

CHUYÊN ĐỀ 9: HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

PHẦN I. LÝ THUYẾT:

1. Hàm số

1.1. Định nghĩa:

Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là hàm số của x và x gọi là biến số.

1.2. Chú ý

- Khi x thay đổi mà y luôn nhận một giá trị thì y được gọi là hàm hằng.

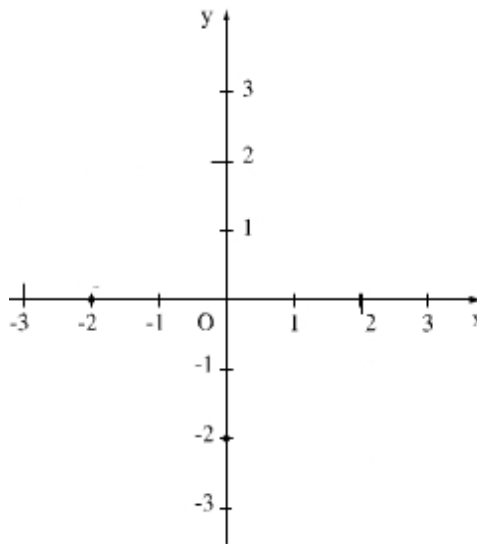
- Hàm số có thể được cho bằng bảng, bằng công thức, ...

- Khi y là hàm số của x ta có thể viết: $y = f(x); y = g(x); \dots$

2. Mặt phẳng tọa độ

2.1. Mặt phẳng tọa độ

- Mặt phẳng tọa độ Oxy (mặt phẳng có hệ trục tọa độ Oxy) được xác định bởi hai trục số vuông góc với nhau: trục hoành Ox và trục tung Oy; điểm O là gốc tọa độ.



2.2. Tọa độ một điểm

- Trên mặt phẳng tọa độ:

□ Mỗi điểm M xác định một cặp số $(x_0; y_0)$. Ngược lại mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ xác định một điểm M.

□ Cặp số $(x_0; y_0)$ gọi là tọa độ của điểm M, x_0 là hoành độ, y_0 là tung độ của điểm M

□ Điểm M có tọa độ kí hiệu là $M(x_0; y_0)$

3. Đồ thị của hàm số $y = ax (a \neq 0)$

3.1. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$

- Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng $(x; y)$ trên mặt phẳng tọa độ.

-Một điểm H thuộc đồ thị (H) của hàm số $y = f(x)$ thì có tọa độ thỏa mãn đẳng thức $y = f(x)$ và ngược lại.

3.2. Đồ thị của hàm số $y = ax (a \neq 0)$

-Đồ thị của hàm số $y = ax (a \neq 0)$ là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ.

-Cách vẽ: Vẽ đường thẳng đi qua điểm $O(0; 0)$ và $A(1; a)$

+ Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là hàm số của x và x gọi là biến số (gọi tắt là biến).

+ Nếu x thay đổi mà y không thay đổi thì y được gọi là hàm số hằng (hàm hằng).

+ Với mọi $x_1; x_2 \in \mathbb{R}$ và $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) < f(x_2)$ thì hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm đồng biến.

+ Với mọi $x_1; x_2 \in \mathbb{R}$ và $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) > f(x_2)$ thì hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm nghịch biến.

+ Hàm số $y = ax (a \neq 0)$ được gọi là đồng biến trên \mathbb{R} nếu $a > 0$ và nghịch biến trên \mathbb{R} nếu $a < 0$.

+ Tập hợp tất cả các điểm (x, y) thỏa mãn hệ thức $y = f(x)$ thì được gọi là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

+ Đồ thị hàm số $y = f(x) = ax (a \neq 0)$ là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ và điểm $(1; a)$.

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

DẠNG 1: Xác định xem đại lượng y có phải là hàm số của đại lượng x không:

I. PP: Kiểm tra điều kiện: Mỗi giá trị của x được tương ứng với một và chỉ một giá trị của y

II. BÀI TẬP:

Bài 1: Kiểm tra y có phải là hàm số của đại lượng x không trong các bảng sau:

a)

x	-2	-1	0	1	2	3
y	6	4	2	0	0	8

b)

x	2	4	6	7	8	9
y	1	1	1	1	1	1

c)

x	-2	-1	0	-1	2
y	6	4	2	0	0

d)

x	-2	-1	0	1	8
y	6	4	2	bút	vở

Đáp án:

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Sai

Bài 2: Trong các trường hợp sau, trường hợp nào y là hàm số của x ?

a) $y + 5 = x$ b) $3y = xc$ c) $y^2 = xd$ d) $x.y = 1$ e) $|y| = x$

Đáp án:

- a) Có b) có c) Không vì mỗi giá trị của x tương ứng với 2 giá trị của y
 d) Không vì giá trị $x = 0$ không tương ứng với bất kì giá trị nào của y.
 e) Không vì mỗi giá trị của x tương ứng với 2 giá trị của y

Dạng 2: Tính giá trị của hàm số tại giá trị của một biến cho trước:

I. Phương pháp giải

- Nếu hàm số cho bằng bảng thì cặp giá trị tương ứng của x và y nằm cùng một cột.

- Nếu hàm số cho bằng công thức ta thay giá trị của biến đã cho vào công thức để tính giá trị tương ứng của đại lượng kia.

Ví dụ: Cho $y=f(x)=3x+2$ Tính $f(2)$; $f(-1)$

Giải: Ta có $f(2)=3.2+2=8$; $f(-1)=3.(-1)+2=-1$

*Nếu bài toán không cho biết công thức hàm số mà chỉ cho đẳng thức mà hàm số thỏa mãn và tính $f(a)$ thì ta thay $x = a$ vào đẳng thức bài ra, khi đó xuất hiện thêm một giá trị của $f(b)$ nào đó ta lại tiếp tục thay $x = b$ vào đẳng thức bài ra để ra được 2 biểu thức liên hệ từ đó tính $f(a)$.

II. Bài tập

*** Trắc nghiệm nhanh củng cố về khái niệm hàm số.**

Bài 1: Cho biết x, y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch điền số thích hợp vào các ô trống trong bảng sau:

x	1	2,5			8	10
y		-4	-2,5	-2		

Đáp án:

x	1	2,5	4	-5	8	10
y	-10	-4	-2,5	-2	-1,25	-1

Bài 2: Cho hàm số $y = f(x) = |x + 1|$. Tính $f(-2)$; $f(2)$?

Đáp án: $f(-2) = 1$, $f(2) = 3$.

Bài 3: Cho hàm số $y = f(x) = 2x + 1$. Kết quả nào sau đây là đúng:

A. $f(0) = 2$. B. $f(-1) = -3$. C. $f(2) = 5$. D. $f(1) = 0$.

Đáp án: C

Bài 4: Hàm số $y = f(x)$. Nếu $f(1) = 2$, thì:

A. $x = 2$; $y = 1$ B. $x = 1$; $y = 1$ C. $x = 1$; $y = 2$ D. $x = 2$; $y = 2$

Đáp án: C

*** Tính giá trị của một hàm số tại giá trị của biến cho trước khi biết công thức hàm số**

Bài 1: Cho hàm số $y = f(x) = 3x + 2$

a/ Tính $f(4); f(-2)$

b/ Tính giá trị của x khi $y = f(x) = -1$

Đáp án:

a/ $f(4) = 3 \cdot 4 + 2 = 14$ $f(-2) = 3(-2) + 2 = -4$

b/ $f(x) = 3x + 2 = -1$

Giải được, $x = -1$

Bài 2: Cho hàm số $y = f(x) = 5x^2 - 2$

a) Tính $f(-0,5); f(-0,2); f(1); f\left(\frac{1}{4}\right)$

b) Tìm x để $f(x) = -2; f(x) = 3$

c) Chứng tỏ rằng với mọi x thì $f(x) = f(-x)$

HD:

a) Tương tự bài 1

b) Tương tự bài 1

c) $f(-x) = 5(-x)^2 - 2 = 5x^2 - 2 = f(x)$

*** Tính giá trị của hàm số tại giá trị biến cho trước khi hàm số thỏa mãn đẳng thức bài ra.**

Bài 1: Biết $f(x) = (1-x) \cdot f(x-1)$. Tính $f(4)$ biết $f(1) = 1$.

Hướng dẫn:

Ta có: $f(2) = (1-2) \cdot f(1) = -1 \cdot 1 = -1$.

$f(3) = -2 \cdot f(2) = -2 \cdot (-1) = 2$.

$f(4) = -3 \cdot f(3) = -3 \cdot 2 = -6$.

Bài 2: Cho hàm số $f(x)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Biết rằng với mọi x ta đều có:

$f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$. Tính $f(2)$.

HD: Thay $x = 2$ vào đẳng thức bài ra ta được: $f(2) + 3f\left(\frac{1}{2}\right) = 4$

Thay $x = \frac{1}{2}$ vào đẳng thức bài ra ta được: $f\left(\frac{1}{2}\right) + 3f(2) = \frac{1}{4}$

$$\text{Do đó } \begin{cases} f(2) + 3f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \\ 3f\left(\frac{1}{2}\right) + 9f(2) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{Tính được } -8f(2) = \frac{15}{4}$$

$$\text{Hay } f(2) = -\frac{15}{32}$$

Bài 3: Cho $f(x)$ là một hàm số thỏa mãn điều kiện $3f(x) + 2f(1-x) = 2x + 9$. Tính $f(2)$

HD: Tương tự, có $3f(2) + 2f(-1) = 13$

$$3f(-1) + 2f(2) = 7$$

$$\text{Hay } \begin{cases} 9f(2) + 6f(-1) = 39 \\ 6f(-1) + 4f(2) = 14 \end{cases} \text{ hay } 5f(2) = 25$$

$$\text{Do đó } f(2) = 5$$

Bài 4:

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện: $3f(x) - xf(-x) = x + 9$ với mọi x thuộc \mathbb{R} . Tính $f(3)$.

HD: Tính tại $x = 3$ và $x = -3$

$$\text{KQ: } f(3) = 3$$

Bài 5: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện: $2f(x) - xf(-x) = x + 10$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính $f(2)$.

HD: $2f(2) - 2f(-2) = 12$ hay $f(2) - f(-2) = 6$

$$2f(-2) + 2f(2) = 8 \text{ Từ đó tính được } f(2) = 5.$$

Bài 6:

a) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện $f(x) + xf(-x) = x + 1$. Tính $f(3)$.

b) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện $2020f(x) - xf(-x) = x + 2021$. Tính $f(2020)$.

HD:

$$\text{a) } f(3) = 1$$

$$\text{b) } f(2020) = \frac{2021}{2020}$$

Bài 7: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 2x + \frac{1}{x}$. Hãy tính $f(2)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Hướng dẫn:

Thay $x = 2$ vào biểu thức đã cho ta được:

$$f(2) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}. \quad (1)$$

Thay $x = \frac{1}{2}$ vào biểu thức ta được:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f(2) = 3. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) giải được $f(2) = \frac{1}{2}$

Tương tự tính được $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

Bài 8: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định với $x \neq 0$. Biết $f(1) = 1$; $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ ($x_1, x_2 \neq 0$) và $\frac{f(1)}{x} = \frac{1}{x^2} \cdot f(x)$. Tính $f\left(\frac{2014}{2015}\right)$

Hướng dẫn: Ta có

$$f\left(\frac{2014}{2015}\right) = f\left(\frac{1}{2015} + \frac{2013}{2015}\right) = f\left(\frac{1}{2015}\right) + f\left(\frac{2013}{2015}\right) \quad (\text{Vì } f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2))$$

$$= f\left(\frac{1}{2015}\right) + f\left(\frac{1}{2015} + \frac{2012}{2015}\right) = 2f\left(\frac{1}{2015}\right) + f\left(\frac{2012}{2015}\right)$$

$$= \dots = 2014f\left(\frac{1}{2015}\right)$$

$$\text{Lại có, } \frac{f(1)}{x} = \frac{1}{x^2} \cdot f(x) \quad (x \neq 0) \text{ nên } f\left(\frac{1}{2015}\right) = \frac{1}{2015}$$

$$\text{Do đó, } f\left(\frac{2014}{2015}\right) = 2014f\left(\frac{1}{2015}\right) = 2014 \cdot \frac{1}{2015} = \frac{2014}{2015}$$

Bài 9: Viết công thức của hàm số $y = f(x)$ biết y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ $\frac{1}{2}$

a) Tìm x để $f(x) = -5$.

b) Chứng tỏ rằng nếu $x_1 > x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$ $f(1) \cdot x = f(x)$

Hướng dẫn:

Do tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ $\frac{1}{2}$ nên $y = f(x) = \frac{1}{2}x$

a) Để $f(x) = -5$ thì $\frac{1}{2}x = -5$ hay $x = -10$.

b) $f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 12 \cdot (x_1 - x_2) > 0$ ($f(2) + f(-2) = 4$ (Do $x_1 > x_2$))

Do đó $f(x_1) > f(x_2)$.

Bài 10:

Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$. Biết $f(0) = 2018; f(1) = 2019; f(-1) = 2021$. Tính $f(-2)$.

Hướng dẫn: Ta có $f(0) = c = 2018$

$$f(1) = a + b + c = 2019 \Rightarrow a + b = 1$$

$$f(-1) = a - b + c = 2021 \Rightarrow a - b = 3$$

Từ đó tính được $a = 2; b = -1$. Khi đó $f(x) = 2x^2 - x + 2018$.

Suy ra, $f(-2) = 8 + 2 + 2018 = 2028$.

Bài 11: Cho hàm số $y = f(x) = x + \frac{1}{2}$.

Tính tổng $S = f\left(\frac{1}{2021}\right) + f\left(\frac{2}{2021}\right) + \dots + f\left(\frac{2019}{2021}\right) + f\left(\frac{2020}{2021}\right) + f(1)$.

HD:

$$f(0) = \frac{1}{2}; f\left(\frac{1}{2021}\right) = \frac{1}{2021} + \frac{1}{2}; \dots; f\left(\frac{2020}{2021}\right) = \frac{2020}{2021} + \frac{1}{2}; f(1) = 1 + \frac{1}{2}$$

$$S = \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2021} + \frac{2}{2021} + \dots + \frac{2020}{2021}\right) + \frac{2021}{2021} + \frac{1}{2} \quad (\text{nhóm đầu có 2022 số } \frac{1}{2})$$

$$S = 2022 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2021}(1 + 2 + \dots + 2021)$$

$$S = 1011 + \frac{1}{2021} \cdot \frac{2021 \cdot 2022}{2} = 1011 + 1011 = 2022$$

Bài tập tương tự:

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 + 1$. Tính $f(2)$.

Dạng 3: Tìm tọa độ một điểm và vẽ một điểm đã biết tọa độ, vẽ đồ thị hàm số, tìm các điểm trên một đồ thị hàm số, Biểu diễn các điểm lên hình và tính diện tích.

PP:

- Muốn tìm tọa độ một điểm ta vẽ 2 đường thẳng vuông góc với hai trục tọa độ.
- Để tìm một điểm trên một đồ thị hàm số ta cho bất kì 1 giá trị của x rồi tính giá trị y tương ứng.
- Có thể tính diện tích trực tiếp hoặc tính gián tiếp qua hình chữ nhật.
- Chú ý: Một điểm thuộc Ox thì tung độ bằng 0, thuộc trục Oy thì hoành độ bằng 0.

Bài 1:

a) Những điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x$?

$P(5; -3); A(2; 1); Q(-5; -\frac{5}{2})$

b) Vẽ đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x$

Đáp án:

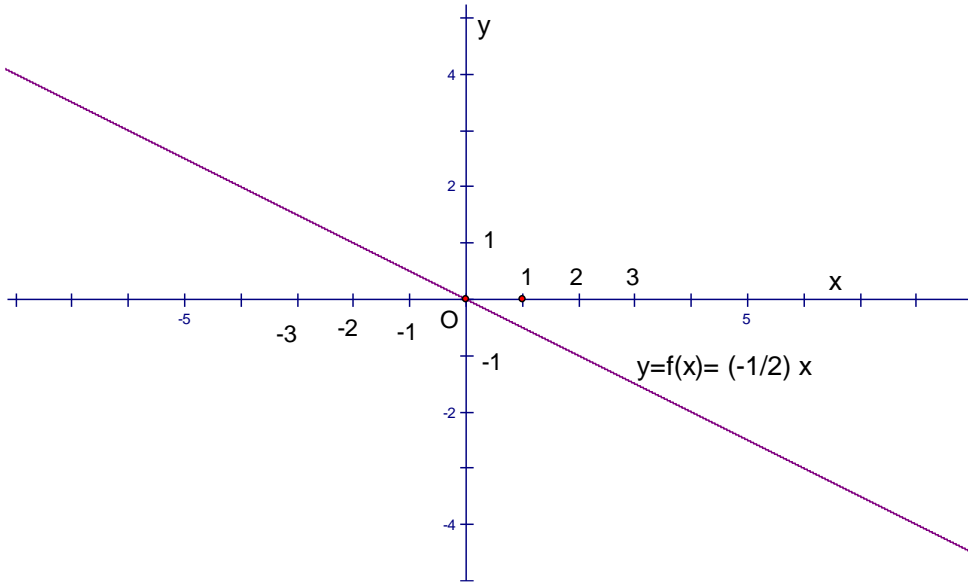
a)

P không thuộc đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x$

A thuộc đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x$

Q không thuộc đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x$

b) Đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x$ là đường thẳng đi qua gốc tọa độ $O(0; 0)$ và $A(2; -1)$.



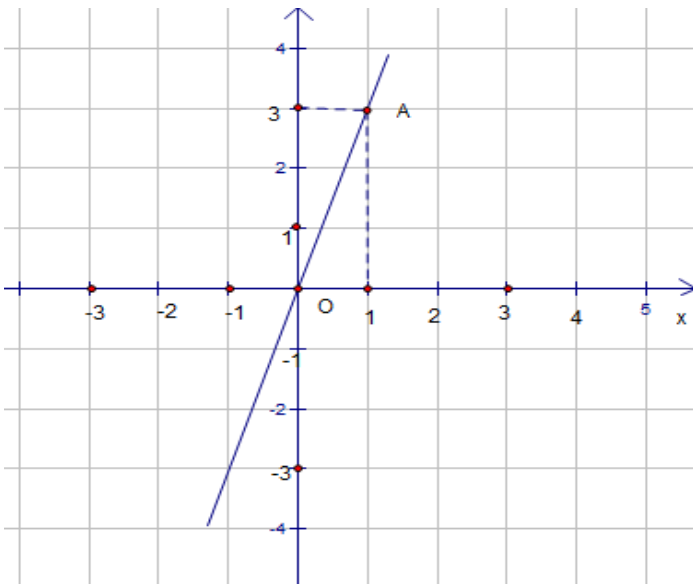
Bài 2: Cho hàm số $y = kx$

- Tìm k biết đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1; 3)$
- Vẽ đồ thị của hàm số trên với k vừa tìm được ở câu a

Đáp án

- Vì đồ thị hàm số $y = kx$ đi qua điểm $A(1; 3)$ nên thay $x = 1; y = 3$ vào hàm số ta có:
 $3 = k \cdot 1 \rightarrow k = 3$. Vậy $k = 3$.
- Với $k = 3$ ta có hàm số $y = 3x$.

Đồ thị hàm số $y = 3x$ là đường thẳng đi qua gốc tọa độ $O(0; 0)$ và điểm $A(1; 3)$.



Bài 3: Cho hàm số $y = f(x) = 2x$

- Tính $f\left(\frac{1}{2}\right); f\left(\frac{3}{2}\right)$

b) Tìm x biết $f(x) = -5$. Điểm $M(-3; -1)$ có thuộc đồ thị của hàm số hay không?

Hướng dẫn:

b) Vì $f(x) = -5 \rightarrow 2x = -5 \rightarrow x = \frac{-5}{2}$.

Ta thấy: $-1 \neq 2 \cdot (-3) \rightarrow$ Điểm $M(-3; -1)$ không thuộc đồ thị hàm số đã cho.

Bài 4. Vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy các đồ thị của các hàm số sau:

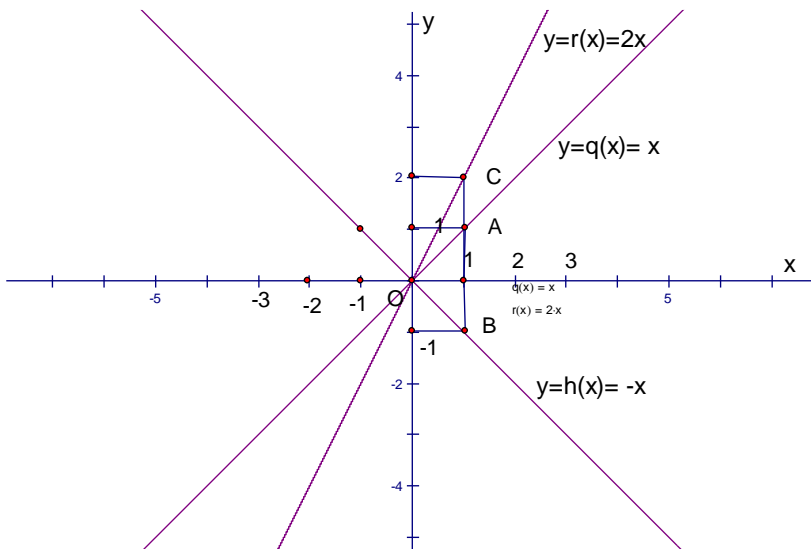
$y = x; y = -x; y = 2x$.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = x$ đi qua 2 điểm $O(0; 0)$ và $A(1; 1)$

Đồ thị hàm số $y = -x$ đi qua 2 điểm $O(0; 0)$ và $B(1; -1)$

Đồ thị hàm số $y = 2x$ đi qua 2 điểm $O(0; 0)$ và $A(1; 2)$



Bài 5. Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{-1}{2}x$. Bằng đồ thị hãy tìm:

a) $f(1); f(2); f(-1); f(-2); f(0)$

b) Giá trị của x khi $y = -1; y = 0; y = 2$

Lời giải