ĐS7. CHUYÊN ĐỀ 3 – TỈ LỆ THỨC TÍNH CHẤT DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU

PHẦN I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT.

A. Tỉ lệ thức

1. Định nghĩa: Tỉ lệ thức là một đẳng thức của hai tỉ số $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\left(a,b,c,d\in Q;b\neq 0,d\neq 0\right)$

Trong đó: Các số hạng a và d được gọi là các ngoại tỉ, các số hạng b và c được gọi là trung tỉ
2. Tính chất:
a) Tính chất 1: (Tính chất cơ bản của tỉ lệ thức)

Nếu $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ thì $ad=bc$

b) Tính chất 2: Nếu $ad=bc$ và $a,b,c,d\neq 0$ thì ta có: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d};\frac{a}{c}=\frac{b}{d};\frac{d}{b}=\frac{c}{a};\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$

Như vậy trong tỉ lệ thức, ta có thể hoán vị các trung tỉ với nhau, hoán vị các ngoại tỉ với nhau, hoán vị cả trung tỉ với nhau, cả ngoiạ tỉ với nhau.

B. Tính chất của dãy tỉ số bằng nhau

1. Tính chất của dãy tỉ số bằng nhau

+) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$

+) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{a-c+e}{b-d+f}$ (giả thiết các tỉ số đều có nghĩa).

2. Chú ý: Khi ta nói các số x,y,z tỉ lệ với các số a,b,c, tức là:

$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ hoặc $x:y:z=a:b:c$

PHẦN II.CÁC DẠNG BÀI.

Dạng 1. Tỉ lệ thức, tính chất dãy tỉ số bằng nhau

I. Phương pháp giải.

1. Tỷ lệ thức: Là đẳng thức của hai tỉ số $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}(b,d\neq 0)$ hoặc $a:b=c:d$

Trong đó: a,b,c,d là các số hạng của tỷ lệ thức
- a và d là các số hạng ngoài hay *ngoại tỉ*
- b và c là các số hạng trong hay *trung tỉ*

Các số a và d được gọi là ngoại tỉ; các số b và c được gọi là trung tỉ
2. Tính chất của tỉ lệ thức

a) Tính chất 1: Nếu $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc$

b) Tính chất 2: Nếu $ad=bc\neq 0\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d};\frac{d}{c}=\frac{b}{a};\frac{d}{b}=\frac{c}{a};\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

3. Tính chất của dãy tỉ số bằng nhau

- Nếu $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$ (giả thiết các phân số đều có nghĩa)

- Mở rộng:

+ Nếu $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{a-c+e}{b-d+f}$ (giả thiết các phân số đều có nghĩa)

Ví dụ: $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{2+4+6}{3+6+9}=\frac{4}{6};\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{2+4-6}{3+6-9}=\frac{0}{0}$ (do $\frac{0}{0}$ không có nghĩa) nên tính chất không còn đúng

- Nâng cao:

+ Nếu $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$ thì $\frac{k_1a+k_2c+k_3e}{k_1b+k_2d+k_3f}=k$

+ Nếu $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ thì $\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$; $\frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c}$

(Tính chất này gọi là tính chất tổng hoặc hiệu tỉ lệ)

4. Chú ý: Khi có dãy tỉ số $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, ta nói các số x,y,z tỉ lệ với các số a,b,c

Ví dụ: Khi có dãy tỉ số $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{5}$, ta nói các số a,b,c tỉ lệ với các số $2,3,5$

Ta cũng viết $a:b:c=2:3:5$

+) Vì tỉ lệ thức là một đẳng thức nên nó có tính chất của đẳng thức, từ tỉ lệ thức $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ suy ra

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=\left(\frac{c}{d}\right)^2=\frac{a}{b}.\frac{c}{d};k.\frac{a}{b}=k.\frac{c}{d}(k\neq 0);\frac{k_1a}{k_1b}=\frac{k_2c}{k_2d}(k_1,k_2\neq 0)$$

Từ $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}\Rightarrow\left(\frac{x}{a}\right)^3=\left(\frac{y}{b}\right)^3=\left(\frac{z}{c}\right)^3=\frac{x}{a}.\frac{y}{b}.\frac{z}{c};\left(\frac{x}{a}\right)^2=\frac{y}{b}.\frac{z}{c}$

II. Bài toán.

Bài 1: Chứng minh rằng nếu $\frac{a+b}{b+c}=\frac{c+d}{d+a}(c+d\neq 0)$ thì $\left[\begin{array}{l}a=c\\a+b+c+d=0\end{array}\right.$

Lời giải

Chú ý: Trong bài toán có chữ nếu thì không cần đặt điều kiện mẫu khác 0 nữa

Ta có: $\frac{a+b}{b+c}=\frac{c+d}{d+a}\Rightarrow\frac{a+b}{c+d}=\frac{b+c}{d+a}\Leftrightarrow\frac{a+b}{c+d}+1=\frac{b+c}{a+d}+1\Leftrightarrow\frac{a+b+c+d}{c+d}=\frac{a+b+c+d}{a+d}$

$$\Leftrightarrow(a+b+c+d)\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{d+a}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a+b+c+d=0\\\frac{1}{c+d}=\frac{1}{d+a}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a+b+c+d=0\\a=c\end{array}\right.\Rightarrow \text{đpcm}$$

Bài 2: Cho $(x-y):(x+y):xy=1:9:30$. Với $x,y\neq 0$ hãy tính xy?

Lời giải

Theo giả thiết ta có: $(x-y):(x+y):xy=1:9:30\Rightarrow\frac{x-y}{1}=\frac{x+y}{9}=\frac{xy}{30}(x,y\neq 0)(1)$

Từ (1) $\Rightarrow\frac{xy}{30}=\frac{x-y}{1}=\frac{x+y}{9}=\frac{x-y+x+y}{10}=\frac{x}{5}\Rightarrow\frac{xy}{30}=\frac{x}{5}\Rightarrow\frac{y}{6}=1\Rightarrow y=6$

Lại có: $\frac{xy}{30}=\frac{x-y}{1}=\frac{x}{5}(*)$, thay $y=6$ vào (*) ta được:

$$\frac{xy}{30}=\frac{x-6}{1}=\frac{x}{5}=\frac{x-(x-6)}{5-1}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{xy}{30}=\frac{3}{2}\Rightarrow xy=45$$

Vậy $xy=45$

Bài 3: Tìm các số $a_1;a_2;...;a_{100}$, biết $\frac{a_1-1}{100}=\frac{a_2-2}{99}=....=\frac{a_{99}-99}{2}=\frac{a_{100}-100}{1}$

và $a_1+a_2+...+a_{100}=10100$

Lời giải

Theo bài ra tính chất của dãy tỉ số bằng nhau và ta có: $\frac{a_1-1}{100}=\frac{a_2-2}{99}=....=\frac{a_{99}-99}{2}=\frac{a_{100}-100}{1}=\frac{(a_1+...+a_{100})-(1+2+...+100)}{100+99+...+1}$

$$=\frac{10100-\frac{(1+100).100}{2}}{(1+100).100:2}=1\Rightarrow a_1=a_2=...=a_{100}=101$$

Vậy $a_1=a_2=...=a_{100}=101$.

Bài 4: Cho các số $a,b,c,d\neq 0$ và thỏa mãn $b^2=ac;c^2=bd;b^3+c^3+d^3\neq 0$. Chứng minh rằng $\frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3}=\frac{a}{d}$

Lời giải: Vì các số $a,b,c,d\neq 0$, ta có:

$$b^2=ac\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{b}{c};c^2=bd\Rightarrow\frac{b}{c}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a^3}{b^3}=\frac{b^3}{c^3}=\frac{c^3}{d^3}(*)$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau $\Rightarrow\frac{a^3}{b^3}=\frac{b^3}{c^3}=\frac{c^3}{d^3}=\frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3}(1)$.

Lại có: $\frac{a^3}{b^3}=\frac{a}{b}.\frac{a}{b}.\frac{a}{b}=\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{d}=\frac{a}{d}(2)$

Từ (1)(2) $\Rightarrow\frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3}=\frac{a}{d}$ (đpcm)

Bài 5: Cho $(a+b):(b+c):(c+a)=6:7:8;a+b+c=42$. Hãy tìm c?

Lời giải

Cách 1: từ đề bài suy ra $\frac{a+b}{6}=\frac{b+c}{7}=\frac{c+a}{8}=k\Rightarrow a+b=6k;b+c=7k;c+a=8k$

$\Rightarrow 2(a+b+c)=21k\Rightarrow k=4$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b=24\\a+b+c=42\end{cases}\Rightarrow c=18$$

Cách 2: $\frac{a+b}{6}=\frac{b+c}{7}=\frac{c+a}{8}=\frac{2(a+b+c)}{21}=\frac{84}{21}=4\Rightarrow\frac{a+b}{6}=4\Rightarrow a+b=24\Rightarrow c=18$

Bài 6: Cho $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

b) $\frac{a-c}{c}=\frac{b-d}{d}$

c) $\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}$

Lời giải

a) Ta có: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

b) Ta có: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\Rightarrow\frac{a}{c}-1=\frac{b}{d}-1\Rightarrow\frac{a-c}{c}=\frac{b-d}{d}$ (với c khác 0)

c) Ta có: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}\Rightarrow 1-\frac{b}{a}=1-\frac{d}{c}\Rightarrow\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}$ (với a và c khác 0)

Bài 7.1: Cho $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}$

b) $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

7.2) Với $a^2=bc$ thì $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+a}{c-a}$

Lời giải

a) Ta có $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ (tính chất dãy tỉ số bằng nhau)

b) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d}\Rightarrow\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ (đpcm)

c) Từ giả thiết $\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{a}=\frac{a+b}{c+a}=\frac{a-b}{c-a}\Rightarrow\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+a}{c-a}$ (đpcm) (với a,b,c đôi một khác nhau và khác 0)

Bài 8:

a) Nếu $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ thì $\frac{7a^2+3ab}{11a^2-8b^2}=\frac{7c^2+3cd}{11c^2-8d^2}$

b) Với $b^2=ac$ thì $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a}{c}$

c) Nếu $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ thì $\frac{a}{b}=\frac{3a+2c}{3b+2d}$

Lời giải

a) Ta có $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\Rightarrow\frac{a^2}{c^2}=\frac{b^2}{d^2}=\frac{a.b}{c.d}=\frac{7a^2+3ab}{7c^2+3cd}=\frac{11a^2-8b^2}{11c^2-8d^2}$ (đpcm)

Cách khác: đặt $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ suy ra $a=bk$, $c=dk$, thay vào từng vế của đẳng thức cần chứng minh, rút gọn, tính mỗi vế theo k suy ra điều phải chứng minh

b) Ta có $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}\Rightarrow\frac{a^2}{b^2}=\frac{b^2}{c^2}=\frac{a}{b}.\frac{b}{c}=\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a}{c}$ (đpcm)

c) Theo giả thiết $\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{3a}{3b}=\frac{2c}{2d}=\frac{3a+2c}{3b+2d}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{3a+2c}{3b+2d}$ (đpcm)

Bài 9: Cho $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Chứng minh rằng $\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}=\frac{ac}{bd}$

Lời giải

Ta có: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}(1)$

Lại có: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}=\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}(2)$

Từ (1)(2) $\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}=\frac{ac}{bd}$ (đpcm)

Cách 2: đặt $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ suy ra $a=bk$, $c=dk$, thay vào từng vế của đẳng thức cần chứng minh, rút gọn, tính mỗi vế theo k suy ra điều phải chứng minh.

Bài 10: Cho $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Chứng minh rằng $\frac{5a+3b}{5a-3b}=\frac{5c+3d}{5c-3d}$

Lời giải

Ta có: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{5a}{5b}=\frac{3c}{3d}=\frac{5a+3b}{5c+3d}=\frac{5a-3b}{5c-3d}\Rightarrow\frac{5a+3b}{5a-3b}=\frac{5c+3d}{5c-3d}$

Cách 2: đặt $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ suy ra $a=bk$, $c=dk$, thay vào từng vế của đẳng thức cần chứng minh, rút gọn, tính mỗi vế theo k suy ra điều phải chứng minh.

Bài 11:

Cho $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, Các số x,y,z,t thỏa mãn $xa+yb\neq 0, zc+td\neq 0$. Chứng minh: $\frac{xa+yb}{za+tb}=\frac{xc+yd}{zc+td}$

Lời giải

Từ giả thiết $\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\Rightarrow\frac{ax}{cx}=\frac{by}{dy}=\frac{ax+by}{cx+dy}=\frac{az}{cz}=\frac{tb}{td}=\frac{az+tb}{cz+td}$

$\Rightarrow\frac{xa+yb}{za+tb}=\frac{xc+yd}{zc+td}$ (đpcm)

Bài 12: Cho tỉ lệ thức: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Chứng minh rằng: $\frac{a.d}{c.d}=\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}$ và $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$

Lời giải

Từ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\Rightarrow\frac{a.b}{c.d}=\frac{a^2}{c^2}=\frac{b^2}{d^2}=\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}$

và $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{a+b}{c+d}\Rightarrow\frac{a^2}{c^2}=\frac{b^2}{d^2}=\frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$

Cách 2: đặt $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$=k suy ra $a=bk$, $c=dk$, thay vào từng vế của đẳng thức cần chứng minh, rút gọn, tính mỗi vế theo k suy ra điều phải chứng minh.

Bài 13: Cho 4 số a_1,a_2,a_3,a_4 thỏa mãn: $a_2^2=a_1.a_3$, $a_3^2=a_2.a_4$.

Chứng minh rằng: $\frac{a_1^3+a_2^3+a_3^3}{a_2^3+a_3^3+a_4^3}=\frac{a_1}{a_4}$

Lời giải

Từ giả thiết $\Rightarrow\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_3},\frac{a_2}{a_3}=\frac{a_3}{a_4}\Rightarrow\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_3}=\frac{a_3}{a_4}\Rightarrow\frac{a_1^3}{a_2^3}=\frac{a_2^3}{a_3^3}=\frac{a_3^3}{a_4^3}=\frac{a_1^3+a_2^3+a_3^3}{a_2^3+a_3^3+a_4^3}=\frac{a_1}{a_2}.\frac{a_2}{a_3}.\frac{a_3}{a_4}=\frac{a_1}{a_4}$ (đpcm)

Bài 14: Cho $\frac{a}{c}=\frac{c}{d}=\frac{b}{d}$. Chứng minh rằng: $\frac{a^3+c^3-b^3}{c^3+b^3-d^3}=\frac{a}{d}$

Lời giải

Ta có: $\frac{a}{c}=\frac{c}{b}=\frac{b}{d}\Rightarrow\frac{a^3}{c^3}=\frac{c^3}{b^3}=\frac{b^3}{d^3}=\frac{a}{d}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta được: $\frac{a^3}{c^3}=\frac{c^3}{b^3}=\frac{b^3}{d^3}=\frac{a}{d}=\frac{a^3+c^3-b^3}{c^3+b^3-d^3}$ (đpcm)

Bài 15: Cho tỉ lệ thức: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Chứng minh rằng: $\frac{2a^2-3ab+5b^2}{2b^2+3ab}=\frac{2c^2-3cd+5d^2}{2d^2+3cd}$ (với điều kiện mẫu thức xác định)

Lời giải

Đặt $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k\Rightarrow\begin{cases}a=k.b\\c=kd\end{cases}$, thay vào biểu thức ta được:

$$\frac{2a^2-3ab+5b^2}{2b^2+3ab}=\frac{k^2-3k+5}{2+3k}(1) \text{ và } \frac{2c^2-3cd+5d^2}{2d^2+3cd}=\frac{k^2-3k+5}{2+3k}(2)$$

Từ (1)(2) $\Rightarrow\frac{2a^2-3ab+5b^2}{2b^2+3ab}=\frac{2c^2-3cd+5d^2}{2d^2+3cd}$ *(đpcm)*

Bài 16: Cho $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Chứng minh rằng: $\frac{ac}{bd}=\frac{2009a^2+2010c^2}{2009b^2+2010d^2}$

Lời giải

Từ giả thiết ta có: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\left(\frac{a}{b}\right)^2=\left(\frac{c}{d}\right)^2\Rightarrow\frac{a.c}{b.d}=\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}$

$$\Rightarrow\frac{a.c}{b.d}=\frac{2010c^2}{2010d^2}=\frac{2009a^2}{2009b^2}=\frac{2010c^2+2009a^2}{2010d^2+2009b^2}$$

Bài 17: Chứng minh rằng: Nếu $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ thì $\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^4=\frac{a^4+b^4}{c^4+d^4}$

Lời giải

Ta có: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{a-b}{c-d}\Rightarrow\frac{a^4}{c^4}=\frac{b^4}{d^4}=\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^4=\frac{a^4+b^4}{c^4+d^4}$ (đpcm)

Bài 18: Cho $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}(b,c,d,c+d\neq0)$. Chứng minh rằng: $\frac{ab}{cd}=\frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$

Lời giải

Ta có: $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{a+b}{c+d}\Rightarrow\frac{a}{c}.\frac{b}{d}=\frac{a+b}{c+d}.\frac{a+b}{c+d}=\frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$ (đpcm)

Bài 19: Chứng minh rằng: Nếu $2(x+y)=5(y+z)=3(z+x)$ thì $\frac{x-y}{4}=\frac{y-z}{5}$

Lời giải

Ta có: $\frac{x+y}{3}=\frac{z+x}{2}=\frac{x+y-z-x}{3-2}=y-z;\ \frac{y+z}{3}=\frac{z+x}{5}=\frac{-y-z+z+x}{-3+5}=\frac{x-y}{5}$

$\frac{x-y}{2}=\frac{z+x}{5}\Rightarrow x-y=\frac{2(z+x)}{5}\Rightarrow\frac{x-y}{4}=\frac{z+x}{10}(1)$ và $\frac{z+x}{2}=y-z\Rightarrow\frac{y-z}{5}=\frac{z+x}{10}(2)$

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{x-y}{4}=\frac{y-z}{5}$

Bài 20: Chứng minh rằng: Nếu có a,b,c,d thỏa mãn $\left[ab(ab-2cd)+c^2d^2\right]\left[ab(ab-2)+2(ab+1)\right]=0$ thì chúng lập thành một tỉ lệ thức.

Lời giải

Từ giả thiết ta xét 2 trường hợp:

+) TH1: $ab(ab-2cd)+c^2d^2=0\Rightarrow(ab-cd)^2=0\Rightarrow ab=cd\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ (đpcm)

+) TH2: $\left[ab(ab-2)+2(ab+1)\right]=0\Rightarrow a^2b^2-2ab+2ab+2=0\Leftrightarrow a^2b^2=-2$ (vô lý)

Bài 21: Cho dãy $\frac{a}{2009}=\frac{b}{2011}=\frac{c}{2013}$. Chứng minh rằng: $\frac{(a-c)^2}{4}=(a-b)(b-c)$.

Lời giải

Ta có: $\frac{a}{2009}=\frac{b}{2011}=\frac{c}{2013}=\frac{a-c}{-4}=\frac{a-b}{-2}=\frac{b-c}{-2}=k$

$\Rightarrow\begin{cases}a-c=-4k\\ a-b=-2k\\ b-c=-2k\end{cases}\Rightarrow\frac{(a-c)^2}{4}=\frac{(-4k)^2}{4}=4k^2$ và $(a-b)(b-c)=4k^2$

$\Rightarrow VT=VP\Rightarrow$ (đpcm)

Bài 22: Cho a, b dương thỏa mãn: $a^{2006}+b^{2006}=a^{2004}+b^{2004}$. Chứng minh $\frac{a^2+b^2}{32}\le 2^{-4}$

Lời giải

Giả sử $a=1\Rightarrow b=1\Rightarrow\frac{a^2+b^2}{32}=2^{-4}$

Nếu $a\ne 1\Rightarrow b\ne 1$, giả sử $a\ge b\Rightarrow a^{2004}\left(a^2-1\right)=b^{2004}\left(1-b^2\right)$

$\Rightarrow\frac{a^{2004}}{b^{2004}}=\frac{1-b^2}{1-a^2}$, Vì $a\ge b\Rightarrow 1-b^2\ge a^2-1\Rightarrow a^2+b^2\le 2$

$\Rightarrow\frac{a^2+b^2}{32}\le\frac{2}{32}=2^{-4}$ (đpcm)

Bài 23: Cho $a,b,c\ne 0$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$. Chứng minh rằng $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\le 0$

Lời giải

Từ giả thiết $\Rightarrow\frac{1}{a}=-\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\Rightarrow\frac{1}{a}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\le 0\Rightarrow\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}\le 0$

Tương tự: $\frac{1}{bc}+\frac{1}{ab}\le 0,\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\le 0$

Cộng theo vế ta được: $2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\le 0$ (đpcm)

Bài 24: Cho $x^2+y^2=1$ và $b.x^2=a.y^2$. Chứng minh rằng: $\frac{x^{2000}}{a^{1000}}+\frac{y^{2000}}{b^{1000}}=\frac{2}{(a+b)^{1000}}$

Lời giải

Từ $bx^2+ay^2\Rightarrow\frac{x^2}{a}=\frac{y^2}{b}=\frac{x^2+y^2}{a+b}=\frac{1}{a+b}$

$\frac{x^{2000}}{a^{1000}}=\frac{y^{2000}}{b^{1000}}=\frac{1}{(a+b)^{1000}}\Rightarrow\frac{x^{2000}}{a^{1000}}+\frac{y^{2000}}{b^{2000}}=\frac{2}{(a+b)^{1000}}$ (đpcm)

Bài 25: Chứng minh rằng nếu $x=\frac{a-b}{a+b},y=\frac{b-c}{b+c},z=\frac{c-a}{c+a}$ thì ta có:

$(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z)$

Lời giải

Xét $x+1=\frac{a-b}{a+b}+1=\frac{2a}{a+b}$. Tương tự: $y+1=\frac{2b}{b+c};z+1=\frac{2c}{c+a}$

Khi đó $VT=\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

Tương tự: $1-x=1-\frac{a-b}{a+b}=\frac{2b}{a+b}$, $1-y=\frac{2c}{b+c},1-z=\frac{2a}{c+a}$

Khi đó: $VP=\dfrac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}=VT$ (đpcm)

Bài 26: Biết $a^2+ab+\dfrac{b^2}{3}=15;\ c^2+\dfrac{b^2}{3}=6$ và $a^2+ac+c^2=9(a,c\neq 0;a\neq -c)$. Chứng minh rằng $\dfrac{2c}{a}=\dfrac{b+c}{a+c}$

Lời giải

Ta có: $a^2+ab+\dfrac{b^2}{3}=15=6+9=\left(a^2+ac+c^2\right)+\left(c^2+\dfrac{b^2}{3}\right)$

$\Rightarrow 2c^2=ab-ac\Rightarrow 2c^2=ab+ac-2ac\Rightarrow 2c^2+2ac=ab+ac$

$\Rightarrow 2c(c+a)=a(b+c)\Rightarrow \dfrac{2c}{a}=\dfrac{b+c}{a+c}$

Bài 27: Cho $3^x=9^{y-1}$ và $8^y-2^{x+8}=0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{3}$

Lời giải

Từ $8^y=2^{x+8}\Leftrightarrow 2^{3y}=2^{x+8}\Rightarrow 3y=x+8$ (1)

Và $3^x=9^{y-1}=3^{2(y-1)}\Rightarrow x=2y-2$

Thay $x=2y-2$ vào (1) ta được: $3y=2y-2+8\Leftrightarrow y=6\Rightarrow x=10$.

Bài 28: Cho 3 số a,b,c đôi 1 khác nhau. Chứng minh rằng:

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}$$

Lời giải

Ta có: $\dfrac{2}{a-b}=\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{a-b}=\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{-1}{b-a}$

Tính tương tự ta có: $\dfrac{2}{b-c}=\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{-1}{c-b}$, và $\dfrac{2}{c-a}=\dfrac{1}{c-a}+\dfrac{-1}{a-c}$

Cộng theo vế: $\dfrac{2}{a-b}+\dfrac{2}{b-c}+\dfrac{2}{c-a}=\left(\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{1}{a-c}\right)+\left(\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{-1}{b-a}\right)+\left(\dfrac{1}{c-a}+\dfrac{-1}{c-b}\right)=VT$

Bài 29: Cho tỷ lệ thức $\dfrac{3a+2b+c}{a+2b-c}=\dfrac{3a-2b+c}{a-2b-c}(b\neq 0)$. Chứng minh rằng $a+c=0$

Lời giải

Ta có $\dfrac{3a+2b+c}{a+2b-c}=\dfrac{3a-2b+c}{a-2b-c}=\dfrac{(3a+2b+c)-(3a-2b+c)}{(a+2b-c)-(a-2b-c)}=\dfrac{4b}{4b}=1(b\neq 0)\Rightarrow \begin{cases}3a+2b+c=a+2b-c\\3a-2b+c=a-2b-c\end{cases}$

$\Rightarrow a+c=0\Rightarrow$ *(đpcm)*

Bài 30: Cho 2 số hữu tỷ $\dfrac{a}{b}$ và $\dfrac{c}{d}$ với $b>0;\ d>0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}\Leftrightarrow ad<bc$

Lời giải

+ Có: $\left.\begin{matrix}\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}\\ b>0;d>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow \dfrac{ad}{bd}<\dfrac{cb}{db}\Rightarrow ad<bc$

+ Có: $\left.\begin{matrix}ad<bc\\ b>0;d>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow \dfrac{ad}{bd}<\dfrac{bc}{db}\Rightarrow \dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}$

Bài 31: Nếu $b>0;\ d>0$ thì từ $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$

Lời giải

+ Có $\left.\begin{matrix}\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\\ b>0;d>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow ad<bc\ (1)$ thêm vào 2 vế của (1) với ab ta có:

$ad+ab<bc+ab\Rightarrow a(b+d)<b(c+a)\Rightarrow\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}(2)$

+ Thêm vào hai vế của (1) với dc ta có:

$(1)\Rightarrow ad+dc<bc+dc\Rightarrow d(a+c)<c(b+d)\Rightarrow\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}(3)$

+ Từ (2) và (3) ta có:

Từ $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$ (đpcm)

Bài 32. Cho $a,b,c,c>0$. Chứng minh rằng: $1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2$

Lời giải

Lưu ý: *sử dụng tính chất*: Với a,b,c là các số dương ta có:

- Nếu $\frac{a}{b}<1$ thì $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$

- Nếu $\frac{a}{b}>1$ thì $\frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+c}$

Áp dụng vài bài

+ Từ $\frac{a}{a+b+c}<1$ theo tính chất (3) ta có:

$\frac{a+d}{a+b+c+d}>\frac{a}{a+b+c}(1)$ (do $d>0$)

Mặt khác: $\frac{a}{a+b+c}>\frac{a}{a+b+c+d}(2)$

+ Từ (1) và (2) ta có: $\frac{a}{a+b+c+d}<\frac{a}{a+b+c}<\frac{a+d}{a+b+c+d}(3)$

+ Tương tự ta có:

$\frac{b}{a+b+c+d}<\frac{b}{b+c+d}<\frac{b+a}{a+b+c+d}(4)$

$\frac{c}{a+b+c+d}<\frac{c}{c+d+a}<\frac{c+b}{c+d+a+b}(5)$

$\frac{d}{d+a+b+c}<\frac{d}{d+a+b}<\frac{d+c}{a+b+c+d}(6)$

+ Cộng bất đẳng thức kép (3); (4); (5); (6) theo từng vế thì được:

$1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2$

Bài 33. Cho $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ và $b;d>0$. Chứng minh rằng $\frac{a}{b}<\frac{ab+cd}{b^2+d^2}<\frac{c}{d}$

Lời giải

Ta có $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ và $b;d>0$ nên $\frac{a.b}{b.b}<\frac{c.d}{d.d}\Rightarrow\frac{ab}{b^2}<\frac{cd}{d^2}$

Theo tính chất (2) ta có: $\frac{ab}{b^2}<\frac{ab+cd}{b^2+d^2}<\frac{cd}{d^2}\Rightarrow\frac{a}{b}<\frac{ab+cd}{b^2+d^2}<\frac{c}{d}$

Dạng 2: Chứng minh dãy tỉ số bằng nhau

I. Phương pháp giải

Cách 1: Sử dụng định nghĩa

Ví dụ: Cho $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

Ta sẽ đặt $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k\Rightarrow a=bk;c=dk$ rồi thay a,c vào biểu thức cần chứng minh

Cách 2: Sử dụng phương pháp nhân chéo

Để chứng minh $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ta đi chứng minh $ad=bc$

Cách 3: Áp dụng tính chất của dãy tỷ số bằng nhau

Ví dụ: Ta có $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{x}{y}$ thì $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{x}{y}=\frac{a+c+c}{b+d+y}=\frac{a-c+x}{b-d+y}$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\left(\frac{c}{d}\right)^m=\left(\frac{x}{y}\right)^m\left(m\in N^*\right)\Rightarrow\frac{a^m}{b^m}=\frac{c^m}{d^m}=\frac{x^m}{y^m}=\frac{a^m+c^m+x^m}{b^m+d^m+y^m}$$

II. Bài toán.

Bài 1:

Cho $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}(b,d\neq 0,c\neq d,c+2d\neq 0)$. Chứng minh rằng $\frac{a^{2017}-b^{2017}}{c^{2017}-d^{2017}}=\left(\frac{a+2b}{c+2d}\right)^{2017}$

Lời giải

Cách 1: Từ giả thiết $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

- Nếu $c=0\Rightarrow a=0\Rightarrow VT=VP=\frac{b^{2017}}{d^{2017}}$

- Nếu $c\neq 0\Leftarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=k\Rightarrow a=kc;b=kd\Rightarrow a^{2017}-b^{2017}=k^{2017}(c^{2017}-d^{2017})\Rightarrow VT=k^{2017}$

Ta lại có: $a+2b=k(c+2d)\Rightarrow\frac{a+2b}{c+2d}=k\Rightarrow VP=k^{2017}=VT$

Cách 2: - Xét với $c=0$

- Xét với $c\neq 0\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{b}{d}=\frac{2b}{2d}=\frac{a+2b}{c+2d}\Rightarrow\frac{a^{2017}}{c^{2017}}=\frac{b^{2017}}{d^{2017}}=\frac{(a+2b)^{2017}}{(c+2d)^{2017}}=\frac{a^{2017}-b^{2017}}{c^{2017}-d^{2017}}\Rightarrow$ (đpcm)

Bài 2:

Cho $\frac{bz-cy}{a}=\frac{cx-az}{b}=\frac{ay-bx}{c}$. Chứng minh rằng $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$

Lời giải

*) Phân tích: $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}\Rightarrow ay-bx=0;bz-yc=0$

Ta có: $\frac{bz-cy}{a}=\frac{a(bz-cy)}{a^2}=\frac{abz-acy}{a^2};\frac{cx-az}{b}=\frac{cxb-azb}{b^2};\frac{ay-bx}{c}=\frac{acy-bcx}{c^2}$

$$\Rightarrow\frac{bz-cy}{a}=\frac{(abz-acy)+(bcx-abz)+(acy-bcx)}{a^2+b^2+c^2}=0\Rightarrow bz-cy=0\Rightarrow\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$