

**PHẦN I.TÓM TẮT LÝ THUYẾT.****1. Lũy thừa với số mũ tự nhiên**

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_n \quad (x \in \mathbb{N}; n \in \mathbb{N}; n > 1)$$

$n$  thừa số

**Quy ước:**  $x^1 = x, x^0 = 1 (x \neq 0)$

**2. Các phép tính về lũy thừa**

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

$$x^m : x^n = x^{m-n} \quad (x \neq 0; m, n \in \mathbb{N})$$

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$$

$$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \quad (y \neq 0)$$

**3. Lũy thừa với số mũ nguyên âm**

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \text{với } (x \neq 0, n \in \mathbb{N})$$

**PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI.****Dạng 1. Tính.****Dạng 1.1:** Sử dụng các phép tính về lũy thừa để thực hiện phép tính .**I. Phương pháp giải .**

+) Sử dụng định nghĩa về lũy thừa và các phép tính về lũy thừa để thực hiện phép tính

+) Để thực hiện phép tính chứa nhiều lũy thừa, ta dùng các công thức biến đổi về lũy thừa của các số nguyên tố. Sau đó có thể dùng tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng.

**II. Bài toán.****Bài 1.** Tính:

a)  $2^4 \cdot 5 - [131 - (13 - 4)^2]$

b)  $2^3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^0 - 1 + [(-2)^2 : \frac{1}{2}] - 8$

c)  $\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 25 \left[ \left(\frac{3}{4}\right)^3 : \left(\frac{5}{4}\right)^3 \right] : \left(\frac{3}{2}\right)^3$

**Lời giải :**

a)  $2^4 \cdot 5 - [131 - (13 - 4)^2] = 16 \cdot 5 - [131 - 9^2] = 80 - [131 - 81] = 80 - 50 = 30 .$

b)  $2^3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^0 - 1 + [(-2)^2 : \frac{1}{2}] - 8 = 8 + 3 \cdot 1 - 1 + (4 \cdot 2) - 8 = 8 + 3 - 1 + 8 - 8 = 10 .$

$$\begin{aligned} \text{c) } \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 25 \left[ \left(\frac{3}{4}\right)^3 : \left(\frac{5}{4}\right)^3 \right] : \left(\frac{3}{2}\right)^3 &= \frac{1}{16} + 25 \left[ \frac{27}{64} : \frac{125}{64} \right] : \frac{27}{8} = \frac{1}{16} + 25 \cdot \frac{27}{125} \cdot \frac{8}{27} = \frac{1}{16} + \frac{8}{5} \\ &= \frac{133}{80} . \end{aligned}$$

**Bài 2.** Thực hiện phép tính:

$$\text{a) } (-8)^2 : \left\{ 25 - 18 : \left[ (5^2 + 2^3) : 11 - 2018^0 \right] \right\} \quad \text{b) }$$

$$2^4 + 8 \left[ (-2)^2 : \frac{1}{2} \right]^0 - 2^{-2} \cdot 4 + (-2)^2$$

$$\text{c) } 5 - \left(\frac{-5}{11}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 : 3$$

**Lời giải:**

$$\begin{aligned} \text{a) } (-8)^2 : \left\{ 25 - 18 : \left[ (5^2 + 2^3) : 11 - 2018^0 \right] \right\} &= 64 : \left\{ 25 - 18 : [(25+8) : 11 - 1] \right\} \\ &= 64 : [25 - 18 : (33 : 11 - 1)] \\ &= 64 : [25 - 18 : (3 - 1)] \\ &= 64 : (25 - 9) = 64 : 16 = 4 . \end{aligned}$$

$$\text{b) } 2^4 + 8 \left[ (-2)^2 : \frac{1}{2} \right]^0 - 2^{-2} \cdot 4 + (-2)^2 = 16 + 8 \cdot 1 - \frac{1}{2^2} \cdot 4 + 4 = 16 + 8 - 1 + 4 = 27 .$$

$$\text{c) } 5 - \left(\frac{-5}{11}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 : 3 = 5 - 1 + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3} = 4 + \frac{1}{27} = \frac{109}{27} .$$

**Bài 3.** Thực hiện phép tính:

$$\text{a) } \frac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{11}} \quad \text{b) } \frac{4^2 \cdot 25^2 + 32 \cdot 125}{2^3 \cdot 5^2} \quad \text{c) }$$

$$\frac{5 \cdot 7^{11} + 7^{12}}{7^9 \cdot 5^2 - 13 \cdot 7^9} .$$

**Lời giải**

$$\text{a) } \frac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{11}} = \frac{2^{12} \cdot 3^{10} + 2^9 \cdot 3^9 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 5}{2^{12} \cdot 3^{12} - 2^{11} \cdot 3^{11}} = \frac{2^{12} \cdot 3^{10} (1+5)}{2^{11} \cdot 3^{11} (2 \cdot 3 - 1)} = \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 5} = \frac{4}{5} .$$

$$\text{b) } \frac{4^2 \cdot 25^2 + 32 \cdot 125}{2^3 \cdot 5^2} = \frac{2^4 \cdot 5^4 + 2^5 \cdot 5^3}{2^3 \cdot 5^2} = \frac{2^4 \cdot 5^3 (5^2 + 2)}{2^3 \cdot 5^2} = 2 \cdot 5 \cdot 27 = 270 .$$

$$\text{c) } \frac{5 \cdot 7^{11} + 7^{12}}{7^9 \cdot 5^2 - 13 \cdot 7^9} = \frac{7^{11} (5+7)}{7^9 (25-13)} = \frac{7^2 \cdot 12}{12} = 49 .$$

**Bài 4.** Rút gọn biểu thức:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 81}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} & \text{b) } B &= \frac{30 \cdot 4^7 \cdot 3^{29} - 5 \cdot 14^5 \cdot 2^{12}}{54 \cdot 6^{14} \cdot 9^7 - 12 \cdot 8^5 \cdot 7^5} & \text{c) } \\ C &= \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3} \end{aligned}$$

**Lời giải:**

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 81}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^4 (3-1)}{2^{12} \cdot 3^5 (3+1)} = \frac{2}{3 \cdot 4} = \frac{1}{6} . \\ \text{b) } B &= \frac{30 \cdot 4^7 \cdot 3^{29} - 5 \cdot 14^5 \cdot 2^{12}}{54 \cdot 6^{14} \cdot 9^7 - 12 \cdot 8^5 \cdot 7^5} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^{14} \cdot 3^{29} - 5 \cdot 2^5 \cdot 7^5 \cdot 2^{12}}{2 \cdot 3^3 \cdot 2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 3^{14} - 2^2 \cdot 3 \cdot 2^{15} \cdot 7^5} = \frac{5(2^{15} \cdot 3^{30} - 2^{17} \cdot 7^5)}{3(2^{15} \cdot 3^{30} - 2^{17} \cdot 7^5)} = \frac{5}{3} . \\ \text{c) } C &= \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3} = \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 5^{10} \cdot 7^4}{5^9 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot 2^3 \cdot 7^3} = \frac{5^{10} \cdot 7^3 (1-7)}{5^9 \cdot 7^3 (1+8)} = \frac{5 \cdot (-6)}{9} = \frac{-10}{3} . \end{aligned}$$

## Dạng 1.2: Tính tổng các lũy thừa của cùng một cơ số.

### I. Phương pháp giải .

Nhân cả 2 vế của biểu thức với cơ số, sau đó cộng hoặc trừ từng vế (tùy từng bài) .

### II. Bài toán.

**Bài 1.** Tính:

$$\begin{aligned} \text{a) } S &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100} . & \text{b) } A &= 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2020} . \\ \text{c) } B &= 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{n-1} + 7^n \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1) & \text{d) } \\ D &= 4 - 4^2 + 4^3 - 4^4 + \dots + 4^{2019} - 4^{2020} \end{aligned}$$

**Lời giải:**

$$\begin{aligned} \text{a) } S &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100} \\ 2S &= 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100} + 2^{101} \\ \text{Ta có: } 2S - S &= (2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100} + 2^{101}) - (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{100}) \\ S &= 2^{101} - 1 . \\ \text{b) } A &= 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2020} \\ 3A &= 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2020} + 3^{2021} \\ \text{Ta có: } 3A - A &= (3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2020} + 3^{2021}) - (3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2020}) \\ 2A &= 3^{2021} - 3 \text{ hay } A = \frac{3^{2021} - 3}{2} \\ \text{c) } B &= 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{n-1} + 7^n \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1) \\ 7B &= 7^2 + 7^3 + 7^4 + \dots + 7^n + 7^{n+1} \\ 7B - B &= (7^2 + 7^3 + 7^4 + \dots + 7^n + 7^{n+1}) - (7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^n) \end{aligned}$$

$$6B = 7^{n+1} - 7$$

$$B = \frac{7^{n+1} - 7}{6}.$$

$$d) D = 4 - 4^2 + 4^3 - 4^4 + \dots + 4^{2019} - 4^{2020}$$

$$4D = 4^2 - 4^3 + 4^4 - 4^5 + \dots + 4^{2020} - 4^{2021}$$

$$\Rightarrow D + 4D = (4 - 4^2 + 4^3 - 4^4 + \dots + 4^{2019} - 4^{2020}) + (4^2 - 4^3 + 4^4 - 4^5 + \dots + 4^{2020} - 4^{2021})$$

$$\Leftrightarrow 5D = 4 - 4^{2021}$$

$$\Leftrightarrow D = \frac{4 - 4^{2021}}{5}.$$

**Bài 2.** Rút gọn biểu thức:

$$a) A = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2000}}.$$

b)

$$B = 1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{13^3} + \dots + \frac{1}{13^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

$$c) C = \frac{1}{(-5)} + \frac{1}{(-5)^2} + \frac{1}{(-5)^3} + \dots + \frac{1}{(-5)^{99}}.$$

$$d) D = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{1024}.$$

**Lời giải:**

$$a) A = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2000}}$$

$$\frac{1}{4}A = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{4^{2001}}$$

$$A - \frac{1}{4}A = \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2000}} \right) - \left( \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{4^{2001}} \right)$$

$$\frac{3}{4}A = \frac{1}{4} - \frac{1}{4^{2001}}$$

$$A = \frac{4^{2000} - 1}{3 \cdot 4^{2000}}.$$

$$b) B = 1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{13^3} + \dots + \frac{1}{13^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\frac{1}{13}B = \frac{1}{13} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{13^3} + \dots + \frac{1}{13^{n+1}}.$$

$$B - \frac{1}{13}B = \left( 1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{13^2} + \dots + \frac{1}{13^n} \right) - \left( \frac{1}{13} + \frac{1}{13^2} + \dots + \frac{1}{13^{n+1}} \right)$$

$$\frac{12}{13}B = 1 - \frac{1}{13^{n+1}} \quad \text{hay} \quad B = \frac{13^{n+1} - 1}{12 \cdot 13^n}.$$

$$c) C = \frac{1}{(-5)} + \frac{1}{(-5)^2} + \frac{1}{(-5)^3} + \dots + \frac{1}{(-5)^{99}}$$

$$(-5)C = 1 + \frac{1}{(-5)} + \frac{1}{(-5)^2} + \frac{1}{(-5)^3} + \dots + \frac{1}{(-5)^{98}}$$

$$C + 5C = \left( \frac{1}{(-5)} + \frac{1}{(-5)^2} + \frac{1}{(-5)^3} + \dots + \frac{1}{(-5)^{99}} \right) - \left( 1 + \frac{1}{(-5)} + \frac{1}{(-5)^2} + \frac{1}{(-5)^3} + \dots + \frac{1}{(-5)^{98}} \right)$$

$$6C = \frac{1}{(-5)^{99}} - 1 \text{ hay } C = -\left( \frac{5^{99} + 1}{6 \cdot 5^{99}} \right).$$

$$d) D = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{1024}$$

$$D = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{10}}$$

$$2D = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^9}$$

$$2D - D = \left( 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^9} \right) - \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{10}} \right)$$

$$D = 2 - \frac{1}{2^{10}}.$$

**Bài 3:** Chứng minh rằng :  $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2020}} + \frac{1}{3^{2021}} < \frac{1}{2}$ .

**Lời giải:**

$$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2020}} + \frac{1}{3^{2021}} < \frac{1}{2}$$

$$\text{Xét } 3.B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2019}} + \frac{1}{3^{2020}}$$

$$\Rightarrow 3B - B = 1 - \frac{1}{3^{2021}}$$

$$\Rightarrow 2.B = 1 - \frac{1}{3^{2021}} < 1$$

$$\Rightarrow B < \frac{1}{2}.$$

**Bài 4:** Cho  $T = \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2019}{2^{2018}} + \frac{2020}{2^{2019}}$ . Hãy so sánh  $T$  với 3.

**Lời giải:**

$$T = \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2019}{2^{2018}} + \frac{2020}{2^{2019}}$$

$$\text{Xét: } 2T = 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{2^2} + \dots + \frac{2020}{2^{2018}}$$

$$\text{mà } T = \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2019}{2^{2018}} + \frac{2020}{2^{2019}}$$

$$\text{Suy ra: } 2T - T = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2018}} - \frac{2020}{2^{2019}}$$

$$\Rightarrow T = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2018}} - \frac{2020}{2^{2019}}$$

$$\Rightarrow 2T = 4 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2017}} - \frac{2020}{2^{2018}}$$

$$\Rightarrow 2T - T = 3 - \frac{2021}{2^{2018}} + \frac{2020}{2^{2019}} < 3 \Rightarrow T < 3.$$

### Bài tập tự luyện:

#### Bài 1: Tính

$$\text{a) } \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{-6}{7}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 : 2$$

$$\text{b) } \left[(0,1)^2\right]^0 + \left[\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}\right]^2 \cdot \frac{1}{49} \left[(2^2)^3 : 2^5\right]$$

$$\text{c) } \left[\left(\frac{4}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3\right] : \left(\frac{-2}{3}\right)^{-3}$$

Đáp số:

$$\text{a) } \frac{17}{8}.$$

$$\text{b) } 3.$$

$$\text{c) } \frac{-9}{128}.$$

#### Bài 2: Thực hiện phép tính:

$$\text{a) } A = \frac{3^{11} \cdot 11 + 3^{11} \cdot 21}{3^9 \cdot 2^5}.$$

$$\text{b) } B = \frac{5 \cdot 4^{15} \cdot 9^9 - 4 \cdot 3^{20} \cdot 8^9}{5 \cdot 2^9 \cdot 6^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 27^6}.$$

c)

$$C = \frac{(3 \cdot 4 \cdot 2^{16})^2}{11 \cdot 2^{13} \cdot 4^{11} - 16^9}.$$

$$\text{d) } D = \frac{2^{19} \cdot 27^3 + 15 \cdot 4^9 \cdot 9^4}{6^9 \cdot 2^{10} + 12^{10}}.$$

$$\text{e) } E = \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^3 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot (-2)^2}{2 \cdot (-1)^5 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{3}{8}}.$$

$$\text{f) } A = \frac{6 + 3^2 \cdot 2 - 6 \cdot 3^2}{3^2 + 3 \cdot 3^2 - 3^4}.$$

Đáp số:

$$\text{a) } A = 9.$$

$$\text{b) } B = 2.$$

$$\text{c) } C = 2.$$

$$\text{d) } D = \frac{1}{2}.$$

$$\text{e) } E = 1.$$

$$\text{f) } A = \frac{2}{3}.$$

#### Bài 3: Thực hiện phép tính:

$$a) \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3}.$$

$$b) \frac{2^{18} \cdot 18^7 \cdot 3^3 + 3^{15} \cdot 2^{15}}{2^{10} \cdot 6^{15} + 3^{14} \cdot 15 \cdot 4^{13}}.$$

$$c) \frac{5 \cdot 4^{15} \cdot 9^9 - 4 \cdot 3^{20} \cdot 8^9}{5 \cdot 2^{29} \cdot 9^{10} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 27^6}.$$

$$d) \frac{5^{11} \cdot 7^{12} + 5^{11} \cdot 7^{11}}{5^{12} \cdot 7^{11} + 9 \cdot 5^{11} \cdot 7^{11}}.$$

$$e) \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3}.$$

$$f) \frac{(-3)^6 \cdot 15^5 + 9^3 \cdot (-15)^6}{(-3)^{10} \cdot 5^5 \cdot 2^3}.$$

**Đáp số :**

$$a) \frac{32}{9}. \quad b) \frac{10}{11}. \quad c) \frac{1}{38}. \quad d) \frac{4}{7}. \quad e) \frac{21}{6}. \quad f) 6.$$

**Bài 4:** Tính giá trị các biểu thức sau:

$$A = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{2008}.$$

$$B = 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{n-1} + 7^n \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2).$$

$$M = \frac{1}{3^0} + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2n}} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

$$N = \frac{1}{(-2)} + \frac{1}{(-2)^2} + \dots + \frac{1}{(-2)^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

$$P = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243}.$$

$$C = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2020}{3^{2020}}.$$

**Đáp số:**

$$A = \frac{3^{2009} - 1}{2}$$

$$B = \frac{7^{n+1} - 7}{6}$$

$$M = \frac{3^{2n+1} - 1}{3^{2n} \cdot 2}$$

$$N = \frac{(-2)^n - 1}{(-2)^n \cdot (-3)}$$

$$P = \frac{3^6 - 1}{3^5 \cdot 2}$$

$$C = \frac{3^{2020} - 1}{3^{2019} \cdot 4} - \frac{1010}{3^{2020}}.$$

**Bài 5:** Thu gọn các biểu thức sau:

$$A = 3^{2020} - 3^{2019} + 3^{2018} - 3^{2017} + \dots + 3^2 - 3 + 1.$$

$$B = 5^{2020} + 5^{2019} + 5^{2018} + 5^{2017} + \dots + 5^2 + 5 + 1.$$

$$C = 7^{2021} - 7^{2019} + 7^{2017} - 7^{2015} + \dots + 7^5 - 7^3 + 7.$$

**Đáp số:**

$$A = \frac{3^{2021} + 1}{4}$$

$$B = \frac{5^{2021} - 1}{4}$$

$$C = \frac{7^{2023} + 7}{50}$$

**Bài 6:** Chứng minh rằng tổng:  $S = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} - \dots + \frac{1}{2^{4n-2}} - \frac{1}{2^{4n}} + \dots + \frac{1}{2^{2018}} - \frac{1}{2^{2020}} < 0,2$ .

**Hướng dẫn:**

Tính được

$$S = \frac{1}{5} - \frac{1}{2^{2018} \cdot 5} \Rightarrow S < \frac{1}{5}$$

**Bài 7:** Chứng minh rằng:  $\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{4n-2}} - \frac{1}{7^{4n}} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}} < \frac{1}{50}$ .

Hướng dẫn:

$$A = \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{4n-2}} - \frac{1}{7^{4n}} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}} = \frac{1}{50} - \frac{1}{7^{100} \cdot 50} \Rightarrow A < \frac{1}{50}$$

## Dạng 2. Tìm $x$ .

### I. Phương pháp giải.

Khi tìm  $x$  có chứa lũy thừa:

+) Biến  $x$  ở phần cơ số, ta đưa hai vế về cùng số mũ và lưu ý:

$$a^n = b^n \text{ (với } n \text{ lẻ)} \text{ thì } a = b.$$

$$a^n = b^n \text{ (với } n \text{ chẵn)} \text{ thì } a = b \text{ hoặc } a = -b.$$

+) Biến  $x$  ở phần số mũ, ta đưa hai vế về cùng cơ số và sử dụng:

$$a^m = a^n \text{ (với } a \neq 0, \pm 1) \text{ thì } m = n.$$

### II. Bài toán.

**Bài 1.** Tìm  $x$ :

a)  $(x+2)^2 = 64$ .

c)  $2^x = 16$ .

b)  $(x+5)^3 = -125$ .

d)  $3^{4-x} = 27$ .

**Lời giải:**

a)  $(x+2)^2 = 64 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=8 \\ x+2=-8 \end{cases}$

b)  $2^x = 16 \Leftrightarrow 2^x = 2^4 \Leftrightarrow x=4$   
 Vậy  $x=4$ .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=-10 \end{cases}$$

Vậy  $x \in \{6; -10\}$ .

c)  $(x+5)^3 = -125 \Leftrightarrow (x+5)^3 = (-5)^3$   
 $\Leftrightarrow x+5 = -5$

Vậy  $x = -10$ .

d)  $3^{4-x} = 27 \Leftrightarrow 3^{4-x} = 3^3 \Leftrightarrow 4-x=3$   
 $\Leftrightarrow x=1$   
 Vậy  $x=1$ .

**Bài 2.** Tìm số nguyên  $n$ , biết rằng:

a)  $27^n : 3^n = 9$ .

b)  $\frac{81}{(-3)^n} = -243$ .

c)  $\frac{25}{5^n} = 5$ .

d)  $\frac{1}{2} \cdot 2^n + 4 \cdot 2^n = 9 \cdot 2^5$ .

**Lời giải:**

a)  $27^n : 3^n = 9 \Leftrightarrow 3^{3n} : 3^n = 3^2 \Leftrightarrow 3^{2n} = 3^2 \Leftrightarrow 2n=2 \Leftrightarrow n=1$  (Thỏa mãn  $n \in \mathbb{Z}$ ). Vậy  $n=1$ .



- b)  $\frac{81}{(-3)^n} = -243 \Leftrightarrow (-3)^n = \frac{1}{-3} \Leftrightarrow (-3)^n = (-3)^{-1} \Leftrightarrow n = -1$  (thỏa mãn  $n \in \mathbb{Z}$ ). Vậy  $n = -1$ .
- c)  $\frac{25}{5^n} = 5 \Leftrightarrow 5^n = 5^1 \Leftrightarrow n = 1$  (Thỏa mãn  $n \in \mathbb{Z}$ ). Vậy  $n = 1$ .
- d)  $\frac{1}{2} \cdot 2^n + 4 \cdot 2^n = 9 \cdot 2^5 \Leftrightarrow \frac{9}{2} \cdot 2^n = 9 \cdot 2^5 \Leftrightarrow 2^n = 2^6 \Leftrightarrow n = 6$  (Thỏa mãn  $n \in \mathbb{Z}$ ). Vậy  $n = 6$ .

**Bài 3.** Tìm số tự nhiên  $x$ , biết rằng:

a)  $5^x + 5^{x+2} = 650$

b)  $3^{x-1} + 5 \cdot 3^{x-1} = 162$

**Lời giải:**

a)  $5^x + 5^{x+2} = 650$

$\Leftrightarrow 5^x + 25 \cdot 5^x = 650$

$\Leftrightarrow 26 \cdot 5^x = 650$

$\Leftrightarrow 5^x = 25$

$\Leftrightarrow 5^x = 5^2$

$\Leftrightarrow x = 2$  (Thỏa mãn  $x \in \mathbb{N}$ )

Vậy  $x = 2$ .

b)  $3^{x-1} + 5 \cdot 3^{x-1} = 162$

$\Leftrightarrow 6 \cdot 3^{x-1} = 162$

$\Leftrightarrow 3^{x-1} = 27$

$\Leftrightarrow 3^{x-1} = 3^3$

$\Leftrightarrow x - 1 = 3$

$\Leftrightarrow x = 4$  (Thỏa mãn  $x \in \mathbb{N}$ )

Vậy  $x = 4$ .

**Bài tập tự luyện:**

**Bài 1.** Tìm  $x$ :

a)  $2^x + 2^{x+2} = 320$

b)  $3^{x+2} + 3^x = 810$

c)

$2^{x+2} \cdot 3^{x+1} \cdot 5^x = 10800$

**Đáp số:**

a)  $x = 6$

b)  $x = 4$

c)  $x = 2$

**Bài 2.** Tìm  $n$  là số tự nhiên, biết.

a)  $3^2 \cdot 3^n = 3^5$

b)  $3^{-2} \cdot 3^4 \cdot 3^n = 3^7$

c)  $(n-1)^5 = 243$

d)  $(2^2 : 4) \cdot 2^n = 4$

e)  $2^{n+3} \cdot 2^n = 128$

f)  $2^{n-1} + 5 \cdot 2^{n-2} = \frac{7}{32}$

g)  $2^{n+2} - 2^n = 96$

**Đáp số:**

a)  $n = 3$

b)  $n = 5$

c)  $n = 4$

d)  $n = 2$

e)  $n = 2$

f)  $n = -3$  (không thỏa mãn  $n \in \mathbb{N}$ ), vậy không có số tự nhiên  $n$  nào thỏa mãn đề bài

g)

$n = 5$

**Dạng 3. So sánh hai lũy thừa**

\* Để so sánh hai lũy thừa ta thường đưa về so sánh hai lũy thừa cùng cơ số hoặc cùng số mũ.

+ Nếu hai lũy thừa cùng cơ số thì lũy thừa nào có số mũ lớn hơn sẽ lớn hơn

Nếu  $m > n$  thì  $a^m > a^n$  ( $a > 1$ )

+ Nếu 2 lũy thừa có cùng số mũ (lớn hơn 0) thì số mũ nào có cơ số lớn hơn sẽ lớn hơn

Nếu  $a > b$  thì  $a^n > b^n$  ( $n > 0$ )

---

Ngoài hai cách trên, để so sánh hai lũy thừa ta còn dùng tính chất bắc cầu, tính chất đơn điệu của phép nhân. ( $a < b$  thì  $\forall a.c < b.c$  với  $c > 0$ )

### Dạng 3.1. So sánh hai lũy thừa có cùng cơ số, hoặc cùng số mũ

#### I. Phương pháp giải:

Nếu  $m > n$  thì  $a^m > a^n$  ( $a > 1$ )

Nếu  $a > b$  thì  $a^n > b^n$  ( $n > 0$ )

#### II. Bài toán

##### Bài 1. So sánh

a)  $333^{17}$  và  $333^{23}$                       b)  $2007^{10}$  và  $2008^{10}$                       c)  $(2008 - 2007)^{2009}$  và  $(1998 - 1997)^{1999}$

##### Lời giải

Với bài này học sinh có thể nhìn ngay ra cách giải vì các lũy thừa đã có cùng cơ số hoặc có cùng số mũ.

a) Vì  $1 < 17 < 23$  nên  $333^{17} < 333^{23}$

b) Vì  $2007 < 2008$  nên  $2007^{10} < 2008^{10}$

c) Ta có:  $(2008 - 2007)^{2009} = 1^{2009} = 1$  và  $(1998 - 1997)^{1999} = 1^{1999} = 1$

Vậy  $(2008 - 2007)^{2009} = (1998 - 1997)^{1999}$

##### Bài 2. So sánh

a)  $2^{300}$  và  $3^{200}$

e)  $99^{20}$  và  $9999^{10}$

b)  $3^{500}$  và  $7^{300}$

f)  $11^{1979}$  và  $37^{1320}$

c)  $8^5$  và  $3.4^7$

g)  $10^{10}$  và  $48.50^5$

d)  $202^{303}$  và  $303^{202}$

h)  $1990^{10} + 1990^9$  và  $1991^{10}$

##### Lời giải

Để làm được bài này học sinh cần sử dụng linh hoạt các tính chất của lũy thừa để đưa các lũy thừa về cùng cơ số hoặc cùng số mũ.

a) Ta có:  $2^{300} = (2^3)^{100} = 8^{100}$ ;  $3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}$

Vì  $8^{100} < 9^{100}$  nên  $2^{300} < 3^{200}$

b) Tương tự câu a, ta có:  $3^{500} = (3^5)^{100} = 243^{100}$ ;  $7^{300} = (7^3)^{100} = 343^{100}$

Vì  $243^{100} < 343^{100}$  nên  $3^{500} < 7^{300}$

c) Ta có:  $8^5 = (2^3)^5 = 2^{15} = 2.2^{14} < 3.2^{14} = 3.4^7 \Rightarrow 8^5 < 3.4^7$

d) Ta có:  $202^{303} = (2.101)^{3.101} = (2^3.101^3)^{101} = (8.101.101^2)^{101} = (808.101^2)^{101}$

$302^{202} = (3.101)^{2.101} = (3^2.101^2)^{101} = (9.101^2)^{101}$