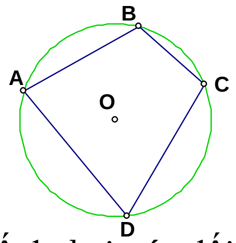
BÀI TẬP TỨ GIÁC NỘI TIẾP LỚP 9
CÓ LỜI GIẢI

I) Các kiến thức cần nhớ

1) Khái niệm:

Một tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (Gọi tắt là tứ giác nột tiếp)



2) Định lí

- Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng 180^0

-Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180^0 thì tứ giác đó nội tiếp đường tròn.

3) Dấu hiệu nhận biết (các cách chứng minh) tứ giác nội tiếp

- Tứ giác có tổng số do hai góc đối diện bằng 180^0.
- Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện.
- Tứ giác có bón đỉnh cách đều một điểm(mà ta có thể xác định được). Điểm đó là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác.
- Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc α.

II) Bài tập

<u>Bài 1</u>. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H và cắt đường tròn (O) lần lượt tại M,N,P.

Chứng minh rằng:

1. Tứ giác CEHD, nội tiếp .
2. Bốn điểm B,C,E,F cùng nằm trên một đường tròn.
3. AE.AC = AH.AD; AD.BC = BE.AC.
4. H và M đối xứng nhau qua BC.
5. Xác định tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

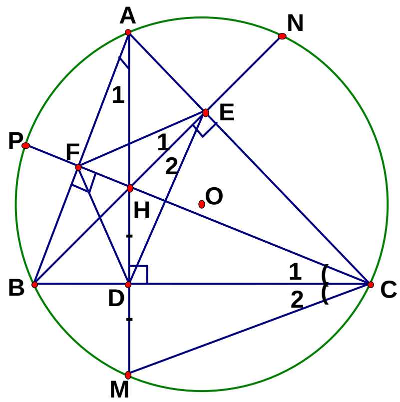
<u>Lời giải:</u>

1. Xét tứ giác CEHD ta có:

$\angle$ CEH = 90^0 (Vì BE là đường cao)

$\angle$ CDH = 90^0 (Vì AD là đường cao)

=> $\angle$ CEH + $\angle$ CDH = 180^0



Mà $\angle$ CEH và $\angle$ CDH là hai góc đối của tứ giác CEHD , Do đó CEHD là tứ giác nội tiếp

2. Theo giả thiết: BE là đường cao => BE $\perp$ AC => $\angle$BEC = 90^0.

CF là đường cao => CF $\perp$ AB => $\angle$BFC = 90^0.

Như vậy E và F cùng nhìn BC dưới một góc 90^0 => E và F cùng nằm trên đường tròn đường kính BC.

3. Vậy bốn điểm B,C,E,F cùng nằm trên một đường tròn.

Xét hai tam giác AEH và ADC ta có: $\angle$ AEH = $\angle$ ADC = 90^0 ; Â là góc chung

=> Δ AEH ~ ΔADC => $\frac{AE}{AD}=\frac{AH}{AC}$ => AE.AC = AH.AD.

* Xét hai tam giác BEC và ADC ta có: $\angle$ BEC = $\angle$ ADC = 90^0 ; $\angle$C là góc chung

=> Δ BEC ~ ΔADC => $\frac{BE}{AD}=\frac{BC}{AC}$ => AD.BC = BE.AC.

4. Ta có $\angle C_1 = \angle A_1$ (vì cùng phụ với góc ABC)

$\angle C_2 = \angle A_1$ (vì là hai góc nội tiếp cùng chắn cung BM)

=> $\angle C_1 = \angle C_2$ => CB là tia phân giác của góc HCM; lại có CB $\perp$ HM => Δ CHM cân tại C

=> CB cũng là đương trung trực của HM vậy H và M đối xứng nhau qua BC.

5. Theo chứng minh trên bốn điểm B,C,E,F cùng nằm trên một đường tròn

=> $\angle C_1 = \angle E_1$ (vì là hai góc nội tiếp cùng chắn cung BF)

Cũng theo chứng minh trên CEHD là tứ giác nội tiếp

$\angle C_1 = \angle E_2$ (vì là hai góc nội tiếp cùng chắn cung HD)

$\angle E_1 = \angle E_2$ => EB là tia phân giác của góc FED.

Chứng minh tương tự ta cũng có FC là tia phân giác của góc DFE mà BE và CF cắt nhau tại H do đó H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

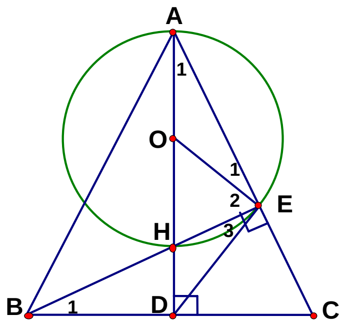
Bài 2. Cho tam giác cân ABC (AB = AC), các đường cao AD, BE, cắt nhau tại H. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE.

1. Chứng minh tứ giác CEHD nội tiếp .
2. Bốn điểm A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn.
3. Chứng minh ED = $\frac{1}{2}$BC.
4. Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).
5. Tính độ dài DE biết DH = 2 Cm, AH = 6 Cm.

Lời giải:

Xét tứ giác CEHD ta có:

$\angle$ CEH = 90^0 (Vì BE là đường cao)



$\angle$ CDH = 90^0 (Vì AD là đường cao)

=> $\angle$ CEH + $\angle$ CDH = 180^0

Mà $\angle$ CEH và $\angle$ CDH là hai góc đối của tứ giác CEHD , Do đó CEHD là tứ giác nội tiếp

2. Theo giả thiết: BE là đường cao => BE $\perp$ AC => $\angle BEA = 90^0$.
AD là đường cao => AD $\perp$ BC => $\angle BDA = 90^0$.

Như vậy E và D cùng nhìn AB dưới một góc 90^0 => E và D cùng nằm trên đường tròn đường kính AB.

Vậy bốn điểm A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn.

3. Theo giả thiết tam giác ABC cân tại A có AD là đường cao nên cũng là đường trung tuyến
=> D là trung điểm của BC. Theo trên ta có $\angle BEC = 90^0$.

Vậy tam giác BEC vuông tại E có ED là trung tuyến => DE = $\frac{1}{2}$BC.

Vì O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE nên O là trung điểm của AH => OA = OE => tam giác AOE cân tại O => $\angle E_1 = \angle A_1$ (1).

Theo trên DE = $\frac{1}{2}$BC => tam giác DBE cân tại D => $\angle E_3 = \angle B_1$ (2)

Mà $\angle B_1 = \angle A_1$ (vì cùng phụ với góc ACB) => $\angle E_1 = \angle E_3$ => $\angle E_1 + \angle E_2 = \angle E_2 + \angle E_3$

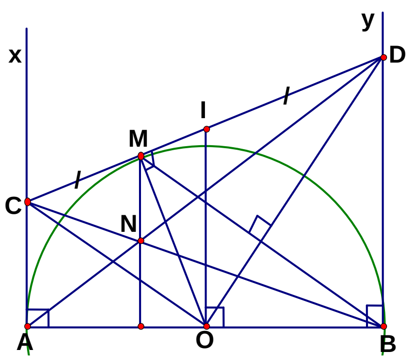
Mà $\angle E_1 + \angle E_2 = \angle BEA = 90^0$ => $\angle E_2 + \angle E_3 = 90^0 = \angle OED$ => DE $\perp$ OE tại E.
Vậy DE là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại E.

5. Theo giả thiết AH = 6 Cm => OH = OE = 3 cm.; DH = 2 Cm => OD = 5 cm. áp dụng định lí Pitago cho tam giác OED vuông tại E ta có $ED^2 = OD^2 - OE^2 \Leftrightarrow ED^2 = 5^2 - 3^2 \Leftrightarrow ED = 4cm$

<u>Bài 3</u> Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax , By lần lượt ở C và D. Các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N.

1. Chứng minh AC + BD = CD.
2. Chứng minh $\angle COD = 90^0$.
3. Chứng minh AC. BD = $\frac{AB^2}{4}$.
4. Chứng minh OC // BM
5. Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.
6. Chứng minh MN $\perp$ AB.
7. Xác định vị trí của M để chu vi tứ giác ACDB đạt giá trị nhỏ nhất.

<u>Lời giải:</u>



Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: CA = CM; DB = DM => AC + BD = CM + DM.

Mà CM + DM = CD => AC + BD = CD

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: OC là tia phân giác của góc AOM; OD là tia phân giác của góc BOM, mà $\angle$AOM và $\angle$BOM là hai góc kề bù => $\angle COD = 90^0$.

Theo trên $\angle COD = 90^0$ nên tam giác COD vuông tại O có OM $\perp$ CD (OM là tiếp tuyến).

áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có OM^2 = CM. DM,

Mà OM = R; CA = CM; DB = DM => AC. BD =R^2 => AC. BD = $\frac{AB^2}{4}$.

Theo trên $\angle COD = 90^0$ nên OC $\perp$ OD .(1)

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: DB = DM; lại có OM = OB =R => OD là trung trực của BM => BM $\perp$ OD .(2). Từ (1) Và (2) => OC // BM (Vì cùng vuông góc với OD).

Gọi I là trung điểm của CD ta có I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác COD đường kính CD có IO là bán kính.

Theo tính chất tiếp tuyến ta có AC $\perp$ AB; BD $\perp$ AB => AC // BD => tứ giác ACDB là hình thang. Lại có I là trung điểm của CD; O là trung điểm của AB => IO là đường trung bình của hình thang ACDB

=> IO // AC , mà AC $\perp$ AB => IO $\perp$ AB tại O => AB là tiếp tuyến tại O của đường tròn đường kính CD

6. Theo trên AC // BD => $\frac{CN}{BN}=\frac{AC}{BD}$, mà CA = CM; DB = DM nên suy ra $\frac{CN}{BN}=\frac{CM}{DM}$

=> MN // BD mà BD $\perp$ AB => MN $\perp$ AB.

7. (HD): Ta có chu vi tứ giác ACDB = AB + AC + CD + BD mà AC + BD = CD nên suy ra chu vi tứ giác ACDB = AB + 2CD mà AB không đổi nên chu vi tứ giác ACDB nhỏ nhất khi CD nhỏ nhất , mà CD nhỏ nhất khi CD là khoảng cách giữ Ax và By tức là CD vuông góc với Ax và By. Khi đó CD // AB => M phải là trung điểm của cung AB.

<u>Bài 4</u> Cho tam giác cân ABC (AB = AC), I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A , O là trung điểm của IK.

1. Chứng minh B, C, I, K cùng nằm trên một đường tròn.
2. Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).
3. Tính bán kính đường tròn (O) Biết AB = AC = 20 Cm, BC = 24 Cm.

<u>Lời giải:</u> (HD)

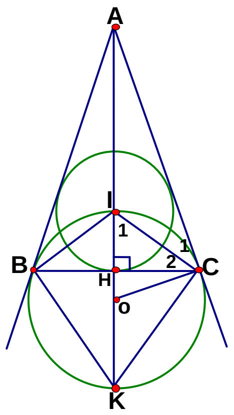
1. Vì I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A nên BI và BK là hai tia phân giác của hai góc kề bù đỉnh B

Do đó BI $\perp$ BK hay$\angle IBK = 90^0$.

Tương tự ta cũng có $\angle ICK = 90^0$ như vậy B và C cùng nằm trên đường tròn đường kính IK do đó B, C, I, K cùng nằm trên một đường tròn.

Ta có $\angle C_1 = \angle C_2$ (1) (vì CI là phân giác của góc ACH.

$\angle C_2 + \angle I_1 = 90^0$ (2) (vì $\angle IHC = 90^0$).



$\angle I_1 = \angle ICO$ (3) (vì tam giác OIC cân tại O)

Từ (1), (2) , (3) => $\angle C_1 + \angle ICO = 90^0$ hay $AC \perp OC$. Vậy AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Từ giả thiết AB = AC = 20 Cm, BC = 24 Cm => CH = 12 cm.

$AH^2 = AC^2 - HC^2 \Rightarrow AH = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$ (cm)

$CH^2 = AH.OH \Rightarrow OH = \dfrac{CH^2}{AH} = \dfrac{12^2}{16} = 9$ (cm)

$OC = \sqrt{OH^2 + HC^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15$ (cm)

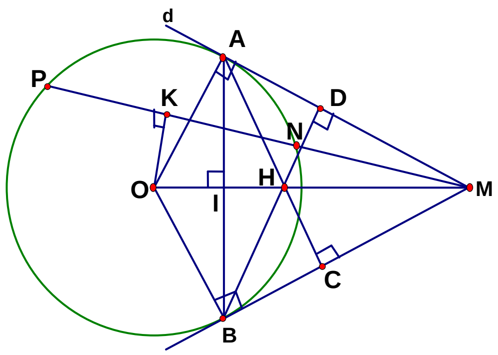
Bài 5 Cho đường tròn (O; R), từ một điểm A trên (O) kẻ tiếp tuyến d với (O). Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kì (M khác A) kẻ cát tuyến MNP và gọi K là trung điểm của NP, kẻ tiếp tuyến MB (B là tiếp điểm). Kẻ $AC \perp MB$, $BD \perp MA$, gọi H là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của OM và AB.

1. Chứng minh tứ giác AMBO nội tiếp.
2. Chứng minh năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn .
3. Chứng minh $OI.OM = R^2$; $OI.\,IM = IA^2$.
4. Chứng minh OAHB là hình thoi.
5. Chứng minh ba điểm O, H, M thẳng hàng.
6. Tìm quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d

Lời giải:

(HS tự làm).

Vì K là trung điểm NP nên $OK \perp NP$ (quan hệ đường kính



Và dây cung) => $\angle OKM = 90^0$. Theo tính chất tiếp tuyến ta có $\angle OAM = 90^0$; $\angle OBM = 90^0$. như vậy K, A, B cùng nhìn OM dưới một góc 90^0 nên cùng nằm trên đường tròn đường kính OM.

Vậy năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn.

3. Ta có MA = MB (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau); OA = OB = R

=> OM là trung trực của AB => $OM \perp AB$ tại I .