TRƯƠNG HÀ HẢI - ĐÀM THANH PHƯƠNG (Đồng chủ biên)
NGÔ MẠNH TƯỞNG - BÙI THỊ THANH XUÂN

GIÁO TRÌNH
TOÁN CAO CẤP 1

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
NĂM 2016

MÃ SỐ: $\dfrac{07-55}{\text{ĐHTN}-2016}$

LỜI GIỚI THIỆU

Toán cao cấp có một vai trò rất quan trọng trong công tác đào tạo ở các trường đại học, cao đẳng, trung học và dạy nghề. Tuy vậy, với một lượng kiến thức đồ sộ nhằm phục vụ cho nhiều ngành khoa học và kỹ thuật khác nhau, việc biên soạn giáo trình cho từng ngành đào tạo là rất cần thiết. Để phù hợp với lượng kiến thức và thời gian đào tạo kỹ sư công nghệ thông tin, chúng tôi biên soạn giáo trình này nhằm đáp ứng các nhu cầu sau:

Lượng kiến thức đầy đủ để phục vụ cho các chuyên ngành Công nghệ thông tin, Điện tử viễn thông, Điều khiển tự động và Hệ thống thông tin kinh tế.

Lượng kiến thức gọn nhẹ không quá phức tạp, lượng bài tập vừa phải để cho học sinh, sinh viên nắm được các kiến thức cơ bản của môn toán cao cấp.

Tạo cho sinh viên khả năng tự học và làm bài tập ngoài giờ lên lớp.

Các kiến thức cơ bản trong giáo trình này được phân thành chương mục và được trình bày theo thứ tự từ thấp đến cao, từ các khái niệm cơ bản về tập hợp, ánh xạ, sau đấy là phần đại số tuyến tính và giải tích. Đây là giáo trình toán cao cấp cho các ngành khoa học kỹ thuật nên nhiều bổ đề, định lý chỉ được giới thiệu mà không có phần chứng minh. Mục đích của giáo trình là giúp sinh viên nắm vững các kiến thức cơ bản, các kết quả cốt yếu của môn toán để ứng dụng cho các chuyên ngành khác. Cuối mỗi chương có phần bài tập tự giải, giúp sinh viên tự kiểm tra các kết quả đã lĩnh hội được của bài giảng. Phần hướng dẫn giải bài tập chúng tôi sẽ biên soạn thành giáo trình riêng sau này.

Do quá trình thực hành giáo trình này còn ít (chủ yếu dạy cho sinh viên Trường đại học Công nghệ thông tin và truyền thông - Đại học Thái Nguyên một vài năm trở lại đây) nên không thể tránh khỏi sai sót trong soạn thảo và in ấn, chúng tôi rất mong nhận được sự góp ý của độc giả để giáo trình được hoàn thiện hơn. Thư góp ý xin gửi về Khoa Khoa học cơ bản – Trường Đại học Công nghệ thông tin và Truyền thông – Đại học Thái Nguyên hoặc qua e-mail: khoahoccoban@ictu.edu.vn

NHÓM TÁC GIẢ

MỤC LỤC

Chương 1
KHÁI NIỆM VỀ TẬP HỢP VÀ ÁNH XẠ

§1. TẬP HỢP

1.1. Các khái niệm về tập hợp

Trong ngôn ngữ hàng ngày, ta thường dùng đến khái niệm *tập hợp*, như tập hợp các sinh viên có mặt trong một lớp học, tập hợp các câu hỏi ôn thi.... Ở đây ta không định nghĩa tập hợp mà chỉ mô tả nó bằng một dấu hiệu hay một tính chất nào đó cho phép ta nhận biết được tập hợp đó và phân biệt nó với các tập hợp khác. Ta coi *tập hợp là một khái niệm nguyên thuỷ,* cũng giống như khái niệm điểm, đường thẳng, mặt phẳng trong hình học.

Các đối tượng lập nên tập hợp được gọi là *các phần tử* của tập hợp. Nếu a là một phần tử của tập hợp A thì ký hiệu là $a \in A$. Nếu a không phải là một phần tử của tập hợp A thì ký hiệu là $a \notin A$.

Ví dụ 1.1. Nếu A là tập hợp các số nguyên chẵn thì $2 \in A, 10 \in A$, nhưng $15 \notin A$.

Một tập hợp được gọi là *hữu hạn* nếu nó gồm một số nhất định phần tử.

Ví dụ 1.2. Tập hợp các sinh viên của một lớp học là hữu hạn, số phần tử ở đây là số sinh viên của lớp đó.

Tập hợp các nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ là hữu hạn, nó gồm hai phần tử là 1 và 2.

Có những tập hợp chỉ có đúng một phần tử, chẳng hạn tập hợp các nghiệm dương nhỏ hơn 2 của phương trình $\sin x = 1/2$ chỉ có một phần tử là $\pi / 6$.

Để được thuận tiện, người ta cũng đưa vào loại tập hợp không chứa một phần tử nào và được gọi là *tập hợp rỗng*, ký hiệu là $\varnothing$.

Ví dụ 1.3. Tập hợp các nghiệm thực của phương trình $x^2+1=0$ là rỗng, vì không tồn tại số thực nào mà bình phương lại bằng -1.

Tập hợp gồm vô số phần tử gọi là *tập hợp vô hạn*. Ta phân biệt tập hợp *vô hạn đếm được* là tập hợp có số lượng phần tử là vô hạn song ta có thể đánh số thứ tự các phần tử của nó (tức là có thể biết được phần tử đứng liền trước và đứng liền sau của một phần tử bất kỳ).

Ví dụ 1.4. Tập hợp các nghiệm của phương trình $\sin x = 1$ là vô hạn đếm được, vì các phần tử của nó có dạng

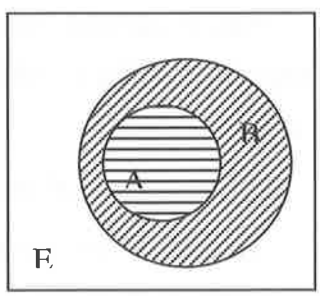
$$x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\,,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

chúng được đánh số theo số nguyên k.

Tập hợp vô hạn *không đếm được* là tập hợp có vô số phần tử và không có cách nào đánh số thứ tự các phần tử của nó.

Ví dụ 1.5. Tập hợp các điểm trên đoạn thẳng $[0,1]$.

Tập hợp con: *Cho hai tập hợp* A *và* B*. Nếu bất kỳ phần tử nào của tập hợp* A *cũng là phần tử của tập hợp* B *thì ta nói* A *là tập hợp con của* B và ký hiệu $A \subset B$ (đọc A bao hàm trong B hay A là tập con của B). Vậy, ta có $A \subset B$ khi và chỉ khi với mọi $x \in A$ thì $x \in B$.



Hình 1. $A \subset B$

Ví dụ 1.6. Gọi A là tập hợp các nghiệm của phương trình $x^2-3x+2=0$, B là tập hợp các số nguyên dương thì $A \subset B$ vì 1 và 2 cũng là các số nguyên dương.

Quan hệ bao hàm giữa các tập hợp có *tính chất bắc cầu,* nghĩa là nếu $A \subset B$ và $B \subset C$ thì $A \subset C$.

Tập hợp bằng nhau: *Nếu* $A \subset B$ *đồng thời* $B \subset A$ *thì ta nói hai tập hợp A, B là bằng nhau*, ký hiệu là $A = B$. Vậy $A = B$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} A \subset B, \\ B \subset A. \end{cases}$$

Quy ước: *Tập hợp rỗng* $\varnothing$ *là tập hợp con của bất kỳ tập hợp nào.* Thật vậy, nếu $A \subset B$ thì bất kỳ phần tử nào không thuộc B cũng không thuộc A và như vậy $\varnothing \subset B$ vì không có phần tử nào thuộc tập hợp rỗng.

Để tiện lợi cho việc xét các tập hợp, ta thường coi *tập các tập hợp được khảo sát là các tập hợp con của một tập hợp* E *"đủ lớn" nào đó*, chẳng hạn trong chương trình toán học ở Trung học khi xét tập hợp các nghiệm của phương trình, ta đều coi chúng là tập hợp con của tập hợp số thực.

1.2. Cách cho một tập hợp

Người ta thường cho tập hợp bằng cách:

(i) *Liệt kê các phần tử của nó*

Ví dụ 1.7. Bảng danh sách các thí sinh trúng tuyển vào một trường đại học.

Nếu số các phần tử của tập hợp ít, ta có thể viết tên các phần tử của tập hợp giữa hai dấu $\{\}$, chẳng hạn $A = \{1, 2, 3, 4\}$, thì A là tập có 4 phần tử là $1, 2, 3, 4$.

(ii) *Cho quy tắc để nhận biết các phần tử của nó*

Ta viết $A = \{x : P(x)\}$ và hiểu A là tập hợp gồm các phần tử x sao cho tính chất P đúng với x.

Ví dụ 1.8. Xét tập hợp $A = \left\{x \in R : x^2 - 3x + 2 = 0\right\}$, được hiểu A là tập hợp các số thực x là nghiệm của phương trình

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

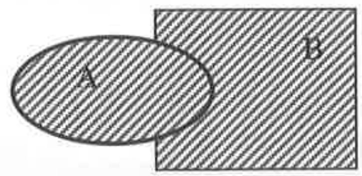
tức là $A = \{1, 2\}$.

1.3 Các phép toán trên tập hợp

Giả sử A,B,C là các tập hợp con của một tập hợp E nào đó. Ta có thể xây dựng các tập hợp mới dựa trên các tập hợp đó bằng các phép toán sau:

(i) Phép hợp: *Hợp của hai tập hợp A và B là một tập hợp chứa các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập hợp A hoặc B.*

Ta cũng nói hợp của A,B, là tập hợp chứa các phần tử hoặc thuộc A hoặc thuộc B. Ký hiệu hợp của hai tập hợp A và B là $A\cup B$. Vậy $x\in A\cup B$ khi và khi $x\in A$ hoặc $x\in B$.



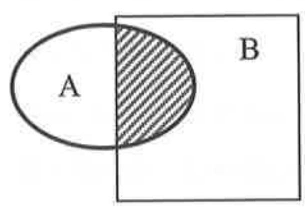
Hình 2. $A\cup B$

Ví dụ 1.9. Nếu A là tập hợp các số thực nhỏ hơn 1, B là tập hợp các số thực lớn hơn 2 thì tập hợp các nghiệm thực của bất phương trình $x^2-3x+2>0$ là $A\cup B$.

(ii) Phép giao: *Giao của hai tập hợp A và B là một tập hợp chứa các phần tử thuộc cả A lẫn cả B.* Ký hiệu giao của hai tập hợp A và B là $A\cap B$. Vậy,

$$x\in A\cap B \Leftrightarrow x\in A \text{ và } x\in B.$$

Ví dụ 1.10. A là tập hợp các số thực nhỏ hơn 2, B là tập hợp các số thực lớn hơn 1 thì tập hợp các nghiệm của phương trình $x^2-3x+2<0$ là $A\cap B$.

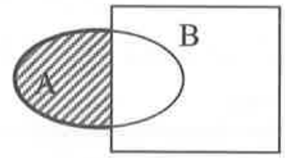


Hình 3. $A\cup B$

Nếu $A\cap B=\varnothing$ thì ta nói các tập hợp A và B không giao nhau hay rời nhau.

Ví dụ 1.11. Xét A là tập hợp các điểm trên đường thẳng $y=x+1$, B là tập hợp các điểm trên Parabol $y=-x^2$ thì $A\cap B=\varnothing$ (hai đường không giao nhau.).

(iii) Phép trừ: *Hiệu của hai tập hợp A và B là một tập hợp chứa các phần tử thuộc A mà không thuộc B.* Ký hiệu hiệu của hai tập hợp A và B là $A \setminus B$.



Hình 4. $A|B$

Ví dụ 1.12. Xét R là tập hợp số thực, B là tập hợp gồm hai số thực 1 và 2 thì tập hợp xác định của phân thức $\dfrac{1+x}{x^2-3x+2}$ là $R \setminus B$.

Đặc biệt, nếu $A \subset E$ thì hiệu $E \setminus A$ được gọi là phần bù (hay bổ sung) của A trong E, ký hiệu là $C_E A$, hay nếu tập E đã biết thì có thể ký hiệu đơn giản là $\overline{A}$.

Các tính chất của các phép toán trên:

Giả sử A, B, C là các tập con của một tập hợp E. Các phép toán hợp, giao, phần bù có các tính chất sau:

1. $\overline{\overline{A}} = A$.
2. $A \cup A = A$; $A \cap A = A$.
3. $\overline{A} \cup A = E$; $\overline{A} \cap A = \varnothing$.
4. $A \cup E = E$; $A \cap E = A$.
5. $A \cup \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$.
6. $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.
7. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
8. $(A \cap B) \cup C = (B \cup C) \cap (A \cup C)$; $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
9. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Tính chất 9 còn được gọi là ***quy tắc Đờ mooc-găng***. Khi lấy phần bù của hợp hay giao hai tập hợp, thì mỗi tập hợp được thay bằng phần bù của nó, phép hợp được thay bằng phép giao, phép giao thay bằng phép hợp.

Việc chứng minh các tính chất trên dựa vào việc chứng minh sự bằng nhau của hai tập hợp. Ta chứng minh tính chất 9: Đặt $T = \overline{A \cup B}$ và

$P=\overline{A}\cap\overline{B}$. Đầu tiên chứng minh $T\subset P$. Thật vậy, lấy bất kỳ $x\in T$, tức là $x\in\overline{A\cup B}$. Theo hình 2, x thuộc phần bù của $A\cup B$ tức là x phải không thuộc A và không thuộc B, hay $x\notin A, x\notin B.$ Nhưng $x\notin A$, tức là $x\in\overline{A}$. Cũng như vậy, tức là $x\in\overline{B}$. Vậy $x\in\overline{A}$ và $x\in\overline{B}$ hay $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$. Ta đã chứng minh nếu $x\in\overline{A\cup B}$ thì $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$. Từ đó suy ra

$$\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}. \qquad (*)$$

Bây giờ ta chứng minh $P\subset T$. Lấy $y\in P$; tức là, $y\in\overline{A}\cap\overline{B}$. Theo định nghĩa phép giao ta có $y\in\overline{A}$ và $y\in\overline{B}$ hay $y\notin A$ và $y\notin B$. Khi đó y phải thuộc phần bù của $A\cup B$ tức là ta có $y\in\overline{A\cup B}$. Như vậy

$$\overline{A}\cap\overline{B}\subset\overline{A\cup B}. \qquad (**)$$

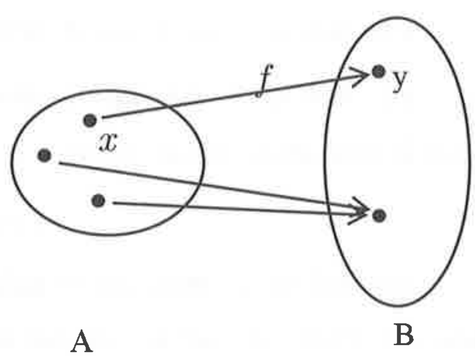
Từ (*) và (**), suy ra $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

Phương pháp chứng minh các tính chất khác cũng tương tự.

§2. ÁNH XẠ

2.1. Khái niệm về ánh xạ

Cho hai tập hợp A và B. Ta nói rằng có *một ánh xạ f từ A vào B nếu với mỗi phần tử $x\in A$ có tương ứng theo một quy tắc nào đó một phần tử duy nhất $y\in B$*. Ký hiệu: $f:A\to B$ (f là ánh xạ từ A vào B) A là *tập nguồn*, B là *tập đích*.



Hình 5

Phần tử $y\in B$ tương ứng với phần tử $x\in A$ bởi ánh xạ f, được gọi *là ảnh của x qua f* và được ký hiệu là $f(x)$.

Nếu với bất kỳ phần tử x nào của A, ảnh $f(x)$ của nó được xác định thì A còn được gọi là *tập xác định của ánh xạ* f. Nếu A là tập xác định của ánh xạ f thì *ảnh của tập hợp* A *bởi ánh xạ* f được định nghĩa bởi $f(A)=\{y\in B:\exists x\in A, y=f(x)\}$, trong đó ký hiệu "$\exists$" được đọc là "tồn tại".

Ví dụ 1.13. Xét ánh xạ f từ tập hợp số thực R vào chính nó xác định bởi $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ thì tập xác định của nó là $R\setminus\{0\}$, còn tập hợp ảnh của nó là tập hợp mọi số thực dương R^+.

Ánh xạ bằng nhau: Cho ánh xạ $f:A\to B$ và $g:A\to B$. *Nếu với mọi* $x\in A$ *ta có* $f(x)=g(x)$ *thì ta nói hai ánh xạ* f *là bằng nhau, ta viết* $f=g$.

Ví dụ 1.14. Cho tập hợp $A=\{-1,0,1\}$ và các ánh xạ $f:A\to R$ xác định bởi $f(x)=x+1$, $g:A\to R$ xác định bởi $g(x)=-x^3+2x+1$. Ta có $f=g$ (nếu xét các ánh xạ f và g từ R vào R thì $f\neq g$).

2.2. Các loại ánh xạ

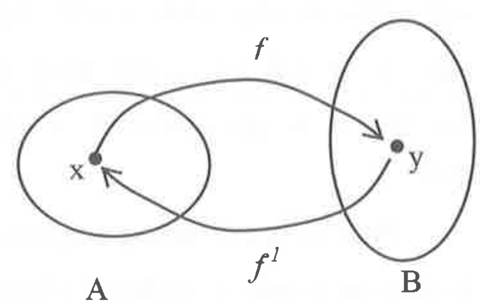
Cho ánh xạ f từ A vào B. Khi đó

(i) *Ánh xạ* f *được gọi là* ***đơn ánh*** *nếu ảnh của các phần tử khác nhau là khác nhau; tức là, với mọi* $x_1,x_2\in A$, *nếu* $x_1\neq x_2$ *thì*

$$f(x_1)\neq f(x_2).$$

(ii) *Ánh xạ* f *được gọi là* ***toàn ánh*** *nếu* $f(A)=B$*; tức là, với bất kỳ* y *thuộc* B*, tồn tại phần tử* x *thuộc* A *sao cho* $f(x)=y$.

(iii) *Ánh xạ* f *được gọi là* ***song ánh*** *nếu nó vừa là toàn ánh vừa là đơn ánh.*



Hình 6

Nếu f là song ánh từ A vào B thì do tính chất toàn ánh nên với mỗi $y \in B$ có tương ứng một $x \in A$ để $f(x) = y$, và do tính chất đơn ánh nên phần tử x đó phải duy nhất (nếu trái lại, giả sử phần tử $y \in B$ tương ứng với hai phần tử khác nhau $x_1 \neq x_2$ mà $f(x_1) = f(x_2) = y$, trái tính chất đơn ánh).

Như vậy, *nếu f là song ánh từ A vào B thì ta lại có một ánh xạ từ B vào A, ánh xạ này được gọi là* ***ánh xạ ngược*** *của ánh xạ f, nó cũng là song ánh*. Ánh xạ ngược của ánh xạ f ký hiệu là f^{-1}. Với song ánh $f: A \to B$ xác định bởi $y = f(x)$ thì ánh xạ ngược của nó là $f^{-1}: B \to A$ xác định bởi $x = f^{-1}(y)$.

Ví dụ 1.15. Ánh xạ $f: R \to R$ xác định bởi $f(x) = a^x$, với $a > 0, a \neq 1$, là đơn ánh, vì với $x_1 \neq x_2$ ta có $a^{x_1} \neq a^{x_2}$.

Ánh xạ $g: R \to [-1,1]$ xác định bởi $g(x) = \sin x$ là toàn ánh, vì với số thực p bất kỳ thuộc khoảng $[-1,1]$ ta luôn luôn tìm được số thực x sao cho $\sin x = p$.

Ánh xạ $h: R \to R$ xác định bởi $h(x) = x^3$ là song ánh, vì nó vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.

2.3. Ánh xạ hợp

Giả sử f và g là hai ánh xạ sao cho tập hợp xác định của g trùng với tập hợp ảnh của f, tức là dãy liên tiếp các ánh xạ $f: A \to B; g: B \to C$. Khi đó ta có thể xác định một ánh xạ mới $h: A \to C$ bởi $h(x) = g[f(x)]$, trong đó $f(x) \in B$ là ảnh của $x \in A$ bởi ánh xạ f; $g[f(x)] \in C$ là ảnh của $f(x) \in B$ bởi ánh xạ g.

Ánh xạ h xác định như trên được gọi là ánh xạ hợp của ánh xạ f và ánh xạ g, ký hiệu là $g \circ f$. Vậy $h(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)]$.

Ví dụ 1.16. Cho các ánh xạ $f: R \to R$ xác định bởi $f(x) = 2x+1$ và $g: R \to R$ xác định bởi $g(x) = x^2$. Khi đó

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = [f(x)]^2 = [2x+1]^2 = 4x^2 + 4x + 1.$$

Chú ý. Khi ánh xạ hợp $g \circ f$ được xác định thì chưa chắc ánh xạ $f \circ g$ đã xác định. Ngay cả trong trường hợp $f \circ g$ xác định thì nói chung ta có $g \circ f \neq f \circ g$. Chẳng hạn trong ví dụ 1.16 ta có

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = 2g(x) + 1 = 2x^2 + 1.$$

§3. TẬP HỢP SỐ THỰC

3.1. Định nghĩa trường

Cho một tập hợp E. Ta coi đã xác định được một *phép toán hai ngôi* trong E hay *một luật hợp thành* trong E nếu với mỗi cặp phần tử (a,b) của E cho tương ứng với một phần tử c cũng của E. Ký hiệu phép toán đó bởi dấu * và viết $a*b = c$, với $a,b,c \in E$. Nếu phép toán là phép cộng ta dùng dấu "+" như thường lệ, nếu là phép nhân ta dùng dấu "x" hay dấu ".".

Phép toán * được gọi là *có tính chất kết hợp* nếu với $a,b,c \in E$ ta có $(a*b)*c = a*(b*c)$.

Phép toán * được gọi là *có tính chất giao hoán* nếu với a, b $\in$ E ta có $a*b = b*a$.

Phần tử $e \in E$ được gọi là *phần tử trung hoà* đối với phép toán * nếu với mọi $a \in E$, ta có $a*e = e*a = a$. Với phép cộng phần tử trung hoà được ký hiệu là 0, với phép nhân đó là số 1.

Phần tử $a' \in E$ sao cho với $a \in E$ ta có $a*a' = a'*a = e$ với e là phần tử trung hoà của phép toán *, được gọi là *phần tử ngược* của a đối với phép toán *. Ta ký hiệu phần tử ngược của phần tử a là a^{-1}

Tập hợp E được gọi là có ***cấu trúc trường***, hay là một ***trường*** nếu với mọi $a,b,c \in E$ xác định hai phép toán:

- Phép toán thứ nhất được gọi là ***phép cộng***, thỏa mãn các tính chất sau:

(i) Phép cộng có tính chất giao hoán: $a+b=b+a$.

(ii) Phép cộng có tính chất kết hợp: $(a+b)+c=a+(b+c)$.

(iii) Phép cộng có phần tử trung hoà trong E, ký hiệu là 0.

(iv) Mọi phần tử trong E đều có phần tử ngược ký hiệu là $-a$:

$$a+(-a)=0.$$

- Phép toán thứ hai được gọi là **phép nhân**, thoả mãn các tính chất sau:

(v) Phép nhân có tính chất giao hoán: $a.b=b.a$.

(vi) Phép nhân có tính chất kết hợp: $(a.b).c=a.(b.c)$.

(vii) Phép nhân có phần tử trung hòa (hay phần tử đơn vị), ký hiệu là $e\in E$: $e.a=a.e=a$.

(viii) Mọi phần tử $a\in E, a\neq 0$ đều có phần tử ngược đối với phép nhân là phần tử nghịch đảo $\frac{1}{a}$ cũng thuộc E.

- Giữa phép cộng và phép nhân có tính chất:

(ix) Phép nhân có tính chất phân phối đối với phép cộng:

$$a.(b+c)=ab+ac.$$

Ví dụ 1.17. Tập hợp các số hữu tỷ, tức là tập các số có dạng $\frac{p}{q},(p,q)=1$, có cấu trúc trường; Thật vậy, cộng hai số hữu tỷ, nhân hai số hữu tỷ ta được một số hữu tỷ, cả hai phép toán đó đều thoả mãn 8 tính chất trên.

Tập hợp các số nguyên không có cấu trúc trường vì nghịch đảo của một số nguyên khác không không phải là một số nguyên.

Chú ý. Trong trường ta có thể định nghĩa phép chia cho một số khác không nếu $b\neq 0$ thì $a:b=a.(\frac{1}{b})$.

3.2. Các tính chất cơ bản của trường số thực

Tập hợp số thực R với hai phép toán cộng và nhân có cấu trúc trường, nghĩa là cộng hai số thực ta được một số thực, nhân hai số thực ta được một số thực. Phép cộng và phép nhân có các tính chất giao hoán, kết hợp; phép nhân có tính chất phân phối đối với phép cộng; phần tử trung hoà của phép cộng là số 0, của phép nhân là số 1; phần tử ngược đối với phép cộng của số a là số đối $-a$, đối với phép nhân của số $a \neq 0$ là số nghịch đảo $1/a$.

Trong tập hợp số thực R ta xét một tập hợp con ký hiệu là R^+ và ta định nghĩa R^- là tập hợp những số đối của x nếu $x \in R^+$ (tức là $-x \in R^-$) sao cho:

1) $R^+ \cap R^- = \varnothing$.

2) $R^+ \cup R^- \cup \{0\} = R$.

3) $\forall a,b \in R^+ : a+b \in R^+, a.b \in R^+$.

Các số thực thuộc R^+ được gọi là các *số thực dương*, các số thực thuộc R^- được gọi là các *số thực âm*.

Ta xác định trên R một *quan hệ thứ tự* ký hiệu < (đọc là bé hơn) như sau: Với hai số thực a,b ta có $a<b$ khi và chỉ khi $b-a$ là số thực dương (tức là $b+(-a) \in R^+$). Quan hệ $<$ có tính chất bắc cầu, nghĩa là nếu $a<b$ và $b<c$ thì $a<c$.

Chú ý. Nếu ta có y' thì người ta còn viết $b>a$ (đọc b lớn hơn a). Nếu a là số thực âm thì ta viết $a<0$, nếu a là số thực dương thì ta viết $a>0$.

Trường số thực còn là *trường có thứ tự Acsimet*; thật vậy, với hai số thực tuỳ ý $a,b,a>0$, bao giờ cũng tìm được một số tự nhiên n sao cho $na>b$.

Tính chất trên cho phép người ta có thể xấp xỉ tuỳ ý một số thực bởi một số thập phân (gần đúng thiếu hoặc gần đúng thừa), và như vậy trong thực hành người ta có thể thực hiện được các phép tính trên các số thực.

3.3. Giá trị tuyệt đối của một số thực

Với mọi số thực x ta định nghĩa *giá trị tuyệt đối của* x, ký hiệu $|x|$ như sau:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{khi } x \geq 0, \\ -x & \text{khi } x < 0. \end{cases}$$

Các tính chất:

a) $|x| = 0$, khi và chỉ khi $x = 0$.

b) $|x| = |-x|$.

c) $|x.y| = |x||y|$.

d) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

e) $|x - y| \geq |x| - |y|$.

Ta chứng minh một trong các tính chất, chẳng hạn tính chất $d)$. Thật vậy, từ định nghĩa ta có

$$-|x| \leq x \leq |x|,$$
$$-|y| \leq y \leq |y|.$$

Từ đó

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|,$$

hay

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

3.4. Tập hợp số thực suy rộng

Ta thêm vào tập số thực R hai phần tử khác nhau, ký hiệu là $+\infty$ và $-\infty$ (đọc là dương vô cùng và âm vô cùng), không thuộc R và với mọi số thực x, đặt

$$-\infty < x < +\infty.$$
$$x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty.$$
$$x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty.$$

Với $x > 0$, ta có

$$x.(+\infty) = (+\infty).x = +\infty.$$
$$x.(-\infty) = (-\infty).x = -\infty.$$
$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty.$$
$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty.$$
$$(+\infty).(+\infty) = +\infty.$$
$$(-\infty).(-\infty) = +\infty.$$

Tập hợp số thực R cùng với hai phần tử $-\infty, +\infty$ có các tính chất trên gọi là *tập hợp số thực suy rộng.*

Có thể biểu diễn hình học tập hợp số thực nhờ trục số: Đó là đường thẳng $x'Ox$, điểm gốc O ứng với số không, các số thực dương thuộc nửa đường thẳng Ox, các số thực âm thuộc nửa đường thẳng Ox', mỗi số thực a ứng với một điểm A trên đường thẳng sao cho độ dài $OA = |a|$.

§4. TẬP HỢP SỐ PHỨC

Ta đã biết rằng nếu chỉ hạn chế trong trường số thực thì có những phương trình vô nghiệm, chẳng hạn phương trình bậc hai $x^2 + 1 = 0$.

Trong phần này ta sẽ tìm cách mở rộng trường số thực sang một tập hợp số mới sao cho tập hợp số thực là tập con của tập số mới này và trong tập số mới đó mọi phương trình bậc hai đều có nghiệm.

4.1. Định nghĩa và các phép toán

Xét tập hợp C mà các phần tử $z \in C$ là các cặp số thực (a,b); tức là $C = \{z = (a,b), a \in R, b \in R\}$, trong đó phần tử $z \in C$ được gọi là số phức.

Cho hai số phức $z = (a,b), z' = (a',b')$, ta có các phép toán sau:

- Hai số phức bằng nhau: $z = z'$ khi và chỉ khi $a = a'; b = b'$.

- Phép cộng hai số phức: $z + z' = (a + a', b + b')$.

- Phép nhân hai số phức: $z.z' = (a.a' - b.b', a.b' + b.a')$.

Dễ kiểm tra các phép toán cộng và nhân trên có các tính chất giao hoán, kết hợp, phép nhân có tính chất phân phối đối với phép cộng, phần tử trung hoà của phép cộng là số phức $(0,0)$, của phép nhân là số phức $(1,0)$; phần tử ngược của số phức $z = (a,b)$ đối với phép cộng là $(-a,-b)$, đối với phép nhân (với điều kiện $a \neq 0, b \neq 0$) là số phức

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right).$$

Như vậy, tập hợp số phức có cấu trúc một trường và được gọi là *trường số phức C*.

4.2. Các chú ý

1. Có thể đồng nhất số phức $(a,0)$ với số thực a. Thật vậy, ta có

$(a,0) + (a',0) = (a + a',0)$ là số thực $a + a'$,

$(a,0).(a',0) = (a.a',0)$ là số thực $a.a'$.

Vậy có thể coi tập hợp số thực là tập con của tập số phức $R \subset C$. Sau này ta sẽ viết a thay cho $(a,0)$.

2. Có thể viết số phức (a,b) dưới dạng tổng:

$(a,b) = (a,0) + (b,0).(0,1)$.

Đặt $i = (0,1)$ thì $i^2 = (0,1).(0,1) = (-1,0) = -1$ được gọi là đơn vị ảo. Vậy, số phức (a,b) được viết dưới dạng $z = (a,b) = a + bi$, trong đó a được gọi là phần thực, b được gọi là phần ảo của số phức z. Trong thực tế người ta thường viết số phức dưới dạng $a + bi$.

3. Khi viết số phức dưới dạng $a + bi$ thì ta có thể thực hiện các phép tính theo các quy tắc thông thường của số thực với $i^2 = -1$.

$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i;$

$(a + bi).(a' + b'i) = a.a' + ab'i + ba'i + bb'i^2 = (aa' - bb') + (ab' + ba')i.$

Để tìm số phức nghịch đảo của số phức $z = a + bi$ ta làm như sau:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2},$$

vì vậy, phép chia số phức z cho số phức $z' \neq 0$ được thực hiện theo quy tắc $z.\frac{1}{z'}$.

Số phức $\bar{z} = a - ib$ được gọi là số phức liên hợp của số phức $z = a + ib$.

4. Tìm nghiệm của phương trình $x^2 + 1 = 0$ trong trường số phức. Thật vậy, ta có $x^2 = -1 = i^2$, suy ra $x = \pm i$.

Trong trường số phức mọi phương trình bậc hai với hệ số thực đều có nghiệm. Thật vậy, ta có

$$ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}) = 0. \quad (*)$$

Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$, khi đó

- Nếu $\Delta \geq 0$ thì phương trình bậc hai có nghiệm thực $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$;

- Nếu $\Delta < 0$ đặt $\alpha = \frac{-b}{2a}$ $\beta^2 = \frac{4ac - b^2}{4a^2}$ thì (*) trở thành

$$a\left[(x-\alpha)^2 + \beta^2\right] = 0, \text{ suy ra } x = \alpha \pm \beta.$$

Ví dụ 1.18. Xét phương trình $x^2 - 2x + 4 = 0$. Ta có $\Delta = -12 = 12i^2$ từ đó phương trình có hai nghiệm phức là $x = 1 \pm i\sqrt{3}$.

4.3. Dạng lượng giác của số phức

Cho số phức $z = x + yi$. Có thể biểu diễn hình học số phức đó trên mặt phẳng phức; đó là mặt phẳng trên đó có hai trục $x'Ox$ và $y'Oy$ vuông góc với nhau. Ta cho tương ứng số phức $z = x + yi$ với điểm M có toạ độ

(x, y) trên mặt phẳng đó (hay với véc tơ $\overrightarrow{OM}$); Các điểm trên trục $x'Ox$ tương ứng với các số $(x,0)$, đó là các số thực x; Các điểm trên trục $y'Oy$ tương ứng với các số $(0, y)$, đó là các số phức có dạng iy.

Độ dài r của véc tơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là mô đun của số phức z, ký hiệu là $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Góc φ giữa véc tơ $\overrightarrow{OM}$ và Ox được gọi là argumen của số phức z, ký hiệu là $\varphi = \text{Arg}(z)$.

Góc φ được xác định chính xác đến $2k\pi$, người ta thường chọn giá trị chính của nó trong khoảng $[-\pi; \pi]$. Ta có

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi \text{ hay } r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tan\varphi = \frac{y}{x}.$$

Khi đó ta có thể viết số phức $z = x + yi$ dưới dạng lượng giác

$$z = r.(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Ví dụ 1.19. Viết các số phức $(1,0), i, 1+i$ dưới dạng lượng giác.

- Với số $(1,0)$ ta có $x = 1$; $y = 0$ nên $r = 1$, $\tan\varphi = 0$, suy ra $\varphi = 0$, nên

$$(1,0) = \cos 0 + i\sin 0.$$

- Với số i ta có $x = 0, y = 1$, $r = 1$, $\tan\varphi = \infty, \varphi = \frac{\pi}{2}$, nên

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}.$$

- Tương tự, ta có $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Khi viết số phức dưới dạng lượng giác thì các phép tính nhân, chia, luỹ thừa các số phức được tiến hành thuận lợi. Ta có các quy tắc sau :

Nếu $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ thì

a) $z_1.z_2 = r_1.r_2\left[\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)+i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right]$.

b) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left[\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)+i\sin\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right], z_2 \neq 0$.

c) $z_1^n = r_1^n\left[\cos\left(n\varphi_1\right)+i\sin\left(n\varphi_1\right)\right]$.

Chứng minh tính chất a). Thật vậy, ta có

$$z_1.z_2 = r_1.r_2\left[\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)+i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right].$$

Tính chất (b) và (c) được suy ra từ (a) bằng quy nạp.

Dùng kết quả trên có thể chứng tỏ được rằng: *Trong trường số phức căn bậc n của đơn vị [số phức $(1,0)$] có n giá trị khác nhau.* Thật vậy, số phức $(1,0)$ có dạng lượng giác là $(1,0) = \cos 0 + i\sin 0$.

Gọi căn bậc n của $(1,0)$ là $z = r.(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; tức là, $z^n = (1,0)$. Khi đó

$$z^n = r^n\left[\cos\left(n\varphi\right)+i\sin\left(n\varphi\right)\right] = \cos 0 + i\sin 0.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{cases} r^n = 1, \\ \cos n\varphi = \cos 0, \\ \sin n\varphi = \sin 0, \end{cases}$$

ta được

$$\begin{cases} r = 1, \\ \varphi = kn\pi, k = 0,1,\ldots,n-1. \end{cases}$$

Vậy căn bậc n của số phức đơn vị có n giá trị khác nhau, gọi các căn bậc n đó là ε_k, $k = 0,1,...n-1$. Ta có

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, k = 0,1,\ldots,n-1.$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

1.1 Ta ký hiệu các khoảng đóng, nửa khoảng đóng, nửa đóng (hoặc nửa mở), mở trên tập hợp số thực R như sau:

$$[a,b]=\{x\in R, a\le x\le b\},$$
$$[a,b)=\{x\in R, a\le x< b\},$$
$$(a,b]=\{x\in R, a< x\le b\},$$
$$(a,b)=\{x\in R, a< x< b\}.$$

Tìm $A\cup B, A\cap B, A\setminus B, B\setminus A$ trong các trường hợp sau:

$i) A=[3,5], B=[2,4].$

$ii) A=[3,5), B=(2,4).$

$iii) A=(3,5), B=[2,4).$

1.2 Cho $A=\{x\in R, |x|\ge 5\}; B=\{x\in R, -6\le x<0\}$. Xác định các tập hợp $A\cup B, A\cap B, A\setminus B, B\setminus A, \overline{A}$ và biểu diễn chúng trên trục số.

1.3 Chứng minh các đẳng thức tập hợp sau:

a. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$

b. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$

c. $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C).$

d. $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C).$

1.4 Trong 100 sinh viên có 28 người học tiếng Anh, 30 người học tiếng Đức, 42 người học tiếng Pháp, 8 người học cả tiếng Anh và tiếng Đức, 10 người học cả tiếng Anh và tiếng Pháp, 5 người học cả tiếng Đức và tiếng Pháp, 3 người học cả 3 thứ tiếng. Hỏi có bao nhiêu người không học ngoại ngữ nào? Có bao nhiêu người chỉ học một ngoại ngữ?

1.5 Cho A, B là các tập hợp, f là ánh xạ. Chứng minh rằng:

a. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

b. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

c. Nếu f là đơn ánh thì $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

1.6 Chứng minh rằng các ánh xạ sau là song ánh và xác định ánh xạ ngược của chúng.

a. $f : R \to R$ xác định bởi $f(x) = 2x - 1$.

b. $g : [0,1] \to [0,1]$ xác định bởi $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

1.7 Cho các ánh xạ:

$$f : A \to R; f(x) = 2x^2 - 1; g : A \to R; g(x) = 1 - 3x;$$

Tìm tập hợp A để $f = g$.

1.8 Số hữu tỷ là số có dạng $\dfrac{p}{q}$ trong đó p và q là hai số nguyên tố cùng nhau. Dùng định nghĩa đó hãy chứng minh số $\sqrt{2}$ không phải là số hữu tỷ (chứng minh bằng phản chứng).

1.9 Các số a, b, a', b' là hữu tỷ, $\sqrt{c}$ không phải là hữu tỷ. Chứng minh rằng nếu $a + b\sqrt{c} = a' + b'\sqrt{c}$ thì $a = a', b = b'$. Dùng kết quả ấy hãy tìm các số x và y sao cho

$$x + y\sqrt{2} = \sqrt{17 + 12\sqrt{2}}.$$

Nguyên lý quy nạp: *Nhiều mệnh đề toán học được chứng minh bằng nguyên lý quy nạp sau: Nếu P là một tính chất nào đó được xác định trên tập hợp các số tự nhiên N sao cho:*

a, Tính chất P đúng với số tự nhiên 1.

b, Nếu tính chất P đã đúng cho số tự nhiên n thì nó cũng đúng cho số tự nhiên n+1. Khi đó tính chất P sẽ đúng cho mọi số tự nhiên n.

Sơ đồ chứng minh theo quy nạp như sau:

Đầu tiên ta chứng tỏ tính chất P đúng cho $n=1$.

Sau đó ta giả sử tính chất P đúng cho n và tìm cách chứng minh nó cũng đúng cho $n+1$.

Ta kết luận tính chất P đúng cho mọi n.

Ví dụ 1.20. Chứng minh tổng: $P_n = 1+2+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ với n là số tự nhiên bằng phương pháp quy nạp.

Với $n=1$ ta có $P_1 = \dfrac{1(1+1)}{2} = 1$ công thức đúng.

Ta giả sử công thức đúng cho n, tức là: $P_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Từ đó ta sẽ chứng minh công thức đúng cho $n+1$ tức là phải chứng minh

$$P_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Ta có

$$P_{n+1} = P_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Vậy công thức đúng cho mọi số tự nhiên n.

1.10 Dùng nguyên lý quy nạp hãy chứng minh:

a. $(1+a)^n \geq 1+na, a > -1$.

b. $(1+2+\cdots+n)^2 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$.

c. Nếu một tập hữu hạn có n phần tử thì số tất cả các tập hợp con của nó là 2^n.

1.11 Tính

$$a.\frac{1}{i}; \quad b.\frac{1-i}{1+i}; \quad c.\frac{2}{1-3i}; \quad d.\left(\sqrt{3}-i\right)^2.$$

1.12 Viết các số phức $i, -8, 1-i$ dưới dạng lượng giác, từ đó hãy tính $\sqrt[3]{i}$, $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[3]{1-i}$.

1.13 Tìm miền chứa điểm phức z nếu

a. $|z| > 5$; b. $|z+2i| \geq 2$.

1.14 Giải các phương trình sau.

1. $z^6 - z^3(1+i) + i = 0$.
2. $z^6(1-i) = 1+\sqrt{3}i$.
3. $z^4 + 6(1+i)z^2 + 5 + 6i = 0$.
4. $z^6 + iz^3 + i - 1 = 0$.

5 $x^3 + \sqrt{3} - i = 0$.

Chương 2
MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC

§1. PHÉP TÍNH MA TRẬN

1.1. Một số khai niệm về ma trận

Cho m, n là hai số nguyên dương. Một *ma trận* loại $m\times n$ là một bảng hình chữ nhật gồm $m.n$ số thực được trình bày theo m hàng và n cột:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Các số a_{ij}; $1\le i\le m, 1\le j\le n$ được gọi là các *phần tử* của ma trận A (phần tử nằm ở hàng i và cột j của ma trận).

Ma trận loại $1\times n$ là ma trận hàng; tức là ma trận chỉ có một hàng.

Ma trận loại $m\times 1$ là ma trận cột; tức là ma trận chỉ có một cột.

Giả sử ta có ma trận A. Bây giờ ta lập một ma trận mới, nó có các hàng là các cột của ma trận A còn các cột là các hàng của ma trận A (vẫn giữ nguyên thứ tự các hàng và các cột). Ma trận mới này được gọi là ***ma trận chuyển vị*** của ma trận A, ta ký hiệu nó là A^t. Như vậy, nếu A là ma trận cho bởi (2.1) thì

$$A^t=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Nếu A là ma trận loại $m\times n$ thì A^t là ma trận loại $n\times m$.

*Ma trận loại $n\times n$ là **ma trận vuông** cấp n;* tức là ma trận có n hàng và n cột.

Các phần tử của ma trận vuông có chỉ số hàng bằng chỉ số cột $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ là các phần tử nằm trên *đường chéo chính.*

Ma trận vuông được gọi là ***ma trận đối xứng*** *nếu các phần tử ở vị trí đối xứng qua đường chéo chính là bằng nhau.* Với ma trận đối xứng ta có $a_{ij} = a_{ji}, i \neq j$.

Ma trận vuông được gọi là ***ma trận chéo*** *nếu mọi phần tử nằm ngoài đường chéo chính đều bằng không.*

Ma trận không *là ma trận có mọi phần tử đều bằng không.*

Hai ma trận là bằng nhau nếu chúng cùng loại và có các phần tử ở cùng vị trí tương ứng bằng nhau.

Ví dụ 2.1.

1) Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$;

khi đó ma trận chuyển vị là

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2) Ma trận vuông là $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 3 & 8 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

3) Ma trận chéo $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

4) Ma trận đối xứng $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

1.2. Các phép toán trên ma trận

(i) Phép cộng hai ma trận

Cho hai ma trận $A=(a_{ij});B=(B_{ij})$ cùng loại $m\times n$. Tổng hai ma trận A và B, ký hiệu là $C=A+B$, là ma trận cùng loại với A và B, *có các phần tử*

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

(hàng i, cột j) là tổng các phần tử ở vị trí tương ứng của A và B.

(ii) Phép nhân một ma trận với một số thực

Tích của một ma trận A với một số thực α là một ma trận cùng loại với A có *phần tử ở vị trí (i,j) là tích của α với phần tử a_{ij} của ma trận A.*

Ta viết $\alpha A=(\alpha a_{ij})$

Ví dụ 2.2. Cho $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&5&4\end{pmatrix}$; $\qquad B=\begin{pmatrix}2&0&-4\\3&-5&2\end{pmatrix}$.

Ta có $A+B=\begin{pmatrix}3&2&-1\\3&0&6\end{pmatrix}$; $2A=\begin{pmatrix}2&4&6\\0&10&8\end{pmatrix}$.

(iii) Phép nhân hai ma trận

a)Phép nhân một ma trận hàng với một ma trận cột

Cho

$$u=(u_1\quad u_2\quad \dots\quad u_n);v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\dots\\v\end{pmatrix},$$

u là ma trận hàng loại $(1\times m)$, v là ma trận cột loại $(n\times 1)$. Tích của u, v được xác định bởi công thức

$$uv=(u_1v_1+u_2v_2+\dots+u_nv_n).$$

b) Phép nhân hai ma trận

Điều kiện của phép nhân: *Muốn nhân ma trận A với ma trận B thì* ***số cột của ma trận A phải bằng số hàng của ma trận B.***

Tích của ma trận A loại $(m\times p)$ và ma trận B loại $(p\times n)$ là một ma trận C loại $(m\times n)$ có phần tử ở vị trí (i,j) bằng tích của hàng i của ma trận A với cột j của ma trận B được tính bởi công thức

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}.$$

Ký hiệu $C=A.B$.

Ví dụ 2.3.

Cho các ma trận: $A=\begin{pmatrix}3&1&4\\2&0&5\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&3&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$;

Tìm ma trận tích $C=A.B$.

Ta có C là ma trận loại (2×4) với

$c_{11}=3\times1+1\times1+4\times0=4,$ $c_{12}=3\times3+1\times1+4\times0=10,$

$c_{13}=3\times0+1\times0+4\times1=4,$ $c_{14}=3\times0+1\times0+4\times1=4,$

$c_{21}=2\times1+0\times1+5\times0=2,$ $c_{22}=2\times3+0\times1+5\times0=6,$

$c_{23}=2\times0+0\times0+5\times1=5,$ $c_{24}=2\times0+0\times0+5\times1=5.$

Vậy

$$C=\begin{pmatrix}4&10&4&4\\2&6&5&5\end{pmatrix}.$$

Ta có thể nghiệm lại rằng nếu các ma trận A,B,C thỏa mãn điều kiện nhân; tức là A là ma trận loại $(m\times p)$, B là ma trận loại $(p\times q)$, C là ma trận loại $(q\times n)$ thì tích $A.B.C$ có tính kết hợp hay $A(B.C)=(A.B)C$. Nhưng phép nhân hai ma trận không có tính chất giao hoán. Nếu ma trận A nhân được với ma trận B thì chưa chắc B đã nhân được với A (không thỏa mãn điều kiện nhân). Ngay cả khi tích $B.A$ tồn tại thì chưa chắc ta có $A.B=B.A$.

Ví dụ 2.4. Cho $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$.

Khi đó

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

còn

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nếu A và B thỏa mãn điều kiện nhân thì B^t và A^t cũng thỏa mãn điều kiện nhân và ta có

$$(A.B)^t = B^t A^t$$

Chuyển vị của ma trận tích bằng tích các ma trận chuyển vị nhưng lấy theo thứ tự ngược lại.

Ta cũng cần chú ý rằng trong phép nhân ma trận thì hệ thức $AB = 0$ chưa chắc đã kéo theo hoặc $A = 0$ hoặc $B = 0$. Chẳng hạn, cho

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

nhưng

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bây giờ ta xét *ma trận vuông cấp n là ma trận chéo có các phần tử nằm trên đường chéo chính bằng* 1. Ta ký hiệu ma trận đó là I. Khi đó, với mọi ma trận vuông A cấp n, ta luôn có

$$AI = IA = A.$$

*Ma trận I được gọi là **ma trận đơn vị cấp** n.*

§2. ĐỊNH THỨC

2.1. Hoán vị và nghịch thế

Cho tập hợp hữu hạn $E = \{1, 2, ..., n\}$. Xét một hoán vị của các phần tử của E (đó là một song ánh P từ E vào chính nó)

$$P\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

với $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in E$. Lấy hai số α_i, α_j trong một hoán vị của E. Nếu $\alpha_i > \alpha_j$ với $i > j$ thì ta nói các số α_i, α_j lập thành một nghịch thế.

Ví dụ 2.5. Trong hoán vị 3214 của 4 số 1234 thì có 3 cặp tạo thành nghịch thế, đó là $(3,2),(3,1),(2,1)$.

Để α_i, α_j lập thành một nghịch thế thì

$(\alpha_i - \alpha_j)(i - j) < 0$.

Ký hiệu

$$I(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

là tổng số tất cả các nghịch thế của hoán vị $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Trong ví dụ 2.5 ta có

$$I(3,2,1,4) = 3.$$

Định nghĩa 2.1 *Một hoán vị của E được gọi là hoán vị chẵn nếu tổng số các nghịch thế của nó là chẵn hoặc bằng không, hoán vị là lẻ nếu tổng số các nghịch thế của nó là lẻ.*

Xét một hoán vị $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Nếu ta đổi chỗ hai phần tử α_i, α_j cho nhau còn các phần tử khác vẫn giữ nguyên thì ta nói đã thực hiện một *phép chuyển vị. Phép chuyển vị làm thay đổi tính chẵn lẻ của hoán vị.*

Ví dụ 2.6. Xét hoán vị $3,2,1,4$ của bốn số $1,2,3,4$. Ta có $I(3,2,1,4) = 3$. Nếu ta đổi chỗ 2 và 1 cho nhau (thực hiện một phép chuyển vị), khi đó $I(3,1,2,4) = 2$.

Bây giờ ta xét thêm một ví dụ để minh họa một tính chất khác của hoán vị. Cho $E = \{1,2,3,4,5\}$ và xét một hoán vị của E là $5,3,4,2,1$.

$$P : E \to E \qquad P\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nó có 9 nghịch thế (hoán vị lẻ). Ta sắp xếp lại các cột của ma trận trên để đưa hàng 2 về thứ tự tự nhiên bằng cách thực hiện phép đổi chỗ các cột cạnh nhau. Đổi chỗ cột 5 cho cột 4 rồi cho cột 3, cột 2 rồi cuối cùng cột 1, tức là thực hiện 4 phép chuyển vị

$$P\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tiếp tục đưa cột 5 của ma trận mới đến vị trí cột 2, tức là thực hiện 3 phép chuyển vị

$$c5 \to c4 \to c3 \to c2, \qquad \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Đổi chỗ cột 4 cho cột 3, thực hiện một phép chuyển vị

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cuối cùng đổi chỗ cột 5 cho cột 4, thực hiện một phép chuyển vị

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Như vậy để đưa hàng 2 về thứ tự tự nhiên ta đã biến đổi ma trận xuất phát bằng đúng 9 phép chuyển vị hai cột cạnh nhau (bằng số nghịch thế ở hàng 2 của ma trận xuất phát). Sau mỗi phép chuyển vị đó hàng 1 thêm một nghịch thế, hàng 2 bớt đi một nghịch thế. Như vậy hàng 1 của ma trận cuối cùng có cùng số nghịch thế với hoán vị P Có thể coi hàng đó như một *hoán vị ngược* của P, ta biểu diễn nó bằng P^{-1}.

Phương pháp trình bày như trên có thể áp dụng cho bất kỳ hoán vị nào của tập hợp $E = \{1, 2, ..., n\}$. Ta có kết quả tổng quát sau:

Định lý 2.2 *Nếu một hoán vị tùy ý $P : E \to E$ có k nghịch thế thì hoán vị ngược P^{-1} cũng có k nghịch thế.*

Ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

được đưa về dạng

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

bằng k *phép đổi chỗ hai cột cạnh nhau.*

2.2. Định thức

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ vuông cấp 2. Gọi định thức của ma trận A là định thức cấp 2, ký hiệu $\det(A)$, **là một số** xác định như sau :

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Ta cũng ký hiệu định thức cấp hai bởi $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Giá trị của $\det(A)$ là tích của phần tử nằm trên đường chéo chính trừ đi tích các phần tử nằm trên đường chéo còn lại. Nói cách khác, đó là hiệu của hai số hạng, mỗi số hạng là tích của hai phần tử, mỗi phần tử nằm trên đúng một hàng và đúng một cột. Chỉ số thứ nhất chỉ hàng chỉ số thứ hai chỉ cột, đó là hai hoán vị của hai số 1 và 2, là $(1,2)$ và $(2,1)$. Hoán vị sau có một nghịch thế, nó là lẻ và số hạng ứng với phần tử đó có dấu trừ.

Xét ma trận vuông cấp 3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Định thức của ma trận A là định thức cấp 3, đó là số được tính như sau :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \qquad (2.2)$$

Mỗi số hạng của định thức cấp 3 gồm tích của 3 phần tử, mỗi phần tử nằm trong đúng một cột và đúng một hàng. Các thừa số trong mỗi số hạng được viết theo quy tắc sau; Đầu tiên là phần tử ở hàng một rồi đến hàng hai, hàng ba. Chỉ số các cột của các thừa số đó lập thành một hoán vị của ba số $1,2,3$. Số các hoán vị của ba số là $3!=6$ vừa bằng số các số hạng viết trong (2.2). Trong 6 hoán vị của $1,2,3$ thì các hoán vị $1,2,3$; $2,3,1$; $3,1,2$ là chẵn, chúng ứng với các số hạng mang dấu $+$ ở biểu thức của định thức viết trong (2.2), còn các hoán vị $3,2,1$; $2,1,3$; $1,3,2$ là lẻ, chúng ứng với các số hạng mang dấu $-$ ở (2.2). Vậy ta có thể viết

$$\det(A)=\sum(-1)^{I(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}a_{3\alpha_3}.$$

Tổng được lấy theo mọi hoán vị của 1,2,3.

Dựa vào nhận xét trên ta có định nghĩa định thức cấp n.

Định nghĩa 2.3 *Xét ma trận vuông A cấp n. Định thức của ma trận A là một số, ký hiệu là $\det(A)$, số đó được xác định bằng*

$$\det(A)=\sum(-1)^{I(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)}a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots a_{n\alpha_n} \qquad (2.3)$$

trong đó $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ là một hoán vị của n số $1,2,\dots,n$,

$$I(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$$

là tổng các nghịch thế của hoán vị đó, tổng $\sum$ được lấy theo mọi hoán vị của n số $1,2,\dots,n$ (có tất cả $n!$ hoán vị nên tổng đó chứa $n!$ số hạng).

Ta cũng ký hiệu định thức cấp n của ma trận A là

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2.3. Các tính chất của định thức

Xét một định thức cấp n. Để thuận tiện cho việc phát biểu các tính chất của định thức ta ký hiệu $A_1, A_2, ..., A_n$ là các cột của định thức và viết

$$D(A_1, A_2, ...A_n).$$

Tính chất 1. *Nếu một định thức có một cột được phân tích thành tổng của hai cột, chẳng hạn*

$$A_j = A_j^{'} + A_j^{''},$$

thì ta có thể phân tích định thức thành tổng của hai định thức

$$D(A_1, A_2, ..., A_j^{'} + A_j^{''}, ...A_n) =$$
$$D(A_1, A_2, ..., A_j^{'}, ..., A_n) + D(A_1, A_2, ..., A_j^{''}, ...A_n)$$

Thật vậy, trong biểu thức của định thức ở (2.3), mỗi số hạng trong tổng đều có chứa một phần tử nằm ở cột thứ j, ta thay phần tử đó bằng tổng $a'_{ij} + a''_{ij}$, sau đó tách tổng toàn bộ thành hai tổng, một ứng với các số hạng có chứa a'_{ij}, một ứng với các số hạng có chứa a''_{ij}.

Tính chất 2. *Có thể đưa thừa số chung của một cột ra ngoài dấu định thức:*

$$D(A_1, ..., kA_j, ...A_n) = kD(A_1, ..., A_j, ..., A_n).$$

Mọi số hạng đều chứa k do đó ta chỉ việc đưa k ra ngoài dấu tổng.

Tính chất 3. *Đổi chỗ hai cột thì định thức đổi dấu.*

$$D(A_1, ..., A_i, ..., A_j, ...A_n) = -D(A_1, ..., A_j, ..., A_i, ...A_n).$$

Việc đổi chỗ làm thay đổi tính chẵn lẻ của hoán vị, do đó trong biểu thức (2.3) các số hạng mang dấu $+$ sẽ chuyển thành $-$ và các số hạng mang dấu $-$ sẽ chuyển thành $+$.

Hệ quả 2.4 *Định thức có hai cột giống nhau thì bằng không.*

Thật vậy, đổi chỗ hai cột giống nhau thì định thức không thay đổi nhưng theo tính chất 3 thì định thức đổi dấu, suy ra $D = -D$. Vậy $D = 0$.

Tính chất 4. *Nếu một cột của định thức là tổ hợp tuyến tính của các cột khác thì định thức bằng không.*

Áp dụng tính chất 1 để phân tích định thức thành tổng nhiều định thức, sau đó áp dụng tích chất 2 ta sẽ đưa về các định thức có hai cột giống nhau, chúng đều bằng không.

Hệ quả 2.5 *Nếu thêm vào một cột của một định thức một tổ hợp tuyến tính các cột khác thì định thức không thay đổi*

$$D\left(A_1,\ldots,A_j+\sum\alpha_\iota A_\iota,\ldots,A_n\right)=D\left(A_1,\ldots,A_j,\ldots,A_n\right).$$

Tính chất 5. *Định thức của ma trận chuyển vị của ma trận A bằng định thức của ma trận* A *; tức là* $\det\left(A^t\right)=\det(A)$.

Nói cách khác, *giá trị của định thức không thay đổi khi ta chuyển hàng thành cột, chuyển cột thành hàng, vẫn giữ nguyên thứ tự.*

Gọi các phần tử của ma trận A là a_{ij}, ta có

$$\det(A)=\sum(-1)^{I(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots a_{n\alpha_n}. \tag{2.4}$$

Gọi các phần tử của ma trận chuyển vị A^t là b_{ij} tức là $b_{ij}=a_{ji}$ ta có:

$$\det(A)=\sum(-1)^{I(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)}b_{1\beta_1}b_{2\beta_2}\ldots b_{n\beta_n}=\sum(-1)^{I(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)}a_{\beta_1 1}a_{\beta_2 2}\ldots a_{\beta_n n}$$
.(2.5)

Mỗi tích trong (2.5), chưa kể dấu, cũng là một tích trong (2.3) vì tích đó chứa các phần tử thuộc đúng một hàng và đúng một cột, dấu của chúng cũng như nhau vì hai hoán vị nên

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n\end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n\\ 1 & 2 & \ldots & n\end{pmatrix},$$

có cùng số nghịch thế. Từ đó ta có $\det\left(A^t\right)=\det(A)$.

Tính chất 5 cho ta một kết quả quan trọng sau: *Trong một định thức vai trò của cột và hàng là như nhau,* các tính chất đã đúng cho cột thì cũng đúng cho hàng. Trong các phát biểu của các tính chất 1, 2, 3, 4, ta chỉ việc thay từ *cột* bằng từ *hàng.*

2.4. Khai triển một định thức

Công việc tính định thức cấp hai rất đơn giản. Vì vậy ta tìm cách đưa các định thức cấp cao về các định thức cấp hai.

(i) Định thức con, phần bù đại số

Cho ma trận vuông A cấp n. Gọi ***định thức con*** *của phần tử* a_{ij} *của ma trận* A *là định thức* D_{ij}, *nhận được từ ma trận* A *bằng cách xóa đi hàng* i *cột* j. Như vậy D_{ij} là định thức cấp $n-1$.

Xét định thức cấp 3 của ma trận A

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

Nhóm các số hạng có chứa a_{11} lại ta được $a_{11}\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right)=a_{11}D_{11}$, với D_{11} là định thức con của phần tử a_{11}. Vậy *tổng các số hạng chứa* a_{11} *của định thức bằng tích của* a_{11} *với định thức con* D_{11} *của nó.*

Tính chất trên cũng đúng với định thức cấp n.

Bổ đề 2.6 *Trong định thức của ma trận vuông* A *cấp* n *có chứa* $(n-1)!$ *số hạng chứa* a_{11} *làm thừa số. Tổng của* $(n-1)!$ *số hạng đó bằng tích* $a_{11}D_{11}$ *với* D_{11} *là định thức con của phần tử* a_{11}.

Ta có

$$\det(A)=\sum(-1)^{I(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)}a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots a_{n\alpha_n}. \tag{2.6}$$

Tổng được lấy theo mọi hoán vị của n số $(1,2,\dots,n)$. Một số hạng tùy ý chứa a_{11} làm thừa số khi và chỉ khi $\alpha_1=1$, còn lại $(\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ là một hoán vị của $n-1$ số và như vậy có $(n-1)!$ hoán vị, tức là có $(n-1)!$ số hạng chứa a_{11}. Vì số nghịch thế của $(\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ cũng bằng số nghịch thế của $(1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$. Khi cho $\alpha_1=1$ trong (2.3) ta có

$$a_{11}\sum(-1)^{I(1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)}a_{2\alpha_2}\dots a_{n\alpha_n}=a_{11}\sum(-1)^{I(\alpha_2,\dots,\alpha_n)}a_{2\alpha_2}\dots a_{n\alpha_n}=a_{11}D_{11},$$

tổng sau cùng theo định nghĩa chính là định thức D_{11}.

Ta có một kết quả tổng quát hơn sau: *Trong định thức của ma trận vuông A cấp n có $(n-1)!$ số hạng chứa phần tử a_{ij} làm thừa số. Tổng của $(n-1)!$ số hạng đó bằng $(-1)^{i+j}a_{ij}D_{ij}$ với D_{ij} là định thức con của phần tử a_{ij}.*

Thật vậy, xét một phần tử a_{ij} nào đó. Ta lần lượt chuyển hàng i của định thức lên hàng một bằng $i-1$ phép đổi chỗ hai hàng liên tiếp, định thức nhận được có phần tử a_{i1} nằm ở góc trái trên cùng. Bây giờ ta lại chuyển cột j (có chứa phần tử a_{ij}) lên vị trí cột 1 bằng $j-1$ phép đổi chỗ hai cột liên tiếp. Như vậy trong định thức cuối cùng này, ta gọi nó là $\det(A')$, phần tử a_{ij} sẽ nằm ở góc trái trên cùng (vị trí 1.1). Định thức cuối cùng $\det(A')$, được suy từ định thức xuất phát, $\det(A)$, bằng $i+j-1$ lần đổi chỗ, mỗi lần đổi chỗ định thức đổi dấu một lần, do đó

$$\det(A)=(-1)^{i+j-2}\det(A')=(-1)^{i+j}\det(A').$$

Theo bổ đề trên, các số hạng chứa a_{ij} sẽ bằng a_{ij} nhân với định thức con nhận được từ A' bằng cách bỏ đi hàng 1 và cột 1, định thức con đó cũng chính là định thức con của phần tử a_{ij} trong A. Vậy tổng các số hạng chứa a_{ij} trong det(A) là

$$(-1)^{i+j}a_{ij}D_{ij}.$$

Định nghĩa 2.7 *Phần bù đại số của phần tử a_{ij} trong ma trận A là $\pm D_{ij}$, lấy dấu cộng khi tổng chỉ số hàng và cột của a_{ij} là chẵn, dấu trừ nếu tổng đó lẻ.* Ký hiệu phần bù đại số của a_{ij} là A_{ij} ta có

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}D_{ij}.$$

(ii) Định lý khai triển

Định lý 2.8 *Với ma trận vuông* A *cấp* n *ta có*

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}; \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

(khai triển định thức theo hàng i).

$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}; \quad j = 1,2,\ldots,n,$$

(khai triển định thức theo cột j).

Định lý 2.8 là kết quả của bổ đề 2.6 khi ta nhóm các số hạng có chứa $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ (hoặc $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$) trong biểu thức của định thức.

Ví dụ 2.7. 1) Tính định thức bằng cách dùng định lý khai triển

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Ta khai triển theo hàng một

$$D = 3\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 3(6-4) - (-3+2) + 5(-4+4) = 7$$

Dùng các tính chất của định thức ta có thể biến đổi sao cho trong định thức có chứa một hàng hoặc một cột gồm nhiều số không, sau đó ta chỉ việc khai triển theo hàng hoặc cột đó.

2) Tính lại định thức D trong ví dụ 2.7

Lấy hàng một cộng với 3 lần hàng hai rồi lấy hàng ba trừ đi hai lần hàng hai ta được

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 8 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \text{ (khai triển theo hàng ba).}$$

3) Tính định thức cấp 4 của $D = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 & 6 \\ 4 & -5 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 8 & 0 \end{vmatrix}$.

Đem cột một trừ đi ba lần cột ba, sau đó đem cột bốn trừ đi hai lần cột ba

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 & 6 \\ -14 & -5 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -26 & 2 & 8 & -16 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -14 & -5 & -5 \\ -26 & 2 & -16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -14 & -33 & 37 \\ -26 & -50 & 62 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -33 & 37 \\ -50 & 62 \end{vmatrix} = -392,$$

trong định thức cấp ba ta lấy cột hai cộng hai lần cột một và cột ba trừ ba lần cột một.

(iii) Định thức của ma trận tích

Cho các ma trận vuông cấp hai

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Tính tích $A.B$.

Thật vậy, ta có

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix}.$$

Ta có thể tách định thức trên thành bốn định thức sau:

Định thức 1 = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} b_{11}b_{12} = 0;$

Định thức 2 = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} b_{11}b_{22} = \det(A)b_{11}b_{22};$

Định thức 3 = $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} b_{21}b_{12} = -\det(A)b_{21}b_{12};$

Định thức 4 = $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} b_{21}b_{22} = 0.$

Cuối cùng ta được

$$\det(AB) = \det(A)(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}) = \det(A)\det(B).$$

Kết quả trên cũng đúng cho trường hợp A, B là các ma trận vuông cấp n. Vậy *định thức của ma trận tích bằng tích các định thức của từng ma trận.*

§3. MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

3.1. Định nghĩa

Xét các ma trận vuông cấp n.

Định nghĩa 2.9 *Ma trận vuông A là khả nghịch nếu tồn tại ma trận B cùng cấp sao cho*

$$A.B = B.A = I, \tag{2.7}$$

trong đó I là ma trận đơn vị cùng cấp với A và B được gọi là ***ma trận nghịch đảo*** *của ma trận A, ký hiệu nó bằng A^{-1}.*

Ta có

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$$

Ta sẽ xét xem với điều kiện nào của A thì nó là khả nghịch?

3.2. Điều kiện tồn tại và cách tìm ma trận nghịch đảo

Định lý 2.10 *Ma trận vuông A khả nghịch khi và chỉ khi* $\det A \neq 0$.

Chứng minh. Điều kiện cần. Giả sử A khả nghịch, khi đó tồn tại ma trận A^{-1} để $A.A^{-1} = I$. Theo định lý về định thức của tích hai ma trận ta có

$$\det(A.A^{-1}) = \det(A).\det(A^{-1}) = \det(I) = 1 \neq 0,$$

suy ra $\det(A) \neq 0$.

Điều kiện đủ. Giả sử $\det(A) \neq 0$. Ta phải đi tìm một ma trận B thỏa mãn (2.7). Gọi a_{ij} là các phần tử của ma trận A và A_{ij} là phần bù đại số của phần tử a_{ij} trong ma trận A. Chuyển vị ma trận A ta được ma trận A^t. Khi đó, nếu $A=\left(a_{ij}\right)$ thì $A^t=\left(a_{ji}\right)$. Trong ma trận A^t thay các phần tử a_{ji} bởi phần bù đại số A_{ji} của chúng, ta được một ma trận mới, gọi ma trận đó là ma trận phụ hợp của ma trận A và ký hiệu là $\tilde{A}$. Như vậy $\tilde{A}=\left(A_{ji}\right)$.

Xét tích $A.\tilde{A}$ và $\tilde{A}.A$. Lấy hàng i trong ma trận A nhân với cột k trong ma trận $\tilde{A}$ ta được phần tử c_{ik} ở vị trí i,k trong ma trận tích. Các phần tử trong hàng i của ma trận A là $a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in}$, các phần tử trong cột k của ma trận $\tilde{A}$ là $A_{1k},A_{2k},\ldots,A_{nk}$, khi đó

- Nếu $k=i$ thì các phần tử c_{ii} sẽ là các phần tử nằm trên đường chéo chính của ma trận tích và

$$c_{ii}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}=\det(A) \text{ (khai triển theo hàng } i\text{).}$$

- Nếu $k\neq i$, xét ma trận A' là ma trận nhận được từ A bằng cách thay hàng k bởi hàng i, các hàng khác không thay đổi. Như vậy ma trận A' có hàng k là $a_{i1},a_{i1},\ldots,a_{in}$, còn các hàng khác giống như các hàng tương ứng của ma trận A. Vì vậy khi ta gạch hàng k cột j của ma trận A' thì các phần tử còn lại của ma trận A' cũng giống như các phần tử còn lại của ma trận A khi ta gạch hàng k cột j. Từ đó suy ra các phần bù đại số của các phần tử nằm trên hàng k cột j của A và A' là như nhau, hay $A_{kj}=A'_{kj}$. Khi đó

$$c_{ik}=a_{i1}A'_{k1}+a_{i2}A'_{k2}+\ldots+a_{in}A'_{kn}; \qquad i\neq k.$$

Đó là công thức khai triển của $\det(A')$ theo hàng k. Do $\det(A')$ có hai hàng giống nhau (các phần tử của hàng k và hàng i cùng là $a_{i1};a_{i2},\ldots,a_{in}$) nên $\det(A')=0$, tức là $c_{ik}=0$ với $i\neq k$. Vậy, các phần tử c_{ik} của ma trận tích $A.\tilde{A}$ là

$$c_{ik} = \begin{cases} \det(A) & khi \quad i = k \\ 0 & khi \quad i \neq k \end{cases}.$$

Ma trận $A.\tilde{A}$ khi đó là ma trận chéo có các phần tử nằm trên đường chéo chính bằng det(A), suy ra

$$A.\tilde{A} = \det(A).I.$$

Vì $\det(A) \neq 0$ nên

$$A.\left(\frac{1}{\det(A)}\tilde{A}\right) = I.$$

Tương tự ta cũng chứng minh được

$$\left(\frac{1}{\det(A)}\tilde{A}\right)A = I.$$

Vậy ma trận nghịch đảo của ma trận A là

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}.$$

Tóm lại, để tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A ta thực hiện các bước sau:

(i) Tính $\det(A)$. Nếu $\det(A) = 0$ ma trận A không khả nghịch (không có ma trận nghịch đảo), còn nếu $\det(A) \neq 0$, ma trận A khả nghịch.

(ii) Chuyển vị ma trận A rồi thay các phần tử của A^t bằng các phần bù đại số của chúng ta được ma trận phụ hợp $\tilde{A}$.

(iii) Cuối cùng ta có

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}.$$

Ví dụ 2.8. 1) Chứng tỏ rằng ma trận A dưới đây là khả nghịch và tìm ma trận nghịch đảo của nó

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix}$$

Ta có

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & -2 & 5\end{vmatrix}=-4.$$

Suy ra A là khả nghịch. Chuyển vị ma trận A ta được

$$A^t=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 0 & -2\\ -1 & 2 & 5\end{pmatrix}.$$

Thay các phần tử của A^t bằng các phần bù đại số của chúng ta được ma trận phụ hợp

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}4 & -8 & 4\\ -7 & 9 & -5\\ -6 & 10 & -6\end{pmatrix}.$$

Vậy ma trận nghịch đảo của ma trận A là

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\tilde{A}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & -8 & 4\\ -7 & 9 & -5\\ -6 & 10 & -6\end{pmatrix}.$$

2) Ma trận $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ có $\det(A)=0$ nên không có ma trận nghịch đảo.

§4. HẠNG CỦA MA TRẬN

4.1. Định nghĩa

Cho A là ma trận loại $m \times n$. Nếu ta lấy ra k hàng và k cột thì các phần tử nằm trên giao điểm của các hàng và các cột lấy ra đó lập thành một ma trận vuông cấp k.

Định thức của ma trận vuông đó được gọi là *định thức con cấp k trích từ ma trận A*. Một ma trận loại $m \times n$ có rất nhiều định thức con các cấp khác nhau, mỗi phần tử của A là một định thức con cấp một, cấp lớn nhất của định thức con trích từ A là số nhỏ nhất trong hai số m, n.

Định nghĩa 2.11 *Hạng của ma trận A là cấp cao nhất của các định thức con khác không của A.*

Hạng của ma trận A ký hiệu là $r(A)$ hay *rank(A)*.

Ví dụ 2.9. 1) Tìm hạng của các ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Hạng của A lớn nhất là 2. Vì định thức con

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -15 \neq 0.$$

Suy ra $r(A) = 2$.

2) Xét ma trận

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 4 & 8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hạng của B lớn nhất bằng 3. Định thức

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 4 & 8 & -12 \end{vmatrix} = 0$$

vì có hai hàng tỷ lệ. Các định thức cấp ba khác cùng bằng không vì chứa một hàng gồm toàn phần tử không. Mọi định thức cấp hai cũng đều bằng không do có hai hàng tỷ lệ. Vậy

$$r(B) = 1.$$

4.2. Các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận

Các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận là các phép biến đổi sau:

1. Phép chuyển vị ma trận.
2. Phép đổi chỗ các hàng hoặc các cột.
3. Bỏ khỏi ma trận một hàng hoặc một cột gồm toàn phần tử không.
4. Bỏ khỏi ma trận một hàng hoặc một cột là tổ hợp tuyến tính của các hàng hoặc cột khác.
5. Nhân một hàng hoặc một cột với một số khác không.
6. Cộng vào một hàng hoặc một cột một tổ hợp tuyến tính của các hàng hoặc cột khác.

Dùng các tính chất đã biết của định thức ta có thể chứng tỏ được: *Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận không làm thay đổi hạng của ma trận.* Vì vậy ta có thể dùng các phép biến đổi sơ cấp để tìm hạng của ma trận.

Ví dụ 2.10. Tìm hạng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 8 & 3 & 19 & 11 \end{pmatrix}.$$

Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp lần lượt như sau : Đem hàng hai trừ hai lần hàng một, hàng ba trừ tám lần hàng một, khi đó ta viết

$$A=\begin{pmatrix}1&3&5&4\\2&-1&3&1\\8&3&19&11\end{pmatrix}\xrightarrow[h_3-4h_2]{h_2-2h_1}\begin{pmatrix}1&3&5&4\\0&-7&-7&-7\\0&7&7&7\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[h_3+h_2]{}\begin{pmatrix}1&3&5&4\\0&-7&-7&-7\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

bằng 1. Vậy hạng của ma trận A bằng 2.

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

2.1 Cho các ma trận

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&0&2\end{pmatrix} \text{ và } B=\begin{pmatrix}-1&5&-2\\1&1&-1\end{pmatrix}.$$

Tìm $A+B, 3B, A+2B, A^t, B^t$.

2.2 Cho các ma trận

$$A=\begin{pmatrix}2&1&5\\1&3&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3&4\\-1&2\\2&1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&3\\-1&-1\end{pmatrix}.$$

Tìm $A.B; B.C$. Chứng tỏ rằng $(A.B).C=A.(B.C)$

2.3 Cho các ma trận

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\3&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&3\\-1&-1\end{pmatrix}.$$

Hãy nghiệm lại rằng $(A.B)^t=B^t.A^t$.

2.4 Cho các ma trận

$$A=\begin{pmatrix}3&1&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}, J=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

1) Chứng minh rằng $A=3I+J$ với I là ma trận đơn vị cấp ba.

2) Tính J^2 và bằng phương pháp quy nạp hãy chứng minh rằng $A^n=3^nI+a_nJ$ với a_n là một số có thể xác định được. Viết ma trận A^n.

2.5 Cho ma trận

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&2&0\\1&0&-1\end{pmatrix}.$$

1) Tính A^2 và A^3. Nghiệm lại rằng ta có

$$A^3-A^2-A+I=0$$

với I là ma trận đơn vị cấp ba.

2) Chứng tỏ rằng ma trận A là khả nghịch. Hãy suy ra A^{-1} từ hệ thức trên.

2.6 Cho ma trận A là ma trận vuông cấp ba mà mọi phần tử thuộc đường chéo chính bằng không, các phần tử khác bằng 1.

1) I là ma trận đơn vị cấp ba. Xác định các số thực a,b sao cho ma trận $P=aA+bI$ thỏa mãn hệ thức $P^2=I$.

2) Tìm ma trận P.

2.7 Xét các ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng nếu A khả nghịch thì hệ thức $A.B=0$ kéo theo $B=0$ và nếu B khả nghịch thì từ hệ thức đó ta suy ra $A=0$. Từ đó suy ra rằng nếu $A.B=0$ thì hoặc $A=0$ hoặc $B=0$ hoặc cả hai không khả nghịch. Tìm ma trận khả nghịch A sao cho $A^2=A$.

2.8 Tính các định thức sau:

$$1)\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}; \quad 2)\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}; \quad 3)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

2.9 Dùng các tính chất của định thức chứng tỏ rằng:

$$1)\begin{vmatrix} 84 & 35 & 62 \\ 8 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad 2)\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \\ 5 & 5 & 0 \end{vmatrix} \text{ chia hết cho 15.}$$

2.10 Chứng tỏ rằng các ma trận sau đây là khả nghịch và tìm ma trận nghịch đảo của chúng

$$1)\,A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}; \quad 2)\,B = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.11 Tìm hạng của các ma trận sau:

$$1)\,A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 13 \\ -2 & -6 & 8 & 10 \end{pmatrix}; \quad 2)\,B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 & -8 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 11 & 4 \end{pmatrix}.$$

2.12 Tính các định thức sau:

$$1)\begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix}; \quad 2)\begin{vmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix}.$$

2.13 Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

1) Tính tích $A.A^t$. Suy ra rằng A là khả nghịch và tìm A^{-1}.

2) Tính A^k với k là số nguyên bất kỳ.

3) Suy ra công thức của $\cos 3\alpha$ theo $\cos\alpha$.

2.14 Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} -m & 3 & 5m \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}.$$

a, Tìm m để A khả nghịch

b, Tìm ma trận nghịch đảo A^{-1} khi m = 0.

Chương 3
HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

§1. HỆ CRAMER

1.1. Định nghĩa

Xét một hệ n *phương trình tuyến tính* n *ẩn:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x = b_n \end{cases} \quad \text{hay } AX = B. \qquad (3.1)$$

Các số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là *các ẩn,* các số thực $a_{ij}, i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, n$

là *các hệ số của ẩn*, các số $b_i, j = 1, 2, \ldots, n$ là *các số hạng tự do và*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ là ma trận các hệ số của ẩn,}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ là n ẩn số, } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ là ma trận các hệ số tự do.}$$

Nghiệm của hệ (3.1) là một bộ n *số thực* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *thoả mãn mọi phương trình của hệ.*

Hệ (3.1) được gọi là hệ Cramer nếu định thức các hệ số của ẩn khác không

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

1.2. Quy tắc Cramer

Định lý 3.1 *Hệ phương trình tuyến tính (3.1) là hệ Cramer nếu* $|A| \neq 0$. *Khi đó hệ có nghiệm duy nhất được tính bằng công thức* $X = A^{-1}B$; *tức là*

$$\boxed{x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)};\ j = 1, 2, \dots, n.} \qquad (3.2)$$

trong đó A là ma trận các hệ số của ẩn, A_j *là ma trận nhận được từ* A *bằng cách thay cột thứ* j *bằng cột hệ số tự do* B *nằm ở vế phải của (3.1).*

Chứng minh. Vì $\det(A) \neq 0$ nên A khả nghịch, suy ra

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^t.$$

Thay $X = A^{-1}B$ vào hệ phương trình $AX = B$ ta có

$$A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = B.$$

Vậy $X = A^{-1}B$ là nghiệm của hệ.

Thay $A^{-1} = \dfrac{1}{\det\ A} C^t$ vào biểu thức $X = A^{-1}B$, suy ra

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

tức là

$$x_j = \frac{c_{1j}b_1 + c_{2j}b_2 + \cdots + c_{nj}b_n}{\det\ A} = \frac{\det\ A_j}{\det\ A}.$$

Để chứng minh tính duy nhất của nghiệm, ta giả sử hệ có hai nghiệm X và Y ; tức là $AX = B, AY = B$. Bằng cách trừ hai vế ta được $AX - AY = 0$ hay $A(X - Y) = 0$. Nhân 2 vế của phương trình cho A^{-1} ta được $X - Y = 0$ hay $X = Y$. Vậy hệ có duy nhất một nghiệm.

Ví dụ 3.1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 5. \end{cases}$$

Ta có

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5,$$

suy ra hệ đã cho là hệ Crame có nghiệm duy nhất. Tính các $|A_i|, i = 1,2,3$. Ta có

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5; \ |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -10; \ |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -15.$$

Vậy nghiệm của hệ là

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = 1; \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = 2; \quad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = 3.$$

Chú ý. Nếu xét hệ (3.1) ở dạng ma trận $AX = B$. Do hệ Cramer có $\det(A) \neq 0$ nên ma trận A là khả nghịch, tồn tại ma trận nghịch đảo A^{-1}, nhân 2 vế của hệ cho A^{-1}, ta được nghiệm của hệ là $X = A^{-1}B$. Vậy, ta có thể tìm nghiệm của hệ Cramer bằng cách tìm ma trận nghịch đảo A^{-1} của ma trận A rồi tính tích của hai ma trận A^{-1} và B.

§2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH TỔNG QUÁT

2.1. Điều kiện tương thích

Xét hệ phương trình tuyến tính tổng quát m phương trình n ẩn

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \text{hay} \quad AX = Y. \qquad (3.3)$$

trong đó

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ là ma trận các hệ số của ẩn,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ là n ẩn số, $$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ là ma trận các hệ số tự do.

Nghiệm của hệ là một bộ n số thực $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *thoả mãn mọi phương trình của hệ.*

Hệ (3.3) được gọi là *tương thích* nếu nó có ít nhất một nghiệm. Ta sẽ tìm xem với điều kiện nào thì hệ (3.3) là tương thích? Thậy vậy, gọi $\overline{A}$ là ma trận nhận được từ A bằng cách thêm cột các số hạng tự do vào cột cuối, ta gọi nó là ma trận mở rộng của A

$$\overline{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Định lý 3.2 (Kronecker - Capelli) *Hệ (3.3), tức hệ* $Ax = B$ *có nghiệm (tương thích) khi và chỉ khi* $r(\overline{A}) = r(A)$.

Chứng minh. Bằng cách sử dụng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng và đánh số lại các ẩn, tức là đổi chỗ các cột ta đưa ma trận $\overline{A}$ về dạng bậc thang sau:

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1r} & a'_{1r+1} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ & a'_{22} & \cdots & a'_{2r} & a'_{2r+1} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ & & \ddots & \vdots & & \cdots & & \vdots \\ & & & a'_{rr} & a'_{rr+1} & \cdots & a'_{rn} & b'_r \\ & & & & 0 & \cdots & 0 & b'_{r+1} \\ & & & & & & 0 & b'_m \end{pmatrix},$$

trong đó $r \le \min\{m, n\}$. Khi đó ta có

- Nếu $r(\overline{A}) = r(A) = n$ thì hệ có nghiệm duy nhất.

- Nếu $r(\overline{A}) = r(A) = r < n$ thì hệ có vô số nghiệm, với $n - r$ ẩn tự do.

- Nếu $r(\overline{A}) \neq r(A)\left(r(\overline{A}) > r(A)\right)$ thì hệ vô nghiệm

Vậy hệ có nghiệm khi và chỉ khi $r(\overline{A}) = r(A)$.

Chú ý. Để giải hệ phương trình tuyến tính tổng quát ta cần tìm $r(\overline{A}), r(A)$. Khi đó

- Nếu $r(\overline{A}) \neq r(A)\left(r(\overline{A}) > r(A)\right)$ thì hệ vô nghiệm.

- Nếu $r(\overline{A}) = r(A) = n$ thì hệ có nghiệm duy nhất.

- Nếu $r(\overline{A}) = r(A) = r < n$ thì hệ có vô số nghiệm, với $n - r$ ẩn tự do.

Ví dụ 3.2. 1) Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x+2y-z &= -1 \\ x+\quad 3z &= 3 \\ 2x+y+4z &= 4 \end{cases}$$

Ma trận các hệ số A và ma trận mở rộng $\overline{A}$ đều có hạng 2 và do định thức cấp hai ở góc trái khác không, nên ta giữ lại hai phương trình đầu với các ẩn x, y làm các ẩn cơ sở, còn ẩn z là tuỳ ý. Ta có hệ Crame

$$\begin{cases} x+y=1-z \\ x+2y=-1+z \end{cases}, \text{ suy ra } \begin{cases} x=3-3z \\ y=-2+2z \end{cases}, \text{ z tùy ý.}$$

2) Xét hệ

$$\begin{cases} x+2y-z &= 1 \\ 2x+y+2z &= 2. \\ x-4y+7z &= 3 \end{cases}$$

Ta có $\det(A)=0$ và định thức cấp hai ở góc trái

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

nên hạng ma trận A bằng 2. Ma trận mở rộng $\overline{A}$ chứa định thức cấp 3

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 8.$$

nên hạng ma trận $\overline{A} = 3$. Vậy hệ đã cho không tương thích.

2.2. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

(i) Định nghĩa 3.3 *Nếu cột số hạng tự do ở vế phải của (3.3) bằng không, tức là*

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$$

thì ta có hệ thuần nhất.

Như vậy, *một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có dạng*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0, i = 1,2,\ldots,m \text{ hay } AX = 0. \quad (3.4)$$

Do ma trận mở rộng chứa một cột gồm toàn phần tử không nên hạng của nó luôn bằng hạng của ma trận A. Vậy hệ (3.4) là tương thích và hệ luôn có nghiệm là

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0,$$

được gọi là *nghiệm tầm thường.*

(ii) Điều kiện để hệ thuần nhất có nghiệm khác nghiệm tầm thường

Xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có số phương trình bằng số ẩn tức là $m = n$. Khi đó, nếu $\det(A) \neq 0$ thì hệ là hệ Cramer và nghiệm duy nhất của hệ là nghiệm tầm thường. Như vậy, để hệ thuần nhất có nghiệm khác tầm thường thì $\det(A) = 0$. Khi đó $rank(A) = r < n$ và ta sẽ giải hệ theo r ẩn cơ sở như đã trình bày ở trên.

Ví dụ 3.3. Tìm nghiệm khác không của hệ thuần nhất

$$\begin{cases} 2x + y - z &= 0 \\ x + 2y + z &= 0. \\ 3x + y - 2z &= 0 \end{cases}$$

Ta có

$$\det(A) = 0, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

nên A có hạng 2. Chọn x và y làm ẩn cơ sở và cho $z = \alpha$ tuỳ ý, ta được nghiệm của hệ là

$$x = \alpha, y = -\alpha, z = \alpha, \ \alpha \text{ tùy ý}.$$

§3. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP GAUSS

Xét hệ m phương trình n ẩn có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \tag{3.5}$$

Giả sử hệ số $a_{11} \neq 0$ (nếu không ta thực hiện việc đổi chỗ các phương trình trong hệ để được $a_{11} \neq 0$). Dùng phương trình đầu để khử ẩn x_1 từ $m-1$ phương trình sau. Khi đó ta được một hệ $m-1$ phương trình với $n-1$ ẩn (không có ẩn x_1).

Tiếp đó lại dùng phương trình đầu của hệ mới nhận được để khử ẩn x_2 ở các phương trình đứng sau (giả thiết hệ số của ẩn x_2 của phương trình đó là khác không), ta sẽ được một hệ $m-2$ phương trình với $n-2$ ẩn (không có ẩn x_1, x_2).

Tiếp tục quá trình này để khử dần dần các ẩn cho đến khi chỉ còn một phương trình. Ta dùng phương trình này để tìm ẩn (có thể là một hoặc nhiều ẩn), sau đó tìm các ẩn còn lại từ các phương trình đứng trên. Trong quá trình khử ẩn có thể xảy ra các tình huống sau:

a) Mọi hệ số của ẩn đều bằng không, vế phải cũng bằng không. Khi đó ta bỏ phương trình đó đi vì nó là hệ quả của các phương trình khác (đó chính là bỏ một hàng chứa toàn phần tử không của ma trận).

b) Mọi hệ số của ẩn đều bằng không, vế phải khác không. Khi đó hệ đã cho là không tương thích vì nó chứa một phương trình không được thoả mãn với bất kỳ giá trị nào của ẩn (đó là trường hợp hạng ma trận các hệ số khác hạng ma trận mở rộng .

Cách khử liên tiếp các ẩn được tiến hành như sau:

Xét hệ phương trình (3.5). Giả sử $a_{11} \neq 0$ (nếu không chỉ việc đổi chỗ các phương trình rồi đánh số lại).

Bước 1: Chia cả hai vế của phương trình đầu cho a_{11}. Lấy phương trình thứ hai trừ đi phương trình đầu mới, sau khi đã nhân nó với a_{21}, lấy phương trình thứ ba trừ đi phương trình đầu mới, sau khi đã nhân nó với a_{31}, ta được hệ

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n & = & b_1' \\ \qquad b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n & = & b_2' \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ \qquad b_{m2}x_2 + \ldots + b_{mn}x_n & = & b_m' \end{cases}$$

trong đó

$$b_{1i} = \frac{a_{1j}}{a_{11}},\ b_1' = \frac{b_1}{a_{11}}, b_{ij} = a_{ij} - a_{i1}b_{1j}, b_i' = b_i - a_{i1}b_1', i = 2,3,\ldots,m, j = 2,3,\ldots,n$$

Bước 2: Ta lại giả thiết $b_{22} \neq 0$ và lại áp dụng thuật toán trên để khử ẩn x_2 từ $m-2$ phương trình sau, ta được hệ mới

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \ldots + b_{1n}x_n & = & b_1' \\ \qquad x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2n}x_n & = & b_2'' \\ \qquad\qquad c_{33}x_3 + \ldots + c_{3n}x_n & = & b_3'' \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ \qquad\qquad c_{m3}x_3 + \ldots + c_{mn}x_n & = & b_m'' \end{cases}$$

Lặp lại thuật toán đó cho các bước tiếp theo cuối cùng sẽ đi tới ma trận các hệ số có dạng hình thang hoặc hình tam giác trên. Vì ta chỉ thực hiện các phép biến đổi trên các hệ số nên khi trình bày các bước liên tiếp ta chỉ cần viết các hệ số của ẩn.

Ví dụ 3.4. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 + 7x_5 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 9x_4 + 7x_5 = a \end{cases}$$

Viết lại bảng các hệ số của ẩn và cột số tự do như sau:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & -1 & 7 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & -4 & 9 & 7 & a \end{array}$$

Bước 1: Giữ nguyên hàng đầu (vì a_{11} đã bằng 1), đem hàng hai trừ hàng đầu, đem hàng ba cộng hàng đầu, đem hàng tư cộng 2 lần hàng đầu, ta được

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 & 9 & a+2 \end{array}$$

Bước 2: Đem hàng hai chia cho 2 rồi đem hàng ba trừ đi hàng hai mới nhận được và hàng tư trừ đi 3 lần hàng hai nói trên, ta có

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+1/2 \end{array}$$

Từ dòng cuối cùng, suy ra $0 = a + \dfrac{1}{2}$. Khi đó

- Nếu $a \neq -\dfrac{1}{2}$ hệ đã cho vô nghiệm.

- Nếu $a = 1/2$ ta bỏ dòng cuối cùng. Dòng thứ ba là

$$3x_3 - 2x_4 + x_5 = 1/2.$$

Chọn x_4 và x_5 là các ẩn tuỳ ý, và x_3, x_2 , x_1 là các ẩn cơ sở, ta có

$$x_3 = \frac{1}{6} + \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5.$$

Từ dòng thứ hai ta có $x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1/2$. Thay giá trị của x_3 vừa tính được ở trên và rút ra x_2, ta được $x_2 = \frac{5}{6} + \frac{1}{3}x_4 - \frac{7}{3}x_5$. Dòng đầu có nghĩa là

$$x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 + x_5 = 1.$$

Thay giá trị của x_2 và x_3 vừa tính được rồi rút ra x_1 ta có $x_1 = 2 + 4x_4 - 3x_5$.

Vậy, với $a \neq 1/2$ hệ đã cho vô nghiệm, với $a = 1/2$ hệ đã cho có nghiệm là

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 + 4x_4 - 3x_5, \\ x_2 &= \frac{5}{6} + \frac{1}{3}x_4 - \frac{7}{3}x_5, \quad x_4, x_5 \text{ tùy ý} \\ x_3 &= \frac{1}{6} + \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5, \end{aligned}$$

Chú ý. Khi giải hệ phương trình tuyến tính Cramer bằng phương pháp Gauss ta đã đưa phương trình ma trận $AX = B$ về phương trình $A'X = B'$, trong đó A' là ma trận tam giác trên. Sau khi tìm được ẩn x_n ta lại phải dùng các phép biến đổi để tìm dần các ẩn đứng trên. Điều đó có nghĩa là ta đã dùng các phép biến đổi để đưa ma trận A' về ma trận đơn vị.

Các phép biến đổi đó chính là các phép biến đổi sơ cấp trên các hàng của ma trận A'. Đưa ma trận A về ma trận I có nghĩa là đã nhân bên trái của A với ma trận nghịch đảo A^{-1}. Ta được

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \text{ hay } X = A^{-1}B.$$

Như vậy phép biến đổi nói trên đã đưa ma trận B về ma trận nghiệm. Ta thực hiện các phép biến đổi đó theo trình tự sau:

Đầu tiên ta viết ma trận A các hệ số và ma trận B cột số tự do $A|B$. Bằng phương pháp Gauss ta biến đổi cả hai ma trận sao cho ma trận A trở thành ma trận tam giác trên A'. Sau đó ta lấy hàng $n-1$ của A' trừ đi hàng n của nó được nhân với một số thích hợp sao cho phần tử thứ n của hàng đó bằng không. Ta lại lấy hàng $n-2$ trừ đi một tổ hợp tuyến tính của các hàng $n-1$ và n để làm cho mọi phần tử trên hàng $n-2$, trừ phần tử nằm trên đường chéo chính, đều bằng không và cứ thế tiếp tục cho các hàng ở trên đến khi ta đưa được A' về ma trận đơn vị. Ta có thể áp dụng phương pháp trên để tìm ma trận đơn vị. Muốn vậy ta sẽ viết trên cùng một hàng 3 ma trận A, I, B rồi bằng các phép biến đổi sơ cấp ta đưa về 3 ma trận I, A^{-1}, X. Ta có sơ đồ sau:

$$A|I|B.$$

$$A^{-1}A|A^{-1}I|A^{-1}B.$$

$$I|A^{-1}|X.$$

Ví dụ 3.5. Giải hệ phương trình có kết hợp tìm ma trận nghịch đảo của ma trận các hệ số A

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 5. \end{cases}$$

Ta viết 3 ma trận A, I, B của hệ như sau:

$$\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}$$

Đem hàng hai trừ hai lần hàng một, hàng ba trừ hàng một, ta được

$$\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & - & -9 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}$$

Đem hàng hai chia cho 3, hàng ba cộng hai lần hàng hai mới, suy ra

$$\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5/3 & 1/3 & -2/3 & 1 & 5 \end{array}$$

Nhân hàng ba với $\frac{3}{5}$, ta có

$$\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -2/5 & 3/5 & 3 \end{array}$$

Đến đây ta đã đưa ma trận A về dạng tam giác trên A', tiếp tục biến đổi để đưa ma trận A' về ma trận đơn vị I như sau:

Lấy hàng hai trừ 3 lần hàng một, hàng một trừ hàng ba

$$\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4/5 & 2/5 & -3/5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3/5 & -1/5 & -1/5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -2/5 & 3/5 & 3 \end{array}$$

Đem hàng một trừ hàng hai, khi đó ma trận A' trở thành ma trận đơn vị I

$$\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/5 & 3/5 & -2/5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3/5 & -1/5 & -1/5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -2/5 & 3/5 & 3 \end{array}$$

Vậy nghiệm của hệ là $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3$. Ma trận nghịch đảo A^{-1} của ma trận A các hệ số của phương trình là

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

3.1 Giải các hệ phương trình tuyến tính sau:

a. $\begin{cases} 3x+2y+4z &= 1 \\ 2x-y+z &= 0 \\ x+2y+3z &= 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x-y-z-t &= -1 \\ x-2y+z+t &= -2 \\ x+y-2z+t &= 4 \\ x+y+z-2t &= -8 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x-y+3z &= 1 \\ -4x+2y+z &= 3 \\ -2x+y+4z &= 4 \\ 10x-5y-6z &= -10 \end{cases}$

3.2 Giải và biện luận theo tham số m các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=2 \\ x_1+7x_2-4x_3+11x_4=m \\ 4x_1+8x_2-4x_3+16x_4=m+1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-2x_4+3x_5=3 \\ x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=1 \\ 3x_1+x_2+x_3-3x_4+4x_5=6 \\ 5x_1+2x_3-5x_4+7x_5=9-m \end{cases}$

c. $\begin{cases} mx_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+mx_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+mx_3=1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} mx_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+mx_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+x_2+mx_3+x_4=1 \end{cases}$

e. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+mx_4=1 \\ x_1+x_2+mx_3+x_4=1 \\ x_1+mx_2+x_3+x_4=1 \\ mx_1+x_2+x_3+x_4=1 \end{cases}$

f. $\begin{cases} x+y+(1-m)z &= m+2 \\ (1+m)x-y+2z &= 0 \\ 2x-my+3z &= m+2 \end{cases}$

3.3 Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss

a. $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_4-6x_5 &= 0 \\ x_2+x_3-3x_4+2x_5 &= 0 \\ 6x_1-3x_2+7x_4-10x_5 &= 0 \\ 2x_1+x_3+x_4+12x_5 &= 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x_2+x_3-3x_4+2x_5 &= 6 \\ 2x_1-x_2+2x_4-6x_5 &= 4 \\ 6x_1-3x_2+7x_4-10x_5 &= -8 \\ 2x_1+x_3+x_4+12X_5 &= 15 \end{cases}$

3.4 Bằng các phép biến đổi sơ cấp hãy tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ -1 & 4 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

3.5 Giải và biện luận các hệ phương trình sau theo các tham số a, α, β, γ

a. $\begin{cases} ax+y+z+t = 1\\ x+ay+z+t = a\\ x+y+az+t = a^2\end{cases}$ b. $\begin{cases} ax+y+z = \alpha\\ x+ay+z = \beta\\ x+y+az = \gamma\end{cases}$

3.6 Cho phương trình ma trận:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & -1 & 1\\ 4 & 1 & \lambda\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}0\\ 2\\ \lambda+5\end{pmatrix}.$$

a. Tìm X khi $\lambda=-2$.

b. Phương trình có bao giờ vô nghiệm không? Tại sao?

3.7 Cho phương trình ma trận

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \lambda\\ 2 & 7 & 2\lambda+1\\ 3 & 9 & 4\lambda\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}.$$

a. Giải phương trình khi $\lambda=0$.

b. Tìm λ để phương trình trên có vô số nghiệm.

3.8 Tìm λ để tồn tại ma trận X sao cho

$$\begin{pmatrix}-2 & 1 & -3\\ 1 & 0 & 5\\ -3 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-6\\ 6\\ \lambda\\ 2\end{pmatrix}.$$

Tìm X với λ vừa tìm được.

Chương 4
KHÔNG GIAN VÉC TƠ

Trong chương trình toán học phổ thông Trung học, ta đã học các véc tơ trong mặt phẳng và trong không gian. Ta đã biểu diễn các véc tơ đó theo tọa độ và đã biết cách cộng các véc tơ và nhân một véc tơ với một số theo các tọa độ của chúng. Trong chương này ta sẽ mở rộng khái niệm véc tơ hình học sang véc tơ tổng quát, nó có liên quan đến nhiều vấn đề trong toán học và trong thực tế.

§1. KHÔNG GIAN VÉC TƠ

1.1. Định nghĩa

Định nghĩa 4.1 *Tập V khác rỗng được gọi là không gian véc tơ trên trường số thực R nếu trong V xác định hai phép toán:*

Phép cộng hai véc tơ: *Nếu x và y là hai phần tử của V thì tổng của chúng, ký hiệu là $x+y$, cũng là phần tử của V.*

Phép nhân một véc tơ với một số: *Nếu x là một phần tử của V và α là một số thực thì tích của chúng, ký hiệu là $\alpha.x$, cũng là phần tử của V.*

Thỏa mãn 8 tiên đề:

(i) *Phép cộng có tính giao hoán*: $\forall x, y \in V : x+y = y+x$.

(ii) *Phép cộng có tính kết hợp*: $\forall x, y, z \in V : (x+y)+z = x+(y+z)$.

(iii) *Tồn tại phần tử không*: $\exists 0 \in V : \forall x \in V, x+0 = x$.

(iv) *Tồn tại phần tử đối*: $\forall x \in V, \exists -x \in V : x+(-x) = 0$.

(v) *Phép nhân với một số có tính chất kết hợp*:

$$\forall \alpha, \beta \in R, \forall x \in V : \alpha.(\beta x) = (\alpha.\beta)x.$$

(vi) *Tính chất của số thực* 1: $\forall x \in V : 1.x = x$.

(vii) *Phép nhân với một số có tính chất phân phối đối với phép cộng véc tơ*:

$$\forall x, y \in V, \forall \alpha \in R : \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y.$$

(viii) *Phép nhân có tính chất phân phối đối với phép cộng số thực:*

$$\forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in R : (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x.$$

Mỗi phần tử thuộc V được gọi là một véc tơ.

Từ các tiên đề trên suy ra:

a. Phần tử không của V là duy nhất. Thật vậy, giả sử trong V có hai phần tử không là 0_1 ; 0_2. Theo (iii), với 0_1 là phần tử không: $0_1 + 0_2 = 0_2$; với 0_2 là phần tử không: $0_1 + 0_2 = 0_1$. Dùng (i) suy ra $0_1 = 0_2$.

b. Phần tử đối của $x \in V$ là duy nhất. Thật vậy, giả sử trong V có hai phần tử đối của x là $-x_1; -x_2$. Từ các tiên đề (iii), (iv), (ii), ta có

$$-x_2 = -x_2 + 0 = -x_2 + x + (-x_1) = (-x_2 + x) + (-x_1) = 0 + (-x_1) = -x_1.$$

1.2. Các ví dụ

1) Không gian véc tơ R^n

Xét tập hợp R^n mà mỗi phần tử của nó được xác định bằng một bộ n số thực sắp thứ tự $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Ta định nghĩa phép cộng và nhân như sau:

$$\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n),$$

suy ra

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n).$$

Phép nhân một số thực với một phần tử trong $\mathbf{R}^n$ được xác định bằng: $\forall\, x = (x_1, x_2, ..., x_n), \alpha \in R$, ta có $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$. Dùng tính chất của tập hợp số thực có thể chứng tỏ rằng tập hợp R^n thoả mãn cả 8 tiên đề của một không gian véc tơ. Phần tử không trong R^n là $(0, 0, ..., 0)$, phần tử đối của phần tử x là phần tử $-x = (-x_1, -x_2, ..., -x_n)$. Vậy tập hợp R^n lập thành một không gian véc tơ trên trường số thực.

2) Không gian các đa thức

Xét tập hợp các đa thức với hệ số thực có bậc không vượt quá n

$$P_n[x] = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n.$$

Tổng hai đa thức có bậc không vượt quá n cũng là một đa thức có bậc không vượt quá n, tích một đa thức có bậc không vượt quá n với một số thực cũng là một đa thức có bậc không vượt quá n. Dễ kiểm tra tập $P_n[x]$ thỏa mãn 8 tiên đề trong định nghĩa 4.1, với đa thức không là đa thức có mọi hệ số bằng không. Vậy tập hợp các đa thức có bậc không vượt quá n lập thành một không gian véc tơ trên trường số thực.

3) Không gian các hàm

Xét tập hợp các hàm số thực $f(x)$ liên tục trên một khoảng (a,b) nào đó. Ta có tổng các hàm liên tục là hàm liên tục, tích một hàm liên tục với một số thực là hàm liên tục. Hàm không là hàm đồng nhất bằng không với mọi giá trị của x. Hàm đối của hàm $f(x)$ là hàm $-f(x)$. Dễ kiểm tra tập hợp trên thỏa mãn 8 tiên đề trong định nghĩa 4.1. Vậy tập hợp các hàm số liên tục trên một khoảng lập thành một không gian véc tơ trên trường số thực.

4) Không gian các số phức

Xét tập hợp C các số phức

$$z = a + bi, \text{ với } a, b \in R,$$

i là đơn vị ảo thỏa mãn $i^2 = -1$. Ta đã biết phép cộng hai số phức, phép nhân một số phức với một số thực. Ta có thể nghiệm lại 8 tiên đề của một không gian véc tơ cho tập hợp số phức. Vậy tập hợp số phức là một không gian véc tơ trên trường số thực.

§2. CƠ SỞ CỦA MỘT KHÔNG GIAN VÉC TƠ

Theo định nghĩa của một không gian véc tơ, nếu $v_1, v_2, \ldots, v_n$ là các véc tơ thuộc không gian véc tơ V và $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ là các số thì

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

cũng là một véc tơ thuộc V.

2.1 Sự độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của một hệ véc tơ

Định nghĩa 4.2 *Biểu thức*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

được gọi là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ với các hệ số $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Định nghĩa 4.3 *Các véc tơ $v_1, v_2, ..., v_n$ của không gian véc tơ V được gọi là **độc lập tuyến tính** nếu mọi tổ hợp tuyến tính của chúng là véc tơ không khi và chỉ khi mọi hệ số của tổ hợp đó bằng không*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0.$$

Trong trường hợp trái lại, *nếu có ít nhất một $\alpha_i \neq 0, i = 1, 2, ..., n$ thì các véc tơ $v_1, v_2, ..., v_n$ được gọi là **phụ thuộc tuyến tính**.*

Nếu các véc tơ $v_1, v_2, ..., v_n$ phụ thuộc tuyến tính thì một véc tơ trong chúng sẽ là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ còn lại.

Thật vậy, từ

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0$$

và giả sử $\alpha_1 \neq 0$ ta suy ra

$$v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} v_n.$$

Ví dụ 4.1. Xét các véc tơ hình học tự do trong không gian R^3. Khi đó hai véc tơ đồng phương, ba véc tơ đồng phẳng là phụ thuộc tuyến tính.

Thật vậy, từ $v_1 = kv_2$ ta suy ra $v_1 - kv_2 = 0$ với hệ số của v_1 là $1 \neq 0$. Từ ba véc tơ đồng phẳng thì $v_1 = kv_2 + lv_3$, suy ra $v_1 - kv_2 - lv_3 = 0$ với hệ số của v_1 là $1 \neq 0$. Hai véc tơ không đồng phương, ba véc tơ không đồng phẳng thì độc lập tuyến tính. Giả sử $kv_1 + lv_2 = 0$ ta suy ra $k = l = 0$. Thật vậy, nếu $k \neq 0$ thì ta có $v_1 = -\frac{l}{k} v_2$ tức là v_1, v_2 đồng phương, trái giả thiết. Nếu $l \neq 0$ thì ta có $v_2 = -\frac{k}{l} v_1$ tức là v_1, v_2 đồng phương, trái giả thiết.

2.2. Cơ sở của không gian véc tơ

Định nghĩa 4.4 *Một hệ các véc tơ $v_1, v_2, ..., v_n$ của không gian véc tơ V được gọi là một **cơ sở** của V nếu*

(i) Chúng độc lập tuyến tính.

(ii) Mọi véc tơ của V đều được biểu diễn bằng một tổ hợp tuyến tính của các véc tơ cơ sở $v_1, v_2, ..., v_n$.

Hệ các véc tơ $v_1, v_2, ..., v_n$ sao cho, với mọi $v \in V$ ta có

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$$

được gọi là *hệ các phần tử sinh* hay gọi tắt là *hệ sinh* của V.

Như vậy, một *cơ sở của không gian véc tơ V là một hệ sinh gồm các véc tơ độc lập tuyến tính của V.*

Các ví dụ.

1) Hai véc tơ không đồng phương lập thành một cơ sở trong mặt phẳng. Ba véc tơ không đồng phẳng lập thành một cơ sở trong không gian R^3.

2) Trong không gian các đa thức có bậc không vượt quá 2 các đa thức $1, t, t^2$ lập thành một cơ sở. Thật vậy, các đa thức $1, t, t^2$ là độc lập tuyến tính $\alpha.1 + \beta.t + \gamma.t^2 = 0$ (đa thức không) khi và chỉ khi $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Mọi đa thức có bậc không vượt quá 2 đều được biểu diễn tuyến tính qua $1, t, t^2$ hay $P(t) = a + bt + ct^2$.

3) Trong không gian véc tơ R^n n véc tơ $e_1, e_2, ..., e_n$, với

$$e_1 = (1, 0, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 0, 1)$$

lập thành một cơ sở.

Ta chứng tỏ các véc tơ $e_1, e_2, ..., e_n$ độc lập tuyến tính. Xét tổ hợp tuyến tính

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0.$$

Hơn nữa

$$\forall v \in V, v = (a_1, a_2, ..., a_n) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + ... + a_n e_n.$$

Cơ sở gồm các véc tơ

$$e_1 = (1, 0, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 0, 1)$$

được gọi là cơ sở chính tắc của không gian R^n.

Chú ý. Nếu $v_1, v_2, \ldots, v_n$ là một cơ sở của không gian véc tơ V thì mọi véc tơ của V được biểu diễn một cách duy nhất bằng một tổ hợp tuyến tính của $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Thật vậy, giả sử có hai cách biểu diễn của $v \in V$ theo cơ sở $v_1, v_2, \ldots, v_n$ là

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n ; v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n .$$

Từ đó

$$0 = v - v = (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + (\alpha_2 - \beta_2) v_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) v_n ,$$

do $v_1, v_2, \ldots, v_n$ độc lập tuyến tính ta suy ra

$$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \ldots = \alpha_n - \beta_n = 0 ,$$

tức là $\alpha_1 = \beta_1 ; \alpha_2 = \beta_2 ; \ldots ; \alpha_n = \beta_n$, hai cách biểu diễn đó trùng nhau.

Định nghĩa 4.5 *Nếu $v_1, v_2, \ldots, v_n$ là một cơ sở của không gian véc tơ V và $v \in V, v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$. Khi đó bộ n số $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ được gọi là các toạ độ của véc tơ v theo cơ sở $v_1, v_2, \ldots, v_n$.*

2.3. Số chiều của không gian véc tơ

Ta chú ý rằng nếu một không gian véc tơ V có một cơ sở gồm n véc tơ thì n là số lớn nhất các véc tơ độc lập tuyến tính có trong V. Ta có định lý sau:

Định lý 4.6 *Giả sử $v_1, v_2, \ldots, v_n$ là một hệ sinh của không gian véc tơ V và $v_1, v_2, \ldots, v_r$; $r \leq n$ là số lớn nhất các véc tơ độc lập tuyến tính của hệ. Khi đó hệ các véc tơ $v_1, v_2, \ldots, v_r$ lập thành một cơ sở của V.*

Chứng minh. Ta chỉ còn phải chứng minh $v_1, v_2, \ldots, v_r$ là một hệ sinh của V.

Thật vậy, do r là số lớn nhất các véc tơ độc lập tuyến tính của hệ nên nếu thêm một véc tơ $v_i, i > r$ vào hệ thì các véc tơ $v_1, v_2, \ldots, v_r, v_i$ sẽ phụ thuộc tuyến tính

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_r v_r + \alpha_i v_i = 0 \text{ , } \alpha_i \neq 0,$$

suy ra

$$v_i = \frac{\alpha_1}{-\alpha_i} v_1 + \frac{\alpha_2}{-\alpha_i} v_2 + \ldots + \frac{\alpha_r}{\alpha_i} v_r .$$

Do các véc tơ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ là một hệ sinh của không gian véc tơ V nên với mọi $v \in V$ ta có

$$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n .$$

Ta thay các $v_i, i > r$ theo biểu thức trên vào v rồi sát nhập các hệ số của $v_1, v_2, \ldots, v_r$ vào với nhau thì sẽ biểu diễn được mọi véc tơ của V bằng tổ hợp tuyến tính các véc tơ $v_1, v_2, \ldots, v_r$.

Do $v_1, v_2, \ldots, v_r$ là hệ sinh của V và chúng độc lập tuyến tính nên chúng lập thành một cơ sở của V.

Như vậy, một cơ sở của không gian véc tơ V là một hệ gồm số lớn nhất các véc tơ độc lập tuyến tính có trong V.

Định nghĩa 4.7 *Số lớn nhất các véc tơ độc lập tuyến tính của không gian véc tơ V được gọi là **số chiều** của không gian V.*

Như vậy số chiều của không gian V chính là số véc tơ trong cơ sở của V. Nếu số chiều của không gian V là n thì ta viết $\dim V = n$. Ta cũng nói V là không gian n chiều.

Nếu V là không gian n chiều thì mọi cơ sở của nó đều phải chứa n véc tơ độc lập tuyến tính. Các toạ độ của cùng một véc tơ trong các cơ sở khác nhau là khác nhau.

Ví dụ 4.2. Xét không gian các đa thức có bậc không vượt quá hai.

Thật vậy, nếu chọn cơ sở $B = \{1, t, t^2\}$ thì đa thức $P(t) = a + bt + ct^2$ có toạ độ là (a, b, c). Nếu chọn cơ sở $B' = \{1, t-1, t(t-1)\}$ thì $P(t)$ sẽ được biểu diễn bằng

$$a + bt + ct^2 = \alpha.1 + \beta(t-1) + \gamma t(t-1) = (\alpha - \beta) + (\beta - \gamma)t + \gamma t^2 .$$

Suy ra $\alpha - \beta = a; \beta - \gamma = b; \gamma = c$, nên

$$\alpha = a + b + c; \beta = b + c; \gamma = c.$$

Vậy toạ độ của $P(t)$ trong cơ sở B' là $(a+b+c, b+c, c)$.

Ta có thể viết

$$P(t) = a + b + c + (b+c)(t-1) + ct(t-1).$$

§3. KHÔNG GIAN VÉC TƠ CON

3.1. Định nghĩa

Định nghĩa 4.8 *Cho V là một không gian véc tơ với hai phép toán cộng véc tơ và nhân véc tơ với một số, V' là một tập con của V. Nếu với hai phép toán trên, V' cũng là một không gian véc tơ thì V' được gọi là một không gian con của V.*

Như vậy để chứng minh *V'* là không gian con của *V* ta phải chứng minh *V'* với hai phép toán cộng véc tơ và nhân véc tơ đã được xác định trong *V*, thỏa mãn 8 tiên đề của không gian véc tơ. Để giúp cho việc chứng minh *V'* là không gian con của *V* ta xét định lý sau :

Định lý 4.9 *Tập con V' khác rỗng của không gian véc tơ V là không gian con khi và chỉ khi thỏa mãn cả hai tính chất sau:*

(a) Với mọi $x, y \in V'$, *ta có* $x + y \in V'$.

(b) Với mọi $x \in V', \alpha \in R$, *ta có* $\alpha x \in V'$.

Chứng minh. Nếu *V'* là không gian con của *V*, thì V' cũng là không gian véc tơ, theo định nghĩa không gian véc tơ suy ra *V'* thỏa mãn các điều kiện (a), (b).

Ngược lại, tập *V'* khác rỗng, thỏa mãn các điều kiện (a), (b), ta sẽ chứng minh *V'* thỏa mãn 8 tiên đề còn lại của không gian véc tơ. Do *V'* thỏa mãn các điều kiện (a), (b), nên các tiên đề (i), (ii), (v), (vi), (vii), (viii) được thỏa mãn, ta cần chứng minh tiên đề (iii) và (iv) cũng được thỏa mãn.

Giả sử $x \in V'$, theo giả thiết (b), $\alpha x \in V'$ với mọi $\alpha \in R$. Cho $\alpha = 0$ ta có $0x = 0 \in V'$, vì $0 + 0x = 0x = (0+0)x = 0x + 0x$, suy ra $0 = 0x$. Cho $\alpha = -1$ ta có $(-1)x = -x \in V'$. Khi đó trong V' ta có $x + 0 = 0 + x = x$, và $(-x) + x = x + (-x) = (1 + (-1))x = 0$.

Vậy V' là một không gian véc tơ.

Định lý 4.10 *Tập con E khác rỗng của không gian véctơ V được gọi là không gian con khi và chỉ khi*

$$\alpha x + \beta y \in E, \text{ với mọi } x, y \in E, \text{ với mọi } \alpha, \beta \in R.$$

Chứng minh. Giả sử E là không gian con của không gian véctơ V, theo định nghĩa ta có $\alpha x \in E, \beta y \in E$, với mọi $x, y \in E$, với mọi $\alpha, \beta \in R$, suy ra

$$\alpha x + \beta y \in E.$$

Ngược lại, giả sử $\alpha x + \beta y \in E$, với mọi $x, y \in E$, với mọi $\alpha, \beta \in R$.

Chọn $\alpha = \beta = 1$, ta có $x + y \in E$, với mọi $x, y \in E$. (*)

Chọn $\alpha = 1, \beta = 0$, ta có $\alpha x \in E$, với mọi $x \in E, \alpha \in R$. (**)

Từ (*) và (**) suy ra E là không gian con của V.

3.2. Các ví dụ

1. Xét không gian hình học R^3. Tập hợp mọi véc tơ nằm trong mặt phẳng đi qua gốc toạ độ lập thành một không gian véc tơ con của R^3. Tập hợp mọi véc tơ nằm trên đường thẳng đi qua gốc toạ độ cũng là một không gian con của R^3.

2. Xét không gian véc tơ V. Giả sử $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ là các số. Tập hợp V' là tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

của các véc tơ trên lập thành một không gian con của V.

Thật vậy, tổng hai tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ cũng là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ đó, tích một số thực với một tổ hợp tuyến tính của các véc tơ đó cũng là một tổ hợp tuyến tính của chúng

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \in V', \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n \in V',$$

suy ra

$$(\alpha_1 + \beta_1) v_1 + (\alpha_2 + \beta_2) v_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_2) v_n \in V'.$$

Với mỗi số thữ *k, ta có*

$$k(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n) = k\alpha_1 v_1 + k\alpha_2 v_2 + \ldots + k\alpha_n v_n \in V'.$$

Vậy V' là một không gian con của V.

3. Trong R^3 cho tập $F = \{(x_1, x_2 x_3) \in R^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$. Chứng tỏ F là không gian con của R^3, tìm cơ sở và số chiều của F.

Thật vậy, ta có $(0,0,0) \in F$, suy ra $F \neq \Phi$.

$\forall x, y \in R^3, x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3), \forall \alpha, \beta \in R$, ta có

$\alpha x + \beta y = \alpha(x_1, x_2, x_3) + \beta(y_1, y_2, y_3) = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3)$

Do

$\alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2 + \alpha x_3 + \beta y_3 = \alpha(x_1 + x_2 + x_3) + \beta(y_1 + y_2 + y_3) = 0,$

suy ra $\alpha x + \beta y \in F$.

Vậy F là không gian con của R^3.

Mặt khác ta có

$$\forall x \in F, x = (x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

suy ra $x_1 = -x_2 - x_3$ và

$x = (-x_2 - x_3, x_2, x_3) = (-x_2, x_2, 0) + (-x_3, 0, x_3) = x_2(-1,1,0) + x_3(-1,0,1)$

do đó $E = \{(-1,1,0);(-1,0,1)\}$ là hệ sinh của F. Dễ thấy E độc lập tuyến tính. Vậy E là cơ sở của F và $\dim F = 2$.

3.3. Không gian con sinh bởi hệ véc tơ

Định nghĩa 4.11 *Không gian con V' các tổ hợp tuyến tính của $v_1, v_2, \ldots, v_n$ còn được gọi là không gian véc tơ sinh bởi các véc tơ $v_1, v_2, \ldots, v_n$, ký hiệu là span$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ hay $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$.*

Ta thừa nhận rằng nếu không gian V có số chiều là n thì mọi không gian con của V có số chiều là n' với $n' \leq n$.

Ví dụ 4.3. Trong $P_2[x]$ cho $F = < x^2 + x + 1, 2x^2 + 3x - 1, x^2 + 2x - 2 >$. Tìm cơ sở và số chiều của không gian con F.

Thật vậy, ta có

$$x^2 + x + 1 = (1,1,1), 2x^2 + 3x - 1 = (2,3,-1), x^2 + 2x - 2 = (1,2,-2),$$

suy ra

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_3 - h_1]{h_2 - 2h_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_3 - h_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy cơ sở của F là $\{x^2 + x + 1, 2x^2 + 3x - 1\}$ và $\dim F = 2$.

BÀI TẬP CHƯƠNG 4

4.1 Chứng tỏ rằng với mọi véc tơ v trong không gian véc tơ V và với số thực k tùy ý nếu $kv = 0$ thì hoặc $k = 0$ hoặc $v = 0$.

4.2 Chứng minh hai tính chất sau của không gian véc tơ V:

a. Với $u, v, w \in V$ thì từ $u + w = v + w$ ta suy ra $u = v$.

b. Với $u, v \in V$ và k là số thực khác không thì từ $ku = kv$ ta suy ra $u = v$.

4.3 Cho a, b, c là ba số thực tùy ý. Xét tập V mọi bộ có thứ tự ba số thực (x, y, z) sao cho

$$ax + by + cz = 0.$$

Chứng tỏ rằng V là một không gian véc tơ trên trường số thực.

4.4 Tập hợp mọi đa thức bậc n có lập thành một không gian véc tơ không? Giải thích tại sao?

4.5 Tìm x để các véc tơ $(x,a,a),(a,x,b),(b,b,x)$ thuộc không gian R^3 là phụ thuộc tuyến tính.

4.6 Chứng minh rằng các véc tơ:

$$V_1=(0,1,2,3), V_2=(1,2,3,4), V_3=(2,3,4,0), \quad V_4=(3,4,0,1)$$

thuộc không gian R^4 là độc lập tuyến tính.

4.7 Cho các véc tơ $v_1=(1,1)$ và $v_2=(-3,2)$. Chứng tỏ rằng chúng độc lập tuyến tính và lập thành một cơ sở của R^2. Tìm tọa độ của véc tơ $v=(1,0)$ theo cơ sở đó.

4.8 Chứng minh rằng trong không gian R^3:

a. Các véc tơ $v_1=(2,1,1), v_2=(1,3,1), v_3=(-2,1,3)$ độc lập tuyến tính.

b. Các véc tơ $v_1=(1,0,3), v_2=(0,1,2), v_3=(2,-3,0)$ phụ thuộc tuyến tính.

4.9 Chứng minh rằng các véc tơ:

$$v_1=(0,1,1,1), v_2=(1,0,1,1), v_3=(1,1,0,1), \quad v_4=(1,1,1,0)$$

lập thành một cơ sở của không gian R^4. Tìm các tọa độ của véc tơ $v=(1,1,1,1)$ theo cơ sở đó.

4.10 Trong không gian P các đa thức có bậc không vượt quá 4 ta xét các đa thức có nghiệm là $x=a, x=b$ với $a \neq b$. Chứng tỏ rằng tập hợp đó là một không gian con của không gian P. Tìm một cơ sở của không gian đó.

4.11 Trong không gian F các hàm số một biến số thực t hãy chứng tỏ rằng các hàm số $t, \sin t, e^t$ là độc lập tuyến tính. Chứng tỏ rằng mọi hàm số có dạng $f(t)=at+b\sin t+ce^t$, $a,b,c \in R$ lập thành một không gian con của không gian F.

4.12 Chứng minh rằng hai số phức $a+bi$, $c+di$ tạo thành một cơ sở của không gian véc tơ C các số phức khi và chỉ khi $ad \neq bc$.

4.13 Chứng minh rằng tập hợp M các ma trận vuông cấp hai với các phần tử là số thực $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ là một không gian con của không gian các ma trận vuông cấp hai. Tìm một cơ sở và số chiều của không gian con đó.

4.14 Trong R^3 cho tập $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$

1. Chứng tỏ F là không gian con của R^3.
2. Tìm cơ sở và số chiều của F.

4.15 Cho tập $F = \{p(x) \in P_2[x] : p(1) = 0, p(2) = 0\}$

1. Chứng tỏ F là không gian con của $P_2[x]$.
2. Tìm cơ sở và số chiều của F.

4.16 Cho tập $F = \left\{ A \in M_2[R] : A\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = 0 \right\}$

1. Chứng tỏ F là không gian con $M_2[R]$.
2. Tìm cơ sở và số chiều của F.

4.17 Cho tập $F = \left\{ \begin{bmatrix} a+b & a-2b \\ b & 2a \end{bmatrix} : a, b \in R \right\}$.

1. Chứng tỏ F là không gian con $M_2[R]$.
2. Tìm cơ sở và số chiều của F.

4. 18 a. Hãy xác định tập hợp các véctơ sau đây độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính trong $M_2[R]$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

b. Trong $P_2[x]$ cho $F = < x^2 + x + 1, 2x^2 + 3x - 1, x^2 + 2x - 2 >$.

Tìm cơ sở và số chiều của không gian con F.

4.19 a. Hãy xác định tập hợp các véctơ $M=\{x^2+x+1, 2x^2+3x+2, 2x+1\}$

độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính trong $P_2[x]$.

b. Trong R^3 cho $F=<(1;1;1),(2;1;1),(3;1;1)>$.

Tìm cơ sở và số chiều của không gian con F.

4.20 a. Chứng minh rằng các véc tơ $e_1=1; e_2=(1-x); e_3=(1-x)^2$ lập thành một cơ sở của $P_2[x]$.

b. Trong $M_2[R]$ cho

$$F=\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Tìm cơ sở và số chiều của không gian con F.

4.21 a. Trong R^3 cho $x=(1;-2;3)$ và $M=\{(1;1;1),(2;1;0),(3;-1;3)\}$.

Hỏi x có thuộc không gian con sinh bởi M?

b. Chứng minh hệ véc tơ

$$E=\left\{ e_1=1, e_2=x+1, e_3=(x+1)^2 \right\}$$

lập thành một cơ sở của $P_2[x]$.

4.22 Trong R^4 cho tập

$$F=\left\{ (x_1,x_2,x_3,x_4)\in R^4 \,\middle|\, \begin{matrix} x_1-x_3-x_4=0 \\ x_2-x_3+x_4=0 \end{matrix} \right\}$$

a. Chứng tỏ F là không gian con của R^4.

b. Tìm cơ sở và số chiều của F.

4.23 Cho không gian véc tơ E; F; G là hai không gian con của E. Ta gọi H là tập hợp các $z\in E$ sao cho $z=x+y$ với $x\in F, y\in G$.

1) Chứng minh H là một không gian véc tơ con của E.

2) Chứng minh rằng để $F \cap G = \{0\}$ thì cần và đủ là z được biểu diễn một cách duy nhất bởi $z = x + y,\ x \in F, y \in G$. Từ đó suy ra rằng mọi hàm số một biến số thực xác định trên $[-a, a]$ có thể được phân tích một cách duy nhất thành tổng hai hàm, một hàm chẵn và một hàm lẻ.

4.24 Xét không gian E các dãy số thực.

1) Chứng minh rằng các dãy số $\{u_n\}$ thỏa mãn hệ thức truy hồi $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2}$ lập thành một không gian con F của không gian E.

2) Chứng minh rằng các dãy số có từ tổng quát $a_n = (-1)^n, b_n = 2^n$ lập thành một cơ sở của F.

3) Tìm dãy số $\{u_n\}$ thỏa mãn hệ thức truy hồi trên và $u_1 = u_2 = 1$.

Chương 5

ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH - DẠNG TOÀN PHƯƠNG

§1. ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

1.1. Định nghĩa

Định ngĩa 5.1 *Cho E, F là hai không gian véc tơ trên cùng một trường K. Một ánh xạ f từ E vào F được gọi là tuyến tính nếu nó thoả mãn hai điều kiện sau:*

(i) *Với mọi* $u,v \in E$ *ta có* $f(u+v) = f(u)+f(v)$.

(ii) *Với mọi* $\alpha \in K$, *với mọi* $u \in E$ *ta có* $f(\alpha u) = \alpha f(u)$.

Từ (i) ta suy ra, với $0 \in E$ ta có $f(0)=0$, $(0 \in F)$. Thật vậy,

$$f(u) = f(u+0) = f(u)+f(0), \text{ suy ra } f(0)=0.$$

Gộp hai điều kiện (i), (ii) ta có điều kiện tương đương với định nghĩa 5.1 như sau: *Ánh xạ* $f: E \to F$ *là tuyến tính khi và chỉ khi*

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2),$$

với mọi $v_1, v_2 \in V, \alpha_1, \alpha_2 \in K$.

Tổng quát hơn, ta có, với mọi $v_i \in V, \alpha_i \in K, i=1,2,\ldots,n$, *ta có*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \cdots + \alpha_n f(v_n).$$

Điều kiện trên nói lên rằng ánh xạ tuyến tính *bảo toàn tổ hợp tuyến tính của các véc tơ.*

Ví dụ 5.1. 1) Cho ánh xạ $f: R^2 \to R$ xác định bởi

$$f(x,y) = 3x - 2y;\ \forall (x,y) \in R^2.$$

Chứng tỏ rằng ánh xạ f là tuyến tính. Thật vậy, với mọi

$$u=(a,b) \in R^2, v=(c,d) \in R^2, \alpha \in R,$$

ta có

$$f(u+v)=f(a+c,b+d)=3(a+c)-2(b+d)=f(u)+f(v),$$

$$f(\alpha u)=f(\alpha a,\alpha b)=3\alpha a-2\alpha b=\alpha f(u)+f(v).$$

Cả hai điều kiện (i), (ii) đều thoả mãn, vậy ánh xạ f là tuyến tính.

2) Xét không gian P các đa thức có bậc không vượt quá n. Cho ánh xạ $f:P\to P$ xác định bởi $f(v)=v'$ (đạo hàm của v), với $v\in P$. Ta thấy rằng ánh xạ f là tuyến tính. Thật vậy, với mọi $u,v\in P,\alpha\in R$, ta có

$$f(u+v)=(u+v)'=u'+v'=f(u)+f(v),$$

$$f(\alpha u)=(\alpha u)'=\alpha u'=\alpha f(u).$$

Cả hai điều kiện (i), (ii) đều thoả mãn.

1.2. Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

Cho E và F là hai không gian véc tơ trên một trường K, f là một ánh xạ tuyến tính từ E vào F.

Định nghĩa 5.2 *Ta gọi **nhân** của ánh xạ f là tập hợp các véc tơ v của E sao cho $f(v)=0$. Ký hiệu nhân của f là* $\ker f$. Vậy

$$\ker f=\{v\in E: f(v)=0\}.$$

Tập hợp $\ker f$ là một không gian con của E. Thật vậy, tập $\ker f$ khác rỗng vì ít nhất nó cũng chứa phần tử không $f(0)=0$, hơn nữa ta có nếu $u,v\in\ker f$, thì $f(u)=0, f(v)=0$, mà f là tuyến tính nên

$$f(u+v)=f(u)+f(v)=0,$$

từ đó suy ra $u+v\in\ker f$. Mặt khác ta lại có

$$f(\alpha u)=\alpha f(u)=0,$$

nên $\alpha u\in\ker f$.

Ví dụ 5.2. Xét không gian V các véc tơ hình học. Cho trước một véc tơ $u\in V$, với mỗi một véc tơ $v\in V$, xét ánh xạ $f:V\to R$ xác định bởi

$f(v) = u.v$ (tích vô hướng của hai véc tơ u và v). Chứng tỏ rằng f là ánh xạ tuyến tính và tìm $\ker f$.

Theo tính chất của tích vô hướng ta có

$$f(v_1 + v_2) = u(v_1 + v_2) = uv_1 + uv_2 = f(v_1) + f(v_2),$$
$$f(\alpha v) = u(\alpha v) = \alpha(uv) = \alpha f(v),$$

nên f là ánh xạ tuyến tính. Bây giờ ta đi tìm nhân của ánh xạ f. Ta có $f(v) = 0$ hay $uv = 0$ các véc tơ phải vuông góc với véc tơ u đã cho. Vậy $\ker f$ là tập hợp mọi véc tơ vuông góc với véc tơ u đã cho.

Định lý 5.3 *Ánh xạ tuyến tính f là đơn ánh khi và chỉ khi nhân của f chỉ chứa phần tử không. f đơn ánh khi và chỉ khi* $\ker f = \{0\}$.

Chứng minh. Với $v \neq 0$, ta có $f(v) \neq f(0)$ nhưng $f(0) = 0$; tức là, với mọi phần tử $v \neq 0$ thì $f(v) \neq 0$, suy ra $v \notin \ker f$, $\ker f$ chỉ chứa phần tử không.

Đảo lại, giả sử $\ker f = \{0\}$. Gọi u và v là các phần tử của E sao cho $f(u) = f(v)$. Ta phải chứng minh f là đơn ánh, tức là chứng minh $u = v$. Thật vậy, do ánh xạ f là tuyến tính nên

$$f(u - v) = f(u) - f(v) = 0.$$

Suy ra $u - v \in \ker f$. Vì $\ker f = \{0\}$, nên $u - v = 0$ hay $u = v$.

Vậy f là đơn ánh.

Định lý 5.4 *Giả sử f là một ánh xạ tuyến tính từ E vào F, nhân của f chỉ chứa phần tử không. Khi đó, nếu $v_1, v_2, ..., v_n$ là các véc tơ độc lập tuyến tính của E thì $f(v_1), f(v_2), ..., f(v_n)$ cũng độc lập tuyến tính trong F.*

Chứng minh. Giả sử $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ là các số sao cho

$$\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + ... + \alpha_n f(v_n) = 0.$$

Ta phải chứng minh $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. Do tính tuyến tính của f nên $f(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) = 0$. Từ định nghĩa nhân của f suy ra

$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \in \ker f$. Theo giả thiết $\ker f = \{0\}$ nên $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$. Vì $v_1, v_2, \ldots, v_n$ độc lập tuyến tính nên từ hệ thức trên ta suy ra

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Vậy $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ độc lập tuyến tính trong F.

Định nghĩa 5.5 *Ảnh của một ánh xạ tuyến tính f là tập hợp các véc tơ $w \in F$ sao cho tồn tại phần tử $v \in E$ để $f(v) = w$.* Ký hiệu ảnh của f là $\operatorname{Im} f$ và

$$\operatorname{Im} f = \{w, w \in F : \exists v \in E, f(v) = w\}.$$

Ta có tập $\operatorname{Im} f$ *là một không gian con của* F. Thật vậy, tập $\operatorname{Im} f$ không rỗng, nó chứa phần tử không ($f(0) = 0$). Nếu $w_1, w_2 \in \operatorname{Im} f$ thì tồn tại $v_1, v_2 \in \ker f$ sao cho $f(v_1) = w_1, f(v_2) = w_2$ mà

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = w_1 + w_2,$$

nên $w_1 + w_2 \in \operatorname{Im} f$. Nếu $w \in \operatorname{Im} f$ thì có $v \in E, f(v) = w$. Suy ra

$$f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha w.$$

Vậy $\alpha w \in \operatorname{Im} f$.

Định lý 5.6 (nhân - ảnh) *Giả sử f là ánh xạ tuyến tính từ không gian véc tơ E vào không gian véc tơ F. Nếu số chiều của E là n, số chiều của nhân f là q và số chiều của ảnh f là s thì ta có: $n = q + s$. Nói cách khác*

$$\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f.$$

Chứng minh. Giả sử $w_1, w_2, \ldots, w_s$ là một cơ sở của $\operatorname{Im} f$. Khi đó tồn tại các véc tơ $v_1, v_2, \ldots, v_s \in E$ sao cho $f(v_i) = w_i, i = 1, 2, \ldots, s$. Gọi $u_1, u_2, \ldots, u_q$ là một cơ sở của $\ker f$. Ta sẽ chứng tỏ hệ véc tơ: $v_1, v_2, \ldots, v_s, u_1, u_2, \ldots, u_q$ lập thành một cơ sở của E.

Với $v \in E$ thì $f(v) \in \operatorname{Im} f$ và biểu diễn $f(v)$ theo cơ sở $w_1, w_2, \ldots, w_s$ của $\operatorname{Im} f$ là

$$f(v)=x_1w_1+x_2w_2+...+x_sw_s=x_1f(v_1)+x_2f(v_2)+...+x_sf(v_s)$$
$$=f(x_1v_1+x_2v_2+...+x_sv_s).$$

do $f(v-x_1v_1-x_2v_2-...-x_sv_s)=0$, suy ra:

$$v-x_1v_1-x_2v_2-...-x_sv_s\in\ker f.$$

Ta biểu diễn phần tử đó của $\ker f$ theo cơ sở $u_1,u_2,...,u_q$ của $\ker f$

$$v-x_1v_1-x_2v_2-\cdots-x_sv_s=y_1u_1+y_2u_2+\cdots+y_qu_q,$$

hay

$$v=x_1v_1+x_2v_2+\cdots+x_sv_s+y_1u_1+y_2u_2+\cdots+y_qu_q.$$

Hệ các véc tơ $v_1,v_2,...,v_s,u_1,u_2,...,u_q$ là một hệ các phần tử sinh của E.

Để chứng minh chúng lập thành một cơ sở của E ta chỉ còn phải chứng minh chúng độc lập tuyến tính. Xét tổ hợp tuyến tính

$$\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+...+\alpha_sv_s+\beta_1u_1+\beta_2u_2+...+\beta_qu_q=0. \tag{*}$$

Tác động ánh xạ f vào (*) và do tính tuyến tính của f nên

$$\alpha_1f(v_1)+\alpha_2f(v_2)+...+\alpha_sf(v_s)+\beta_1f(u_1)+\beta_2f(u_2)+...+\beta_qf(u_q)=0.$$

Vì $u_1,u_2,...,u_q\in\ker f$, suy ra $f(u_1)=f(u_2)=...=f(u_q)=0$, ta có

$$\alpha_1f(v_1)+...+\alpha_sf(v_s)=0.$$

Thay $w_i=f(v_i)$ vào hệ thức trên ta được $\alpha_1w_1+...+\alpha_sw_s=0$. Vì $w_1,w_2,....,w_s$ là cơ sở nên chúng độc lập tuyến tính, do đó suy ra

$$\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_s=0. \tag{**}$$

Thay vào (*) ta được

$$\beta_1u_1+\beta_2u_2+...+\beta_qu_q=0.$$

Vì $u_1,u_2,...,u_q$ là cơ sở nên chúng độc lập tuyến tính, từ hệ thức trên suy ra

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_q = 0. \qquad (***)$$

Từ (**), (***) , (*) chứng tỏ các véc tơ $v_1, v_2, \ldots, v_s, u_1, u_2, \ldots, u_q$ lập thành một cơ sở của E. Điều đó chứng tỏ

$$\dim E = s + q = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f.$$

Định lý đã được chứng minh.

1.3. Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Cho ma trận A loại $(m \times n)$ có dạng

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (4.1)$$

Xét các không gian véc tơ R^n , R^m. Ta biểu diễn các véc tơ của không gian đó bằng các véc tơ cột. Với mọi $v \in R^n$ xác định ánh xạ

$$f : R^n \to R^m : f(v) = Av$$

(khi nhân một ma trận loại $(m \times n)$ với ma trận cột loại $(n \times 1)$ (đó là một phần tử của R^n), ta được một ma trận cột loại $(m \times 1)$ (đó là một phần tử của R^m)).

Bằng phép tính ma trận ta thấy rằng ánh xạ f là tuyến tính: Thật vậy, với $u, v \in R^n$, ta có

$$f(u+v) = A(u+v) = Au + Av = f(u) + f(v).$$

Với số α ta có

$$f(\alpha u) = A(\alpha u) = \alpha Au = \alpha f(u).$$

Gọi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các toạ độ của véc tơ v trong R^n và $y_1, y_2, \ldots, y_m$ là toạ độ của véc tơ $f(v)$ trong R^m theo các cơ sở đã chọn trước trong các không gian đó ta có thể viết biểu thức $f(v) = Av$ dưới dạng ma trận

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Như vậy, cho một ma trận A loại $(m \times n)$ ta có thể xác định được một ánh xạ tuyến tính từ một không gian $m-$ chiều vào một không gian $n-$ chiều, ánh xạ đó được xác định bởi $f(v) = Av$, với v là véc tơ cột thuộc R^n. Ma trận A được gọi là *ma trận của ánh xạ tuyến tính f trong các cơ sở đã chọn của R^n và R^m*.

Ngược lại, cho một ánh xạ tuyến tính $f: R^n \to R^m$ thì ta có thể tìm được ma trận của ánh xạ đó trong các cơ sở đã chọn của R^n *và* R^m. Thật vậy, giả sử $(e_1, e_2, ..., e_n)$ là một cơ sở của R^n và $(f_1, f_2, ..., f_m)$ là một cơ sở của R^m. Với $v \in R^n$ ta có

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n.$$

Do f là ánh xạ tuyến tính nên

$$f(v) = f(x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + ... + x_nf(e_n) \qquad (*)$$

Vì $f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)$ là các véc tơ thuộc R^m nên ta có thể biểu diễn chúng theo cơ sở $(f_1, f_2, ..., f_m)$:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + ... + a_{m1}f_m, \\ f(e_2) &= a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + ... + a_{m2}f_m, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(e_n) &= a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + ... + a_{mn}f_m. \end{aligned}$$

Thay các giá trị vừa nhận được vào vế phải của (*) ta được:

$$\begin{aligned} f(v) = {} & (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n)f_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n)f_2 + \\ & + ... + (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n)f_m. \end{aligned} \qquad (**)$$

Mặt khác vì $f(v) \in R^m$ nên

$$f(v) = y_1 f_1 + y_2 f_2 + \ldots + y_m f_m. \qquad (***)$$

Do $f(v)$ được biểu diễn một cách duy nhất qua cơ sở $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$, nên từ (**), (***) ta suy ra

$$\begin{aligned}
y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n,\\
y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n.
\end{aligned}$$

Có thể viết kết qủa trên dưới dạng ma trận sau:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ hay } Y = A.X.$$

Ta đã xác định được ma trận của ánh xạ đó.

Như vậy, nếu f là ánh xạ tuyến tính từ R^n vào R^m và $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ lần lượt là các cơ sở đã cho của R^n và R^m thì ma trận của ánh xạ f là một ma trận loại $(m \times n)$ có các phần tử nằm trên cột thứ j là các toạ độ của véc tơ $f(e_j)$ tính theo cơ sở đã cho của R^m.

Ví dụ 5.3. Gọi P_n là không gian các đa thức có bậc không vượt quá n. Xét ánh xạ f từ P_3 vào P_2 xác định bởi $f(v) = v'$ với $v \in P_3$ và v' là đạo hàm của v.

Như ta đã biết ánh xạ đó là tuyến tính. Ta tìm ma trận của nó trong các cơ sở $x^3, x^2, x, 1$ của P_3 và cơ sở $x^2, x, 1$ của P_2. Ta có

$$\begin{aligned}
f(x^3) &= (x^3)' = 3x^2 = (3,0,0),\\
f(x^2) &= (x^2)' = 2x = (0,2,0),\\
f(x) &= (x)' = 1 = (0,0,1),\\
f(1) &= (1)' = (0,0,0).
\end{aligned}$$

Vậy ma trận của ánh xạ này là

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.4 Ma trận chuyển cơ sở

Giả sử $B = \{e_1, ..., e_n\}$ và $B' = \{e'_1, ..., e'_n\}$ là hai cơ sở trong cùng một không gian véc tơ E có số chiều là n.

Ta biểu diễn các véc tơ $e'_1, ..., e'_n$ theo các véc tơ của cơ sở B:

$$\begin{aligned} e'_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + ... + a_{n1}e_n, \\ e'_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + ... + a_{n2}e_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e'_n &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + ... + a_{nn}e_n. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Định nghĩa 5.7 *Ma trận*

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

mà cột thứ j là các toạ độ của véc tơ e'_j theo cơ sở B được gọi là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở B sang cơ sở B'.

Giả sử $v \in E$. Gọi $x_1, x_2, ..., x_n$ là các toạ độ của véc tơ v theo cơ sở B và $x'_1, x'_2, ..., x'_n$ là các toạ độ của nó theo cơ sở B'. Ta cần tìm công thức liên hệ giữa hai toạ độ đó.

$$v = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x'_j a_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j e_i. \tag{4.3}$$

Mặt khác, biểu diễn v theo cơ sở B ta có

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i. \tag{4.4}$$

So sánh (4.3) và (4.4) ta được $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j; \quad i = 1,2,\dots,n$.

Đặt

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

và P là ma trận chuyển ở trên ta có

$$X = P.X'. \tag{4.5}$$

Chú ý rằng ở trên ta đã chuyển từ cơ sở B sang cơ sở B'. Khi đó ma trận chuyển là P và ta có công thức (4.4). Ta cũng có thể chuyển từ cơ sở B' sang cơ sở B. Như vậy ma trận P phải là ma trận khả nghịch và ta có: $X' = P^{-1}X$. Vậy ma trận chuyển từ cơ sở B' sang cơ sở B là ma trận nghịch đảo P^{-1}.

Ví dụ 5.4. 1) Xét hệ toạ độ trực chuẩn Oxy trong mặt phẳng. Quay hệ trục này một góc α ta được hệ trục $Ox'y'$. Lập công thức chuyển toạ độ từ hệ Oxy sang hệ $Ox'y'$.

Gọi e_1, e_2 là các véc tơ đơn vị trên các trục số Ox, Oy; e'_1, e'_2 là các véc tơ đơn vị trên các trục số Ox', Oy', ta có

$$e'_1 = e_1 \cos\alpha + e_2 \sin\alpha$$

$$e'_2 = e_1 \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) + e_2 \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -e_1 \cos\alpha + e_2 \sin\alpha.$$

Vậy ma trận chuyển từ hệ Oxy sang $Ox'y'$ là

$$P = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Từ $X = PX'$ với

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

suy ra

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha; \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{aligned}$$

2) Cho không gian R^4 với cơ sở chính tắc

$$e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0), e_3 = (0,0,1,0), e_4 = (0,0,0,1).$$

Xét một cơ sở mới

$$e_1' = (0,1,1,1), e_2' = (1,0,1,1), e_3' = (1,1,0,1), e_4' = (1,1,1,0).$$

Lập công thức chuyển từ các toạ độ chính tắc x_1, x_2, x_3, x_4 của một véc tơ $v \in R^4$ sang các toạ độ x_1', x_2', x_3', x_4' của véc tơ đó theo cơ sở mới. Ma trận chuyển cơ sở là ma trận có các cột là các toạ độ của các véc tơ e_1', e', e_3', e_4' theo cơ sở chính tắc. Ta có

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} x_1 &= \phantom{x_1' +{}} x_2' + x_3' + x_4', \\ x_2 &= x_1' \phantom{{}+ x_2'} + x_3' + x_4', \\ x_3 &= x_1' + x_2' \phantom{{}+ x_3'} + x_4', \\ x_4 &= x_1' + x_2' + x_3'. \end{aligned}$$

1.5 Ma trận của ánh xạ tuyến tính khi chuyển cơ sở

Cho ánh xạ tuyến tính $f : E \to E$, A là ma trận của ánh xạ f đối với cơ sở B của E. P là ma trận chuyển từ cơ sở $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ sang cơ sở $B' = \{e'_1, ..., e'_n\}$. Khi đó ma trận của ánh xạ f trong cơ sở B' sẽ là A'. Ta tìm mối liên hệ giữa A , A'.

Dạng ma trận của ánh xạ f đối với cơ sở B là: $Y = AX$ đối với cơ sở B' là

$$Y' = A'X'. \tag{4.6}$$

Vì P là ma trận chuyển từ cơ sở B sang cơ sở B' nên

$$X = PX', Y = PY'.$$

Từ đó ta có

$$PY' = Y = AX = APX',$$

suy ra

$$Y' = P^{-1}PY' = P^{-1}APX'.$$

So sánh với (4.6) ta được

$$A' = P^{-1}AP.$$

Ta có kết quả sau:

Định lý 5.8 *Nếu A và A' là hai ma trận của một ánh xạ tuyến tính f từ không gian E vào chính nó đối với hai cơ sở B và B', và nếu P là ma trận chuyển từ cơ sở B sang cơ sở B' thì $A' = P^{-1}AP$.*

Định nghĩa 5.9 *Hai ma trận A và A' sao cho có một ma trận khả nghịch P thoả mãn hệ thức $A' = P^{-1}AP$ được gọi là hai* ***ma trận đồng dạng****.*

Như vậy, các ma trận của cùng một ánh xạ tuyến tính f từ E vào chính nó trong các cơ sở khác nhau thì đồng dạng với nhau.

Ví dụ 5.5. Xét ánh xạ tuyến tính từ R^3 vào chính nó được cho bởi ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

đối với cơ sở chính tắc trong R^3 là $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. Phép chuyển sang cơ sở mới B' được cho bởi

$$e_1' = e_1 + 2e_2 + e_3,$$

$$e_2' = 2e_1 + e_2 + 3e_3,$$
$$e_3' = e_1 + e_2 + e_3.$$

Tìm ma trận A' của ánh xạ theo cơ sở mới và cho biểu diễn của ánh xạ đó theo toạ độ trong B'. Ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở B' là

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ suy ra } P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Vậy

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Biểu thức của ánh xạ tuyến tính trong cơ sở B' là $Y' = AX'$ hay

$$\begin{cases} y_1' = x_1' + 3x_2', \\ y_2' = x_2', \\ y_3' = 4x_1' - 2x_2' + 2x_3'. \end{cases}$$

Chú ý. Ánh xạ tuyến tính từ không gian véc tơ E vào chính nó còn được gọi là phép biến đổi tuyến tính. Một số phép biến hình mà chúng ta đã được học ở chương trình trung học như phép quay một điểm xung quanh gốc O một góc α, phép vị tự tâm O tỷ số k, phép đối xứng qua một trục toạ độ,...đều là các phép biến đổi tuyến tính. Chẳng hạn, các ma trận của phép quay một điểm xung quang gốc O một góc α và của phép đối xứng qua trục Oy lần lượt là

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

§2. GIÁ TRỊ RIÊNG VÀ VÉC TƠ RIÊNG

2.1. Định nghĩa

Giả sử f là một ánh xạ tuyến tính từ không gian véc tơ E vào chính nó (phép biến đổi tuyến tính). *Tìm các véc tơ $v \in E$ sao cho $f(v)$ tỷ lệ với* v, tức là tìm v sao cho có số λ để

$$f(v) = \lambda v.$$

Do f là một ánh xạ tuyến tính nên $f(v) = 0$, vì vậy ta chỉ đi tìm các véc tơ khác không.

Định nghĩa 5.10 *Một véc tơ khác không $v \in E$ được gọi là* ***véc tơ riêng*** *của ánh xạ f từ không gian E vào chính nó nếu tồn tại số λ (thực hoặc phức) sao cho*

$$f(v) = \lambda v.$$

Số λ được gọi là ***giá trị riêng*** *liên kết với véc tơ riêng v.*

Ví dụ 5.6. Xét phép biến đổi tuyến tính trong R^2 xác định bởi

$$f(x_1, x_2) = (x_2, x_1).$$

Ta có $f(1,1) = (1,1) = 1(1,1)$ nên số 1 là giá trị riêng ứng với véc tơ riêng $v_1 = (1,1)$. Mặt khác $f(1,-1) = (-1,1) = -1(1,-1)$ nên số -1 là một giá trị riêng ứng với véc tơ riêng $v_2 = (1,-1)$.

Chú ý rằng phép biến đổi tuyến tính $f(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ nói trên chính là phép đối xứng qua đường phân giác $y = x$. Những véc tơ nằm trên trục đối xứng sẽ có ảnh là chính nó, các véc tơ vuông góc với trục đối xứng sẽ có ảnh là các véc tơ đối của nó.

Nhận xét:

(i) *Giá trị riêng λ ứng với véc tơ riêng v là duy nhất.* Thật vậy, nếu véc tơ riêng v có hai giá trị riêng là λ, η thì $f(v)=\lambda v$, $f(v)=\eta v$, suy ra $\lambda v=\eta v$ hay $(\lambda-\eta)v=0$, do $v\neq 0$ nên $\lambda=\eta$.

(ii) *Trái lại, một giá trị riêng có thể liên kết với nhiều véc tơ riêng.* Thật vậy, nếu λ là một giá trị riêng liên kết với véc tơ v thì $f(v)=\lambda v$. Giả sử k là một số khác không, do ánh xạ f là tuyến tính ta có

$$f(kv)=kf(v)=k(\lambda v)=\lambda(kv),$$

điều đó chứng tỏ kv cũng là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ

2.2. Đa thức đặc trưng

Cho phép biến đổi tuyến tính $f:E\to E$. Giả sử A là ma trận của phép biến đổi đó theo cơ sở $e_1,e_2,\dots,e_n$. Ta ký hiệu véc tơ riêng $v\in E$ dưới dạng ma trận cột X thì dạng ma trận của biểu thức $f(v)=\lambda v$ sẽ là:

$$AX=\lambda X \text{ hay } (A-\lambda I)X=0, \tag{4.6}$$

trong đó I là ma trận đơn vị cùng cấp với ma trận A. Ta được một hệ n phương trình tuyến tính thuần nhất. Theo quy tắc Cramer, nếu

$$\det(A-\lambda I)\neq 0$$

thì hệ có nghiệm tầm thường duy nhất $X=0$. Vậy để hệ (12) có nghiệm khác không thì cần và đủ là

$$\det(A-\lambda I)=0.$$

Các giá trị riêng λ của ma trận A hay của ánh xạ f là các nghiệm của phương trình

$$\det(A-\lambda I)=0. \tag{4.7}$$

Định nghĩa 5.11 *Định thức* $\det(A-\lambda I)$ *là một đa thức bậc* n *đối với* λ. *Ta gọi nó là* ***đa thức đặc trưng*** *của ma trận* A; *phương trình (4.7) là* ***phương trình đặc trưng*** *của* A *(hay của ánh xạ* f *).*

Ví dụ 5.7. 1) Cho ánh xạ tuyến tính $f: R^2 \to R^2$ có ma trận

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hãy tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của nó.

Ta có phương trình đặc trưng

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(6-\lambda)(3-\lambda)-4=\lambda^2-9\lambda+14=0$$

Giải phương trình bậc hai đối với λ ta được $\lambda_1=2, \lambda_2=7$.

Để tìm véc tơ riêng liên kết với giá trị riêng $\lambda_1=2$ ta giải hệ thuần nhất (4.6), ta được

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2 & =0 \\ 2x_1+x_2 & =0 \end{cases}, \text{ suy ra } x_2=-2x_1,$$

chọn $x_1=1$ khi đó $x_2=-2$. Véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_1=2$ là $v_1=(1,-2)$.

Để tìm véc tơ riêng ứng với trị riêng $\lambda_2=7$, tương tự như trên ta giải hệ phương trình

$$\begin{cases} -x_1+2x_2 & =0 \\ 2x_1-4x_2 & =0 \end{cases}, \text{ suy ra } x_1=2x_2,$$

cho $x_2=1$ suy ra $x_1=2$. Véc tơ riêng ứng với $\lambda_2=7$ là $v_2=(2,1)$.

2) Tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của ma trận

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Phương trình đặc trưng

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)\left[(2-\lambda)^2-1\right]=(1-\lambda)^2(3-\lambda)=0$$

có nghiệm kép $\lambda_{1,2}=1$ và nghiệm đơn $\lambda_3=3$.

Xét phương trình $(A-\lambda I)X=0$:

- Với $\lambda_{1,2}=1$ ta có $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ -x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$ hay $x_2=x_1+x_3$, suy ra

$$X=(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_1+x_3,x_3)=(x_1,x_1,0)+(0,x_3,x_3)=x_1(1,1,0)+x_3(0,1,1),$$

các véctơ riêng ứng với $\lambda_{1,2}=1$ là $v_1=(1,1,0),v_2=(0,1,1)$.

- Với $\lambda_3=3$ ta có

$$\begin{cases} -x_1-x_2+x_3 &= 0 \\ -x_1-x_2-x_3 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x_1=-x_2, \\ x_3=0, \end{cases}$$

chọn $x_1=1$, suy ra $x_2=-1$. Véc tơ riêng ứng với $\lambda_3=3$ là $v_2=(1,-1,0)$.

2.3. Đưa ma trận vuông về dạng chéo

Ta xét ánh xạ f từ E vào chính nó. Giả sử ma trận A của ánh xạ có n trị riêng thực khác nhau. Ta sẽ chứng tỏ trong trường hợp đó n véc tơ riêng ứng với n trị riêng sẽ lập thành một cơ sở của E.

Định lý 5.12 *Giả sử f là một ánh xạ từ không gian n chiều E vào chính nó. Nếu các trị riêng $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ của f đôi một khác nhau thì các véc tơ riêng tương ứng của chúng $v_1,v_2,...,v_n$ lập thành một cơ sở của E.*

Chứng minh: Do số chiều của E là n nên ta chỉ cần phải chứng minh n véc tơ $v_1,v_2,...,v_n$ độc lập tuyến tính.

Giả sử hạng của hệ véc tơ $v_1, v_2, ..., v_n$ là r với $r < n$ (tức là số véc tơ độc lập tuyến tính lớn nhất của hệ là r). Không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết đó là r véc tơ đầu $v_1, v_2, ..., v_r$. Khi đó các véc tơ còn lại sẽ là tổ hợp tuyến tính của r véc tơ đó

$$v_{r+1} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_r v_r. \qquad (*)$$

Do f là ánh xạ tuyến tính nên

$$f(v_{r+1}) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \cdots + \alpha_r f(v_r).$$

Các v_i là các véc tơ riêng nên $f(v_i) = \lambda_i v_i$, ta có

$$\lambda_{r+1} v_{r+1} = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \cdots + \alpha_r \lambda_r v_r.$$

Thay v_{r+1} bởi (*), suy ra

$$\lambda_{r+1}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_r v_r) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \cdots + \alpha_r \lambda_r v_r.$$

Từ đó

$$\alpha_1(\lambda_{r+1} - \lambda_1) v_1 + \alpha_2(\lambda_{r+1} - \lambda_2) v_2 + \cdots + \alpha_r(\lambda_{r+1} - \lambda_r) v_r = 0.$$

Vì các véc tơ $v_1, v_2, ..., v_r$ độc lập tuyến tính và các λ_i đôi một khác nhau nên

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_r = 0.$$

Thay vào (4*) ta được $v_{r+1} = 0$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết v_{r+1} là véc tơ riêng. Mâu thuẫn đó xuất phát từ chỗ ta giả thiết $r < n$. Vậy phải có $r = n$.

Mà n véc tơ $v_1, v_2, ..., v_n$ độc lập tuyến tính của không gian n chiều E lập thành một cơ sở của không gian đó. Định lý đã được chứng minh.

Bây giờ ta tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính f theo cơ sở $v_1, v_2, ..., v_n$ là n véc tơ riêng của không gian đó.

$$\text{Do} \quad \begin{aligned} &f(v_1) = \lambda_1 v_1 = (\lambda_1, 0, ..., 0),\\ &f(v_2) = \lambda_2 v_2 = (0, \lambda_2, ..., 0),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &f(v_n) = \lambda_n v_n = (0, 0, ..., \lambda_n), \end{aligned}$$

nên ma trận của ánh xạ là ma trận chéo

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Trong trường hợp này ta nói *ma trận của ánh xạ tuyến tính A đã được chéo hoá.* Như vậy *muốn chéo hoá một ma trận A ta phải lấy một cơ sở của không gian E gồm n véc tơ độc lập tuyến tính của ma trận đó.*

Nếu P là ma trận chuyển từ cơ sở $e_1, e_2, \dots, e_n$ sang cơ sở $v_1, v_2, \dots, v_n$ của không gian E thì theo Mục 1.4 ta có $D = P^{-1}AP$.

Như vậy, *mọi ma trận vuông cấp n A có n giá trị riêng khác nhau từng đôi thì đồng dạng với ma trận chéo D có các phần tử nằm trên đường chéo chính là các giá trị riêng của A.*

Ví dụ 5.8. Hãy chéo hoá ma trận A và tìm ma trận chuyển P, biết

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Đa thức đặc trưng

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 4 \\ 2 & -\lambda & -4 \\ -1 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0.$$

Ma trận A có 3 giá trị riêng phân biệt

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3.$$

Khi đó ma trận chéo phải tìm là

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Để tìm ma trận chuyển ta phải tìm các véc tơ riêng ứng với các giá trị riêng đó.

- Với $\lambda_1 = 1$ ta có

$$\begin{cases} x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0 \end{cases}$$

hay $x_1 = 0, x_2 = -4x_3$, x_3 tùy ý, chọn $x_3 = 1$, suy ra $x_2 = -4$. Véc tơ riêng ứng với $\lambda_1 = 1$ là $v_1 = (0,-4,1)$.

- Với $\lambda_2 = 2$ ta có

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{cases}$$

suy ra

$$x_3 = 0, x_1 = x_2 = 1,$$

nên véc tơ riêng ứng với $\lambda_2 = 2$ là $v_2 = (1,1,0)$.

- Với $\lambda_3 = 3$ ta có

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 &= 0, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \end{cases}$$

suy ra

$$x_2 = 0, x_1 = 2x_3,$$

chọn $x_3 = 1$ ta suy ra $x_1 = 2$, véc tơ riêng ứng với $\lambda_3 = 3$ là $v_3 = (2,0,1)$.

Vậy ma trận chuyển P là ma trận có các cột là toạ độ của các véc tơ riêng v_1, v_2, v_3 là

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nếu tính ma trận nghịch đảo của P ta có

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

Có thể nghiệm lại rằng $D = P^{-1}AP$.

Chú ý. Điều kiện đa thức đặc trưng bậc n có n nghiệm phân biệt chỉ là một điều kiện đủ để chéo hoá một ma trận. Trong trường hợp đa thức đặc trưng có nghiệm bội người ta đã chứng minh được rằng nếu vẫn tìm được n véc tơ riêng độc lập tuyến tính thì ta vẫn có thể chéo hoá được ma trận A.

2.4. Chéo hóa trực giao

1. Không gian với tích vô hướng

Trong không gian R^n cho hai véc tơ

$$u = (x_1, x_2, \ldots, x_n);\ v = (y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Định nghĩa 5.13 *Tích vô hướng của hai véc tơ u và v, ký hiệu là $u.v$ là một số thực*

$$u.v = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

Độ dài hay *chuẩn* của một véc tơ u là: $\|u\| = \sqrt{u.u}$.

Hai véc tơ u, v là *trực giao* nếu $u.v = 0$.

Hai véc tơ u, v là trực chuẩn nếu chúng trực giao và có độ dài bằng đơn vị

$$u.v = 0; \|u\| = \|v\| = 1.$$

Ví dụ 5.9. Các véc tơ của cơ sở chính tắc trong R^3

$$e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$$

là các véc tơ trực chuẩn.

Tập các véc tơ trực chuẩn trong R^n là độc lập tuyến tính. Thật vậy, giả sử $v_1, v_2, ..., v_n$ là các véc tơ trực chuẩn. Ta có

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$$

hay

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right).v_j = 0$$

hay

$$\sum_{i \neq j} \alpha_i v_i v_j + \alpha_j v_j v_j = 0. \qquad (**)$$

Do các véc tơ v_i trực giao nên $v_i v_j = 0$ với $i \neq j$. Do các véc tơ v_i trực chuẩn nên $v_i v_j = 1$ với $i = j$. Từ (**) ta suy ra $\alpha_j.1 = 0$ hay $\alpha_j = 0$.

Lần lượt cho j các giá trị $1, 2, ..., n$ ta sẽ có mọi $\alpha_j = 0$. Điều đó chứng tỏ các véc tơ $v_1, v_2, ..., v_n$ độc lập tuyến tính.

2. Chéo hoá trực giao

Định nghĩa 5.14 *Nếu ma trận A có n véc tơ riêng trực chuẩn thì việc chéo hoá ma trận A được gọi là* ***chéo hoá trực giao.***

Trong trường hợp đó ma trận chuyển từ cơ sở $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ sang cơ sở $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ sẽ thoả mãn điều kiện

$$v_i v_j = \begin{cases} 0 & khi \;\; i \neq j, \\ 1 & khi \;\; i = j. \end{cases} \qquad (4.8)$$

Ta có thể coi cột v_i của ma trận chuyển P là hàng thứ i của ma trận chuyển vị P^t nên tích vô hướng $v_i v_j$ chính là phần tử ở vị trí (i, j) của ma trận tích $P^t P$. Do (4.8) ta thấy rằng ma trận tích có các phần tử nằm trên đường chéo chính bằng 1 còn các phần tử khác bằng không, đó là ma trận đơn vị. Vậy $P^t P = I$. Mặt khác ta có $P^{-1}P = I$, suy ra $P^t = P^{-1}$.

Định nghĩa 5.15 *Ma trận P có tính chất: chuyển vị nó ta được ma trận nghịch đảo, được gọi là* ***ma trận trực giao****.*

Ví dụ 5.10. Ma trận

$$P = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

là trực giao, vì

$$P^t = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = P^{-1}.$$

Giả sử A là ma trận chéo hoá trực giao được. Khi đó tồn tại ma trận trực giao P để $D = P^{-1}AP$, từ đó suy ra

$$A = PDP^{-1} = PDP^t.$$

Theo tính chất chuyển vị của ma trận tích ta có

$$A^t = (PDP^t)^t = (P^t)^t D^t P^t = PDP^t = A.$$

Điều đó có nghĩa là ma trận A phải là ma trận đối xứng.

Như vậy, nếu *ma trận A có thể chéo hoá trực giao được thì nó phải là ma trận đối xứng.* Ta thừa nhận rằng, ngược lại nếu ma trận A là ma trận đối xứng thì nó chéo hoá trực giao được.

Để minh hoạ điều đó ta xét ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Phương trình đặc trưng

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^3-18\lambda^2+99\lambda-162=0.$$

có 3 trị riêng

$$\lambda_1=3,\lambda_2=6,\lambda_3=9.$$

Các véc tơ riêng ứng với các trị riêng đó là

$$v_1=(1,2,2),v_2=(2,1,-2),v_3=(-2,2,-1).$$

Ta có

$$v_1v_2=v_2v_3=v_3v_1=0,$$

các véc tơ đó trực giao. Bây giờ ta chuẩn hoá chúng (tức là đưa các véc tơ đó về các véc tơ đơn vị).

$$V_1=\frac{v_1}{\|v_1\|}=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}),\quad V_2=\frac{v_2}{\|v_2\|}=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{-2}{3}),V_3=\frac{v_3}{\|v_3\|}=(\frac{-2}{3},\frac{2}{3},\frac{-1}{3}).$$

Ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở gồm các véc tơ trực chuẩn V_1,V_2,V_3 là

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}.$$

Dễ dàng kiểm chứng rằng

$$P^tP=I.$$

Ma trận chéo hoá của A là

$$D=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

§3. DẠNG TOÀN PHƯƠNG

3.1. Dạng song tuyến tính

Tập hợp các số thực R được coi là một không gian véc tơ trên chính nó.

Định nghĩa 5.16 *Một ánh xạ tuyến tính f từ không gian véc tơ X vào R được gọi là một dạng tuyến tính đối với $x \in X$.*

Xét tích Đề_các $X \times X$, đó là tập các cặp (x, y) với $x \in X$ $y \in X$

Định nghĩa 5.17 *Một ánh xạ $f : X \times X \to R$ được gọi là một dạng song tuyến tính nếu nó là một dạng tuyến tính đối với x (coi y là không đổi) và là dạng tuyến tính đối với y (coi x như không đổi).*

Nói cách khác, ánh xạ $f : X \times X \to R$ là dạng song tuyến tính nếu, với mọi $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in X$, với mọi $\alpha_1, \alpha_2 \in R$, ta có

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 f(x_1, y) + \alpha_2 f(x_2, y),$$
$$f(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 f(x, y_1) + \alpha_2 f(x, y_2).$$

Ví dụ 5.11. Xét tích vô hướng của hai véc tơ trong R^3. Từ các tính chất đã biết của tích vô hướng ta có

$$(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2).v = \alpha_1 (u_1.v) + \alpha_2 (u_2.v),$$
$$u(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 (u.v_1) + \alpha_2 (u.v_2).$$

Vậy tích vô hướng trong R^3 là một dạng song tuyến tính.

Định nghĩa 5.18 *Một dạng song tuyến tính f là đối xứng nếu và chỉ nếu*

$$f(x, y) = f(y, x); \forall x, y \in X.$$

Một dạng song tuyến tính f là xác định dương nếu và chỉ nếu

$$f(x, x) \geq 0 \ \textit{và} \ f(x, x) = 0 \ \textit{khi} \ x = 0.$$

Tích vô hướng nói trên là một dạng song tuyến tính đối xứng và xác định dương.

Xét dạng song tuyến tính $f: X^2 \to R$. Giả sử X là không gian có số chiều hữu hạn là n và

$$U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$$

là một cơ sở của X. Ta có

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i, y = \sum_{j=1}^{n} y_j u_j.$$

Khi đó

$$f(x,y) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i, \sum_{j=1}^{n} y_j u_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i f(u_i, u_j) y_j.$$

Đặt $a_{ij} = f(u_i, u_j)$ và coi nó là phần tử ở vị trí (i, j) của một ma trận A thì hệ thức trên có thể được coi là tích của 3 ma trận

$$f(x,y) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Ma trận $A = (a_{ij})$ được gọi là *ma trận của dạng song tuyến tính* f.

Ta thừa nhận rằng *một dạng song tuyến tính là đối xứng khi và chỉ khi ma trận của nó là đối xứng.*

3.2. Dạng toàn phương

Xét dạng song tuyến tính đối xứng

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \text{ với } a_{ij} = a_{ji}.$$

Khi thay x bởi y ta sẽ được dạng toàn phương.

(i) Định nghĩa 5.19 *Một dạng toàn phương trong* R^n *là biểu thức có dạng*

$$f(x,x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n, \ a_{ij} = a_{ji}.$$

Ta ký hiệu dạng toàn phương của biến x là $Q(x)$.

Ví dụ 5.12. Dạng toàn phương trong R^2 là

$$Q(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2.$$

Dạng toàn phương trong R^3 là

$$Q(x) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3.$$

Dạng ma trận của dạng toàn phương là

$$Q(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

với ma trận A là ma trận đối xứng.

(ii) Dạng chính tắc của dạng toàn phương

*Nếu ma trận A của dạng toàn phương là ma trận chéo, tức là $a_{ij} = 0$ với $i \neq j$ thì ta có **dạng chính tắc** của dạng toàn phương*

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2.$$

Nó chỉ chứa các số hạng bình phương mà không chứa các số hạng chữ nhật x_ix_j, $i \neq j$.

Rút gọn một dạng toàn phương tức là đưa nó về dạng chính tắc, điều đó có nghĩa phải đưa ma trận của dạng toàn phương về dạng chéo.

Do ma trận A của dạng toàn phương là ma trận đối xứng nên nếu nó có n trị riêng thực phân biệt thì n véc tơ riêng tương ứng của chúng sẽ lập thành một cơ sở trực giao và ta có thể đưa cơ sở đó về cơ sở trực chuẩn. Như vậy ma trận A của dạng toàn phương sẽ *chéo hoá trực giao* được.

Ta sẽ xét xem khi thực hiện phép chuyển cơ sở của dạng toàn phương đã cho về cơ sở trực chuẩn lập bởi các véc tơ riêng thì ma trận A của dạng toàn phương sẽ thay đổi như thế nào?

Ta có dạng toàn phương xuất phát với ma trận đối xứng A $Q(x) = X^t AX$, trong đó X là ma trận cột. Chuyển sang cơ sở mới lập thành từ các véc tơ riêng thì ma trận chuyển cơ sở P là ma trận trực giao.

$$X = PX' \Rightarrow X^t = (PX')^t = (X')^t P^t = (X')^t P^{-1}.$$

Từ đó

$$Q(x) = (X')^t P^{-1} APX'.$$

Nhưng $P^{-1}AP$ chính là ma trận chéo có các phần tử nằm trên đường chéo chính là các giá trị riêng λ_i.

Ta được dạng chính tắc của dạng toàn phương là

$$X''DX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2 = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \ldots + \lambda_n x_n'^2.$$

Như vậy muốn đưa một dạng toàn phương về dạng chính tắc ta phải chuyển cơ sở đã cho của dạng toàn phương về cơ sở gồm các véc tơ riêng trực chuẩn; khi đó các hệ số trong dạng chính tắc sẽ là các giá trị riêng.

Ví dụ 5.13. Đưa dạng toàn phương sau đây về dạng chính tắc và tìm ma trậnn chuyển của nó

$$Q(x) = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2.$$

Ma trận A của dạng toàn phương

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ hay } (5-\lambda)^2 - 16 = 0, \text{ suy ra } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 9.$$

- Với trị riêng $\lambda_1 = 1$ ta có véc tơ riêng $(1,-1)$, chuẩn hoá nó ta được

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

- Với trị riêng $\lambda_2 = 9$ ta có véc tơ riêng chuẩn hoá

$$v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Ma trận chuyển cơ sở là

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Dạng chính tắc của dạng toàn phương là

$$Q = x_1'^2 + 9x_2'^2.$$

Có thể nghiệm lại rằng phép chuyển cơ sở nói trên chính là phép biến đổi

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1' + \frac{1}{\sqrt{2}} x_2'; x_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}} x_1' + \frac{1}{\sqrt{2}} x_2'.$$

Thay x_1, x_2 vào dạng toàn phương đã cho ta sẽ đưa được nó về dạng chính tắc như trên.

Về mặt hình học, phép biến đổi đối với ma trận P ở trên là phép quay trong mặt phẳng xung quanh gốc O một góc $\frac{-\pi}{4}$. Như vậy nêu trong mặt phẳng ta có đường cong cho bởi phương trình

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9 = 0$$

thì phép quay nói trên sẽ đưa phương trình đó về dạng

$$x'^2 + 9y'^2 - 9 = 0$$

hay

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{1} = 1.$$

Ta được phương trình chính tắc của đường elip trong hệ trục toạ độ $Ox'y'$ nhận được do quay hệ trục toạ độ Oxy một góc $\frac{-\pi}{4}$.

Ví dụ 5.14. Tìm phép biến đổi để đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc

$$Q(x) = 7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3.$$

Ta viết ma trận A của dạng toàn phương và đa thức đặc trưng $\det(A - \lambda I)$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix},$$

suy ra

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Các giá trị riêng là

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 9.$$

Các véc tơ riêng chuẩn hoá tương ứng là

$$v_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right);\ v_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right);\ v_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Ma trận chuyển

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}.$$

Phép biến đổi

$$x_1 = \frac{1}{3}x_1' + \frac{2}{3}x_2' - \frac{2}{3}x_3',$$

$$x_2 = \frac{2}{3}x_1' + \frac{1}{3}x_2' + \frac{2}{3}x_3',$$

$$x_3 = \frac{2}{3}x_1' - \frac{2}{3}x_2' - \frac{1}{3}x_3'.$$

Dạng chính tắc của dạng toàn phương đã cho là

$$Q = 3x_1'^2 + 6x_2'^2 + 9x_3'^2.$$

Chú ý. Dạng chính tắc của một dạng toàn phương không phải duy nhất. Ngoài việc chéo hoá trực giao ma trận A như đã mô tả ở trên người ta còn có thể dùng các phương pháp khác để đưa một dạng toàn phương về dạng chính tắc. Ta trở lại dạng toàn phương đã xét trong ví dụ 5.14 trên

$$Q(x) = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2.$$

Ta có thể biến đổi

$$Q = 5(x_1^2 + \frac{8}{5}x_1x_2 + \frac{16}{25}x_2^2) + 5x_2^2 - \frac{16}{5}x_2^2 = 5(x_1 + \frac{4}{5}x_2)^2 + \frac{9}{5}x_2^2.$$

Đặt $\xi_1 = x_1 + \frac{4}{5}x_2; \xi_2 = x_2$, ta có $Q = 5\xi_1^2 + \frac{9}{5}\xi_2^2$.

Ta được một dạng chính tắc khác của dạng toàn phương đã cho.

3.3. Dạng toàn phương xác định dương

Định nghĩa 5.20 *Một dạng toàn phương được gọi là* ***xác định dương*** *nếu với mọi* $x \neq 0$ *thuộc* E *ta có*

$$Q(x) > 0.$$

Trong trường hợp này *ma trận* A *của dạng toàn phương cũng được gọi là ma trận xác định dương.*

Bằng cách thay X bởi các véc tơ thuộc cơ sở chính tắc của E ta sẽ suy ra rằng : *Nếu Q là dạng toàn phương xác định dương thì* $a_{ii} > 0$ *với mọi* $i = 1, 2, ..., n$.

Trong trường hợp ma trận A của dạng toàn phương có n trị riêng phân biệt là số dương, dạng chính tắc của nó

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2, \lambda_i > 0,$$

dạng toàn phương là xác định dương.

Bây giờ ta sẽ phát biểu một điều kiện cần và đủ để một dạng toàn phương là xác định dương. Giả sử ma trận của dạng toàn phương là A. Từ định thức của ma trận A ta trích ra các định thức con cấp k

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

Các định thức Δ_k được gọi là các *định thức con chính cấp k của ma trận A*.

Ta công nhận kết quả sau:

Nếu mọi định thức con chính của ma trận A đều dương thì dạng toàn phương với ma trận A là xác định dương.

Ví dụ 5.15. Dạng toàn phương đã xét trong ví dụ 5.14 là xác định dương vì nó có ba giá trị riêng dương. Nếu xét các định thức con chính của A thì

$$\Delta_1 = 7; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 38; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 162.$$

Cả ba định thức con chính đều dương nên dạng toàn phương là xác định dương.

Ví dụ 5.16. Dạng toàn phương

$$3x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$$

không xác định dương vì ma trận A của nó có chứa một định thức con chính

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0 .$$

Một dạng toàn phương Q là *xác định âm* nếu dạng toàn phương $-Q$ là xác định dương.

Nếu ma trận của Q là A thì ma trận của $-Q$ là $-A$. Khi tính các định thức con chính cấp k thì bằng cách đưa dấu $-$ ra ngoài định thức ta thấy rằng nếu k là số chẵn thì định thức con chính cấp k của A và $-A$ sẽ như nhau, còn nếu k là số lẻ thì định thức con chính cấp lẻ của A và $-A$ là trái dấu nhau.

Từ đó ta có kết quả: *Một dạng toàn phương là xác định âm khi và chỉ khi mọi định thức con chính cấp lẻ đều âm, mọi định thức con chính cấp chẵn đều dương.*

BÀI TẬP CHƯƠNG 5

5.1 Trong các ánh xạ $f : R^3 \to R$ sau đây, ánh xạ nào là tuyến tính?

$$a)\ f(x,y,z) = 3x + 2y - 5z.$$

$$b)\ f(x,y,z) = 5x - 3y.$$

$$c)\ f(x,y,z) = 10x + 4y - 3z + 1.$$

5.2 Xét tập hợp F các hàm số liên tục trên [a,b]. Với mỗi hàm $v \in F$ ta xét ánh xạ $I : F \to R$; $I(v) = \int_a^b v(x)dx$. Chứng minh rằng I là ánh xạ tuyến tính.

5.3 C là không gian véc tơ các số phức. Xét ánh xạ $f : C \to C$ xác định bởi với $z = x + iy \in C$, $f(z) = (a + bi)z$, $a, b \in R$. Chứng tỏ rằng f là ánh xạ tuyến tính và tìm ma trận của ánh xạ đó.

5.4 Trong không gian véc tơ R^2 cho cơ sở $A=\{(-1,1),(1,-1)\}$. Trong không gian véc tơ R^3 cho cơ sở $B=\{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$. Hãy tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính $f: R^2 \to R^3$ xác định như sau:

$$a) f(x,y)=(x,y,x+y).$$
$$b) f(x,y)=(0,x+y,x-y).$$

5.5 Với mỗi đa thức $p(x)$ có bậc không vượt quá 3 ta cho tương ứng đa thức $q(x)=(2x+1)p(x)-(x^2-1p'(x)$, với $p'(x)$ là đạo hàm của $p(x)$.

a. Chứng minh rằng ánh xạ

$$f: P_3[x] \to P_4[x], \text{ với } P_3[x], P_4[x]$$

lần lượt là các không gian các đa thức không vượt quá 3 và 4, xác định như trên là một ánh xạ tuyến tính.

b. Chứng minh rằng f là đơn ánh.

c. Các không gian $P_3[x]$ và $P_4[x]$ được quy về các cơ sở

$$1, x, x^2, x^3 \text{ và } 1, x, x^2, x^3, x^4,$$

hãy xác định ma trận của ánh xạ f.

5.6 Cho ánh xạ $f: P_2[x] \to P_2[x]$, với $f(p(x))=xp'(x)+p(x)$, $p'(x)$ là đạo hàm cấp 1 của $p(x)$.

a. Chứng minh rằng f là ánh xạ tuyến tính.

b. Tìm ma trận của f trong cặp cơ sở E, F, biết

$$E=\{1,x,x^2\}, F=\{1,1-x,(1-x)^2\}$$

5.7 Cho ánh xạ $f: R^2 \to R^3$, với

$$f(x;y)=(2x-y;4x-2y;6x-3y+m)$$

a. Xác định m để f là ánh xạ tuyến tính và tìm ma trận A của f theo các cơ sở chính tắc của R^2 và R^3.

b. Tìm cơ sở và số chiều của $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$ với m tìm được.

5.8 Cho ánh xạ $f : R^3 \to R^2$,

với $f(x;y;z) = (x - y - z; x + y + z + 3m)$,

m là tham số.

a. Tìm m để f là ánh xạ tuyến tính, sau đó tìm cơ sở và số chiều của $\operatorname{Ker} f$.

b. Với m tìm được, tìm ma trận của ánh xạ f trong cặp cơ sở của R^3 là $u_1 = (1;1;0)$, $u_2 = (1;0;1)$, $u_3 = (0;1;1)$

và cơ sở của R^2 là $v_1 = (1;\ 0), v_2 = (2;\ 1)$.

5.9 Trong R^3 cho cơ sở chính tắc $e_1 = (1,0,0);$ $e_2 = (0,1,0);$ $e_3 = (0,0,1).$

Xét phép biến đổi tuyến tính $f : R^3 \to R^3$ có ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Tính các thành phần x', y', z' của $f(v)$ theo các thành phần x, y, z của v.

b. Chứng tỏ rằng f là song ánh và tính x, y, z theo x', y', z'. Từ đó suy ra ma trận nghịch đảo A^{-1}.

5.10 Trong không gian các đa thức có bậc không vượt quá 3 quy về cơ sở $1, x, x^2, x^3$, ta xét đa thức $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3$.

a. Chứng minh rằng các đa thức P, P', P'', P''' lập nên một cơ sở mới của không gian đang xét.

b. Lập ma trận chuyển H từ cơ sở $1, x, x^2, x^3$ sang cơ sở P, P', P'', P'''.

c. $Q(x)$ là một đa thức bất kỳ. Đặt

$Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = b_0P + b_1P' + b_2P'' + b_3P'''$.

Tính a_0, a_1, a_2, a_3 theo b_0, b_1, b_2, b_3 và ngược lại. Suy ra ma trận H^{-1}.

5.11 Ta xét một ánh xạ $f : R^4 \to R^3$ cho tương ứng mỗi phần tử (x, y, z, t) của R^4 với phần tử $(x + y, y - z, z + x)$ của R^3. Chứng tỏ rằng f là ánh xạ tuyến tính. Tìm một cơ sở của $Kerf$ và của $\operatorname{Im} f$.

5.12 Cho ánh xạ tuyến tính $f : R^3 \to R^3$ xác định bởi

$$f(1;1;1) = (1;2;1), f(1;1;2) = (2;1;-1), f(1;2;1) = (5;4;-1)$$

a. Tìm cơ sở và số chiều của $\operatorname{Ker} f$.

b. Tìm cơ sở và số chiều của $\operatorname{Im} f$.

5.13 Cho $f : R^3 \to R^3$ là ánh xạ tuyến tính, biết ma trận của f trong cơ sở

$$E = \{(1;1;1), (1;0;1), (1;1;0)\} \text{ là } A_{E,E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

a. Tìm $f(2;3;-1)$.

b. Tìm cơ sở và số chiều của $\operatorname{Ker} f$.

5.14 Cho $f : R^3 \to R^3$ là ánh xạ tuyến tính, biết ma trận của f trong cơ sở

$$E = \{(1;1;1), (1;1;0), (1;0;0)\} \text{ là } A_{E,E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a. Tính $f(4;3;5)$.

b. Tìm cơ sở và số chiều của $\operatorname{Im} f$.

5.15 Tìm các trị riêng và các véc tơ riêng của các ma trận sau:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5.16 Tìm các trị riêng và các véc tơ riêng của phép biến đổi tuyến tính trong R^2 được cho bởi:

$$\begin{cases} x' = 5x + 4y, \\ y' = 8x + 9y. \end{cases}$$

5.17 Tìm trị riêng và véc tơ riêng của phép quay trong không gian xung quanh trục Oz một góc $\dfrac{\pi}{3}$.

5.18 Đưa các ma trận sau về dạng chéo và tìm ma trận chuyển:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -\sqrt{2} \\ 2 & 4 & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.19 Chứng tỏ rằng ta không chéo hoá được ma trận

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

5.20 Chứng tỏ rằng các ma trận đồng dạng có cùng phương trình đặc trưng.

5.21 Có thể chéo hoá trực giao các ma trận sau được không? Nếu được hãy tìm ma trận chuyển tương ứng:

$$X=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix};\quad Y=\begin{pmatrix}1 & 2 & -4\\ 2 & -2 & -2\\ -4 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

$$A=\begin{pmatrix}7 & -2 & 0\\ -2 & 6 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

5.22 Cho X là không gian các hàm liên tục trên $[a,b]$. Xét ánh xạ $f: X^2 \to R$ xác định bởi $f(u,v)=\int_a^b u(t)v(t)dt$, $\forall u,v \in X$. Chứng tỏ rằng f là dạng song tuyến tính. Nó có đối xứng, có xác định dương không?

5.23 Cho X là không gian thực R^3. Xét ánh xạ $f: X^2 \to R$ xác định bởi

$$f(x,y)=x_1y_1+x_2y_2-x_3y_3\ ,\ x=(x_1,x_2,x_3); y=(y_1,y_2,y_3).$$

Chứng tở rằng f là dạng song tuyến tính và tìm ma trận A của nó trong cơ sở:

$$B=\{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\} \text{ của } R^3.$$

5.24 Đưa các dạng toàn phương sau về dạng chính tắc và chỉ ra phép biến đổi tương ứng.

a. $Q(x)=x_1^2-x_2^2+2x_1x_2\sqrt{3}$

b. $Q(x)=2x_1^2+4x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-2\sqrt{2}x_1x_3+4\sqrt{2}x_2x_3$

c. $Q(x)=6x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2-8x_2x_3$

5.25 Tìm dạng của đường có phương trình

$$x^2-y^2+2\sqrt{3}xy-2(1+\sqrt{3})x-2(1-\sqrt{3})y+2.$$

Chương 6
HÀM SỐ VÀ GIỚI HẠN

§1. HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

Các đại lượng mà ta gặp trong thực tế thường là các đại lượng biến thiên, nghĩa là chúng nhận các giá trị thay đổi trong quá trình khảo sát. Có thể xảy ra trường hợp một đại lượng tuy biến thiên nhưng giá trị của nó lại phụ thuộc vào một đại lượng biến thiên khác. Thí dụ một chiếc xe ô tô chạy trên đường với vận tốc không đổi. Quãng đường xe chạy được (đại lượng biến thiên s) phụ thuộc vào thời gian chạy xe (đại lượng biến thiên t). Nếu tốc độ của xe là v thì quãng đường s được xác định theo thời gian t bởi công thức $s = vt$. Nếu biết t thì ta xác định được giá trị của s một cách duy nhất.

Quan hệ phụ thuộc giữa s và t như trên được gọi là quan hệ phụ thuộc hàm số.

1.1. Định nghĩa hàm số một biến số

Định nghĩa 6.1 *Cho tập hợp số thực R. Một ánh xạ f từ R vào R được gọi là một hàm số thực của một biến số thực, hay một hàm số của một biến số. Nói cách khác, với mỗi một biến số thực x ta cho tương ứng với một số thực duy nhất theo một quy tắc f nào đó thì ta nói là ta đã xác định một hàm số f.*

Phần tử x được gọi là biến số độc lập. Phần tử y tương ứng với x được gọi là giá trị của hàm số tại x, ta thường ký hiệu là $f(x)$ và viết

$$y = f(x).$$

Tập hợp tất cả các số thực x mà ta có thể xác định được y theo quy tắc f đã cho được gọi là miền xác định của hàm số f.

Nếu tập hợp $A \subset R$ là miền xác định của hàm số thì tập hợp tất cả các số thực y sao cho $y = f(x)$, $\forall x \in A$ được gọi là miền giá trị của hàm số (đó chính là tập ảnh của f) hay $\{f(x) : x \in A\}$ là miền giá trị của hàm số.

Ví dụ 6.1. Cho hàm số $y = \sqrt{9 - x^2}$ thì miền xác định A của hàm số là tập hợp tất cả các số thực x sao cho

$$9 - x^2 \geq 0 \text{ hay } -3 \leq x \leq 3.$$

Miền giá trị của hàm số là tập hợp mọi số thực y sao cho $0 \leq y \leq 3$.

1.2. Đồ thị của hàm số

Để có một hình ảnh hình học về một hàm số, người ta tìm cách biểu diễn nó trên mặt phẳng toạ độ, tức là một mặt phẳng trên đó có xác định hệ trục toạ độ Ox, Oy (thường là vuông góc).

Với mỗi một x thuộc miền xác định A của hàm số ta cho tương ứng với một điểm có toạ độ (x, y), với $y = f(x)$, thuộc mặt phẳng Oxy.

Tập hợp tất cả các điểm (x, y) với mọi $x \in A$ được gọi là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

Ví dụ 6.2. Trong biểu diễn đồ thị của hàm số $f : A \to R$ xác định bởi

$$f(x) = -x^3 + 2x + 1$$

trong hai trường hợp sau:

a) $A = \{-1, 0, 1\}$.

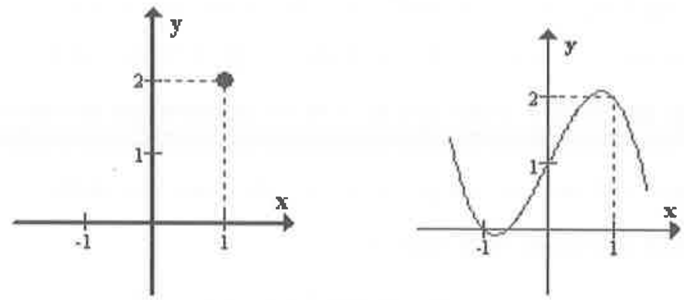
b) $A = R$ (A là tập hợp các số thực).

Trong trường hợp thứ nhất miền giá trị của hàm cũng chỉ gồm 3 điểm

$$y_1 = f(-1) = 0; y_2 = f(0) = 1; y_3 = f(1) = 2.$$

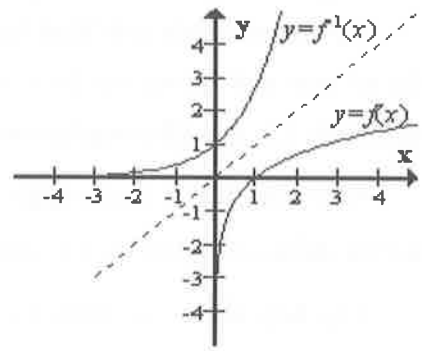
Do đó đồ thị của hàm số f chỉ có 3 điểm.

Trong trường hợp thứ hai, miền giá trị của hàm là R, đồ thị của hàm số là một đường cong liên tục (đó là đường parabol bậc 3 – *hình 7*).



Hình 7

1.3. Hàm số ngược và đồ thị hàm số ngược



Hình 8

Xét hàm số $f: A \to B$, tức là với mỗi $x \in A$ tương ứng với một y duy nhất thuộc B. Nếu f là song ánh, tức là với mỗi $y \in B$ có tương ứng duy nhất một $x \in A$, thì f sẽ có một ánh xạ ngược là $f^{-1}: B \to A$. Khi đó ta nói f^{-1} là hàm số ngược của hàm f. Vậy

$$f: A \to B \text{ và } f^{-1}: B \to A.$$

Khi đó trên mặt phẳng toạ độ Oxy, nếu điểm M có tọa độ (x, y) với $y = f(x)$ thuộc đồ thị hàm thuận f thì điểm M' có tọa độ (y,x) sẽ thuộc đồ thị hàm số ngược f^{-1}. Nếu các đơn vị chọn trên các trục là như nhau thì các điểm M và M' sẽ đối xứng với nhau qua đường phân giác $y = x$.

Đồ thị của hàm f và hàm ngược f^{-1} là đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$ (hình 8).

Chú ý. Khi viết hàm ngược của hàm $y = f(x)$ dưới dạng $x = f^{-1}(y)$ thì y là biến số độc lập. Để thuận tiện cho việc trình bày trên cùng một hệ trục toạ độ ta luôn coi biến x là biến độc lập (ứng với trục hoành) còn biến y là biến phụ thuộc (ứng với trục tung). Khi đó ta sẽ ký hiệu hàm ngược của hàm $y = f(x)$ là hàm $y = f^{-1}(x)$.

Ví dụ 6.3. Hàm $y=2x+1$ có hàm ngược là $x=(y-1)/2$, nhưng ta ký hiệu lại là $y=(x-1)/2$. Ta viết

$$f:R\to R,\ f(x)=2x+1,$$

$$f^{-1}:R\to R,\ f^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}.$$

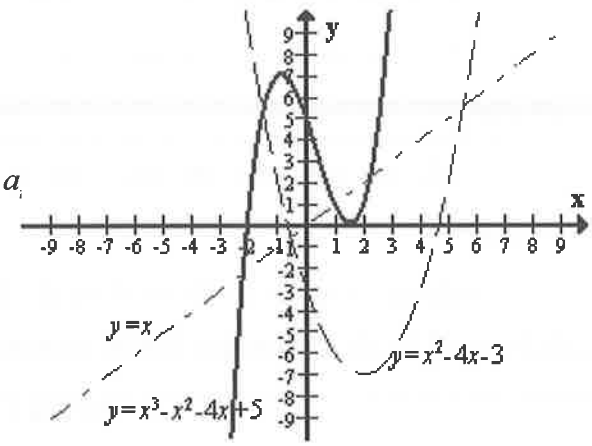
1.4. Các hàm sơ cấp

1.4.1. Hàm đa thức

Hàm $f:R\to R$ xác định bởi

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a$$

với n là một số nguyên dương, $a_0,\ldots,a_n$ là các hằng số thực, được gọi là *một hàm đa thức*. Hàm đa thức xác định với mọi số thực x và lấy giá trị thực.



Hình 9

Sau đây là dạng đồ thị của một số hàm đa thức:

1.4.2. Hàm phân thức hữu tỷ

Hàm $f:R\to R$ xác định bởi

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},\ P(x),Q(x)$$

là các hàm đa thức, được gọi là hàm phân thức hữu tỷ. Nếu N_0 là tập các không điểm của $Q(x)$, tức là

$$N_0=\{x\in R:Q(x)=0\}$$

thì hàm phân thức hữu tỷ $f(x)$ có miền xác định là tập hợp $R\setminus N_0$.

Trong chương trình trung học ta đã xét đồ thị của các hàm phân thức hữu tỷ:

$$y = \frac{a}{x};\ y = \frac{ax+b}{cx+d};\qquad y = \frac{ax^2+bx+c}{px+q}.$$

1.4.3. Hàm số mũ

Hàm số mũ cơ số a với $a>0$, $a\neq 0$ là hàm $f: R \to R^+$ xác định bởi

$$f(x) = a^x.$$

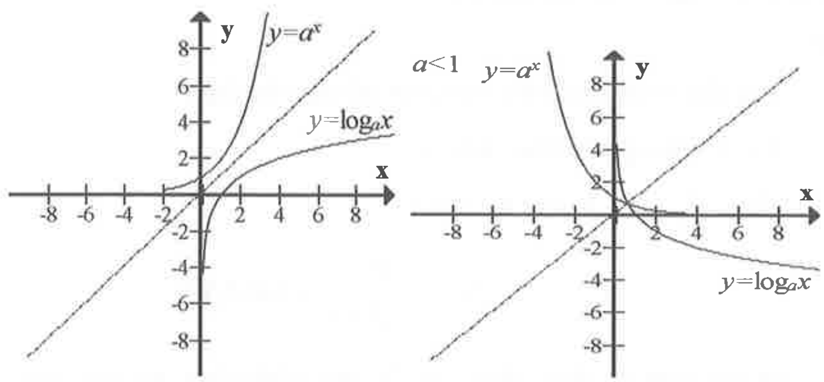
Hàm số mũ xác định với mọi số thực x và chỉ lấy giá trị riêng.

- Nếu cơ số $a>1$ thì hàm mũ tăng, nghĩa là với $x_1 < x_2$ ta có $a^{x_1} < a^{x_2}$.

- Nếu cơ số $a<1$ thì hàm mũ tăng, nghĩa là với $x_1 < x_2$ ta có $a^{x_1} > a^{x_2}$.

- Nếu cơ số $a=e$ (e là cơ số vô tỷ và có giá trị gần đúng là 2,71828) thì hàm mũ cơ số e được gọi là hàm exponent, ký hiệu là $\exp(x)$. Vậy

$$\exp(x) = e^x.$$



Hình 10. Đồ thị hàm mũ $y = a^x$ *và hàm* $y = \log_a x$

Trong việc nghiên cứu sự phát triển của một quần thể sinh vật khi thời gian tăng theo cấp số cộng mà số lượng quần thể tăng theo cấp số nhân, tức là ở thời điểm ban đầu (lúc $t=0$) số lượng quần thể là m_0, lúc $t=1$ số lượng quần thể là $m_0 q$ (q là một hằng số nào đó, công bội của cấp số nhân), lúc $t=2$ thì số lượng là $m_0q^2,\ldots$, ở lúc t thì số lượng quần thể là m_0q^t. Đặt $q=e^\alpha, \alpha$ là một hằng số nào đó thì số lượng quần thể m ở thời điểm t sẽ được xác định nhờ hàm mũ

$$m(t)=m_0e^{\alpha t}=m_0\exp(\alpha t).$$

Một hiện tượng phát triển như trên được gọi là phát triển theo luật mũ. Ta thường gặp hiện tượng đó khi xét các quần thể độc lập và những điều kiện hết sức rộng rãi (không bị hạn chế bởi nguồn thức ăn, về địa lý cư trú,...).

1.4.4. Hàm logarit

Nhìn trên đồ thị hàm mũ ta thấy: với mỗi số thực x có tương ứng với một số thực dương y duy nhất và ngược lại với mỗi số thực y có tương ứng với một số thực x duy nhất. Điều đó có nghĩa là hàm mũ là song ánh, do đó nó có hàm ngược.

Ta gọi *hàm ngược của hàm mũ là hàm logarit cơ số* a, ký hiệu là $\log_a x$, hàm này xác định trên tập các số thực dương và lấy mọi giá trị thực.

$$f: R^+ \to R,\ f(x)=\log_a x.$$

Như vậy các biểu thức sau là tương đương

$$y=\log_a x \text{ hay } x=a^y, x\in R^+, y\in R.$$

Logarit cơ số 10 được gọi là *logarit thập phân*, ký hiệu là

$$\lg x=\log_{10} x.$$

Logarit với cơ số e được gọi là *logarit nêpe hay logarit tự nhiên*, nó được ký hiệu là

$$\ln x=\log_e x$$

Dùng các tính chất của logarit ta có công thức đổi cơ số trong logarit sau

$$\log_b x=\frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

Chẳng hạn muốn chuyển từ logarit thập phân sang logarit nêpe ta dùng công thức

$$\ln x = \frac{\lg x}{\lg e}, \quad \text{vì } \lg e \approx 0,4343 \text{ hay } \frac{1}{\lg e} \approx 2,3026.$$

Logarit có rất nhiều ứng dụng. Trong việc tính toán, khi ta chuyển các số sang logarit của chúng thì phép tính nhân được thay thế bằng phép tính cộng, phép tính chia được thay bằng phép tính trừ, nhờ vậy rút ngắn được thời gian tính toán.

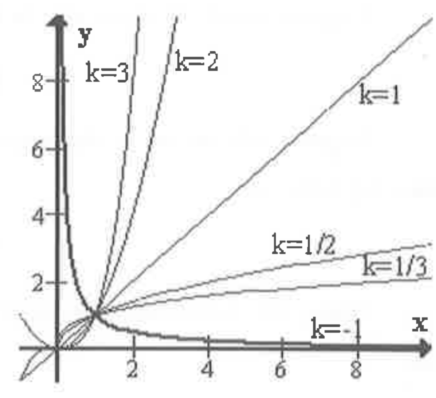
Khi vẽ đồ thị hàm số người ta thường dùng giấy kẻ ô vuông. Giấy kẻ ô bán logarit là loại giấy kẻ ô mà trên đó thang dùng trên trục Ox (trục hoành) là thang đơn vị độ dài thông thường, còn thang trục tung Oy được ghi theo logarit của đơn vị độ dài, chẳng hạn ở chỗ ghi số 2 ta phải hiểu đó là $\lg 2$. Khi biểu diễn đồ thị hàm mũ $y = e^{\alpha x}$ ta biến đổi nó thành $\lg y = (\alpha \lg e)x$ và dùng giấy kẻ ô bán logarit thì ta sẽ được đồ thị là một đường thẳng. Như vậy để kiểm tra xem giữa hai đại lượng biến thiên x và y có sự phụ thuộc theo quy luật mũ không ta biểu diễn các điểm $(x, \lg y)$ trên giấy kẻ ô bán logarit, nếu các điểm nhận được xấp xỉ thẳng hàng thì ta có thể chấp nhận quy luật mũ giữa x và y.

1.4.5. Hàm luỹ thừa

Hàm $f: R \to R$ được xác định bởi $f(x) = x^{\alpha}$, α là hằng số thực, được gọi là *hàm luỹ thừa* tuỳ thuộc vào số thực α.

Với $\alpha = n$, n là số nguyên dương, thì hàm $y = x^n$ là hàm luỹ thừa nguyên và xác định trên R.

Với $\alpha = -n$, n là số nguyên dương, thì hàm $y = x^{-n}$ là hàm luỹ thừa thập phân và nó xác định trên $R \setminus \{0\}$.



Hình 11: Hàm lũy thừa

Với $\alpha = 1/n$, n là số nguyên dương, thì hàm $y = x^{1/n}$ là hàm căn thức, nó xác định trên R^+ nếu n chẵn và trên tập R nếu n lẻ.

Chú ý. Khi nghiên cứu sự phụ thuộc giữa hai đại lượng biến thiên x và y, nếu giữa chúng có hệ thức $y = bx^k$ thì bằng phép biến đổi logarit ta được:

$$\lg y = \lg b + k \lg x.$$

Nếu đặt

$$Y = \lg y, X = \lg x, B = \lg b$$

thì ta có $Y = kX + B$ đây lại là một đường thẳng trong hệ toạ độ nếu cả hai trục có thang logarit.

1.4.6. Các hàm lượng giác

Trong chương trình trung học ta đã định nghĩa các hàm lượng giác. Các hàm

$$y = \sin x, y = \cos x$$

xác định trên tập số thực R và lấy giá trị trong $[-1,1]$. Hàm $y = \text{tg}\, x$ xác định với mọi giá trị $x \neq (2k+1)\pi/2$. Hàm $y = \cot x$ xác định với mọi giá trị $x \neq k\pi$, chúng lấy các giá trị thực.

Các hàm

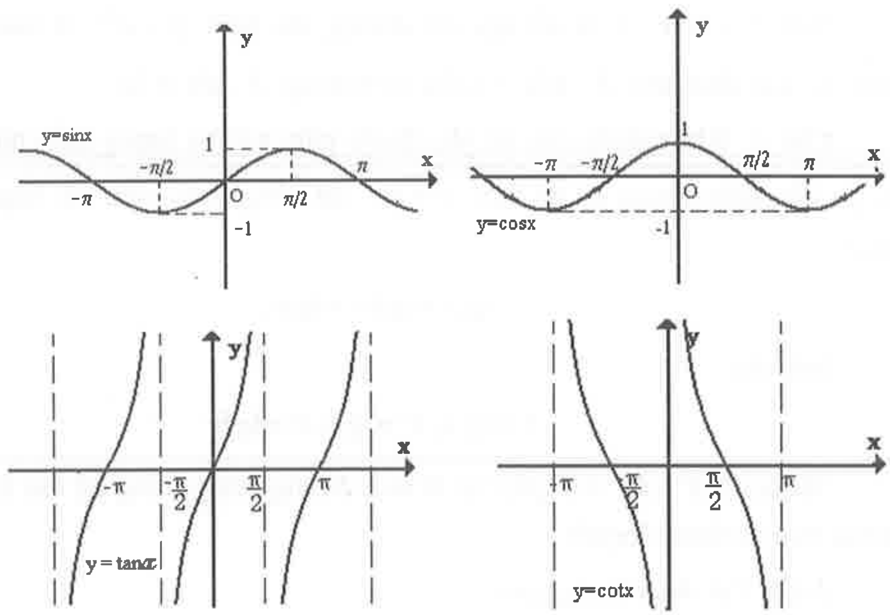
$$y = \sin x, y = \cos x$$

là các hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π, nghĩa là

$$\sin(2k\pi + x) = \sin x,\ \cos(2k\pi + x) = \cos x,\ \forall k \in Z, \forall x.$$

Các hàm $y = \tan x$, $y = \cot x$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ π

$$\tan(x + k\pi) = \tan x,\ \cot(x + k\pi) = \cot x.$$



Hình 12. Đồ thị các hàm số lượng giác

1.4.7. Các hàm lượng giác ngược

Hàm $y = \sin x$ xét trên R không là đơn ánh (do nó tuần hoàn), do đó nó không là song ánh. Tuy nhiên, nếu ta hạn chế miền xác định của nó trên khoảng $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ thì nó là song ánh, nó có hàm ngược là f^{-1}, ta gọi hàm ngược của nó là hàm arcsinx (hình 7). Vậy

$$f^{-1}: [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ f^{-1}(x) = \arcsin x,$$

và $y = \arcsin x$ có hàm số ngược là $x = \sin y$ với

$$-1 \le x \le 1;\ -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\ .$$

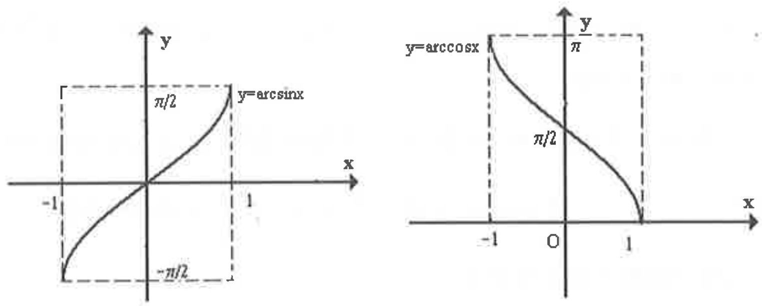
Tương tự, hàm

$$f: [0, \pi] \to [-1, 1],\ f(x) = \cos x$$

là song ánh, hàm ngược của nó là

$$f^{-1}: [-1, 1] \to [0, \pi],\ f^{-1}(x) = \arccos x \text{ (hình 8).}$$

Vậy $y = \arccos x$, suy ra $x = \cos y; -1 \le x \le 1;\ 0 \le y \le \pi$.



Hình 13. Đồ thị hàm số arcsinx, arccosx

Hàm $f:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to R,\ f(x)=\tan x$ cũng là song ánh, nó có hàm ngược là

$$f^{-1}:R\to(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\ f^{-1}(x)=\arctan x \text{ (hình 9).}$$

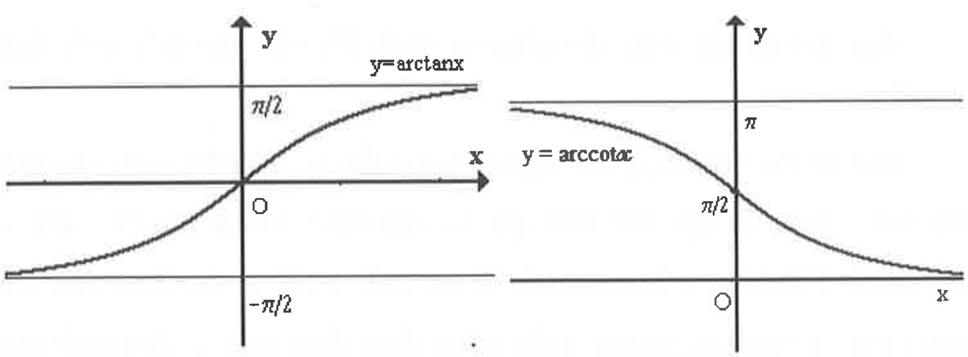
Hàm song ánh $f:(0,\pi)\to R,\ f(x)=\cot x$ có ánh xạ ngược là

$$f:R\to(0,\pi),\ f^{-1}(x)=\text{arccot}\, x \text{(hình 10).}$$

Vậy, ta có $y=\arctan x$, suy ra

$$x=\tan y, -\infty<x<+\infty,\ -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$$

và $y=\text{arccot}\, x$, suy ra $x=\cot y, -\infty<x<+\infty,\ 0<y<\pi.$



Hình 14. Đồ thị hàm số arctanx, arccotx

Các hàm số luỹ thừa, hàm mũ, hàm logarit, các hàm lượng giác và các hàm ngược của chúng được gọi là các *hàm sơ cấp cơ bản*. Hàm số được tạo từ các hàm số sơ cấp cơ bản nhờ các phép tính đại số và phép hợp hàm được gọi là *hàm số sơ cấp*.

Ví dụ 6.4. Các hàm đa thức, các hàm hữu tỷ là các hàm sơ cấp

$$A\sin(\alpha x+\beta), e^{\alpha x}\sin x, e^{x^2-x}\cos(ax+b), \ldots$$

cũng là các hàm sơ cấp.

1.5. Hàm cho bằng tham số

Khi nghiên cứu sự phụ thuộc hàm số giữa hai đại lượng x và y ta cũng hay gặp trường hợp cả x và y đều phụ thuộc vào một biến thứ ba t.

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t) \qquad (*)$$

Khi đó với mỗi t ta xác định được một điểm (x, y) thuộc mặt phẳng, khi t thay đổi (trong miền xác định của các hàm φ, ψ) thì điểm (x, y) vạch nên một đường L nào đó. Cặp phương trình (*) được gọi là phương trình tham số của đường L.

Ví dụ 6.5. Cặp phương trình $x=a\cos t, y=b\sin t, 0\le t\le 2\pi$ biểu diễn đường elip. Thật vậy, khi khử tham số t ta được

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\cos^2 t+\sin^2 t=1$$

Bây giờ ta xét xem cặp phương trình (*) khi nào biểu diễn hàm $y=f(x)$.

Giả sử các hàm φ, ψ xác định trong miền G. Khi đó miền xác định của hàm $f(x)$ là tập hợp mọi giá trị của hàm $x=\varphi(t), t\in G$, suy ra $D=\varphi(G)$. Nếu hàm y là song ánh thì với mỗi $x\in D$ ta tìm được duy nhất một $t\in G$, $t=\varphi^{-1}(x)$, và với t đó ta xác định được một y duy nhất theo hàm $y=\psi(t)$.

Như vậy, nếu hàm φ, ψ xác định trong miền G và φ là song ánh trên

G thì

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t), t \in G$$

biểu diễn một hàm số. Ta gọi hàm số đó cho bằng tham số.

Phương trình đường elip nói trên

$$x = a\cos t, y = b\sin t$$

biểu diễn hai hàm.

Với $0 \le t \le \pi$, hàm $x = a\cos t$ là một song ánh. Ta có hàm

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\ .$$

Với $\pi \le t \le 2\pi$ ta có hàm

$$y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\ .$$

§2. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

2.1. Định nghĩa dãy số

Một hàm $f: N \to R$ xác định trong tập hợp các số tự nhiên N được gọi là một dãy số.

Ta đặt

$$u_1 = f(1), u_2 = f(2), ..., u_n = f(n), ...\ .\ u_n$$

được gọi là *số hạng tổng quát* của dãy số. Ta ký hiệu dãy số là $\{u_n\}$. Có thể xác định dãy số bằng cách:

a) Cho công thức tổng quát $u_n = f(n)$.

Ví dụ 6.6. Cho dãy số $u_n = a.q^{n-1}$, với a và q là các hằng số. Đó chính là một dãy số nhân

$$a, aq, aq^2, ..., aq^n, ...$$

b) Cho công thức truy chứng, chẳng hạn $u_1 = a, u_n = f(u_{n-1})$.

Ví dụ 6.7. 1) Cho dãy số

$$u_1 = \sqrt{2},\ u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}\,.$$

Đó là dãy

$$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$$

2) Cho dãy số Fibonasi

$$u_1 = u_2 = 1, u_n = u_{n-1} + u_{n-2}\,.$$

Đó là dãy 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,....

2.2. Giới hạn của dãy số

Ví dụ 6.8. Xét số thực $a = 1/3$. Ta có thể biểu diễn gần đúng thiếu số a bằng dãy số

$$u_1 = 0,3;\ u_2 = 0,33; \ldots;\ u_n = 0,3\ldots3\ (n \text{ số } 3),$$

hoặc biểu diễn gần đúng thừa bằng dãy số

$$v_1 = 0,4;\ v_2 = 0,34; \ldots.;\ v_n = 0,3\ldots34\ (n-1 \text{ số } 3).$$

Ta có hiệu $u_n - a$ hoặc $v_n - a$ về trị tuyệt đối không vượt quá 10^{-n}. Bằng cách tăng n ta có thể làm cho hiệu đó nhỏ đi bao nhiêu cũng được. Điều đó có nghĩa là nếu ε là một số dương cho trước, bé tùy ý, thì ta có thể tìm được số nguyên N sao cho với mọi $n > N$ ta luôn có $|u_n - a| < \varepsilon$. Khi đó số a được gọi là giới hạn của dãy số $\{u_n\}$.

Định nghĩa 6.2 *Dãy số $\{u_n\}$ được gọi là có giới hạn là a nếu với mọi $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý cho trước, tồn tại số $N > 0$ sao cho với mọi $n > N$ ta luôn có $|u_n - a| < \varepsilon$.* Ký hiệu là

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = a \quad \text{hay} \quad u_n \to a \text{ khi } n \to +\infty\,.$$

Nếu dãy $\{u_n\}$ có giới hạn là a thì ta cũng nói dãy $\{u_n\}$ ***hội tụ*** tới a.

Ví dụ 6.9. Xét dãy số cho bởi $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

Ta thấy rằng dãy số đó hội tụ tới 1 vì

$$|u_n - 1| = \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n}\,.$$

Với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, muốn có $|u_n - 1| < \varepsilon$ thì chỉ việc lấy $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ là được. Như vậy ta chọn N là số nguyên lớn nhất có giá trị nhỏ hơn hoặc bằng $\dfrac{1}{\varepsilon}$. Chẳng hạn nếu cho $\varepsilon = 0,003$ thì

$$\frac{1}{\varepsilon} = 333,3.$$

Ta chỉ việc lấy N=333 thì với mọi $n > 333$ (tức là kể từ số hạng thứ 334 trở đi) ta có $|u_n - 1| < 0,003$.

2.3. Các phép tính về dãy hội tụ

Định lý 6.3 *Nếu dãy $\{u_n\}$ hội tụ tới a, dãy $\{v_n\}$ hội tụ tới b thì*

1) Dãy tổng $\{u_n + v_n\}$ hội tụ tới $a + b$;

2) Dãy tích $\{u_n.v_n\}$ hội tụ tới $a.b$;

3) Dãy nghịch đảo $\{1/v_n\}$ hội tụ tới $1/b$ với điều kiện $b \neq 0$;

4) Dãy thương $\{u_n / v_n\}$ hội tụ tới a/b với điều kiện $b \neq 0$.

Ta sẽ chứng minh cho tính chất (1), các tính chất còn lại được chứng minh tương tự.

Vì $u_n \to a$ nên theo định nghĩa của giới hạn, cho trước số $\varepsilon/2$ ta tìm được số N_1 sao cho với mọi $n > N_1$ ta có $|u_n - a| < \varepsilon/2$.

Với $v_n \to b$ nên với số $\varepsilon/2$ nói trên ta tìm được số N_2 sao cho với mọi $n > N_2$ ta có $|v_n - a| < \varepsilon/2$.

Gọi $N = \max(N_1, N_2)$ thì với mọi $n > N$, ta có

$|u_n - a| < \varepsilon/2$ và $|v_n - a| < \varepsilon/2$.

Khi đó với mọi số $\varepsilon > 0$ cho trước ta đã tìm được số N sao cho với mọi $n > N$ ta có

$$|(u_n + v_n) - (a + b)| = |(u_n - a) + (v_n - b)| \leq |u_n - a| + |v_n - b)| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

điều đó chứng tỏ $(u_n + v_n) \to (a + b)$.

2.4. Hai tiêu chuẩn đủ để dãy hội tụ

Không phải dãy số nào cũng hội tụ, chẳng hạn dãy $u_n = (-1)^n$ mà các giá trị của nó lần lượt là -1 và 1 không tiến tới một giới hạn nào cả.

Dưới đây ta sẽ phát biểu hai tiêu chuẩn mà nhờ đó ta có thể biết được một dãy đã cho là hội tụ.

Tiêu chuẩn 1. *Cho ba dãy* $\{u_n\},\{v_n\}$, $\{w_n\}$ *sao cho*

$$v_n \le u_n \le w_n. \tag{6.1}$$

Khi đó nếu các dãy $\{v_n\}$ *và* $\{w_n\}$ *cùng hội tụ tới* a *thì dãy* $\{u_n\}$ *cũng hội tụ tới* a.

Chứng minh. Do $v_n \to a$ nên với $\varepsilon > 0$ ta tìm được N_1 để $\forall n > N_1$ ta có

$$v_n - a| < \varepsilon. \tag{6.2}$$

Do $w_n \to a$ nên với $\varepsilon > 0$ ta tìm được N_2 để $\forall n > N_2$ ta có

$$w_n - a| < \varepsilon. \tag{6.3}$$

Gọi $N = \max(N_1, N_2)$ thì khi $n > N$ các bất đẳng thức (6.2) và (6.3) cùng xảy ra. Kết hợp với (6.1) ta có

$$-\varepsilon < v_n - a \le u_n - a \le w_n - a < \varepsilon.$$

Như vậy, với $\varepsilon > 0$ cho trước ta tìm được số N sao cho với mọi $n > N$ ta có $|u_n - a| < \varepsilon$. Điều đó chứng tỏ dãy $\{u_n\}$ hội tụ tới a. ■

Trước khi phát biểu tiêu chuẩn thứ hai, ta xét thêm một vài khái niệm sau:

Dãy $\{u_n\}$ *được gọi là đơn điệu tăng nếu với mọi* n, m, $n < m$ *thì* $u_n < u_m$.

Dãy $\{u_n\}$ *được gọi là đơn điệu giảm nếu với mọi* n, m, $n < m$ *thì* $u_n > u_m$.

Dãy $\{u_n\}$ *được gọi là* ***bị chặn trên*** *nếu mọi số hạng trong dãy, kể từ một số hạng nào đó trở đi, không vượt quá một hằng số* A *nào đó.*

*Dãy $\{u_n\}$ được gọi là **bị chặn dưới** nếu mọi số hạng trong dãy, kể từ một số hạng nào đó trở đi, không nhỏ hơn một hằng số B nào đó.*

Tiêu chuẩn 2. *Mọi dãy tăng và bị chặn trên thì hội tụ. Mọi dãy giảm và bị chặn dưới thì hội tụ.*

Ta không chứng minh tiêu chuẩn này.

Ví dụ 6.10. Xét dãy số cho bởi

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Ta sẽ chứng minh rằng dãy $\{u_n\}$ tăng và bị chặn trên. Thật vậy, ta khai triển u_n theo nhị thức Newton

$$u_n = 1+\frac{n}{1!}.\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)...1}{n!}\frac{1}{n^n}$$

$$=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+...+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Thay n bởi $n+1$ thì

$$u_n = 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+...+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)...\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

Do $1-\frac{1}{k}<1-\frac{1}{k+1}$ với mọi $k=1,2,...$ ta suy ra $u_n<u_{n+1}$, tức là dãy $\{u_n\}$ tăng.

Mặt khác

$$1-\frac{1}{k}<1, \text{ với mọi } k, \text{ nên } u_n<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}.$$

Hơn nữa

$$\frac{1}{k!}=\frac{1}{2.3...k}<\frac{1}{2.2...2}=\frac{1}{2^{k-1}},\ \forall k=2,3,...$$

Do đó

$$u_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots$$

Tổng

$$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots = 2 + \frac{1/2}{1-1/2} = 3$$

vì là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn. Vậy $u_n < 3$. Tóm lại dãy $\{u_n\}$ tăng và bị chặn trên bởi 3 nên theo tiêu chuẩn 2 thì nó hội tụ.

Định nghĩa 6.4 *Giới hạn của dãy* $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *được gọi là số* e *và*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Người ta chứng minh được rằng số e là số vô tỷ. Giá trị gần đúng của nó với 5 chữ số thập phân là 2,71828. Số e được dùng làm cơ số cho một hệ logarit (logarit nêpe). Rất nhiều công thức toán học cũng như kỹ thuật được biểu diễn nhờ số e.

2.5. Giới hạn vô cùng của dãy

Khi xét dãy $\{u_n\}$ hội tụ tới a, a là hữu hạn ($-\infty < a < +\infty$). Có những dãy mà kể từ một số hạng nào đó trở đi, mọi số hạng trong dãy đều lớn hơn hoặc nhỏ hơn một số bất kỳ cho trước có trị tuyệt đối lớn tùy ý. Khi đó ta nói là dãy có giới hạn vô cùng.

Định nghĩa 6.5 *Dãy* $\{u_n\}$ *có giới hạn* $+\infty$ *nếu với mọi số* $M > 0$ *cho trước, ta có thể tìm được số* $N > 0$ *sao cho với mọi* $n > N$ *ta có* $u_n > M$. *Ta viết* $u_n \to +\infty$.

Dãy $\{u_n\}$ *có giới hạn* $-\infty$ *nếu với mọi số* $M > 0$ *cho trước, ta có thể tìm được số* $N > 0$ *sao cho với mọi* $n > N$ *ta có* $u_n < -M$. *Ta viết* $u_n \to -\infty$.

Ví dụ 6.11. Dãy số cho bởi $u_n = n^2$ có giới hạn là $+\infty$.

Ta chứng minh được các kết quả sau:

Nếu $u_n \to +\infty, v_n \to +\infty$ thì $u_n + v_n \to +\infty$; $u_n.v_n \to +\infty$.

Nếu $u_n \to -\infty, v_n \to -\infty$ thì $u_n + v_n \to -\infty$; $u_n.v_n \to +\infty$.

Nếu $u_n \to +\infty, v_n \to -\infty$ thì $u_n.v_n \to -\infty$.

Nếu $u_n \to a > 0, v_n \to +\infty$ thì $u_n.v_n \to +\infty$.

Chú ý. Nếu $u_n \to +\infty, v_n \to +\infty$ thì $(u_n - v_n)$, $\dfrac{u_n}{v_n}$ được gọi là các dạng vô định. Nếu $u_n \to 0, v_n \to \infty$ thì $u_n.v_n$ cũng là dạng vô định.

Trong việc tính giới hạn, khi gặp các dạng vô định ta phải tìm cách khử chúng đi (xem §3).

§3. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

3.1. Định nghĩa giới hạn khi $x \to a$

Ví dụ 6.12. Xét hàm số $f(x) = \dfrac{2(x^2-1)}{x-1}$.

Hàm số không xác định tại $x = 1$. Tuy nhiên với các giá trị của x khá gần 1 ta thấy các giá trị của $f(x)$ tương ứng khác 4 rất ít và ta có thể tìm được những khoảng đủ nhỏ chứa 1 sao cho với mọi x thuộc khoảng đó thì hiệu $|f(x) - 4|$ nhỏ bao nhiêu cũng được. Khi đó ta nói hàm $f(x)$ có giới hạn là 4 khi x dần tới 1.

Định nghĩa 6.6 *Hàm $f(x)$ có giới hạn là h khi x dần tới a nếu với mọi $\varepsilon > 0$, nhỏ tùy ý cho trước, tồn tại một số $\delta > 0$ phụ thuộc vào ε, sao cho với mọi x thỏa mãn $|x - a| < \delta$ thì $|f(x) - h| < \varepsilon$,* ký hiệu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = h$.

Trở lại ví dụ 6.12, ta chứng minh rằng

$$\lim_{x \to 1} \frac{2(x^2-1)}{x-1} = 4.$$

Thật vậy, cho trước $\varepsilon > 0$ bất kỳ (chẳng hạn $\varepsilon = 0,001$) ta cần xác định số $\delta > 0$ sao cho khi

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \left| \frac{2(x^2-1)}{x-1} - 4 \right| < \varepsilon.$$

Do $x \neq 1$ nên $\left| \frac{2(x^2-1)}{x-1} - 4 \right| = |2(x+1)-4| = 2|x-1| < 2\delta$,

nếu chọn $\delta = \varepsilon / 2$ thì ta có

$$\left| \frac{2(x^2-1)}{x-1} - 4 \right| < 2\delta = \varepsilon.$$

Vậy, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số $\delta = \varepsilon / 2 > 0$ sao cho với mọi x thỏa mãn $0 < |x-1| < \delta$ thì $|f(x) - 4| < \varepsilon$.

3.2. Các tính chất của giới hạn

Định lý 6.7 *Nếu hàm $f(x) \geq 0$ trong một lân cận của điểm a và $\lim_{x \to a} f(x) = h$ thì $h \geq 0$.*

Thậy vậy, từ định nghĩa của giới hạn ta có

$|f(x) - h| < \varepsilon \Rightarrow h - \varepsilon < f(x) < h + \varepsilon$

nếu $h < 0$ thì ta có thể chọn ε sao cho $h + \varepsilon < 0 \Rightarrow f(x) < 0$, trái giả thiết.

Định lý 6.8 *Nếu khi $x \to a, f(x)$ có giới hạn h và $g(x)$ có giới hạn là k thì $f(x) + g(x)$ có giới hạn $h + k$; $m.f(x)$ có giới hạn là $h.m$ (m là hằng số); $f(x).g(x)$ có giới hạn là $h.k$; $\frac{f(x)}{g(x)}$ có giới hạn là $\frac{1}{m}$ $(m \neq 0)$.*

Cách chứng minh định lý này cũng giống như cách chứng minh giới hạn của dãy số.

Chú ý. Các định nghĩa giới hạn của hàm f khi $x \to +\infty$ hoặc

$x \to -\infty$ cũng tương tự như định nghĩa giới hạn của dãy. Chẳng hạn, *hàm* $f(x)$ *có giới hạn là* h *khi* $x \to -\infty$ *nếu* $\forall \varepsilon > 0$ *ta tìm được số* $M > 0$ *sao cho*

$$\forall x < -M, |f(x) - h| < \varepsilon.$$

3.3. Lượng Vô cùng bé (VCB)

Nếu $f(x)$ *có giới hạn bằng* 0 *khi* $x \to a$ *thì hàm* $f(x)$ *được gọi là lượng* ***vô cùng bé*** *ở lân cận của* a.

Ví dụ 6.13. Khi $x \to 0 \Rightarrow \sin x \to 0$ (do ta luôn có $|\sin x| < |x|$). Vậy $\sin x$ là đại lượng vô cùng bé (VCB) ở lân cận của 0.

So sánh các VCB: *giả sử* $f(x), g(x)$ *là các VCB khi* $x \to a$.

- Nếu $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ *thì ta nói rằng* f *là VCB cấp cao hơn* g.

- Nếu $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$ *thì ta nói rằng* f *và* g *là VCB cùng cấp, đặc biệt, nếu* $k = 1$ *thì* f *và* g *là hai VCB tương đương, ta ký hiệu* $f \sim g$.

Ví dụ 6.14. Ở chương trình Trung học ta đã biết $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Như vậy trong lân cận của 0 thì ta có $\sin x \sim x$. Ta có

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x} . \sin \frac{x}{2} = 0.$$

Vậy 1-cos$x$ là VCB cấp cao hơn x.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin \frac{x}{2}}{x} . \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}$$

Vậy $1 - \cos x$ là VCB cùng cấp với x^2, ta cũng nói $1 - \cos x$ là VCB cấp hai đối với x.

Chú ý. Tỷ số của hai VCB $\dfrac{f}{g}$ $(x \to a\,,\infty)$ là dạng vô định $\dfrac{0}{0}$. Định lý sau cho ta một phương pháp để *khử dạng vô định*.

Định lý 6.9 *Giả sử* $f_1(x), f_2(x), g_1(x), g_2(x)$ *là các VCB (khi* $x \to a$ *hoặc* ∞*). Khi đó nếu* $f_1(x) \sim f_2(x), g_1(x) \sim g_2(x)$ *thì*

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f_2(x)}{g_2(x)}.$$

Chứng minh. Ta có thể viết

$$\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_1}{f_2}\cdot\frac{f_2}{g_2}\cdot\frac{g_2}{g_1}.$$

Do

$$\lim\frac{f_1}{f_2} = 1,\ \lim\frac{g_2}{g_1} = 1$$

nên ta có

$$\lim\frac{f_1}{g_1} = \lim\frac{f_2}{g_2}.$$

Ví dụ 6.15. 1) Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$.

Khi $x \to 0$ thì $\sin 5x \sim 5x, \sin 3x \sim 3x$. Theo định lý trên ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}$$

2) Tìm $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}$.

Khi $x \to \pi \Rightarrow \sin 5x \to 0$, $\sin 5x$ là một VCB. Tuy nhiên, ta không thể viết $\sin 5x \sim 5x$ vì $5x \to 5\pi$ không phải là một VCB. Để giải quyết vấn đề này ta làm như sau:

Đặt $t = \pi - x$. Khi $x \to \pi \Rightarrow t \to 0$,

$$\sin 5x = \sin(5\pi - 5t) = \sin(\pi - 5t) = \sin 5t$$

và

$$\sin 2x = \sin(2\pi - 2t) = \sin(-2t) = -\sin 2t\,.$$

Khi đó nếu $\sin 5t \sim 5t, \sin 2t \sim 2t$. Vậy

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 5x}{\sin 2x} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin 5t}{-\sin 2t} = \lim_{t\to 0}\frac{5t}{-2t} = -\frac{5}{2}.$$

Một số VCB tương đương thường gặp:

Khi $x \to 0$ thì

$a)\sin x \sim x.$ $\qquad$ $d)\ln(1+x) \sim x.$

$b)\operatorname{tg} x \sim x.$ $\qquad$ $e)e^x - 1 \sim x.$

$c)1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2.$ $\qquad$ $g)\ \sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x.$

Ta chứng minh

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1\,,\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1\,.$$

Trước hết ta chứng minh công thức $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. Thật vậy, trong mục 2.4 ta đã định nghĩa

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\,.$$

Với số thực z bất kỳ bao giờ ta cũng tìm được số n sao cho $n \le z \le n+1$.

Từ đó ta có

$$\frac{1}{n+1} \le \frac{1}{z} \le \frac{1}{n},$$

do đó

$$1+\frac{1}{n+1} \le 1+\frac{1}{z} \le 1+\frac{1}{n},$$

suy ra

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} \le \left(1+\frac{1}{z}\right)^{z} \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Vậy

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} \le \left(1+\frac{1}{z}\right)^{z} \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Khi $z \to +\infty$ thì $n \to +\infty$ và ta có

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \to e.$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \to e.$$

Còn

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} \to 1, \quad \left(1+\frac{1}{n}\right) \to 1.$$

Theo tiêu chuẩn 1 của giới hạn (áp dụng đối với hàm) ta có

$$\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z} = e,$$

với z là một số thực. Đặt $x = \frac{1}{z}$, khi $z \to +\infty$ thì $x \to 0$. Vậy

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Sử dụng kết quả trên, ta có

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$$

Đặt $y = e^{x} - 1 \Rightarrow x = \ln(1+y)$, khi $x \to 0 \Rightarrow y \to 0$. Khi đó

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)} = 1.$$

3.4. Lượng Vô cùng lớn (VCL)

Hàm f có giới hạn $+\infty$ khi $x \to a$ nếu với mọi $M > 0$ ta tìm được số $\delta > 0$ sao cho khi $0 < |x-a| < \delta$ thì $f(x) > M$.

Hàm f có giới hạn $-\infty$ khi $x \to a$ nếu với mọi $M > 0$ ta tìm được số $\delta > 0$ sao cho khi $0 < |x-a| < \delta$ thì $f(x) < -M$.

Bạn đọc hãy tự định nghĩa giới hạn vô cùng ($+\infty$, $-\infty$) của hàm f khi $x \to +\infty$, hoặc $x \to -\infty$. *Nếu hàm f có giới hạn là vô cùng thì nó được gọi là **lượng vô cùng lớn**.*

Dễ thấy, nếu $f(x)$ là VCB khác 0 thì $1/f(x)$ là một VCL và ngược lại, nếu $f(x)$ là VCL khác 0 thì $1/f(x)$ là VCB.

Nếu f, g là các VCL và tỷ số f/g cũng là VCL thì f là VCL có cấp cao hơn g. Vì vậy, *trong việc tính giới hạn của tỷ số f/g (dạng vô định ∞/∞) ta chỉ giữ lại ở tử số và mẫu số các VCL có cấp cao nhất và ngắt bỏ các VCL cấp thấp hơn đi.*

Ví dụ 6.16. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3+5x^2-3x}{4x^3-7x+6}$.

Sử dụng các VCL, ta có

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+5x^2-3x}{4x^3-7x+6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{4x^3} = \frac{1}{2}.$$

§4. HÀM SỐ LIÊN TỤC

Trong §3 ta đã xét giới hạn của hàm số $f(x)$ khi $x \to a$ mà không đòi hỏi hàm f phải xác định tại a. Trong mục này ta sẽ xét một lớp hàm đặc biệt, hay gặp trong thực tế: hàm f xác định tại a, hàm f có giới hạn khi $x \to a$ và giá trị giới hạn đó bằng giá trị của hàm tại a. Đó là lớp các hàm số liên tục.

4.1. Định nghĩa

Định nghĩa 6.10 *Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại $x = a$ nếu: nó xác định tại a và*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Ví dụ 6.17. Hàm $f(x) = x^2$ liên tục tại mọi điểm x. Thật vậy, lấy $x = a$ bất kỳ thì

$$f(a) = a^2 \ , \ \lim_{x\to a} x^2 = a^2,$$

điều này có nghĩa là hàm f liên tục tại a. Nhưng a được chọn bất kỳ nên hàm f liên tục tại mọi điểm.

Dùng các định lý về giới hạn ta chứng minh được:

Định lý 6.11 *Nếu các hàm $f(x), g(x)$ liên tục tại $x = a$ thì các hàm $f(x)+g(x)$, $k.f(x)$ với k là hằng số, $f(x).g(x), \dfrac{f(x)}{g(x)}$ với $g(a) \neq 0$ cũng liên tục tại a.*

Bây giờ ta xem xét tính liên tục của hàm hợp: Trước tiên ta xem lại khái niệm hàm hợp. Giả sử có hai hàm

$$u : A \to B,\ u(x) = y,$$
$$f : B \to C,\ f(y) = z.$$

Như vậy ta có hàm hợp

$$f \circ u : A \to C,\ (f \circ u)(x) = f(u(x)).$$

Định lý 6.12 *Nếu hàm u liên tục tại $x = a$, hàm f liên tục tại điểm $u_0 = u(a)$ thì hàm hợp $f \circ u$ cũng liên tục tại $x = a$.*

Chứng minh. Do f liên tục tại u_0 nên với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, ta tìm được số $\eta > 0$ sao cho

$$|u - u_0| < \eta \Rightarrow |f(u) - f(u_0)| < \varepsilon. \qquad (*)$$

Do hàm u liên tục tại a nên với $\eta > 0$ tìm được ở trên ta tìm được $\delta > 0$ sao cho

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |u(x) - u(a)| = |u - u_0| < \eta. \qquad (**)$$

Kết hợp (*) và (**) ta có

$$|x-a|<\delta \Rightarrow |u-u_0|<\eta \Rightarrow |f(u)-f(u_0)|<\varepsilon$$

hay $|f[u(x)]-f[u(a)]|<\varepsilon$. Điều đó chứng tỏ $\lim\limits_{x\to a} f[u(x)] = f[u(a)]$.

Tức là hàm hợp $f \circ u$ liên tục tại $x=a$.

Ta thừa nhận rằng: *Các hàm sơ cấp cơ bản liên tục tại mọi điểm trong miền xác định của chúng.*

Dùng định lý 6.11 và định lý 6.12 ta có thể phát biểu: *Các hàm sơ cấp đều liên tục trong miền xác định của chúng.*

4.2 Hàm liên tục trong một khoảng kín

4.2.1. Liên tục một phía

Trong định nghĩa giới hạn, khi ta viết $x\to a$ ta cần hiểu là x dần tới a theo những giá trị nhỏ hơn a (x dần tới a theo phía trái, ký hiệu $x\to a-0$ hoặc $x\to a^-$) và x dần tới a theo những giá trị lớn hơn a (x dần tới a theo phía phải, ký hiệu $x\to a+0$ hoặc $x\to a^+$). Giới hạn của hàm f khi $x\to a$ như vậy là *giới hạn hai phía.* Trong nhiều trường hợp, ta chỉ cần xét giới hạn của hàm khi $x\to a-0$, ta có *giới hạn trái*, hoặc khi $x\to a+0$, ta có *giới hạn phải.*

Ví dụ 6.18. Với hàm $f(x)=\sqrt{x}$ thì khi xét giới hạn của nó khi $x\to 0$ ta chỉ có thể xét giới hạn phải, vì nếu xét giới hạn trái thì vô nghĩa (vì hàm $\sqrt{x}$ chỉ xác định với $x\geq 0$).

- Hàm f được gọi là liên tục trái tại a nếu nó xác định tại a và

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a).$$

- Hàm f được gọi là liên tục phải tại a nếu nó xác định tại a và

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a).$$

- Hàm f được gọi là liên tục tại a nếu nó liên tục cả phía trái và cả phía phải tại a.

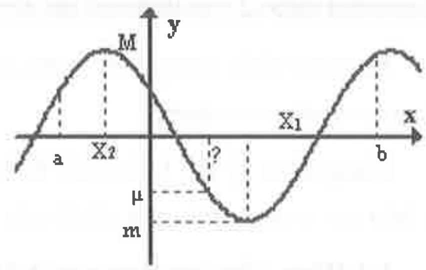
4.2.2. Hàm liên tục trên khoảng kín $[a,b]$

Một hàm f được gọi là liên tục trên khoảng kín $[a,b]$ nếu *a) Nó liên tục tại mọi điểm* $x \in (a,b)$.

b) Nó liên tục phải tại a *và liên tục trái tại* b.

Khi biểu diễn đồ thị của một hàm liên tục trên một khoảng thì ta được một đường cong liền nét (vẽ được bằng một nét bút).

Ta phát biểu không chứng minh mà chỉ minh hoạ bằng hình học các tính chất quan trọng của hàm liên tục trên một khoảng kín.



Hình 15. Đồ thị hàm liên tục

Tính chất 1. *Nếu hàm* f *liên tục trên khoảng kín* $[a,b]$ *thì nó đạt giá trị nhỏ nhất* m *và giá trị lớn nhất* M *ít nhất một lần trên khoảng* $[a,b]$.

Nói cách khác, tồn tại $x_1 \in [a,b]$ và $x_2 \in [a,b]$ sao cho với mọi $x \in [a,b]$ ta có $m = f(x_1) \leq f(x); M = f(x_1) \geq f(x)$.

Chú ý rằng điều kiện khoảng kín là quan trọng, chẳng hạn nếu xét hàm $f(x) = x$ liên tục trong khoảng mở (0,1) thì không tìm được điểm trong (0,1) để hàm f đạt giá trị nhỏ nhất cũng như giá trị lớn nhất.

Tính chất 2. *Nếu hàm* f *liên tục trong khoảng kín* $[a,b]$ *thì nó nhận mọi giá trị trong khoảng kín* $[m,M]$, *tức là ảnh của đoạn* $[a,b]$ *qua* f *là* $[m,M]$. Nói cách khác, nếu μ là một giá trị tuỳ ý thuộc khoảng kín

$$[m,M], m \leq \mu \leq M$$

thì thế nào cũng tìm được $\xi \in [a,b]$ để $f(\xi) = \mu$ (hình 15).

Hệ quả 6.13 *Nếu hàm* f *liên tục trên khoảng kín* $[a,b]$, *giá trị của hàm tại* a *và* b *trái dấu nhau, tức là* $f(a).f(b) < 0$, *thì phương trình* $f(x) = 0$ *bao giờ cũng có nghiệm trong khoảng* (a,b). *Hơn nữa, nếu* f *đơn điệu trong khoảng* $[a,b]$ *thì nghiệm đó là duy nhất.*

Ta chỉ việc áp dụng tính chất 2 với $m < 0, M > 0, \mu = 0$.

4.3. Hàm số gián đoạn

Nếu hàm f không liên tục tại $x=a$ thì điểm $x=a$ là điểm gián đoạn của hàm số. Ta cũng nói hàm số gián đoạn tại a. Các trường hợp gián đoạn thường gặp là:

(i) Hàm f không xác định tại a và $f(x)\to\infty$ khi $x\to a$. Điểm $x=a$ được gọi là điểm gián đoạn vô cùng.

Ví dụ 6.19. Hàm $f(x)=\dfrac{1}{x}$ có gián đoạn vô cùng tại $x=0$.

(ii) Hàm f xác định tại $x=a$, hàm có các giới hạn trái (hữu hạn) và giới hạn phải tại a nhưng các giới hạn đó không bằng nhau. Khi đó ta nói hàm có gián đoạn loại một tại điểm $x=a$, và tại $x=a$ hàm f có bước nhẩy bằng

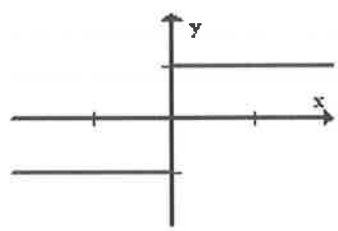
$$|f(a+0)-f(a-0)|.$$

Ví dụ 6.20. Hàm số

$$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{khi } x<0,\\ \ \ 1 & \text{khi } x\geq 0.\end{cases}$$

có gián đoạn loại một tại $x=0$ (hình 16). Bước nhẩy tại $x=0$ là

$$|f(+0)-f(-0)|=|1-(-1)|=2.$$



Hình 16.Hàm gián đoạn

(iii) Hàm f không xác định tại $x=a$ nhưng có giới hạn (hai phía) khi $x\to a$. Nếu ta bổ sung cho hàm f giá trị tại a bằng giới hạn tại a của nó thì ta sẽ thu được một hàm mới liên tục tại a. Khi đó điểm $x=a$ được gọi là điểm gián đoạn khử được.

Ví dụ 6.21. Hàm

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}$$

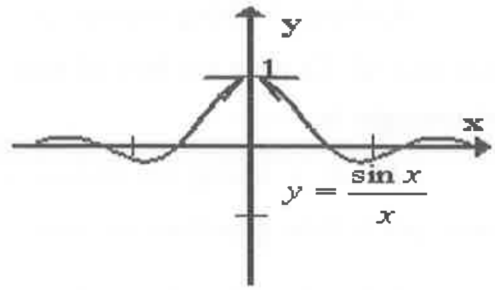
không xác định tại $x=0$ nhưng

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

nên nếu ta xét hàm

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 1 & \text{khi } x=0\end{cases}$$

thì hàm này liên tục với mọi x (hình 17).



Hình 17

BÀI TẬP CHƯƠNG 6

6.1. Tìm miền xác định của hàm số (trên tập số thực) được cho bởi:

a. $y=\sqrt{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ b. $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$.

c. $y=\lg[1-\lg(x^2-5x+6)]$.   d. $y=\arcsin(x-2)$.

e. $y=\arccos\dfrac{1-2x}{3}$.

6.2. Hàm f xác định trên R được gọi là hàm lẻ nếu $f(-x)=-f(x)$; là hàm chẵn nếu $f(-x)=f(x)$. Cho hàm $f(x)=\log_a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, hãy chứng minh nó là hàm lẻ và tìm hàm ngược của nó.

6.3. Chứng minh các công thức sau:

a) Nếu $x>0$ thì $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$, từ đó suy ra hệ thức tương ứng đối với $x<0$.

b) $\arcsin a+\arcsin b=\arcsin(a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2})$.

6.4. Người ta định nghĩa các ***hàm Hypebolic*** như sau:

Hàm sinhypebolic, ký hiệu $\sinh x$:

$f: R\to R,\ f(x)=\sinh x=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$.

Hàm coshypebolic, $g: R\to R,\ g(x)=\cosh x=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$.

a) Chứng tỏ rằng hàm $\sinh x$ là hàm là hàm lẻ và hàm $\cosh x$ là hàm chẵn.

b) Xuất phát từ đồ thị của hàm số e^x, e^{-x} hãy vẽ đồ thì các hàm $\sinh x$, $\cosh x$.

c) Tìm hàm ngược của hàm $\sinh x$. Phải hạn chế miền xác đinh của hàm $\cosh x$ như thế nào để nó có hàm ngược? Hãy tìm hàm ngược đó.

d) Chứng minh các công thức

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, $\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x$, $2\sinh x.\cosh x = \sinh 2x$

6.5. Cho dãy số xác định bởi: $u_1 = 1, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$

a) Chứng minh rằng với mọi n ta có $u_n < 2$.

b) Chứng minh rằng dãy $\{u_n\}$ tăng, từ đó hãy tìm giới hạn của dãy.

6.6. Tính các giới hạn:

1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4}$. 2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^3}{1-x}$. 3) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^2+5x+2}{2x^3+7x^2+6x}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \sin 2x \operatorname{cotg} x$. 5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$. 6) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$.

6.7. Tính các giới hạn:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin x^2}$. 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x}}{\sin 4x}$. 3) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{\arcsin(x+1)}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-2x}-1}{x}$. 5) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x-e}{x-1}$. 6) $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln x - 1}{x-e}$.

7) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1-2x}$. 8) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$. 9) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1+\sqrt{2x^2+1}}{x}$.

10) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{cotg}(\frac{\pi}{4}-x)}$. 11) $\lim\limits_{x\to +\infty} x \operatorname{arccotg} x$. 12) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x - \sqrt{x^2+5x})$.

6.8. Cho hàm số xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{khi } x \le 1, \\ 3-ax^2 & \text{khi } x > 1. \end{cases}$$

Tìm a để hàm f liên tục với mọi x? Vẽ đồ thị của hàm f với a vừa tìm được .

6.9. Tìm các điểm gián đoạn và vẽ đồ thị của hàm số cho bởi:

$$f(x) = \frac{2|x-1|}{x^2-x^3}$$

6.10. Dùng tính chất của hàm liên tục để chứng minh rằng:

a) Phương trình $x^5 - 3x = 1$ có nghiệm trong khoảng (1, 2).

b) Phương trình $x.2^x = 1$ có nghiệm dương nhỏ hơn 1.

6.11. Chứng tỏ rằng hàm f xác định bởi $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ với $x \neq 0$, $f(0) = 0$ liên tục với mọi x.

6.12. Tìm và phân loại điểm gián đoạn của các hàm số sau:

1. $f(x) = \begin{cases} 1/(x-1), & x < 0, \\ (x+1)^2, & 0 \le x \le 2, \\ 1-x, & x > 2. \end{cases}$ 2. $f(x) = \dfrac{|x+2|}{x+2}$.

3. . $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x^2 - x^3}$ 4. $f(x) = \dfrac{1}{\ln|x-1|}$. 5. $f(x) = \arctan\dfrac{1}{x^2}$.

Chương 7
PHÉP TÍNH VI PHÂN CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

§1. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ

Có nhiều vấn đề trong thực tế dẫn đến việc tính giới hạn dạng

$$\lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

Ví dụ 7.1. Một điểm chuyển động trên một đường thẳng theo quy luật xác định bởi hàm $s = f(t)$, trong đó s chỉ vị trí của điểm ở trên đường ứng với thời điểm t (tính theo một gốc vị trí và gốc thời gian nào đó). Như vậy trong khoảng thời gian từ t_1 đến t_2 điểm chuyển động được một quãng đường $f(t_2) - f(t_1)$. Tốc độ trung bình của điểm trong khoảng thời gian $[t_1, t_2]$ là

$$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Nhưng nếu muốn tính tốc độ của điểm tại thời điểm t_1 (tốc độ tức thời) thì ta phải xét giới hạn

$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Các giới hạn như trên đưa ta đến khái niệm đạo hàm.

1.1 Định nghĩa đào hàm của hàm số

Định nghĩa 7.1 *Giả sử hàm* $y = f(x)$ *là một hàm số xác định trong một khoảng nào đó chứa điểm* x_0. *Khi đó ta gọi đạo hàm của hàm số* $y = f(x)$ *tại điểm* x_0 *là giới hạn (nếu có) khi* $x \to x_0$ *của tỷ số*

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Ký hiệu đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0 là $f'(x_0)$ hay $y'_{x=x_0}$. Như vậy nếu hàm $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Ví dụ 7.2. 1) Hàm $f(x)=x^2$ có đạo hàm tại x_0 và $f'(x_0)=2x_0^2$. Thật vậy, ta có

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x+x_0)=2x_0.$$

2) Hàm $f(x)=|x|$ không có đạo hàm tại $x=0$. Thật vậy, xét tỷ số:

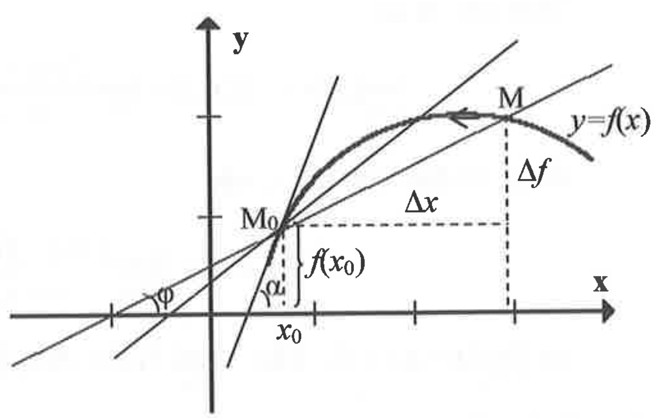
$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1 & \text{khi } x>0,\\ -1 & \text{khi } x<0,\end{cases}$$

khi $x\to 0^+$ thì giới hạn của tỷ số trên bằng 1, còn bằng -1 khi $x\to 0^-$. Do đó giới hạn trái và giới hạn phải khác nhau, hay tỷ số đó không tồn tại giới hạn tại điểm 0. Như vậy hàm không có đạo hàm tại 0.

1.2 Ý nghĩa của đạo hàm

1.2.1. Ý nghĩa hình học

Người ta định nghĩa tiếp tuyến với một đường cong tại điểm M_0 là vị trí giới hạn của cát tuyến MM_0 khi M dần tới M_0. Hệ số góc của cát tuyến MM_0 là



Hình 19

$$\tan\varphi = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Khi điểm M dần tới điểm M_0, nếu đường cong có tiếp tuyến, thì $\tan\varphi \to \tan\alpha$ là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T. Từ đó ta có *đạo hàm hàm số* $y = f(x)$ *tại điểm* x_0 *cho ta hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm* M_0 (hình 18) $\tan\alpha = f'(x_0)$.

1.2.2. Ý nghĩa cơ học

Giả sử một điểm chuyển động trên một đường với quy luật có phương trình $s = f(t)$. Khi đó *đạo hàm hàm* $f(t)$ *tại* t_0 *cho ta tốc độ* v *của chuyển động ở lúc* t_0 *là* $v = f'(t_0)$.

1.2.3. Ý nghĩa tổng quát

Hàm số $y = f(x)$ cho ta mối liên hệ giữa hai đại lượng biến thiên x và y. Như vậy đạo hàm $f'(x_0)$ cho ta tốc độ biến thiên của hàm số tại điểm x_0.

Nhiều vấn đề trong vật lý, hoá học, sinh học như tốc độ truyền nhiệt, mật độ phân phối vật chất, tốc độ phản ứng, tốc độ phát triển,.... đều có liên quan đến khái niệm đạo hàm.

1.3. Mối liên hệ giữa liên tục và đạo hàm

Hàm f *có đạo hàm tại* x_0 *thì nó liên tục tại đó.*

Thật vậy, ta có

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)] = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0).$$

do f có đạo hàm tại x_0 nên

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

và $\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0) = 0$. Vậy $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)] = 0$ hay

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

nghĩa là hàm f liên tục tại x_0.

Chú ý điều ngược lại chưa chắc đúng. Chẳng hạn hàm $f(x)=|x|$ liên tục tại điểm 0 nhưng lại không có đạo hàm tại điểm đó (xem ví dụ 7.2).

1.4. Các phép toán đối với đạo hàm

Dựa trên các phép tính đối với giới hạn và định nghĩa của đạo hàm ta có:

1.4.1. Đạo hàm của tổng, tích, thương

Nếu các hàm $u(x), v(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì

- Hàm tổng $u(x)+v(x)$ cũng có đạo hàm tại x_0 và

$$\left(u(x)+v(x)\right)'_{x=x_0}=u'(x_0)+v'(x_0).$$

- Hàm tích $u(x).v(x)$ cũng có đạo hàm tại x_0 và

$$\left(u(x).v(x)\right)'_{x=x_0}=u'(x_0).v(x_0)+u(x_0).v'(x_0).$$

- Hàm thương $u(x)/v(x)$, với điều kiện $v(x_0)\neq 0$, cũng có đạo hàm tại x_0 và

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'_{x=x_0}=\frac{u'(x_0).v(x_0)-u(x_0).v'(x_0)}{v^2(x_0)}.$$

1.4.2. Đạo hàm của hàm số hợp

Nếu hàm $u(x)$ có đạo hàm tại x_0, hàm $f(u)$ cũng có đạo hàm tại $u=u_0=u(x_0)$ thì hàm hợp $f\left(u(x)\right)$ cũng có đạo hàm tại x_0 và

$$\left[f\left(u(x)\right)\right]'_{x=x_0}=f'(u_0).u'(x_0).$$

1.4.3. Đạo hàm của hàm số ngược

Giả sử hàm $y=f(x)$ có hàm ngược là $x=f^{-1}(y)$ xác định trong một lân cận của $y=y_0=f(x_0)$. Khi đó nếu hàm $y=f(x)$ có đạo hàm khác 0 tại x_0 thì hàm $x=f^{-1}(y)$ cũng có đạo hàm tại y_0 và:

$$\left(f^{-1}(y_0)\right)' = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

1.5 Bảng đạo hàm cơ bản

Dùng định nghĩa của đạo hàm và các phép tính đối với đạo hàm ta thành lập được bảng sau:

Bảng 1. Bảng đạo hàm cơ bản

TT	Hàm $f(x)$	Đạo hàm $f'(x)$	TT	Hàm $f(x)$	Đạo hàm $f'(x)$
1	C =hằng số	0	8	a^x	$a^x \ln a$
2	$x^\alpha, \alpha \in R$	$\alpha x^{\alpha-1}$	9	e^x	e^x
3	$\sin x$	$\cos x$	10	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4	$\cos x$	$-\sin x$	11	$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
5	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	12	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
6	$\cot x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$	13	$\text{arccot}\, x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
7	$\ln\|x\|$	$\frac{1}{x}$	14	$\log_a \|x\|$, $a > 0$	$\frac{1}{x \ln a}$

Ta chứng minh một số công thức:

Công thức 7: Xét hàm $y = \ln x$ với $x > 0$. Đặt $x = x_0 + \alpha$ ta có

$$\frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} = \frac{\ln(x_0+\alpha) - \ln x_0}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\ln\left(1 + \frac{\alpha}{x_0}\right).$$

khi $x \to x_0$ thì $\alpha \to 0$. Do

$$\ln\left(1+\frac{\alpha}{x_0}\right) \sim \frac{\alpha}{x_0}$$

nên

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\ln x-\ln x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\frac{\alpha}{x_0}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\alpha}.\frac{\alpha}{x_0}=\frac{1}{x_0}.$$

Vậy $\quad (\ln x)'_{x=x_0}=\dfrac{1}{x_0}$.

Do x_0 là số dương tuỳ ý nên với $x>0$ thì $\quad (\ln x)'=\dfrac{1}{x}. \quad (*)$

Xét hàm $y=\ln(-x)$ với $x<0$. Đặt $u=-x$ thì $u>0$, theo (*) ta có

$$y=\ln u \Rightarrow y'_u=\frac{1}{u};\quad u=-x\Rightarrow u'_x=-1.$$

Theo quy tắc hàm hợp thì

$$[\ln(-x)]'_x=y'_x=y'_u.u'_x=\frac{1}{u}.(-1)=\frac{1}{x}. \qquad (**)$$

Có thể viết chung (*) và (**) dưới dạng công thức số 7.

Chứng minh công thức 8. Hàm $y=a^x$ có hàm ngược là

$$x=\log_a y=\frac{\ln y}{\ln a}.$$

Theo quy tắc đạo hàm của hàm ngược ta có

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\dfrac{1}{y\ln a}}=y\ln a=a^x\ln a.$$

Công thức 2. Ta viết $x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$. Xét hàm hợp

$y=e^u$ khi $u=\alpha\ln x \Rightarrow y'_x=y'_u.u'_x=e^u.\dfrac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$.

Ví dụ 7.3. Tính đạo hàm cấp một của các hàm số

1) $y=\sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}$, suy ra $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4\cos^2\dfrac{x}{2}\sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}}$.

2) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$; $y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

3) $y=e^{-x^2}$; $\qquad y'=(-2x)e^{-x^2}=-2xe^{-x^2}$.

4) $y=\operatorname{arctg}^2\dfrac{1}{x}$; $\quad y'=2.\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\dfrac{2}{1+x^2}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

5) $y=x^x$, $x>0$, không thể áp dụng ngay công thức 2 hoặc 8. Ta viết

$y=x^x=e^{x\ln x}$, suy ra $y'=e^{x\ln x}(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$.

Khi đó có thể dùng phương pháp đạo hàm loga như sau:

- Lấy logarit cả hai vế của $y=x^x$ ta được $\ln y=x\ln x$.

- Lấy đạo hàm theo x hai vế của biểu thức vừa nhận được

$$(\ln y)'=(x\ln x)'\Rightarrow\frac{y'}{y}=\ln x+1.$$

Từ đó suy ra

$$y'=y.(\ln x+1)=x^x(\ln x+1).$$

1.6. Đạo hàm cấp cao

Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên khoảng (a,b), giả sử $f(x)$ khả vi tại mọi điểm $x\in(a,b)$, khi đó hàm đạo hàm $f'(x)$ cũng có thể khả vi và đạo hàm của $f'(x)$ được gọi là đạo hàm cấp hai của $f(x)$, ký hiệu là $f''(x)$ hay $\dfrac{d^2f}{dx^2}$, tiếp tục quá trình này ta có định nghĩa đạo hàm cấp n như sau :

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng (a,b). Hàm số $f(x)$ được gọi là khả vi n lần trên (a,b) nếu $f(x)$ khả vi $(n-1)$ lần trên (a,b) và đạo hàm cấp $(n-1)$ của $f(x)$ cũng khả vi. Khi đó đạo hàm cấp n của hàm $f(x)$ được định nghĩa như sau :

$$f^{(n)}(x) := \left[f^{(n-1)}(x)\right]'.$$

Trong cơ học, nếu chuyển động của một đường thẳng có phương trình $s = f(t)$ thì đạo hàm cấp một $f'(t_0)$ cho ta tốc độ chuyển động tại thời điểm $t = t_0$, đạo hàm cấp hai $f''(t_0)$ cho ta gia tốc của chuyển động tại $t = t_0$.

Ví dụ 7.4.

1) Hàm $y = x^n$, với n là một số nguyên dương, có đạo hàm tới mọi cấp trên tập hợp số thực R.

Với $k < n$: $y^{(k)} = n(n-1)...(n-k+1)x^{n-k}$.

Với $k = n$: $y^{(k)} = n!$.

Với $k > n$: $y' = 0$.

2) Hàm $y = \sin x$ có đạo hàm tới mọi cấp trên R và

$$y^{(n)} = \sin(x + n\pi/2).$$

Thật vậy, với $n = 1$ thì ta có công thức đúng: $y' = \cos x = \sin(x + \pi/2)$. Giả sử công thức đó đúng với $n-1$, tức là

$$y^{(n-1)} = \sin[x + (n-1)\pi/2],$$

ta sẽ chứng minh nó đúng cho n.

$$y^{(n)} = [y^{(n-1)}]' = \cos[x + (n-1)\pi/2] = \sin(x + n\pi/2).$$

Tương tự ta cũng chứng minh được , nếu $y = \cos x$ thì

$$y^{(n)} = \cos(x + n\pi/2).$$

§2. VI PHÂN CỦA HÀM SỐ

2.1. Vi phân là phần chính của số gia hàm số

Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = x_0$. Khi đó ta có

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right]=0.$$

Điều đó chứng tỏ lượng

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)$$

là một vô cùng bé khi $x \to x_0$. Đặt

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)=\alpha$$

với α là một vô cùng bé khi $x \to x_0$. Từ đó, ta có

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\alpha(x-x_0). \tag{7.1}$$

Đặt $\Delta x = x - x_0, \Delta f = f(x) - f(x_0)$ thì (7.1) trở thành

$$\Delta f = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x.$$

Khi $x \to x_0$ thì Δx là một vô cùng bé. Nếu $f'(x_0) \neq 0$ thì lượng $f'(x_0)\Delta x$ là một vô cùng bé cùng bậc với Δx, còn lượng $\alpha\Delta x$ một vô cùng bé cấp cao hơn Δx. Khi đó ta nói lượng $f'(x_0)\Delta x$ là phần chính của vô cùng bé Δf khi $x \to x_0$.

Quan sát biểu thức (2.2) ta thấy số gia Δf của hàm số f được phân tích thành hai thành phần: thành phần thứ nhất là phần chính của Δf, thành phần thứ hai là một vô cùng bé có cấp cao hơn Δf. Ta đi tới khái niệm vi phân của hàm số.

Định nghĩa 7.2 *Vi phân của hàm số* $y = f(x)$ *tại điểm* $x = x_0$ *là phần chính của số gia* $\Delta f\left(x_0\right)$; *nó khác số gia* $\Delta f\left(x_0\right)$ *bởi một lượng vô cùng bé có cấp cao hơn* Δx.

Vi phân của hàm số được kí hiệu là $df(x_0)$ hay nếu không chú ý tới giá trị cụ thể của x_0 thì ta viết df hay dy. Vậy nếu hàm f có đạo hàm tại x_0 thì theo cách phân tích trên ta có

$$df\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right)\Delta x$$

hay

$$dy = f'\left(x\right)\Delta x. \qquad (7.2)$$

Nếu hàm f *có đạo hàm tại* $x = x_0$ *thì nó cũng có vi phân tại* x_0 *và vi phân của nó được cho bởi công thức (7.2).*

Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng ngược lại, *nếu hàm* f *có vi phân tại* $x = x_0$ *thì nó cũng có đạo hàm tại* x_0. Thật vậy, hàm f có vi phân nên ta có thể phân tích số gia Δf của nó thành

$$\Delta f\left(x_0\right) = A\Delta x + \alpha\Delta x,$$

trong đó $A \neq 0, \alpha \to 0$ khi $\Delta x \to 0$. Chia cả hai vế cho Δx ta được

$$\frac{\Delta f\left(x_0\right)}{\Delta x} = A + \alpha;$$

từ đó

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A.$$

Giới hạn của tỷ số trên tồn tại, vậy hàm f có đạo hàm tại x_0 và đạo hàm đó bằng A, hay ta viết

$$f'\left(x_0\right) = A.$$

Do kết quả trên, sau này ta cũng gọi *một hàm có đạo hàm là hàm khả vi*.

Chú ý. Với hàm $y = x$ ta có $dy = dx = 1.\Delta x$. Tức là nếu x là biến số độc lập thì số gia của nó bằng vi phân của nó $dx = \Delta x$, vì vậy biểu thức của vi phân hàm số f còn được viết dưới dạng

$$df(x_0) = f'(x_0)dx \text{ hay } dy = f'(x_0)dx.$$

Từ đó ta có

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} \text{ hay } y' = \frac{dy}{dx}.$$

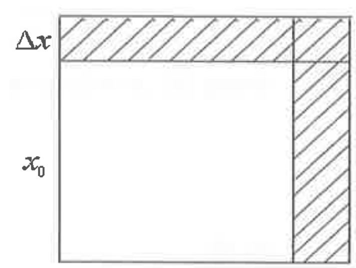
Đạo hàm hàm số là tỷ số của vi phân hàm số và vi phân của biến số độc lập.

Ví dụ 7.5. Tìm số gia và tìm vi phân của hàm số $f(x) = x^2$ tại điểm x_0

$$\Delta f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x - \Delta x^2,$$
$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = 2x_0\Delta x.$$

Ta thấy rằng vi phân là phần chính của số gia, nó khác số gia bởi một vô cùng bé có bậc hai so với Δx.

Quan sát trên hình ta thấy giá trị hàm $f(x) = x^2$ tại x_0 là diện tích hình vuông có cạnh x_0; số gia $\Delta f(x_0)$ là phần diện tích tăng thêm khi cạnh hình vuông được tăng thêm Δx còn vi phân $df(x_0)$ là phần diện tích nói trên nhưng bỏ đi hình vuông con có diện tích Δx^2.



Hình 20

Nếu $|\Delta x|$ khá bé ta có thể coi vi phân là giá trị xấp xỉ của số gia, từ đó ta có công thức tính giá trị gần đúng của số gia hàm số

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \cong f'(x_0)\Delta x.$$

Ta suy ra công thức tính giá trị xấp xỉ của hàm f tại $x_0 + \Delta x$:

$$f(x_0 + \Delta x) \cong f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \qquad (7.3)$$

Ví dụ 7.6. Tính gần đúng $\sqrt[4]{17}$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt[4]{x}$. Áp dụng (2.4) ta có

$$\sqrt[4]{x_0+\Delta x} \cong \sqrt[4]{x_0} + \frac{1}{4\sqrt[4]{x_0^{\,3}}}\Delta x.$$

Cho $x_0=16, \Delta x=1$ ta có

$$\sqrt[4]{17} \cong \sqrt[4]{16} + \frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}}\cdot 1 = 2 + \frac{1}{4\cdot 2^3} = 2,031.$$

Áp dụng công thức (7.3) cho các hàm số $\sqrt[n]{x}, \sin x, \ln x$ ta có

a) $\sqrt[n]{x_0+\Delta x} \cong \sqrt[n]{x_0} + \dfrac{\Delta x}{n\sqrt[n]{x_0^{\,n-1}}}$. Cho $x_0=1, \Delta x=\alpha$ thì ta có

$$\sqrt[n]{1+\alpha} \cong 1+\frac{\alpha}{n} \text{ với } |\alpha| \text{ khá bé.}$$

b) $\sin(x_0+\Delta x) \cong \sin x_0 + \cos x_0 \Delta x$. Cho $x_0=0, \Delta x=\alpha$ ta có

$$\sin\alpha \cong \alpha \text{ với } |\alpha| \text{ khá bé.}$$

c) $\ln(x_0+\Delta x) \cong \ln x_0 + \dfrac{\Delta x}{x_0}$. Cho $x_0=1, \Delta x=\alpha$ ta có

$$\ln(1+\alpha) \cong \alpha \text{ với } |\alpha| \text{ khá bé.}$$

2.2. Các quy tắc tính vi phân

Theo định nghĩa, vi phân của hàm số tại x_0 là $dy=y'dx$, kết hợp với các quy tắc tính đạo hàm ta có

1). Nếu các hàm số $u(x), v(x)$ khả vi tại x_0 thì các hàm tổng, tích, thương (với điều kiện $v(x_0)\neq 0$) cũng khả vi và

$$\begin{aligned} &d(u+v)=du+dv,\\ &d(uv)=vdu+udv,\\ &d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}, v(x_0)\neq 0. \end{aligned}$$

2). Nếu hàm $u = u(x)$ khả vi tại x_0, hàm $y = f(u)$ khả vi tại $u_0 = u(x_0)$ thì hàm hợp $y = f\left[u(x)\right]$ khả vi và

$$df\left[u(x)\right] = \left[f'(u_0) \cdot u'(x_0)\right]dx = f'(u_0)du(x_0).$$

Về mặt hình thức ta vẫn có vi phân của hàm số bằng đạo hàm của hàm nhân với vi phân của biến số không phân biệt biến số đó là độc lập hay phụ thuộc.

2.3. Vi phân cấp cao

Giả sử hàm số $y = f(x)$ khả vi trong một khoảng nào đó. Khi ấy, vi phân $dy = f'(x)dx$ phụ thuộc vào x, còn dx là hằng số nếu x là biến số độc lập; nếu hàm số $f'(x)dx$ khả vi tại x_0 thì vi phân $d\left[f'(x)dx\right]$của nó được gọi là vi phân cấp hai của hàm số xuất phát f, ta ký hiệu vi phân cấp hai là $d^2 f$ hay $d^2 y$. Vậy

$$d^2 y = d(dy) = d\left[f'(x)dx\right] = \left[f'(x_0)dx\right]'dx = f''(x_0)dx^2.$$

Vi phân cấp hai của hàm $f(x)$ tại điểm x_0 bằng đạo hàm cấp hai của f tại điểm x_0 nhân với bình phương của vi phân biến số độc lập

$$d^2 y = f''(x_0)dx^2.$$

Ta cũng có thể viết đạo hàm cấp hai của f dưới dạng: $f''(x_0) = \dfrac{d^2 y(x_0)}{dx^2}$.

Bằng quy nạp ta chứng tỏ được, nếu hàm f với biến số x độc lập có đạo hàm tới cấp n tại $x_0$thì nó cũng có vi phân cấp n tại x_0, ký hiệu $d^n y(x_0)$ và

$$d^n y(x_0) = f^{(n)} y(x_0)dx^n.$$

Từ đó ta có

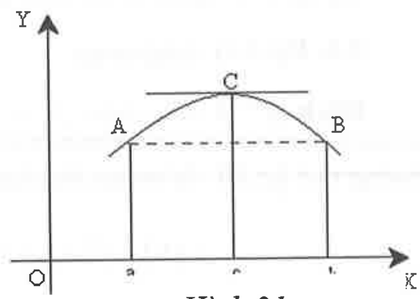
$$f^{(n)} y(x_0) = \frac{d^n y(x_0)}{dx^n}.$$

§3. MỘT SỐ ĐỊNH LÝ VỀ HÀM KHẢ VI VÀ ỨNG DỤNG

3.1. Định lý Rolle

Định lý 7.3 *Nếu hàm f liên tục trên khoảng kín* [a,b]*; khả vi trong khoảng (a,b); $f(a)=f(b)$ thì trong khoảng mở (a,b) có ít nhất một điểm c sao cho $f'(c)=0$.*

Chứng minh. Hàm f liên tục trên [a,b] nên theo tính chất hàm liên tục trên khoảng kín hàm f đạt giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m trên [a,b]



Hình 21

Nếu nó đạt cả hai giá trị đó tại hai đầu mút a, b thì do $f(a)=f(b)$ ta suy ra $M=m$, khi đó hàm là không đổi trên [a,b] nên đạo hàm

$$f'(x)=0\,, x\in[a,b].$$

Xét trường hợp nó đạt ít nhất một trong hai giá trị M, m tại một điểm nằm trong (a,b), chẳng hạn nó đạt giá trị lớn nhất M tại $c\in(a,b)$. Khi đó $M=f(c)\geq f(x)$ với mọi $x\in(a,b)$.

- Với $x<c$ thì $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0$ suy ra $\lim\limits_{x\to c-0}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0$.

- Với $x>c$ thì: $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0$ suy ra $\lim\limits_{x\to c+0}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0$.

Do hàm f khả vi tại c nên

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

tồn tại giới hạn bên phải và bên trái tại c phải bằng nhau. Vì vậy, theo định lý 7.3, suy ra

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=0.$$

Ý nghĩa hình học của định lý trên là: *Trên cung AB biểu diễn hàm* $f(x)$ *thoả mãn các điều kiện của định lý, có một điểm* C *tại đó tiếp tuyến song song với trục* Ox.

Từ định lý Rolle ta có định lý quan trọng sau.

3.2. Định lý Lagrange

Định lý 7.4 *Nếu hàm* $f(x)$ *liên tục trên khoảng kín* $[a,b]$, *khả vi trên khoảng mở* (a,b) *thì trong khoảng* (a,b) *có ít nhất một điểm* c *sao cho*

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \qquad (7.4).$$

Chứng minh: Xét hàm phụ

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}(x-a).$$

Do hàm $f(x)$ liên tục và khả vi nên hàm F cũng liên tục trên $[a,b]$, khả vi trong (a,b). Hơn nữa $F(a)=f(a)$; $F(b)=f(a)$ hàm F thỏa mãn các điều kiện của định lý Rolle nên tồn tại $c\in(a,b)$ để $F'(c)=0$. Ta có

$$F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}.$$

Từ đó

$$\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}=f'(c).$$

Ta suy ra công thức phải chứng minh (7.4).

Về mặt hình học, định lý Lagrange nói lên rằng: *Trên cung AB có ít nhất một điểm* C *tại đó tiếp tuyến song song với dây cung AB.*

Chú ý. Nếu ta thêm điều kiện $f(a)=f(b)$ thì từ (7.4) ta có $f'(c)=0$ tức là ta lại có định lý Rolle. Công thức (7.4) còn được gọi là *công thức số gia hữu hạn*.

Đặt $a=x_0, b=x_0+\Delta x$, số c nằm trong khoảng $(x_0, x_0+\Delta x)$ nên có thể viết $c=x_0+\theta\Delta x$ với $0<\theta<1$, công thức (7.4) có dạng

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'\left(x_0+\theta\Delta x\right)\Delta x .$$

Bây giờ ta đi xét một ứng dụng của định lý Lagrange trong việc khảo sát tính đơn điệu của một hàm số.

Định nghĩa 7.5 *Hàm $y=f(x)$ là đơn điệu tăng trên một tập hợp E nếu với x_1, x_2 bất kì thuộc E và $x_1<x_2$ thì $f(x_1)<f(x_2)$.*

Hàm $y=f(x)$ là đơn điệu giảm trên một tập hợp E nếu với x_1, x_2 bất kì thuộc E và $x_1<x_2$ thì $f(x_1)>f(x_2)$.

Định lý 7.6 *Giả sử f là một hàm liên tục và khả vi trong một khoảng E nào đó.*

1). Nếu $f'(x)=0$, với mọi $x\in E$ thì hàm f không đổi trên E.

2). Nếu $f'(x)>0$, với mọi $x\in E$ thì hàm f tăng trên E.

3). Nếu $f'(x)<0$, với mọi $x\in E$ thì hàm f giảm trên E.

Chứng minh. Lấy hai điểm x_1, x_2 bất kỳ thuộc E rồi áp dụng định lý Lagrange cho hàm f trên $[x_1, x_2]$ ta tìm được điểm $c\in(x_1, x_2)$ sao cho

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1). \qquad (*)$$

Nếu $f'(x)=0, \forall x\in E$ thì $f'(c)=0$ ta suy ra $f(x_1)=f(x_2)$; Giá trị của hàm số f tại hai điểm bất kỳ của E đều bằng nhau nên hàm f có giá trị không đổi trên E.

Nếu $f'(x)>0, \forall x\in E$ thì $f'(c)>0$. Từ (*) suy ra với mọi x_1, x_2 mà $x_1<x_2$ thì $f(x_1)<f(x_2)$, suy ra hàm f tăng.

Nếu $f'(x)<0, \forall x\in E$ thì $f'(c)<0$, từ đó $x_1<x_2$ thì $f(x_1)>f(x_2)$, suy ra hàm f giảm.

Ví dụ 7.7.

1) Chứng minh rằng $\forall x\in[-1,1]$ ta có $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$.

Xét hàm số $f(x)=\arcsin x+\arccos x$. Nó liên tục trên $[-1,1]$, khả vi trong $(-1,1)$ và $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$ tại mọi $\forall x\in(-1,1)$ nên nó không đổi trong $(-1,1)$. Để tính giá trị không đổi của nó ta có thể tính giá trị của hàm số tại một điểm bất kỳ thuộc khoảng $(-1,1)$, chẳng hạn tại $x=0$. Ta có

$$f(0)=\arcsin 0+\arccos 0=\frac{\pi}{2}.$$

Vậy, trong khoảng $(-1,1)$ ta có $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$.

Mặt khác

$$f(-1)=\arcsin(-1)+\arccos(-1)=-\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{\pi}{2},$$

$$f(1)=\arcsin(1)+\arccos(1)=\frac{\pi}{2}+0=\frac{\pi}{2}.$$

Vậy với $\forall x\in[-1,1]$, suy ra $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$.

2) Tìm các khoảng đơn diệu của hàm số $f(x)=e^{-x^2}$. Hàm số xác định với mọi x. Ta có $y'=-2xe^{-x^2}$. Do $e^{-x^2}>0$ với mọi x nên dấu của y' ngược với dấu của x.

Với $x<0$ thì $y'>0$ hàm f tăng. Với $x>0$ thì $y'<0$ hàm f giảm.

Từ định lý Rolle ta cũng suy ra:

Định lý 7.7 (Cauchy) *Nếu các hàm* $f(x)$, $g(x)$ *liên tục trên* $[a,b]$, *khả vi trong* (a,b), $g'(x)\neq 0, \forall x\in(a,b)$ *thì có ít nhất một điểm* $c\in(a,b)$ *sao cho*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Để chứng minh chỉ việc áp dụng định lý Rolle cho hàm phụ

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left[g(x)-g(a)\right].$$

Định lý Lagrange là một trường hợp đặc biệt của định lý Cauchy với $g(x)=x$.

Quy tắc L'Hopital (Lopital). *Giả sử các hàm* $f(x), g(x)$ *liên tục và khả vi trong một miền nào đó, khi* $x\to x_0$ *hoặc khi* $x\to\infty$ *thì cả hai hàm* $f(x), g(x)$ *cùng tiến tới không (hoặc cùng tiến tới vô cùng). Khi đó nếu giới hạn của tỷ số* $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ *tồn tại thì giới hạn của tỷ số* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *cũng tồn tại và*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ta chứng minh quy tắc trên theo trường hợp đơn giản khi $f(x_0)=g(x_0)=0$. Khi đó theo định lý Cauchy ta có

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Do $c\in(x_0,x)$ nên khi $x\to x_0$ thì $c\to x_0$. Từ đó

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to x_0}\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Giới hạn vế phải tồn tại nên giới hạn vế trái cũng tồn tại. Ta công nhận các trường hợp còn lại của quy tắc.

Quy tắc Lopital có ứng dụng quan trọng trong việc tính toán các giới hạn có dạng vô định $\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty}$.

Các ví dụ.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-e^{x}}{\cos x}=1$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1-2x}{2x^{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-2}{4x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4e^{2x}}{4}=1$.

3. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}=0\quad(\alpha>0)$.

4. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{a^{x}}{x^{n}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{a^{x}\ln a}{nx^{n-1}}=\ldots=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{a^{x}(\ln a)^{n}}{n!}=\infty\quad(a>1)$.

Các thí dụ 3 và 4 nói lên rằng khi $x\to\infty$ thì các hàm số $a^{x},x^{\alpha},\ln x$ là các vô cùng lớn nhưng hàm logarit tăng chậm hơn hàm luỹ thừa, hàm mũ tăng nhanh hơn hàm luỹ thừa.

Chú ý. Khi gặp các dạng vô định $0.\infty,\infty-\infty,1^{\infty},0^{\infty},0^{0},\infty^{0}$ người ta tìm cách biến đổi để đưa chúng về dạng $\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty}$ rồi áp dụng quy tắc Lopital.

Ví dụ. 1. $\lim\limits_{x\to 0}(x^{2}\ln x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x^{2}}}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^{3}}}=-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}x^{2}=0$.

2. Tìm $A=\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^{2}}}$. Nó có dạng 1^{∞}. Ta tìm giới hạn của logarit của nó. Đặt

$$A_{1}=\lim_{x\to 0}\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^{2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{-\tan x}{2x}=-\frac{1}{2}.$$

Do $A_1 = \ln A$ ta suy ra $A = e^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

3.3. Công thức Taylor

Trong §2.1 ta định nghĩa vi phân hàm số là phần chính của số gia hàm số:

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x \text{ với } \alpha \to 0 \text{ khi } \Delta x \to 0.$$

Đặt $\Delta x = h, x_0 + \Delta x = x$ thì ta có

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)h + \alpha h.$$

Nếu bỏ qua lượng αh thì $f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)h$ tức là ta đã xấp xỉ hàm số $f(x)$ bởi đa thức bậc nhất của h.

Trong phần này ta trình bày cách xấp xỉ hàm số $f(x)$ bởi đa thức bậc n của h

$$f(x) \cong P_n(h) = a_0 + a_1 h \; + + a_2 h^2 + \ldots + a_n h^n.$$

Muốn vậy ta giả thiết hàm $f(x)$ có đạo hàm tới cấp n và ta viết

$$f(x) = P_n(h) + \alpha h^n \text{ với } \alpha \to 0 \text{ khi } h \to 0.$$

Vấn đề đặt ra cần chọn các hệ số của đa thức như thế nào để điều kiện trên được thoả mãn tức là tìm đa thức $P_n(h)$ để

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - P_n(h)}{h^n} = \lim_{h\to 0} \alpha = 0.$$

Để ý rằng

$$\lim_{h\to 0}\left[f(x_0+h) - P_n(h)\right] = f(x_0) - a_0,$$

$$\lim_{h\to 0}\left[f'(x_0+h) - P_n'(h)\right] = f'(x_0) - a_1,$$

$$\lim_{h\to 0}\left[f''(x_0+h) - P_n''(h)\right] = f''(x_0) - 1.2a_2.$$

Một cách tổng quát

$$\lim_{h\to 0}\left[f^{(k)}(x_0+h)-P_n^{(k)}(h)\right]=f^{(k)}(x_0)-k!a_k.$$

Như vậy nếu ta chọn các hệ số của đa thức $P_n(h)$ sao cho $a_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, k=0,1,..,n$ thì các giới hạn ở vế trái bằng không và khi đó ta có thể tính giới hạn của tỷ số

$$\frac{f(x_0+h)-P_n(h)}{h^n}$$

bằng cách áp dụng quy tắc Lopital liên tục n lần.

Như vậy, nếu ta chọn các hệ số của đa thức $P_n(h)$ sao cho $a_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!},\ k=0,1,..,n$ thì đa thức $P_n(h)$ sẽ là phần chính bậc n của hàm số $f(x)$ và nó chỉ khác $f(x)$ bởi một vô cùng bé cấp cao hơn h^n.

Ta đã chứng minh được công thức Taylor:

Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục tới cấp n trong một miền chứa điểm x_0 thì

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n$$

với $\alpha\to 0$ *khi* $x\to x_0$. Thành phần R_n được gọi là *phần dư thứ n* của công thức.

Công thức Taylor cho phép ta khai triển một hàm bất kỳ thành đa thức của $(x-x_0)$. Đặc biệt khi $x_0=0$ thì ta có công thức Mac-Laurin

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\alpha x^n.$$

Nó cho phép khai triển một hàm bất kì (có đạo hàm liên tục tới cấp n) thành đa thức của x.

Ví dụ 7.8.

1) Khai triển Maclaurin của hàm số $f(x)=e^x$

Hàm số này có đạo hàm liên tục tới mọi cấp và $f^{(k)}(x)=e^x$ nên $f^{(k)}(0)=1$ với $k=0,1,\dots,n$. Do đó

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+R_n.$$

2) Khai triển Maclaurin của hàm số $f(x)=\sin x$

Hàm số này có đạo hàm liên tục tới mọi cấp và $f^{(k)}(x)=\sin(x+k\pi/2)$.

Từ đó:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+R_{2k-1}.$$

3) Khai triển Maclaurin của hàm số $f(x)=\cos x$

$$\cos x=x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+R_{2k}.$$

Chú ý. Nếu hàm số f có đạo hàm tới cấp $n+1$ thì người ta chứng minh được rằng có thể viết phần dư R_n của công thức Taylor dưới dạng:

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta\Delta x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\quad 0<\theta<1.$$

Công thức số gia hữu hạn Lagrange chính là một trường hợp đặc biệt của công thức Taylor cấp $n=0$ với phần dư viết theo dạng trên.

Nhờ cách viết công thức Taylor với phần dư mà người ta có thể dùng nó để tính gần đúng giá trị của hàm số và đánh giá sai số mắc phải.

Phần dư của khai triển hàm số $f(x)=e^x$ dưới là

$$R_n=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}<\frac{3^x}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Nếu muốn tính số e chính xác tới 10^{-3} thì cần phải xác định n sao cho

$$R_n < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3}.$$

Ta có $\frac{3}{6!} = 0,004 > 10^{-3}$; $\frac{3}{7!} = 0,0006 < 10^{-3}$.

Vậy để tính số e chính xác đến 10^{-3} thì ta sử dụng công thức khai triển Taylor với $x = 1$ và khai triển đến cấp $n = 6$ ta được

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{6!} = 2,7181.$$

Vậy, ta có $e = 2,718$.

Phần dư của khai triển $\sin x$ là

$$R_{2k-1} = (-1)^k \cos\theta x \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},\ 0 < \theta < 1.$$

Ta luôn có $|\cos\theta x| \le 1$ nên: $|R_{2k-1}| < \frac{|x^{2k+1}|}{(2k+1)!}$.

Chẳng hạn, để tính $\sin 36^0$ chính xác đến 10^{-3} ta cho trong (3.10) $x = \frac{\pi}{5}$ ta có

$$\frac{\left(\frac{\pi}{5}\right)^3}{3!} = 0,0413 > 10^{-3};\quad \frac{\left(\frac{\pi}{5}\right)^5}{5!} = 0,0008 < 10^{-3}.$$

Vậy

$$\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5} - \frac{\left(\frac{\pi}{5}\right)^3}{3!} = 0,587.$$

Phần dư của khai triển của $\cos x$ là $R_{2k} = (-1)^{k+1} \cos x\theta x \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}$.

3.4. Cực trị của hàm số

Định nghĩa 7.8 *Giả sử hàm số f xác định trong một khoảng mở E đủ nhỏ chứa điểm x_0.*

- Hàm số f có cực đại tại x_0 nếu với mọi $x \in E$ ta có $f(x) \le f(x_0)$.

- Hàm số f có cực tiểu tại x_0 nếu với mọi $x \in E$ ta có $f(x) \ge f(x_0)$.

Điểm x_0 tại đó hàm số có cực đại hoặc cực tiểu được gọi là ***điểm cực trị*** của hàm số.

Trong chứng minh định lý Rolle ta đã thấy: Nếu hàm số $f(x)$ khả vi có cực trị tại x_0 thì tại đó đạo hàm của hàm số bị triệt tiêu: $f'(x)=0$. Đó là điều kiện cần của cực trị. Nhưng *điều kiện đó **không đủ.*** Chẳng hạn hàm số $f(x)=x^3$ có đạo hàm triệt tiêu $f'(x)=3x^2=0$ tại $x=0$. Với

$$x<0 \quad f(x)<f(0)=0,$$
$$x>0 \quad f(x)>f(0)=0,$$

vậy, hàm số không có cực trị tại 0.

Điều kiện đủ của cực trị

Định lý 7.9 *Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trong khoảng (a,b) chứa điểm x_0, khả vi trong khoảng đó (có thể trừ tại x_0). Nếu đạo hàm $f'(x)$ đổi dấu khi x qua x_0 thì hàm có cực trị tại x_0.*

Cực trị đó là cực đại nếu $f'(x)$ đổi dấu từ + qua –.

Cực trị đó là cực tiểu nếu $f'(x)$ đổi dấu từ - qua +.

Chứng minh. Thật vậy, nếu $f'(x)>0$ trong (a,x_0) thì hàm số f tăng trong khoảng đó nên $f(x)<f(x_0)$. Nếu $f'(x)<0$ trong (x_0,b) thì hàm số f giảm trong khoảng đó nên $f(x)<f(x_0)$. Với mọi x thuộc lân cận của x_0 ta có $f(x)\le f(x_0)$. Vậy tại x_0 hàm số có cực đại.

Chứng minh tương tự cho trường hợp cực tiểu.

Chú ý. Không nhất thiết hàm số phải khả vi tại điểm cực trị x_0. Chẳng hạn, hàm số $f(x)=|x|$ có cực tiểu tại $x=0$ nhưng tại đó hàm số không khả vi.

Kết hợp với các kết quả trên ta có ***quy tắc tìm cực trị của hàm số:***

a. Tìm các điểm thuộc miền xác định của hàm số mà tại đó đạo hàm của hàm số triệt tiêu hoặc không tồn tại;

b. Xét dấu của đạo hàm tại lân cận các điểm đó, nếu đạo hàm có dấu khác nhau ở hai bên điểm đó thì điểm đang xét là điểm cực trị.

Ví dụ 7.9. Hàm số $f(x)=e^{-x^2}$ có cực đại tại $x=0$. Thật vậy, $f'(x)=-2xe^{-x^2}$, với $x<0$ thì $f'(x)>0$; với $x>0$ thì $f'(x)<0$ đạo hàm có dấu khác nhau ở hai bên điểm $x=0$.

Định lý 7.10 *Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục tới cấp hai ở lân cận điểm x_0 (kể cả tại cả x_0). Nếu $f'(x_0)=0$ và $f''(x_0)\neq 0$ thì hàm số có cực trị tại x_0. Cụ thể là:*

Nếu $f''(x_0)>0$ thì hàm số có cực tiểu tại x_0.

Nếu $f''(x_0)<0$ thì hàm số có cực đại tại x_0.

Chứng minh. Thật vậy, từ khai triển hàm số f theo công thức Taylor đến cấp hai

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\alpha(x-x_0)^2.$$

Do $f'(x_0)=0$ nên

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\alpha(x-x_0)^2, \alpha\to 0 \textit{ khi } x\to x_0.$$

Ở lân cận của x_0, dấu của $f(x)-f(x_0)$ là dấu của $f''(x_0)$. Do đó nếu $f''(x_0)>0$ thì $f(x)\geq f(x_0)$ hàm số có cực tiểu tại x_0. Nếu $f''(x_0)<0$ thì $f(x)\leq f(x_0)$ hàm số có cực đại tại x_0.

Ví dụ 7.10. Xét hàm số $f(x)=e^{-x^2}$, ta có: $f'(x)=-2xe^{-x^2}$; $f'(x)=0$ khi $x=0$, $f''(x)=-2\left(1-2x^2\right)e^{-x^2}$; $f''(0)=-2$. Hàm số có cực đại tại $x=0$.

3.5. Hàm số lồi, lõm, điểm uốn

Định nghĩa 7.11 *Đồ thị hàm số $f(x)$ được gọi là lồi (chính xác hơn là **lồi trên**) trên đoạn $[a,b]$ nếu nó nằm phía dưới mọi tiếp tuyến với đồ thị vẽ trong đoạn đó.*

*Đồ thị hàm số $f(x)$ được gọi là lõm (chính xác hơn là **lồi dưới**) trên đoạn $[a,b]$ nếu nó nằm phía trên mọi tiếp tuyến với đồ thị vẽ trong đoạn đó.*

Điểm trên đường cong ngăn cách phần lồi và phần lõm được gọi là ***điểm uốn.***

Định lý 7.12 *Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục tới cấp hai trong một miền chứa điểm x_0.*

Nếu trong miền đó $f''(x)>0$ thì đồ thị hàm số là lõm.

Nếu trong miền đó $f''(x)<0$ thì đồ thị hàm số là lồi.

Chứng minh. Ta khai triển hàm số f tại lân cận x_0 theo công thức Taylor đến cấp hai:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\alpha(x-x_0)^2.$$

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị tại $M_0(x_0,y_0)$ là

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),$$

gọi M là điểm có hoành độ x trên đường cong, P là điểm có hoành độ x trên tiếp tuyến tại $M_0(x_0,y_0)$, ta có

$$\overline{PM}=f(x)-y=\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\alpha(x-x_0)^2.$$

Do $\alpha \to 0$ *khi* $x \to x_0$ nên ở lân cận của x_0 dấu của $\overline{PM}$ là dấu của $f''(x_0)$. Từ đó:

Nếu $f''(x_0) > 0$ thì $\overline{PM} > 0$: điểm M nằm phía trên điểm P, tức là đường cong nằm phía trên tiếp tuyến: hàm số lõm trong lân cận x_0;

Nếu $f''(x_0) < 0$ thì $\overline{PM} < 0$: điểm M nằm phía dưới điểm P, tức là hàm số lồi trong lân cận x_0.

Từ kết quả trên ta suy ra rằng: Nếu tại x_0 ta có $f''(x_0) = 0$ và $f''(x)$ đổi dấu khi x qua x_0 thì hàm số $f(x)$ có điểm uốn tại x_0.

Ví dụ 7.11. Xét hàm số $f(x) = e^{-x^2}$, ta có: $f'(x) = -2xe^{-x^2}$;

$$f''(x) = -2\left(1 - 2x^2\right)e^{-x^2};\; f''(x) = 0 \text{ khi } x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

- Với $x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ và $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f'(x) > 0$ hàm lõm trong các khoảng đó.

- Với $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f'(x) < 0$ hàm lồi trong khoảng đó.

Tại $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ hàm có điểm uốn.

3.6. Khảo sát sự biến thiên của hàm số

Để khảo sát sự biến thiên và dạng của một hàm số cho bằng biểu thức giải tích $y = f(x)$ ta thường tiến hành theo các bước sau:

1. *Tìm miền xác định của hàm.* Nếu hàm là tuần hoàn thì chỉ cần khảo sát nó trong một khoảng có độ dài bằng chu kỳ. Nếu hàm chẵn hay lẻ thì chỉ cần khảo sát nó trên miền ứng với $x \geq 0$.

2. *Tìm các khoảng đơn điệu và các cực trị.*

3. *Tìm các khoảng lồi, lõm, điểm uốn nếu cần thiết.*

4. Nếu hàm có *nhánh vô tận*, cần xác định dạng của hàm đối với nhánh vô tận.

Đường cong biểu diễn hàm $y = f(x)$ có nhánh vô tận khi ít nhất một trong 2 tọa độ x hoặc y của một điểm M thuộc đường cong dẫn tới ∞.

Đường thẳng (D) là tiệm cận của đường cong (C) nếu khoảng cách MH từ một điểm M trên đường cong đến đường thẳng dần tới 0 khi M ra xa vô tận.

a) Nếu khi $x \to a$ mà $f(x) \to \infty$ thì *đường thẳng* $x = a$ *là đường* ***tiệm cận đứng*** của đường cong $y = f(x)$. Trong nhiều trường hợp cần phải phân biệt tiệm cận đứng phía phải (ứng với $x \to a+0$; hoặc tiệm cận đứng phía trái (ứng với $x \to a-0$)).

b) Nếu khi $x \to \infty$ mà $f(x) \to b$ thì *đường thẳng* $y = b$ *là đường* ***tiệm cận ngang*** của đường cong $y = f(x)$.

c) Nếu $f(x) \to \infty$ khi $x \to \infty$ và tồn tại các giới hạn

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - kx \right]$$

thì *đường thẳng* $y = kx + b$ *là* ***tiệm cận xiên*** *của đường cong* $y = f(x)$.

Trong trường hợp này ta có

$$\lim_{x \to \infty} \left[f(x) - (kx + b) \right] = 0.$$

Trong nhiều trường hợp cần phân biệt *tiệm cận xiên phía phải* (với $x \to +\infty$) và *tiệm cận xiên phía trái* (với $x \to -\infty$) .

Các thí dụ về khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số

Ví dụ 7.12. 1) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $f(x) = e^{-x^2}$.

Hàm xác định với mọi *x*.

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}; \quad f' = 0 \quad khi \quad x = 0; f(0) = 1.$$

Lập bảng xét dấu của đạo hàm để biết chiều biến thiên của hàm số:

X	$-\infty$		0		$+\infty$
F'		$+$	0	$-$	
F	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Với $x < 0$ hàm số tăng, với $x > 0$ hàm số giảm, tại $x = 0$ hàm số có cực đại, giá trị cực đại bằng 1.

Xét đạo hàm cấp hai và lập bảng xét dấu đạo hàm cấp hai để tìm các khoảng lồi, lõm của đường cong

$$f''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}; f'' = 0 \, khi \; x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		Lõm	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	lồi	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	lõm	

Đồ thị có hai điểm uốn

$$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}) \text{ và } (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}).$$

Khi $x \to \pm\infty$ thì $f(x) \to 0$, đường $y = 0$ là tiệm cận ngang.

Đồ thị của hàm có dạng hình chuông. Hàm này có nhiều ứng dụng trong lý thuyết xác suất.

2) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $f(x) = (5 - x)\sqrt[3]{x^2}$.

Hàm xác định với mọi x.

Ta có $f'(x) = -\sqrt[3]{x^2} + (5-x)\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{5(2-x)}{3\sqrt[3]{x}}$, suy ra $f'(x) = 0$ khi $x = 2$, ngoài ra đạo hàm không tồn tại khi $x = 0$.

Lập bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'		$-$	‖	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$3\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	$-\infty$

Tại $x = 0$ hàm có cực tiểu $f(0) = 0$; tại $x = 2$ hàm có cực đại

$$f(2) = 3\sqrt[3]{4}.$$

Ta chú ý rằng tại $x = 0$ hàm có tiếp tuyến thẳng đứng (đạo hàm vô cực); tại $x = 2$ hàm có tiếp tuyến nằm ngang (đạo hàm triệt tiêu).

- Ta không khảo sát tính lồi, lõm.

- Hàm có nhánh vô tận nhưng không có tiệm cận là đường thẳng. Đồ thị cắt trục Ox tại $x = 5$.

BÀI TẬP CHƯƠNG 7

7.1. Tính các đạo hàm của hàm số sau:

1) $y = (3x^2 + 5x - 1)^4$; 2) $y = \sqrt{5x^2 - 3x}$;

3) $y = \dfrac{1}{3x^4 - 2x^2 + 1}$; 4) $y = \sin\dfrac{1}{x^2}$;

5) $y = \dfrac{1}{\cos\sqrt{x}}$; 6) $y = \tan\sqrt{1 - 4x^2}$;

7) $y = \sin^2 x - \tan^2 2x$; 8) $y = \sin^2[(x-1)\sqrt{x}]$.

7.2. Tính các đạo hàm của hàm số:

1) $y = \arcsin\dfrac{2}{x}$; 2) $y = \dfrac{\arccos x}{x}$;

3) $y=\arctan^2\dfrac{1}{x}$;   4) $y=\arctan\dfrac{x+1}{x-1}$;

5) $y=\arctan\dfrac{\ln x}{3}$;   6) $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}$.

7.3. Tính các đạo hàm của:

1) $y=\ln^2 x$;   2) $y=\ln\sin x$;   3) $y=x^2\log_3 x$;

4) $y=\ln(1-2x)$;   5) $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$;   6) $y=ae^{-b^2x}$;

7) $y=e^{-\alpha^2\ln x}$;   8) $y=Ae^{-k^2x}\sin(\omega x+\varphi)$.

7.4. Với giá trị nào của a thì hai đường $y=ax^2$ và $y=\ln x$ sẽ tiếp xúc với nhau?

7.5. Chứng minh rằng nếu hàm $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=f'(x_0).$$

7.6. Tính đạo hàm của hàm $y=\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ rồi so sánh với đạo hàm hàm $z=\arcsin x$. Từ đó suy ra mối liên hệ giữa y và z.

7.7. Tính các tổng

1) $P_n=1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$.

2) $S_n=\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx$.

3) $C_n=\cos x+2\cos 2x+\ldots+n\cos nx$.

7.8. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm:

1) $y=xe^{-x^2}$;   2) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$;

3) $y=(1+x^2)\arctan x$;   4) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

7.9. Tìm đạo hàm cấp n của các hàm:

1) $y=e^{-x}$;   2) $y=\sin ax+\cos ax$;   3) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

7.10. Cho hàm số $y = x^3 - x$. Tính Δy và dy tại $x = 2$ khi lần lượt cho Δx các giá trị 1; 0,1; 0,01. Tính các giá trị tương ứng của tỷ số

$$R = \left|\frac{\Delta y - y}{\Delta y}\right|.$$

7.11. Tìm vi phân của các hàm số:

1) $y = 3x^2$; 2) $y = \sqrt{1 - x^2}$;

3) $y = \dfrac{x}{1 - x^2}$; 4) $y = \ln\left(\tan\dfrac{x}{4}\right) - \dfrac{x}{4}$.

7.12. Tính gần đúng: 1) $\sqrt[3]{0,95}$; 2) $\cos 60^0 06'$; 3) $\arctan 0,98$.

7.13. Dùng quy tắc Lopitan tính các giới hạn sau:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$; 2) $\lim\limits_{x \to 0}\left(x^2 \ln x\right)$; 3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{x + e^x}$;

4) $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$; 5) $\lim\limits_{x \to 0}(\sin x)^x$; 6) $\lim\limits_{x \to 0}(1 + x)^{\ln x}$.

7.14. Tìm cực trị của hàm số:

1. $y = \dfrac{x}{\ln x}$. 2. $y = x\sqrt{1 - x^2}$. 3. $y = 1 - (x - 2)^{\frac{4}{5}}$.

7.15. Tìm các giá trị a và b để hàm: $y = a\ln x + bx^2 + x$ có cực trị tại $x_1 = 1, x_2 = 2$.

7.16. Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số:

1) $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$; 2) $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$; 3) $y = \sqrt[3]{x^2(x - 2)}$.

7.17. Tìm đạo hàm các cấp tương ứng của các hàm số sau

1, Tìm $y^{(n)}(x)$, biết $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$;

2, Tìm $y^{(100)}(0)$, biết $y = \dfrac{1}{x^2 + 4}$;

3, Tìm $y^{(n)}(x)$, biết $y=\sin^2 x$;

4, Tìm $y^{(100)}(1)$, biết $y=(3x^2+1)\ln x$;

5, Tìm $y^{(100)}(x)$, biết $y=(2x+3)\cdot\cos 2x$;

6, Tìm $y^{(100)}(0); y^{(101)}(0)$, biết $y=\arctan x$;

7, Tìm $y^{(100)}(x)$, biết $y=x^2\cdot\sin x$;

8, Tìm $y^{(100)}(x)$, biết $y=\ln(2x+3)$;

9, Tìm $y^{(n)}(x)$, biết $y=\ln(x^2-3x+2)$.

7.18. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau

1. $x\ln\dfrac{3+x}{3-x}$. 2. $x\ln\ x^2-3x+2$. 3, $(x^2+x)\cos^2 x$.

4. $(3-2x)^2 e^{2-3x}$. 5. $y=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$.

7.19. Tìm khai triểm Maclaurin đến cấp n của các hàm số sau

1) $\dfrac{x^2+3e^x}{e^{2x}}, n=3$; 2) $\ln\dfrac{2-3x}{3+2x}, n=3$;

3) $\ln\left(x^2+3x+2\right), n=4$;

4) $(1-x)\ln(1+x)-(1+x)\ln(1-x), n=5$;

5, $f(x)=\dfrac{1}{x^2-5x+6}, n=3$.

7.20. Tìm khai triển Taylor tại x_0 đến cấp n của các hàm số sau

1) $(x^2-1)e^{2x}, x=-1, n=3$;

2) $\ln\left(2x+1\right), x=1/2, n=3$;

3, $f(x)=\ln(2+3x), x=1, n=3$; 4) $\dfrac{x^2+3x}{x+1}, x=1, n=3$;

5) $\ln(2+x-x^2), x=1, n=3$.

Chương 8
PHÉP TÍNH NGUYÊN HÀM

§1. NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

1.1. Nguyên hàm của hàm số một biến

Ở chương 7, ta xét bài toán tìm hàm số $f(x)$ là đạo hàm của hàm số $F(x)$ cho trước. Trong chương này ta xét bài toán ngược lại, tức là, cho hàm số $f(x)$, hãy tìm một hàm $F(x)$ sao cho nó có đạo hàm đúng bằng $f(x)$ đã cho, tức là $F'(x) = f(x)$.

Ví dụ 8.1. Cho $f(x) = \cos x$ thì $F(x) = \sin x$, vì

$$F'(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x).$$

Định nghĩa 8.1 *Hàm $F(x)$ được gọi là **nguyên hàm** của hàm $f(x)$ nếu tại mọi x thuộc miền xác định của hàm ta có $F'(x) = f(x)$.*

Ví dụ 8.2. Nguyên hàm của $\cos x$ là $\sin x$, nguyên hàm của x^n là $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

Ta đã biết rằng, nếu một hàm số có đạo hàm thì đạo hàm của nó là duy nhất. Nhưng nếu một hàm số đã có một nguyên hàm thì nó có vô số nguyên hàm. Thật vậy, nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì $F(x) + C$ với C là một hằng số tuỳ ý cũng là một nguyên hàm của $f(x)$.

Định lý 8.2 *Hai nguyên hàm của cùng một hàm số chỉ sai khác nhau một hằng số.*

Chứng minh. Giả sử $F_1(x)$ và $F_2(x)$ cùng là nguyên hàm của hàm $f(x)$. Xét hàm số $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Ta có

$$\Phi'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Hàm $\Phi(x)$ có đạo hàm bằng không tại mọi điểm thuộc miền xác định của nó nên có giá trị không đổi $\Phi(x) = C$ hay $F_2(x) - F_1(x) = C$.

Như vậy để tìm mọi nguyên hàm của hàm $f(x)$ ta chỉ việc tìm một nguyên hàm $F(x)$ của nó rồi thêm hằng số C tuỳ ý. Muốn tìm một nguyên hàm thoả mãn điều kiện nào đó ta tìm tập hợp mọi nguyên hàm rồi xác định hằng số C nhờ điều kiện đã cho.

Ví dụ 8.3. Tìm nguyên hàm của hàm $\cos x$ biết nguyên hàm đó bằng 0 tại $x = \frac{\pi}{2}$. Tập hợp các nguyên hàm của $\cos x$ là $\sin x + C$. Tại $x = \frac{\pi}{2}$ ta có

$$\sin\frac{\pi}{2} + C = 0 \text{ hay } 1 + C = 0, C = -1.$$

Vậy nguyên hàm cần tìm là $\sin x - 1$.

1.2. Tích phân bất định

Để tìm nguyên hàm của hàm số được thuận lợi, ta đưa vào khái niệm *tích phân bất định.*

Định nghĩa 8.3 *Tập hợp mọi nguyên hàm của hàm $f(x)$ được gọi là tích phân bất định của hàm $f(x)$ và được ký hiệu là $\int f(x)dx$.*

Dấu $\int$ là dấu tích phân, hàm $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân, dx là vi phân của x, x chỉ biến số lấy dấu tích phân, $f(x)dx$ là biểu thức dưới dấu tích phân.

Như vậy, nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

trong đó C là hằng số tuỳ ý. Ta suy ra các tính chất của tích phân bất định:

(i) Đạo hàm của tích phân bất định bằng hàm số dưới dấu tích phân:

$$\left[\int f(x)dx\right]' = [F(x)+C]' = f(x).$$

Từ đó $d\int f(x)dx = f(x)dx$. Vi phân của tích phân bất định bằng biểu thức dưới dấu tích phân.

(ii) Ta có $\int dF(x) = F(x)+C$ do $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$.

(iii) Tích phân bất định của một tổng các hàm số bằng tổng của các tích phân của từng hàm số $\int[f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

(iv) Có thể đưa hằng số không đổi ra ngoài dấu tích phân.

Nếu k là một hệ số không đổi thì $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.

Có thể kiểm chứng các tính chất 3, 4 bằng cách chứng tỏ đạo hàm của vế phải và vế trái bằng nhau.

1.3. Bảng tích phân bất định của các hàm số một biến

Bảng 2. Bảng nguyên hàm cơ bản

1. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C;\ \alpha \neq -1;$	7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$;
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$;	8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$;
3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$;	9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$;
4. $\int e^x dx = e^x + C$;	10. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + C$;
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;	11. $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\|\dfrac{a+x}{a-x}\right\| + C$;
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$;	12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\|x+\sqrt{x^2+a}\| + C$.

Để kiểm chứng các công thức trên ta chỉ việc lấy đạo hàm vế phải ta sẽ được hàm dưới dấu tích phân. Chẳng hạn với công thức 12, ta có

$$\left[\ln|x+\sqrt{x^2+a}|+C\right]' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}.$$

§2. HAI PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

2.1. Phép đổi biến số

Giả sử F là một nguyên hàm của hàm số f và giả sử $x = \varphi(t)$ là một hàm khả vi nào đó. Ta xét hàm hợp $F(x) = F(\varphi(t))$. Đạo hàm của nó là

$$\{F[\varphi(t)]\}' = f[\varphi(t)]\varphi'(t).$$

Theo định nghĩa tích phân bất định ta có

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C = F(x) + C = \int f(x)dx.$$

Từ đó ta được công thức đổi biến số trong tích phân bất định:

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt} \tag{8.1}$$

với $x = \varphi(t)$ là hàm khả vi.

Để đổi biến số trong tích phân ta thay $x = \varphi(t)$ ở hàm dưới dấu tích phân, với $\varphi(t)$ là một hàm khả vi, $dx = \varphi'(t)dt$ sao cho tích phân nhận được, với biến số tích phân là t, thuộc loại tích phân trong bảng nêu trên.

Ví dụ 8.4. 1) Tìm $\int \cos(ax+b)dx$.

Đặt $t = ax + b$, tức là $x = \dfrac{t-b}{a}, dx = \dfrac{1}{a}dt;$

$$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int \cos t dt = \frac{1}{a}\sin t + C = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C.$$

2) Tìm $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$.

Đặt $x = a\sin t, a^2 - x^2 = a^2\cos^2 t, dx = a\cos t dt;$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \int a\cos t . a\cos t dt = a^2\int \cos^2 t dt = a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}$$

$$= \frac{a^2}{2}\int dt + \frac{a^2}{2}\int \cos 2t dt = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C.$$

Để trở lại biến x ta chú ý là $x = a\sin t$, suy ra $t = \arcsin\dfrac{x}{a}$ và

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} = 2\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = 2\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Vậy

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

Chú ý. Thay đổi vai trò của t và x trong công thức (8.1) ta được

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt.$$

Nếu ta biến đổi tích phân đã cho ở vế trái về tích phân ở vế phải thì khi đó ta dùng phép đổi biến $t = \varphi(x)$.

3) Tìm $\int \tan x dx$.

Ta viết $\int \tan x dx = \int \dfrac{\sin x dx}{\cos x}$; đặt $t = \cos x, dt = -\sin x dx$ ta được

$$\int \tan x dx = -\int\frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

4) Tìm $\int xe^{x^2}dx$.

Đặt $t = x^2, dt = 2xdx$, ta có

$$\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

5) Tìm $\int\dfrac{dx}{x\ln x}$. Đặt $t = \ln x, dt = \dfrac{dx}{x}$, ta có

$$\int\frac{dx}{x\ln x} = \int\frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C.$$

Chú ý. Đặt $t = f(x), dt = f'(x)dx$, ta có

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C \Rightarrow \int\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + C.$$

Ví dụ 8.5. Tìm $\int \frac{2x+1}{2x^2+2x+5}dx$.

Ta có $\int \frac{2x+1}{2x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{4x+2}{2x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\ln(2x^2+2x+5)+C.$

2.2. Phép phân đoạn (hay tích phân từng phần)

Giả sử u và v là hai hàm khả vi. Ta có $(u.v)' = u'v + uv'$.

Lấy tích phân hai vế ta được

$$\int (u'v+uv')dx = uv + C; \int u'vdx + \int uv'dx = uv + C.$$

Do $v'dx = dv, u'dx = du$, nên $\int udv + \int vdu = uv + C$,

$$du = \frac{dx}{x}, v = x, \text{ suy ra } \int \ln xdx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

Vậy

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}. \tag{8.2}$$

Ta để hằng số C nằm trong tích phân, nó sẽ xuất hiện khi ta tính $\int vdu$.

Công thức (2) được gọi là *công thức tính tích phân bằng phân đoạn* hay *lấy tích phân từng phần.*

Ví dụ 8.6. 1) Tìm $\int \ln xdx$.

Đặt $u = \ln x, dv = dx$ ta có $du = \frac{1}{x}dx, v = x$, vậy

$$\int \ln xdx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

2) Tìm $\int x^2e^xdx$.

Đặt $u = x^2, dv = e^xdx$, ta có $du = 2xdx, v = e^x$. Suy ra

$$\int x^2e^xdx = x^2e^x - \int 2xe^xdx.$$

Tiếp tục phân đoạn cho tích phân sau cùng. Đặt $u = x, dv = e^xdx$ ta có

$du = dx, v = e^x$, suy ra $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$. Cuối cùng ta được

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + C = (x^2 - 2x + 2)e^x + C.$$

3) Tìm $I = \int e^{ax} \cos bx dx$.

Đặt $u = e^{ax}, dv = \cos bx dx$, ta có $du = ae^{ax} dx, v = \frac{1}{b}\sin bx$ và

$$I = \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx dx.$$

Phân đoạn cho tích phân sau cùng. Đặt

$$u = e^{ax}, dv = \sin bx dx,\ du = ae^{ax} dx, v = -\frac{1}{b}\cos bx,$$

ta có

$$\int e^{ax} \sin bx dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} I$$

$$I = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b}\left(-\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} I\right).$$

Vậy

$$I = \frac{e^{ax}(b \sin bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2}.$$

Chú ý. Các tích phân có dạng sau được tính bằng phương pháp phân đoạn, $P(x)$ là hàm đa thức.

(i) Dạng 1: $\int P(x) \sin ax dx$, $\int P(x) \cos ax dx$, $\int P(x) e^{ax} dx$, đặt $u = P(x)$.

(ii) Dạng 2: $\int P(x) \arcsin x dx$, $\int P(x) \arccos x dx$, $\int P(x) \ln x dx$, đặt $dv = P(x) dx$.

§3. PHÉP TÍNH NGUYÊN HÀM MỘT SỐ HÀM SỐ

3.1. Nguyên hàm của hàm hữu tỷ

Hàm hữu tỷ là hàm có dạng $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó $P(x), Q(x)$ là các hàm đa thức.

Nếu bậc của $P(x)$ lớn hơn hoặc bằng bậc của $Q(x)$ thì bằng cách chia đa thức ta được

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}.$$

trong đó $A(x)$ là đa thức nguyên, còn $P_1(x)$ là đa thức có bậc bé hơn bậc của $Q(x)$. Tính nguyên hàm của $A(x)$ không có gì khó khăn, chỉ việc dùng công thức

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Để tìm nguyên hàm của phân thức thực sự $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ ta **phân tích nó thành các phân thức tối giản** mà ta sẽ trình bày một số trường hợp đơn giản.

(i) Nếu $Q(x)$ chỉ có các nghiệm thực và đơn ta viết nó có dạng

$$Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n),$$

thì phân thức $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ được phân tích thành

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-a_n},$$

ta tính các hệ số $A_1, A_2, \ldots, A_n$ bằng cách quy đồng mẫu số ở vế phải rồi đồng nhất các hệ số của đa thức ở hai vế.

(ii) Nếu $Q(x)$ có chứa một nghiệm thực b, bội k, trong phân tích của $Q(x)$ có thừa số $(x-b)^k$. Ứng với thừa số đó, trong phân tích của $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ sẽ chứa k phân thức dạng

$$\frac{B_k}{(x-b)^k}+\frac{B_{k-1}}{(x-b)^{k-1}}+\ldots+\frac{B_1}{x-b}.$$

(iii) Nếu khi phân tích $Q(x)$ thành thừa số, nó chứa thừa số dạng

x^2+px+q với $p^2-4q<0$ (tam thức không có nghiệm thực)

thì thừa số đó ứng với phân thức

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$$

trong phân tích của $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$.

Việc tính các hệ số A, B hoặc $B_1 .... B_k$ cũng được làm như ở phần (i).

Trong các trường hợp nêu trên, việc tính nguyên hàm của phân thức thực dẫn tới việc tìm nguyên hàm của các phân thức tối giản có dạng các dạng

$$\frac{A}{x-a}, \frac{B}{(x-b)^k}, \frac{\mathrm{Ax+B}}{\mathrm{x}^2+px+q}, p^2-4q<0.$$

Khi đó, tích phân ban đầu đưa tới một số dạng sau:

1) $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a|+C$.

2) $\int \frac{B}{(x-b)^k} = \frac{B}{1-k}\frac{1}{(x-b)^{k-1}}+C, k\neq 1$.

3) $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+B-\frac{Ap}{2}}{x^2+px+q}dx$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + (B - \frac{Ap}{2})\int \frac{d(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}}$$

$$= \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{B - \frac{Ap}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.$$

Ví dụ 8.7. 1) Tính $\int \frac{x-3}{x^3-x}dx$.

Ta có $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$, nên $Q(x)$ có 3 nghiệm thực và đơn nên ta phân tích về dạng

$$\frac{x-3}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} = \frac{(A+B+C)x^2 + (B-C)x - A}{x^3-x}.$$

Đồng nhất các hệ số tương ứng ở hai vế, ta có

$$\begin{cases} A+B+C=0, \\ B-C=1, \\ A=3, \end{cases}$$

suy ra

$$\begin{cases} A=3, \\ B=-1, \\ C=-2. \end{cases}$$

Vậy

$$\int \frac{x-3}{x^3-x}dx = 3\int\frac{dx}{x} - \int\frac{dx}{x-1} - 2\int\frac{dx}{x+1} = 3\ln|x| - \ln|x-1| - 2\ln|x+1| + C.$$

2) Tính tích phân $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx$.

Mẫu số $Q(x)$ có một nghiệm thực, đơn $x=-3$ và nghiệm thực $x=1$ bội 3 nên ta phân tích

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+3)}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+3}.$$

Khử mẫu số chung

$$x^2+1 \;= A(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)^2(x+3)+D(x-1)^3$$
$$=(C+D)x^3+(B-3C-2C-3D)x^2+(A+2B+C-2D)x+3A-3B+3C-D.$$

Ta có

$$\begin{cases} C+D=0, \\ B+C-3D=1, \\ A+2B+C-D=0, \\ 3A-3B+3C-D=0, \end{cases}$$

suy ra

$$\begin{cases} A=\dfrac{1}{2}, \\ B=\dfrac{3}{8}, \\ C=\dfrac{5}{32}, \\ D=-\dfrac{5}{32}. \end{cases}$$

Vậy

$$\int\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^3}+\frac{3}{8}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{5}{32}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{5}{32}\int\frac{dx}{x+3}$$
$$=\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{3}{8(x-1)}+\frac{5}{32}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C.$$

3) Tính $\displaystyle\int\frac{dx}{x(x^2+1)}$.

Mẫu số $Q(x)$ có chứa thừa số x^2+1 không có nghiệm thực nên

$$\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1};\; 1=(A+B)x^2+Cx+A.$$

Suy ra $A = 1, C = 0,\ B = -1$. Vậy

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

Ta không xét ở đây trường hợp mẫu số $Q(x)$ có chứa các thừa số $(x^2 + px + q)^k$. Người ta chứng minh được rằng ngay cả trong trường hợp đó vẫn tìm được nguyên hàm của hàm hữu tỷ dưới dạng các hàm số sơ cấp. Như vậy, ***các hàm số hữu tỷ đều có nguyên hàm dưới dạng hàm sơ cấp.***

Khi phải tìm nguyên hàm của một hàm $f(x)$, nếu ta tìm được phép đổi biến thích hợp đưa $\int f(x)dx$ về dạng $\int R(t)dt$ với $R(t)$ là một hàm hữu tỷ đối với t thì ta coi như tìm được nguyên hàm dưới dạng hàm sơ cấp.

4) Tính $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Hàm dưới dấu tích phân không phải là hàm hữu tỷ. Tuy nhiên nếu dùng phép đổi biến $t = \tan\frac{x}{2}$, ta có

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, x = 2\arctan t, dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

khi đó

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2dt/(1+t^2)}{2t/(1+t^2)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

3.2. Nguyên hàm của một số hàm số vô tỷ

Nói chung các hàm vô tỷ không có nguyên hàm biểu diễn dưới dạng hàm sơ cấp. Ở đây ta chỉ xét một số trường hợp đơn giản mà ta có thể đưa về hàm hữu tỷ được, hoặc đưa về những tích phân có trong bảng đã lập.

(i) *Dạng 1:* $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx$, trong đó $R(u,v)$ chỉ một biểu thức hữu tỷ đối với u, v. Ta đặt $t^n = ax + b$.

Ví dụ 8.8. Tính $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x+1}}$.

Đặt $t^3 = x+1$, ta có $x = t^3 - 1, dx = 3t^2dt$. Vậy

$$\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x+1}} = \int \frac{(t^3-1)3t^2}{t}dt = 3\int (t^4-1)dt = \frac{3}{5}t^5 - \frac{3}{2}t^2 + C$$

$$= \frac{3}{5}(x+1)^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} + C.$$

(ii) *Dạng 2:* Tích phân có chứa $\sqrt{ax^2+bx+c}$, biến đổi biểu thức dưới dấu căn về dạng $\alpha t^2 + \beta$.

Ví dụ 8.9. 1) Tính $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$.

Ta có

$$\sqrt{1-x-x^2} = \sqrt{\frac{5}{4} - \left(x+\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Vậy

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}} = \int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{5}{4}-(x+\frac{1}{2})^2}} = \arcsin\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}} + C = \arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}} + C.$$

2) Tính $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$.

Ta có

$$\sqrt{x^2+2x+5} = \sqrt{(x+1)^2+4}.$$

Vậy

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+4}} = \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right| + C.$$

3) Tính $\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx$.

Ta có

$$\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx = \int \frac{\frac{5}{2}(2x+4)+3-10}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx$$

$$= \frac{5}{2}\int \frac{d(x^2+4x+10)}{\sqrt{x^2+4x+10}} - 7\int \frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2+6}}$$

$$= 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right| + C.$$

4) Tính $\int \sqrt{x^2+x+1}dx$.

Ta có

$$\int \sqrt{x^2+x+1}dx = \int \sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx.$$

Để tính $I = \int \sqrt{t^2+a^2}dt$ ta dùng phép phân đoạn như sau:

Đặt $u = \sqrt{t^2+a^2}, dv = dt$ thì $du = \frac{tdt}{\sqrt{t^2+a^2}}; v = t$, ta có

$$\int \sqrt{t^2+a^2}dt = t\int t^2+a^2 - \int \frac{t^2}{\sqrt{t^2+a^2}} = t\sqrt{t^2+a^2} - \int \frac{t^2+a^2-a^2}{\sqrt{t^2+a^2}}dt$$

$$= t\sqrt{t^2+a^2} - \int \sqrt{t^2+a^2}dt + a^2\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+a^2}}.$$

$$2I = t\sqrt{t^2+a^2} + a^2\ln\left|t+\sqrt{t^2+a^2}\right| + C,$$

$$I = \frac{t}{2}\sqrt{t^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+a^2}\right| + C.$$

Vậy

$$\int \sqrt{x^2+x+1}dx = \frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x+1} + \frac{3}{8}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right| + C.$$

3.3. Nguyên hàm của các hàm số lượng giác

Ta chỉ xét một số trường hợp đơn giản:

(i) *Dạng 1:* $\int R(\sin x, \cos x)dx$ *với* R *là biểu thức hữu tỷ đối với* $\sin x$ *và* $\cos x$. Ta đưa tích phân về dạng tích phân của hàm số hữu tỷ bằng cách đặt $t = \tan\frac{x}{2}$. Khi đó $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Ví dụ 8.10. Tính $\int \frac{dx}{\sin x - 4\cos x + 5}$.

Đặt $t = \tan\frac{x}{2}$, suy ra

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Khi đó

$$\int \frac{dx}{\sin x - 4\cos x + 5} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} - 4\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = 2\int \frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{\tan\frac{x}{2} + 2} + C.$$

(ii) *Dạng 2:* $\int \sin^m x \cos^n x dx$ *với* m, n *là các số nguyên dương.*

a) Ít nhất một trong hai số m, n *lẻ:* m *lẻ thế* $t = \cos x$; n *lẻ thế* $t = \sin x$

Ví dụ 8.11. Tính $\int \sin^5 x \cos^2 x dx$.

Đặt $t = \cos x$; suy ra $dt = -\sin x dx$. Vậy

$$\int \sin^5 x \cos^2 x dx = -\int \sin^4 x \cos^2 x d(\cos x) = -\int (1-t^2)t^2 dt =$$

$$= -\int (t^2 - 2t^4 + t^6)dt = -\frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} - \frac{1}{7}t^7 + C = -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C.$$

b) Cả hai số m,n đều chẵn. Ta dùng công thức hạ bậc

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}; \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Ví dụ 8.12. Tính $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$.

Sử dụng công thức hạ bậc ta được

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x(1+\cos 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d\sin 2x$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

(iii) *Dạng 3:* $\int \cos mx \cos nx dx, \int \sin mx \cos nx dx, \int \sin mx \sin nx dx$. Ta dùng công thức lượng giác biến đổi tích thành tổng.

Ví dụ 8.13. Tính $\int \sin 5x \sin 3x dx$.

Ta có

$$\int \sin 5x \sin 3x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 6x)dx = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C.$$

Ta đã xét một số phương pháp để tìm nguyên hàm của một hàm số. Ta thừa nhận rằng *mọi hàm liên tục trên một khoảng (a,b) đều có nguyên hàm trong khoảng đó.* Tuy nhiên không phải bất cứ hàm liên tục nào cũng có nguyên hàm biểu diễn được dưới dạng hàm sơ cấp. Chẳng hạn các hàm

$$\frac{\sin x}{x}, \frac{\cos x}{x}, e^{-x^2}, \sqrt{1-k^2\sin^2 x} \ldots$$

không có nguyên hàm biểu diễn bằng hàm sơ cấp. Để tìm nguyên hàm của chúng ta phải dùng các phương pháp khác.

BÀI TẬP CHƯƠNG 8

8.1 Dùng các tính chất và bảng nguyên hàm tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

1. $(x^3+1)^3$. 2. $\frac{x^3+3x+1}{x}$. 3. $2e^x - \sqrt[3]{x^2}$. 4. $3^x e^x$.

5. $\frac{x^2}{x^2+1}$. 6. $\sin^2 \frac{x}{2}$. 7. $\frac{1}{1+\cos 2x}$.

8.2 Dùng các phép thế (đổi biến) đơn giản tính các tích phân bất định sau :

1. $\int \cos(ax+b)dx$. 2. $\int e^{-\frac{x}{2}}dx$. 3. $\int \frac{dx}{2-x}$.

4. $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}dx$. 5. $\int \frac{dx}{x\ln x}$. 6. $\int \cot x dx$.

7. $x\sqrt{x^2-1}dx$. 8. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

8.3 Tính bằng phép thế:

1. $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$. 2. $J = \int x\sqrt{x+1}dx$. 3. $J = \int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

4. $J = \int \frac{dx}{e^x-1}$. 5. $J = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$. 6. $J = \int \frac{dx}{\cos x}$.

7. $J = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}$.

8.4 Tính bằng phép phân đoạn:

1. $\int x\arctan x dx$. 2. $\int x\ln x dx$. 3. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx$.

4. $\int x^2 \sin x dx$. 5. $\int \sqrt{x^2+a^2}dx$. 6. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$.

8.5 Cho $I_n = \int \cos^n x dx$. Lập công thức liên hệ giữa I_n và I_{n-2}.

8.6 Tìm nguyên hàm các hàm hữu tỷ

1. $J = \int \frac{x^4+2x^2}{x^2+1}dx$ 2. $J = \int \frac{x}{x^2+3x+2}dx$ 3. $J = \int \frac{x^2}{x^2+4x+5}dx$

4. $J = \int \frac{x}{x^3-8}dx$ 5. $J = \int \frac{x^3+x+1}{x^4-81}dx$ 6. $\int \frac{1}{\left(x^2-2x\right)^2}dx$

8.7 Chứng minh rằng có thể tính $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ theo công thức

$$I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}.$$

Áp dụng tính I_3.

8.8 Tính $J = \int \frac{3x+2}{x^2+2x+10}dx$.

8.9 Tìm nguyên hàm các hàm vô tỷ sau:

1. $J = \int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}dx$ 2. $J = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$.

4. $J = \int \sqrt{x^2+x+1}dx$. 3. $J = \int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx$.

5. $J = \int \frac{1}{\sqrt{2-3x-4x^2}}dx$. 6. $J = \int \frac{1}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}dx$.

8.10 Tìm nguyên hàm của các hàm lượng giác sau:

1. $\sin^3 x$. 2. $\sin^2 x \cos^2 x$. 3. $\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

4. $\dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$.   5. $\dfrac{1}{\cos^4 x}$.   6. sinxsin3x.

7. $\dfrac{1}{4\sin x + 3\cos x + 5}$.   8. $\dfrac{(\sin x + \sin^3 x)}{\cos 2x}$.   9. $\cos x \cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}$.

8.11 Tính hai tích phân $A = \int \dfrac{\cos x dx}{\cos x + \sin x}$, $B = \int \dfrac{\sin x dx}{\cos x + \sin x}$.

8.12 Tính các tích phân sau:

1. $\int \tan^3 x dx$.   2. $\int x^3(1-x^2)^{\frac{5}{2}} dx$.   3. $\int \dfrac{x\cos x}{\sin^2 x} dx$.

4. $\int e^{5x} \cos 4x dx$.   5. $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.   6. $\int \dfrac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx$.

7. $\int \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx$.   8. $\int \dfrac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$.   9. $\int \cot^6 x dx$.

10. $\int \dfrac{x dx}{\sqrt[4]{x^3(1-x)}}$.   11. $\int (x^2 - 2x + 5)e^{-x} dx$ 12. $\int \dfrac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx$

13. $\int \sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}} dx \ (a > 0)$.   14. $\int \dfrac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}, (a, b \neq 0)$.

15. $\int \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) dx$.   16. $\int \cos(\ln x) dx$.   17. $\int \dfrac{1}{x^4+1} dx$

Chương 9

TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH – TÍCH PHÂN SUY RỘNG

§1. DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG, ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN

1.1 Bài toán diện tích hình thang cong

Việc tính diện tích một hình phẳng dựa trên nguyên tắc sau:

1) Diện tích có tính không âm: A là một hình phẳng thì diện tích của $A \geq 0$.

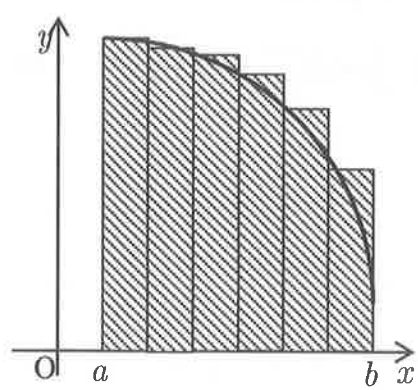
2) Diện tích có tính cộng được: nếu A, B là hai hình không có phần chung ($A \cap B = \phi$) thì: Diện tích ($A \cup B$)= Diện tích (A) + Diện tích (B)

3) Hình vuông có cạnh bằng 1 thì có diện tích bằng 1.

Như vậy để tính diện tích một hình phẳng bất kỳ, ta có thể chia hình đó thành nhiều hình vuông và các hình đặc biệt là các tam giác cong hoặc hình thang cong. Vì tam giác cong chỉ là một trường hợp đặc biệt của hình thang cong, nên ta đặt vấn đề tìm diện tích hình thang cong.

Hình thang cong:

Trong hệ tọa độ vuông góc xOy, ta xét một hình giới hạn bởi đường cong liên tục $y = f(x)$, trục Ox, các đường thẳng $x = a, x = b$ (ta giả thiết $f(x) \geq 0$ trên $[a,b]$).



Hình 22

Trường hợp đặc biệt, đường cong $y = f(x)$ có thể cắt trục Ox tại $x = a$ hoặc $x = b$.

Một hình như vậy được gọi là một hình thang cong.

Diện tích hình thang cong:

Để tính diện tích hình thang cong ta làm như sau: chia hình thang cong đó thành n dải con (hình 32), coi mỗi dải con có diện tích xấp xỉ diện tích một hình chữ nhật. Như vậy tổng diện tích của n dải hình chữ nhật đó sẽ cho ta một giá trị gần đúng của diện tích hình thang cong.

Cụ thể, ta làm như sau: chia đoạn $[a,b]$ thành n đoạn con bằng nhau, mỗi đoạn có độ dài $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, ta có các điểm chia

$$x_0 = a,\ x_1 = x_0 + \Delta x, \ldots,\ x_n = x_0 + n.\Delta x = b$$

Trong mỗi đoạn con thứ i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ta chọn một điểm tùy ý ξ_i. Tích $f(\xi_i).\Delta x$ cho ta diện tích hình chữ nhật có các cạnh là $f(\xi_i)$ và Δx, và ta coi nó xấp xỉ với diện tích dải con thứ i. Như vậy tổng

$$f(\xi_1).\Delta x + f(\xi_2).\Delta x + \cdots + f(\xi_n).\Delta x = \textstyle\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta x .$$

của n diện tích hình chữ nhật sẽ cho ta giá trị gần đúng của diện tích hình thang cong. Ta thấy rằng nếu n khá lớn, tức là Δx khá bé thì kết quả càng chính xác. Vì vậy:

Nếu tổng trên có giới hạn khi $\Delta x \to 0$ thì giới hạn đó được gọi là diện tích S của hình thang cong đã cho

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta x . \tag{9.1}$$

Ta thừa nhận rằng, nếu hàm f liên tục trên $[a,b]$ thì giới hạn trên tồn tại, tức là hình thang cong đã xét có diện tích.

Ví dụ 9.1. Tính diện tích của hình giới hạn bởi đường parabol $y = x^2$, trục Ox, các đường $x = 0, x = 1$.

Chia đoạn $[0,1]$ ra làm n đoạn con bằng nhau bởi các điểm chia

$$x_i = \frac{i}{n},\ i = \overline{1,n}$$

Chọn điểm chia ξ_i là điểm mút phải của mỗi đoạn $\xi_i = \dfrac{i}{n}$, $i = \overline{1,n}$. Ta có

$$f(\xi_i) = \xi_i^2 = \left(\frac{i}{n}\right)^2 \text{ và } \Delta x = \frac{1}{n}.$$

Nên

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x = \left(\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \cdots + \frac{n^2}{n^2}\right).\frac{1}{n} = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3}.$$

Ta đã biết

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Suy ra

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x = \lim_{n \to \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

Vậy diện tích hình phải tìm là $1/3$ đơn vị diện tích.

1.2. Định nghĩa tích phân xác định

Giả sử $y = f(x)$ là một hàm xác định trên $[a,b]$. Ta chia đoạn $[a,b]$ ra làm n đoạn con bởi các điểm chia: $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Đặt $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Lấy trong mỗi đoạn con $[x_{i-1}, x_i]$ một điểm ξ_i tùy ý và lập tổng

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i . \tag{9.2}$$

Tổng (9.2) được gọi là ***tổng tích phân*** của hàm $f(x)$ lấy trên đoạn $[a,b]$.

Định nghĩa 9.1 *Nếu độ dài lớn nhất trong các Δx_i dần tới 0 mà tổng tích phân (9.2) có giới hạn không phụ thuộc vào cách chia đoạn $[a,b]$ thành n đoạn con cũng như cách chọn điểm ξ_i trong mỗi đoạn con thì giới hạn đó được gọi là tích phân xác định của hàm $f(x)$ lấy trên đoạn $[a,b]$.*

Tích phân xác định được ký hiệu là: $\int_a^b f(x)dx$, với $\int$ là dấu tích phân, a là cận dưới của tích phân, b là cận trên, $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân, $f(x)dx$ là biểu thức dưới dấu tích phân (đó là biểu thức vi phân), x là biến số lấy tích phân. Như vậy theo định nghĩa

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Theo bài toán tính diện tích hình thang cong ở trên thì: Nếu $f(x) \geq 0$ trên $[a,b]$ thì $\int_a^b f(x)dx$ cho ta diện tích hình thang cong giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = a, x = b$. Đó là **ý nghĩa hình học** của tích phân xác định.

Hàm $f(x)$ mà với nó giới hạn (1.3) tồn tại được gọi là khả tích trên đoạn $[a,b]$.

Ta thừa nhận định lý sau:

Định lý 9.2 *Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ thì nó khả tích trên đó.*

Tổng quát hơn, nếu hàm $f(x)$ có trong $[a,b]$ một số hữu hạn điểm gián đoạn loại một (ta còn gọi hàm f liên tục từng khúc) thì nó khả tích trên $[a,b]$.

Chú ý .

- Khi định nghĩa tích phân xác định trên $[a,b]$ ta đã giả thiết $a < b$.

Nếu $a > b$ ta định nghĩa $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Nếu $a = b$ thì $\int_a^b f(x)dx = 0$.

- Trong tích phân $\int_a^b f(x)dx$ thì x là biến số tích phân. Tuy nhiên ta có thể dùng một chữ bất kỳ nào khác để kí hiệu biến số tích phân mà không ảnh hưởng tới giá trị của tích phân. Như vậy ta có thể viết

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \dots$$

1.3. Các tính chất của tích phân xác định

Dựa trên định nghĩa của tích phân xác định và các phép tính về giới hạn, ta có thể chứng minh được:

(i) Nếu các hàm $f(x), g(x)$ khả tích trên $[a,b]$ thì các hàm

$$f(x)+g(x), k.f(x)$$

với k là hằng số cũng khả tích trên $[a,b]$ và

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

(ii) Nếu hàm f khả tích trên các đoạn $[a,c]$, $[c,b]$ thì nó cũng khả tích trên $[a,b]$ và

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

(iii) Nếu $f(x) \geq 0$ trên $[a,b]$, $a<b$ thì

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

(iv) Nếu $f(x) \geq g(x)$ trên $[a,b]$ thì

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

(v) Nếu m và M là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm f(x) trên $[a,b]$ thì

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Thật vậy, ta có $m \le f(x) \le M$ nên từ tính chất 4 và 1 suy ra

$$m\int_a^b dx \le \int_a^b f(x)dx \le M\int_a^b dx,$$

theo định nghĩa tích phân xác định thì

$$\int_a^b dx = \lim \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a$$

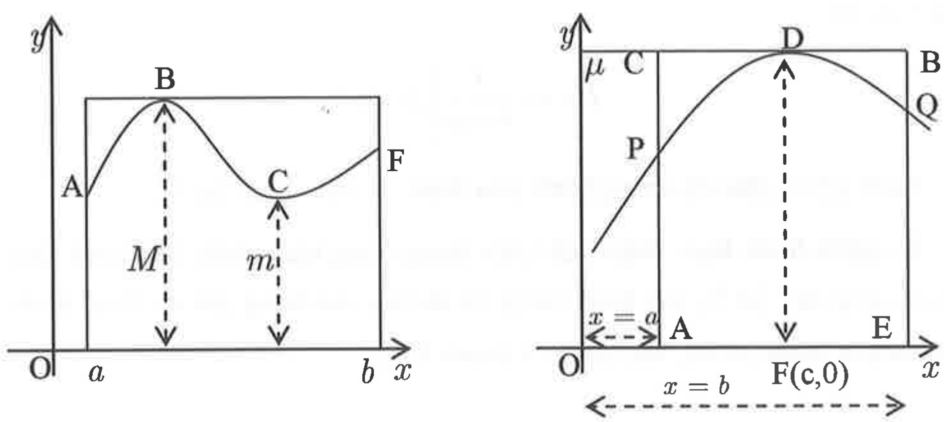
(tổng các đoạn con chính là độ dài đoạn $[a,b]$).

Về mặt hình học:

Tính chất (iii) nói lên rằng diện tích là một số không âm.

Tính chất (iv) nói lên rằng: nếu $f \ge g$ thì diện tích hình thang cong giới hạn bởi f sẽ không bé hơn diện tích hình thang cong giới hạn bởi g.

Tính chất (v) nói rằng: diện tích hình thang cong kẹp giữa diện tích hình chữ nhật nội tiếp và hình chữ nhật ngoại tiếp (hình 33a).



Hình 23

(vi) Định lý về giá trị trung bình:

Nếu hàm f liên tục trên $[a,b]$ thì có ít nhất một điểm $c \in [a,b]$ sao cho

$$\int_a^b f(x)dx = f(c).(b-a).$$

Chứng minh. Hàm f có giá trị nhỏ nhất m và M trên $[a,b]$. Theo tính chất (v), ta có

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

hay với $a<b$ thì

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M.$$

Đặt

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \text{ thì } m \le \mu \le M.$$

Hàm f liên tục trên $[a,b]$ nên nó nhận mọi giá trị giữa m và M. Như vậy tồn tại $c \in (a,b)$ để $f(c)=\mu$. Từ đó suy ra công thức phải chứng minh. *Giá trị*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

được gọi là **giá trị trung bình của hàm** f trên đoạn $[a,b]$.

Ý nghĩa hình học. Diện tích hình thang cong bằng diện tích hình chữ nhật có cùng đáy $[a,b]$ với hình thang và đường cao bằng giá trị trung bình của hàm trên đoạn $[a,b]$, tức là $f(c)$ (hình 33b).

§2. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH VÀ NGUYÊN HÀM

Trong chương 8 ta đã đưa ra khái niệm tích phân bất định của một hàm f là một tập hợp mọi nguyên hàm của hàm số f đó. Trong chương này ta có khái niệm tích phân xác định của một hàm f là giới hạn của tổng tích phân của hàm f trên đoạn $[a,b]$, cả hai khái niệm đều có chung một phần tên gọi là tích phân và có chung ký hiệu $\int$. Trong mục này ta sẽ đưa ra mối liên hệ giữa hai khái niệm đó.

2.1. Đạo hàm của tích phân xác định theo cận trên

Xét tích phân $\int_a^x f(t)dt$ có cận trên là x. Nếu x biến thiên trong một miền $[a,b]$ thì giá trị của tích phân trên sẽ phụ thuộc vào x. Như vậy ta có hàm số $x \to \Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ xác định trên $[a,b]$.

Định lý 9.3 *Nếu hàm f liên tục trên đoạn $[a,b]$ thì*

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x).$$

Nói cách khác, *nếu hàm dưới dấu tích phân liên tục trên đoạn lấy tích phân thì đạo hàm của tích phân xác định theo cận trên bằng hàm số dưới dấu tích phân, trong đó biến số tích phân được thay bằng cận trên.*

Chứng minh. Ta lập số gia $\Delta\Phi$ của hàm

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.\end{aligned}$$

Ở đây ta đã dùng tính chất 2 để phân tích tích phân $\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$ thành hai tích phân.

Bây giờ ta áp dụng định lý về giá trị trung bình cho tích phân cuối cùng: do hàm f liên tục nên tồn tại $c \in (x, x+\Delta x)$ tức là $x < c < x+\Delta x$ sao cho

$$\Delta\Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)\Delta x .$$

Từ đó $\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(c)$; khi $\Delta x \to 0$ thì $c \to x$, hàm f liên tục nên $f(c) \to f(x)$. Vậy

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(x) \text{ hay } \Phi'(x) = f(x) .$$

Định lý đã được chứng minh.

Chú ý. Do $\int_x^b f(t)dt = -\int_b^x f(t)dt$ nên $\left(\int_x^b f(t)dt\right)'_x = -f(x)$.

2.2. Công thức Newton-Leibniz

Định lý 9.4 *Nếu* $f(x)$ *là một hàm liên tục trên* $[a,b]$ *và* $F(x)$ *là một nguyên hàm của nó thì*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \tag{9.3}$$

giá trị của tích phân xác định của hàm f *bằng hiệu các nguyên hàm* F *của* f *lấy tại các cận của tích phân.*

Chứng minh. Theo định lý 9.3 thì hàm $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ cũng là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ nên theo tính chất của nguyên hàm thì hai hàm $\Phi(x)$ và $F(x)$ của $f(x)$ chỉ sai khác một hằng số C, tức là $\Phi(x) - F(x) = C$.

Cho $x=a$ thì $\Phi(a)=\int_a^a f(t)dt=0$, nên

$$C=-F(a);\ \Phi(x)-F(x)=-F(a).$$

Cho $x=b$ thì $\Phi(b)=\int_a^b f(t)dt$, nên $\int_a^b f(t)dt-F(b)=-F(a)$.

Hay $$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a).$$

Viết với biến số x thì $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$. Định lý được chứng minh.

Công thức (9.3) được gọi là ***công thức Newton-Leibniz***. Công thức đó có một vai trò quan trọng trong toán học: nó cho phép ta tính được tích phân xác định nhờ nguyên hàm mà không cần phải lấy giới hạn của tổng tích phân.

Để tính tích phân xác định của hàm f trên $[a,b]$ ta chỉ việc tìm một nguyên hàm F của nó rồi lập hiệu của F tại b và tại a

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

Ví dụ 9.2. 1) Trở lại bài toán tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=x^2$, trục Ox, các đường $x=0, x=1$ đã nêu ở mục 1.1. Ta có

$$S=\int_0^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}.$$

2) Tìm giá trị trung bình của hàm $f(x)=\sin x$ trên đoạn $[0,\pi]$.

Theo định lý về giá trị trung bình (tính chất vi, 1.3) thì:

$$f(c)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x dx=\frac{1}{\pi}(-\cos x)\Bigg|_0^\pi=-\frac{1}{\pi}(\cos\pi-\cos 0)=\frac{2}{\pi}.$$

§3. HAI PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Theo công thức Newton-Leibniz, việc tính tích phân xác định đưa đến việc tìm nguyên hàm. Vì vậy ta có thể sử dụng các phương pháp đã biết ở chương 9 để tìm nguyên hàm, cụ thể là các phương pháp biến đổi biến số và phân đoạn. Ở đây ta sẽ trình bày cách áp dụng các phương pháp đó vào tích phân xác định.

3.1. Phép đổi biến trong tích phân xác định

Nếu $f(x)$ là một hàm liên tục trên $[a,b]$, $x=\varphi(t)$ là một hàm xác định và có đạo hàm liên tục trên $[\alpha,\beta]$ với $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ thì

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)].\varphi'(t)dt .$$

Thật vậy, nếu F là nguyên hàm của f thì

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

Theo công thức đổi biến trong tích phân bất định ta có

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)].\varphi'(t)dt$$

nên

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)].\varphi'(t)dt=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]=F(b)-F(a).$$

Từ đó suy ra công thức (9.3).

Như vậy, khi thực hiện phép đổi biến trong tích phân xác định, đồng thời với việc biến đổi biểu thức dưới dấu tích phân ta biến đổi các cận lấy tích phân theo biến số mới, sau khi áp dụng công thức Newton-Leibniz ta được ngay giá trị của tích phân mà không phải trở về biến cũ nữa.

Ví dụ 9.3. 1) Tính $I=\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx$.

Phép đổi biến, đặt $x = a\sin x$ thỏa mãn các điều kiện của quy tắc đổi biến đã nêu trên đoạn $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ta có

$$a^2 - x^2 = a^2(1 - \sin^2 t) = a^2\cos^2 t,\ dx = a\cos t dt.$$

Nếu $x = 0$ thì $t = 0$; $x = a$ thì $\sin t = 1$, $t = \frac{\pi}{2}$. Do đó

$$I = \int_0^{\pi/2} a\cos t.a\cos t dt = a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t dt = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2}(1 + \cos 2t)dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Cũng như trong tích phân bất định, công thức (9.3) cũng được áp dụng theo chiều ngược lại, nghĩa là ta có thể dùng phép thế $t = \varphi(x)$.

2) Tính $I = \int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}dx$.

Đặt $t = \cos x$ thì $dt = -\sin x dx$; $x = 0$ thì $t = 1$; $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 0$.

$$I = \int_1^0\frac{-dt}{1 + t^2} = \int_0^1\frac{dt}{1 + t^2} = \arctan t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

(i) Tích phân hàm chẵn hay lẻ trên một khoảng đối xứng qua gốc tọa độ O

Giả sử phải tính: $I = \int_{-a}^{a} f(x)dx$, trong đó hàm $f(x)$ là hàm chẵn hoặc lẻ trên $[-a, a]$

$$I = \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Ta đổi biến $x = -t$ trong tích phân giữa

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-x)dx,$$

(ký hiệu lại biến số tích phân ở tích phân thứ ba bằng x).

$$I = \int_{0}^{a} f(-x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} [f(-x) + f(x)]dx.$$

- Nếu hàm $f(x)$ là hàm lẻ trên $[-a,a]$ thì $f(-x) = -f(x)$ nên $f(-x) + f(x) = 0$. Ta có $I = 0$.

- Nếu hàm $f(x)$ là hàm chẵn trên $[-a,a]$ thì $f(-x) = f(x)$ nên $f(-x) + f(x) = 2f(x)$. Từ đó $I = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

Vậy $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ khi $f(x)$ lẻ và $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$ khi $f(x)$ chẵn

Ví dụ 9.4. Tính $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0$ vì hàm $\sin x$ là hàm lẻ.

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x dx = 2\int_{0}^{\pi/2} \cos x dx = 2\sin x \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

(ii) Tích phân hàm tuần hoàn

Hàm f xác định trên R là hàm tuần hoàn với chu kỳ T nếu $f(x + kT) = f(x)$ với mọi $x \in R$ và k nguyên.

Ta xét tích phân $I = \int_{a}^{a+T} f(x)dx$. Đổi biến $x = z - T$ trong tích phân đầu ở vế phải

$$\int_{a}^{0} f(x)dx = \int_{a+T}^{T} f(z-T)dz = \int_{a+T}^{T} f(z)dz = -\int_{T}^{a+T} f(x)dx.$$

Vậy

$$I = -\int_T^{a+T} f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

Ta có

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

Tích phân của hàm tuần hoàn lấy trên đoạn có độ dài bằng chu kỳ thì không phụ thuộc vào gốc của đoạn lấy tích phân.

3.2. Phép phân đoạn trong tích phân xác định

Nếu u và v là các hàm số có đạo hàm liên tục trên $[a,b]$ thì

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu. \qquad (9.4)$$

Thật vậy, ta có

$$uv\Big|_a^b = \int_a^b d(uv) = \int_a^b (vdu + udv) = \int_a^b vdu + \int_a^b udv.$$

Từ đó ta được công thức (9.4).

Ví dụ 9.5. 1) Tính $I = \int_1^2 \ln xdx$.

Đặt $u = \ln x, dv = dx$, ta có: $du = \dfrac{dx}{x}$, $v = x$, ta có

$$I = x\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 dx = 2\ln 2 - 1.$$

2) Lập công thức tính $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n xdx;\ n \in N$.

Đặt $u = \sin^{n-1} x, dv = \sin xdx$ thì

$$du = (n-1)\sin^{n-2} x.\cos xdx,\ v = -\cos x.$$

$$I_n = -\cos x \sin^{n-1} x\Big|_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\cos^2 xdx.$$

Thành phần đầu vế phải bằng 0 khi thay x bởi $\pi/2$ và 0, thay

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

trong tích phân vế phải ta được

$$I_n = (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$$

Từ đó

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

hay

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Ta được công thức truy chứng cho phép tính I_n nếu biết I_{n-2}. Để tính I_n với mọi n ta cần tính I_0 , I_1 rồi áp dụng công thức trên.

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1.$$

Như vậy ta sẽ tính được I_n với mọi n nguyên dương, chẳng hạn

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{\pi}{4};\ I_2 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{4},$$

$$I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3}{4}.\frac{1}{2}.I_0 = \frac{3}{4}.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}.$$

§4. TÍCH PHÂN SUY RỘNG

Trong §1 của chương ta đã xây dựng khái niệm tích phân xác định trong các trường hợp các cận lấy tích phân là hữu hạn và hàm số lấy tích phân là bị chặn, bây giờ ta sẽ mở rộng sang trường hợp: cận lấy tích phân là vô hạn và trường hợp hàm số lấy tích phân không bị chặn và khi đó ta có khái niệm tích phân suy rộng.

4.1. Tích phân suy rộng loại 1 (Trường hợp cận lấy tích phân là vô hạn)

4.1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 9.5 *Giả sử hàm số* $f(x)$ *xác định trong khoảng* $[a,+\infty)$ *(a hữu hạn) và khả tích trong bất kỳ khoảng hữu hạn* $[a,A]$. *Khi đó giới hạn*

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$$

được gọi là tích phân suy rộng của hàm $f(x)$ *trong khoảng* $[a,+\infty)$*, kí hiệu là*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx. \tag{9.5}$$

Vậy

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx. \tag{9.6}$$

- Nếu giới hạn $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$ tồn tại hữu hạn thì tích phân (9.5) được gọi là *hội tụ*.

- Nếu giới hạn $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$ không tồn tại thì tích phân (9.5) được gọi là *phân kỳ*.

Tương tự ta cũng định nghĩa tích phân của hàm số $f(x)$ lấy từ $-\infty$ đến a như sau:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{c\to-\infty}\int_{c}^{a} f(x) \qquad (c<a)\ , \tag{9.7}$$

và tích phân của hàm số $f(x)$ lấy từ $-\infty$ đến $+\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_{a}^{b} f(x)\ , \tag{9.8}$$

với giả thiết $f(x)$ là hàm khả tích trên bất kỳ khoảng hữu hạn $[a,b]$, ta có thể viết

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx\ , \tag{9.8}$$

Khi đó tích phân suy rộng ở vế trái (9.8) hội tụ khi cả hai tích phân vế phải hội tụ.

Từ định nghĩa ta thấy tích phân suy rộng là giới hạn của tích phân xác định khi cho cận tích phân dần tới vô cực, do vậy muốn tính tích phân suy rộng ta dụng công thức Newton-Leibnitz để tính tích phân, sau đó dùng cận dần tới vô cùng, ta có

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Nếu tích phân (9.5) hội tụ thì $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b)$ hữu hạn và ta viết

$$\lim_{b\to+\infty} F(b) = F(+\infty).$$

Khi đó ta có $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{a}^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$.

Với các tích phân (9.7) và (9.8) ta cũng có các kết quả tương tự.

*Ví dụ 9.6.*1) Ta có $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{a\to+\infty}\int_{0}^{a} \arctan x dx = \frac{\pi}{2}$.

2) Tương tự $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} \arctan x dx = \frac{\pi}{2}$.

3) Ta có $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b \arctan x dx = \pi$.

4) Xét sự hội tụ của tích phân

$$I = \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \quad (a > 0, \alpha \in R)$$

- Với $\alpha \neq 1$ ta có

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{khi } \alpha < 1 \\ \dfrac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1} & \text{khi } \alpha > 1 \end{cases}$$

- Với $\alpha = 1$ ta có

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \ln|x|\Big|_a^{+\infty} = +\infty.$$

Vậy I hội tụ khi $\alpha > 1$ và phân kỳ khi $\alpha \leq 1$.

4.1.2 Tiêu chuẩn hội tụ

(i) Trường hợp $f(x) \geq 0$

Định lý 9.6 (định lý so sánh 1) *Giả sử các hàm số $f(x), g(x)$ khả tích trên $[a,b]$ và $0 \leq f(x) \leq g(x), x \geq a$. Khi đó*

- Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

- Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ.

Ví dụ 9.7. 1) Xét sự hội tụ của tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x^2 + \sin^2 3x}$.

Ta có

$f(x) = \frac{1}{2x^2 + \sin^2 3x} \leq \frac{1}{2x^2} = g(x)$. Vì $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x^2}$ hội tụ, theo định lý so sánh 1 ta có $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x^2 + \sin^2 3x}$ hội tụ.

2) Xét sự hội tụ của tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^3 x dx}{x+5}$.

Ta có

$$f(x) = \frac{\ln^3 x}{x+5} > \frac{1}{x+5} > \frac{1}{2x} = g(x), \forall x > 5.$$

Vì $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x}$ phân kỳ, nên theo định lý so sánh 1 suy ra $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^3 x dx}{x+5}$ phân kỳ.

Định lý 9.7 (định lý so sánh 2) *Giả sử các hàm số* $f(x), g(x)$ *không âm, khả tích trên* $[a,b]$ *và* $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$ *. Khi đó*

- Nếu $0 < k < +\infty$ *thì các tích phân* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *và* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.*

- Nếu $k = 0$ *và* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *hội tụ thì* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ.*

- Nếu $k = +\infty$ *và* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *phân kỳ thì* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *phân kỳ.*

Chứng minh. Theo giả thiết ta có $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$ suy ra với mọi $\varepsilon > 0$ bé tùy ý, với x khá lớn, ta luôn có

$$k - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < k + \varepsilon$$

hay

$$(k-\varepsilon)g(x) < f(x) < (k+\varepsilon)g(x) \text{ (do } |x| > 0\text{)}.$$

- Với $0 < k < +\infty$, theo định lý so sánh 1 ta có các tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

- Với $k=0$ ta có $f(x)<\varepsilon g(x)$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ , theo định lý so sánh 1 ta có $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

- Với $k=+\infty$ được chứng minh tương tự.

Ví dụ 9.8. Xét sự hội tụ của tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3}dx}{1+x^2}$.

Ta có

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{\sqrt{x^3}}{1+x^2}}{\frac{1}{x}}\right)=+\infty .$$

Do $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ phân kỳ, nên theo định lý so sánh 2 suy ra $\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x^3}dx}{1+x^2}$ phân kỳ.

(ii) Trường hợp $f(x)$ có dấu tùy ý

Định lý 9.8 *Nếu $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ. Khi đó ta nói $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối. Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ nhưng $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ được gọi là bán hội tụ.*

Với các tích phân (9.7) và (9.8) cũng có các kết quả tương tự.

4.2. Tích phân suy rộng loại 2 (Hàm dưới dấu tích phân không bị chặn hay có điểm gián đoạn vô cực trong khoảng lấy tích phân)

4.2.1 Định nghĩa

Định nghĩa 9.9 *Xét trường hợp hàm số* $f(x)$ *không bị chặn trong khoảng đóng* $[a,b]$, *hay* $f(x)$ *bị chặn và khả tích trong khoảng đóng bất kỳ* $[a,b-\varepsilon]$ *với* $0<\varepsilon<b-a$ *nhưng không khả tích trong bất kỳ khoảng đóng* $[b-\varepsilon,b]$ *hay* $\lim\limits_{x\to b} f(x)=\infty$, *b là điểm bất thường của hàm số* $f(x)$. *Khi đó giới hạn*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \tag{9.9}$$

được gọi là tích phân suy rộng của hàm số $f(x)$ *lấy trên* $[a,b]$, *ký hiệu*

$$\int_a^b f(x)dx. \tag{9.10}$$

Nếu giới hạn (9.9) tồn tại hữu hạn thì tích phân (9.10) được gọi là hội tụ. Nếu giới hạn (9.9) không tồn tại hoặc bằng vô cùng thì tích phân (9.10) được gọi là phân kỳ.

Tương tự, nếu hàm số $f(x)$ bị chặn và khả tích trong khoảng đóng bất kỳ $[a+\gamma,b]$ nhưng không khả tích trong bất kỳ khoảng đóng $[a,a+\gamma]$ hay $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, a là điểm bất thường của hàm số $f(x)$. Khi đó ta có định nghĩa

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\gamma\to 0}\int_{a+\gamma}^{b} f(x)dx. \tag{9.11}$$

Nếu hàm số $f(x)$ bị chặn tại c, $a<c<b$, ta có định nghĩa

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx. \tag{9.12}$$

Tích phân suy rộng ở về trái của (9.12) hội tụ khi và chỉ khi cả hai tích phân suy rộng ở vế phải hội tụ.

Ví dụ 9.9. 1) Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Điểm $x=-1$ là điểm bất thường nên

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1+\varepsilon}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin x\Big|_{-1+\varepsilon}^{0}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\arcsin(-1+\varepsilon)\right)=\frac{\pi}{2}$$

2) Tính tích phân $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Điểm $x=1$ là điểm bất thường nên

$$\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin x\Big|_{0}^{1-\varepsilon}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin(1-\varepsilon)\right)=\frac{\pi}{2}.$$

3) Tính tích phân $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Các điểm $x=1, x=-1$ là điểm bất thường nên

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \gamma\to 0}}\int_{-1+\gamma}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \gamma\to 0}}\left(\arcsin x\Big|_{-1+\gamma}^{1-\varepsilon}\right)=\pi.$$

4) Xét sự hội tụ của tích phân $I=\int_{a}^{b}\frac{1}{(b-x)^{\alpha}}dx \quad (a<b,\alpha>0)$.

Ở đây $x=b$ là điểm bất thường

- Với $\alpha\neq 1$ ta có

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{b-\varepsilon}\frac{1}{(b-x)^{\alpha}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{\alpha-1}\Big|_{a}^{b-\varepsilon}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{\alpha-1}\varepsilon^{1-\alpha}+\frac{1}{1-\alpha}(b-a)^{1-\alpha}\right]=\begin{cases}+\infty \text{ khi } \alpha>1\\ \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \text{ khi } \alpha<1\end{cases}$$

- Với $\alpha=1$ ta có

$$\int_{a}^{b}\frac{1}{(b-x)^{\alpha}}dx=\int_{a}^{b}\frac{1}{b-x}dx=-\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln|b-x|\Big|_{a}^{b-\varepsilon}\right]=-\infty.$$

Vậy I hội tụ khi $\alpha<1$ và phân kỳ khi $\alpha\geq 1$.

5) Tương tự ta có $I=\int_{a}^{b}\frac{1}{(x-a)^{\alpha}}dx \quad (a<b,\alpha>0)$ hội tụ khi $\alpha<1$ và phân kỳ khi $\alpha\geq 1$.

4.2.2 Tiêu chuẩn hội tụ

(i) Trường hợp $f(x) \geq 0$

Định lý 9.10 (định lý so sánh 1) *Giả sử các hàm số* $f(x), g(x)$ *khả tích trên* $(a,b]$ *với* $x = a$ *là điểm bất thường duy nhất sao cho* $0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in (a,c]; a < c < b$ *. Khi đó*

- Nếu $\int_a^b g(x)dx$ *hội tụ thì* $\int_a^b f(x)dx$ *hội tụ.*

- Nếu $\int_a^b f(x)dx$ *phân kỳ thì* $\int_a^b g(x)dx$ *phân kỳ.*

Định lý 9.11 (định lý so sánh 2) *Giả sử các hàm số* $f(x), g(x)$ *không âm, khả tích trên* $(a,b]$ *với* $x = a$ *là điểm bất thườngduy nhất và* $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k.$

Khi đó

- Nếu $0 < k < +\infty$ *thì các tích phân* $\int_a^b f(x)dx$ *và* $\int_a^b g(x)dx$ *cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.*

- Nếu $k = 0$ *và* $\int_a^b g(x)dx$ *hội tụ thì* $\int_a^b f(x)dx$ *hội tụ.*

- Nếu $k = +\infty$ *và* $\int_a^b g(x)dx$ *phân kỳ thì* $\int_a^b f(x)dx$ *phân kỳ.*

(ii) Trường hợp $f(x)$ **có dấu tùy ý**

Định lý 9.12 *Nếu* $\int_a^b |f(x)|dx$ *hội tụ thì* $\int_a^b f(x)dx$ *hội tụ. Khi đó ta nói* $\int_a^b f(x)dx$ *hội tụ tuyệt đối. Nếu* $\int_a^b f(x)dx$ *hội tụ nhưng* $\int_a^b |f(x)|dx$ *phân kỳ thì* $\int_a^b f(x)dx$ *được gọi là bán hội tụ.*

Với các tích phân (9.11) và (9.12) cũng có các kết quả tương tự.

Ví dụ 9.10. 1) Xét sự hội tụ của tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^2}}$

Ở đây $x=1$ là điểm bất thường. Ta có $\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}} \le \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}, 0 \le x < 1,$

nhưng

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x}} = \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/4}}$$

hội tụ, do đó theo định lý so sánh 1 suy ra $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^2}}$ hội tụ.

2) Xét sự hội tụ của tích phân $I = \int_0^1 \frac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x^3}\right)dx}{e^x - 1}$.

Điểm $x=0$ là điểm bất thường. Ta có

$$\frac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x^3}\right)}{e^x-1} \overset{x\to 0^+}{\sim} \frac{x^{3/5}}{x} = \frac{1}{x^{2/3}}.$$

Tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{x^{2/3}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-0)^{2/3}}$ hội tụ, do đó I hội tụ.

BÀI TẬP CHƯƠNG 9

9.1. Tính các tích phân sau:

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4dx}{3+5\cos x}$.
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x} dx$.
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{5x} \sin 4x dx$.
4. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$.
5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$.
6. $\int_0^1 x e^{-x} dx$.
7. $\int_0^1 x \arctan x dx$.
8. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$.
9. $\int_0^1 \arctan \sqrt{x} dx$.

10. $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$.

11. $\int_0^1 e^{-x}\ln(e^x+1)dx$.

12. $\int_0^1 \arccos x dx$.

13. $\int_0^1 \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

14. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$.

15. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$.

9.2. Tích các tích phân suy rộng sau:

1. $I=\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$.

2. $I=\int_0^{+\infty} x^3e^{-x^2}dx$.

3. $I=\int_0^2 \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{2-x}}dx$.

4. $I=\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}$.

5. $I=\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$.

6. $I=\int_{-3}^3 \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx$.

9.3. Xét sự hội tụ của các tích phân sau:

1. $I=\int_0^{+\infty} \sqrt{x}e^{-x}dx$.

2. $I=\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x}dx$.

3. $I=\int_4^{+\infty} \frac{dx}{x\ln(\ln x)}$.

4. $I=\int_3^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}$.

5. $I=\int_1^{+\infty} \left(1-\cos\frac{1}{x}\right)dx$.

6. $I=\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^n\cos nx}{x^2}dx \quad (n\in N)$

7. $I=\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^4}} \quad (n\in N)$.

8. $I=\int_0^1 \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Trần Trọng Huệ, *Đại số tuyến tính và hình giải tích*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2001.

[2] Nguyễn Thừa Hợp, *Giải tích*, Tập I, II, III, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2002.

[3] Trần Đức Long và các tác giả khác, *Giáo trình giải tích*, Tập I, II, III. NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2002.

[4] Tống Đình Quỳ, Nguyễn Cảnh Lương, *Giúp ôn tập tốt Toán cao cấp - Đại số tuyến tính*, NXB Giáo dục.

[5] Nguyễn Xuân Liêm, *Giải tích*, Tập I, II. NXB Giáo dục.

[6] Lê Văn Tiến. *Giáo trình toán cao cấp*. NXB Nông Nghiệp, Hà Nội, 1998.

[7] Nguyễn Đình Trí và các tác giả khác, *Toán cao cấp, Bài tập toán cao cấp,* Tập 1, 2, 3, NXB Giáo dục.

[8] Jean – Marie Monier, *Giáo trình toán tập 1 – Giải tích 1*, NXB Giáo dục, 2006.

[9] David Poole, *Linear Algebra A modern Introduction*, Thomson Brooks publishing, 2006.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
Phường Tân Thịnh - thành phố Thái Nguyên - tỉnh Thái Nguyên
Điện thoại: 0280 3840023; Fax: 0280 3840017
Website: nxb.tnu.edu.vn * E-mail: nxb.dhtn@gmail.com

TRƯƠNG HÀ HẢI - ĐÀM THANH PHƯƠNG (Đồng chủ biên)

GIÁO TRÌNH
TOÁN CAO CẤP 1

Chịu trách nhiệm xuất bản
PGS.TS. NGUYỄN ĐỨC HẠNH
Giám đốc – Tổng biên tập

Biên tập: NÔNG THỊ NINH
Thiết kế bìa: LÊ THÀNH NGUYÊN
Trình bày: HOÀNG ĐỨC NGUYÊN
Sửa bản in: ĐÀO THÁI SƠN

ISBN: 978-604-915-351-8

In 300 cuốn, khổ 16x24 cm, tại Công ty TNHH In & Thương mại Trường Xuân (Địa chỉ: Phạm Hùng - Từ Liêm – Hà Nội). Giấy phép xuất bản số: 1772-2016/CXBIPH/07-55/ĐHTN. Quyết định xuất bản số: 86/QĐ-NXBĐHTN. In xong và nộp lưu chiểu quí III năm 2016.