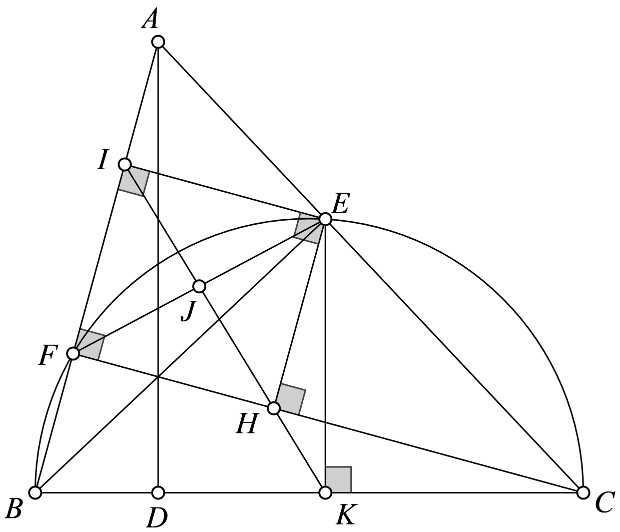
Lời giải



Lấy $(AB) \cap (AC) = \{M\}, (AB) \cap (AD) = \{N\}, (AC) \cap (AD) = \{P\}$. Dễ thấy các bộ điểm $(M, B, C), (C, P, D), (B, N, D)$ thẳng hàng. Do $A \in (BCD), AM \perp BC, AN \perp BD, AD \perp CP$ nên ba điểm M, N, P thẳng hàng theo định lý về đường thẳng Simson.

Bài toán 37. Cho tam giác ABC, các đường cao AD, BE, CF. Từ E kẻ EH, EK lần lượt vuông góc với CF, BC. Chứng minh rằng HK đi qua trung điểm EF.

Lời giải

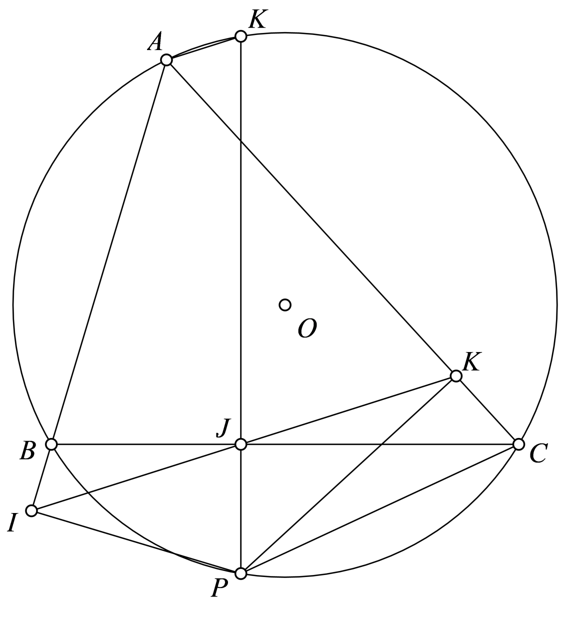


Gọi I là hình chiếu của E lên AB, J là trung điểm của EF. Ta có $E \in (BFC)$ nên theo định lý về đường thẳng Simson, ba điểm I, H, K thẳng hàng. Mặt khác, ta có tứ giác $EIFH$ là hình chữ nhật nên ba điểm I, H, J thẳng hàng. Từ đây, ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 38. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là một điểm bất kì nằm trên cung nhỏ BC của (O). Kẻ đường thẳng qua P vuông góc với BC, cắt (O) tại điểm thứ hai K. Chứng minh rằng AK song song với đường thẳng Simson của P ứng với tam giác ABC.

Lời giải

Xét thế hình như sau

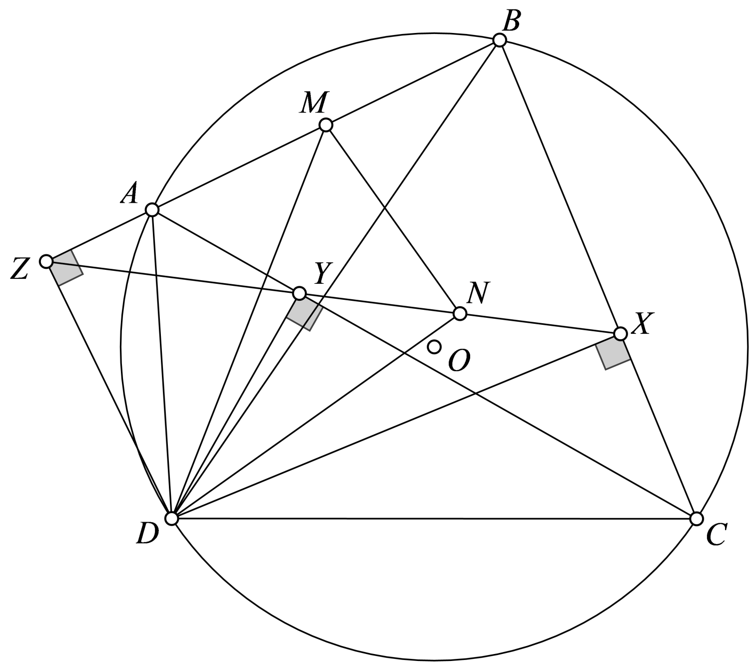


Gọi I, J, K lần lượt là hình chiếu của P lên AB, BC, AC. Khi đó, ba điểm I, J, K thẳng hàng. Ta có $\widehat{KAC} = \widehat{KPC} = \widehat{AKJ}$. Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $AK \parallel IK$, ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 39. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi X, Y, Z lần lượt là hình chiếu của D trên BC, CA, AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, XY. Chứng minh rằng $\widehat{MND} = 90°$.

Lời giải

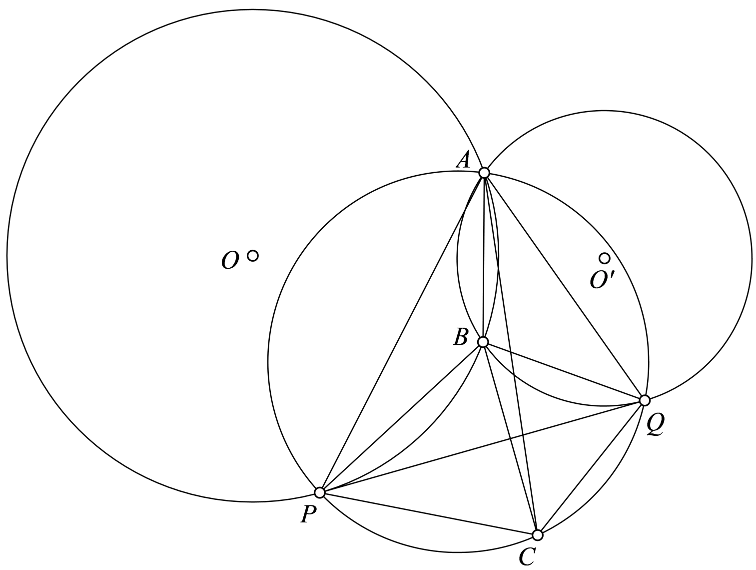
Xét thế hình như sau



Dễ thấy $\triangle ADB \sim \triangle YDX$ (g-g). Mà M và N lần lượt là trung điểm của AB và XY nên $\triangle DAM \sim \triangle DYN$ (c-g-c). Do đó, $\widehat{MDA} = \widehat{NDY} \Rightarrow \widehat{ADY} = \widehat{MDN}$. Kết hợp với $\widehat{ADY} = \widehat{MZN}$, ta được $\widehat{MDN} = \widehat{MZN}$ hay tứ giác $MZDN$ nội tiếp. Vậy nên $\widehat{MND} = 180^\circ - \widehat{MZD} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

Bài toán 40. (Romania 2016) Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A, B. Một tiếp tuyến chung của (O) và (O') (nằm gần về phía B) tiếp xúc với (O) và (O') lần lượt tại P và Q. Gọi C là điểm đối xứng với B qua PQ. Chứng minh rằng $\widehat{CAP} = \widehat{BAQ}$.

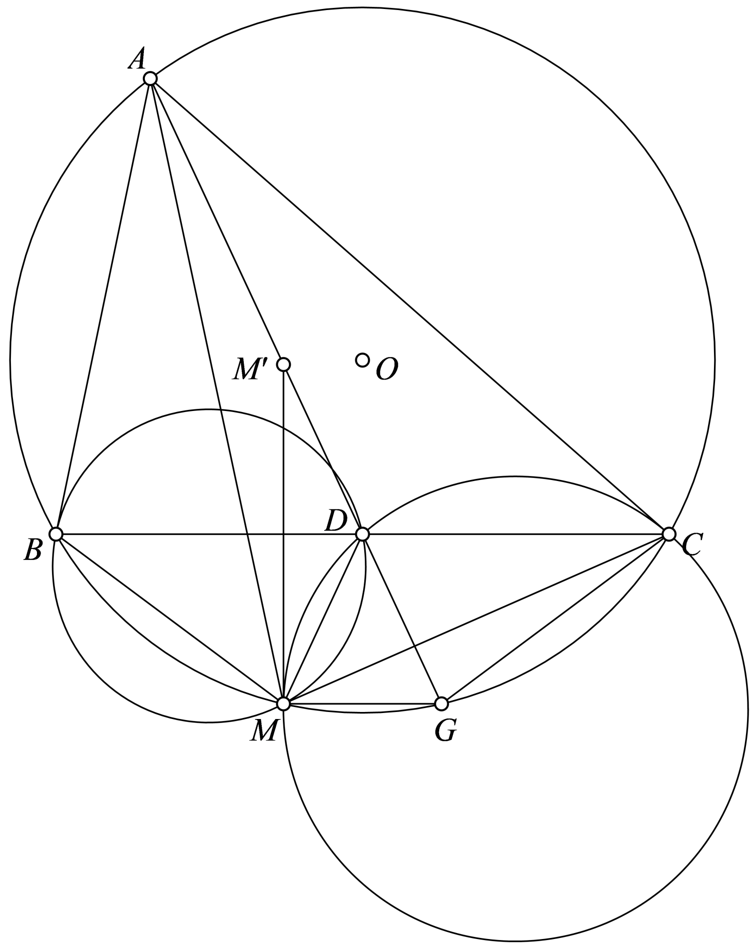
Lời giải



Ta có B là điểm A - Humpty của tam giác APQ. Vì C đối xứng với B qua PQ nên $\widehat{PCQ} = \widehat{PBQ} = 180^\circ - \widehat{PAQ}$. Do đó, $C \in (APQ)$. Do đó, $\widehat{CAP} = \widehat{CQP} = \widehat{BQP} = \widehat{BAQ}$.

Bài toán 41. (Olympic Toán học trẻ Thổ Nhĩ Kỳ 2015) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), D là trung điểm của BC. Gọi (ω_1) là đường tròn đi qua D và tiếp xúc với AB tại B, (ω_2) là đường tròn đi qua D và tiếp xúc với AC tại C. Hai đường tròn này cắt nhau tại điểm thứ hai là M. Lấy M' đối xứng với M qua BC. Chứng minh rằng ba điểm A, M', D thẳng hàng.

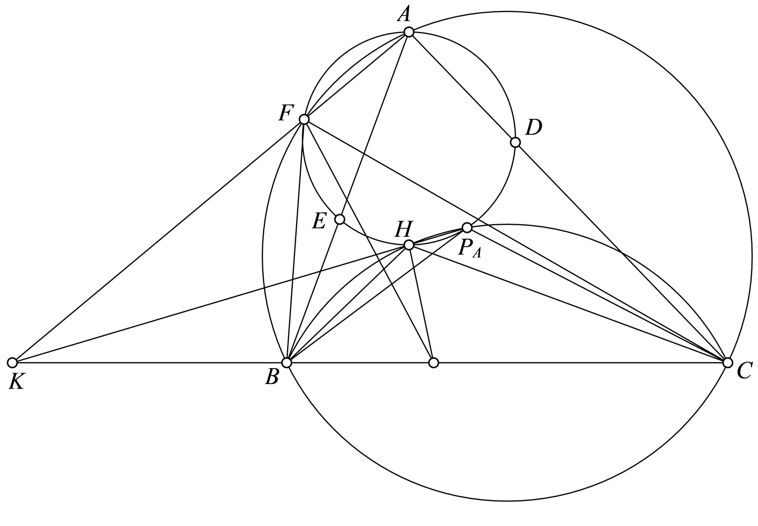
Lời giải



Bằng cộng góc, dễ thấy $M \in (O)$. Trên đường tròn (O), lấy điểm K sao cho $\widehat{BAK} = \widehat{CAD}$. Gọi giao điểm thứ hai của AD với đường tròn (O) là G, ta được $\triangle DMB = \triangle DGC$ (c-g-c) nên $\widehat{BDM} = \widehat{CDG}$. Do đó, $\widehat{CDM} = \widehat{BDG} = \widehat{ADC}$. Vì vậy, $\widehat{AMB} = \widehat{DMC}$. Từ đây, ta dễ dàng thấy AB tiếp xúc với (BDK), AC tiếp xúc với (CDK) nên ta suy ra $K \equiv M$. Vì vậy, theo tính chất của **điểm Humpty**, ta được M' là điểm A - Humpty của tam giác ABC nên ba điểm A, M', B thẳng hàng.

Bài toán 42. (Brazil 2017) Cho tam giác nhọn ABC, hai đường cao BD, CE cắt nhau tại H. Gọi giao điểm thứ hai của đường tròn (ABC) và (ADE) là F. Chứng minh rằng các đường phân giác trong của $\widehat{FBC}$, $\widehat{BHC}$ và BC đồng quy tại một điểm.

Lời giải



Gọi K là giao điểm của AF và BC, P_A là điểm A - Humpty của tam giác ABC. Dễ thấy ba điểm K, H, P_A thẳng hàng. Điều phải chứng minh tương đương với $\dfrac{FB}{FC} = \dfrac{HB}{HC}$.
Ta có các cặp tam giác đồng dạng là $\triangle KBF \sim \triangle KAC$ (g-g) và $\triangle KCF \sim \triangle KAB$ (g-g) nên $\dfrac{FB}{AC} = \dfrac{KB}{KA}$ và $\dfrac{FC}{AB} = \dfrac{KC}{KA}$.

$$\frac{FB}{FC} = \frac{AC.KB}{AB.KC} \text{ (1).}$$

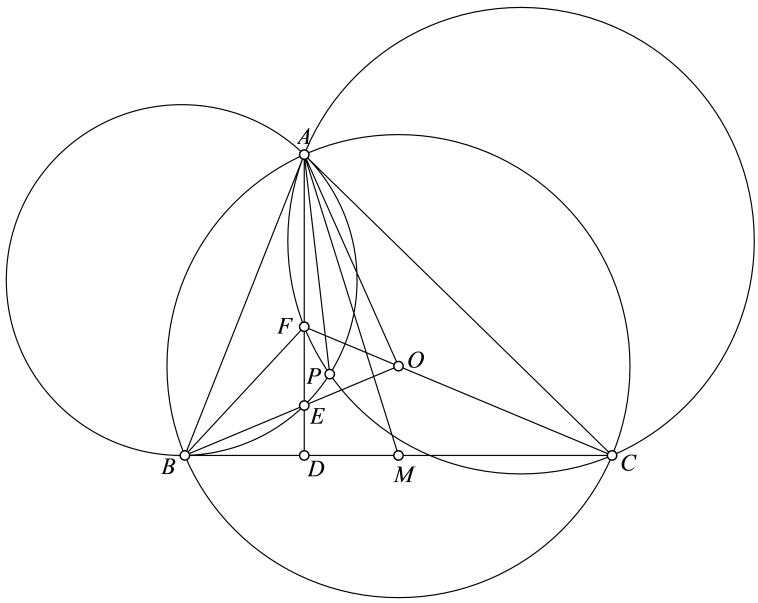
Mặt khác, ta lại có $\triangle KBH \sim \triangle KP_AC$ (g-g) và $\triangle KCH \sim \triangle KP_AB$ (g-g) nên ta được

$$\frac{HB}{HC} = \frac{KB.P_AC}{KC.P_AB} \text{ (2).}$$

Vì P_A là điểm A - Humpty của tam giác ABC nên $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{P_AC}{P_AB}$ (3).
Từ (1), (2), (3) suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 43. (Bắc Macedonia 2017) Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$ nội tiếp (O). Gọi D là hình chiếu vuông góc của A lên BC, M là trung điểm của BC. BO và CO lần lượt cắt AD tại E, F. P là giao điểm thứ hai của đường tròn (ABE) và (ACF). Chứng minh rằng đường phân giác trong của $\widehat{PAM}$ đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

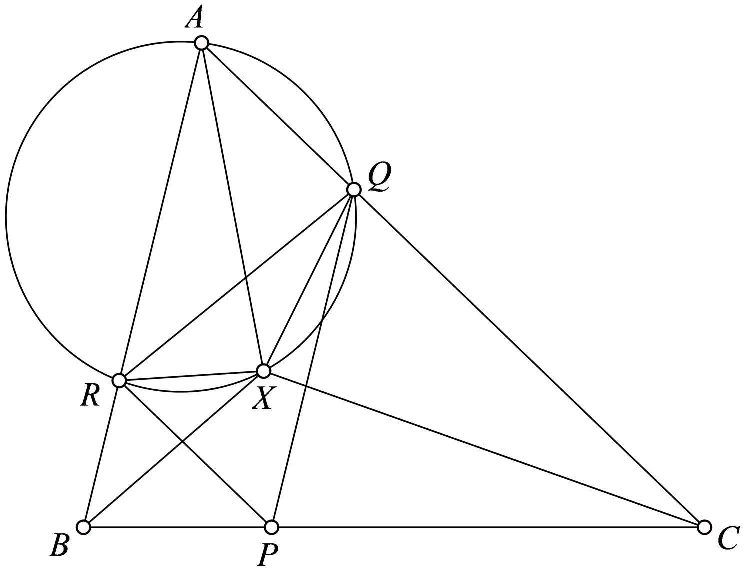
Lời giải



Ta chỉ cần chứng minh P là điểm A - Dumpty của tam giác ABC, khi đó, AP sẽ đối xứng với AM qua đường phân giác $\widehat{BAC}$.
Thật vậy, ta có $\widehat{ABD} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOC} = 90^\circ - \widehat{ACF}$. Mà $\widehat{ABD} = 90^\circ - \widehat{BAF}$ nên ta được $\widehat{BAF} = \widehat{ACF}$. Do đó, AB là tiếp tuyến của đường tròn (ACF). Tương tự, ta cũng có AC là tiếp tuyến của đường tròn (ABE) nên P là điểm A - Dumpty của tam giác ABC. Ta kết thúc bài toán tại đây.

Bài toán 44. (Mĩ TST 2008) Cho tam giác ABC. P là điểm di động trên cạnh BC. Q, R lần lượt thuộc AC và AB sao cho $PQ \parallel AB, PR \parallel AC$. Chứng minh rằng đường tròn (AQR) luôn đi qua một điểm cố định khi P thay đổi.

Lời giải



Gọi X là điểm A - Dumpty của tam giác ABC. Khi đó, X là điểm cố định.
Ta có $\triangle AXB \sim \triangle CXA$ (g-g) nên $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{XB}{XA}$ (1).
Mặt khác, theo định lý Thales nên $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{RB}{RP} = \dfrac{RB}{QA}$ (2).
Từ (1) và (2), ta được $\dfrac{XB}{XA} = \dfrac{RB}{QA}$. Kết hợp với $\widehat{XBR} = \widehat{XAQ}$, ta được $\triangle XBR \sim \triangle XAQ$ (c-g-c). Suy ra $\widehat{XRB} = \widehat{XQA}$. Vậy nên, ta dễ dàng suy ra $X \in (ARQ)$.

Bài toán 45. Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Một đường tròn (J) tiếp xúc với AC, AB lần lượt tại E, F và tiếp xúc trong với (O) tại T.

1. Chứng minh rằng TF đi qua điểm M chính giữa cung nhỏ AB.

2. MC cắt EF tại I. Chứng minh rằng tứ giác $TIEC$ nội tiếp.

3. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

4. Chứng minh rằng TI đi qua điểm chính giữa cung BAC.

Lời giải

1. Gọi giao điểm thứ hai của TF và đường tròn (O) là M. Vì đường tròn (J) tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại điểm T nên ba điểm O, J, T thẳng hàng. Do đó, $\widehat{JFT} = \widehat{JTF} = \widehat{OMT}$. Mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $JF \parallel OM$. Mà $JF \perp AB$ nên $OM \perp AB$, suy ra M là điểm chính giữa cung nhỏ AB.

2. Kẻ tiếp tuyến chung Tl của đường (J) và (O). Ta có $\widehat{IET} = \widehat{lTF} = \widehat{TCI}$. Do đó, tứ giác $TIEC$ nội tiếp.

3. Ta có

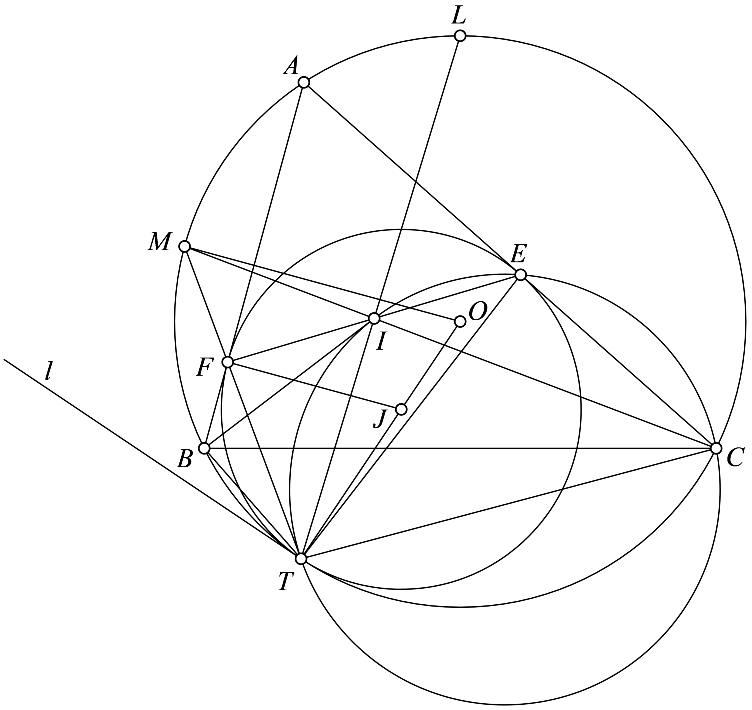
$$\widehat{BTI} = \widehat{BTC} - \widehat{ITC} = 180^\circ - \widehat{BAC} - \widehat{AEF} = 180^\circ - 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{AFI}.$$

Do đó, tứ giác $BFIT$ nội tiếp. Do đó, ta có biến đổi góc như sau

$$\widehat{FBI} = \widehat{FTI} = \widehat{BTC} - \widehat{BTF} - \widehat{ITC} = 180^\circ - \widehat{BAC} - \frac{1}{2}\widehat{ACB} - 90^\circ + \widehat{BAC} = 90^\circ - \frac{1}{2}.(\widehat{BAC} - \widehat{ACB}).$$

Do đó, dễ dàng suy ra BI là tia phân giác của $\widehat{ABC}$. Vì vậy, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

4. Điều phải chứng minh tương đương với TL là tia phân giác của $\widehat{BTC}$ với $TI \cap (O) = \{L\}$. Có $\widehat{BTI} = \widehat{AFE} = \widehat{AEF} = \widehat{ITC}$ nên TL là tia phân giác của BTC. Do đó, L là điểm chính giữa cung BAC.



Bài toán 46. (HSG TP Hà Nội 2023) Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Các tiếp tuyến tại A và C của đường tròn (O) cắt nhau tại S. Trên tia đối của tia CA lấy điểm M ($M \neq C$). Qua S kẻ đường thẳng vuông góc với OM, cắt đường tròn (O) tại hai điểm phân biệt E và F (E nằm giữa S và F).

1. Chứng minh rằng ME là tiếp tuyến của đường tròn (O).
2. Gọi D là chân đường vuông góc kẻ từ M xuống đường thẳng BC. Chứng minh EC là tia phân giác của $\widehat{FED}$.
3. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của MD với hai đường thẳng BE và BF. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BPQ. Chứng minh rằng $\widehat{SDK} = 90^\circ$.

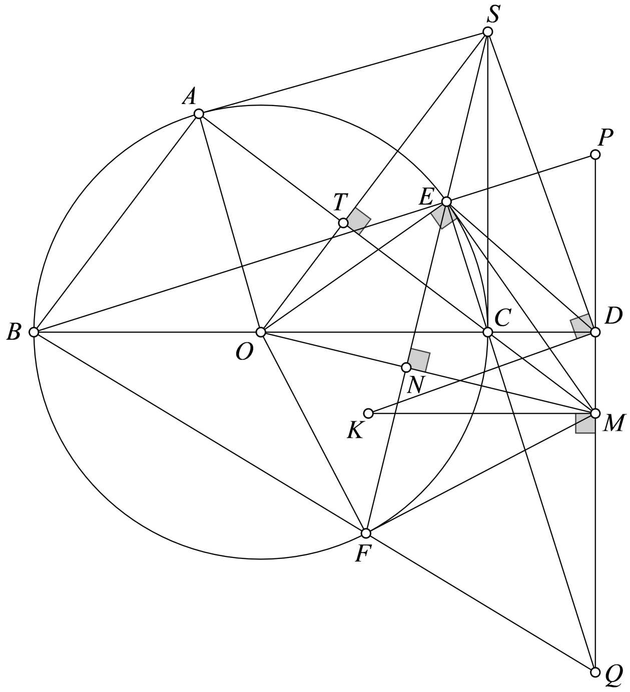
Lời giải

1. Gọi $OS \cap AC = \{T\}, OM \cap EF = \{N\}$. Dễ thấy tứ giác $TNMS$ nội tiếp nên $OT.OS = ON.OM = OC^2 = OE^2$. Do đó, tam giác OEM vuông tại E hay ME là tiếp tuyến của đường tròn (O).

2. Dễ thấy 5 điểm O, E, D, M, F cùng thuộc đường tròn đường kính OM nên ta có biến đổi góc như sau
$$\widehat{OCE} = \widehat{CED} + \widehat{EDO} = \widehat{CED} + \widehat{OEF} = \widehat{CED} + \widehat{OCE} - \widehat{FEC}.$$
Do đó, $\widehat{CED} = \widehat{FEC}$. Hay EC là tia phân giác của $\widehat{FED}$.

3. Ta có
$$\widehat{MEP} = 90^\circ - \widehat{OEB} = 90^\circ - \widehat{OBE} = \widehat{MPE}.$$
Do đó, tam giác MEP cân tại M. Suy ra $ME = MP$. Chứng minh tương tự, ta có $MF = MQ$. Vậy nên tứ giác $PEFQ$ nội tiếp đường tròn đường kính PQ. Từ điều này, ta dễ dàng suy ra C là trực tâm của tam giác BPQ. Mà K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BPQ nên $BC = 2MK$. Do đó, $OC = MK$. Do $\widehat{DCM} = \widehat{OCT} = \widehat{OSC}$ nên $\triangle CDM \sim \triangle SCO$ (g-g). Do đó
$$\frac{CD}{DM} = \frac{SC}{CO} = \frac{SC}{MK}.$$

Suy ra $\triangle SCD \sim \triangle KMD$ (c-g-c), kéo theo $\widehat{SDC} = \widehat{MDK}$. Từ đó, $\widehat{SDK} = \widehat{CDM} = 90^\circ$.



Bài toán 47. Cho tam giác ABC, có $AB < BC < CA$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Các điểm E, F lần lượt thuộc tia CA, AB sao cho $BF = BC = CE$. Kẻ BE cắt CF tại G.

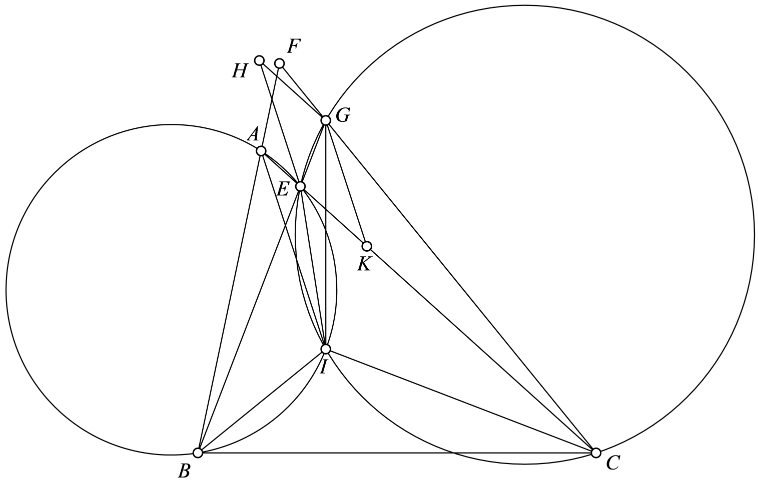
1. Chứng minh bốn điểm C, I, E, G cùng thuộc một đường tròn.

2. Gọi K thuộc AC sao cho $CK = AB$. Chứng minh tam giác GIE đồng dạng với tam giác GCK.

3. Trên nửa mặt phẳng bờ BG không chứa C, kẻ GH song song với AC và $GH = AF$. Chứng minh

$$\widehat{GHE} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}.$$

Lời giải



1. Ta có biến đổi góc như sau

$$\widehat{ICG} = \widehat{BCG} - \widehat{ICB} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{ABC} - \frac{1}{2}\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}.$$

Do đó, ta cần chứng minh $\widehat{BEI} = \dfrac{1}{2}\widehat{BAC}$ hay tứ giác $AEIB$ nội tiếp. Mặt khác, ta lại có

$$\widehat{IBE} = \widehat{CBE} - \widehat{IBC} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{ACB} - \frac{1}{2}\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}.$$

Nên tứ giác $AEIB$ nội tiếp, do đó ta dễ dàng suy ra tứ giác $CIEG$ nội tiếp.

2. Ta có $\widehat{AIB} = \widehat{AEB} = \widehat{GEC} = \widehat{CIG}$ và $\widehat{BAI} = \widehat{GCI}$ nên $\triangle IAB \sim \triangle ICG$ (g-g). Theo đó, ta được

$$\frac{IB}{AB} = \frac{IG}{CG} = \frac{IE}{CK} \text{ (do } IE = IB, AB = CK).$$

kết hợp với $\widehat{GIE} = \widehat{GCK}$, ta thu được điều phải chứng minh.

3. Ta sẽ đi chứng minh tứ giác GHEK là hình bình hành. Ta có

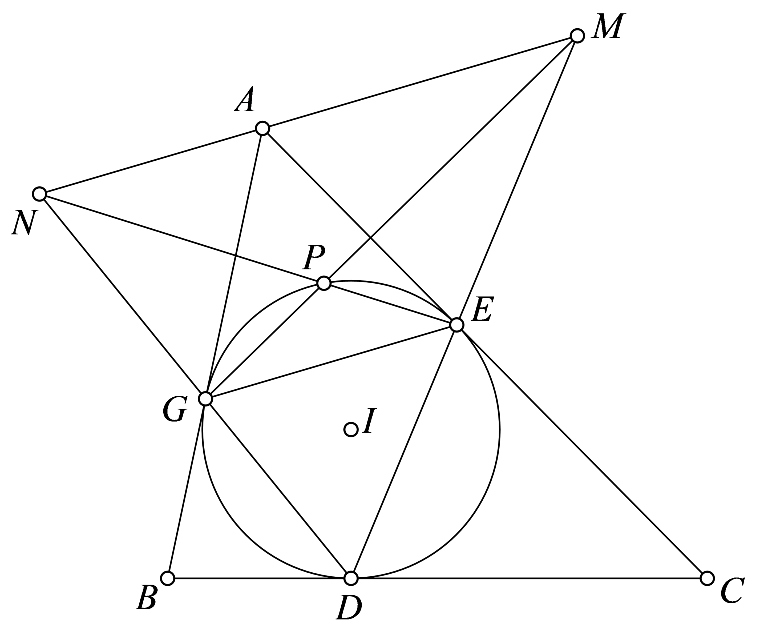
$$EK = CE - CK = BC - AB = BF - AB = AF = GH.$$

Kết hợp với $GH \parallel EK$ ta được tứ giác $GHEK$ là hình bình hành. Do đó $\widehat{GHE} = \widehat{GKE} = 180^\circ - \widehat{GEI} = \widehat{GCI} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$. Vậy nên ta có được điều phải chứng minh.

Bài toán 48. (CSP V2 2023) Cho tam giác ABC. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại các điểm D, E, G. Hai đường thẳng DE, DG lần lượt cắt đường phân giác ngoài của góc BAC tại M, N. Hai đường thẳng MG, NE cắt nhau tại P. Chứng minh

1. EG song song với MN.
2. Điểm P thuộc đường tròn (I).

Lời giải



1. Ta thấy $AI \perp MN$ và $AI \perp EG$ nên $MN \parallel EG$.
2. Gọi P' là giao điểm thứ hai của đường tròn (AGN) và (AEN). Ta có

$$\widehat{AP'N} = \widehat{AGN} = \widehat{BGD} = \widehat{GED} = \widehat{AME} = 180^o - \widehat{AP'E}.$$

Suy ra ba điểm N, P', E thẳng hàng. Tương tự, ta cũng chứng minh được ba điểm G, P', M thẳng hàng. Do đó $P \equiv P'$. Vậy nên ta có biến đổi góc như sau

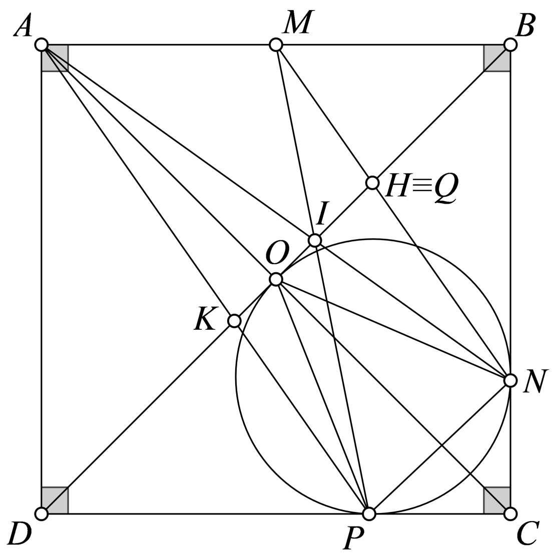
$$\widehat{PGD} + \widehat{PED} = \widehat{NAP} + \widehat{MAP} = 180^o.$$

Do đó tứ giác $GPED$ nội tiếp, hay $P \in (I)$.

Bài toán 49. (CSP V2 2015) Cho hình vuông $ABCD$ với tâm O. Gọi M là trung điểm AB, các điểm N,P thuộc BC,CD sao cho MN song song với AP. Chứng minh rằng

1. Tam giác BNO đồng dạng với tam giác DOP và $\widehat{NOP} = 45^o$.
2. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác NOP thuộc OC.
3. Ba đường thẳng BD, AN, PM đồng quy.

Lời giải



1. Đặt $AB = a$, ta có $AC = a\sqrt{2}$. Ta thấy được $\triangle MBN \sim \triangle PDA$ (g-g). Suy ra

$$\frac{BM}{DP} = \frac{BN}{AD} \Rightarrow DP.BN = \frac{a^2}{2}.$$

Kết hợp với $OB.OD = \dfrac{a^2}{2}$, ta được $DP.BN = OB.OD$. Hay $\dfrac{DP}{OD} = \dfrac{OB}{BN}$. Từ đây, suy ra được $\triangle DOP \sim \triangle BNO$ (c-g-c). Từ đó tính được $\widehat{NOP} = 45^o$.

2. Từ câu (1), ta có

$$\frac{OB}{DP} = \frac{ON}{DP} = \frac{OD}{DP} \text{ và } \widehat{NOP} = \widehat{ODP} = 45^o.$$

Từ đó, suy ra $\triangle DOP \sim \triangle ONP$ (c-g-c). Do đó $\widehat{DOP} = \widehat{ONP}$. Vậy nên OD là tiếp tuyến của đường tròn (ONP). Từ đây, ta dễ thấy tâm đường tròn (ONP) phải nằm trên OC.

3. Gọi giao điểm của BD với MN và AP lần lượt là Q và K. Theo tính chất của tia phân giác, ta có

$$\frac{QM}{QN} = \frac{BM}{BN}, \ \frac{KP}{KA} = \frac{DP}{AP} \Rightarrow \frac{QM}{QN} = \frac{KP}{KA}. \ (*)$$

Gọi MP cắt AN tại I, KI cắt MN tại H. Suy ra

$$\frac{HM}{KP} = \frac{HN}{AK} \Rightarrow \frac{HM}{HN} = \frac{KP}{KA}. \ (**)$$

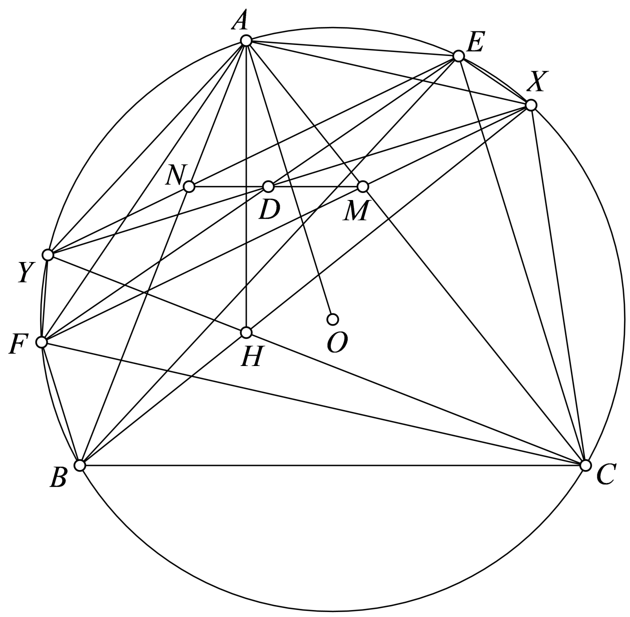
Từ $(*)$ và $(**)$, ta suy ra $H \equiv Q$. Ta suy ra được điều phải chứng minh.

Bài toán 50. (Vĩnh Phúc 2024) Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đương tròn (O) và $\widehat{BAC} = 60°$. Các đường thẳng qua hai điểm C và B song song với đường thẳng AO cắt đường tròn (O) lần lượt tại E và F $(E \neq C, F \neq B)$. Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Đường thẳng BH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là X $(X \neq B)$; đường thẳng CH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là Y $(Y \neq C)$.

1. Chứng minh rằng tam giác AEF đồng dạng với tam giác HBC.
2. Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng XF và AC; N là giao điểm của hai đường thẳng YE và AB. Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với đường thẳng BC.
3. Chứng minh rằng ba đường thẳng MN, XY và FE đồng quy.

Lời giải

Ta xét thế hình như sau



1. Ta có $\widehat{AFE} = \widehat{ACE} = \widehat{OAC} = 90° - \dfrac{1}{2}\widehat{AOC} = 90° - \widehat{ABC} = \widehat{HBC}$. Hoàn toàn tương tự, ta cũng có $\widehat{AEF} = \widehat{HBC}$. Từ đó suy ra hai tam giác AEF và HBC đồng dạng (g-g).
2. Vì $BF \parallel CE$ nên $EF = BC$. Mà hai tam giác AEF và HBC đồng dạng nên hai tam giác này cũng bằng nhau, suy ra $AE = HB$ và $AF = HC$. Mà $HB = BY$ và $HC = CX$ (tính chất của trực tâm) nên $AE = HB = BY$ và $AF = HC = CX$.
   Vì $AE = BY$ nên tứ giác $AEBY$ là hình thang cân, suy ra $\dfrac{AN}{NB} = \dfrac{AY}{BE}$. Chứng minh tương tự, ta cũng có $\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{AX}{CF}$. Mặt khác, ta lại có $AY = AX = AH$ (theo tính chất trực của trực tâm) và $BE = CF$ (do tứ giác $BFCE$ là hình thang cân) nên $\dfrac{AN}{NB} = \dfrac{AM}{MC}$. Suy ra $MN \parallel BC$.
3. Tứ giác $AXCF$ là hình thang cân nên

$$\widehat{FCY} = \widehat{FCA} - \widehat{YCA} = \widehat{CAX} - \widehat{YCA} = \widehat{HBC} - \widehat{YCA}.$$

   Mà $\widehat{YCA} = 90° - \widehat{BAC} = 90° - \dfrac{1}{2}\widehat{BOC} = \widehat{OBC}$ nên

$$\widehat{FCY} = \widehat{HBC} - \widehat{OBC} = \widehat{HBO}.$$

   Chứng minh tương tự, ta cũng có $\widehat{XCE} = \widehat{HCO}$. Mặt khác, ta lại có

$$\widehat{BHC} = 180° - \widehat{BAC} = 120° = \widehat{BOC}.$$

Nên tứ giác $BHOC$ nội tiếp. Vì thế $\widehat{HCO} = \widehat{HBO}$. Từ đây, ta suy ra

$$\widehat{FCY} = \widehat{HBO} = \widehat{HCO} = \widehat{XCE}.$$

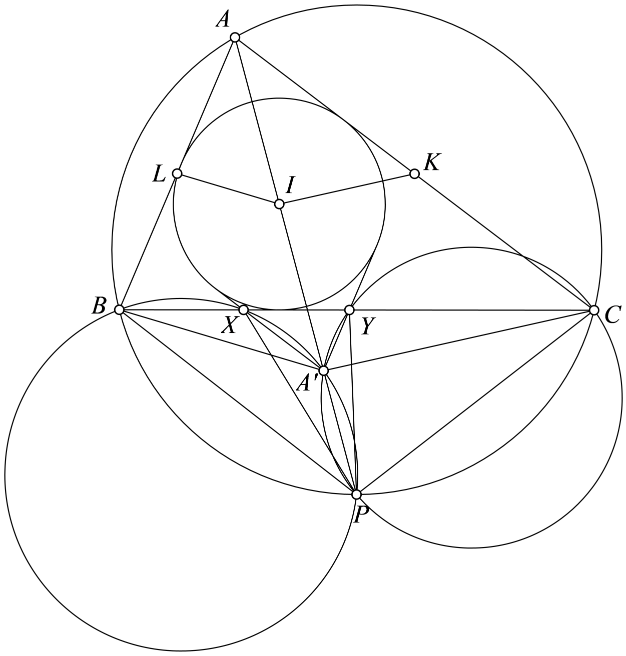
Như vậy $XE = FY$. Từ đó $YE \parallel FX$. Bây giờ, sử dụng định lý Thales, ta có

$$\frac{MX}{MF} = \frac{AX}{FC} = \frac{AY}{BE} = \frac{YN}{NE}.$$

Kết hợp với $YE \parallel FX$, ta dễ dàng suy ra ba đường thẳng MN, XY, FE đồng quy.

Bài toán 51. (IMO 2024) Cho tam giác ABC thoả mãn $AB < AC < BC$. Tâm đường tròn nội tiếp và đường tròn nội tiếp của tam giác ABC lần lượt là I và ω. X là một điểm nằm trên BC sao cho đường thẳng đi qua X song song với AC là tiếp tuyến của (ω). Tương tự, Y là một điểm nằm trên BC sao cho đường thẳng đi qua Y song song với AB là tiếp tuyến của (ω). Gọi giao điểm thứ hai của AI và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là điểm P khác A. Gọi trung điểm của AC, AB lần lượt là K, L. Chứng minh rằng $\widehat{KIL} + \widehat{YPX} = 180°$.

Lời giải



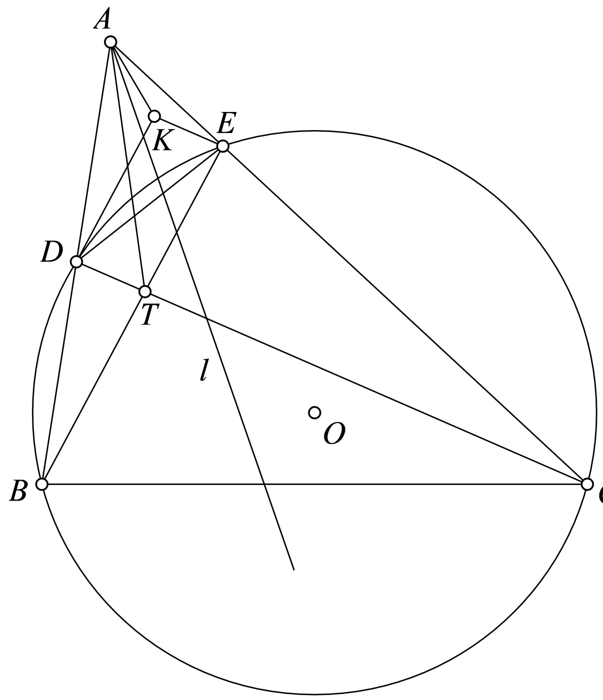
Lấy điểm A' đối xứng với A qua I. Dễ thấy, $A'X$ và $A'Y$ là hai tiếp tuyến của đường tròn (ω). Ta có kết quả quen thuộc $PB = PC = PI$, và vì $\widehat{BAP} = \widehat{PAC} > 30°$ nên $PB = PC$ lớn hơn bán kính đường tròn (ABC). Do đó, $PI > \frac{1}{2}AP > AI$. Suy ra A' nằm trên đoạn thẳng AP.
Ta có $\widehat{APB} = \widehat{ACB} = \widehat{CXA}$ nên tứ giác $BXA'P$ nội tiếp. Tương tự, ta có tứ giác $PA'YC$ nội tiếp. Mặt khác, ta có $IL \parallel A'B, IK \parallel A'C$ nên $\widehat{KIL} = \widehat{BA'C}$. Vậy nên

$$\widehat{KIL} + \widehat{YPX} = \widehat{BA'C} + (\widehat{YPA'} + \widehat{A'PX}) = \widehat{CA'B} + \widehat{A'BX} + \widehat{A'CY} = 180°.$$

Do đó, ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 52. Cho tam giác ABC nhọn không cân có l là phân giác của $\widehat{BAC}$. Một đường tròn tâm O thay đổi đi qua B, C và cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự ở D, E. Gọi T là giao điểm của BE và CD. Dựng hình bình hành $DTEK$. Chứng minh rằng AT, AK đối xứng nhau qua l.

Lời giải



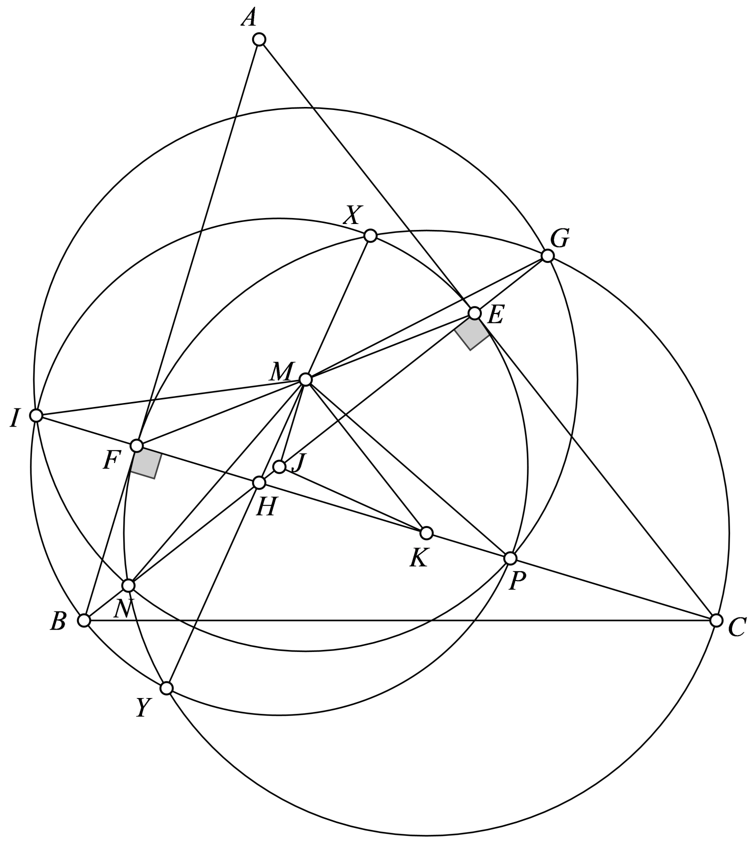
Ta có $\triangle AED \sim \triangle ABC$ (g-g) nên $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{DE}{BC} = \dfrac{TD}{TB} = \dfrac{KE}{BC}$. Kết hợp với $\widehat{ABT} = \widehat{ACT} = \widehat{AEK}$, ta được $\triangle ABT \sim \triangle AEK$ (c-g-c). Vậy nên $\widehat{BAT} = \widehat{EAK}$, hay AT, AK đối xứng nhau qua l.

4 Bài tập tổng hợp

Bài toán 53. (Đồng Tháp TST 2024) Cho tam giác nhọn, không cân ABC có các đường cao BE, CF (với $E \in AC, F \in AB$). Đường tròn đường kính BE và đường tròn đường kính CF cắt nhau tại các điểm X, Y. Đoạn thẳng BE cắt đường tròn đường kính CF tại điểm N. Đoạn thẳng CF cắt đường tròn đường kính BE tại điểm P. Các đường thẳng XY và EF cắt nhau tại M. Chứng minh rằng

1. Các đường BE, CF, XY đồng quy.
2. $MN = MP$.

Lời giải

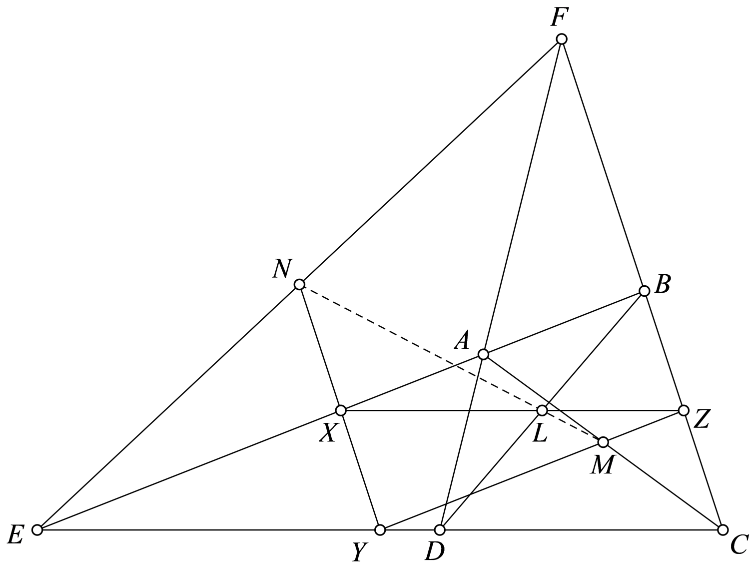


1. Gọi giao điểm thứ hai của YH và (BE) là X'. Theo phương tích, ta có
$$HY.HX' = HB.HE = HC.HF.$$
Do đó, 4 điểm C, F, Y, X' đồng viên. Nói cách khác, $X' = (BE) \cap (CF)$. Do đó $X \equiv X'$, ta có điều phải chứng minh.

2. Gọi trung điểm của BE, CF, EF lần lượt là J, K, M'. Dễ thấy H là trực tâm của tam giác M', I, K. Do đó, $M'H \perp JK$ (1). Mặt khác, XY là dây cung chung của (J) và (K) nên $JK \perp XY$ (2). Từ (1) và (2) suy ra 3 điểm X, M', Y thẳng hàng, hay $M \equiv M'$.
Gọi giao điểm thứ hai của CP và (J) là I, G là giao điểm thứ hai của BN và (K). Ta có $MJ \parallel BF \perp IK$ nên $MI = MP$ hay M nằm trên đường trung trực của IP (3). Tương tự, ta cũng có M nằm trên đường trung trực của GN (4). Ta lại có
$$HN.HG = HC.HF = HB.HE = HP.HI.$$
Do đó, tứ giác $GPNI$ nội tiếp (5).
Từ (3),(4),(5) suy ra M là tâm của $(GPNI)$. Vậy nên $MN = MP$.

Bài toán 54. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của AB và CD, của AD và BC. Gọi M, N, L lần lượt là trung điểm của AC, EF và BD. Chứng minh rằng ba điểm M, N, L thẳng hàng. *(Đường thẳng Gauss)*

Lời giải



Gọi X, Y, Z lần lượt là trung điểm của BE, EC, BC. Khi đó dễ thấy $(N, Y, X), (X, L, Z), (Z, M, Y)$ là các bộ điểm thẳng hàng. Mặt khác, theo định lý Thales, ta có $\dfrac{NX}{NY} = \dfrac{FB}{FC}, \dfrac{MY}{MZ} = \dfrac{AE}{AB}, \dfrac{LZ}{LX} = \dfrac{DC}{DE}$. Do đó, ta có

$$\frac{NX}{NY} \cdot \frac{MY}{MZ} \cdot \frac{LZ}{LX} = \frac{FB}{FC} \cdot \frac{AE}{AB} \cdot \frac{DC}{DE}.$$

Mặt khác, áp dụng định lý Menelaus cho tam giác EBC với cát tuyến FAD, ta được

$$\frac{FB}{FC} \cdot \frac{AE}{AB} \cdot \frac{DC}{DE} = 1 \Rightarrow \frac{NX}{NY} \cdot \frac{MY}{MZ} \cdot \frac{LZ}{LX} = 1$$

Theo định lý Menelaus, ba điểm M, N, L là ba điểm thẳng hàng.

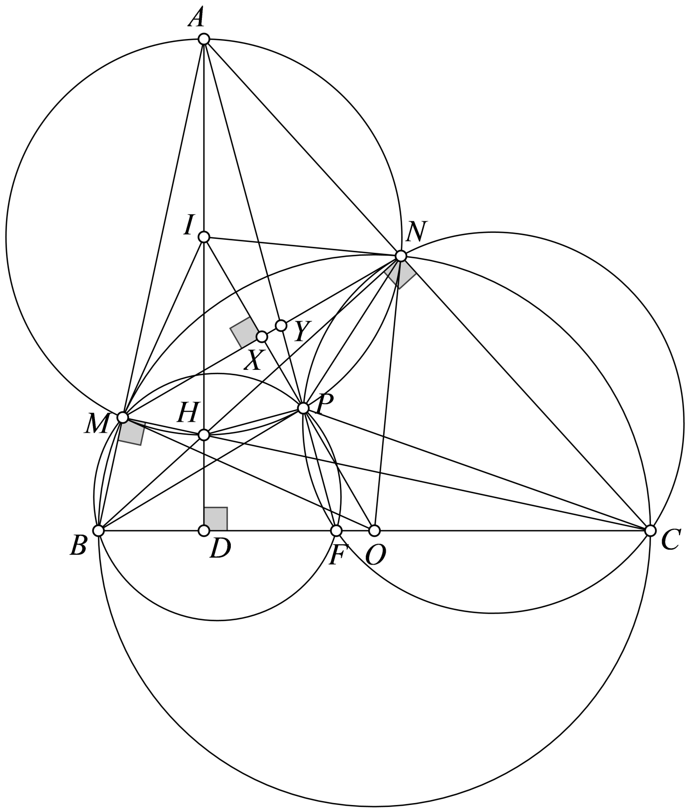
Bài toán 55. (IMO 2004) Cho tam giác ABC nhọn, không cân ($AB < AC$), đường tròn đường kính BC cắt AB, AC tại M và N. Gọi O là trung điểm của BC. Đường phân giác $\widehat{BAC}$ và $\widehat{MON}$ cắt nhau tại P. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp tam giác PMB và PNC giao nhau trên cạnh BC.

Lời giải

Gọi F là giao điểm của AP và BC, H là trực tâm của tam giác ABC, I là trung điểm của AH và AH cắt BC tại D. Dễ thấy ba điểm O, P, I thẳng hàng. Gọi giao điểm của AF và MN là Y, giao điểm của OI và MN là X. Ta cần đi chứng minh tứ giác $PFCN$ là tứ giác nội tiếp. Điều này tương đương với việc chứng minh 5 điểm A, M, H, P, N cùng thuộc một đường tròn. Thật vậy, ta có

$$\widehat{MYF} = \widehat{AYN} = 180^\circ - \widehat{YAN} - \widehat{YNA} = 180^\circ - \frac{1}{2}\widehat{BAC} - \widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} + \widehat{ACB} = \widehat{FAC} + \widehat{ACB} = \widehat{AFB}.$$

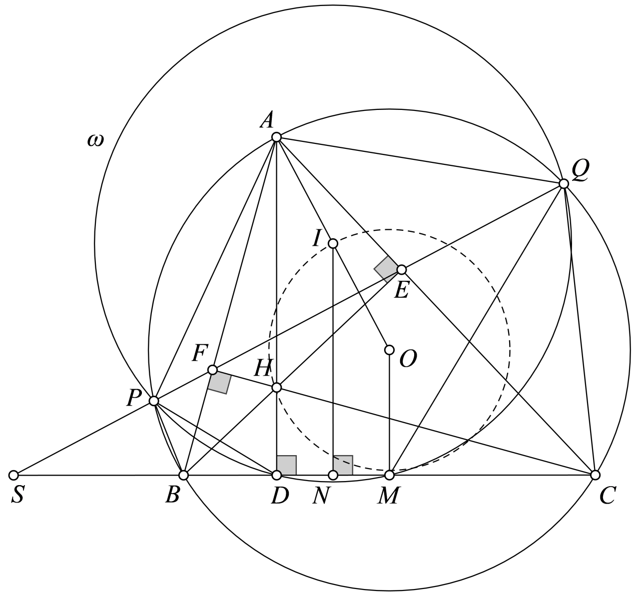
Suy ra $\widehat{IAP} = \widehat{IPA}$, hay tam giác IAP cân tại I. Vậy nên $IA = IP$. Do đó, P thuộc đường tròn $(AMHN)$. Từ điều này, ta dễ dàng suy ra điều phải chứng minh.



Bài toán 56. (CSP V2 2024) Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung BC cố định không đi qua tâm O. A là một điểm di động trên đường tròn $(O;R)$ sao cho tam giác ABC nhọn và $AB \neq AC$. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H. Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại hai điểm P và Q sao cho F nằm giữa P và E. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh rằng

1. $AP^2 = AQ^2 = AH.AD$.
2. Bốn điểm P, Q, M, D cùng thuộc đường tròn (ω).
3. Tâm I của đường tròn (ω) luôn thuộc một đường tròn cố định.

Lời giải



1. Ta có kết quả quen thuộc $AO \perp EF$ nên $AO \perp PQ$. Từ đó, ta suy ra A là điểm chính giữa cung PQ, vậy

nên $AP = AQ$. Mặt khác, ta có $\widehat{APQ} = \widehat{AQP} = \widehat{ABP}$ nên ta suy ra $AP^2 = AF.AB = AH.AD$. Từ đây ta suy ra được điều phải chứng minh.

2. Gọi PQ giao với BC tại điểm S. Ta có

$$SP.SQ = SB.SC = SF.SE = SD.SM.$$

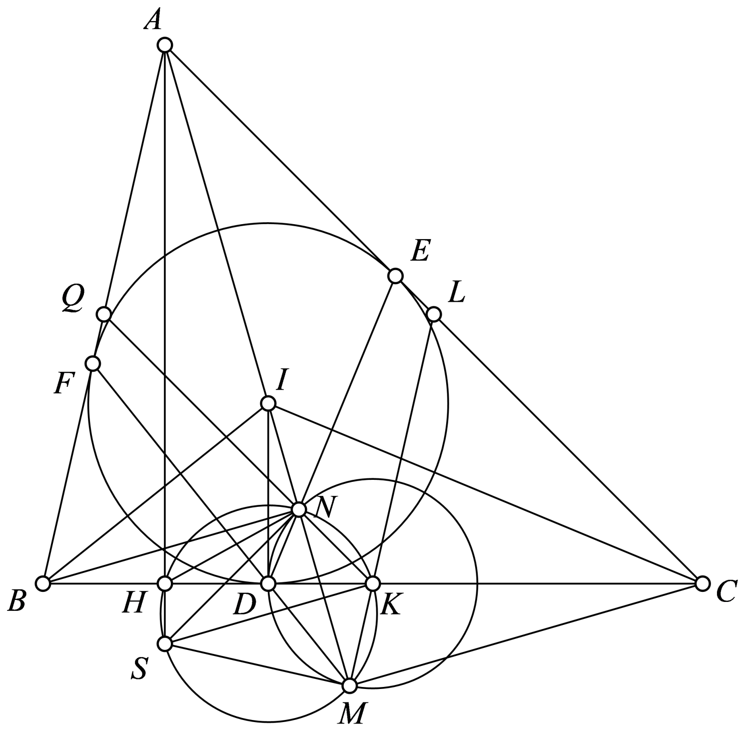
Do đó, tứ giác $PQMD$ nội tiếp đường tròn (ω).

3. Ta có I là tâm của đường tròn (ω) nên I thuộc đường trung trực của PQ. Kết hợp với OA là trung trực của PQ, ta được ba điểm O, A, I thẳng hàng. Kẻ $IN \perp BC = \{N\}$, suy ra N là trung điểm của DM. Trong hình thang $OADM$ có N là trung điểm của DM và $OM \parallel IN \parallel AD$ nên I là trung điểm của OA. Do đó $OI = \dfrac{OA}{2} = \dfrac{R}{2}$. (cố định)
Vậy $I \in \left(O; \dfrac{R}{2}\right)$.

Bài toán 57. (Hà Nội 2022) Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với ba cạnh BC, CA và AB lần lượt tại ba điểm D, E và F.

1. Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng AI và DF. Chứng minh rằng CM vuông góc với AI.
2. Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng AI và DE. Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh rằng tam giác KMN là tam giác cân.
3. Các tiếp tuyến tại các điểm M và N của đường tròn (K, KM) cắt nhau tại điểm S. Chứng minh rằng đường thẳng AS song song với đường thẳng ID.

Lời giải



1. Ta có biến đổi góc như sau

$$\widehat{IMD} = \widehat{BFD} - \widehat{BAM} = 90^o - \frac{1}{2}\widehat{ABC} - \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{ACB} = \widehat{ICD}.$$

Do đó, tứ giác $IDMC$ nội tiếp, vậy nên $\widehat{IDC} = \widehat{IMC} = 90^o$. Từ đây, ta suy ra được điều phải chứng minh.

2. Gọi L là trung điểm của AC, khi đó tam giác LAM cân tại L. Do đó

$$\widehat{LMA} = \widehat{LAM} = \widehat{BAM}.$$

Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $AB \parallel ML$. Ta lại có KL là đường trung bình của tam giác ABC nên $KL \parallel AB$. Từ đây, ta được ba điểm M, K, L thẳng hàng. Vậy nên

$$\widehat{KMN} = \widehat{MAL} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}. \ (*)$$

Mặt khác, tương tự câu (1), ta cũng chứng minh được $BN \perp AI$. Chứng minh tương tự như trên, ta được ba điểm K, N, Q thẳng hàng với Q là trung điểm của AB. Do đó, ta cũng có

$$\widehat{KNM} = \widehat{QNM} = \widehat{QAN} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}. \ (**)$$

Từ $(*)$ và $(**)$, ta được tam giác KMN cân tại K.

3. Gọi H là hình chiếu của A trên BC, ta được tứ giác $AHMC$ là tứ giác nội tiếp. Ta được

$$\widehat{MHC} = \widehat{MAC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}.$$

Mặt khác, ta có

$$\widehat{MSK} = \widehat{KMN} = \widehat{MAC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}.$$

Do đó ta được tứ giác $HSMK$ nội tiếp. Ngoài ra, ta có S là giao điểm của hai tiếp tuyến tại M và N của (K, KM) nên tứ giác $SKMN$ nội tiếp. Từ đây, ta có năm điểm H, S, M, K, N cùng thuộc một đường tròn. Suy ra tứ giác $NHSK$ nội tiếp. Vậy nên ta có biến đổi góc như sau

$$\widehat{NHS} = 180^o - \widehat{NKS} = 180^o - \frac{1}{2}\widehat{NKM} = 90^o + \widehat{KNM} = 90^o + \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 90^o + \widehat{BAN} = 180^o - \widehat{ABN} = 180^o - \widehat{AHN}.$$

Do đó, ba điểm A, H, S thẳng hàng. Ta thu được điều phải chứng minh.

Bài toán 58. (Bắc Ninh 2022) Cho đường tròn (O) có đường kính AB. Lấy điểm C thuộc đoạn AO (C khác A, O). Vẽ đường tròn (I) đường kính BC. Vẽ tiếp tuyến AD và cát tuyến AEF với đường tròn (I) (E nằm giữa A, F) sao cho tia AO nằm giữa 2 tia AD, AE. Đường thẳng vuông góc với AB vẽ từ C cắt đường tròn (O) tại 2 điểm, gọi một trong hai giao điểm là N sao cho N và D thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB. Gọi S là giao điểm của hai đường thẳng DI và NB. Gọi R là giao DN và AS. Gọi J là trung điểm SD.

1. Chứng minh tam giác AND cân.

2. Gọi L, T lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác SBC và SEF. Chứng minh ba điểm J, L, T thẳng hàng

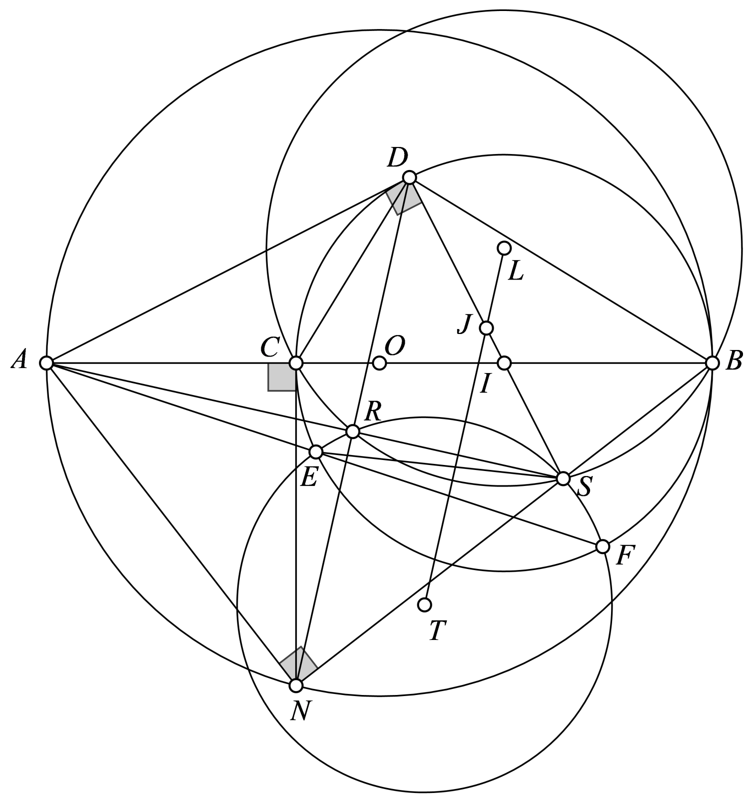
Lời giải 1.

Vì AD là tiếp tuyến của (I) nên ta có kết quả quen thuộc $AD^2 = AC.AB$ (1). Mặt khác, ta có tam giác ANB vuông tại N nên theo hệ thức lượng, ta có $AN^2 = AC.AB$ (2). Từ (1) và (2), ta suy ra được điều phải chứng minh.

2. Ta có $\triangle ADS = \triangle ANS$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông) nên $SD = SN$. Suy ra AS là trung trực của đoạn ND. Do đó, $AS \perp ND = \{R\}$. Mà J là trung điểm của DS nên J thuộc trung trực của đoạn RS (3). Mặt khác, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có

$$AR.AS = AD^2 = AC.AB.$$

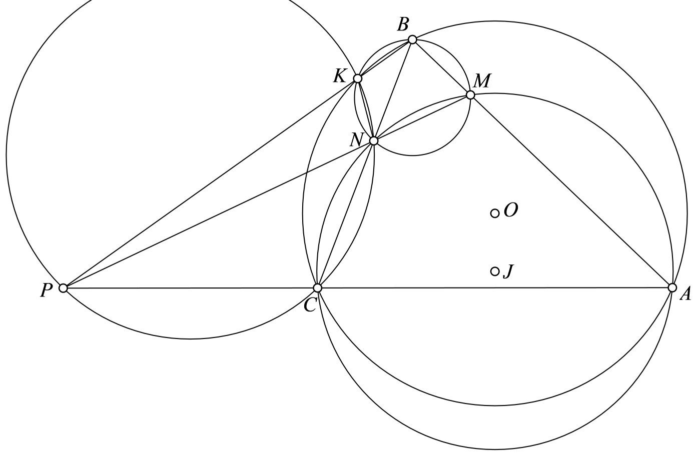
Do đó, tứ giác $CRSB$ nội tiếp, hay $R \in (SCB)$. Do đó, L cũng thuộc trung trực của đoạn RS (4). Tương tự, ta cũng có T thuộc trung trực của đoạn RS (5). Từ (3), (4), (5), ta suy ra được điều phải chứng minh.



Bài toán 59. (CSP V2 2020) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có $AB > BC$. Một đường tròn đi qua hai điểm A, C của tam giác ABC lần lượt cắt các cạnh AB, BC tại K, N (K, N khác các đỉnh của tam giác ABC). Giả sử đường tròn (O) và đường tròn ngoại tiếp của tam giác BKN cắt nhau tại điểm thứ hai là M (M khác B). Chứng minh rằng

1. Ba đường thẳng BM, KN, AC đồng quy tại một điểm P.
2. Tứ giác $MNCP$ nội tiếp.
3. $BM^2 - PM^2 = BK.BA - PC.PA$.

Lời giải



1. Gọi P là giao điểm của NK và AC, M' là giao điểm thứ hai của PB và đường tròn (O). Khi đó, ta có

$$PN.PK = PC.PA = PM.PB \Rightarrow \text{Tứ giác } M'BKN \text{ nội tiếp.}$$

Nói cách khác, M' là giao điểm thứ hai của đường tròn (BNK) và đường tròn (O). Vậy nên, ta được $M \equiv M'$, ta có được điều phải chứng minh.

2. Chú ý rằng các tứ giác $BMNK, CNKA$ nội tiếp nên ta có biến đổi góc như sau

$$\widehat{BMN} = 180^o - \widehat{BKN} = \widehat{AKN} = 180^o - \widehat{NCA} = \widehat{NCP}.$$

Do đó, tứ giác $MNCP$ là tứ giác nội tiếp.

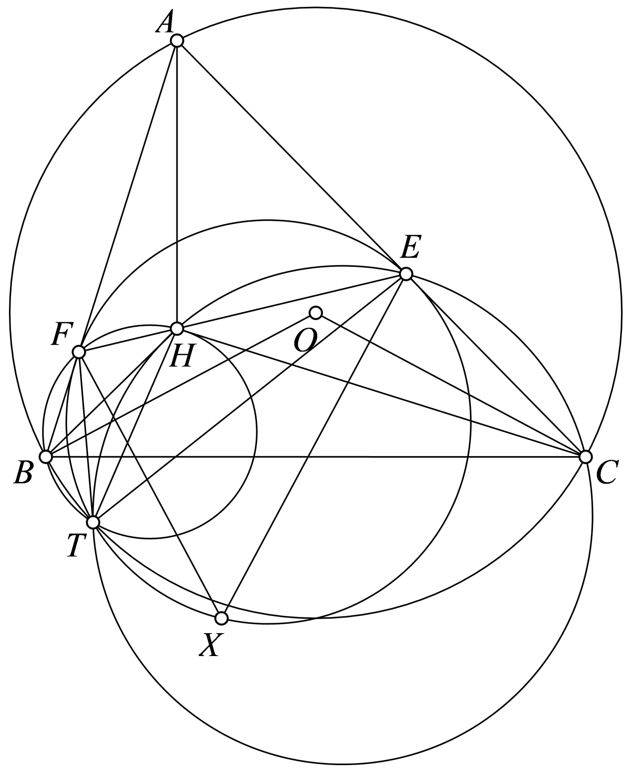
3. Từ các tứ giác $ACNK, MNCP$ nội tiếp, ta được $BK.BA = BN.BC = BM.BP$. Từ tứ giác nội tiếp $ABMC$, ta suy ra $PC.PA = PM.PB$. Vì vậy, ta thu được

$$BK.BA - PC.PA = BM.BP - PM.PB = BP(BM - PM) = (BM - PM)(BM + PM) = BM^2 - PM^2.$$

Do đó, ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 60. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H. Một đường thẳng bất kì qua H cắt AC, AB lần lượt tại E, F. Đường thẳng qua E, F lần lượt vuông góc với OC, OB cắt nhau tại X. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác BFH, CEH, EFX và đường tròn (O) đồng quy tại một điểm.

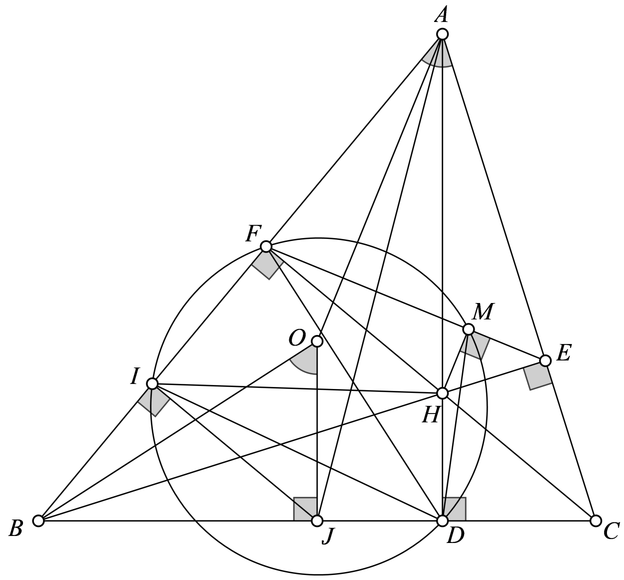
Lời giải



Gọi T là giao điểm của (BFH) và (CEH). Ta có $\widehat{FTE} = \widehat{FTH} + \widehat{ETH} = \widehat{FBH} + \widehat{ECH} = \widehat{BHC} - \widehat{BAC} = \widehat{EXF}$. Suy ra $T \in (EXF)$. Đồng thời $\widehat{BTC} = \widehat{BTH} + \widehat{CTH} = \widehat{AFH} + \widehat{AEH} = 180° - \widehat{BAC}$ nên $T \in (O)$.

Bài toán 61. (Hà Nội TST 2022) Cho tam giác ABC nhọn $(AB > AC)$ có ba đường cao AD, BE, CF đồng quy tại điểm H. Gọi M là hình chiếu vuông góc của điểm H trên đường thẳng EF. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác DFM đi qua trung điểm của đoạn BF.

Lời giải



Gọi I, J lần lượt là trung điểm của đoạn BF và BC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta có $OA \parallel MH(\perp EF), OJ \parallel HD(\perp BC)$ nên $\widehat{AOJ} = \widehat{DHM}$. Mặt khác, ta có các cặp tam giác đồng dạng sau: $\triangle HME \sim \triangle HDC$ (g-g), $\triangle HEF \sim \triangle HCB$ (g-g) và $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ (g-g) nên ta có biến đổi tỉ số như sau

$$\frac{MH}{MD} = \frac{HE}{HC} = \frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AC} = \cos\widehat{FAC} = \cos\widehat{BOJ} = \frac{OJ}{OB} = \frac{OJ}{OA}.$$

Do đó, ta thu được $\triangle OJA \sim \triangle HMD$ (c-g-c). Vậy nên $\widehat{HMD} = \widehat{OJA} = \widehat{JAD}$. Suy ra $\widehat{AJD} = \widehat{DME}$. Mà tứ giác $AIJD$ nội tiếp nên $\widehat{AJD} = \widehat{AID}$. Ta thu được $\widehat{DME} = \widehat{AID}$. Do đó, tứ giác $IFMD$ nội tiếp, ta có được điều phải chứng minh.

Bài toán 62. (HSG 10 HSGS 2024) Cho tam giác ABC nhọn có tâm đường tròn nội tiếp là I. Gọi M là trung điểm của BC. Lấy N đối xứng với I qua M. Lấy P là một điểm bất kỳ nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{BPC} = 180° - \widehat{BAC}$. Gọi X, Y, Z lần lượt là hình chiếu của N lên các đường thẳng BC, CP, PB. Gọi K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác XYZ.

1. Chứng minh rằng $\widehat{YKZ} = \widehat{YPZ}$.

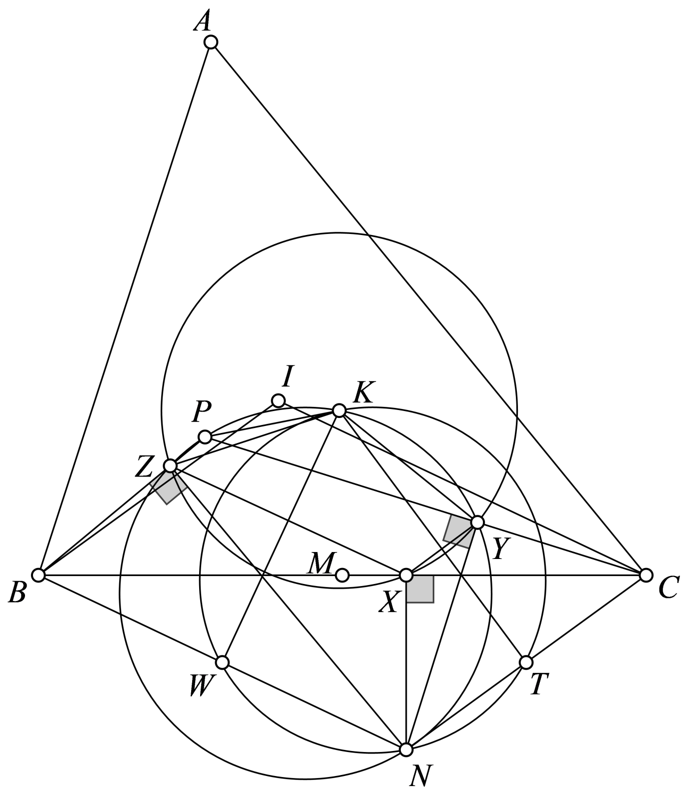
2. Chứng minh rằng K luôn nằm trên một đường tròn cố định khi P di chuyển.

Lời giải 1.

Ta có các tứ giác $BZXN, NXYC, NZPY$ nội tiếp và hình bình hành $BICN$ nên ta có biến đổi góc như sau

$$\widehat{YKZ} = 2(180° - \widehat{ZXY}) = 2(\widehat{BXZ} + \widehat{CXY}) = 2(\widehat{BNZ} + \widehat{CNY}) = 2(\widehat{BNC} - \widehat{ZNY}) =$$
$$2(\widehat{BIC} - \widehat{BAC}) = 180° - \widehat{BAC} = \widehat{ZPY}.$$

2. Gọi W, T lần lượt là trung điểm của đoạn BN và NC. Suy ra W, T cũng lần lượt là tâm của $(BZXN)$ và $(NXYC)$. Do đó, $KW \perp XZ$ và $KT \perp XY$. Suy ra $\widehat{WKT} = 180° - \widehat{ZXY} = 90° - \dfrac{1}{2}\widehat{BAC}$. Mặt khác, ta lại có $\widehat{WNT} = \widehat{BIC} = 90° + \dfrac{1}{2}\widehat{BAC}$ nên $\widehat{WKT} + \widehat{WNT} = 180°$. Vậy nên $K \in (WNT)$ là một đường tròn cố định.



Bài toán 63. (Thi thử HSGS V2 đợt 1 2024) Cho tam giác ABC nhọn có đường cao BE, CF cắt nhau tại H (E, F lần lượt nằm trên cạnh CA, AB). Gọi M là trung điểm BC. Gọi K là hình chiếu của H trên AM.

1. Chứng minh rằng bốn điểm B, C, K, H cùng thuộc một đường tròn.

2. Gọi (J) và (L) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp các tam giác MBF và MCE. Chứng minh rằng (J) và (L) cùng đi qua K.

3. Gọi P là điểm đối xứng với A qua BC. Chứng minh rằng phân giác của $\widehat{BPC}$ và $\widehat{JML}$ đồng quy với JL.

Lời giải

1. Lấy D đối xứng A qua M. Dễ thấy tứ giác $ABDC$ là hình bình hành do đó $CD \parallel AB \perp CH$, suy ra C nằm trên đường tròn đường kính HD. Tương tự B cũng nằm trên đường tròn đường kính HD. Từ giả thiết $HK \perp AM$ nên K cũng nằm trên đường tròn đường kính HD. Vậy các điểm B, C, K cùng nằm trên đường tròn đường kính HD.

2. Gọi giao điểm của AH và BC là N. Từ $\widehat{HKM} = 90°$ dễ thấy tứ giác $HKMN$ nội tiếp. Đồng thời tứ giác $HECN$ nội tiếp, ta suy ra

$$AK.AM = AH.AN = AE.AC.$$

Từ đó tứ giác $KMCE$ nội tiếp. Tương tự tứ giác $KMBF$ nội tiếp.

3. Gọi S là trung điểm cung BC chứa H của (BHC). Gọi I là giao điểm của phân giác $\widehat{JML}$và JL. Ta sẽ chứng minh P, I, S thẳng hàng thì PI chính là tia phân giác $\widehat{BPC}$. Thật vậy, từ các tam giác MBF và MCE cân tại M dễ thấy $MJ \perp BF \perp HC$ và $ML \perp CE \perp HB$. Ta suy ra phân giác $\widehat{JML}$ và phân giác ngoài $\widehat{BHC}$ vuông góc, nói cách khác $MI \perp HS$. Kết hợp với $HK \perp MK$, ta suy ra

$$\widehat{IMK} = \widehat{KHS} = \widehat{KHT} - 90° = (180° - \widehat{KST}) - 90° = 90° - \widehat{KSM},$$

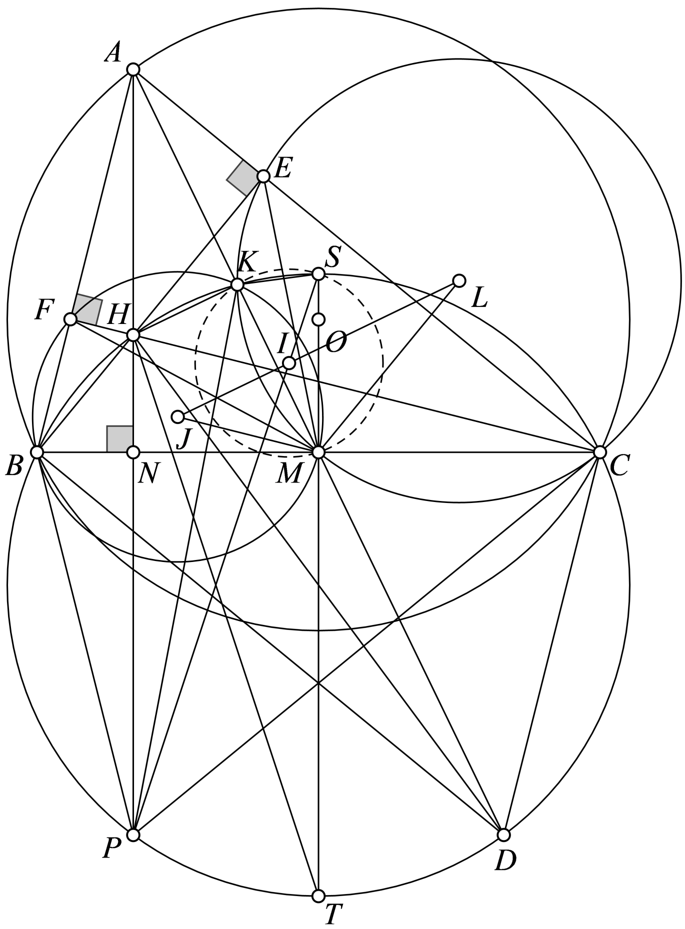
ở đó ST là đường kính của (BHC). Vì tam giác IKM cân tại I nên

$$\widehat{KIM} = 180^\circ - 2\widehat{IMK} = 2\widehat{KSM}.$$

Từ đây kết hợp với $IK = IM$, ta suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác MKS. Từ đó với các chú ý $MI \parallel HT$ (do cùng vuông góc HS) và $HP \parallel ST$, ta có biến đổi góc như sau

$$\widehat{IST} = \widehat{ISM} = \widehat{IMS} = \widehat{HTS} = \widehat{PHT} = \widehat{PST}.$$

Từ đó S, I, P thẳng hàng. Ta hoàn tất chứng minh.

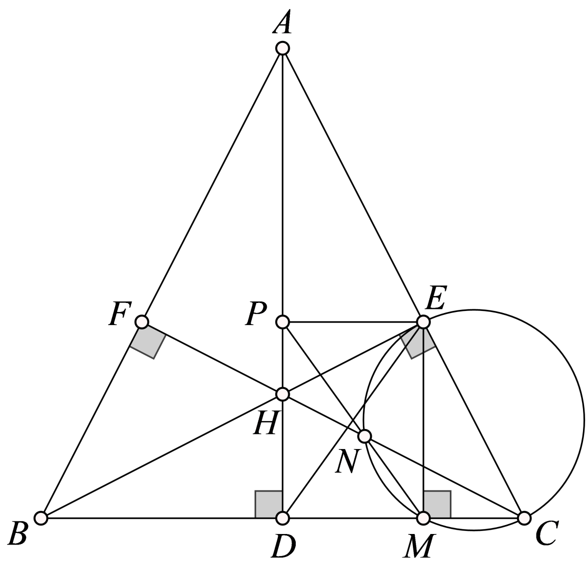


Bài toán 64. (Crux M230 2024) Cho tam giác ABC cân tại A với ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Đường tròn đường kính CE cắt BC và CF lần lượt tại M và N. Đường thẳng MN cắt AD tại P. Chứng minh rằng $DP = ME$.

Lời giải

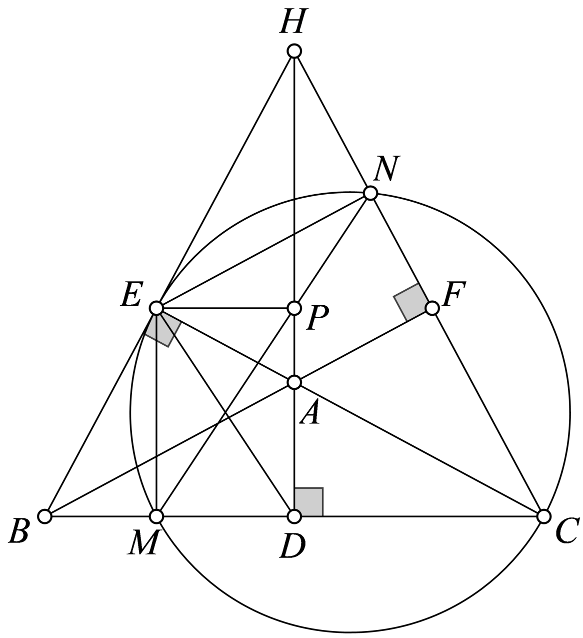
Nếu tam giác ABC vuông cân tại A thì các điểm H, E, F, N, P đều trùng với điểm A. Do đó, hai đoạn thẳng DP và ME trùng nhau. Vậy $DP = ME$.

- Nếu $\widehat{BAC} < 90^\circ$, ta có hình sau



Ta có $\widehat{PDE} = \widehat{HCE} = \widehat{PME}$. Do đó, tứ giác $PEMD$ nội tiếp. Mà $\widehat{PDM} = \widehat{DME} = 90^\circ$ nên tứ giác $PEMD$ là hình chữ nhật. Vậy $DP = ME$.

- Nếu $\widehat{BAC} > 90^\circ$. Ta có $\widehat{DPM} = \widehat{PME} = \widehat{NCE} = \widehat{DPE} = \widehat{DEM}$. Mà $\widehat{PDM} = \widehat{EMD} = 90^\circ$ nên tứ giác $PEMD$ là hình chữ nhật. Do đó, $DP = ME$.



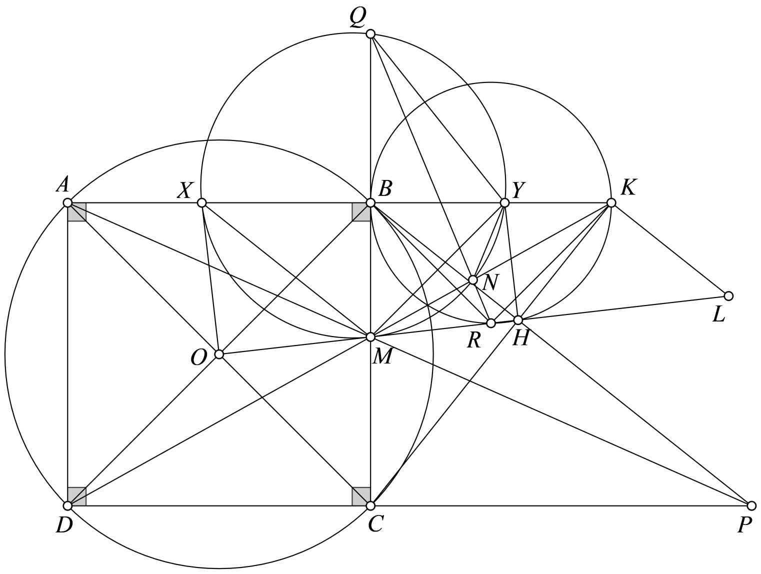
Bài toán 65. (Hà Nội 2024) Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O), điểm M nằm giữa hai điểm B và C. Hai đường thẳng AM và DC cắt nhau tại P. Hai đường thẳng DM và AB cắt nhau tại K.

1. Chứng minh tam giác BCK đồng dạng với tam giác CPB.

2. Hai đường thẳng BP và CK cắt nhau tại H. Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt đường thẳng MH tại R. Chứng minh tam giác BRK là tam giác vuông cân.

3. Các đường thẳng vuông góc với OH kẻ từ O và H, cắt đường thẳng AB lần lượt tại X và Y. Lấy điểm Q thuộc tia đối của tia BC sao cho $BQ = CM$. Chứng minh hai đường thẳng QR, DK cắt nhau tại một điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác MXY.

Lời giải



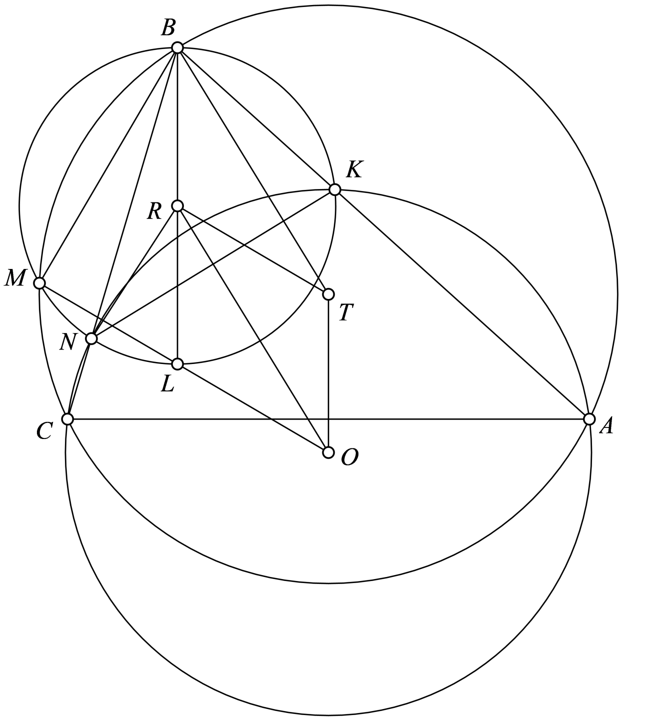
1. Do tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $AB = BC = CD = AD$ và $AB \parallel CD$. Ta lại có $\dfrac{BK}{BC} = \dfrac{BK}{CD} = \dfrac{MB}{MC} = \dfrac{AB}{CP} = \dfrac{BC}{CP}$ nên $\triangle BCK \sim \triangle CPB$ (c-g-c).

2. Từ câu (1.) suy ra $\widehat{BCK} = \widehat{BPC}$ nên $CK \perp BP = \{H\}$. Để ý rằng $\dfrac{HB}{HC} = \dfrac{CB}{CP} = \dfrac{MB}{MC}$ nên HM là tia phân giác của $\widehat{BHC}$. Từ đó $\widehat{MHC} = 45^\circ = \widehat{RBK}$ nên tứ giác $BRHK$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{RBK} = \widehat{RHC} = 45^\circ$ và $\widehat{RKB} = \widehat{RHB} = 45^\circ$ nên tam giác BRK vuông cân.

3. Tứ giác $BHCO$ nội tiếp với $OB = OC$ nên HO là tia phân giác của $\widehat{BHC}$, suy ra H, M, O thẳng hàng. Gọi N là giao điểm của DK và RQ. Do tứ giác $BMOX$ nội tiếp và BO là tia phân giác $\widehat{MBX}$nên $OM = OX$. Tương tự, tứ giác $BMHY$ nội tiếp có HB là tia phân giác $\widehat{MHY}$ nên $BM = BY$. Chú ý rằng $\triangle BOX = \triangle COM$ (c-g-c) nên $CM = BX = BQ$. Do đó tứ giác $MYQX$ nội tiếp. Qua K kẻ đường thẳng vuông góc với KH, cắt MH tại L thì tam giác KHL vuông cân tại K nên $KH = KL$. Ta có $\widehat{KRL} = \widehat{KBH} = \widehat{KCB}$ nên $\triangle KRL \sim \triangle MCH$ (g-g), suy ra
$$\frac{KR}{KL} = \frac{MC}{MH} \Rightarrow \frac{BR}{KH} = \frac{BQ}{MH}.$$
Do đó $\triangle BQR \sim \triangle HMK$ (c-g-c) nên $\widehat{HMK} = \widehat{BQR}$, suy ra
$$\widehat{RNM} = \widehat{RMQ}. \text{ Từ đó } \widehat{QNM} = \widehat{BMO} = 45^\circ + \widehat{BMX} = \widehat{BYM} + \widehat{BYQ} = \widehat{MYQ}.$$
Vậy nên tứ giác $MQYN$ nội tiếp, do đó ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 66. (IMO 1985) Cho tam giác ABC, một đường tròn tâm O đi qua A, C và cắt lại các cạnh BA, BC tại K, N. Giả sử các đường tròn (BKN) và (ABC) cắt nhau tại hai điểm B và M, chứng minh rằng BM vuông góc với MO.

Lời giải



Gọi T và R lần lượt là tâm của đường tròn (ABC) và (BKN). Ta có biến đổi góc như sau

$$\widehat{CBR} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{BNR} = 90^\circ - \widehat{BKN} = 90^\circ - \widehat{BCA}.$$

Do đó, $BR \perp AC$. Tương tự, ta cũng có $BT \perp NK$. Suy ra tứ giác $BROT$ là hình bình hành. Kẻ đường kính BL của đường tròn (BNK), ta cũng suy ra được tứ giác $RLOT$ là hình bình hành. Do đó, $OL \perp BM (\parallel RT)$. Mặt khác, ta cũng có $LM \perp BM$ nên ba điểm O, L, M thẳng hàng. Từ đây, ta suy ra được $OM \perp BM$.

Bài toán 67. Cho tam giác ABC $(AB < AC)$, có tâm ngoại tiếp O và tâm nội tiếp I. D là hình chiếu của I lên BC, M là trung điểm BC. N, T lần lượt là trung điểm của cung BC không chứa A và chứa A.

1. Lấy K đối xứng với M qua AI. Chứng minh rằng $NI^2 = NB^2 = NC^2 = NM.NT$ và KD vuông góc với OI.

2. Lấy P đối xứng D qua M, NP cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là Q. OQ cắt đường thẳng qua P vuông góc với BC tại X. Chứng minh rằng X thuộc đường trung bình của tam giác ABC ứng với BC.

Lời giải 1.

Gọi $IO \cap DK = \{Y\}$, G là hình chiếu của M lên AI. Ta có

$$\widehat{NIB} = \widehat{BAI} + \widehat{ABI} = \widehat{IAC} + \widehat{IBC} = \widehat{NBC} + \widehat{IBC} = \widehat{NBI}.$$

Do đó tam giác NBI cân tại N suy ra $NB = NI$, kết hợp với kết quả quen thuộc $NB = NC$, ta được $NB = NC = NI$. Mặt khác, theo hệ thức lượng, ta được $NC^2 = NM.NT$. Do đó ta được $NI^2 = NB^2 = NC^2 = NM.NT \Rightarrow \widehat{GIM} = \widehat{ITN}$. Mặt khác, ta có $\widehat{MGI} = \widehat{MDI} = 90^\circ$ nên tứ giác $MGDI$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{MDG} = \widehat{MIG} = \widehat{NIT}$. Kết hợp với $\widehat{DMG} = \widehat{DIG} = \widehat{INT}$, ta được $\triangle DMG \sim \triangle INT$ (g-g). Do đó, ta có

$$\frac{MG}{MD} = \frac{NI}{NT} \Rightarrow \frac{2MG}{MD} = \frac{2NI}{2NO} \Rightarrow \frac{MK}{MD} = \frac{NI}{NO}.$$

Do đó, ta được $\triangle MDK \sim \triangle NOI$ (c-g-c), suy ra $\widehat{MDK} = \widehat{NOI}$. Vậy nên tứ giác $OYDM$ là tứ giác nội tiếp, từ đó ta suy ra $\widehat{OYD} = 180^\circ - \widehat{OMD} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Vậy nên ta thu được điều phải chứng minh.

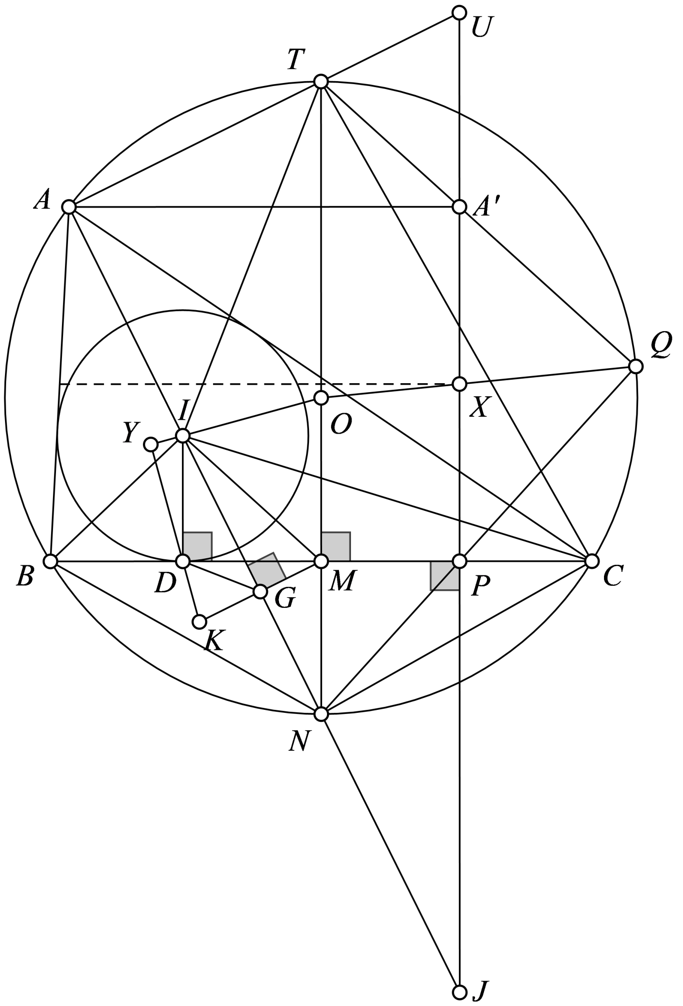
2. Gọi J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC. Theo kết quả quen thuộc thì P là hình chiếu của J lên BC (chứng minh bằng tam giác đồng dạng). Gọi JP cắt đường thẳng qua A song song với BC tại A' và cắt AT tại U. Ta có $\widehat{AJA'} = \widehat{UAA'}, \widehat{AUA'} = \widehat{JVP}$ dẫn đến $\triangle JPV \sim \triangle AA'U$ (g-g). Mặt khác, dễ thấy N là trung điểm IJ nên ta có thể suy ra như sau

$$NJ^2 = NI^2 = NM.NT = NV.NA \Rightarrow \frac{NJ}{NV} = \frac{NA}{NJ}.$$

Mặt khác, theo định lý Thales, ta có

$$\frac{NA}{NJ} = \frac{TA}{TU} \Rightarrow \frac{NJ}{NV} = \frac{TA}{TU}.$$

Kết hợp với $\triangle JPV \sim \triangle AA'U$, ta được $\triangle A'TU \sim \triangle PNV \Rightarrow \widehat{UA'T} + \widehat{NPJ} = 90°$. Suy ra ba điểm Q, A', T thẳng hàng. Từ đó ta có QO chia đôi TN nên QO chia đôi PA' dẫn đến điều phải chứng minh.

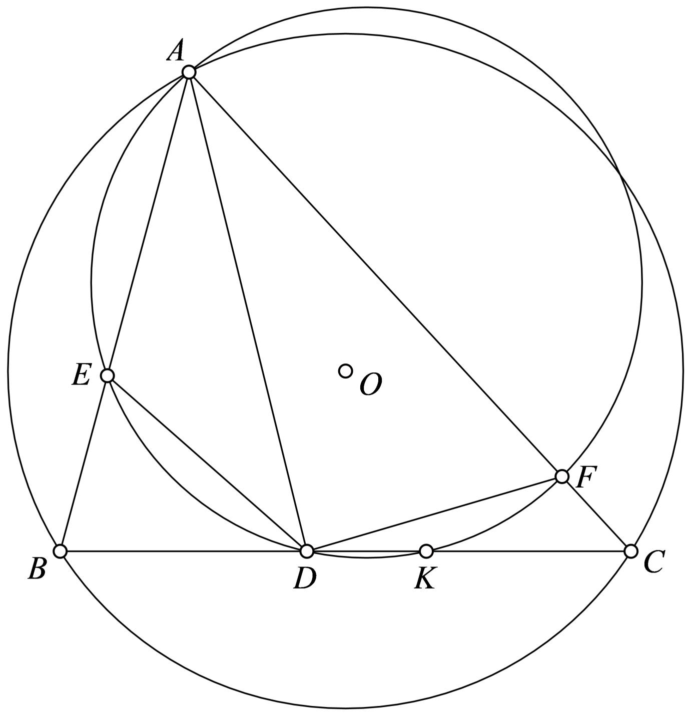


Bài toán 68. (Thi thử CSP V2 đợt 2 2024) Cho tam giác nhọn, không cân ABC nội tiếp đường tròn (O), có AD là đường phân giác trong (D thuộc BC). E là một điểm di động trên cạnh AB (E khác A). Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE cắt AC tại điểm thứ hai là F (F khác A), cắt đường thẳng BC tại điểm thứ hai là K (K khác D). Chứng minh rằng

1. $BE.KC = CF.KB$.

2. $BE + CF$ không đổi khi E thay đổi trên cạnh AB (khác A) của tam giác ABC.

Lời giải



1. Ta có $BK.BD = BE.BA$ và $CK.CD = CF.FA$, suy ra
$$\frac{BK.BD}{CK.CD} = \frac{BE.BA}{CF.CA}.$$
Mặt khác, theo tính chất đường phân giác, ta có $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{BA}{CA}$, do đó $\dfrac{BK}{CK} = \dfrac{BE}{CF}$. Ta suy ra
$$BE.KC = CF.KB$$

2. Từ $BK.CF = CK.BE$, ta suy ra
$$\frac{BK}{BE} = \frac{CK}{CF} = \frac{BK+CK}{BE+CF} = \frac{BC}{BE+CF}.$$
$$\Rightarrow BE + CF = BC.\frac{BE}{BK} = BC.\frac{BD}{BA} \text{ (cố định).}$$
Vậy ta có được điều phải chứng minh.

Bài toán 69. (PTNK 2024) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) có tam giác ABD là tam giác nhọn và đường chéo AC đi qua tâm O của đường tròn (O). Gọi I là trung điểm BD, H là trực tâm của tam giác ABD, E là giao điểm khác A của AI với đường tròn (O) và K là hình chiếu vuông góc của H lên AI.

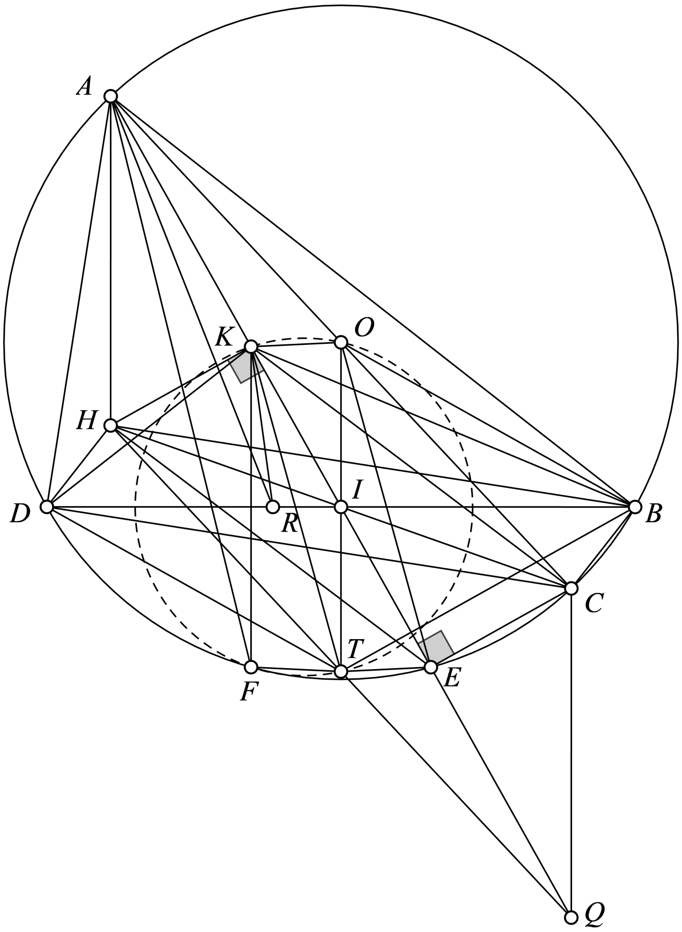
1. Chứng minh rằng tứ giác $CEHK$ là hình bình hành và $IB^2 = ID^2 = IA.IK$.

2. Lấy điểm F trên cung nhỏ BD của đường tròn (O) sao cho $\widehat{BAF} = \widehat{DAI}$. Chứng minh rằng các điểm K và F đối xứng nhau qua đường thẳng BD.

3. Chứng minh các đường phân giác trong các góc BAD và BKD cắt nhau trên BD.

4. Trên đường thẳng qua H và song song với AC lấy điểm T sao cho $TH = TK$. Chứng minh các điểm O, K, F, T cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải



1. Dễ thấy tứ giác $BHDC$ là hình bình hành nên I là trung điểm của CH. Kết hợp với $HK \parallel CE$ nên ta có $\triangle IKH = \triangle IEC$ (g-c-g). Do đó, $CE = HK$. Kết hợp với $CE \parallel HK$, ta có tứ giác $CEHK$ là hình bình hành. Suy ra $IK = IE$, ta được $IK.IA = IE.IA = IB.ID = IB^2 = ID^2$.

2. Ta có kết quả quen thuộc rằng tứ giác $BHDC$ là hình bình hành. Mà I là trung điểm của đoạn BD nên I là trung điểm của CH. Từ đây, kết hợp với $KH \parallel CE$ (cùng vuông góc với AI), ta chứng minh được $\triangle IKH = \triangle IEC$ (g-c-g). Suy ra I là trung điểm của EK. Kết hợp với I là trung điểm của BD, ta được tứ giác $BKDE$ là hình bình hành nên ta có

$$BK = DE, DK = BE\ (*).$$

Mặt khác, ta có $\widehat{BAF} = \widehat{DAE}$ nên $DE = BF$. Ngoài ra, cũng vì $\widehat{BAF} = \widehat{DAE}$ nên ta có được $CF = BE$. Kết hợp với $(*)$, ta có được $DK = DF, BK = BF$, do đó K và F đối xứng nhau qua BC.

3. Gọi R là chân đường phân giác kẻ từ đỉnh A của tam giác ABD. Khi đó, ta có

$$\frac{AB}{AD} = \frac{RB}{RD}\ (1).$$

Mặt khác, ta có tứ giác $BKDE$ là hình bình hành nên ta có biến đổi tỉ số như sau

$$\frac{KB}{KD} = \frac{ED}{EB}\ (2).$$

Mặt khác, tứ giác $ABED$ nội tiếp nên ta có

$$\frac{ED}{AB} = \frac{ID}{IA} = \frac{IB}{IA} = \frac{EB}{AD} \Rightarrow \frac{ED}{EB} = \frac{AB}{AD}\ (3).$$

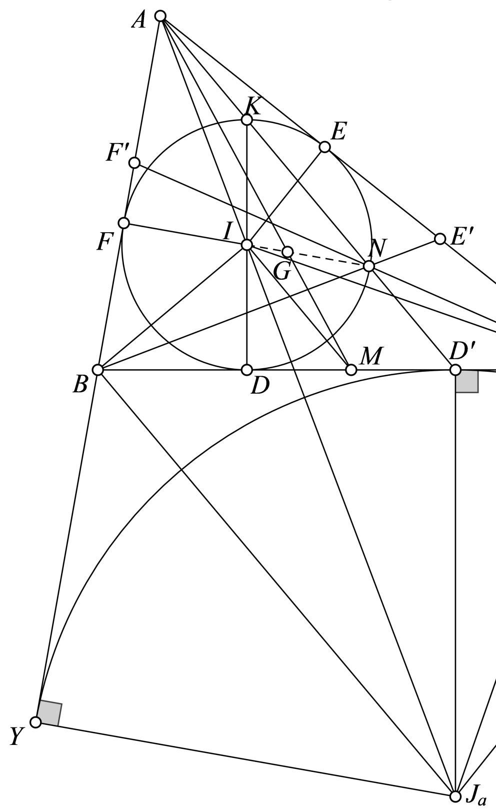
Từ $(1), (2), (3)$, ta suy ra $\dfrac{KB}{KD} = \dfrac{RB}{RD}$. Từ đây, ta có thể suy ra KR là tia phân giác của $\widehat{BKD}$. Do đó ta thu được điều phải chứng minh.

4. Gọi Q là giao điểm của AE và HT. Từ $\widehat{HKQ} = 90^\circ$ và $TH = TK$, ta dễ dàng chứng minh được T là trung điểm của HQ.
   Chú ý rằng I là trung điểm của HC và $AC \parallel HQ$, ta dễ thấy tứ giác $ACQH$ là hình bình hành. Mà T, O, I tương ứng là trung điểm của các đoạn thẳng HQ, AC, BC nên ba điểm T, O, I thẳng hàng và I là trung điểm của OT. Từ đây, dễ thấy $OBTD$ là hình bình hành. Mà $OB = OD$ nên tứ giác $OBTD$ là hình thoi, suy ra $OT \perp BD$. Do đó, ta có thể suy ra $TE = TF$.
   Mặt khác, tứ giác $OETK$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành, suy ra $OK = TE$. Kết hợp với $TE = TF$, ta được $OK = TF$. Điều này dẫn đến $\triangle OKF = \triangle TFK$ (c-c-c), suy ra $\widehat{KOF} = \widehat{FTK}$. Do đó, tứ giác $OKFT$ nội tiếp. Ta hoàn tất phần chứng minh của bài toán.

Bài toán 70. Cho tam giác ABC. Gọi độ dài các cạnh BC, AC, AB lần lượt là a, b, c. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi J_a là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC, (J_a) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D', X, Y.

1. Tính BD' và AX theo a, b, c.
2. Các điểm E', F' lần lượt là tiếp điểm của (J_b) và (J_c) với AC và AB tương ứng. Chứng minh rằng ba đường thẳng AD', BE', CF' đồng quy tại một điểm gọi là N. *(Điểm Nagel)*
3. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng ba điểm I, G, N thẳng hàng.

Lời giải



1. Dễ thấy các cặp tam giác đồng dạng là $\triangle J_aD'C \sim \triangle CDI$ (g-g) và $\triangle J_aD'B \sim \triangle BDI$ (g-g) nên ta có
$$\frac{CD'}{D'B} = \frac{BD}{DC}.$$
   Suy ra $CD' = BD$ và $BD' = CD = \dfrac{a+b-c}{2}$. Ngoài ra, $AX = AC + CX = b + BD = \dfrac{a+c-b}{2} + b = \dfrac{a+b+c}{2}$.

2. Tương tự câu (1.), ta cũng chứng minh được $\dfrac{BF'}{F'A} = \dfrac{AF}{BF}$ và $\dfrac{AE'}{E'C} = \dfrac{CE}{AE}$. Do đó

$$\frac{CD'}{D'B}.\frac{BF'}{F'A}.\frac{AE'}{E'C} = \frac{BD}{DC}.\frac{AF}{BF}.\frac{CE}{AE} = 1$$

Do đó, theo định lý Ceva, ta được ba đường thẳng AD', BE', CF' đồng quy tại một điểm N.

3. Gọi $ID \cap AD' = \{K\}$. Theo định lý Thales, ta có $\dfrac{IK}{J_aD'} = \dfrac{AI}{AJ_a} = \dfrac{IE}{J_aX}$. Mà $J_aD' = J_aX$ nên $IE = IK$, hay $K \in (I)$. Mặt khác, áp dụng định lý Menelaus với tam giác $AD'B$ và cát tuyến CNF', ta được

$$\frac{CD'}{CB}.\frac{BF'}{F'A}.\frac{AN}{ND'} = 1 \Rightarrow \frac{AF}{BC} = \frac{ND'}{AN} \Rightarrow \frac{ND'}{AD'} = \frac{AF}{AF+BC} = \frac{AF}{p} \text{ với } p = \frac{a+b+c}{2} \text{ (1).}$$

Mặt khác, theo định lý Thales, ta có

$$\frac{AK}{AD'} = \frac{AI}{AJ_a} = \frac{AE}{AX} = \frac{AE}{p} \text{ (2).}$$

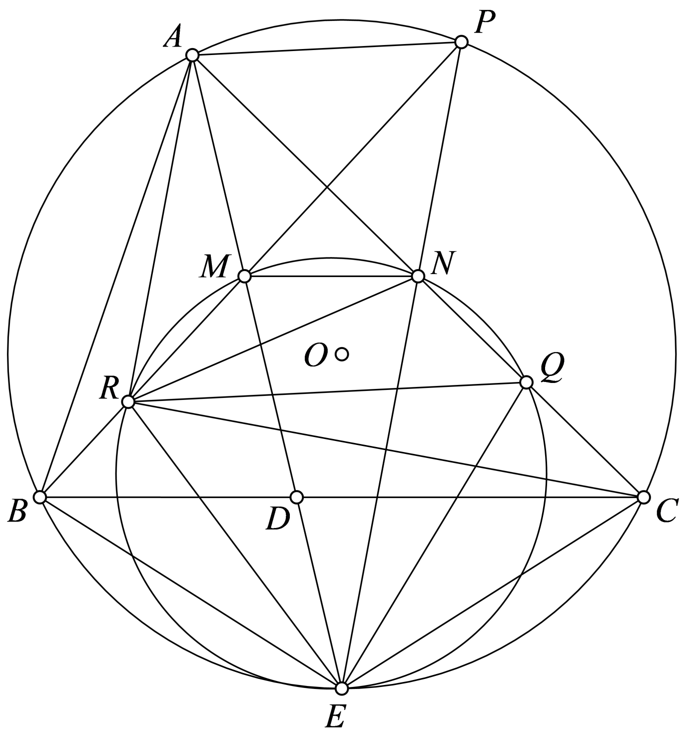
Từ (1) và (2) suy ra $AK = ND'$. Gọi M là trung điểm của đoạn BC. Suy ra M cũng là trung điểm của đoạn DD'. Do đó, theo tính chất đường trung bình, ta có $IM \parallel AD'$ và $IM = \dfrac{KD'}{2} = \dfrac{AN}{2}$. Đến đây, chỉ cần áp dụng định lý Thales đảo, ta dễ dàng suy ra ba điểm I, G, N thẳng hàng.

Bài toán 71. (DH & ĐBBB 2022) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với $AB < AC$ và đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$ cắt $BC, (O)$ lần lượt tại D, E ($E \neq A$). Gọi M là trung điểm của AD. BM cắt (O) tại điểm thứ hai là P khác B. EP cắt AC tại điểm N.

1. Chứng minh rằng N là trung điểm của AC.

2. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác EMN cắt BM tại R khác M. Chứng minh rằng $RA \perp RC$.

Lời giải



1. Ta có $\widehat{MAN} = \widehat{BPE} = \widehat{MPN}$ nên tứ giác $AMNP$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{ANM} = \widehat{APM} = \widehat{ACB}$. Mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $MN \parallel BC$. Vậy nên N là trung điểm của AC.

2. Gọi (EMN) cắt AC tại điểm thứ hai là Q khác N. Ta có

$$AN.AQ = AM.AE \Rightarrow AC.AQ = AD.AE \ (1).$$

Mặt khác, có $\triangle ADB \sim \triangle ACE$ (g-g) nên $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AD}{AC}$. Suy ra $AD.AE = AB.AC$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $AB.AC = AC.AQ$. Vậy nên $AB = AQ$. Do đó, B đối xứng với Q qua AD. Vậy nên $EB = EQ = EC$. Mà $\widehat{MRQ} = \widehat{ANM} = \widehat{ACB}$ nên tứ giác $BCQR$ nội tiếp. Suy ra E là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BCQR$ hay $EC = ER$. Hơn nữa, $\widehat{REN} = \widehat{PMN} = \widehat{PAC} = \widehat{PEC}$ nên suy ra được R đối xứng với C qua EN. Do đó, $NR = NC = \dfrac{1}{2}AC$. Suy ra tam giác ARC vuông tại R. Ta kết thúc bài toán.

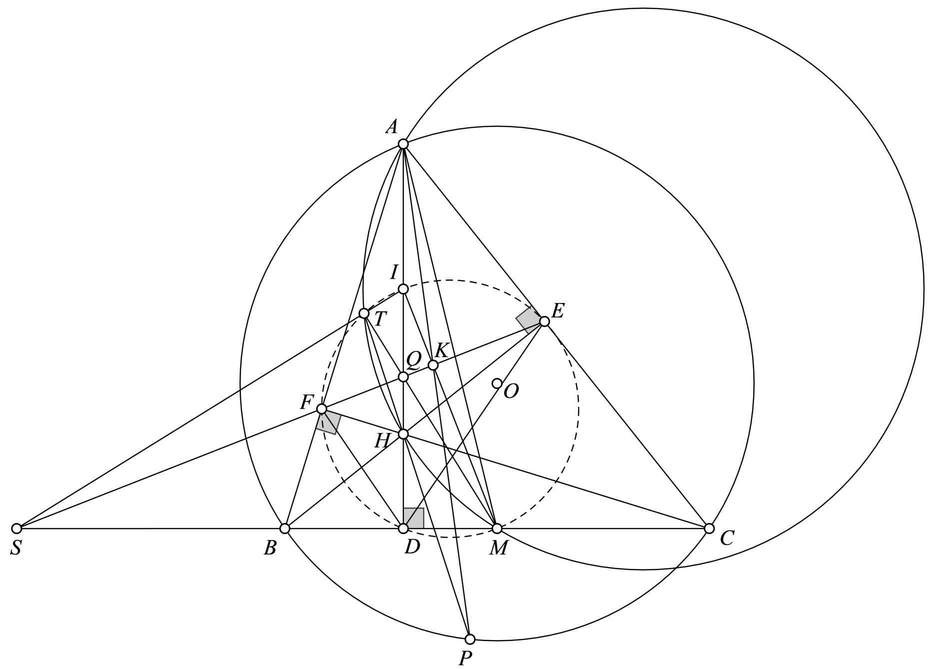
Bài toán 72. (Hà Nội 2023) Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Ba đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cùng đi qua điểm H. Đường thẳng EF cắt đường thẳng AD tại điểm Q. Gọi M và I lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng BC và AH. Đường thẳng IM cắt đường thẳng EF tại điểm K.

1. Chứng minh tam giác AEK đồng dạng với tam giác ABM.

2. Đường thẳng EF cắt BC tại điểm S, đường thẳng SI cắt đường thẳng MQ tại điểm T. Chứng minh bốn điểm A, T, H và M cùng thuộc một đường tròn.

3. Tia TH cắt đường tròn (O) tại điểm P. Chứng minh ba điểm A, K, P thẳng hàng.

Lời giải



1. Xét tam giác BFC và BEC lần lượt vuông tại F và E với các trung tuyến tương ứng là FM và EM, khi đó ta được $MF = ME = \dfrac{BC}{2}$. Tương tự, ta cũng được $IF = IE = \dfrac{AH}{2}$. Từ đây, ta thấy được IM là đường trung trực của EF, vậy nên K là trung điểm của EF. Mặt khác, ta có $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ (g-g), K và M tương ứng là trung điểm của EF và BC nên ta dễ dàng suy ra $\triangle AEK \sim \triangle ABM$ (c-g-c).

2. Trong tam giác ISM có $ID \perp SM$ và $SK \perp IM$ nên ta có thể suy ra Q là trực tâm của tam giác ISM. Do đó $MT \perp IS$, từ đó dẫn đến $\widehat{ITM} = 90^\circ$. Kết hợp với $\widehat{IFM} = \widehat{IEM} = 90^\circ$, ta được năm điểm I, T, F, E, M cùng thuộc đường tròn đường kính IM. Do đó, theo phương tích, ta có thể biến đổi như sau

$$QT.QM = QF.QE = QA.QH.$$

Điều này dẫn đến tứ giác $ATHM$ nội tiếp, ta thu được điều phải chứng minh.

3. Trên tia TH lấy điểm P' sao cho $HT.HP' = HA.HD$. Khi đó, ta cũng được $HT.HP' = HB.HE = HC.HF$, và do đó các tứ giác $TBP'E$ và $TCP'F$ là các tứ giác nội tiếp. Khi đó, ta có $\widehat{BP'T} = \widehat{BET} = \widehat{HET}$ và $\widehat{CP'T} = \widehat{CFT} = \widehat{HFT}$. Từ đó, chú ý rằng tứ giác $TIEF$ nội tiếp nên $\widehat{ETF} = \widehat{EIF} = 2\widehat{BAC}$, ta thu được

$$\widehat{BP'C} = \widehat{BP'T} + \widehat{CP'T} = \widehat{HET} + \widehat{HFT} = 360^\circ - \widehat{EHF} - \widehat{ETF} = 360^\circ - 180^\circ - \widehat{BAC} - 2\widehat{BAC} = 180^\circ - \widehat{BAC}.$$

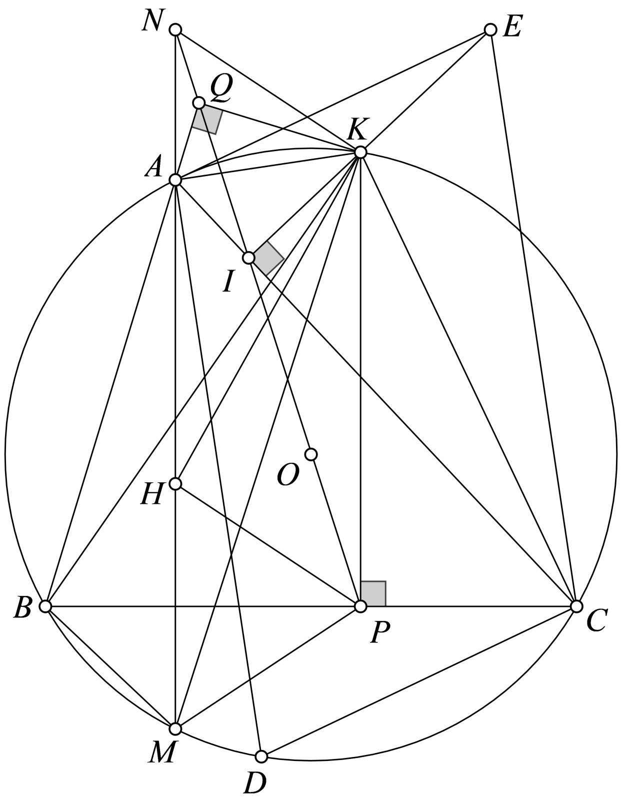
Do đó $P' \in (O)$ và kéo theo $P \equiv P'$. Như vậy $HA.HD = HP.HT$ nên tứ giác $ATDP$ nội tiếp và $\widehat{DAP} = \widehat{DTH}$. Mặt khác, ta có kết quả quen thuộc $\widehat{BAO} = \widehat{CAH}$ và $AO \perp EF$, kết hợp với $\triangle AEK \sim \triangle ABM$, ta thu được $\widehat{OAM} = \widehat{BAO} - \widehat{BAM} = \widehat{CAH} - \widehat{EAK} = \widehat{DAK}$ và $IM \parallel AO$. Lại chú ý rằng các tứ giác $ATHM$ và $ITDM$ là các tứ giác nội tiếp, ta được

$$\widehat{DTH} = \widehat{AHT} - \widehat{IDT} = \widehat{AMT} - \widehat{IMT} = \widehat{AMI} = \widehat{OAM} = \widehat{DAK}.$$

Do đó, $\widehat{DAP} = \widehat{DAK}$, từ đó suy ra A, P, K thẳng hàng.

Bài toán 73. (VMO 2004) Cho tam giác ABC nội tiếp $(O; R)$ có trực tâm là H. D là điểm trên cung nhỏ BC, lấy E sao cho CE song song và bằng AD, gọi K là trực tâm tam giác ACE. Gọi P, Q là hình chiếu vuông góc của K trên BC, AB. Chứng minh: PQ đi qua trung điểm của HK.

Lời giải



Do K là trực tâm của tam giác AEC và tứ giác $AECD$ là hình bình hành nên $\widehat{AKC} = 180^\circ - \widehat{AEC} = 180^\circ - \widehat{ADC}$. Do đó, tứ giác $AKCD$ nội tiếp, hay $K \in (O)$. Gọi giao điểm của EK và AC là I, ta có ba điểm P, I, Q thẳng hàng theo đường thẳng Simson ứng với điểm K. Mặt khác, gọi giao điểm của AH với $(O), PQ$ lần lượt là M, N. Chú ý rằng các tứ giác $KQBP$ và $ABMK$ nội tiếp nên $\widehat{KPQ} = \widehat{KBQ} = \widehat{KMN}$. Do đó, tứ giác $KPMN$ nội tiếp. Mà $KP \parallel MN$ nên tứ giác $KPMN$ là hình thang cân. Ta có kết quả quen thuộc là M đối xứng với H qua BC nên $\widehat{PHM} = \widehat{PMH} = \widehat{KNM}$. Do đó, $PH \parallel NK$. Kết hợp với $KP \parallel HN$, ta được tứ giác $KNHP$ là hình bình hành nên PQ sẽ đi qua trung điểm của AH.

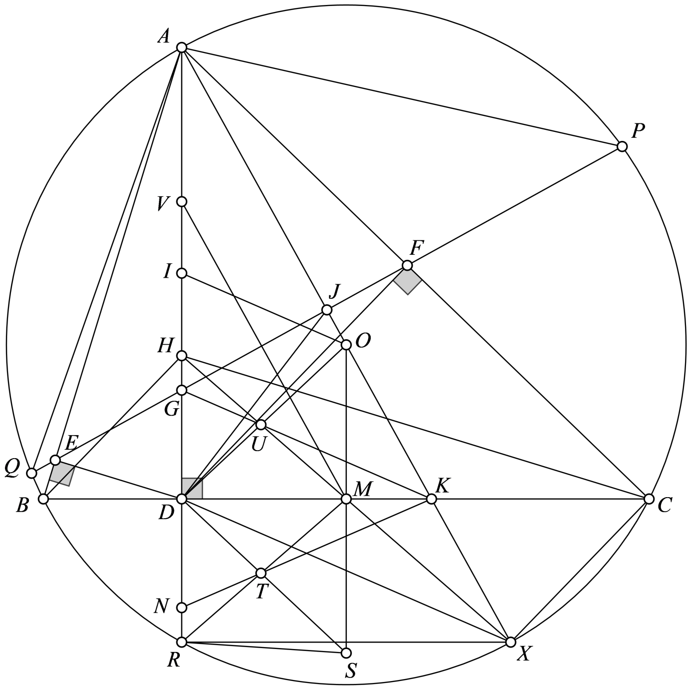
Bài toán 74. (THCS Archimedes Academy 2024) Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) có các đỉnh thuộc đường tròn (O), đường cao AD. Gọi các điểm E và F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ điểm D xuống các đường thẳng AB và AC. Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại các điểm P và Q (điểm E nằm giữa hai điểm Q và F). Các đường thẳng AD và EF cắt nhau tại điểm G. Gọi điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AD. Đường thẳng AO cắt BC tại điểm K.

1. Chứng minh rằng $AP = AQ = AD$.

2. Chứng minh rằng đường thẳng OI song song với đường thẳng KG.

3. Gọi điểm H là trực tâm của tam giác ABC và điểm M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Điểm S là giao điểm ba đường trung trực của tam giác HBC. Lấy điểm T trên đường thẳng DS sao cho tia KD là tia phân giác của góc GKT. Chứng minh rằng các đường thẳng AD và MT cắt nhau tại một điểm thuộc đường tròn (O).

Lời giải



1. Ta có $AF.AC = AD^2 = AE.AB$ nên tứ giác $BEFC$ nội tiếp. Do đó, ta có thể suy ra như sau $\widehat{OAC} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{AOC} = 90^\circ - \widehat{ABC} = 90^\circ - \widehat{AFE}$. Vậy nên $AO \perp EF$, hay $AO \perp PQ$. Suy ra $AP = AQ$. Từ đây, ta dễ dàng chứng minh được $AP^2 = AF.AC$ và $AQ^2 = AE.AB$. Kết hợp với $AD^2 = AE.AB = AF.AC$, ta được $AP = AD = AQ$.

2. Kẻ đường kính AX của đường tròn (O), gọi giao điểm của AX và EF là J. Ta có các tứ giác $JGDK$ và $JFCX$ nội tiếp. Do đó, $AJ.AX = AE.AC = AD^2$. Suy ra $\triangle AJD \sim \triangle ADX$ (c-g-c). Ta được $\widehat{ADJ} = \widehat{AXD}$. Mà $\widehat{JKG} = \widehat{JDG}$ (tứ giác $JGDK$ nội tiếp) nên $\widehat{JKG} = \widehat{AXD}$. Mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $GK \parallel DX$. Mặt khác, theo tính chất đường trung bình, ta cũng có $OI \parallel KD$ nên ta suy ra được $OI \parallel KG$.

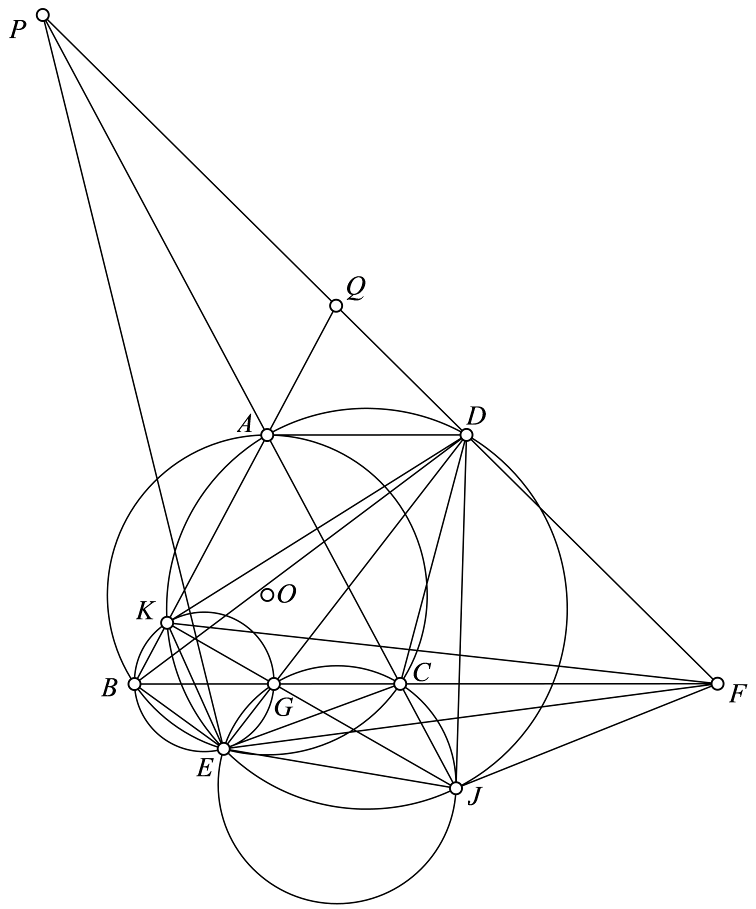
3. Trước hết, ta chứng minh ba đường thẳng OD, HM, GK đồng quy. Thật vậy, gọi $GK \cap OD = \{U\}$ và $MH \cap OD = \{U'\}$. Ta sẽ chứng minh $U \equiv U'$. Vì $GK \parallel DX$ nên $\dfrac{OU}{OD} = \dfrac{OK}{OX} = \dfrac{OK}{OA}$. Mặt khác, ta có $OM \parallel HD$ nên $\dfrac{OU'}{U'D} = \dfrac{OM}{HD}$. Suy ra $\dfrac{OU'}{OD} = \dfrac{OM}{OM + HD}$. Gọi V là trung điểm của AH, ta có kết quả quen thuộc là $AV = VH = OM$. Do đó, $\dfrac{OU'}{OD} = \dfrac{OM}{OM + HD} = \dfrac{AV}{VD}$. Dễ thấy tứ giác $BHCX$ là hình bình hành nên M là trung điểm của HX. Theo tính chất đường trung bình, ta có $\dfrac{AV}{VD} = \dfrac{MK}{MD}$.

Mà $\dfrac{MK}{MD} = \dfrac{OK}{OA} = \dfrac{OU}{OD}$ nên $\dfrac{OU}{OD} = \dfrac{OU'}{OD}$. Do đó, $U \equiv U'$, ba đường thẳng OD, HM, GK đồng quy. Gọi $KT \cap AD = \{N\}, AD \cap (O) = \{M\}$. Do DO, HM, GK tương ứng đối xứng với DS, RM, NK qua BC nên ba đường thẳng NK, DS, MR đồng quy. Nói cách khác, ba điểm M, T, R thẳng hàng. Ta có được điều phải chứng minh.

Bài toán 75. (THCS Cầu Giấy 2024) Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{BAC} < 90^\circ$) nội tiếp đường tròn (O). Trên đường thẳng qua A song song với BC lấy điểm D sao cho $DB > DC$, điểm E thay đổi trên cung nhỏ BC của đường tròn (O). Đường thẳng DE cắt BC tại G, đường tròn ngoại tiếp tam giác GEB cắt AB tại điểm thứ hai là K, đường tròn ngoại tiếp tam giác GEC cắt AC tại điểm thứ hai là J.

1. Chứng minh năm điểm D, K, A, E, J cùng thuộc một đường tròn.
2. Lấy điểm F trên tia BC sao cho $\widehat{ADE} = \widehat{DFE}$. Chứng minh tam giác DKF cân.
3. Gọi FD cắt AB, AC lần lượt tại P, Q. Chứng minh $\widehat{BAC} = 2\widehat{PEQ}$.

Lời giải



1. Ta có $\widehat{KGE} = 180^\circ - \widehat{KBE} = \widehat{ACE} = 180^\circ - \widehat{ECJ} = 180^\circ - \widehat{EGJ}$. Vậy nên ba điểm K, G, J thẳng hàng. Ta có $\widehat{EKJ} = \widehat{EKG} = \widehat{EBC} = \widehat{EAJ}$ nên tứ giác $EKAJ$ nội tiếp. Mặt khác ta cũng có $\widehat{ADE} = \widehat{ADG} = \widehat{DGC} = \widehat{AJE}$ nên ta cũng có tứ giác $ADEJ$ nội tiếp, kết hợp với phần chứng minh trên, ta có được năm điểm D, K, A, E, J cùng thuộc một đường tròn.

2. Ta có $\widehat{DKJ} = \widehat{DAJ} = \widehat{ACB} = \widehat{ABC} = \widehat{KEG}$, vậy nên $\triangle DKG \sim \triangle DKE$ (g-g) dẫn đến $DK^2 = DG.DE$ $(*)$. Mặt khác $\angle DFE = \widehat{ADE} = \widehat{DGF}$ nên $\triangle DFG \sim \triangle DEF$ (g-g) dẫn đến $DF^2 = DG.DE$ $(**)$. Từ $(*)$ và $(**)$ ta được $DK = DF$ nên tam giác DKF là tam giác cân.

3. Ta có $\widehat{DJK} = \widehat{DEK} = \widehat{DKG} = \widehat{DKJ}$ nên tam giác DKJ cân tại D, từ đây, ta có $DF = DJ = DK$. Mặt khác, ta có $\widehat{PFE} = \widehat{DGF} = \widehat{EJC} = \widehat{PJE}$ nên tứ giác $PFJE$ nội tiếp. Mặt khác, ta cũng có

$\widehat{QFE} = \widehat{PFE} = \widehat{PJE} = \widehat{AJE} = 180^\circ - \widehat{AKE} = 180^\circ - \widehat{QKE}$ nên tứ giác $QFEK$ nội tiếp. Vậy nên, ta có biến đổi góc như sau

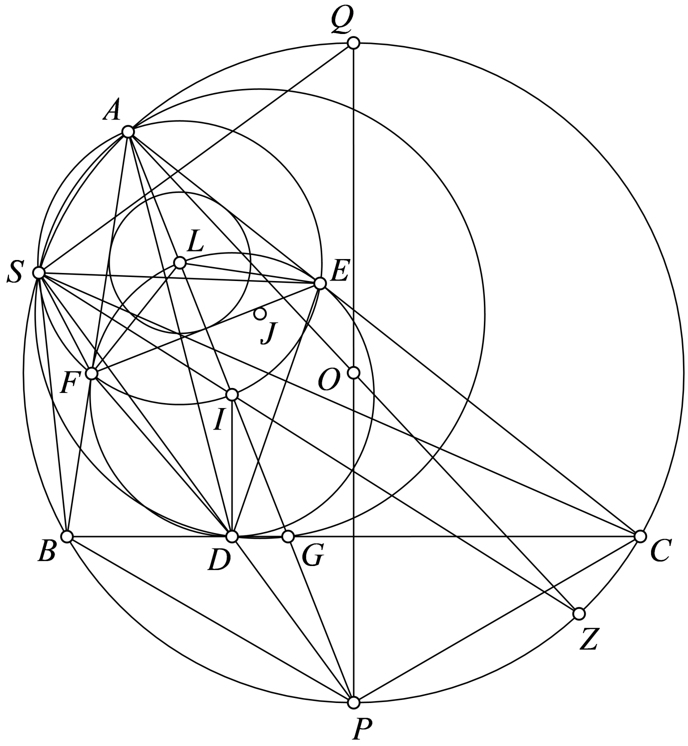
$$\widehat{PEQ} = \widehat{PEF} - \widehat{QEF} = \widehat{FJP} - \widehat{QKF} = \widehat{FJD} + \widehat{DJP} - \widehat{QKF} = \frac{1}{2}\widehat{QDJ} + \widehat{CGJ} - \widehat{QKD} - \widehat{DKF} =$$
$$\frac{1}{2}\widehat{QDJ} + \widehat{CGJ} - \frac{1}{2}\widehat{QDK} - \widehat{QKD} = \frac{1}{2}\widehat{KDJ} + \widehat{CGJ} - \widehat{AKD} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} + \widehat{CGJ} - \widehat{CGJ} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}.$$

Bài toán 76. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn O và ngoại tiếp đường tròn I. Gọi tiếp điểm của đường tròn (I) với BC, CA, AB lần lượt là D, E, F. G là giao điểm của AI và BC.

1. Gọi L là giao điểm thứ hai của AG và đường tròn (I) $(AL < AI)$. Chứng minh L là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AFE.

2. Gọi (J) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ADG, S là giao điểm thứ hai của (J) và (O). Kẻ đường kính AZ của đường tròn (O). Chứng minh rằng ba điểm S, I, Z thẳng hàng.

Lời giải



1. Ta có biến đổi góc như sau

$$\widehat{LFE} = \widehat{LDE} = \widehat{LDF} = \widehat{AFL}.$$

Do đó, FL là tia phân giác của $\widehat{AFE}$. Kết hợp với AL là tia phân giác của $\widehat{FAE}$, ta có được điều phải chứng minh.

2. Gọi giao điểm thứ hai của (AFE) và (O) là S', ta sẽ chứng minh $S \equiv S'$. Thật vậy, ta có $\triangle S'FB \sim \triangle S'EC$ (g-g), ta được $\dfrac{SB}{BF} = \dfrac{SC}{CE}$. Mà $BF = BD, CE = CD$ nên $\dfrac{SB}{BD} = \dfrac{SC}{CD}$. Do đó, SD là tia phân giác $\widehat{BSC}$. Gọi P, Q lần lượt là điểm chính giữa cung nhỏ và cung lớn BC, ta được ba điểm S, D, P thẳng hàng. Dễ chứng minh $PS'.PD = PI^2 = PG.PA$ nên tứ giác $AS'DG$ nội tiếp. Do đó $S' \equiv S$. Vậy nên $\widehat{ASI} = 90^\circ$. Mà $\widehat{ASZ} = 90^\circ$ nên ba điểm S, I, Z thẳng hàng.

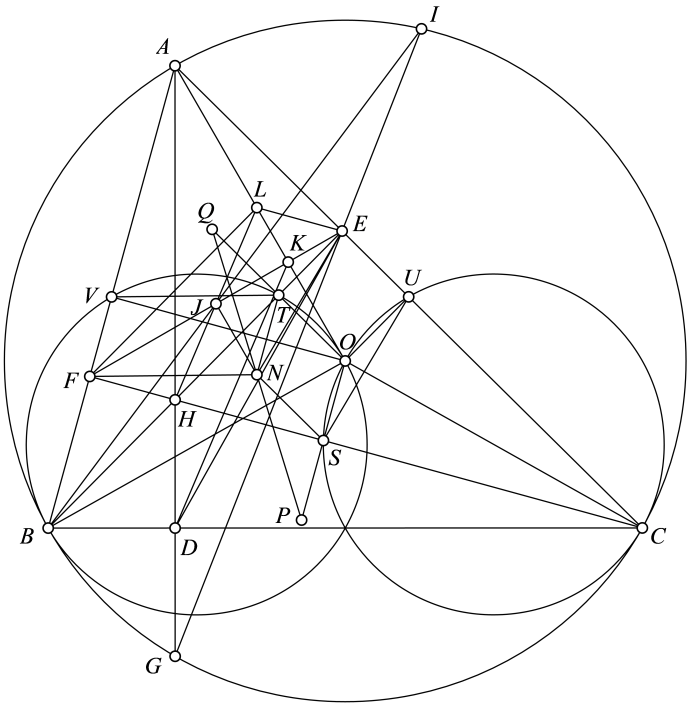
Bài toán 77. (Nghệ An 2024) Cho tam giác nhọn ABC có $AB < BC < CA$, nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE và CF cắt nhau tại H. Tia AD cắt đường tròn (O) tại điểm G, tia GE cắt đường tròn (O) tại điểm I (G khác A và I khác G). Gọi J là giao điểm của của BI và EF, K là giao điểm của OA và EF.

1. Chứng minh $HF.CE.BC = HC.BF.EF$.

2. Chứng minh $JE = JF$ và HJ song song với DK.

3. Gọi P là điểm đối xứng với O qua đường thẳng CF, Q là điểm đối xứng với O qua đường thẳng BE và N là trung điểm đoạn thẳng PQ. Chứng minh NJ vuông góc với EF.

Lời giải



1. Dễ thấy tứ giác $BFEC$ nội tiếp nên ta có các cặp tam giác đồng dạng là $\triangle HEF \sim \triangle HCB$ (g-g) và $\triangle HCE \sim \triangle HFB$ (g-g). Do đó

$$\frac{HF}{EF}.\frac{CE}{BF} = \frac{HB}{BC}.\frac{HC}{HB} = \frac{HC}{BC}.$$

Vậy $HF.CE.BC = HC.BF.EF$.

2. Ta có kết quả quen thuộc rằng G đối xứng với H qua D. Ta có $\widehat{BEF} = \widehat{BCF} = \widehat{DEH}$ và $\widehat{BFE} = 180^\circ - \widehat{BCE} = \widehat{DHE}$. Trong đường tròn (O), ta thấy $\widehat{ABI} = \widehat{AGI}$ nên ta thu được các cặp tam giác đồng dạng là $\triangle FBE \sim \triangle HDE$ (g-g) và $\triangle FBJ \sim \triangle HGE$ (g-g). Suy ra

$$\frac{FJ}{FB} = \frac{HE}{HG} = \frac{HE}{2HD} = \frac{FE}{2FB}.$$

Do đó $FE = 2FJ$, nên J là trung điểm của EF hay $JE = JF$.
Gọi L là trực tâm của tam giác AEF. Từ tính chất quen thuộc $AO \perp EF$ tại K, ta được ba điểm A, L, K thẳng hàng. Ngoài ra, ta có tứ giác $HELF$ là hình bình hành là một kết quả quen thuộc. Do đó J là trung điểm của HL. Vì $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ (g-g) nên

$$\frac{AL}{AK} = \frac{AH}{AD} \Rightarrow HL \parallel DK \text{ hay } HJ \parallel DK.$$

3. Gọi OP cắt CF tại S, OQ cắt BE tại T. Ta suy ra $OP \perp CF$ và $OQ \perp BE$, S và T lần lượt là trung điểm của OP và OQ. Ta có $NS \parallel OQ$ và $NT \parallel OP$ (tính chất đường trung bình). Suy ra tứ giác $OSNT$ là hình bình hành. Gọi U, V lần lượt là trung điểm của AC, AB. Suy ra $OU \perp AC$ và $OV \perp AB$. Ta có các tứ giác $OUET$ và $OVFS$ là các hình chữ nhật. Từ đó, suy ra $NS \parallel OT \parallel EU$ và $NS = OT = EU$. Do đó tứ

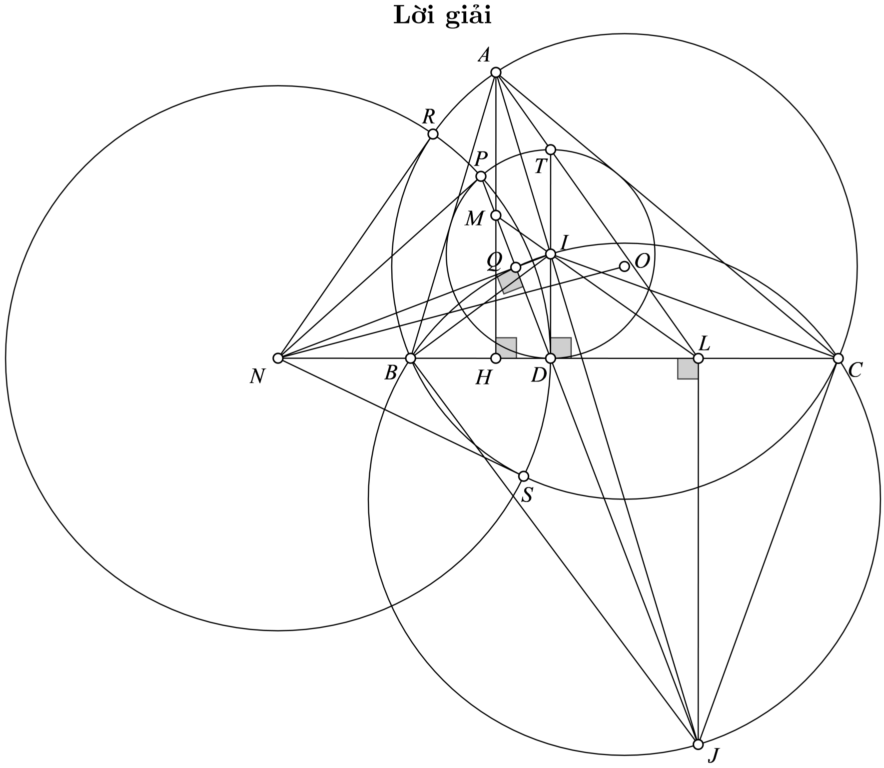
giác $NSUE$ là hình bình hành. Suy ra $NE = SU$. Tương tự, ta cũng chứng minh được $NF = TV$. Ta có $\widehat{OTB} = \widehat{OVB} = \widehat{OSC} = \widehat{OUC} = 90°$. Suy ra bốn điểm O, B, T, V cùng thuộc đường tròn đường kính OB và bốn điểm O, C, S, U cùng thuộc đường tròn đường kính OC. Kết hợp với $OB = OC$ và $\widehat{TBV} = \widehat{SCU}$, ta thấy $TV = SU$. Từ các kết quả trên, ta thu được $NE = NF$. Suy ra tam giác NEF cân tại N. Kết hợp với J là trung điểm của EF, ta được $NJ \perp EF$.

Bài toán 78. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC tại D, M là trung điểm của đường cao AH ($H \in BC$). Gọi giao điểm thứ hai của MD và (I) là P. Đường thẳng qua I vuông góc với MD cắt BC tại N, vẽ tiếp tuyến NR và NS với đường tròn (O).

1. Gọi J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A. Chứng minh ba điểm M, D, J thẳng hàng.

2. Chứng minh rằng bốn điểm R, P, D, S cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải



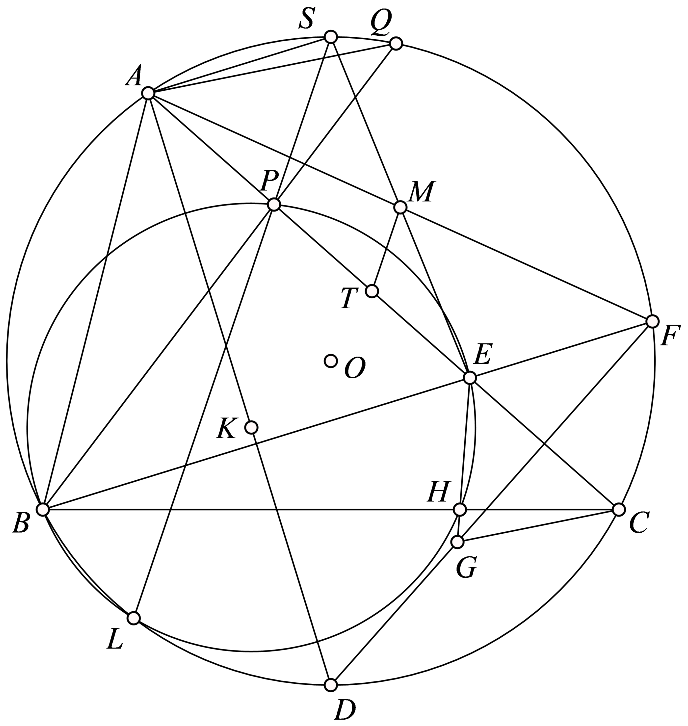
1. Gọi L là tiếp điểm của (J) với BC, kẻ đường kính DT của đường tròn (I). Ta có kết quả quen thuộc rằng ba điểm A, T, L thẳng hàng (bạn đọc có thể xem lại **bài toán 70**). Do đó, ba điểm L, I, M thẳng hàng theo bổ đề hình thang. Gọi $MD \cap AI = \{J'\}$, ta chứng minh $J \equiv J'$. Thật vậy, ta có
$$\frac{ID}{LJ'} = \frac{MI}{IL} = \frac{AT}{TL} = \frac{IT}{LJ}.$$
Mà $IT = ID$ nên $LJ' = LJ$. Do đó, $J' \equiv J$, ta có điều phải chứng minh.

2. Vì IN là trung trực của đoạn DP nên $NP = ND$. Ta chứng minh $NR = NP = ND = NS$. Thật vậy, gọi $PJ \cap IN = \{Q\}$. Ta có năm điểm B, Q, I, C, J cùng thuộc đường tròn đường kính IJ. Do đó, theo phương tích, ta có
$$NQ.NI = NB.NC = NR^2 = NS^2.$$
Mà $NQ.NI = ND^2$ theo hệ thức lượng trong tam giác vuông nên $NS = ND = NP = NR$. Do đó, bốn điểm R, P, Q, S cùng thuộc một đường tròn.

Bài toán 79. (Hải Phòng TST 2020) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), D là điểm chính giữa cung BC không chứa A. E là điểm đối xứng với B qua AD. BE cắt (O) tại F khác B. Điểm P di chuyển trên cạnh AC. BP cắt (O) tại Q khác B. Đường thẳng qua C song song với AQ cắt FD tại điểm G.

1. Gọi H là giao điểm của EG và BC. Chứng minh rằng B, P, E, H cùng thuộc một đường tròn, gọi đường tròn này là (K).
2. (K) cắt (O) tại L khác B. Chứng minh rằng LP luôn đi qua một điểm S cố định khi P di chuyển.
3. Gọi T là trung điểm PE. Chứng minh rằng đường thẳng qua T song song với LS đi qua trung điểm của AF.

Lời giải



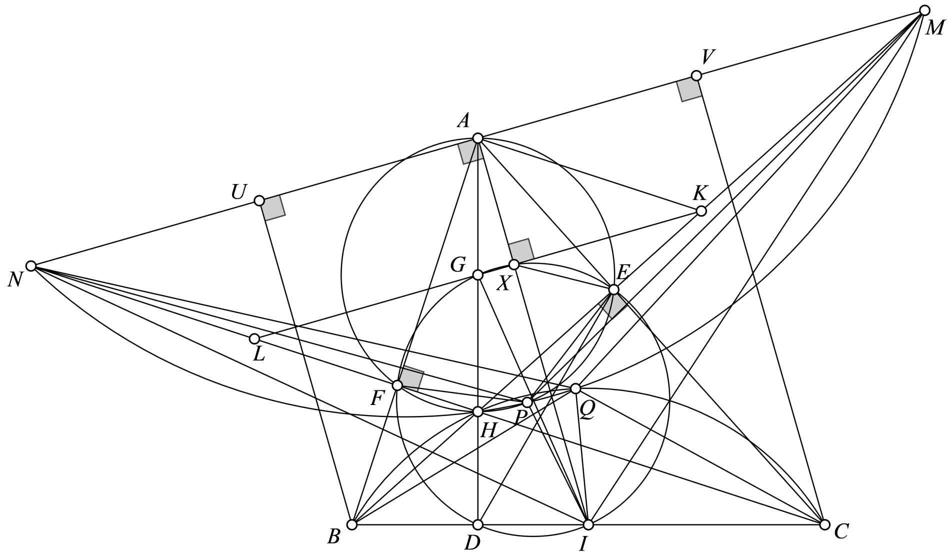
1. Ta có: $AB = AE$ suy ra $FC = FE$ nên FD là trung trực của CE. Vì thế $GC = GE$ nên $\widehat{GEC} = \widehat{GCE} = \widehat{CAQ} = \widehat{CBQ}$. Từ đó suy ra, tứ giác $BPEH$ nội tiếp.
2. Gọi LP cắt (O) tại S. Ta có
$$\widehat{BLS} = \widehat{BLP} = \widehat{BEP} = \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2} = \frac{\widehat{BLC}}{2}.$$
Suy ra LS là tia phân giác $\widehat{BLC}$. Vì vậy S là điểm chính giữa cung BAC.
3. Ta có AS vuông góc với AD nên AS song song với EF. Do đó
$$\widehat{SAC} = \widehat{CEF} = \widehat{ECF} = 180^\circ - \widehat{ASF}.$$
Hay SF song song với AE. Từ đó ta có $ASFE$ là hình bình hành. Nên M là trung điểm ES đồng nghĩa với MT song song với SP. Bài toán được chứng minh.

Bài toán 80. Cho tam giác ABC có trực tâm H. Gọi I là trung điểm BC. Đường thẳng qua A vuông góc AI cắt BH, CH tại M, N.

1. Chứng minh $IM = IN$.

2. Đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN lần lượt cắt đường tròn đường kính AH, (HBC) tại P, Q. Chứng minh $IP = IQ$.

Lời giải



1. Gọi G là trung điểm của AH. Kẻ $GH \perp AI = \{X\}$, đường thẳng này cắt HM và HN lần lượt tại K và L. Ba đường cao của tam giác ABC là AD, BE, CF. Ta có tứ giác $AXEK$ nội tiếp nên $\widehat{IXE} = \widehat{AKE}$. Mặt khác, $X \in$ đường tròn Euler của tam giác ABC nên $\widehat{IDE} = \widehat{IXE}$. Kết hợp với $\widehat{IDE} = \widehat{BAE}$ nên $\widehat{BAE} = \widehat{AKE}$. Suy ra $AK \perp AB$. Mà $HL \perp AB$ nên $AK \parallel HL$. Do đó, dễ chứng minh được $\triangle AGK = \triangle LGH$ nên G là trung điểm của LH. Theo bổ đề hình thang, ta thu được A là trung điểm của MN nên $IM = IN$.

2. Do tứ giác $AFPE$ nội tiếp nên $\widehat{CEP} = \widehat{AFP}$. Suy ra $\widehat{MEP} = \widehat{NFP}$. Kết hợp với $\widehat{EMP} = \widehat{FNP}$, ta được $\triangle FNP \sim \triangle EMP$ (g-g). Do đó, $\dfrac{PN}{PM} = \dfrac{FN}{EM}$ (1).Tương tự, ta cũng có $\dfrac{QM}{QN} = \dfrac{MB}{NC}$ (2).
Kẻ $BU \perp MN, CV \perp MN$, ta được A là trung điểm của UV. Vì các tứ giác $AFCU$ và $AEBU$ nội tiếp nên $NA.NV = NF.NC$ và $MA.MU = ME.MB$. Mà $NA = MA$ và $NV = MU$ nên $NF.NC = ME.MB \Rightarrow \dfrac{FN}{EM} = \dfrac{BM}{NC}$ (3).
Từ (1),(2) và (3) suy ra $\dfrac{PN}{PM} = \dfrac{QM}{QN} \Rightarrow PN = QM$ và $PM = QN$. Do đó, $AP = AQ$. Suy ra AI là trung trực của đoạn PQ nên $IP = IQ$.

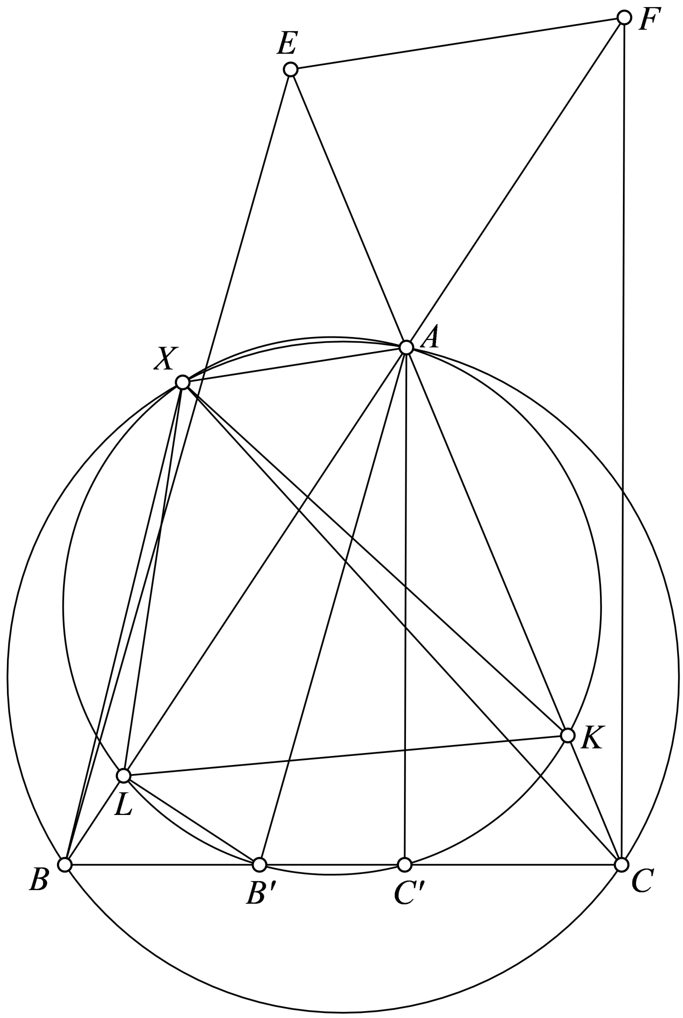
Bài toán 81. Cho tam giác ABC và các điểm B', C' thuộc BC (khác B, C). Các điểm E, F theo thứ tự thuộc AC, AB sao cho $BE \parallel B'A, CF \parallel C'A$. X là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và $AB'C'$. Chứng minh rằng $AX \parallel EF$.

Lời giải

Gọi K, L theo thứ tự là giao điểm thứ hai của AE, AF và $(AB'C')$. Vì A, B', C', L, K đồng viên và $BF \parallel B'A; CE \parallel C'A$ nên

$$\frac{BL}{CK} = \frac{BL.BA}{CK.CA}.\frac{CA}{BA} = \frac{BB'.BC'}{CC'.CB'}.\frac{CA}{BA} = \frac{EA}{CA}.\frac{BA}{FA}.\frac{CA}{BA} = \frac{AE}{AF}.$$

Mặt khác, dễ thấy $\triangle XLB \sim \triangle XKC$ (g-g). Do đó, $\dfrac{BL}{CK} = \dfrac{XL}{XK}$. Vậy nên $\dfrac{AE}{AF} = \dfrac{XL}{XK}$. Kết hợp với $\widehat{EAF} = \widehat{LAK} = \widehat{LXK}$, ta được $\triangle AEF \sim \triangle XLK$ (c-g-c). Vì vậy, $\widehat{XAL} = \widehat{XKL} = \widehat{AFE}$. Mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $AX \parallel EF$.



Bài toán 82. (Thi thử CSP V2 đợt 1 2024) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), có $AB < AC$. Trên đường tròn (O) lấy điểm M khác A sao cho AM song song với BC. Vẽ đường tròn (K) tiếp xúc với AO tại A, và đi qua điểm M. Đường tròn (K) cắt các đường thẳng AB, AC tại các điểm thứ hai F, E (F, E khác A). Các đường thẳng OM và BC cắt nhau tại điểm D.

1. Chứng minh các điểm D, E, F thẳng hàng.

2. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Các đường thẳng AO và DE cắt nhau tại điểm L. Chứng minh tứ giác $AHDL$ là hình bình hành.

Lời giải 1.

Ta có O, K cách đều A, M nên OK là trung trực của AM. Do đó, theo tính đối xứng, ta được OM là tiếp tuyến của (K). Từ đó, ta có $\widehat{EMD} = \widehat{MAE} = \widehat{ECD}$. Vậy tứ giác $EMCD$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{MED} + \widehat{MCB} = 180^\circ$. Mặt khác, theo tính chất của tứ giác nội tiếp $\widehat{FEM} = \widehat{FAM} = \widehat{MCB}$. Vậy $\widehat{MED} + \widehat{FEM} = 180^\circ$, do đó ba điểm F, E, D thẳng hàng.

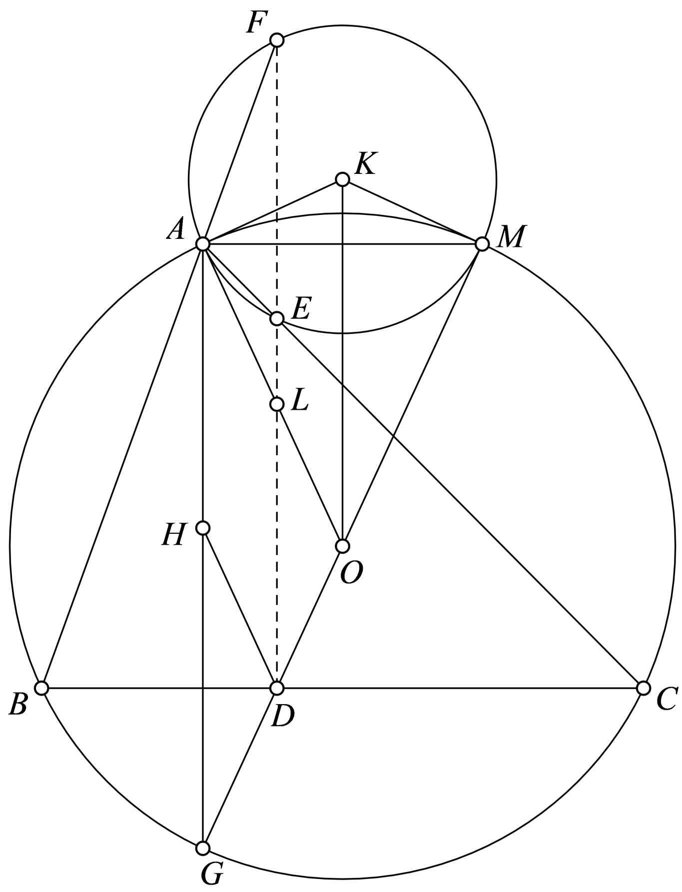
2. Kéo dài MD cắt (O) tại điểm thứ hai G. Do AG là đường kính của đường tròn (O) nên $AM \perp AG$. Kết hợp với $AM \parallel BC$, ta được $AG \perp BC$. Vậy A, H, G thẳng hàng. Từ đó G, H đối xứng nhau qua BC. Suy ra

$$\widehat{GHD} = \widehat{HGD} = \widehat{OAG}.$$

Vậy $AL \parallel DH$ (1). Mặt khác, ta có

$$\widehat{AFE} = \widehat{OAC} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{AOC} = 90^\circ - \widehat{ABC}.$$

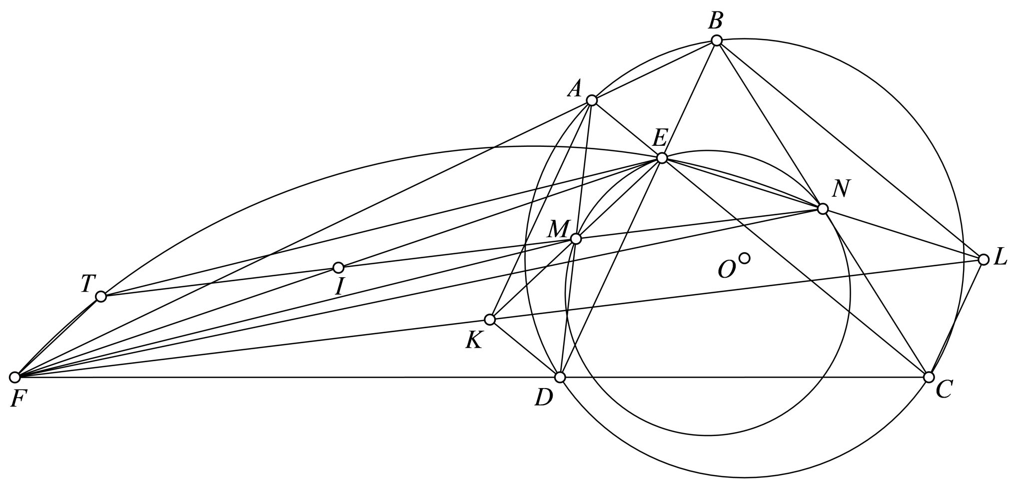
Do đó $FE \perp BC$ hay $FD \perp BC$. Kết hợp với $AH \perp BC$, ta được $AH \parallel DL$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $AHDL$ là hình bình hành.



Bài toán 83. (Hà Nội 2018) Cho tứ giác $ABCD$ (không có hai cạnh nào song song) nội tiếp đường tròn (O). Các tia BA và CD cắt nhau tại điểm F. Gọi E là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Vẽ hình bình hành $AEDK$.

1. Chứng minh rằng tam giác FKD đồng dạng với tam giác FEB.
2. Gọi M, N tương ứng là trung điểm của các cạnh AD, BC. Chứng minh rằng đường thẳng MN đi qua trung điểm của đoạn thẳng EF.
3. Chứng minh rằng đường thẳng EF tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác EMN.

Lời giải



1. Do tứ giác $AEDK$ là hình bình hành nên $DK \parallel AC$, suy ra
$$\widehat{FDK} = \widehat{DCA} = \widehat{DBA}.$$
Ta có $\triangle FDA \sim \triangle FBC$ (g-g) và $\triangle EDA \sim \triangle ECB$ (g-g) nên
$$\frac{DF}{BF} = \frac{AD}{BC} = \frac{EA}{EB} = \frac{DK}{EB}.$$
Hay
$$\frac{DF}{DK} = \frac{BF}{BE}.$$
Từ đó, ta có các tam giác FKD và FEB đồng dạng (c-g-c) (1).

2. Gọi I là trung điểm của đoạn EF. Do tứ giác $DKAE$ là hình bình hành nên M là trung điểm của KE, từ đó suy ra $MI \parallel FK$. Bây giờ, dựng hình bình hành $BECL$, ta có
$$\widehat{FCL} = 180^\circ - \widehat{BDC} = 180^\circ - \widehat{BAC} = \widehat{FAC}.$$
Lại có$\triangle FDA \sim \triangle FBC$ (g-g) và $\triangle EDA \sim \triangle ECB$ (g-g) nên
$$\frac{FC}{FA} = \frac{BC}{AD} = \frac{EB}{EA} = \frac{CL}{AE}.$$
Từ đó suy ra tam giác FCL và FAE đồng dạng (c-g-c) (2).
Từ (1) và (2), ta có $\widehat{KFD} = \widehat{EFA} = \widehat{LFC}$ nên ba điểm F, K, L thẳng hàng. Lại có N là trung điểm EL nên I$L \parallel FL$. Từ đó suy ra ba điểm I, M, N thẳng hàng.

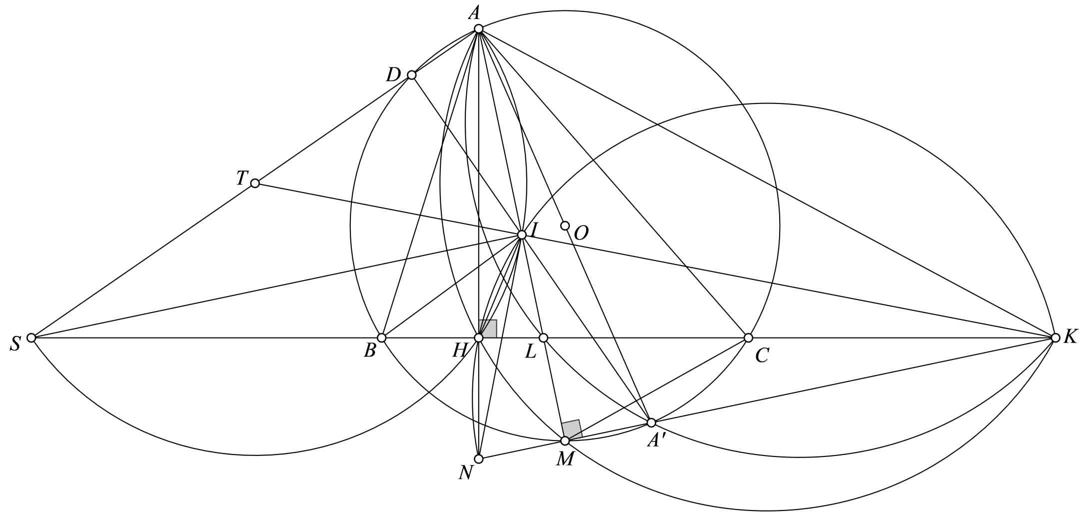
3. Gọi T là điểm đối xứng với M qua I. Ta có tứ giác $METF$ là hình bình hành nên $\widehat{FTE} = \widehat{FME}$. Lại có $\triangle FAD \sim \triangle FCB$ và M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC nên $\triangle FAM \sim \triangle FCN$ (c-g-c). Từ đó suy ra $\widehat{FMA} = \widehat{FNC}$.
Chứng minh tương tự, ta có $\triangle EDA \sim \triangle ECB$ nên $\triangle EMA \sim \triangle ENB$, suy ra $\widehat{EMA} = \widehat{ENB} = \widehat{CNL}$.
Từ đó, ta có $\widehat{FME} = \widehat{FNL} = 180^\circ - \widehat{FNE}$, suy ra $\widehat{FTE} = 180^\circ - \widehat{FNE}$. Do đó tứ giác $ETFN$ nội tiếp, suy ra $\widehat{ENM} = \widehat{EFT} = \widehat{MEF}$. Vậy EF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác EMN.

Bài toán 84. Cho tam giác nhọn ABC không cân nội tiếp đường tròn (O), đường cao AH và tâm đường tròn nội tiếp là I. Đường thẳng AI cắt lại đường tròn (O) tại điểm thứ hai M. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua O. Đường thẳng MA' cắt các đường thẳng AH, BC theo thứ tự tại N và K.

1. Chứng minh rằng tứ giác $NHIK$ nội tiếp.

2. Đường thẳng $A'I$ cắt lại đường tròn (O) tại điểm thứ hai D, hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại điểm S. Chứng minh rằng nếu $AB + AC = 2BC$ thì I là trọng tâm của tam giác AKS.

Lời giải



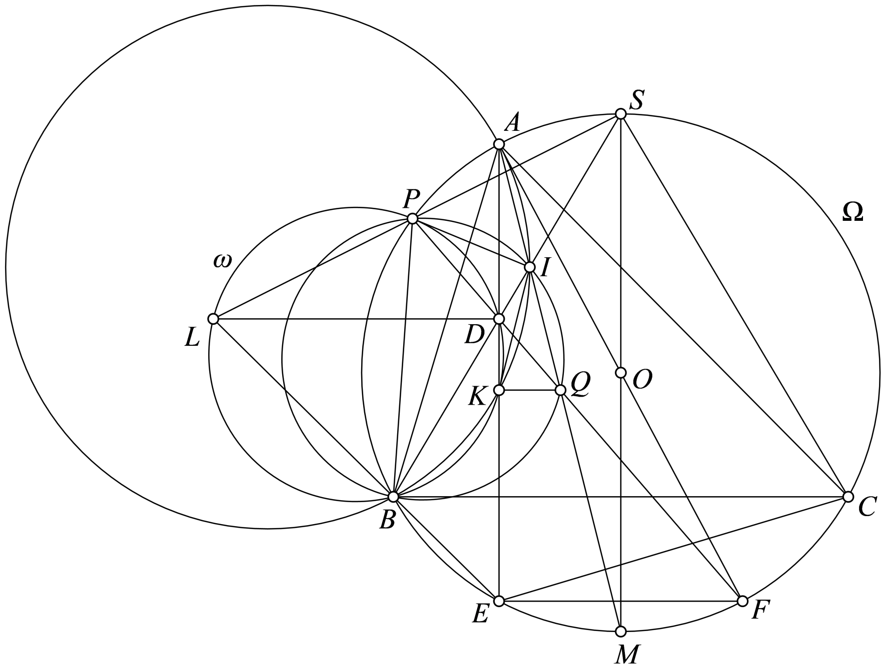
1. Gọi $AM \cap BC = \{L\}$. Ta có AI là tia phân giác của $\widehat{HAO}$ là một kết quả quen thuộc. Vì vậy, tam giác $AA'N$ cân tại A' nên $MN = MA'$. Ta có tứ giác $AHMK$ nội tiếp nên $\widehat{A'AL} = \widehat{HAM} = \widehat{LKA'}$. Do đó, tứ giác $ALA'K$ nội tiếp. Suy ra
$$MN.MK = MA'.MK = ML.MA$$
Mặt khác, ta cũng có $ML.MA = MC^2 = MI^2$ (kết quả cơ bản) nên $MN.MK = MI^2$. Suy ra tam giác NIK vuông tại I. Từ đây, ta được tứ giác $NHIK$ nội tiếp.

2. Vì tứ giác $NHIK$ nội tiếp nên ta có
$$\widehat{IHK} = \widehat{INA'} = \widehat{IA'M} = \widehat{IAS}.$$
Do đó, tứ giác $AIHS$ nội tiếp. Vậy nên $\widehat{AIS} = \widehat{AHS} = 90°$.
Gọi T là trung điểm của AS, ta có
$$\widehat{TIA} = \widehat{TAI} = \widehat{IHK} = \widehat{INK} = \widehat{MIK}.$$
Do đó, ba điểm T, I, K thẳng hàng. Ta sẽ chứng minh L là trung điểm của SK. Trong tam giác ABC có AL là tia phân giác trong của $\widehat{BAC}$ nên ta có biến đổi tỉ số như sau
$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow BL.AC = AB.(BC - BL) \Rightarrow BL.AC + AB.BL = AB.BC \Rightarrow \frac{AB}{BL} = 2.$$
Mà BI lại là tia phân giác trong của $\widehat{ABL}$ nên $\dfrac{AI}{IL} = \dfrac{AB}{BL} = 2.$
Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ASL với cát tuyến TIK, ta được
$$\frac{TA}{TS} \cdot \frac{IL}{IA} \cdot \frac{SK}{KL} = 1 \Rightarrow \frac{SK}{KL} = 2.$$
Do đó, L là trung điểm của SK, ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 85. (IMO 2023 P2) Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$. Gọi Ω là đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC. S là điểm chính giữa cung BC của Ω chứa A. Đường cao kẻ từ A xuống BC cắt BS tại D và cắt Ω tại $E \neq A$. Đường thẳng qua D song song với BC cắt BE tại L. Gọi đường tròn ngoại tiếp của tam giác BDL là ω. Gọi ω cắt Ω tại $P \neq B$. Chứng minh rằng tiếp tuyến của ω tại P , phân giác của $\widehat{BAC}$ và BS đồng quy.

Lời giải

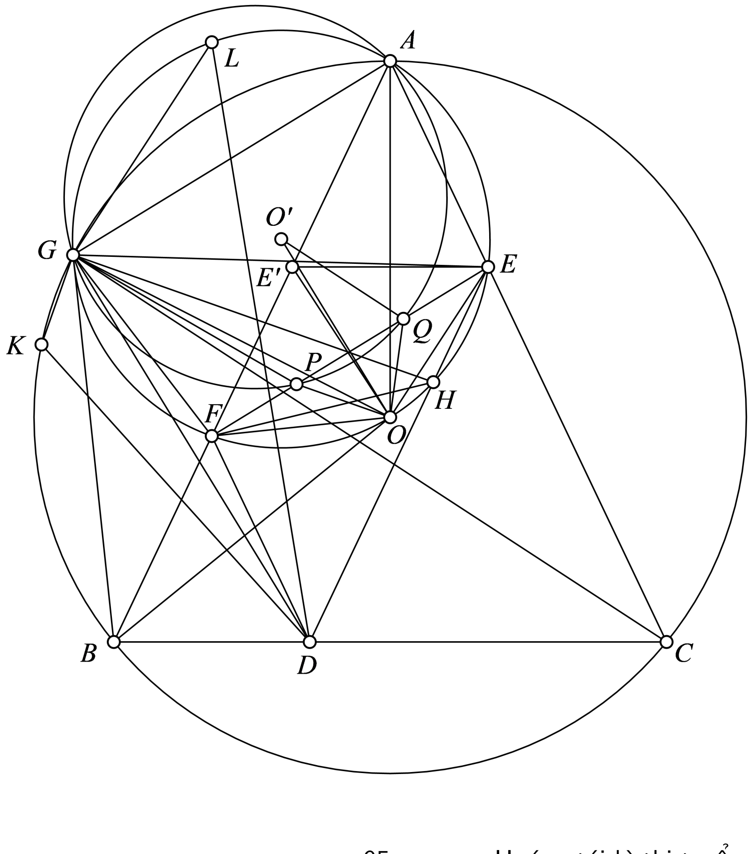
Gọi đường phân giác góc $\widehat{BAC}$ cắt đoạn thẳng BS tại điểm I và cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm M. Do tứ giác $BDPL$ nội tiếp và $DL \parallel BC$ nên
$$\widehat{BDL} = \widehat{BPL} = \widehat{DBC} = \widehat{SCB} = 180° - \widehat{SPC}$$
Suy ra ba điểm S, P, L là ba điểm thẳng hàng. Kẻ AF là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Suy ra điểm E đối xứng với điểm F qua đoạn thẳng SM. Ta có $\widehat{SPD} = \widehat{DBL} = \widehat{SCE} = \widehat{SPF}$ kéo theo ba điểm P, D, F là ba điểm thẳng hàng. Gọi đoạn thẳng DP cắt đoạn thẳng AM tại điểm Q. Ta có:
$$\widehat{BPD} = \widehat{BLD} = \widehat{EBC} = 90° - \widehat{AEB} = 90° - \widehat{AMB} = \widehat{BIM} = \widehat{BIQ}$$
Nên tứ giác $BPIQ$ nội tiếp. Ta có $\widehat{IDA} = \widehat{BSM} = \widehat{BAM}$ suy ra $IA^2 = ID \cdot IB$. Kẻ đoạn thẳng KQ vuông góc với đoạn thẳng AE thì $DK \cdot DA = DP \cdot DQ = DI \cdot DB$. Do đó tứ giác $AIKB$ nội tiếp. Mà $IA^2 = ID \cdot IB$ nên $IA = IK$. Lại có $\widehat{AKQ} = 90°$ nên I là trung điểm của đoạn thẳng AQ suy ra $IP = IA$, kéo theo $IP^2 = ID \cdot IB$. Vậy đoạn thẳng IP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDL Bài toán được chứng minh.



Bài toán 86. (DH & ĐBBB 2019) Cho tam giác ABC cân tại A, các điểm D, E, F lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $DE \parallel AB, DF \parallel AC$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại các điểm A, G. Đường thẳng DE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại điểm H ($H \neq E$). Đường thẳng qua G vuông góc với GH cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm K ($K \neq G$), đường thẳng qua G vuông góc với GC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại điểm L ($L \neq G$). Gọi P, Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác GDK, GDL. Chứng minh rằng khi điểm D thay đổi trên cạnh BC thì

1. Đường tròn ngoại tiếp tam giác GEF luôn đi qua hai điểm cố định.
2. Đường tròn ngoại tiếp tam giác GPQ luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

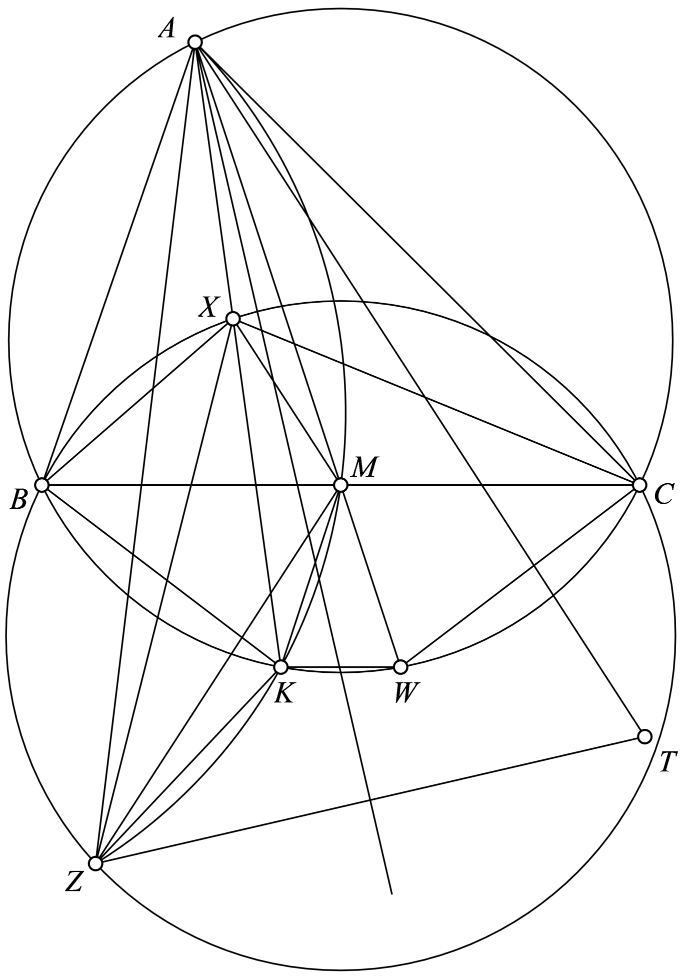


1. Gọi O, O' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, AEF. Gọi E' đối xứng với E qua AO. Dễ thấy tam giác DFB cân tại F nên $FB = FD = AE = AE'$, vì vậy $\triangle OAE' = \triangle OBF$ (c-g-c). Do đó, $OF = OE' = OE$. Kết hợp với AO là tia phân giác của $\widehat{FAE}$, ta được $O \in (GEF)$. Do đó, đường tròn (GEF) đi qua hai điểm cố định A, O.

2. Ta có $\widehat{FDG} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOG} = \dfrac{1}{2}\widehat{AFG}$. Do đó, tam giác FBG cân tại F. Kết hợp với tam giác FBD cân tại F, ta được F là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác GDB. Tương tự, ta cũng có E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác GDC. Do đó, $EF \perp GD$.
Mặt khác, dễ thấy $AG \perp GD$. Vì vậy, $EF \perp GA$. Ta có $\widehat{FHD} = \widehat{EAF} = \widehat{EDF}$ nên tam giác FDH cân tại F. Do đó, $H \in (GBD)$.
Dễ thấy $OP \parallel GH, O'Q \parallel GC$ và bốn điểm F, P, Q, E thẳng hàng. Do đó, $OO' \perp PQ$. Ta có $OE \perp O'Q$ nên $QE = QO$. Tương tự, ta cũng có $PO = PF$. Mà $OE = OF$ nên $OP = OQ$. Vì vậy, OO' là trung trực của của đoạn PQ. Kết hợp với OO' là trung trực của đoạn GA, ta được tứ giác $AGPQ$ là hình thang cân. Do đó, (GPQ) đi qua điểm A cố định.

Bài toán 87. Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$, nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi M là trung điểm của BC. Lấy điểm X nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{BAX} = \widehat{CAM}$. Trên đường tròn ngoại tiếp tam giác XBC, lấy điểm Z sao cho $\widehat{CXM} = \widehat{BXZ}$. Lấy T là điểm đối xứng với Z qua tia phân giác $\widehat{BAC}$. Chứng minh rằng AT song song với XM.

Lời giải



Gọi giao điểm thứ hai của AX, AM với đường tròn (ABC) lần lượt là K, W. Dễ thấy $MK = MW$. Do đó, $MA.MK = MA.MW = MB^2$. Tương tự, ta cũng có $MX.MZ = MB^2$. Suy ra

$$MA.MK = MX.MZ \Rightarrow \frac{MX}{MA} = \frac{MK}{MZ}.$$

Mặt khác, ta có $\widehat{AMB} = \widehat{KMB}$ và $\widehat{ZMB} = \widehat{XMB}$, suy ra $\widehat{AMX} = \widehat{ZMK}$. Từ đây, ta dễ dàng có $\triangle AMX \sim \triangle ZMK$ (c-g-c). Do đó, ta thu được $\widehat{MAX} = \widehat{MZK}$, hay tứ giác $AMKZ$ nội tiếp. Suy ra

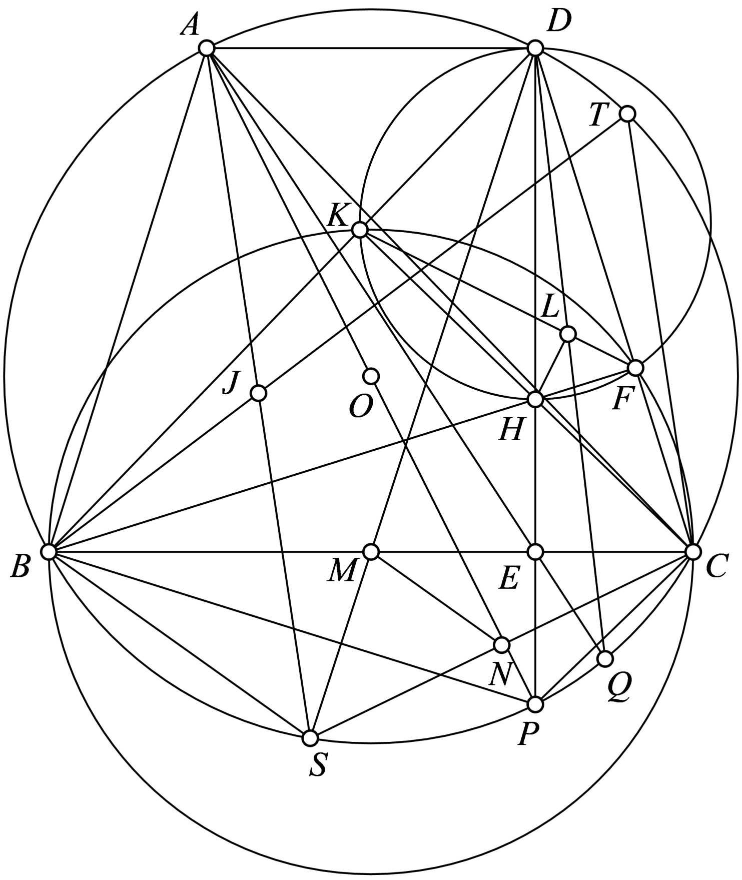
$$\widehat{MAT} = \widehat{ZAK} = \widehat{ZMK} = \widehat{AMX}.$$

Do đó $AT \parallel XM$, ta được điều phải chứng minh.

Bài toán 88. (Chuyên Tin Hà Nội 2024) Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O). Đường thẳng đi qua A và song song với đường thẳng BC cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Đường thẳng DM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là S.

1. Chứng minh tam giác ACS đồng dạng với tam giác BMS.
2. Gọi J là trung điểm đoạn thẳng AS. Đường thẳng BJ cắt đường tròn (O) tại giao điểm thứ hai là T. Chứng minh rằng đường thẳng CT song song với đường thẳng AS.
3. Các đường cao DE, BF, CK của tam giác BCD đồng quy tại H. Gọi L là chân đường vuông góc kẻ từ điểm H đến đường thẳng KF. Chứng minh rằng các đường thẳng AE và DL cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn (O).

Lời giải



1. Ta có $\widehat{MSB} = \widehat{DSB} = \widehat{ASC}$. Kết hợp với $\widehat{MBS} = \widehat{CAS}$, ta được $\triangle ACS \sim \triangle BMS$ (g-g).
2. Gọi N là trung điểm của SC. Tương tự câu (1.), ta chứng minh được $\triangle ABS \sim \triangle CMS$ (g-g), do đó ta được

$$\frac{AS}{CS} = \frac{AB}{CM} = \frac{AJ}{CN}$$

và $\widehat{BAJ} = \widehat{MCN}$. Do đó, Ta được $\triangle ABJ \sim \triangle CMN$ (c-g-c), do đó $\widehat{ABJ} = \widehat{CMN}$ (1).
Mặt khác ta có MN là đường trung bình trong tam giác BCS nên $MN \parallel BS$, vậy nên ta được $\widehat{CMN} =$

$\widehat{CBS}$ (2).

Từ (1) và (2) ta được $\widehat{ABJ} = \widehat{CBS}$ hay $\widehat{ABT} = \widehat{CBS}$. Từ đây, ta dễ dàng suy ra được điều phải chứng minh.

3. Gọi giao điểm của AE và DL là Q. Kẻ đường kính AP của (O). Ta có

$$\widehat{PDB} = \widehat{PAB} = 90^\circ - \widehat{ABP} = 90^\circ - \widehat{ACB} = \widehat{EDB}.$$

Do đó ba điểm D, E, P thẳng hàng. Kết hợp với tứ giác $DKHF$ nội tiếp, ta có

$$\widehat{HFL} = \widehat{HAK} = \widehat{FCE} \text{ và } \widehat{HKL} = \widehat{HDF} = \widehat{PBE}.$$

Do đó, ta được các cặp tam giác đồng dạng là $\triangle HFL \sim \triangle PCE$ (g-g) và $\triangle HKL \sim \triangle PBE$ (g-g). Từ đó ta có

$$\frac{LF}{EC} = \frac{HL}{PE}, \quad \frac{KL}{BE} = \frac{HL}{PE}.$$

Suy ra

$$\frac{LF}{EC} = \frac{KL}{BE} = \frac{LF + KL}{EC + BE} = \frac{KF}{BC} \text{ (3)}.$$

Mặt khác ta có kết quả quen thuộc $\triangle DKF \sim \triangle DCB$ (g-g) và $\triangle DCB = \triangle ABC$, ta được hai tam giác DKF và ABC đồng dạng với nhau. Từ đó suy ra

$$\frac{DF}{AC} = \frac{KF}{BC} \text{ (4)}.$$

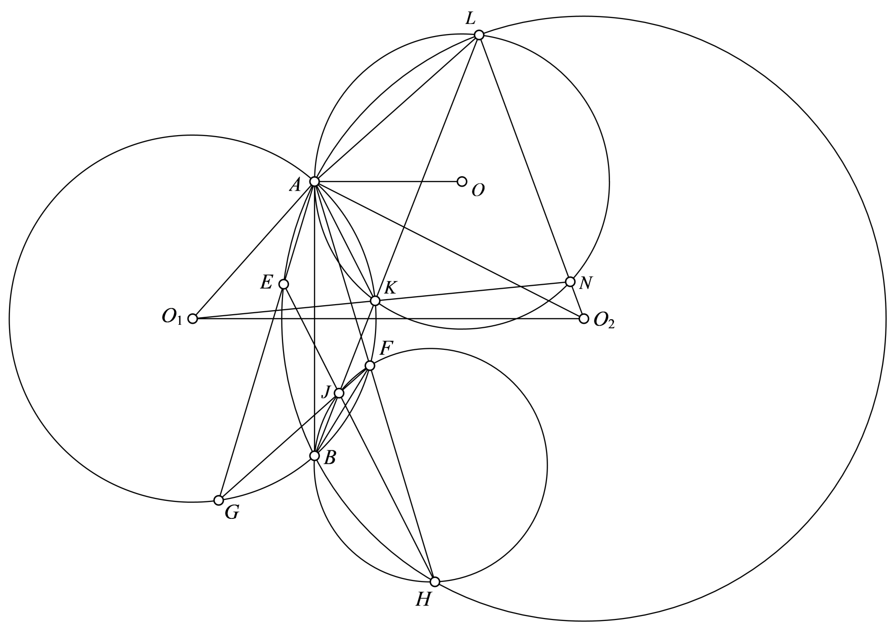
Từ (3) và (4) suy ra

$$\frac{LF}{EC} = \frac{DF}{AC} \Rightarrow \frac{LF}{DF} = \frac{EC}{AC}.$$

Kết hợp với $\widehat{DFL} = \widehat{ACE}$, ta được $\triangle DFL \sim \triangle ACE$ (c-g-c). Suy ra $\widehat{LDF} = \widehat{EAC}$ hay $\widehat{QDC} = \widehat{QAC}$. Ta thu được tứ giác $ADCQ$ nội tiếp. Từ đây, ta dễ dàng có được điều phải chứng minh.

Bài toán 89. (Nguyễn Văn Linh) Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại hai điểm A, B. d_1, d_2 là hai đường thẳng qua A và đối xứng nhau qua AB. d_1 cắt $(O_1), (O_2)$ tại G, E phân biệt. d_2 cắt $(O_1), (O_2)$ lần lượt tại các điểm F, H. Giả sử E nằm giữa A, G và F nằm giữa A, H. EH cắt FG tại điểm J. BJ cắt $(O_1), (O_2)$ tại các điểm K, L phân biệt và O_1K cắt O_2L tại điểm N. Chứng minh rằng (NKL) tiếp xúc với AB.

Lời giải



Ta có $\widehat{NLA} = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\widehat{AO_2L} = 90^\circ - \widehat{ABK} = \widehat{AKO_1}$ nên ta được tứ giác $NLAK$ nội tiếp. Mặt khác, dễ thấy B là điểm Miquel của tứ giác $AEJF$ nên có biến đổi góc như sau

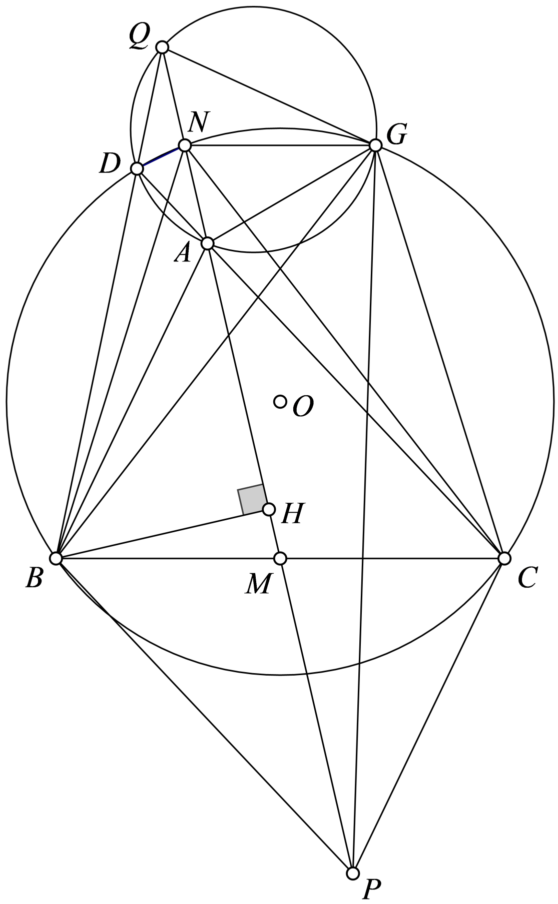
$$\widehat{BAO} = \widehat{BAF} + \widehat{KAF} + \widehat{KAO} = \widehat{BAE} + \widehat{KBF} + \widehat{O_2AB} = \widehat{BAE} + \widehat{AHE} + 90^\circ - \widehat{AO_2O_1} = 90^\circ. \text{ (Vì sao?)}$$

Ta thu được điều phải chứng minh.

Bài toán 90. (HSGS V2 2015) Cho tam giác nhọn ABC không cân với $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên đoạn thẳng AM. Trên tia đối của tia AM lấy điểm N sao cho $AN = 2MH$.

1. Chứng minh rằng $BN = AC$.
2. Gọi Q là điểm đối xứng với A qua N. Đường thẳng AC cắt BQ tại D. Chứng minh rằng bốn điểm B, D, N, C cùng thuộc một đường tròn, gọi đường tròn này là (O).
3. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AQD cắt (O) tại G khác D. Chứng minh rằng NG song song với BC.

Lời giải



1. Gọi P là điểm đối xứng với A qua M. Ta có

$$HP = HM + MB = 2HM + AH = HN \Rightarrow H \text{ là trung điểm } PN.$$

Kết hợp với $BH \perp PN$ nên tam giác BPN cân tại B. Suy ra $BN = BP$. Mặt khác, ta dễ dàng thấy tứ giác $ABPC$ là hình bình hành nên $BP = AC$. Kết hợp với $BN = BP$, ta thu được điều phải chứng minh.

2. Do tứ giác $ACPB$ là hình bình hành nên $\widehat{PAC} = \widehat{APB}$. Kết hợp với tam giác BPN cân tại B nên $\widehat{PAC} = \widehat{ANB} \Rightarrow \widehat{CAN} = \widehat{BNQ}$. Do hai tam giác QBN và NCA có $QN = AN, BN = AC$ và $\widehat{BNQ} = \widehat{CAN}$ nên chúng bằng nhau. Từ đó suy ra $\widehat{QBN} = \widehat{NCA}$ hay $\widehat{DBN} = \widehat{DCN}$. Do đó bốn điểm B, D, N, C cùng thuộc một đường tròn.

3. Ta có $\widehat{CAG} = \widehat{BQG}$. Kết hợp với $\widehat{GBQ} = \widehat{GCA}$ ta được $\triangle GBQ \sim \triangle GCA$, từ đó suy ra

$$\frac{GA}{AC} = \frac{GQ}{QB} \Rightarrow \frac{GA}{NB} = \frac{GQ}{NC}.$$

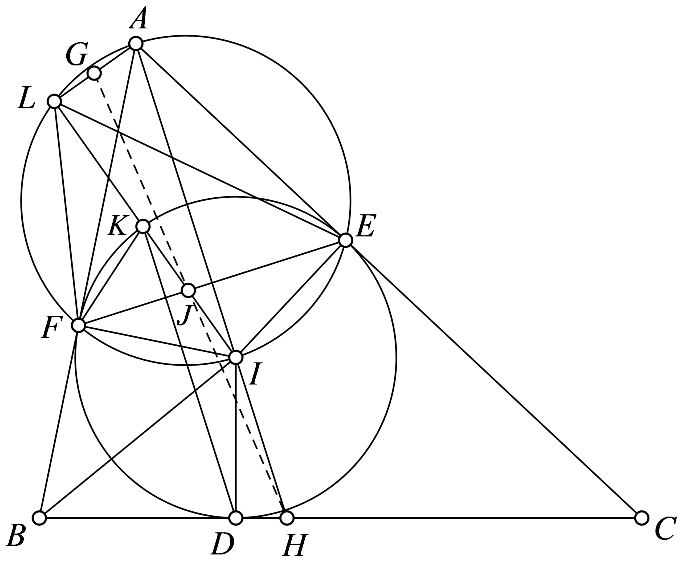
Kết hợp với $\widehat{BNC} = \widehat{BDC} = \widehat{AGQ} \Rightarrow \triangle NBC \sim \triangle GAQ \Rightarrow \widehat{GQA} = \widehat{NCB} \Rightarrow \widehat{NCB} = \widehat{GDC}$.

$$\Rightarrow GC = NB \Rightarrow NG \parallel BC.$$

Bài toán 91. (Thi thử CSP V2 đợt 1 2023) Cho tam giác ABC, với $AB < AC$ và ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của BC, CA, AB với đường tròn (I). Đường thẳng qua D vuông góc với EF, cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai K (khác D). Gọi L là hình chiếu của vuông góc của A trên IK. Các đường thẳng AI, BC cắt nhau tại H; các đường thẳng IK, EF cắt nhau tại J. Chứng minh rằng

1. $\widehat{KIF} = \widehat{ACB}$ và AL là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
2. $LK.BC = AI.EF$.
3. Các đường thẳng DK, HJ, AL đồng quy.

Lời giải



1. Ta có

$$\widehat{KIF} = 2\widehat{KDF} = 2.90^\circ - \widehat{DFE} = 2.90^\circ - \widehat{EDC} = \widehat{ACB}.$$

Do $AL \perp KI$ nên L nằm trên đường tròn (AEF). Do đó

$$\widehat{LAF} = \widehat{LIF} = \widehat{ACB}.$$

Do đó AL là tiếp tuyến của đường tròn (ABC).

2. Ta có L nằm trên đường tròn (AEF). Do đó $\widehat{LEF} = \widehat{LIF} = \widehat{ACB}$ và $\widehat{ELF} = \widehat{EAF}$. Vậy $\triangle LEF \sim \triangle ABC$. Vì $IE = IF$ nên LI là tia phân giác $\widehat{ELF}$. Mặt khác, $\widehat{LEF} = \widehat{KIF} = 2\widehat{KEF}$, ta suy ra EK là tia phân giác $\widehat{LEF}$. Vậy K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác LEF. Từ đó $\triangle LKF \sim \triangle AIB$ (g-g), ta suy ra

$$\frac{LK}{AI} = \frac{LF}{AB} = \frac{EF}{BC}.$$

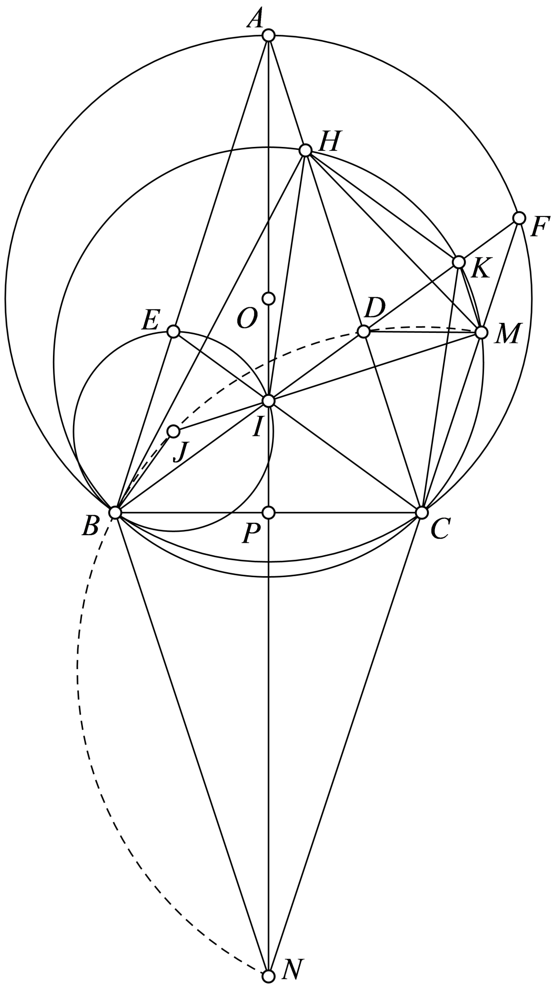
Suy ra $LK.BC = AI.EF$.

3. Gọi G là giao điểm của DK và AL. Ta có
$$IJ.LK = IJ.LI - IJ.IK = IK^2 - IJ.IK = IK.KJ.$$
Suy ra $\dfrac{LK}{KJ} = \dfrac{IK}{IJ}$. Mặt khác $\dfrac{GK}{LK} = \dfrac{AI}{LI}$. Suy ra $\dfrac{GK}{KJ} = \dfrac{IK}{IJ}.\dfrac{AI}{LI}$.
Vì $IJ.LI = IE^2 = IK^2$, nên $\dfrac{GK}{KJ} = \dfrac{AI}{IK}$ (1).
Dễ thấy $\triangle JEI \sim \triangle HAB$. Suy ra $\dfrac{AI}{IH} = \dfrac{BA}{BH} = \dfrac{IE}{IJ} = \dfrac{IK}{IJ}$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{GK}{KJ} = \dfrac{IH}{IJ}$. Suy ra G, J, H thẳng hàng, ta thu được điều phải chứng minh.

Bài toán 92. (Hải Phòng 2022) Cho tam giác ABC cân ($AB = AC > BC$) nội tiếp đường tròn (O). Các đường phân giác trong BD, CE của tam giác ABC cắt nhau tại I, BI cắt (O) tại $F \neq B$. Điểm H đối xứng với C qua D. Đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC cắt BI tại $K \neq B$.

1. Chứng minh rằng $DC^2 = DI.DB$ và D là trung điểm của đoạn thẳng IK.
2. Kẻ KM song song với AC với $M \in FC$. Chứng minh rằng M đối xứng với I qua AC.
3. Gọi N là giao điểm của FC và AI, J là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác IBE. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, J, D cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải



1. Ta có $\widehat{DCI} = \widehat{DBC}$ nên $\triangle DCI \sim \triangle DBC$ (g-g). Do đó, $DC^2 = DI.DB$. Mặt khác, ta có $\widehat{DCI} = \widehat{DBC} = \widehat{DHK}$ nên $HK \parallel IC$. Kết hợp với D là trung điểm của CH, ta dễ chứng minh được D là trung điểm của IK.

2. Ta có

$$\widehat{FMK} = \widehat{FCA} = \widehat{FBA} = \widehat{KBC}.$$

Do đó, $M \in (BHC)$. Suy ra tứ giác $KMCH$ là hình thang cân. Vì vậy, ta thu được $\widehat{DHM} = \widehat{KCH} = \widehat{DHI}$ và $\widehat{DCM} = \widehat{KHC} = \widehat{DCI}$. Từ đây, ta dễ chứng minh được I đối xứng với M qua AC.

3. Gọi P là trung điểm của BC. Ta có

$$\widehat{BNM} + \widehat{BDM} = 2\widehat{PNC} + 2\widehat{BDC} = 2.(\widehat{BCF} - 90^\circ) + 2.(180^\circ - \widehat{DCB} - \widehat{DBC}) = 180^\circ.$$

Do đó, bốn điểm M, N, B, D cùng thuộc một đường tròn (1).
Mặt khác, ta có

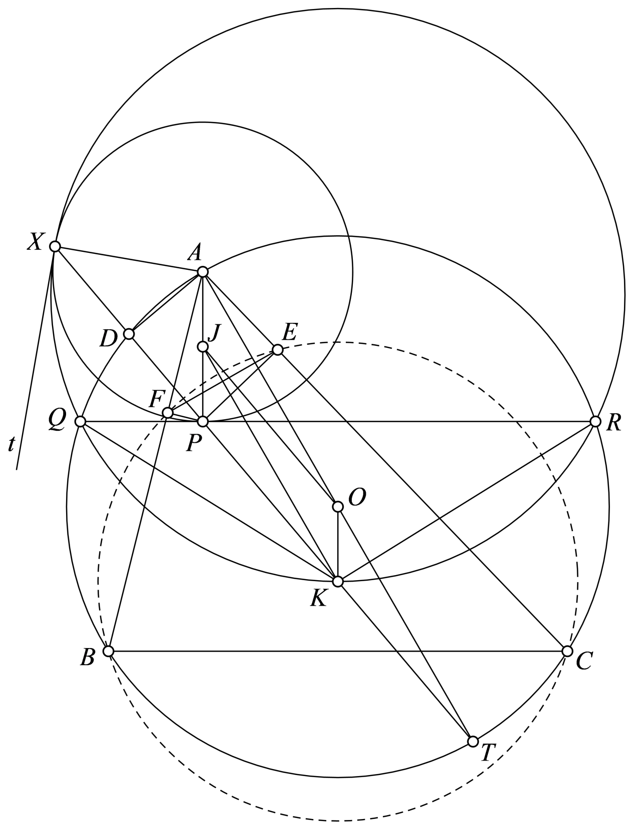
$$\widehat{BJI} = 2\widehat{BEI} = 2\widehat{BDC} = \widehat{IDM}.$$

Kết hợp với hai tam giác cân BJI và IDM, ta được ba điểm J, I, M thẳng hàng. Do đó, $\widehat{BJM} = \widehat{BDM}$. Vậy nên tứ giác $BJDM$ nội tiếp (2).
Từ (1) và (2) suy ra năm điểm N, B, J, D, M cùng thuộc một đường tròn. Do vậy, tứ giác $MNJD$ nội tiếp, ta có được điều phải chứng minh.

Bài toán 93. (HSGS V2 2022) Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O). Điểm P nằm trong tam giác ABC. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của P lên AC, AB. Giả sử tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn (K).

1. Chứng minh rằng AP vuông góc với BC.
2. Chứng minh rằng $AP = 2OK$.
3. Đường thẳng qua P vuông góc với AP cắt đường tròn (O) tại hai điểm Q và R. Chứng minh rằng đường tròn tâm A bán kính AP tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác KQR.

Lời giải



1. Để ý các tứ giác $AFDE$ và $BCEF$ nội tiếp nên ta có $\widehat{APF} = \widehat{AEF} = \widehat{ABC}$. Từ đây, ta dễ dàng suy ra $AP \perp BC$.

2. Ta thấy OK là trung trực của đoạn thẳng BC nên $OK \perp BC$, kéo theo đó ta được $AP \parallel OK$. Mặt khác, ta có
$$\widehat{OAC} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{AOC} = 90^\circ - \widehat{ABC} = 90^\circ - \widehat{AEF}.$$
Vậy nên $OA \perp EF$. Gọi J là trung điểm của AP, khi đó J, K lần lượt là tâm của đường tròn $(AFPE)$ và $(BCEF)$ nên $JK \perp EF$. Từ đây ta suy ra $OA \parallel JK$. Kết hợp với $OK \parallel AP$, ta được tứ giác $AJKO$ là hình bình hành. Vì vậy $OK = AJ = \dfrac{AP}{2}$ hay $AP = 2OK$.

3. Dựng đường kính AT của đường tròn (O), khi đó OJ là đường trung bình trong tam giác APT nên $OJ \parallel PT$. Mặt khác, từ tứ giác $AJKO$ là hình bình hành, ta có thể suy ra tứ giác $PJOK$ là hình bình hành, do đó $OJ \parallel PK$. Kết hợp với $OJ \parallel PT$, ta được ba điểm P, K, T thẳng hàng và K là trung điểm của PT. Gọi D là giao điểm thứ hai của PT đường tròn (O), khi đó $\widehat{ADP} = \widehat{ADT} = 90^\circ$.
Gọi X là điểm đối xứng với P qua D. Khi đó, ta dễ dàng thấy tam giác APX cân tại A nên $AX = AP$, suy ra $X \in (A, AP)$. Mặt khác, ta có $PX.PK = 2PD.PK = PD, PT = PQ.PR$ nên $X \in (KQR)$.
Dựng tia tiếp tuyến Xt của (A, AP), khi đó $Xt \perp AX$. Dễ thấy OK là trung trực của đoạn thẳng QR nên $KQ = KR$ nên XK là tia phân giác $\widehat{QXR}$. Suy ra $\triangle XQP \sim \triangle XKR$, do đó ta có
$$\widehat{XRK} = \widehat{XPQ} = 90^\circ - \widehat{XAP} = 90^\circ - \widehat{AXP} = \widehat{tXK}.$$
Do đó, Xt là tiếp tuyến của đường tròn (KQR). Từ đó, ta có điều phải chứng minh.

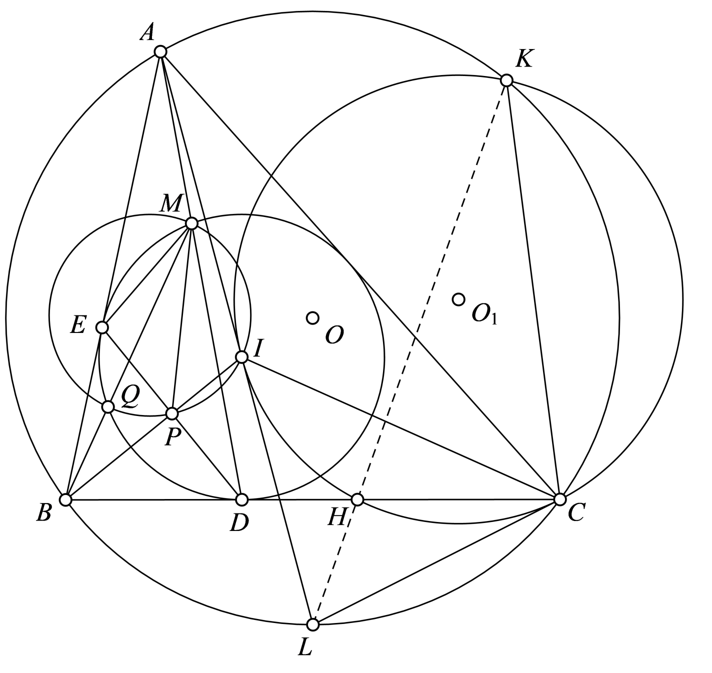
Bài toán 94. Cho đường tròn (O) và dây cung BC cố định (BC khác đường kính). Điểm A thuộc cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn và $AB < AC$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, AB lần lượt tại D, E. Đường thẳng AD cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai là M; BM cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai là Q; BI cắt DE tại P.

1. Chứng minh tứ giác $IPQM$ nội tiếp.

2. Chứng minh $\widehat{BME} = \widehat{DMP}$.

3. Đường tròn đi qua C tiếp xúc với AI tại I cắt BC tại H và cắt (O) tại điểm K. Chứng minh rằng khi A di động trên cung lớn BC thì đường thẳng HK luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



1. Ta có

$$BQ.BM = BE^2 = BP.BI.$$

   Do đó, tứ giác $IPQM$ nội tiếp.

2. Đây là kết quả quen thuộc được suy ra từ **mô hình tiếp tuyến**.

3. Gọi L là điểm chính giữa cung nhỏ BC, O_1 là tâm đường tròn đi qua C và tiếp xúc với AI tại I. Ta định nghĩa lại điểm H là giao điểm của LK và BC và ta sẽ chứng minh $H \in (O_1)$. Thật vậy, ta có

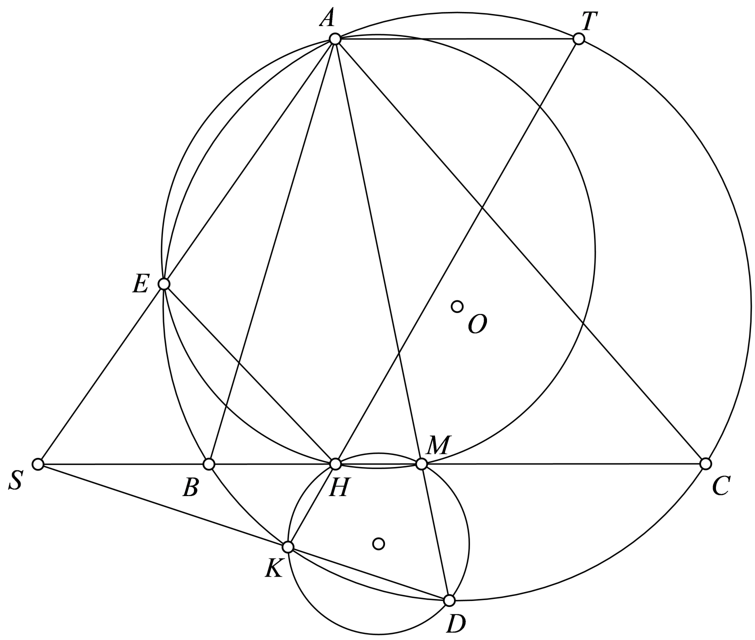
$$\widehat{LCH} = \widehat{LAB} = \widehat{LAC} = \widehat{LKC}.$$

   Do đó, ta được $\triangle LCH \sim \triangle LKC$ (g-g). Suy ra $LC^2 = LH.LK$. Mà $LC = LI$ nên $LI^2 = LH.LK$. Do đó, $H \in (O_1)$, ta thu được điều phải chứng minh.

Bài toán 95. (Thi thử CSP V2 đợt 3 2024) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và $AB < AC$. Điểm M thay đổi trên cạnh BC (M khác B, M khác C). Đường thẳng AM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D. Đường tròn đường kính AM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai E (E khác A) và cắt BC tại điểm thứ hai H. Giả sử đường thẳng AE cắt đường thẳng BC tại điểm S; đường thẳng SD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai K. Chứng minh rằng

1. $SH.SM = SB.SC$.
2. Các điểm M, H, K, D cùng thuộc một đường tròn (ω).
3. Tâm đường tròn (ω) chạy trên một đường thẳng cố định.

Lời giải

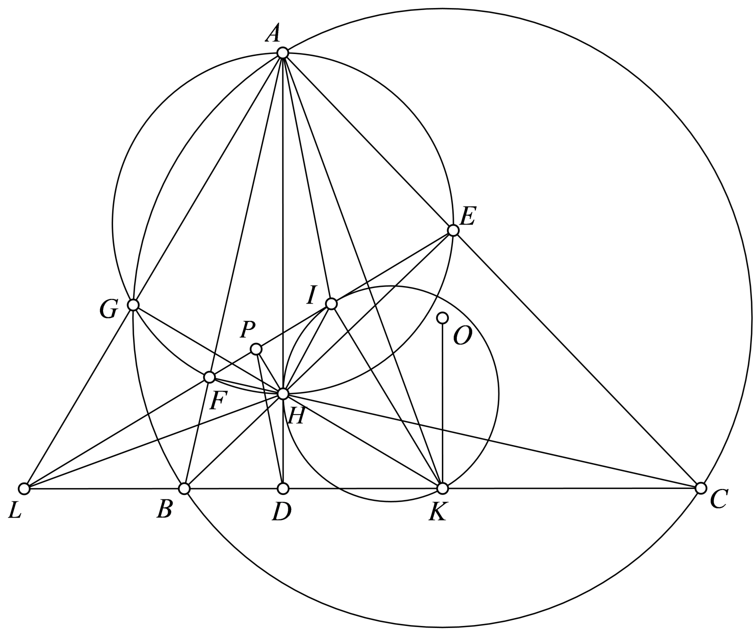


1. Theo phương tích, ta có $SH.SM = SE.SA = SB.SC$.
2. Ta có $SH.SM = SB.SC = SK.SD$. Do đó, tứ giác $KHMD$ nội tiếp. Ta thu được điều phải chứng minh.
3. Gọi giao điểm thứ hai của KH với đường tròn (O) là T. Ta có $\widehat{ATK} = \widehat{ADK} = \widehat{THC}$.
   Do đó $AT \parallel BC$, vậy nên T là điểm cố định. Dễ thấy H là hình chiếu của A lên BC nên H cố định. Từ đây, ta suy ra K là điểm cố định. Vậy tâm của đường tròn (ω) thuộc đường trung trực của KH (cố định).

Bài toán 96. (Chuyên Tin Hà Nội 2022) Cho tam giác ABC với $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O). Ba đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cùng đi qua điểm H. Gọi I và K lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng EF và BC.

1. Chứng minh $\dfrac{AI}{AK} = \dfrac{HI}{HK}$.
2. Chứng minh đường thẳng AH là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác IHK.
3. Gọi P là chân đường vuông góc kẻ từ điểm H đến EF. Chứng minh rằng đường thẳng DP song song với đường thẳng AI.

Lời giải



1. Ta có kết quả quen thuộc $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ (g-g), mà I và K tương ứng là trung điểm của EF và BC nên ta cũng được $\triangle AEI \sim \triangle ABK$. Suy ra
$$\frac{AI}{AK} = \frac{EI}{BK} = \frac{EI}{CK} \ (1).$$
Mặt khác, ta cũng có $\triangle HFE \sim \triangle HBC$ (g-g) nên
$$\frac{HE}{HC} = \frac{EF}{BC} = \frac{EI}{KC}.$$
Kết hợp với $\widehat{HEI} = \widehat{HCK}$, ta được $\triangle HEI \sim \triangle HCK$. Vậy nên
$$\frac{HI}{HK} = \frac{EI}{CK} \ (2).$$
Từ (1) và (2), ta thu được điều phải chứng minh.

2. Từ các tam giác đồng dạng ở câu (1.), ta có biến đổi góc như sau
$$\widehat{HIK} = \widehat{HIE} - 90^\circ = \widehat{HKC} - 90^\circ = \widehat{DHK}.$$
Do đó, HD là tiếp tuyến của đường tròn (IHK). Hay AH là tiếp tuyến của đường tròn (IHK).

3. Gọi giao điểm của EF và BC là L, G là giao điểm thứ hai của LA và (O). Ta có
$$LE.LF = LB.LC = LG.LA.$$

Do đó, tứ giác $AGEF$ nội tiếp, hay G là giao điểm thứ hai của đường tròn đường kính AH và (O). Vậy nên ta được một kết quả quen thuộc là ba điểm G, H, K thẳng hàng và $KG \perp AL$. Từ đây, dễ dàng suy ra H là trực tâm của tam giác AKL. Do đó

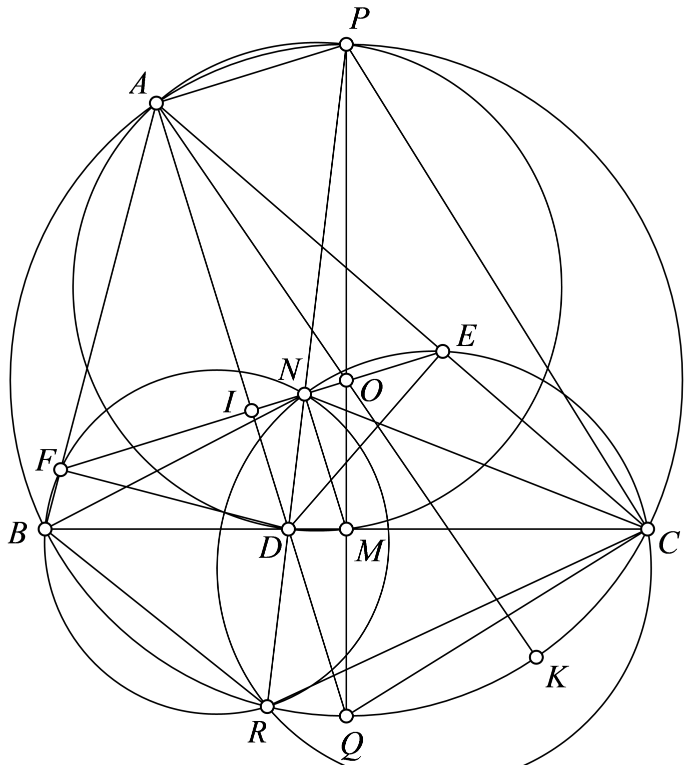
$$\widehat{IPD} = 90^\circ + \widehat{HPD} = 90^\circ + \widehat{HLD} = 90^\circ + 90^\circ - \widehat{AKL} = 180^\circ - \widehat{AKL} = \widehat{AKC} = \widehat{AIF}.$$

Do đó tứ giác $AI \parallel PD$. Đây là điều phải chứng minh.

Bài toán 97. (Thi thử THPT Chuyên Lam Sơn - Thanh Hoá 2023) Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O). Phân giác trong của $\widehat{BAC}$ cắt BC tại D và cắt (O) tại Q ($Q \neq A$). Từ D dựng DE, DF lần lượt vuông góc với AC, AB ($E \in AC, F \in AB$). Gọi M là trung điểm của đoạn BC, tia QM cắt (O) tại giao điểm thứ hai là P.

1. Chứng minh $QM.QP = QD.QA$.
2. Gọi N là giao điểm của PD và EF. Chứng minh rằng MN song song với AD.
3. Dựng đường kính AK của đường tròn (O). Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BFN và CEN cắt nhau tại điểm R ($R \neq N$). Chứng minh rằng ba điểm P, D, R thẳng hàng.

Lời giải



1. Vì $\widehat{QMD} = \widehat{DAP} = 90^\circ$ nên tứ giác $DMPA$ nội tiếp. Do đó, theo phương tích, ta được $QM.QP = QD.QA$.
2. Gọi I là giao điểm của AD và EF. Ta có $\triangle AED \sim \triangle PCQ$ (g-g). Mà EI, CM là hai đường cao tương ứng nên $\dfrac{QM}{QP} = \dfrac{DI}{DA}$ (1).
Mặt khác, ta có $NI \parallel AP$ nên $\dfrac{DI}{DA} = \dfrac{DN}{DP}$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{QM}{QP} = \dfrac{DN}{DP}$. Vì vậy, $MN \parallel AD$ theo định lý Thales đảo.
3. Trước hết, ta chứng minh $R \in (O)$. Thật vậy, ta có

$$\widehat{BRC} = \widehat{BRN} + \widehat{NRC} = \widehat{AFN} + \widehat{AEN} = 180^\circ - \widehat{BAC}.$$

Do đó, tứ giác $ABRC$ nội tiếp, hay $R \in (O)$. Lúc này, ta có

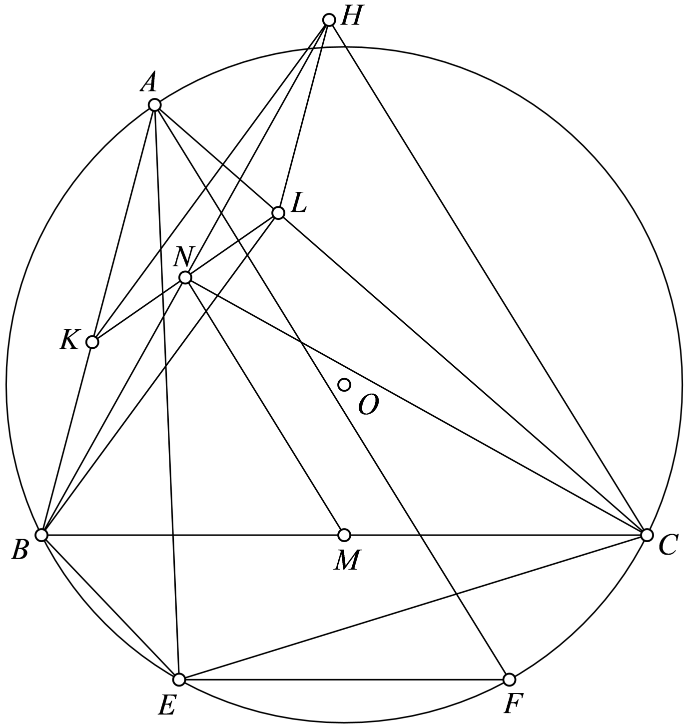
$$\widehat{NRC} = \widehat{AEN} = \widehat{CAP} = \widehat{PRC}.$$

Do đó, ta được ba điểm P, N, R thẳng hàng. Suy ra ba điểm P, D, R thẳng hàng.

Bài toán 98. (TPHCM 2024) Cho tam giác ABC nhọn, $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O). Gọi E là một điểm bất kì thuộc cung nhỏ BC của đường tròn (O) sao cho $BE < BA$. Trên các cạnh AB, AC của tam giác ABC lần lượt lấy các điểm K, L sao cho $BK = BE$ và $CL = CE$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, KL.

1. Chứng minh rằng $\widehat{BNC} = 90^\circ$.
2. Gọi F là một điểm thuộc đường tròn (O) sao cho đường thẳng EF song song với đường thẳng BC. Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với đường thẳng AF.

Lời giải



1. Lấy điểm H đối xứng với B qua N. Khi đó, tứ giác $BKHL$ là hình bình hành. Do đó, $HL = BK = BE$. Mặt khác, chú ý rằng tứ giác $ABEC$ là hình bình hành và $HL \parallel BK$ nên ta có biến đổi góc như sau

$$\widehat{CLH} = 180^\circ - \widehat{AHL} = 180^\circ - \widehat{BAC} = \widehat{CEB}.$$

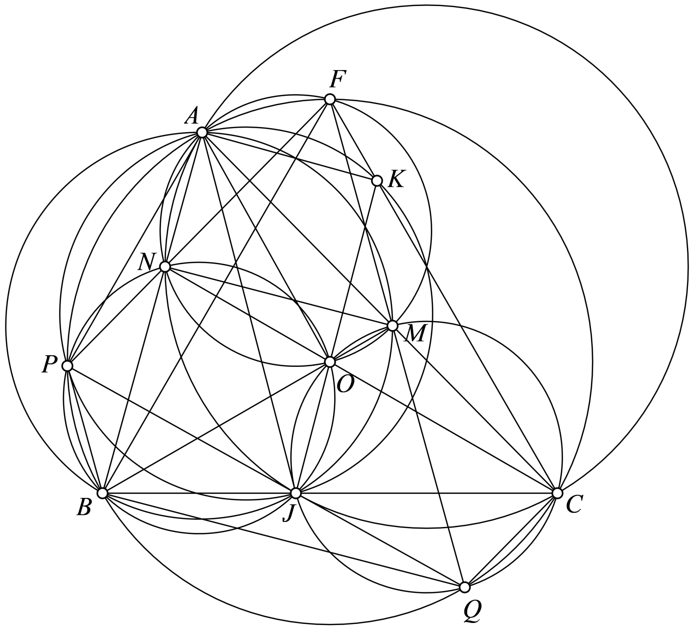
   Kết hợp với $CL = CE$, ta được $\triangle CEB = \triangle CLH$ (c-g-c). Do đó, $CH = CB$ nên tam giác CHB cân tại C. Mà N là trung điểm của BH nên $CN \perp BH$. Vì vậy, $\widehat{BNC} = 90^\circ$.

2. Trong đường tròn (O) có $EF \parallel BC$ nên $\widehat{CAE} = \widehat{BCE}$. Mà $\widehat{BCE} = \widehat{HCL}$ nên $\widehat{CAE} = \widehat{HCL}$. Do đó, $CH \parallel AF$. Mà theo tính chất đường trung bình thì $MN \parallel CH$ nên ta suy ra $MN \parallel AF$. Đây là điều cần chứng minh.

Bài toán 99. (Hà Nội 2021) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), với $\widehat{BAC} = 60^\circ$ và $AB < AC$. Các đường thẳng BO, CO lần lượt cắt các đoạn thẳng AC, AB tại M, N. Gọi F là điểm chính giữa của cung BC lớn.

1. Chứng minh năm điểm A, N, O, M và F cùng thuộc một đường tròn.
2. Gọi P, Q lần lượt là các giao điểm thứ hai của hai tia FN, FM với đường tròn (O). Gọi J là giao điểm của đường thẳng BC và đường thẳng PQ. Chứng minh tia AJ là tia phân giác của $\widehat{BAC}$.
3. Gọi K là giao điểm của đường thẳng OJ và đường thẳng CF. Chứng minh AB vuông góc với AK.

Lời giải



1. Ta có

$$\widehat{MON} = \widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 120^\circ = 180^\circ - \widehat{MAN}$$

Do đó, tứ giác $AMON$ nội tiếp (1). Mặt khác, ta có $\widehat{NBM} = \widehat{NAO} = \widehat{NMO}$. Vậy nên tam giác NBM cân tại N. Suy ra $NB = NM$. Tương tự, ta cũng chứng minh được $NM = NC$. Từ đây, ta suy ra được $\triangle FNB = \triangle FMC$ (c-g-c). Do đó, ta thu được $\widehat{NFB} = \widehat{MFC}$. Chú ý, ta có biến đổi góc sau

$$\widehat{NFM} = \widehat{NFB} + \widehat{BFM} = \widehat{MFC} + \widehat{MFB} = \widehat{BFC} = 60^\circ = 180^\circ - \widehat{MON}.$$

Do đó tứ giác $NFMO$ nội tiếp (2). Từ (1) và (2), ta suy ra được điều phải chứng minh.

2. Từ hai tam giác FNB và FMC bằng nhau, ta được $FN = FM$. Hay tam giác FNM cân tại F. Kết hợp với $\widehat{NFM} = 60^\circ$, ta suy ra được tam giác FNM là tam giác đều. Vậy nên $MF = MN = MC$. Từ đây, ta dễ dàng suy ra số đo các cung AF, CQ, PB là bằng nhau.
Ta dễ dàng suy ra được các tứ giác nội tiếp là $QJMC$ và $BPNJ$. Mặt khác, ta có

$$\widehat{MOC} = \widehat{BAC} = 60^\circ = \widehat{MQC}.$$

Do đó, tứ giác $MOQC$ nội tiếp. Hay năm điểm M, O, J, Q, C cùng thuộc một đường tròn. Tương tự, ta cũng có năm điểm N, B, P, J, O cùng thuộc một đường tròn. Từ đây, ta suy ra các tứ giác MJB và $ANJC$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{MAJ} = \widehat{MBJ} = \widehat{NCJ} = \widehat{NAJ}$. Vậy nên AJ là tia phân giác của $\widehat{BAC}$.

3. Theo câu (2.), ta có tứ giác $PBQC$ là hình thang cân với OJ là trung trực của CP. Mặt khác

$$\widehat{JAP} = \widehat{CAP} - \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{CAP} - 30^\circ = \widehat{JOP} - \widehat{OCF} = \widehat{JOP} - \widehat{OPK} = \widehat{JKP}.$$

Nên tứ giác $AKJP$ là tứ giác nội tiếp. Do đó, $\widehat{JAK} = \widehat{JPK} = \widehat{JCK} = 60^\circ$. Chú ý rằng

$$\widehat{BAK} = \widehat{JAK} + \widehat{JAP} = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ.$$

Vậy nên $AB \perp AK$, ta hoàn tất bài toán.

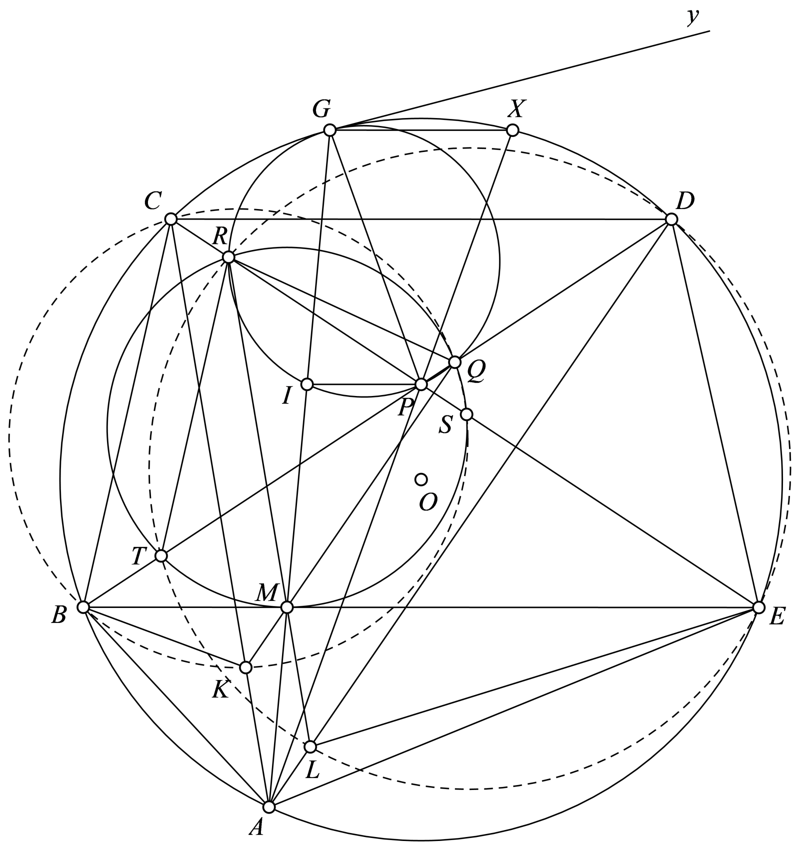
Bài toán 100. (HSGS V2 2018) Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ nội tiếp đường tròn (O) có CD song song với BE. Hai đường chéo CE và BD cắt nhau tại P. Điểm M thuộc đoạn thẳng BE sao cho $\widehat{MAB} = \widehat{PAE}$. Điểm K thuộc đường thẳng AC sao cho MK song song với AD, điểm L thuộc đường thẳng AD sao cho ML song song với AC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác KBC lần lượt BD, CE tại Q, S (Q khác B, S khác C).

1. Chứng minh rằng ba điểm K, M, Q thẳng hàng.

2. Đường tròn ngoại tiếp tam giác LDE lần lượt cắt BD, CE tại T, R (T khác D, R khác E). Chứng minh rằng năm điểm M, S, Q, R, T cùng thuộc một đường tròn.

3. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR tiếp xúc với đường tròn (O).

Lời giải



1. Do các tứ giác $BCQK$ và $BCDA$ nội tiếp nên $\widehat{CKQ} = \widehat{CBQ} = \widehat{CAD}$. Suy ra $KQ \parallel AD$. Mặt khác ta lại có $MK \parallel AD$ nên ba điểm K, M, Q thẳng hàng.

2. Chứng minh tương tự như câu (1.), ta cũng có ba điểm R, M, L thẳng hàng. Ta có $MQ \parallel AD$ nên $\widehat{RMQ} = \widehat{RLD} = \widehat{RTD}$, suy ra tứ giác $RTMQ$ nội tiếp. Chứng minh tương tự, ta cũng có tứ giác $RMSQ$ nội tiếp. Do đó, năm điểm M, S, Q, R, T cùng thuộc một đường tròn.

3. Gọi G là giao điểm thứ hai của đường thẳng AM với (O). Ta có $MR \parallel AC$ nên $\widehat{RMG} = \widehat{CAG} = \widehat{CEG}$, suy ra tứ giác $RMEG$ nội tiếp. Chứng minh tương tự, ta cũng có tứ giác $QMBG$ nội tiếp. Ta có

$$\widehat{RGQ} = \widehat{RGM} + \widehat{QGM} = \widehat{REM} + \widehat{QBM} = 180^\circ - \widehat{BPE} = 180^\circ - \widehat{RPQ}$$

nên tứ giác $RPQG$ nội tiếp. Bây giờ gọi I là giao điểm thứ hai của đường thẳng AG với đường tròn (PQR), X là giao điểm thứ hai của đường thẳng AP và đường tròn (O). Ta có

$$\widehat{BAM} = \widehat{EAP} \text{ và } \widehat{BAC} = \widehat{EAD} \text{ do } CD \parallel BE.$$

Nên $\widehat{CAG} = \widehat{XAD}$, suy ra $\widehat{CDG} = \widehat{XGD}$. Từ đó, ta có $GX \parallel CD$.
Do $XG \parallel CD$ nên tứ giác $GCDX$ là hình thang cân, mà $PC = PD$ nên $PG = PX$. Ta có $\widehat{RPI} = \widehat{RGI} = \widehat{REB} = \widehat{RCD}$ nên $PI \parallel CD$ hay $PI \parallel GX$.
Kẻ tiếp tuyến Gy của (O). Ta có $\widehat{XGy} = \widehat{XAG}$ và $\widehat{PGX} = \widehat{PXG} = \widehat{API}$ nên

$$\widehat{GIP} = \widehat{GAX} + \widehat{API} = \widehat{XGy} + \widehat{PGX} = \widehat{PGy}.$$

Suy ra Gy là tiếp tuyến của đường tròn (PQR). Do đó Gy là tiếp tuyến chung của các đường tròn (O) và (PQR). Vậy nên đường tròn (O) và (PQR) tiếp xúc với nhau tại G.

Bài toán 101. (Nghệ An 2023) Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn tâm O. Trên đường tròn (O) lấy điểm D khác phía A so với đường thẳng BC. Qua B kẻ đường thẳng d song song với CD. Đường thẳng d cắt đường thẳng AC tại E, cắt đường tròn (O) tại F (F khác B).

1. Gọi J là trung điểm của EC. Chứng minh rằng bốn điểm A, F, O, J cùng thuộc một đường tròn.

2. Đường thẳng OE cắt đường thẳng AD tại I. Chứng minh rằng $\widehat{IBA} = \widehat{BDA}$.

3. Trên tia BD lấy điểm M sao cho $BM = BA$. Đường thẳng AM cắt đường thẳng DC tại N, đường thẳng BN cắt đường tròn (O) tại K (K khác B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC. Đường thẳng BD cắt các đường thẳng NH, CK lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{MQ} + \frac{1}{BM}.$$

Lời giải 1.

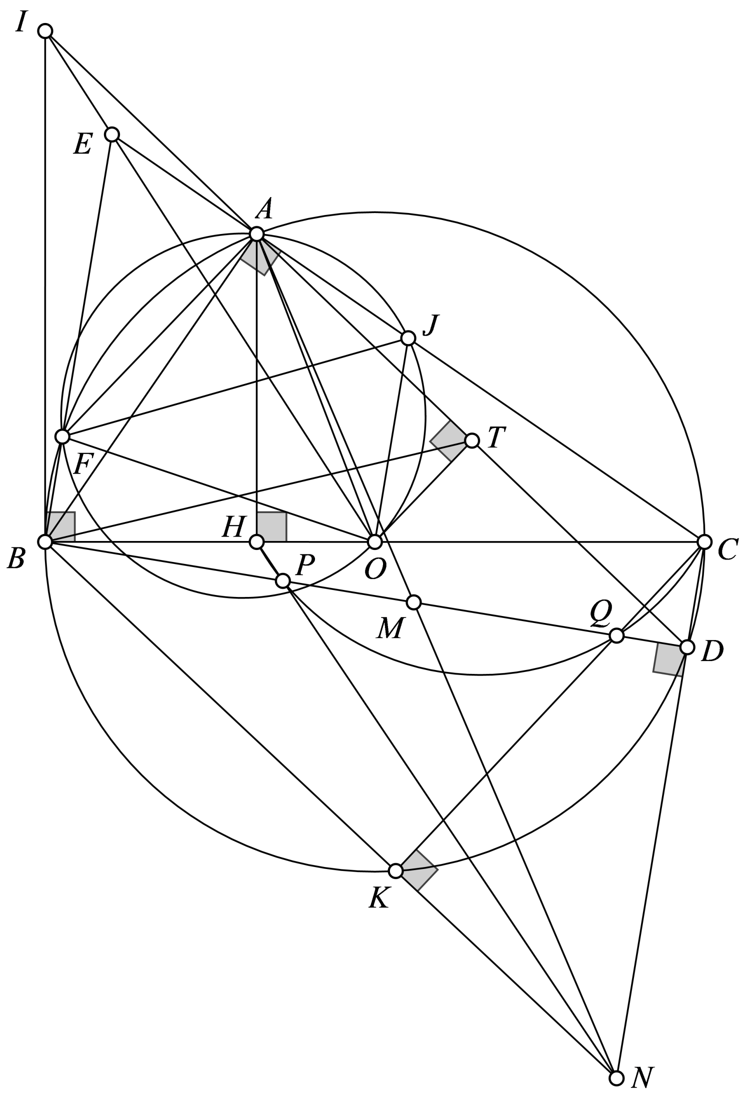
Chú ý rằng $OJ \parallel BE$ nên ta có biến đổi góc như sau

$$\widehat{EAF} = \widehat{FBC} = \widehat{BFO} = \widehat{FOJ}.$$

Do đó, tứ giác $AFOJ$ nội tiếp.

2. Lấy T là trung điểm của AD. Vì $BF \parallel CD$ nên $\widehat{EBC} = \widehat{BCD} = \widehat{BAD}$. Kết hợp với $\widehat{ECB} = \widehat{BDA}$, ta được $\triangle EBC \sim \triangle BAD$ (g-g). Mà O, T tương ứng là trung điểm của BC, AD nên ta được $\triangle ABT \sim \triangle BEO$ (c-g-c). Do đó, $\widehat{BOE} = \widehat{BTA}$. Suy ra tứ giác $BOTI$ nội tiếp. Vì vậy, $\widehat{OBI} = 180^\circ - \widehat{OTI} = 90^\circ$. Vậy nên BI là tiếp tuyến của đường tròn (O), nên $\widehat{IBA} = \widehat{BDA}$.

3. Ta có tam giác BAM cân tại B nên $\widehat{BAM} = \widehat{BMA} = \widehat{NMD}$. Mặt khác
$$\widehat{BAM} + \widehat{MAC} = 90^\circ = \widehat{NMD} + \widehat{MND}.$$
Vì vậy, tam giác ACN cân tại C. Suy ra $CN^2 = CA^2 = CH.CB$. Do đó, dễ dàng suy ra $\triangle CHN \sim \triangle CNB$ (c-g-c). Suy ra
$$\widehat{CHN} = \widehat{CNB} = \widehat{CQD}.$$
Vậy nên tứ giác $HPQC$ nội tiếp. Theo phương tích, ta được $BH.BC = BP.BQ$. Suy ra
$$BM^2 = BH.BC = BP.BQ = (BM - PM).(BM + MQ) = BM^2 + BM.MQ - PM.BM - PM.MQ$$
$$BM.MQ = PM.BM + PM.MQ \Rightarrow \frac{1}{PM} = \frac{1}{MQ} + \frac{1}{BM}.$$



Bài toán 102. (HSGS V1 2024) Cho hình vuông $ABCD$. Lấy điểm P thuộc cạnh AB (P khác A và B). Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác PAD.

1. Chứng minh rằng tứ giác $PJDB$ nội tiếp.

2. Gọi H là trực tâm của tam giác PJD, S là giao điểm của hai đường thẳng JH và AD. Chứng minh rằng $SH = SD$.

3. Gọi L là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác PBC, K là trực tâm của LPC. Đường tròn nội tiếp của tam giác PCD tiếp xúc với đường thẳng CD tại điểm E. Lấy điểm F thuộc đoạn thẳng CD sao cho $CF = DE$. Chứng minh rằng tam giác FHK là tam giác vuông cân.

Lời giải 1.

Hai tam giác AJD và AJB bằng nhau (c-g-c) nên $\widehat{ADJ} = \widehat{ABJ} = \widehat{PDJ}$. Từ đó suy ra tứ giác $PJDB$ nội tiếp.

2. Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng PJ và HD. Vì $\widehat{DBP} = 45^\circ$ nên $\widehat{MJD} = 45^\circ$, suy ra $\widehat{MDJ} = 45^\circ$. Từ đây, ta có $\widehat{DHP} = 45^\circ$. Mặt khác, ta lại có $\widehat{JHP} = \widehat{JDP} = \widehat{JDS}$ nên $\widehat{DHP} - \widehat{SHP} = \widehat{MDJ} - \widehat{JDS}$. Do đó, $\widehat{SHD} = \widehat{SDH}$, suy ra $SH = SD$.

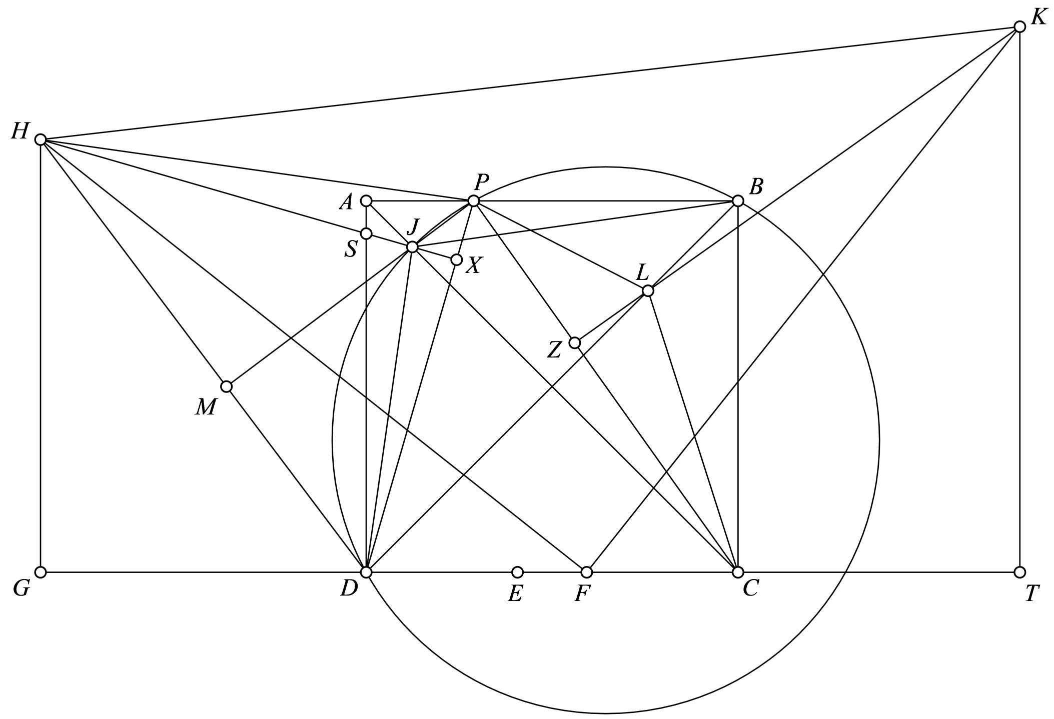
3. Gọi Z là giao điểm của đường thẳng KL và đường thẳng PC; X là giao điểm của đường thẳng HJ và PD. Gọi G, T tương ứng là hình chiếu vuông góc của các điểm H, K trên đường thẳng CD. Ta có $\widehat{DHG} = \widehat{SDH} = \widehat{SHD}$, do đó

$$DG = DX = \frac{DA + DP - AP}{2}.$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có $CT = CZ = \dfrac{CP + CB - BP}{2}$ và $CF = DE\dfrac{DC + DP - CP}{2}$. Đến đây, chú ý tam giác HPD có $\widehat{PHD} = 45^\circ$ và J là trực tâm của tam giác, ta dễ chứng minh được $HJ = DP$. Lại có $JX = \dfrac{AP + AD - DP}{2}$ nên

$$HX = \frac{AD + AP + DP}{2} = CF + CT = TF.$$

Chứng minh tương tự, ta có $KT = FG$. Từ đó, $\triangle GHF = \triangle TFK$ (c-g-c). Do đó, dễ dàng suy ra tam giác FHK vuông cân.



Bài toán 103. (Chuyên Tin Hà Nội 2023) Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B ($R < R' < OO'$). Gọi PQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O') với $P \in (O)$ và $Q \in (O')$. Đường thẳng PQ cắt đường thẳng OO' tại điểm S. Qua điểm S vẽ một đường thẳng cắt đường tròn (O) tại hai điểm E, F và cắt đường tròn (O') tại hai điểm G, H sao cho $SE < SF < SG < SH$.

1. Chứng minh đường thẳng OE song song với đường thẳng $O'G$.

2. Chứng minh $SA^2 = SP.SQ$.

3. Tiếp tuyến tại điểm A của đường tròn (O) cắt đường thẳng OO' tại điểm M. Tiếp tuyến tại điểm A của đường tròn (O') cắt đường thẳng OO' tại điểm N. Đường thẳng ME cắt đoạn thẳng AB tại điểm I. Chứng minh $\dfrac{EA^2}{EB^2} = \dfrac{IA}{IB}$ và ba điểm N, I, H thẳng hàng.

Lời giải 1.

Ta thấy $OP \parallel O'Q$ nên $\dfrac{SO}{SO'} = \dfrac{OP}{O'Q} = \dfrac{R}{R'}$. Kẻ $O'G' \parallel OE$, $G' \in SH$. Khi đó

$$\frac{OE}{O'G'} = \frac{R}{R'} \Rightarrow O'G' = R' \Leftrightarrow G' \in (O').$$

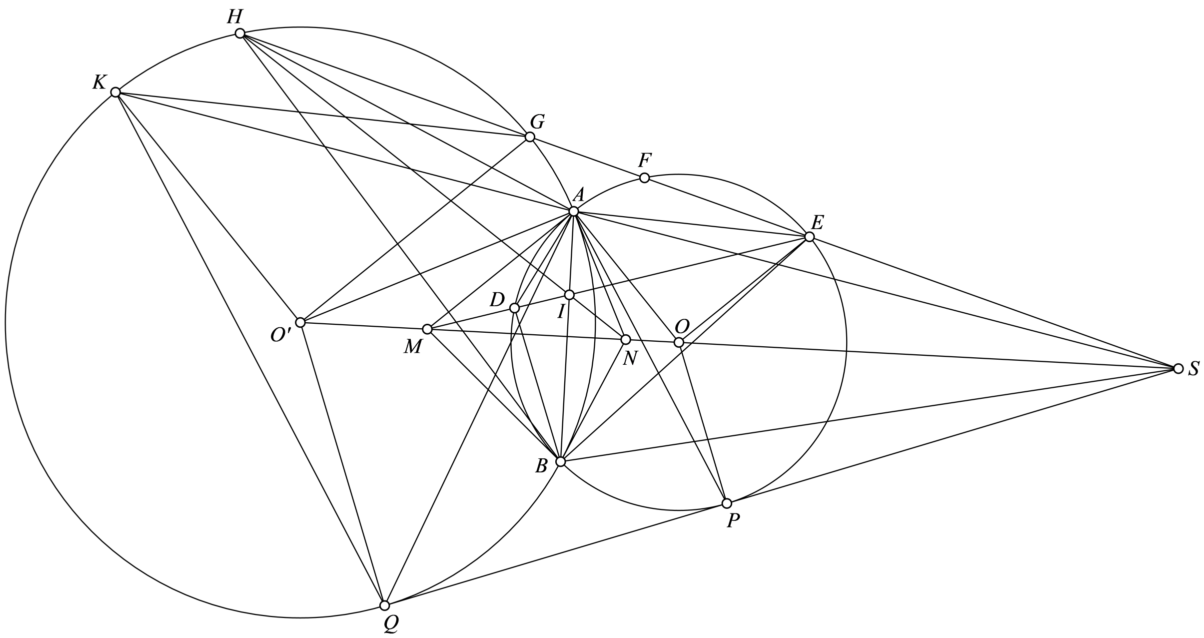
Mặt khác, ta lại có $\widehat{OEF} + \widehat{O'HG} < 180^\circ$ nên $O'H \nparallel OE$. Vậy nên $G \equiv G'$, ta thu được điều phải chứng minh.

2. Kẻ $O'K \parallel OA$, $K \in AS$. Lập luận tương tự như trên, ta cũng có $K \in (O')$. Lại có rằng $\widehat{SAP} = \widehat{SKQ} = \widehat{SQA}$ nên ta được $\triangle SAP \sim \triangle SQA$ (g-g). Vậy nên $SA^2 = SP.SQ$. Đây là điều cần phải chứng minh.

3. Dễ thấy cả MA và MB đều là tiếp tuyến của đường tròn (O). Gọi ME cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D. Theo **mô hình tiếp tuyến**, ta có $\dfrac{EA}{EB} = \dfrac{DA}{DB}$. Mặt khác, chú ý rằng $\triangle IAD \sim \triangle IEB$ (g-g) và $\triangle IBD \sim \triangle IEA$ (g-g) nên ta có biến đổi tỉ số như sau

$$\frac{IA}{IB} = \frac{IA}{ID}.\frac{ID}{IB} = \frac{EA}{BD}.\frac{AD}{EB} = \frac{EA^2}{EB^2} \text{ (1)}.$$

Mặt khác, ta có $\dfrac{SA}{SK} = \dfrac{SO}{SO'} = \dfrac{SE}{SG}$ nên $AE \parallel KG$. Suy ra $\widehat{SAE} = \widehat{ADG} = \widehat{AHG}$. Do đó, $\triangle SAE \sim \triangle SHA$ (g-g). Tương tự, ta có $\triangle SBE \sim \triangle SHB$ (g-g). Do đó, $\dfrac{AE}{HA} = \dfrac{SA}{SH} = \dfrac{SB}{SH} = \dfrac{BE}{HB}$. Suy ra $\dfrac{EA}{EB} = \dfrac{HA}{HB}$ (2).
Gọi I' là giao điểm của NH và AB. Tương tự, ta dễ chứng minh được $\dfrac{I'A}{I'B} = \dfrac{HA^2}{HB^2}$ (3).
Từ (1), (2) và (3) suy ra $I \equiv I'$, ta có điều phải chứng minh.



Bài toán 104. (Thái Nguyên 2023) Cho tam giác ABC ($AB > BC$) có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (O). Vẽ các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC. Gọi điểm H là trực tâm của tam giác ABC, I là trung điểm của đoạn thẳng DF. Tia AI cắt đường tròn (O) tại K ($K \neq A$), tia BE cắt đường tròn (O) tại J ($J \neq B$). Chứng minh rằng

1. E là trung điểm của đoạn thẳng HJ.
2. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IKD nằm trên đường thẳng BC.

Lời giải 1.

Đây là kết quả quen thuộc dựa vào **mô hình trực tâm**.

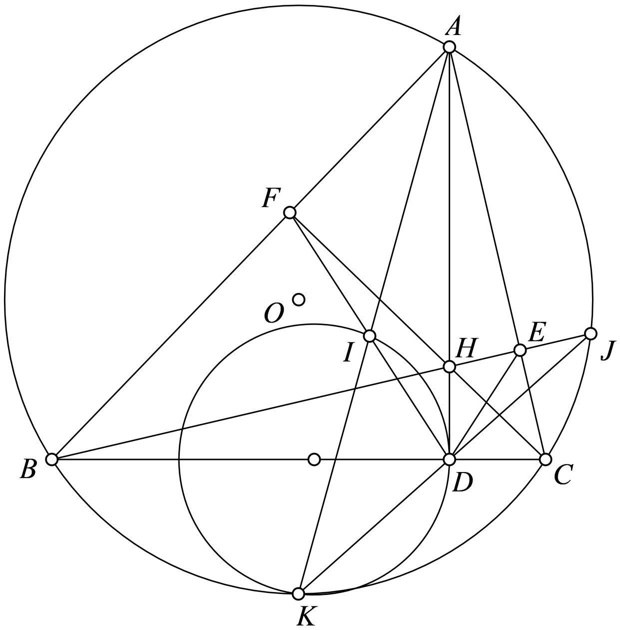
2. Dễ chứng minh $\triangle DHE \sim \triangle DFA$ (g-g). Cùng với việc E, I lần lượt là trung điểm của HJ, FD, ta có biến đổi tỉ số

$$\frac{HD}{FD} = \frac{HE}{FA} \Rightarrow \frac{2HD}{FD} = \frac{2HE}{FA} \Rightarrow \frac{HD}{FI} = \frac{HJ}{FA} \Rightarrow \frac{FA}{FI} = \frac{HJ}{HD}.$$

Cùng với $\widehat{DHJ} = \widehat{IFA}$ (cùng bù $\widehat{ACB}$), ta được $\triangle JHD \sim \triangle AFI$ (c-g-c). Từ đây, dễ dàng suy ra ba điểm J, E, K thẳng hàng. Do đó, ta có

$$\widehat{IKD} = \widehat{ABH} = \widehat{ADI}.$$

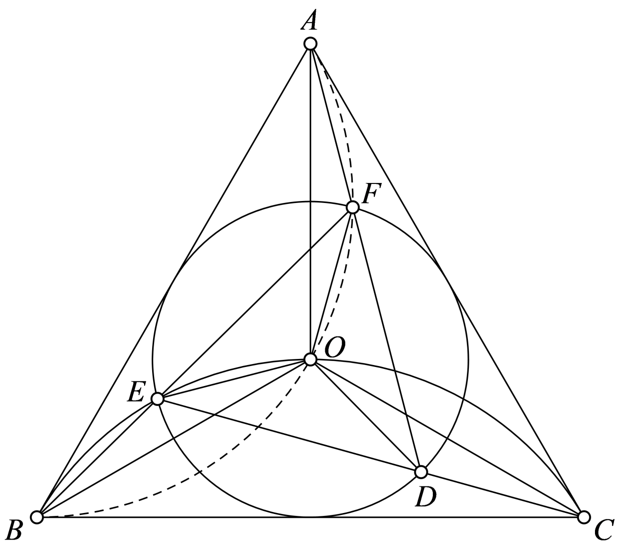
Suy ra AD là tiếp tuyến của đường tròn (IKD). Mà $AD \perp BC$ nên tâm đường tròn (IKD) nằm trên đường thẳng BC.



Bài toán 105. (CSP V2 2022) Cho tam giác đều ABC ngoại tiếp đường tròn (O). Cung nhỏ OB của đường tròn ngoại tiếp tam giác tam giác OBC cắt đường tròn (O) tại điểm E. Tia BE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F.

1. Chứng minh EO là tia phân giác của góc $\widehat{CEF}$.
2. Chứng minh tứ giác $ABOF$ nội tiếp.
3. Gọi D là giao điểm thứ hai của CE với đường tròn (O). Chứng minh ba điểm A, F, D thẳng hàng.

Lời giải



1. Vì tam giác ABC là tam giác đều nên O cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta có

$$\widehat{FEO} = \widehat{OCB} = \widehat{OBC} = \widehat{OEC}.$$

Suy ra EO là tia phân giác của $\widehat{CEF}$.

2. Ta có $\widehat{OFB} = \widehat{OEF} = \widehat{OCB} = 30^\circ = \widehat{OAB}$ nên tứ giác $ABOF$ nội tiếp.

3. Ta có $\triangle OEF = \triangle OED$ (c-g-c) nên $EF = ED$. Suy ra tam giác DEF cân tại E. Mà $\widehat{DEF} = 2\widehat{OED} = 60^\circ$ nên tam giác DEF là tam giác đều. Do đó, $\widehat{DFE} = 60^\circ$ (1).
Mặt khác, tứ giác $ABOF$ nội tiếp nên $\widehat{AFB} = \widehat{AOB} = 120^\circ$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra ba điểm A, F, D thẳng hàng.

Bài toán 106. (PTNK 2020) Cho đường tròn (O), dây cung BC không chứa tâm O và điểm A thay đổi trên cung lớn BC. Lấy các điểm E, F thỏa mãn $\widehat{ABE} = \widehat{CAE} = \widehat{ACF} = \widehat{BAF} = 90^\circ$.

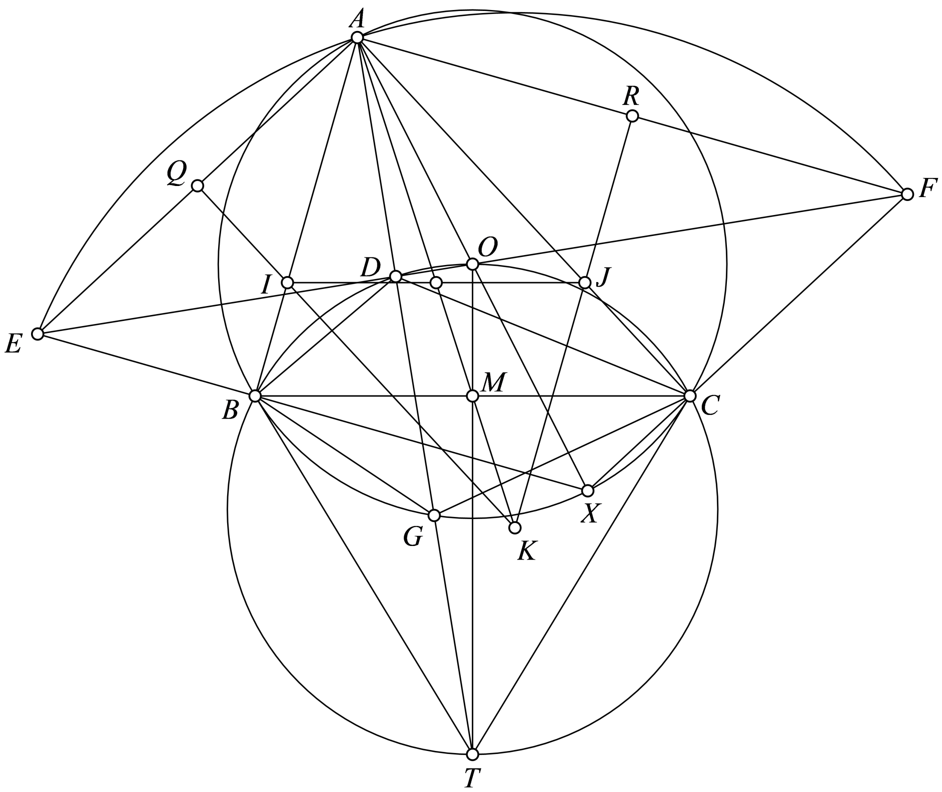
1. Chứng minh rằng $AE.AC = AF.AB$ và O là trung điểm của EF.

2. Hạ AD vuông góc với EF ($D \in EF$). Chứng minh rằng các tam giác DAB và DCA đồng dạng và D thuộc một đường tròn cố định.

3. Gọi G là giao điểm của AD và đường tròn (O) ($G \neq A$). Chứng minh rằng AD đi qua một điểm cố định và $GB.AC = GC.AB$.

4. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác AEF. Chứng minh rằng AK đi qua một điểm cố định.

Lời giải



1. Kẻ đường kính AX của đường tròn (O). Khi đó dễ thấy các bộ điểm (E, B, X) và (X, C, F) thẳng hàng.
Suy ra tứ giác $AEXF$ là hình bình hành. Do đó, $\widehat{AEB} = \widehat{AFC}$. Vì vậy, ta được $\triangle ABE \sim \triangle ACF$ (g-g).
Do đó, $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC} \Rightarrow AE.AC = AF.AB$.
Mặt khác, vì tứ giác $AEXF$ là hình bình hành và O là trung điểm của AX nên O là trung điểm của EF.

2. Dễ thấy các tứ giác $ADBE, ADCF$ nội tiếp nên $\widehat{BAD} = \widehat{BED} = \widehat{AFD} = \widehat{ACD}$ và $\widehat{DAC} = \widehat{DFC} = \widehat{AED} = \widehat{ABD}$. Do đó, theo định nghĩa của **điểm Dumpty**, ta được D là điểm A - Dumpty của tam giác ABC. Do đó, $\triangle DAB \sim \triangle DCA$ (g-g). Ngoài ra, $D \in (BOC)$ là một đường tròn cố định. (**các tính chất này đều không được sử dụng trực tiếp trong bài thi, học sinh cần phải chứng minh lại**)

3. Kẻ hai tiếp tuyến tại B, C của (O), hai tiếp tuyến này cắt nhau tại T (cố định). Theo tính chất của **điểm Dumpty**, ta có ba điểm A, D, T thẳng hàng. Mặt khác, theo **mô hình tiếp tuyến**, ta được $\dfrac{GB}{GC} = \dfrac{AB}{AC}$ nên $GB.AC = GC.AB$.

4. Gọi M là trung điểm của BC (cố định), ta sẽ chứng minh ba điểm A, M, K thẳng hàng. Thật vậy, gọi Q, R lần lượt là trung điểm của AE, AF, $KQ \cap AB = \{I\}$, $KR \cap AC = \{J\}$. Dễ thấy $KQ \perp AE, KR \perp AF$. Suy ra $\triangle AIQ \sim \triangle ARJ$ (g-g). Suy ra
$$\frac{AI}{AJ} = \frac{AQ}{AR} = \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}.$$
Do đó, $IJ \parallel BC$ nên tứ giác $BIJC$ là hình thang. Mặt khác, dễ thấy tứ giác $AIKJ$ là hình bình hành nên AK đi qua trung điểm của IJ. Mà tứ giác $BIJC$ là hình thang nên theo bổ đề hình thang, ta được AK đi qua trung điểm của BC. Do vậy, ta có được điều phải chứng minh.

Bài toán 107. (Phú Thọ 2022) Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại hai điểm A và B ($R > R'$ và O, O' thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB). Đường thẳng AO cắt (O) và (O') lần lượt tại C và M, đường thẳng AO' cắt (O) và (O') lần lượt tại N và D (C, D, M, N khác A). Gọi K là trung điểm của CD; H là giao điểm của CN và DM.

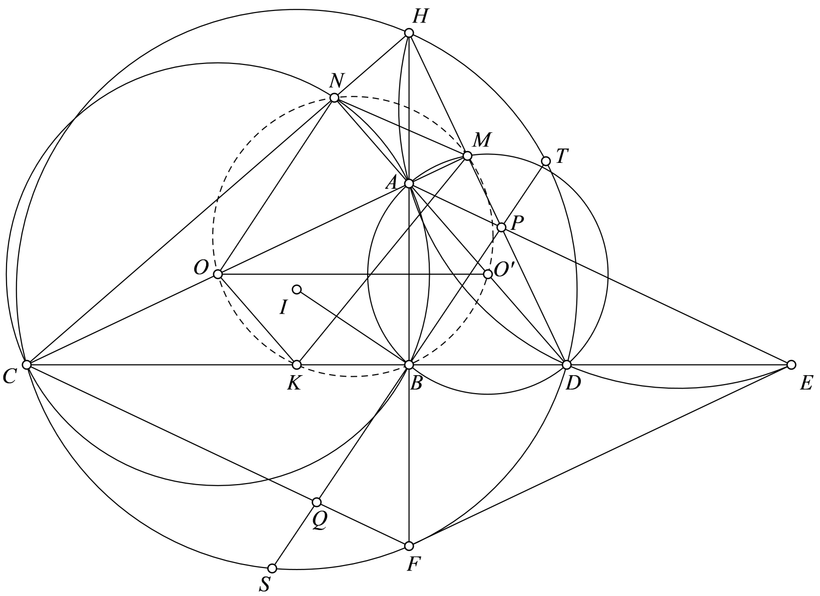
1. Chứng minh rằng năm điểm M, N, K, O, B cùng thuộc một đường tròn.

2. Gọi (I) là đường tròn ngoại tiếp tam giác HCD; E là điểm đối xứng với C qua B; P là giao điểm của AE và HD; F là giao điểm của BH và (I) (F khác H); Q là giao điểm của CF và BP. Chứng minh rằng $BP = BQ$.

3. Chứng minh rằng $\widehat{IBP} = 90°$.

Lời giải

Xét thế hình như sau, các thế hình khác chứng minh tương tự



1. Dễ thấy ba điểm C, B, D thẳng hàng. Dễ thấy A là trực tâm của tam giác HCD; B, N, M lần lượt là ba chân đường cao kẻ từ H, D, C. Khi đó, năm điểm M, N, K, O, B cùng nằm trên đường tròn Euler của tam giác HCD.

2. Ta thấy tứ giác $AEFC$ là hình thoi nên ta dễ chứng minh được $\triangle BCG = \triangle BEP$ (g-c-g). Suy ra $BP = BQ$.

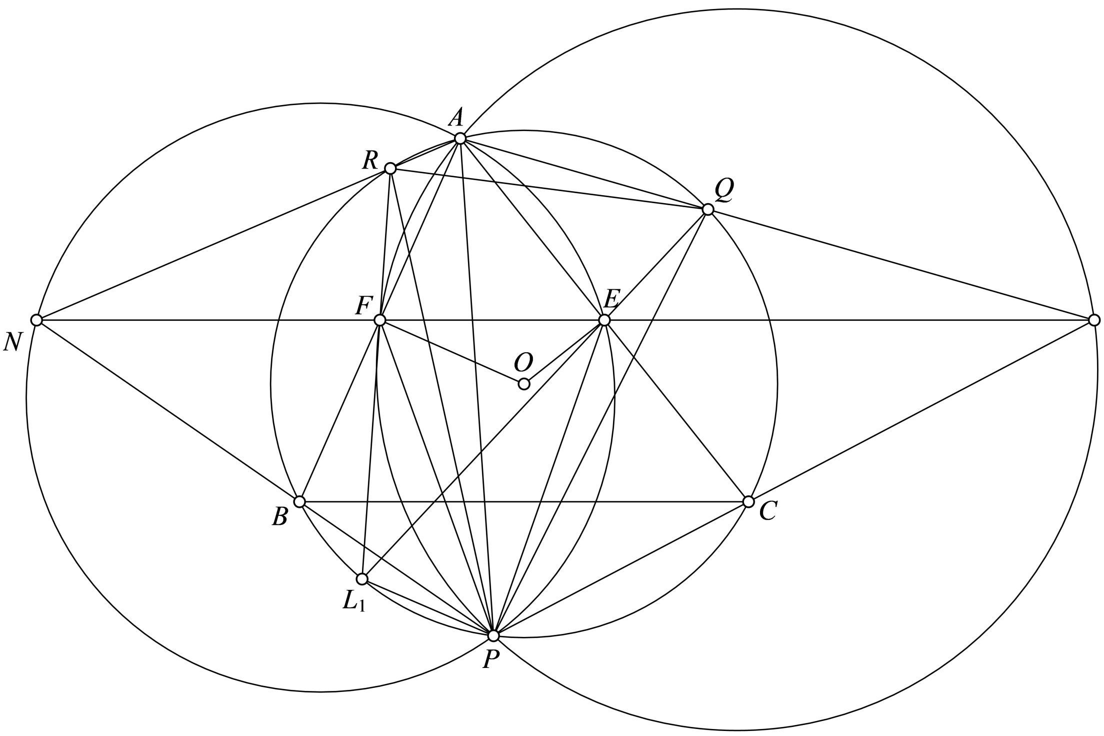
3. Gọi giao điểm của PQ với (I) là S và T như hình vẽ. Theo phương tích, ta có $PS.PT = PD.PH$ (1).
   Mặt khác, dễ thấy $PA = QF, PE = CQ$ nên ta có $QS.QT = QF.QC = PA.PE$ (2).
   Ngoài ra, dễ thấy tứ giác $HADE$ nội tiếp nên $PD.PH = PA.PE$ (3).
   Từ (1), (2) và (3) suy ra $QS.QT = PS.PT$.
   $$\Rightarrow QS.PQ + QS.PT = PT.PQ + PT.QS \Rightarrow QS.PQ = PT.PQ \Rightarrow QS = PT.$$
   Do đó, ta suy ra được B là trung điểm của ST. Do đó, $\widehat{IBP} = 90^\circ$.

Nhận xét: Với ý (3.), đây chính là phần đảo của định lý con bướm, bạn đọc có thể tham khảo thêm các cách chứng minh khác.

Bài toán 108. (HSGS V2 2024) Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O), có E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh CA, AB. Điểm P di chuyển trên cung nhỏ BC (P khác B, C). Gọi M, N lần lượt là giao điểm của các đường thẳng PC, PB với đường thẳng EF. Các đường thẳng AM, AN cắt đường tròn (O) theo thứ tự tại Q, R (Q, R khác A).

1. Chứng minh rằng tứ giác $AFPM$ nội tiếp và $\widehat{EPF} = \widehat{QPR}$.
2. Chứng minh rằng giao điểm của hai đường thẳng QE và RF nằm trên đường tròn (O).
3. Lấy các điểm S, T lần lượt thuộc các đường thẳng CA, AB sao cho ba đường thẳng ET, FS, AP song song với nhau. Gọi K và L lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác NFS và MET. Đường thẳng đi qua K vuông góc với đường thẳng AB cắt đường thẳng qua L vuông góc với đường thẳng AC tại điểm J. Chứng minh rằng điểm J luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi điểm P thay đổi.

Lời giải

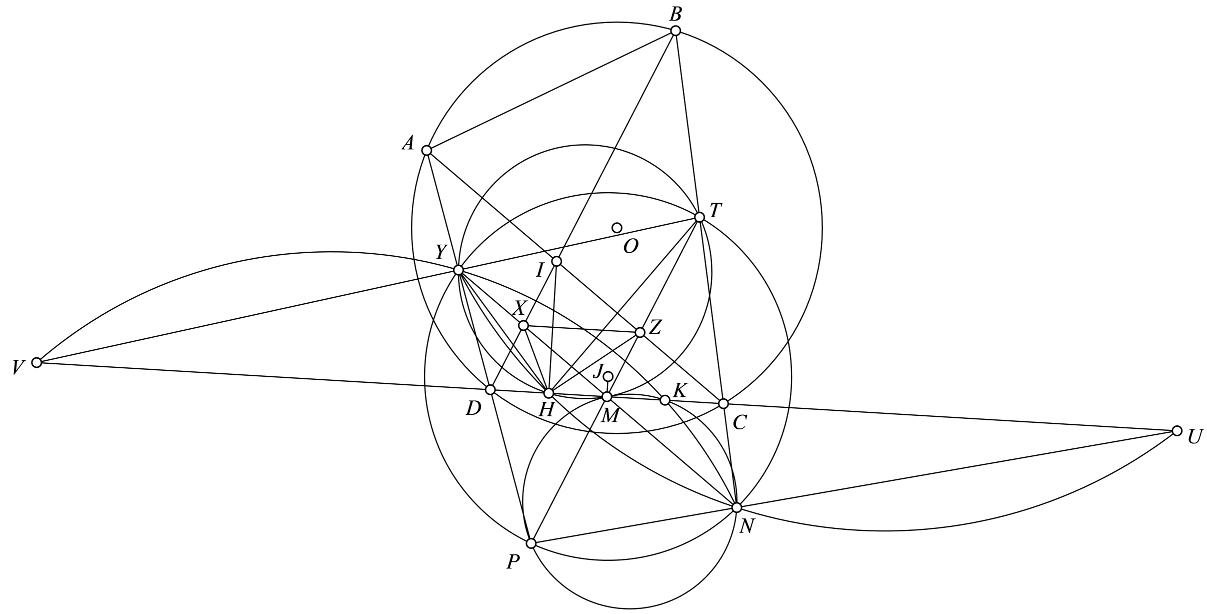


1. Ta có $EF \parallel BC$ nên $\widehat{PMF} = \widehat{PCB} = \widehat{PAB}$. Do đó, tứ giác $AFPM$ nội tiếp. Chứng minh tương tự, ta có tứ giác $AEPN$ nội tiếp. Suy ra
   $$\widehat{EPF} = \widehat{APF} + \widehat{APE} = \widehat{AMF} + \widehat{ANF} = 180^\circ - \widehat{RAQ} = \widehat{QPR}.$$
2. Ta có $\widehat{PFE} = \widehat{PAM} = \widehat{PRQ}$. Kết hợp với $\widehat{EPF} = \widehat{QPR}$, ta được $\triangle EPF \sim \triangle QPR$ (g-g). Từ đây, dễ chứng minh được $\triangle PEQ \sim \triangle PFR$ (c-g-c). Gọi $PF \cap EQ = \{L_1\}$, ta có $\widehat{PQL_1} = \widehat{PRL_1}$ nên tứ giác $PQRL_1$ nội tiếp. Vậy $L_1 \in (O)$.

3. Trước hết, ta cần chứng minh bổ đề sau

Bổ đề: *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O), các đường chéo AC và BD cắt nhau tại điểm I. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm I trên đường thẳng CD và M là trung điểm của CD. Các điểm N, P lần lượt thuộc các đường thẳng BC, AD sao cho $MN \parallel AC$ và $MP \parallel BD$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP cắt đường thẳng CD lần thứ hai tại điểm K. Khi đó, M là trung điểm của đoạn thẳng HK.*

Chứng minh bổ đề:



Gọi X, Y lần lượt là giao điểm của đường thẳng MN và các đường thẳng DI, DA; Z, T lần lượt là giao điểm của đường thẳng MP với CI, CB. Ta thấy X, Y, Z, T lần lượt là trung điểm của DI, AD, CI, CB và tứ giác $MHYZ$ là hình thang cân.

Từ $\widehat{HXY} = \widehat{HZT}$, ta lại có $\dfrac{XH}{XY} = \dfrac{DI}{IA} = \dfrac{CI}{IB} = \dfrac{HZ}{ZT}$ nên $\triangle HXY \sim \triangle HZT$ (c-g-c). Do đó, $\widehat{HYM} = \widehat{HTM}$ nên tứ giác $YTMH$ nội tiếp. Mặt khác, chú ý rằng $NY \parallel AC, PT \parallel BD$ nên $\widehat{NYP} = \widehat{CAD} = \widehat{DBC} = \widehat{PTN}$. Do đó, tứ giác $YTNP$ nội tiếp.

Gọi J là tâm đường tròn $(YTNP)$. Vì M là trung điểm của CD nên theo **định lý con bướm**, ta được $JM \perp CD$. Gọi giao điểm của CD với YT, PN lần lượt là V, U. Vẫn theo **định lý con bướm**, ta có $JM \perp VU$ nên M là trung điểm của VU.

Dễ dàng chứng minh được hai tứ giác $VYKN$ và $YHNU$ nội tiếp nên theo phương tích, ta có

$$MK.MV = MN.MY = MH.MU \Rightarrow MH = MK.$$

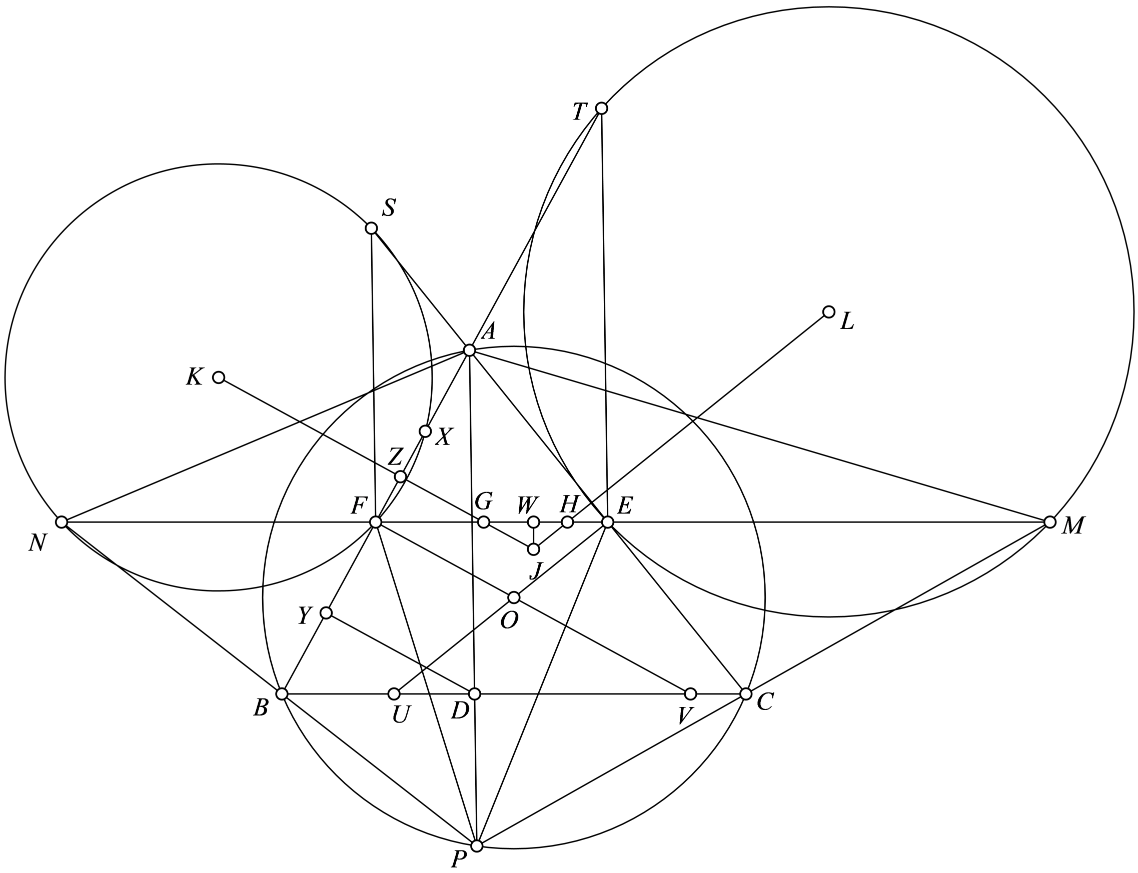
Ta hoàn thành việc chứng minh bổ đề. Ta áp dụng bổ đề với vị trí các điểm như hình vẽ (các trường hợp khác tương tự).

Gọi X là giao điểm khác F của đường tròn (K) và đường thẳng AB. Qua điểm D, kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng AB tại điểm Y. Gọi Z, G lần lượt là giao điểm của đường thẳng KJ với các đường thẳng AB, EF. Gọi H là giao điểm của hai đường thẳng LJ và EF tại H. Gọi U, V lần lượt là giao điểm của đường thẳng BC và OE, OF.

Theo bổ đề trên, ta được F là trung điểm của XY. Do $\dfrac{FG}{FZ} = \dfrac{BD}{BY} = \dfrac{DV}{FY}$ và $FY = FX = 2FZ$ nên $FG = \dfrac{DV}{2}$. Lập luận tương tự, ta có $EH = \dfrac{DU}{2}$. Suy ra

$$GH = EF - FG - EH = \frac{BC - UV}{2} \text{ (cố định).}$$

Ta có tam giác JGH có các góc không đổi và độ dài cạnh GH cố định nên độ dài đường cao JW không đổi. Vậy điểm J thuộc đường thẳng song song với EF và cách EF một khoảng JW.



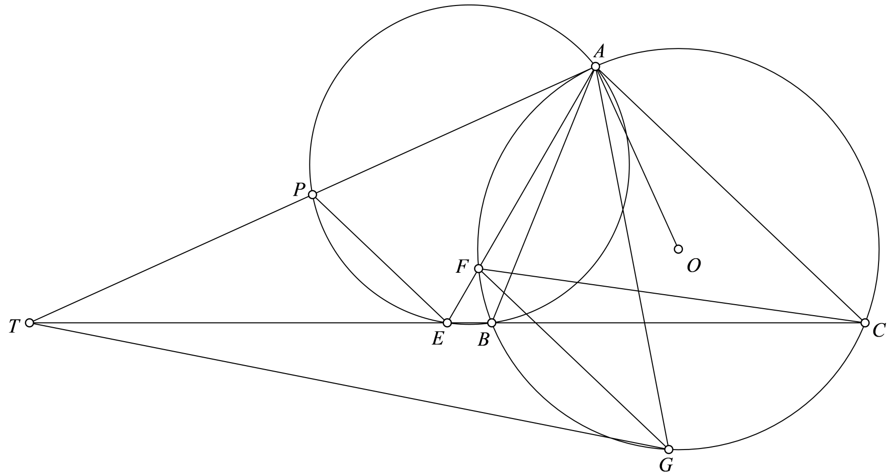
Bài toán 109. (HSGS V2 2023) Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O) có tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC ở T sao cho $TB > BC$. Gọi P và E lần lượt là trung điểm của TA và TC.

1. Chứng minh rằng tứ giác $APEB$ nội tiếp.

2. Gọi giao điểm thứ hai của AE với (O) là F. Lấy G thuộc (O) sao cho FG song song với AC. Chứng minh rằng $\widehat{ATG} = \widehat{TAF}$.

3. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC, D là giao điểm của AH và BC. M là trung điểm BC. K đối xứng A qua BC. N thuộc đường thẳng AM sao cho KN song song với HM. Lấy S thuộc BC sao cho $NS \perp NK$. Dựng R thuộc tia AK sao cho $AR.AH = AD^2$. Q là điểm sao cho $PQ \perp AS$ và $SQ \perp AO$. Chứng minh rằng điểm đối xứng với A qua QR thuộc đường tròn đường kính DN.

Lời giải



1. Do AT là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên ta có

$$TA^2 = TB.TC \Rightarrow \frac{1}{2}TA^2 = \frac{1}{2}TB.TC \Rightarrow TP.TA = TE.TB.$$

Vậy nên tứ giác $APEB$ nội tiếp.

2. Vì EP là đường trung bình của tam giác ATC, tứ giác $AFGC$ là hình thang cân và AT là tiếp của đường tròn (O) nên ta có

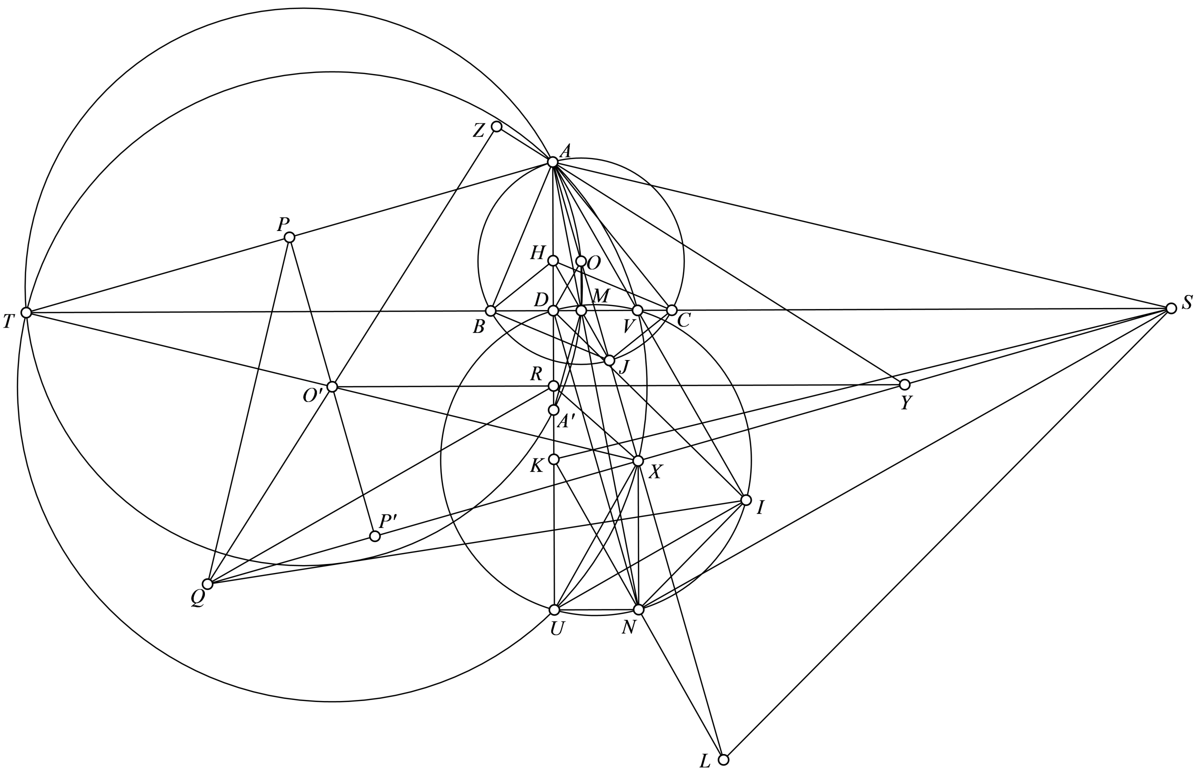
$$\widehat{AEP} = \widehat{EAC} = \widehat{FAC} = \widehat{GCA}.$$

Và

$$\widehat{GAC} = \widehat{FCA} = \widehat{TAF} = \widehat{PAE}.$$

Như vậy, ta được $\triangle AEP \sim \triangle ACG$ (g-g) và dẫn đến $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AP}{AG}$. Lại chú ý rằng $AT = 2AP$ và $AC = 2EP$, ta thu được $\dfrac{AE}{EP} = \dfrac{2AE}{AC} = \dfrac{2AP}{AG} = \dfrac{AT}{AG}$. Kết hợp với $\widehat{AEP} = \widehat{TAG}$ ta thu được $\triangle AEP \sim \triangle TAG$ (c-g-c) và vì thế $\widehat{ATG} = \widehat{TAF}$.

3. Xét các điểm có vị trí như trên hình vẽ



Gọi AJ là đường kính của đường tròn (O). Ta có tứ giác $BHCJ$ là hình bình hành nên M là trung điểm của HJ. Gọi AJ cắt KN tại L. Do M là trung điểm của HJ và $HJ \parallel KL$ nên N là trung điểm của KL. Mà $NS \perp NK$ nên $SL = SK$, mà $SA = SK$ (do D là trung điểm AK) nên $SA = SL$. Lại có $SQ \perp AL$ nên SQ là trung trực của AL hay $SQ \perp AL$ tại trung điểm X của AL.
Gọi U là điểm đối xứng với A qua R. Ta có $AH.AR = AD^2 \Rightarrow AH.AU = AD.AK$.

$$\Rightarrow \frac{AM}{AN} = \frac{AH}{AK} = \frac{AD}{AU} \Rightarrow DM \parallel UN \Rightarrow NU \perp AU.$$

Ta có $NX \parallel AK$ (tính chất đường trung bình) nên $NX \parallel OM$, mà $MD \parallel NU$ nên

$$\frac{AO}{AX} = \frac{AM}{AN} = \frac{AD}{AU} \Rightarrow OD \parallel UX.$$

Ta có $AH.AU = 2AD^2$ nên $OM.AU = AD^2$. Ta có tứ giác OMTA nội tiếp đường tròn (OT). Gọi (OT) cắt AD tại A' (A' khác A). Có tứ giác $AOMA'$ là hình thang cân nên $DA - DA' = OM$.
Do $DT.DM = DA'.DA = DA.(DA - OM) = AD^2 - AD.OM = OM.AU - AD.OM = OM.DU$

$$\Rightarrow \frac{DT}{DU} = \frac{MO}{MD}.$$

Nên $\triangle DTU \sim \triangle MOD$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{DTU} = \widehat{MOD}$ nên $OD \perp TU$. Mà $OD \parallel UX$ nên $\widehat{TUX} = 90°$. Ta gọi $NX \perp BC$ tại V nên năm điểm T, A, V, X, U thuộc đường tròn (O) đường kính TX.
$\Rightarrow O'R$ là trung trực của AU nên $O'R \parallel ST$ nên $O'R$ đi qua trung điểm Y của SX. Gọi PO' cắt QX tại P'. Ta có $AT \parallel QX$ mà O' là trung điểm của TX nên O' là trung điểm của PP'. Ta cũng có $PO' \parallel AX$ nên $PP' \perp XQ$, mà $PQ \perp AS$ nên $\triangle P'PQ \sim \triangle XSA$ (g-g); mà O', Y lần lượt là trung điểm của PP' và XS nên $\triangle P'QO' \sim \triangle XAY$ (c-g-c) nên

$$\widehat{QO'P} = \widehat{XYA} \Rightarrow QO' \perp AY = \{Z\}.$$

Suy ra $YR.YO' = YA.YZ = YX.YQ$ nên tứ giác $QO'RX$ nội tiếp. Nên

$$\widehat{O'RQ} = \widehat{O'XQ} = \widehat{XTA} = \widehat{XUA} = \widehat{VAU} \text{ (do tứ giác } AVXU \text{ nội tiếp và } XV \parallel AU).$$

Mà $\widehat{ARO'} = 90°$ nên $QR \perp AV$. Gọi I là điểm đối xứng với A qua QR thì $QR \perp AI$. Do đó A, V, I thẳng hàng. Do $RI = RA = RU$ nên $\widehat{AIU} = 90°$ dẫn đến $\triangle ADV \sim \triangle AIU$ (g-g). Do đó, ta được

$$\frac{IA}{IU} = \frac{DA}{DV} = \frac{DA}{UN} \Rightarrow \frac{AD}{AI} = \frac{UN}{UI}.$$

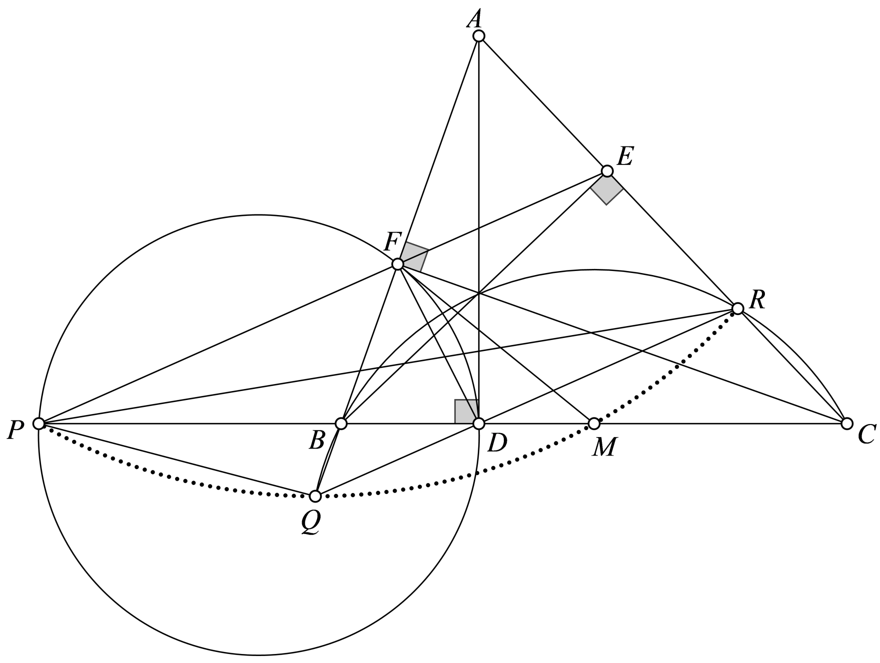
Mà $\widehat{AUN} = \widehat{AIU} = 90°$ nên $\widehat{IUN} = \widehat{IAU}$. Từ đó $\triangle ADI \sim \triangle UNI$ (c-g-c).

$$\Rightarrow \widehat{AID} = \widehat{UIN} \Rightarrow \widehat{DIN} = \widehat{AIU} = 90°.$$

Vậy nên ta có được điều phải chứng minh.

Bài toán 110. Cho tam giác nhọn ABC với BC cố định và $AB < AC$. Gọi AD, BE, CF là các đường cao của tam giác ABC. Đường thẳng đi qua D và song song với EF cắt AB, AC lần lượt tại Q, R. Đường thẳng EF cắt BC tại P. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



Dễ thấy tứ giác $QBRC$ nội tiếp nên $DQ.DR = DB.DC$ (1).
Gọi M là trung điểm của BC. Tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn tâm M nên

$$DB.DC = MB^2 - MD^2 \ (2).$$

Ta thấy FC và FB là hai đường phân giác trong và ngoài tại đỉnh F của tam giác FPD.
Mặt khác, $\widehat{MFB} = \widehat{MBF} = \widehat{BFP} + \widehat{BPF} = \widehat{BFD} + \widehat{BPF}$. Mà $\widehat{MFB} = \widehat{BFD} + \widehat{MFD}$ nên $\widehat{MFD} = \widehat{BPF}$.
Suy ra FM là tiếp tuyến của đường tròn (DFP). Vì vậy, $MD.MP = MF^2 = MB^2$ (3).
Từ (2) và (3) suy ra $DB.DC = MB^2 - MD^2 = MD.MP - MD^2 = MD.DP$ (4).
Từ (1) và (4) suy ra $DM.DP = DQ.DR$ nên tứ giác $QMRB$ nội tiếp. Vậy đường tròn (PQR) luôn đi qua điểm M cố định.

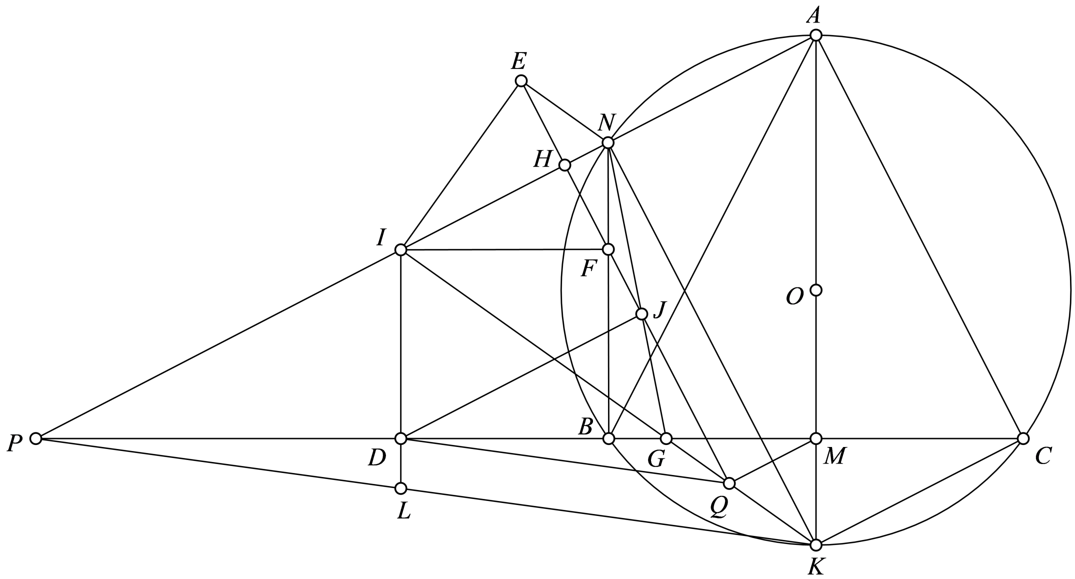
Bài toán 111. Cho tam giác nhọn ABC cân tại A, nội tiếp đường tròn (O). N là một điểm trên cung nhỏ AB của đường tròn (O) (N khác A và B). Trên tia đối của tia NA, lấy điểm I khác N. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm I trên các đường thẳng BC, CN và NB.

1. Chứng minh $IE = IF$.

2. Kẻ đường kính AK của đường tròn (O). Gọi Q là giao điểm của các đường thẳng EF và KI; và M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh rằng đường thẳng MQ song song với đường thẳng AN.

3. Gọi G là giao điểm của các đường thẳng BC và KI; và J là giao điểm của các đường thẳng NG và EF. Chứng minh rằng DJ vuông góc với EF.

Lời giải



1. Ta có

$$\widehat{INE} = \widehat{ANC} = \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \widehat{INF}.$$

Do đó, hai tam giác vuông INE và INF bằng nhau theo trường hợp cạnh huyền – góc nhọn, suy ra $IE = IF$.

2. Từ câu (1.), ta suy ra được IN là trung trực của EF. Do đó, IN vuông góc với EF tại trung điểm H của EF, tương tự, ta cũng thấy $AK \perp BC$. Mặt khác

$$\widehat{INE} = \widehat{ANC} = \widehat{AKC}.$$

Nên $\triangle IEN \sim \triangle ACK$ (g-g). Từ đây, kết hợp với $EH \perp NI$ và $CM \perp AK$, ta suy ra $\dfrac{MA}{MK} = \dfrac{HI}{HN}$.
Ta có $\widehat{IHQ} = \widehat{INK} = 90^\circ$ nên $HQ \parallel NK$, suy ra $\dfrac{HI}{HN} = \dfrac{QI}{QK}$. Kết hợp với kết quả trên, ta được $\dfrac{MA}{MK} = \dfrac{QI}{QK}$. Từ đây, ta có $MQ \parallel AN$.

3. Gọi P là giao điểm của các đường thẳng AN và BC, L là giao điểm của ID và KP. Do $IL \parallel AK$ nên $\dfrac{DI}{DL} = \dfrac{MA}{MK}$. Từ đó, ta có $\dfrac{DI}{DL} = \dfrac{QI}{QK}$, suy ra $DQ \parallel PK$. Từ đây, kết hợp với $QJ \parallel NK$, ta được $\dfrac{GD}{GP} = \dfrac{GQ}{GK} = \dfrac{GJ}{GN}$. Suy ra $DJ \parallel PN$, do đó $DJ \perp EF$.

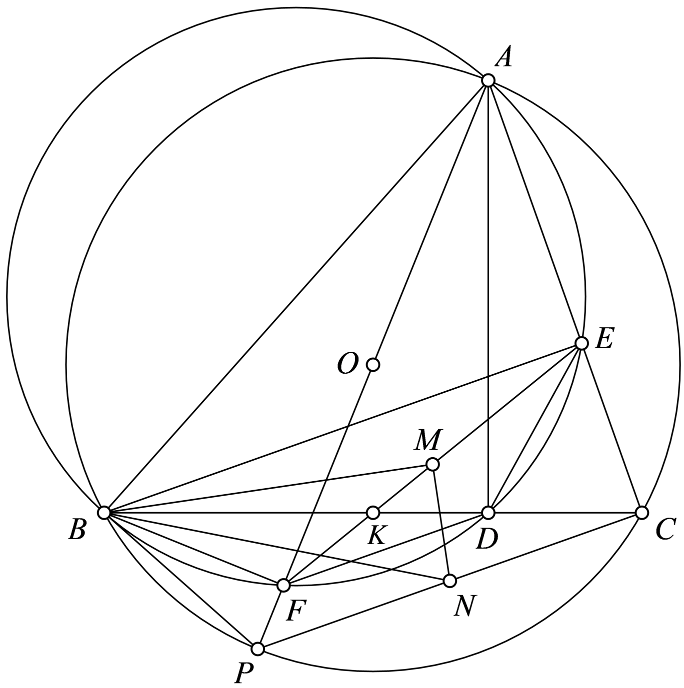
Bài toán 112. (CSP V2 2019) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) và $AB > AC$. Gọi D, E lần lượt là chân các đường cao của tam giác ABC hạ từ A, B. Gọi F là chân đường vuông góc hạ từ B lên đường thẳng AO.

1. Chứng minh rằng B, D, E, F là bốn đỉnh của một hình thang cân.

2. Chứng minh rằng EF đi qua trung điểm của BC.

3. Gọi P là giao điểm thứ hai của đường thẳng AO và đường tròn (O), M và N lần lượt là trung điểm của EF và CP. Tính góc $\widehat{BMN}$.

Lời giải



1. Dễ thấy năm điểm A, E, D, F, B cùng thuộc đường tròn đường kính AB. Ta có $\widehat{FDB} = \widehat{FAB} = \widehat{CAD} = \widehat{EBD}$ nên $FD \parallel BE$. Mà tứ giác $BEDF$ nội tiếp nên tứ giác $BEDF$ là hình thang cân.

2. Gọi K là giao điểm của EF và BC. Do tứ giác $BFDE$ là hình thang cân nên $KE = KB$. Mà tam giác BEC vuông tại E nên ta dễ dàng suy ra K là trung điểm của BC.

3. Do tứ giác $ABFE$ và $ABPC$ nội tiếp nên $\widehat{BFE} = 180^\circ - \widehat{BAC} = \widehat{BPC}$ và $\widehat{FBE} = \widehat{FAC} = \widehat{PBC}$ nên $\triangle BFE \sim \triangle BPC$ (g-g). Mà M, N tương ứng là trung điểm của FE và PC nên $\dfrac{BM}{BN} = \dfrac{BE}{BC}$ và $\widehat{MBN} = \widehat{MBC} + \widehat{NBC} = \widehat{MBC} + \widehat{MBE} = \widehat{EBC}$. Suy ra $\triangle EBC \sim \triangle MBN$ (c-g-c). Vậy nên $\widehat{BMN} = \widehat{BEC} = 90^\circ$.

Bài toán 113. (Đề thi vào 10 THPT Chuyên Đại học Vinh 2024) Cho đường tròn (O) đường kính AB. Đường thẳng Δ tiếp xúc với (O) tại A, I là điểm cố định trên đoạn AB và CD là dây cung thay đổi của (O) luôn đi qua I. Các đường thẳng BC, BD cắt Δ lần lượt tại M, N.

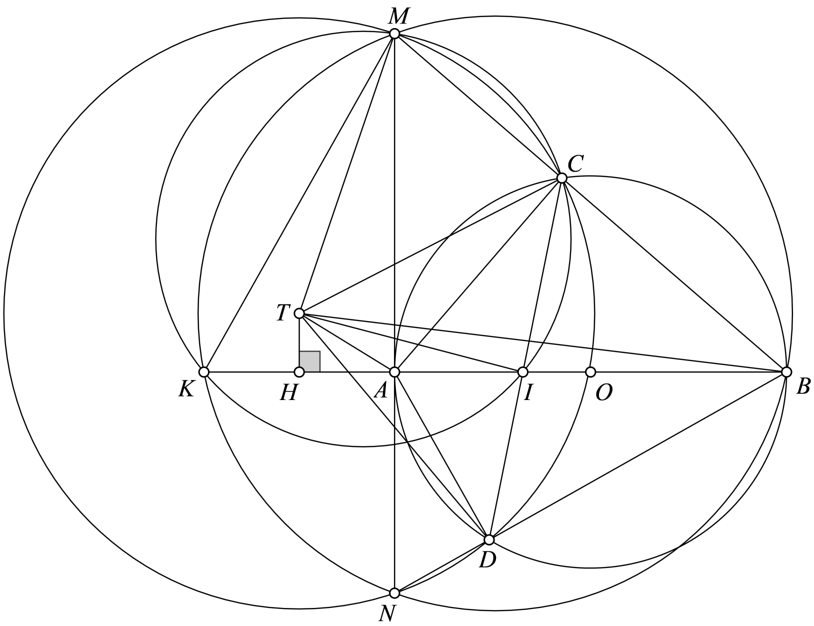
1. Chứng minh rằng $CDNM$ là tứ giác nội tiếp.

2. Gọi K là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN với đường thẳng AB. Chứng minh rằng $KMCI$ là tứ giác nội tiếp và tích $AM.AN$ không đổi.

3. Gọi T là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDNM$. Tìm vị trí của CD sao cho độ dài đoạn thẳng BT nhỏ nhất.

Lời giải

Xét vị trí các điểm như hình vẽ



1. Theo hệ thức lượng, ta có $BC.BM = BA^2 = BD.BN$. Vì vậy, theo phương tích, ta có tứ giác $CDMN$ nội tiếp.

2. Ta có biến đổi góc $\widehat{MKB} = \widehat{MNB} = \widehat{DCB}$ nên tứ giác $KMCI$ nội tiếp. Suy ra

$$BI.BK = BC.BM = BA^2.$$

Suy ra K là điểm cố định. Do đó, $AM.AN = AK.AB$ không đổi.

3. Gọi r là bán kính của đường tròn (T) thì $r^2 - TA^2 = AM.AN = a$ không đổi. Tương tự, ta cũng có $ID.IC = b = r^2 - TI^2$ không đổi. Suy ra $TI^2 - TA^2 = a - b$. Gọi H là hình chiếu của K lên AB. Theo định lý Pythagoras, ta có

$$(AI + 2AH).AI = HI^2 - HA^2 = (TI^2 - TH^2) - (TA^2 - TH^2) = TI^2 - TA^2 = a - b.$$

Từ đây, kết hợp với AI không đổi, ta được H không đổi. Do đó, BH cố định. Vì vậy $BT^2 \geqslant BH^2$ (cố định). Ta sẽ chỉ ra dấu bằng.
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi T trùng H tức là BA là trung trực của CD. Vậy $CD \perp AB = \{I\}$ thì BT có giá trị nhỏ nhất.

Bài toán 114. (Thừa Thiên Huế 2022) Cho đường tròn (O) và dây BC cố định không đi qua O. Điểm A thay đổi trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn ($AB < AC$). Gọi AD, BE, CF là các đường cao và H là trực tâm của tam giác ABC. Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng BC và EF; I là giao điểm thứ hai của KA với (O); M là trung điểm BC; N là giao điểm thứ hai của AH và (O). Chứng minh

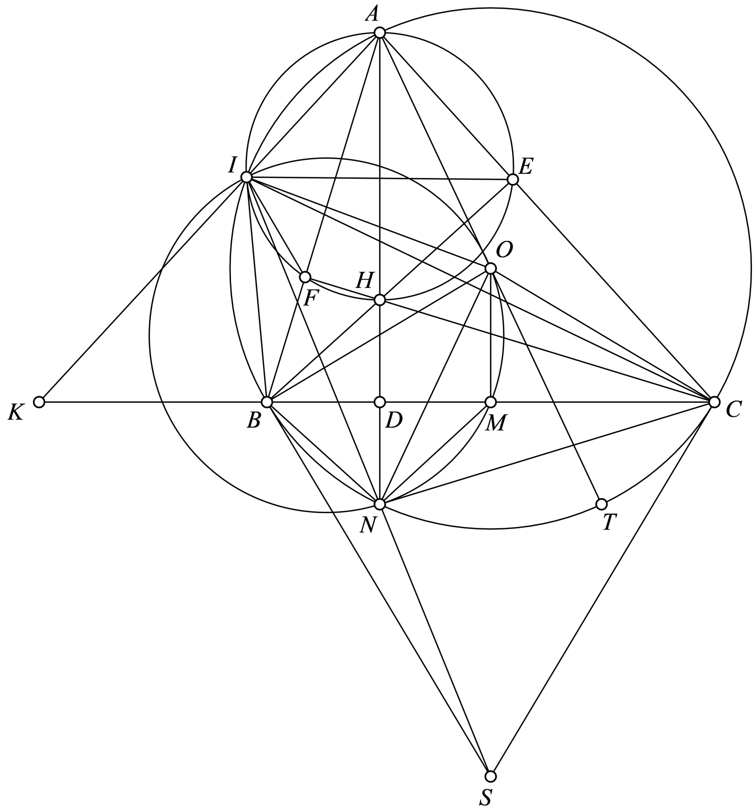
1. Tứ giác $AIFE$ nội tiếp.

2. Ba điểm M, H, I thẳng hàng.

3. Tứ giác $IMNO$ nội tiếp.

4. Đường thẳng IN đi qua một điểm cố định khi A thay đổi.

Lời giải



1. Bạn đọc tự xem lại **mô hình trực tâm** và tìm cách chứng minh.

2. Bạn đọc tự xem lại **mô hình trực tâm** và tìm cách chứng minh.

3. Kẻ đường kính AT của đường tròn (O). Khi đó, bốn điểm M, H, I, T thẳng hàng và N, T đối xứng nhau qua OM. Ta có biến đổi góc

$$\widehat{NOM} = \widehat{TOM} = \frac{1}{2}\widehat{TON} = \widehat{MIN}.$$

Suy ra tứ giác $IMNO$ nội tiếp.

4. Kẻ hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O), hai tiếp tuyến này cắt nhau tại điểm S cố định. Ta sẽ chứng minh ba điểm I, N, S thẳng hàng hay tứ giác $IBNC$ là **tứ giác điều hoà**. Thật vậy, dễ thấy $\triangle IEC \sim \triangle IFB$ (g-g) nên $\dfrac{IB}{IC} = \dfrac{BF}{CE}$ (1). Mặt khác, ta lại có $\triangle BHF \sim \triangle CHE$ (g-g) nên ta có

$$\frac{BF}{CE} = \frac{BH}{CH} = \frac{BN}{CN} \text{ (2).}$$

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{IB}{IC} = \dfrac{NB}{NC}$. Do đó, tứ giác $IBNC$ là tứ giác điều hoà, ta có điều phải chứng minh.

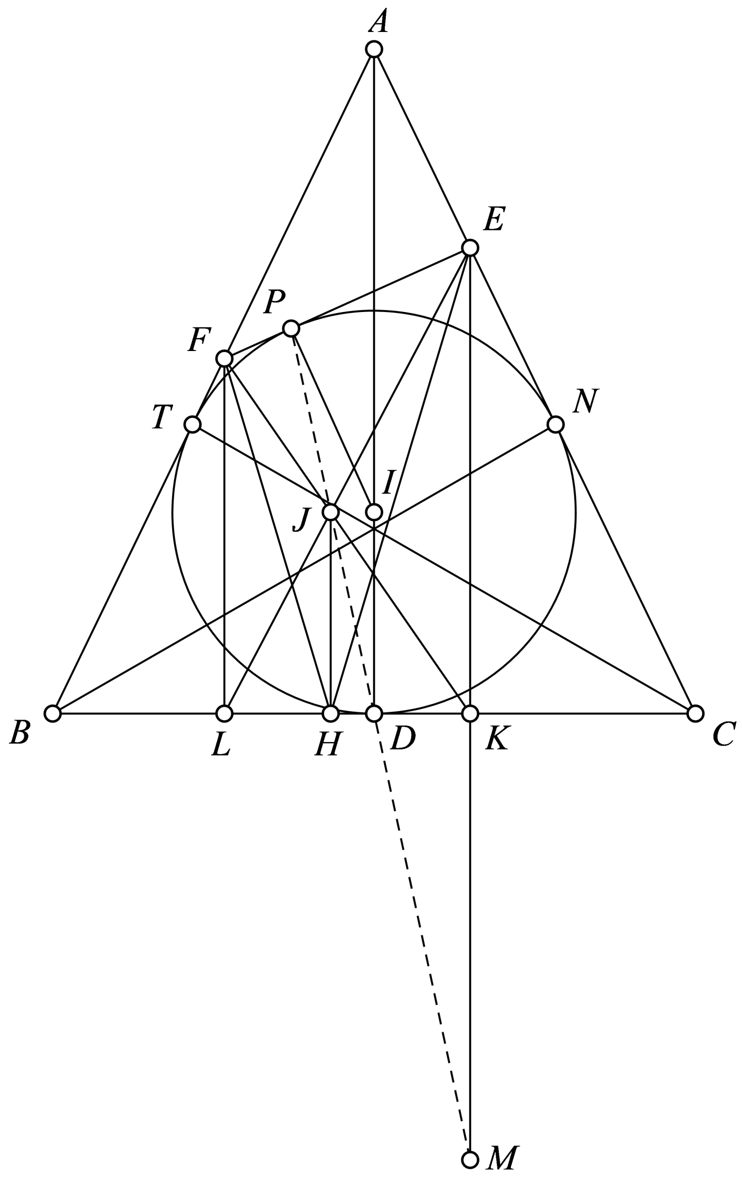
Bài toán 115. (HSGS V2 2019) Cho tam giác ABC cân tại A, có đường tròn nội tiếp (I). Các điểm E, F theo thứ tự thuộc các cạnh CA, AB (E khác C và A; F khác B và A) sao cho EF tiếp xúc với đường tròn (I) tại điểm P. Gọi K, L lần lượt hình chiếu vuông góc của E, F lên BC. Giả sử FK cắt EL tại J. Gọi H là hình chiếu của J lên BC.

1. Chứng minh rằng HJ là phân giác góc EHF.

2. Kí hiệu S_1, S_2 lần lượt là diện tích của các tứ giác $BFJL$ và $CEJK$. Chứng minh rằng
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{BF^2}{CE^2}.$$
3. Gọi D là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng ba điểm P, J, D thẳng hàng.

Lời giải

LỜI GIẢI 1.



1. Sử dụng định lý Thales trong tam giác LKE với $JH \parallel EK$, ta có $\dfrac{LH}{HK} = \dfrac{LJ}{JE}$.
   Sử dụng định lý Thales trong tam giác JKE với $FL \parallel EK$, ta cũng có $\dfrac{FL}{EK} = \dfrac{LJ}{JE}$.
   Do đó $\dfrac{FL}{EK} = \dfrac{LH}{HK}$.
   Hai tam giác FLH và EKH có $\widehat{FLH} = \widehat{EKH} = 90^\circ$ và $\dfrac{FL}{EK} = \dfrac{LH}{KH}$ nên đồng dạng với nhau (c-g-c).
   Suy ra $\widehat{LFH} = \widehat{KEH}$. Mặt khác, ta lại có $\widehat{LFH} = \widehat{FHJ}$ (so le trong) và $\widehat{KEH} = \widehat{EHJ}$ (so le trong) nên $\widehat{FHJ} = \widehat{EHJ}$. Do đó HJ là tia phân giác của $\widehat{EHF}$.

2. Do $HJ \parallel FL$ nên $S_{FJL} = S_{FLH}$. Suy ra
$$S_1 = S_{BFL} + S_{FLH} = S_{BFH}.$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có $S_2 = S_{CEH}$.
Theo chứng minh ở câu (1.), hai tam giác FLH và EKH đồng dạng với nhau nên

$$\widehat{FHB} = \widehat{FHL} = \widehat{EHK} = \widehat{EHC}.$$

Hai tam giác FHB và EHC có $\widehat{FHB} = \widehat{EHC}$ và $\widehat{FBH} = \widehat{ECH}$ nên đồng dang với nhau (g-g), từ đó ta có

$$\frac{S_{FHB}}{S_{EHC}} = \frac{BF^2}{CE^2} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{S_{FHB}}{S_{EHC}} = \frac{BF^2}{CE^2}.$$

3. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử P nằm cùng phía với B so với AD như hình vẽ ở trên.
Gọi M là giao điểm của PJ và EK. Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác KFE với cát tuyến MJP, ta có

$$\frac{MK}{ME} \cdot \frac{PE}{PF} \cdot \frac{JF}{JK} = 1.$$

Mà hai tam giác BFH và CEH đồng dạng với nhau có FL và EK là hai đường cao tương ứng nên

$$\frac{JF}{JK} = \frac{FL}{EK} = \frac{BF}{CE}.$$

Suy ra $\frac{MK}{ME} \cdot \frac{PE}{PF} \cdot \frac{BF}{CE} = 1(*)$. Để chứng minh ba điểm P, J, D thẳng hàng, ta chỉ cần chứng minh M, D, J thẳng hàng. Theo định lý Menelaus đảo áp dụng cho tam giác LKE, điều này tương đương với ta phải chứng minh

$$\frac{MK}{ME} \cdot \frac{JE}{JL} \cdot \frac{DL}{DK} = 1.$$

Lại có

$$\frac{JE}{JL} = \frac{EK}{FL} = \frac{CE}{BF}$$

và

$$\frac{DL}{DK} = \frac{DL}{DB} \cdot \frac{DC}{DK} \cdot \frac{DB}{DC} = \frac{AF}{AB} \cdot \frac{AC}{AE} .1 = \frac{AF}{AE}.$$

Do đó, ta cần chứng minh

$$\frac{MK}{ME} \cdot \frac{CE}{BF} \cdot \frac{AF}{AE} = 1(**).$$

Kết hợp $(*)$ và $(**)$, ta cần chứng minh

$$\frac{PE}{PF} \cdot \frac{BF}{CE} = \frac{CE}{BF} \cdot \frac{AF}{AE}.$$

Hay

$$\frac{AF}{AE} \cdot \frac{PF}{PE} = \frac{BF^2}{CE^2}(***).$$

Gọi T, N lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (I) với AB, AC. Đặt $a = AB = AC, x = BD = CD, y = BF = TF, z = PE = EN$. Ta sẽ chứng minh

$$a = \frac{x(x+y)(x+z)}{x^2 - yz}(****).$$

Thật vậy, sử dụng **định lý Cosin** trong các tam giác ABC, AEF, ta có

$$2\cos A = \frac{AE^2 + AF^2 - EF^2}{AE.AF} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{AB.AC}.$$

Suy ra

$$\frac{(a-x-y)^2 + (a-x-z)^2 - (y+z)^2}{(a-x-y)(a-x-z)} = \frac{2a^2 - 4x^2}{a^2}.$$

Từ đây, ta có

$$\frac{yz}{a^2 - (2x+y+z)\,a + (x+y)(x+z)} = \frac{x^2}{a^2}.$$

Hay

$$\left(x^2 - yz\right) a^2 - x^2\left(2x+y+z\right) a + x^2\left(x+y\right)\left(x+z\right) = 0.$$

Như thế, ta có

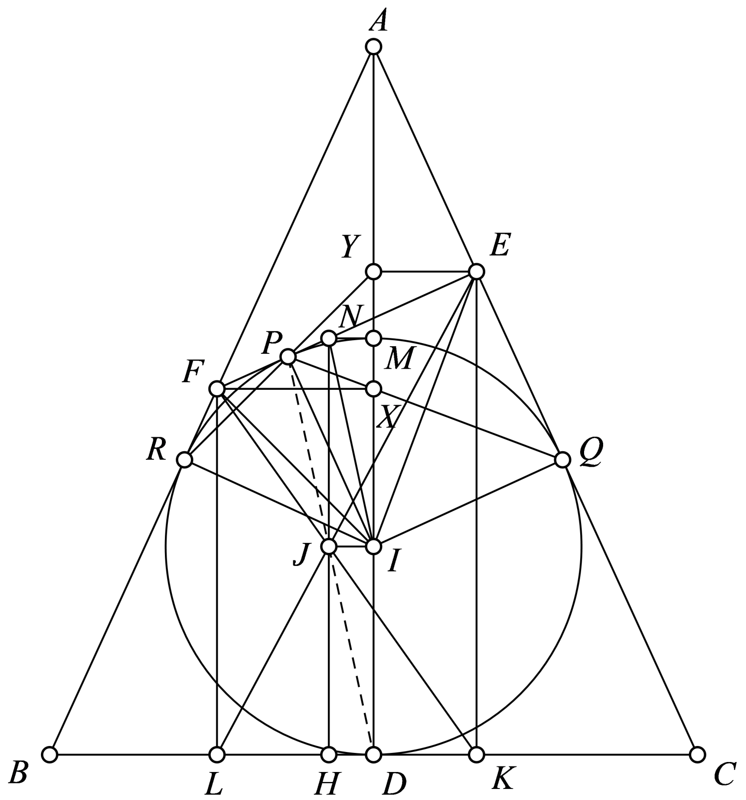
$$(a-x)\left[\left(x^2 - yz\right) a - x\left(x+y\right)\left(x+z\right)\right] = 0.$$

Do $a > x$ nên kết quả $(****)$ được chứng minh. Sử dụng kết quả $(***)$, ta có

$$\frac{AF}{AE}.\frac{PF}{PE} = \frac{a-x-y}{a-x-z}.\frac{y}{z} = \frac{\dfrac{x\left(x+y\right)\left(x+z\right)}{x^2 - yz} - x - y}{\dfrac{x\left(x+y\right)\left(x+z\right)}{x^2 - yz} - x - z}.\frac{y}{z} = \frac{(x+y)^2}{(x+z)^2} = \frac{BF^2}{CE^2}.$$

Kết quả $(***)$ được chứng minh, do đó ta có điều phải chứng minh.

LỜI GIẢI 2.



1. Tương tự LỜI GIẢI 1.

2. Tương tự LỜI GIẢI 1.

3. Gọi Q, R lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (I) với AC, AB. X, Y lần lượt là giao điểm của QP, RP với AD. Ta có biến đổi góc
$$\widehat{EIF} = \frac{1}{2}\widehat{QIR} = \widehat{AIR} \Rightarrow \widehat{AIE} = \widehat{FIR} \text{ và } \widehat{AIF} = \widehat{EIQ}.$$
Do đó, $\widehat{XPE} = \widehat{EIQ} = \widehat{AIF}$ nên tứ giác $FPXI$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{FXI} = \widehat{FPI} = 90°$. Vì vậy, $FX \perp AD$. Chứng minh tương tự, ta có $EY \perp AD$. Từ đó, các tứ giác $FLDX, EYDK$ là các hình chữ nhật nên $DX = FL, DY = EK$.
Mặt khác, dễ thấy $IP^2 = IX.IY$. Dựng đường kính DM của đường tròn (I). Tiếp tuyến tại M cắt EF tại N. Từ đó, ta được $ID^2 = IP^2 = IX.IY$. Vì vậy
$$\frac{IX}{ID} = \frac{ID}{IY} = \frac{IX + ID}{ID + IY} = \frac{DX}{DY} = \frac{FL}{EK} = \frac{FJ}{JK}.$$
$$\frac{IX}{IM} = \frac{IM}{IY} = \frac{MX}{MY} = \frac{FN}{NE}.$$
Từ đó suy ra $\frac{FJ}{JK} = \frac{FN}{NE} \Rightarrow JN \parallel EK$. Theo tiên đề Euclid, ba điểm N, J, H thẳng hàng. Từ đây suy ra tứ giác $MNHD$ là hình chữ nhật. Hơn nữa, ta có $\frac{JN}{EK} = \frac{FJ}{FK} = \frac{LJ}{LE} = \frac{JH}{EK}$ suy ra J là trung điểm của NH. Ta suy ra hai tứ giác $MNJI, IJHD$ là các hình chữ nhật. Từ đó, suy ra $JN = IM = ID$ nên tứ giác $NJDI$ là hình bình hành. Suy ra $JD \parallel IN$. Mặt khác, dễ thấy IN là tia phân giác ngoài đỉnh I của tam giác PID nên $IN \parallel PD$. Do đó, ba điểm P, J, D thẳng hàng.

5 Bài tập bạn đọc tự giải

Bài toán 116. Cho hai đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ (với $R_1 > R_2$) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B. Qua A kẻ đường thẳng cắt $(O_1), (O_2)$ lần lượt tại C, D (đều khác A) sao cho A là trung điểm của đoạn CD. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD cắt đường thẳng AB tại điểm E (khác B), đường thẳng EC cắt đường tròn (O_1) tại điểm P (khác C), đường thẳng ED cắt đường tròn (O_2) tại điểm Q (khác D).

1. Chứng minh rằng $\triangle BCP \sim \triangle BDQ$.

2. Chứng minh rằng ba điểm A, P, Q thẳng hàng.

3. Vẽ đường phân giác trong EI của tam giác EPQ. Vẽ PM, QN lần lượt là các phân giác trong của các tam giác CPI và DQI. Chứng minh rằng $MN \parallel CD$.

Bài toán 117. Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với cạnh BC tại D. M, N là các điểm thuộc các cạnh AB, AC của tam giác ABC sao cho MN song song với BC và MN không cắt (I). Đường tròn (J) bàng tiếp góc A của tam giác AMN, tiếp xúc với cạnh MN tại H.

1. Chứng minh tam giác ABJ đồng dạng với tam giác AIN.

2. Từ B kẻ tiếp tuyến thứ hai khác BA của (J), tiếp xúc với (J) tại L; từ N kẻ tiếp tuyến thứ hai khác NC của (I), tiếp xúc với (I) tại K. Chứng minh rằng
$$\widehat{ABL} + \widehat{IAB} = \widehat{INK} + \widehat{AIN}.$$

3. Chứng minh rằng DK song song với HL.

Bài toán 118. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) và $AB < AC$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là M (M khác A). Gọi D, E, F lần lượt là các hình chiếu của I trên các đường thẳng BC, CA, AB.

1. Chứng minh tam giác MBI là tam giác cân.

2. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai P (P khác A). Chứng minh ba điểm P, M, D thẳng hàng.

3. Gọi H là giao điểm của đường thẳng IP và đường thẳng EF. Chứng minh rằng HD song song với AM.

Bài toán 119. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Các điểm E và F lần lượt nằm trên các cạnh CA và AB sao cho EF song song với BC. Các đường thẳng BE cà CF theo thứ tự cắt tiếp tuyến tại C và B của (O) lần thứ hai tại K và L.

1. Đường thẳng qua B và song song với AC theo thứ tự cắt KC và KA tại X và Y. Chứng minh rằng hai tam giác XBC và BCA đồng dạng.

2. Đường thẳng qua C song song với AB theo thứ tự cắt LB và LA lần lượt tại Z và T. Chứng minh rằng
$$\frac{XB}{ZC} = \frac{AF}{AE}.$$

3. Đường thẳng qua E song song với AB lần lượt cắt AK và AL tại M và N. Đường thẳng qua F song song với AC lần lượt cắt AK và AL tại P và Q. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

Bài toán 120. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H.

1. Chứng minh DA là tia phân giác của góc EDF.

2. Chứng minh $\dfrac{HD}{AD} + \dfrac{HE}{BE} + \dfrac{HF}{CF} = 1$.

3. Gọi M là giao điểm của tia EF với đường tròn (O). Gọi P, Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMF và CME. Chứng minh $AM \perp PQ$.

Bài toán 121. Cho hai đường tròn (O) và (O) cắt nhau tại A và B sao cho O nằm ngoài (O') và O' nằm ngoài (O). Trên đường tròn (O') lấy điểm P di chuyển sao cho P nằm trong đường tròn (O). Đường thẳng AP cắt (O) tại C khác A.

1. Chứng minh rằng hai tam giác OBP và $O'BC$ đồng dạng.

2. Gọi Q là giao điểm thứ hai của đường thẳng OP và $O'C$. Chứng minh rằng
$$\widehat{QBC} + \widehat{ABP} = 90^\circ.$$

3. Lấy điểm D thuộc (O) sao cho AD vuông góc với OC. Chứng minh rằng trung điểm của đoạn thẳng DQ luôn nằm trên một đường tròn cố định khi P thay đổi.

Bài toán 122. Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Điểm P di chuyển trên cung nhỏ AD. Gọi giao điểm của PB và BC với AD lần lượt là M và N; giao điểm của PB và AC là Q; giao điểm của PC và BD là R.

1. Chứng minh rằng $MR \perp NQ$.

2. Chứng minh rằng tam giác AMQ và DRN đồng dạng.

3. Gọi S là hình chiếu vuông góc của Q lên AB; gọi T là hình chiếu vuông góc của R lên CD; I là giao điểm của QR và ST. Chứng minh rằng PI luôn đi qua điểm cố định khi P thay đổi.

Bài toán 123. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến d của (O) tại B. Gọi H là trung điểm của OB. Các điểm M, N thay đổi trên d, không trùng với B sao cho H là trực tâm của tam giác AMN. Gọi E, F lần lượt là giao điểm thứ hai của AM, AN với đường tròn (O). Chứng minh rằng

1. Tứ giác $MNFE$ nội tiếp.

2. Đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

Tài liệu

[1] Đề thi toán vào 10 các năm.

[2] Tạp chí Crux.
https://cms.math.ca/publications/crux/

[3] Vũ Hữu Bình, *NÂNG CAO VÀ PHÁT TRIỂN TOÁN 9, TẬP 2*.

[4] Vũ Hữu Bình, *TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN THCS, TẬP HAI - HÌNH HỌC*.

[5] Nguyễn Trung Kiên, *TỔNG HỢP CHUYÊN ĐỀ TRỌNG TÂM THI VÀO 10 CHUYÊN & HỌC SINH GIỎI HÌNH HỌC 9*.

[6] Võ Quốc Bá Cẩn, *96+ ĐỀ ÔN LUYỆN CHUYÊN TOÁN*

[7] Đề thi HSGQG, IMO, DH & DBBB,... các năm.