SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH**	**KỲ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 THCS** **CẤP THÀNH PHỐ** **KHÓA THI NGÀY 10/6/2020** **Môn thi: TOÁN**
<u>ĐỀ THI CHÍNH THỨC</u> *(Đề thi gồm 01 trang)*	**Thời gian làm bài: 120 phút** *(Không kể thời gian phát đề)*

Bài 1. *(4 điểm)*

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}$

a) Cho a = 1, hãy tìm b, c.

b) Chứng minh rằng nếu a, b, c đều dương thì a = b = c.

Bài 2. *(3 điểm)*

Cho ba số dương x, y, z thỏa điều kiện x + y + z = 3.. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}.$$

Bài 3. *(4 điểm)*

Cho tam giác đều ABC. Trên các cạnh BC, AB lần lượt lấy các điểm M, N sao cho

$BM = \frac{1}{3}BC$; $AN = \frac{1}{3}AB$.

a) Chứng minh MN vuông góc với BC.

b) Gọi I là giao điểm của AM và CN. Tính góc BIC.

Bài 4. *(3 điểm)*

Giả sử a, b, c là ba số đôi một khác nhau và $c \neq 0$. Chứng minh rằng nếu phương trình $x^2 + ax + bc = 0$ và phương trình $x^2 + bx + ca = 0$ có đúng một nghiệm chung thì các nghiệm khác của hai phương trình trên thỏa mãn phương trình $x^2 + cx + ab = 0$.

Bài 5. *(4 điểm)*

Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC) có đường cao AH. Đường tròn tâm H bán kính HA cắt cạnh AC tại D. Đường thẳng qua
D vuông góc với AC cắt BC tại E.

a) Chứng minh BH = HE.

b) Đường thẳng qua E vuông góc với BC cắt đường tròn (H) tại K, L. Chứng minh CK, CL là các tiếp tuyến của (H).

Bài 6. *(2 điểm)*

Gọi S là tập hợp gồm 1011 số nguyên dương phân biệt có giá trị không quá 2020. Chứng minh rằng trong S có hai số mà tổng của chúng bằng 2021.

HẾT

GỢI Ý

Bài 1. $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}$ (1)

a) Với a = 1, từ (1) ta có: $1+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{1}\Rightarrow\frac{1}{b}=c$. Thế vào $1+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}$ ta được: $2b^2 - b - 1 = 0$

Tính được $b = c = 1$ hoặc $b = -\frac{1}{2}$ và $c = -2$.

b) $\begin{cases} a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c} \\ b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a-b=\frac{1}{c}-\frac{1}{b} \ (*) \\ b-c=\frac{1}{a}-\frac{1}{c} \ (**)\end{cases}$

* Giả sử $a > b \Rightarrow a - b > 0$, từ (*) $\Rightarrow \frac{1}{c}-\frac{1}{b} > 0 \Rightarrow \frac{1}{c}>\frac{1}{b} \Rightarrow c < b$ (do b, c > 0) $\Rightarrow b - c > 0$, từ (**)

$\Rightarrow \frac{1}{a}-\frac{1}{c} > 0 \Rightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{c} \Rightarrow a < c$(do a, c > 0) mà c < b(cmt)

$\Rightarrow a < b$(mâu thuẫn với a > b). Vậy điều giả sử sai.

* Giả sử a < b. Chứng minh tương tự, ta có a > b(mâu thuẫn với a < b).

Do đó a = b và từ $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c} \Rightarrow b+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c} \Rightarrow b = c$.

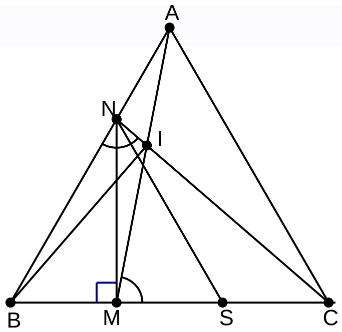
Bài 2. x, y, z > 0; $x + y + z = 3 \Rightarrow y + z = 3 - x$

Chứng minh $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$ (*) với a, b > 0. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ a = b.

Áp dụng , ta có: $P=\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}\geq\frac{4}{xy+xz}=\frac{4}{x(y+z)}=\frac{4}{x(3-x)}=\frac{4}{-x^2+3x}=\frac{4}{-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}\geq\frac{16}{9}$

(do xy + xz > 0 nên $-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}>0$). Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=z=\frac{3}{4}\end{cases}$

Bài 3. a) Chứng minh $MN \perp BC$.



Chứng minh BM = $\frac{1}{3}$BC = $\frac{1}{3}$AB = AN; BN = $\frac{2}{3}$AB = $\frac{2}{3}$BC = CM

• Vẽ NS // AC (S $\in$ BC) $\Rightarrow$ ΔNBS đều $\Rightarrow$ BS = BN

$\Rightarrow$ MS = BS – BM = BN – BM = $\frac{2}{3}$BC $-\frac{1}{3}$BC = $\frac{1}{3}$BC = BM

$\Rightarrow$ NM là trung tuyến của ΔNBS đều $\Rightarrow MN \perp BC$.

b) Tính $\widehat{BIC}$.

$\Delta AMC = \Delta CNB$(c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AMC}=\widehat{CNB}$ (yttư) $\Rightarrow$ tứ giác BNIM nội tiếp $\Rightarrow \widehat{NIB}=\widehat{NMB}=90^0$

$\Rightarrow \widehat{BIC}=90^0$.

Bài 4. $x^2 + ax + bc = 0$ (1), $x^2 + bx + ca = 0$ (2), $x^2 + cx + ab = 0$ (3)

• Gọi x_0, x_1 là nghiệm của (1) và x_0, x_2 là nghiệm của (2) (với x_0 là nghiệm chung và $x_1 \neq x_2$:do (1) và (2) có đúng một nghiệm chung)

• Ta có: $\left.\begin{matrix} x_0^2+ax_0+bc=0 \\ x_0^2+bx_0+ca=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow(a-b)x_0+c(b-a)=0\Rightarrow(a-b)(x_0-c)=0\Rightarrow x_0-c=0\Rightarrow x_0=c$

(do a, b, c là ba số đôi một khác nhau nên $a \neq b \Rightarrow a-b \neq 0$). Từ (1), ta có: $c^2 + ac + bc = 0$

$\Rightarrow a + b + c = 0$ (*)(do $c\neq 0$)

• Theo hệ thức Viète, từ (1) và (2), ta có: $x_0x_1=bc$ và $x_0x_2=ca$ mà $x_0=c\neq 0$ nên $x_1 = b$ và $x_2 = a$.

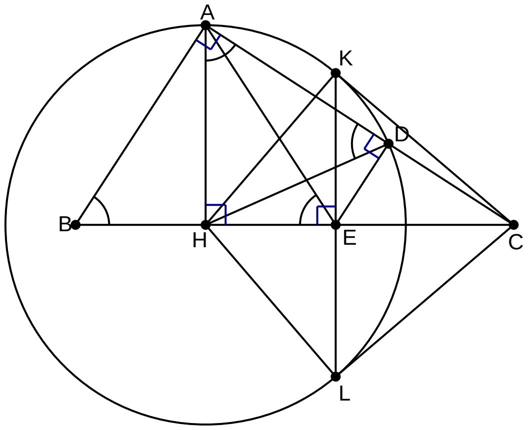
• Từ x_1= b và từ (3): $b^2 + cb + ab = b(b + c + a) = b.0 = 0$ nên $x_1 = b$ là nghiệm của (3)(đpcm).

• Từ x_2 = a và từ (3): $a^2 + ca + ab = a(a + c + b) = a.0 = 0$ nên $x_2 = a$ là nghiệm của (3) (đpcm).

Bài 5. a) Chứng minh BH = HE.

• Chứng minh tứ giác ADEH nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AEH}=\widehat{ADH}$

mà HD = HA $\Rightarrow \Delta AHD$ cân tại H $\Rightarrow$ $ADH = DAH$, lại có:



$DAH = ABH$ nên suy ra: $AEH = ABH \Rightarrow \Delta ABE$ cân tại A mà AH là đường cao $\Rightarrow$ BH = HE(đpcm).

b) Chứng minh CK, CL là các tiếp tuyến của (H).

• Ta có: HE.HC = HB.HC = $HA^2 = HK^2 \Rightarrow \dfrac{HC}{HK} = \dfrac{HK}{HE}$

$\Rightarrow \Delta HKC \sim \Delta HEK(c.g.c) \Rightarrow HKC = HEK = 90^0 \Rightarrow CK \perp HK$

tại K $\in$ (H) $\Rightarrow$ CK là tiếp tuyến của (H).

• Chứng minh tương tự CL là tiếp tuyến của (H)(đpcm).

Bài 6. • Chia các số nguyên dương từ 1 đến 2020 thành 1010 nhóm, mỗi nhóm có 2 số sao cho tổng của hai số đó bằng 2021. Cụ thể: A = {(1; 2020); (2; 2019); (3; 2018);. . . ; (1010; 1011)}

• Ta có tập hợp S gồm 1011 số nguyên dương phân biệt có giá trị không quá 2020

* **Trường hợp 1**: Nếu 1010 số trong 1011 số của S có 2 số thuộc cùng một nhóm ở A thì bài toán được chứng minh(do 2 số thuộc cùng một nhóm ở A có tổng bằng 2021).

* **Trường hợp 2**: Nếu 1010 số trong 1011 số của S mà mỗi số lần lượt thuộc 1010 nhóm khác nhau ở A thì theo nguyên lý Dirichlet số còn lại phải thuộc một trong các nhóm ở A. Khi đó có 2 số thuộc cùng một nhóm và 2 số này có tổng 2021(bài toán được chứng minh).

Vậy trong S luôn có hai số mà tổng của chúng bằng 2021.

UBND HUYỆN THANH SƠN
PHÒNG GD& ĐT

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề có 03 trang)

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP HUYỆN
Năm học: 2019 - 2020
Môn: Toán
Thời gian 150 phút không kể thời gian giao đề

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (8,0 điểm).

Hãy chọn phương án trả lời đúng rồi ghi vào tờ giấy thi.

Câu 1. Rút gọn biểu thức $|x| - \sqrt{1-2x+x^2}$ khi $x > \sqrt{2}$ được kết quả là:

A. $2x-1$ B. 1 C. 2 D. -1

Câu 2. Tập hợp các giá trị nguyên của x để biểu thức $\sqrt{2-x} - \dfrac{3}{\sqrt{x+1}}$ có nghĩa là:

A. $x \in \{-1;0;1;2\}$ B. $x \in \{0;1;2\}$ C. $x \in \{1;2\}$ D. $x \in \{-1;0;1\}$

Câu 3. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 1 + \dfrac{9}{\sqrt{x^2+1}}$ là:

A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

Câu 4. Số nghiệm của phương trình $\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}} + \dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} = 1$ là:

A. 1 B. 2 C.3 D. Vô nghiệm

Câu 5. Giá trị của biểu thức $\sqrt{2^{64} - (2+1)(2^2+1)(2^4+1)...(2^{32}+1)}$ bằng:

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

Câu 6. Số các giá trị x để $P = \dfrac{2}{x - \sqrt{x} + 1}$ có giá trị là số nguyên là:

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 7. Cho số thực x thỏa mãn $0 \le x \le 5$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x\sqrt{8-x} + (5-x)\sqrt{x+3}$ là:

A. $\dfrac{3\sqrt{22}}{2}$ B. $\dfrac{5\sqrt{22}}{2}$ C. $3\sqrt{5}$ D. $5\sqrt{3}$

Câu 8. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} + 2\sqrt{x}$ là:

A. 0 B. 2 C. $\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ D. $\dfrac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

Câu 9. Biểu thức $S = \sqrt{\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}} + \sqrt{\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}} + ... + \sqrt{\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{99^2}+\dfrac{1}{100^2}}$

Có giá trị bằng:

A. 98 B. 99 C. 98,49 D. 99,49

Câu 10. Cho hình chữ nhật ABCD. Từ D hạ đường vuông góc với AC tại H. Biết rằng AB = 13 cm; DH = 5 cm. Khi đó BD bằng:

A. $\dfrac{169}{10}$ cm B. $\dfrac{169}{11}$ cm C. $\dfrac{169}{12}$ cm D. $\dfrac{169}{17}$ cm

Câu 11. Cho hình chữ nhật ABCD. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với BD, cắt BD ở H. Biết rằng DH = 9cm; BH = 16cm. Chu vi hình chữ nhật ABCD bằng:

A. 35 cm B. 50 cm C. 70 cm D. 80 cm

Câu 12. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết AB = 9 cm; AC = 12 cm. Khi đó độ dài CH là:

A. 8,4 cm B. 9,2 cm C. 9,4 cm D. 9,6 cm

Câu 13. Cho tam giác ABC có $A = 2B$, AC = 4,5 cm và BC = 6 cm. Trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho AE = AB. Độ dài đoạn AE là:

A. 2,5 cm B. 3,5 cm C. 4 cm D. 5 cm

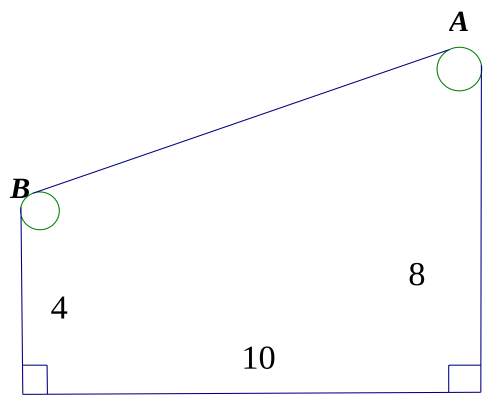
Câu 14. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết AB : AC = 4 : 3 và BC = 75 cm. Khi đó BH bằng:

A. 28 cm B. 36 cm C. 48 cm D. 52 cm

Câu 15. Hình bình hành có hai cạnh là 5 cm và 6 cm, góc tạo bởi hai cạnh đó là 150^0. Diện tích hình bình hành đó là:

A. 15 cm^2 B. 17 cm^2 C. 20 cm^2 D. 24 cm^2

Câu 16. Giữa hai toà nhà (kho và phân xưởng) của một nhà máy người ta xây dựng một băng chuyền AB để chuyển vật liệu. Khoảng cách giữa hai toà nhà là 10m, còn hai vòng quay của băng chuyền được đặt ở độ cao 8m và 4m so với mặt đất. Độ dài AB của băng chuyền làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất là:



A. 10,5 m B. 10,6 m

C. 10,7 m D. 10,8 m

II. PHẦN TỰ LUẬN. (12,0 điểm)

Bài 1. (3,0 điểm).

a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$

b) Tìm số tự nhiên n sao cho $3^n + 19$ là số chính phương.

Bài 2. (3,0 điểm).

a) Giải phương trình: $\left(x^2 - 3x + 2\right)\left(x^2 + 15x + 56\right) + 8 = 0$

b) Giải phương trình: $\sqrt{x\left(x - 2\right)} + \sqrt{x\left(x - 5\right)} = \sqrt{x\left(x + 3\right)}$

Bài 3. (4,0 điểm)

Cho hình vuông ABCD. M là một điểm tuỳ ý trên đường chéo BD. Kẻ $ME \perp AB$, $MF \perp AD$.

a) Chứng minh: DE = CF và $DE \perp CF$;

b) Chứng minh ba đường thẳng DE, BF và CM đồng quy;

c) Xác định vị trí điểm M trên BD để diện tích tứ giác AEMF lớn nhất.

Bài 4. (2,0 điểm)

Cho ba số a, b, c dương, thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4a^2 + 6b^2 + 3c^2$.

---------------------**HẾT**--------------------