TOÁN 12 (CHƯƠNG TRÌNH MỚI)
CHƯƠNG II. VECTƠ VÀ HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN.
BÀI 6. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

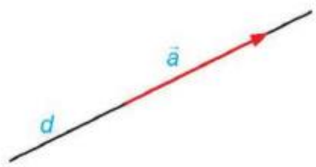
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

- Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.
- Độ dài của vectơ trong không gian là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

Chú ý. Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, đối với vectơ trong không gian ta cũng có các kí hiệu và khái niệm sau:

- Vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$.
- Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ thì vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \ldots$
- Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$, độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$
- Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ đó (H.2.4).



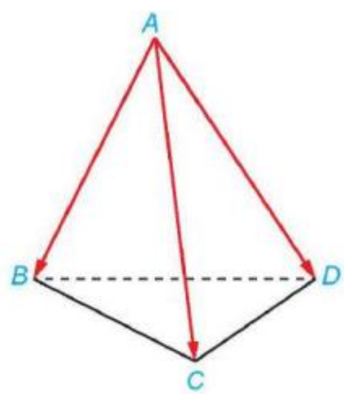
Hình 2.4. Đường thẳng d là giá của vectơ $\vec{a}$.

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1 (H.2.5).

a) Có bao nhiêu vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện?

b) Trong các vectơ tìm được ở câu a, những vectơ nào có giá nằm trong mặt phẳng (ABC) ?

c) Tính độ dài của các vectơ tìm được ở câu a.



Hình 2.5

Tương tự như trường hợp của vectơ trong mặt phẳng, ta có các khái niệm sau đối với vectơ trong không gian:

- Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.

- Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.

- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

Chú ý. Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, ta có tính chất và các quy ước sau đối với vectơ trong không gian:

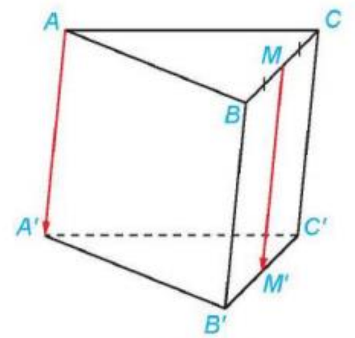
- Trong không gian, với mỗi điểm O và vectơ $\vec{a}$ cho trước, có duy nhất điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.

- Các vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ví dụ như $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \ldots$ gọi là các vectơ-không.
- Ta quy ước vectơ-không có độ dài là 0, cùng hướng (và vì vậy cùng phương) với mọi vectơ. Do đó, các vectơ-không đều bằng nhau và được kí hiệu chung là $\vec{0}$.

Ví dụ 2. Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ (H2.8).

a) Trong ba vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CC'}$ và $\overrightarrow{B'B}$, vectơ nào bằng vectơ $\overrightarrow{AA'}$? Giải thích vì sao.

b) Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Xác định điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$.

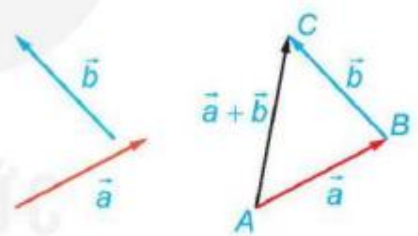


Hình 2.8

2. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

a) Tổng của hai vectơ trong không gian

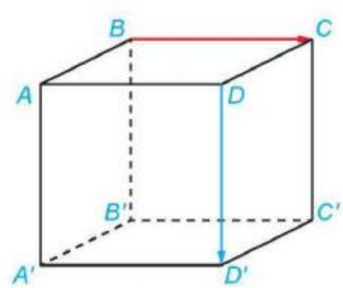
Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A bất kì và các điểm B, C sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó, vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là **tổng của hai vectơ** $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{a} + \vec{b}$.
Trong không gian, phép lấy tổng của hai vectơ được gọi là **phép cộng vectơ.**



Hình 2.11

Nhận xét. Quy tắc ba điểm và quy tắc hình bình hành trong mặt phẳng vẫn đúng trong không gian:
- Nếu A, B, C là ba điểm bất kì thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$;
- Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Ví dụ 3. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1 $(H2.12)$. Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD'}$.



Hình 2.12

Chú ý. Tương tự như phép cộng vectơ trong mặt phẳng, phép cộng vectơ trong không gian có các tính chất sau:
- Tính chất giao hoán: Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ bất kì thì $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- Tính chất kết hợp: Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ là ba vectơ bất kì thì $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

- Tính chất cộng với vectơ $\vec{0}$: Nếu $\vec{a}$ là một vectơ bất kì thì $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

Từ tính chất kết hợp của phép cộng vectơ trong không gian, ta có thể viết tổng của ba vectơ $\vec{a},\vec{b}$ và $\vec{c}$ là $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ mà không cần sử dụng các dấu ngoặc. Tương tự đối với tổng của nhiều vectơ trong không gian.

Ví dụ 4. Cho tứ diện $ABCD$ (H.2.13). Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

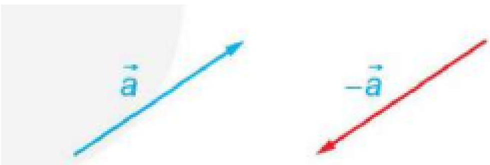
Kết quả sau đây được gọi là **quy tắc hình hộp.**

Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$. Khi đó, ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

Ví dụ 5. Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$ $(H.2.14)$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

b) Hiệu của hai vectơ trong không gian

Trong không gian, vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ được gọi là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$.



Chú ý

- Hai vectơ là đối nhau nếu và chỉ nếu tổng của chúng bằng $\vec{0}$.
- Vectơ $\overrightarrow{BA}$ là một vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AB}$.
- Vectơ 0 được coi là vectơ đối của chính nó.

Tương tự như hiệu của hai vectơ trong mặt phẳng, ta có định nghĩa về hiệu của hai vecto trong không gian:

Vectơ $\vec{a}+(-\vec{b})$ được gọi là hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và kí hiệu là $\vec{a}-\vec{b}$.

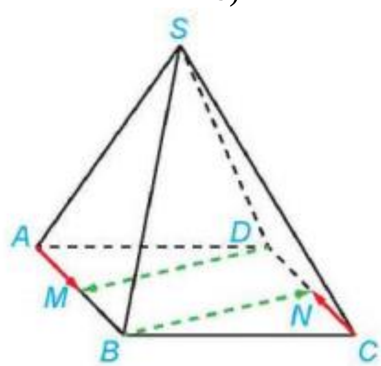
Trong không gian, phép lấy hiệu của hai vectơ được gọi là phép trừ vectơ.

Nhận xét. Với ba điểm $O,\ A,\ B$ bất kì trong không gian, ta có $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$.

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB,CD (H .2 .16). Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CN}$ là hai vectơ đối nhau;

b) $\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{SA}$.



Hình 2.16

3. TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Tương tự như tích của một số với một vectơ trong mặt phẳng, ta có định nghĩa về tích của một số với một vectơ trong không gian:

Trong không gian, tích của một số thực $k\neq 0$ với một vectơ $\vec{a}\neq 0$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

- Cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k>0$; ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k<0$;
- Có độ dài bằng $|k|\cdot|\vec{a}|$.

Trong không gian, phép lấy tích của một số với một vectơ được gọi là phép nhân một số với một vectơ.

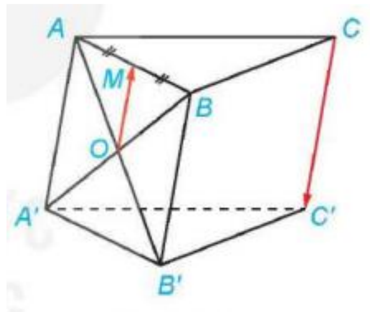
Chú ý

- Quy ước $k\vec{a}=\vec{0}$ nếu $k=0$ hoặc $\vec{a}=\vec{0}$.

- Nếu $k\vec{a}=\vec{0}$ thì $k=0$ hoặc $\vec{a}=\vec{0}$.

- Trong không gian, điều kiện cần và đủ để hai vectơ a $\vec{a}$ và $\vec{b}(\vec{b}\neq\vec{0})$ cùng phương là có một số thực k sao cho $\vec{a}=k\vec{b}$.

Ví dụ 7. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC\cdot A'B'C'$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB, AC, gọi O là giao điểm của AB' và $A'B$(H .2 .18). Chứng minh rằng $\overrightarrow{CC'}=(-2)\overrightarrow{OM}$.



Hình 2.18

Chú ý. Tương tự như phép nhân một số với một vectơ trong mặt phẳng, phép nhân một số với một vectơ trong không gian có các tính chất sau:

- Tính chất kết hợp: Nếu $h,\ k$ là hai số thực và $\vec{a}$ là một vectơ bất kì thì $h(k\vec{a})=(hk)\vec{a}$.

- Tính chất phân phối: Nếu $h,\ k$ là hai số thực và $\vec{a}$ là hai vectơ bất kì thì $(h+k)\vec{a}=h\vec{a}+k\vec{a}$ và $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$.

- Tính chất nhân với 1 và -1: Nếu $\vec{a}$ là một vectơ bất kì thì $1\vec{a}=\vec{a}$ và $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$.

Ví dụ 8. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD (H.2.19). Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$.

Chú ý. Tương tự như trong mặt phẳng, nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì với điểm O tuỳ ý, ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$.

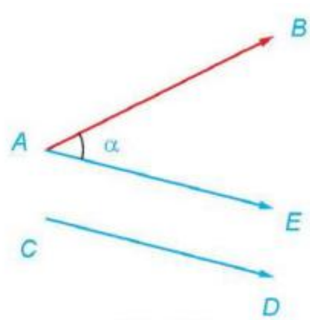
4. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

a) Góc giữa hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm O bất kì và gọi A,B là hai điểm sao cho $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Khi đó, góc $AOB\left(0^\circ\leq AOB\leq 180^\circ\right)$ được gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $(\vec{a},\vec{b})$.

Chú ý

- Để xác định góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ trong không gian ta có thể lấy điểm E sao cho $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CD}$, khi đó $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=BAE(H.2.23)$.



Hình 2.23

- Quy ước góc giữa một vectơ bất kì và 0 ó có thể nhận một giá trị tuỳ ý từ 0° đến 180°.

Ví dụ 9. Cho hình lập phương $ABCD\cdot A'B'C'D'$ (H .2 .24). Tính góc giữa các cặp vectơ sau:

a) $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{B'C'}$; b) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{A'D'}$.

b) Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a}\cdot\vec{b}$, được xác định bởi công thức: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})$.

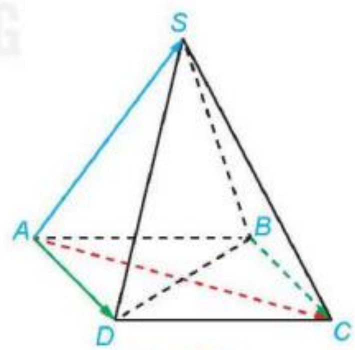
Chú ý

- Quy ước nếu $\vec{a}=\vec{0}$ hoặc $\vec{b}=0$ thì $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.
- Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Khi đó: $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.
- Với mọi vectơ a a ta có $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$.
- Nếu $\vec{a},\vec{b}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$ thì $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.

Ví dụ 10. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a (H.2.26). Tính các tích vô hướng sau:

a) $\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{BC}$;

b) $\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AC}$.



Hình 2.26

Nhận xét. Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian cũng có các tính chất giống như các tính chất của tích vô hướng của hai vectơ trong mặt phẳng. Cụ thể, nếu $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ là các vectơ trong không gian và k là một số thực thì ta có:

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$; $\quad k(\vec{a}\cdot\vec{b})=(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})$; $\quad \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

Ví dụ 11. Cho tứ diện ABCD có AC và BD cùng vuông góc với AB. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB, CD (H.2.27). Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})$ $\qquad$ b) $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

2.1. Trong không gian, cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ phân biệt và đều khác $\vec{0}$. Những mệnh đề nào sau đây là đúng?

a) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều cùng hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

b) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều ngược hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

c) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều cùng hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

d) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều ngược hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

2.2. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có $AB=2, AD=3$ và $AA'=4$. Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{BB'},\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{BD'}$.

2.3. Một chiếc bàn cân đối hình chữ nhật được đặt trên mặt sàn nằm ngang, mặt bàn song song với mặt sàn và bốn chân bàn vuông góc với mặt sàn như Hình 2.29. Trọng lực tác dụng lên bàn (biểu thị bởi vectơ â) phân tán đều qua bốn chân bàn và gây nên các phản lực từ mặt sàn lên các chân bàn (biểu thị bởi các vectơ $\vec{b},\vec{c},\vec{d},\vec{e}$).

a) Hãy chỉ ra mối quan hệ về phương và hướng của các vecto $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ và $\vec{e}$.

b) Giải thich vì sao các vectơ $\vec{b},\vec{c},\vec{d},\vec{e}$ đôi một bằng nhau.