UBND TỈNH HẢI DƯƠNG **KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 9**

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **NĂM HỌC 2024 - 2025**

MÔN THI: TOÁN

ĐỀ CHÍNH THỨC

Ngày thi: 27/01/2024

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề

(Đề thi gồm 05 câu, 01 trang)

Câu 1. (2,0 điểm)

1. Rút gọn biểu thức $A=\left(\dfrac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}+\dfrac{x-y}{\sqrt{x^2-y^2}-x+y}\right).\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}$ với x > y > 0.

2. Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn:

$|a+b+c-2020|+\sqrt{2020(ab+bc+ca)-abc}=0$. Tính $P=\dfrac{1}{a^{2021}}+\dfrac{1}{b^{2021}}+\dfrac{1}{c^{2021}}$.

Câu 2. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình : $\dfrac{3x^2-17x+27}{4x-9}=\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}-1}$

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 1+\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{9}{x^2} \\ x^2+xy-4=\dfrac{4y}{x} \end{cases}$

Câu 3. (2,0 điểm)

1. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức: $2x^2 + y^2 + 3xy + 3x + 2y + 3 = 0$.

2. Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn : (a - b)(b - c)(c - a) = a + b + c.

Chứng minh a + b + c chia hết cho 27.

Câu 4. (3,0 điểm)

1. Cho đường tròn (O; R) và một điểm A nằm ngoài đường tròn (O; R). Qua A lần lượt kẻ các tiếp tuyến AB, AC đến với đường tròn (O; R) (B, C là các tiếp điểm). Lấy điểm D thuộc đường tròn (O; R) sao cho BD song song với AO, đường thẳng AD cắt đường tròn (O; R) tại điểm thứ hai là E. Gọi M là trung điểm của AC.

a) Chứng minh ME là tiếp tuyến của đường tròn (O; R).

b) Từ D kẻ tiếp tuyến với đường tròn (O; R), tiếp tuyến này cắt ME tại T. Gọi r_1, r_2, r_3 lần lượt là bán kính các đường tròn nội tiếp của ΔOME, ΔOTE, ΔOMT. Chứng minh khi A thay đổi thì $r_1 + r_2 + r_3$ luôn không đổi.

2. Cho tam giác ABC có ba góc nhon. Chứng minh $\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C > 2$.

Câu 5. (1,0 điểm) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: 2xy + 5yz + 6zx = 18xyz.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{16xy}{y+2x}+\dfrac{25yz}{4z+y}+\dfrac{81zx}{x+4z}$.

…………………….. HẾT …………………………

ĐÁP ÁN THAM KHẢO – HẢI DƯƠNG (2024 - 2025)

Câu 1.

1) Ta có:

$$P=\left(\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}+\frac{x-y}{\sqrt{x-y}(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y})}\right).\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}+\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}\right).\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{x-y}(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y})+\sqrt{x-y}(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})}{(\sqrt{x+y})^2-(\sqrt{x-y})^2}.\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{x-y}.2\sqrt{x+y}}{(x+y)-(x-y)}.\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x+y}.\sqrt{x-y}}$$

$$=\frac{2.(x^2+y^2)}{2y}$$

$$=\frac{x^2+y^2}{y}$$

2) Có $|a+b+c-2020|+\sqrt{2020(ab+bc+ca)-abc}=0$

Mà $|a+b+c-2020|\geq 0,\sqrt{2020(ab+bc+ca)-abc}\geq 0$

Do đó: $\begin{cases}a+b+c-2020=0\\2020(ab+bc+ca)-abc=0\end{cases}$

Ta có:

$|a+b+c-2020|+\sqrt{2020(ab+bc+ca)-abc}=0$

$|a+b+c-2020|\geq 0,\sqrt{2020(ab+bc+ca)-abc}\geq 0$

$\begin{cases}a+b+c-2020=0\\2020(ab+bc+ca)-abc=0\end{cases}$

$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=0$

$\Leftrightarrow a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+a^2c+c^2a+3abc-abc=0$

$\Leftrightarrow a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+a^2c+c^2a+abc+abc=0$

$\Leftrightarrow (a^2b+b^2a+b^2c+abc)+(c^2b+a^2c+c^2a+abc)=0$

$\Leftrightarrow b(a^2+ab+bc+ca)+c(bc+a^2+ca+ab)=0$

$\Leftrightarrow (b+c)(a^2+ab+bc+ca)=0$

$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}b=-c\\a=-b\\a=-c\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Trong 3 số a, b, c có hai số đối nhau

Không làm mất tính tổng quát, giả sử $b=-c\Rightarrow a+b+c=a=2020$

Vậy: $P=\frac{1}{a^{2021}}+\frac{1}{b^{2021}}+\frac{1}{c^{2021}}=\frac{1}{2020^{2021}}+\frac{1}{b^{2021}}+\frac{1}{-b^{2021}}=\frac{1}{2020^{2021}}$

Câu 2.

1) Điều kiện xác định: $x\neq\frac{9}{4}, x\geq 2$

Cách 1:

$$\frac{3x^2-17x+27}{4x-9}=\frac{1}{2\sqrt{x-2}-1}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-17x+27=\frac{(4x-9)(2\sqrt{x-2}+1)}{4(x-2)-1}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-17x+27=2\sqrt{x-2}+1$$

Ta có: $\Leftrightarrow 3x^2-17x+26=2\sqrt{x-2}$

$$\Leftrightarrow (3x^2-17x+26)^2=(2\sqrt{x-2})^2$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2(9x^2-48x+76)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ 9x^2-48x+76=0 \end{array}\right.$$

KL: Vì $9x^2-48x+76=0$ (vô nghiệm) nên x=3 là nghiệm của phương trình.

Cách 2:

$$\frac{3x^2-17x+27}{4x-9}=\frac{1}{2\sqrt{x-2}-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2-6x-11x+22+5}{4(x-2)-1}=\frac{1}{2\sqrt{x-2}-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-2)-11(x-2)+5}{4(x-2)-1}=\frac{1}{2\sqrt{x-2}-1}$$

Đặt $\sqrt{x-2}=t$ ($t\geq 0$) $\Rightarrow x=t^2-2$

$$\Rightarrow \frac{3(t^2+2).t^2-11t^2+5}{4t^2-1}=\frac{1}{2t-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(t^2+2).t^2-11t^2+5}{(2t-1)(2t+1)}=\frac{1}{2t-1} \quad (t\neq\pm\frac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow 3t^4+6t^2-11t^2+5=2t+1$$

$$\Leftrightarrow 3t^4-5t^2-2t+4=0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(3t^3+3t^2-2t-4)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ 3t^3+3t^2-2t-4=0\Rightarrow t=1 \end{array}\right.$$

Với $t=1\Rightarrow x=3$

KL: x=3

2) Điều kiện: $x, y \neq 0$

Hệ tương đương: $\begin{cases} x + y + \frac{1}{y} = \frac{9}{x} & (1) \\ x + y - \frac{4}{x} = \frac{4y}{x^2} & (2) \end{cases}$

Lấy (1) trừ (2) ta được:

$$\frac{1}{y}+\frac{4}{x}=\frac{9}{x}-\frac{4y}{x^2} \Leftrightarrow \frac{4y}{x^2}-\frac{5}{x}+\frac{1}{y}=0 \Leftrightarrow x^2-5xy+4y^2=0 \Leftrightarrow (x-4y)(x-y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=4y \end{array}\right.$$

Với $x = y$, thay vào (1) ta được: $2x-\dfrac{8}{x}=0 \Rightarrow x=y=\pm 2$

Với $x = 4y$, thay vào (1) ta được: $5y-\dfrac{5}{4y}=0 \Rightarrow y=\pm\dfrac{1}{2} \Rightarrow x=\pm 2$

Vậy $(x;y)=(2;2)=(-2;-2)=(2;\dfrac{1}{2})=(-2;-\dfrac{1}{2})$

Câu 3.

1)

Cách 1:

$$2x^2+y^2+3xy+3x+2y+2=0 \Leftrightarrow 2x^2+2xy+2x+xy+y^2+y+x+y+1=-1$$

$$\Leftrightarrow (x+y+1)(2x+y+1)=-1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y+1=1 \\ 2x+y+1=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y+1=-1 \\ 2x+y+1=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right.$$

KL: (x;y)=(2;-4)=(-2;2)

Cách 2: $2x^2+y^2+3xy+3x+2y+2=0 \Leftrightarrow y^2+(3x+12)y+2x^2+3x+2=0$

$\Delta = x^2-4$

Để phương trình có nghiệm nguyên thi $\Delta = x^2-4$ là số chính phương, ta đặt:

$n^2-4=k \ \ (k \in \quad)$

$\Leftrightarrow (n-2)(n+2)=k^2$

Ta có bảng sau:

x + k	1	4	-4	-1	2	-2
x - k	4	1	-1	-4	2	-2
x	-5/2 (loại)	5/2 (loại)	-5/2 (loại)	5/2 (loại)	2	-2
y					-4	2

KL: (x;y)=(2;-4)=(-2;2)

2)

TH1: Nếu a, b, c có cùng số dư khi chia cho 3

$$\begin{cases} a-b \vdots 3 \\ b-c \vdots 3 \Rightarrow a+b+c \vdots 3.3.3 = 27 \\ c-a \vdots 3 \end{cases}$$

TH2: Nếu a, b, c khác số dư khi chia cho 3 $\Rightarrow a+b+c \vdots 3$

Mà $(a-b)(b-c)(c-a)$ không chia hết cho 3 (vô lí)

$\Rightarrow$Trong 3 số a, b, c tồn tại ít nhất 2 số có cùng số dư khi chia cho 3

$\Rightarrow$Tổng a+b+c không chia hết cho 3 (1)

$\Rightarrow (a-b)(b-c)(c-a) \vdots 3$ (Mâu thuẫn với (1))

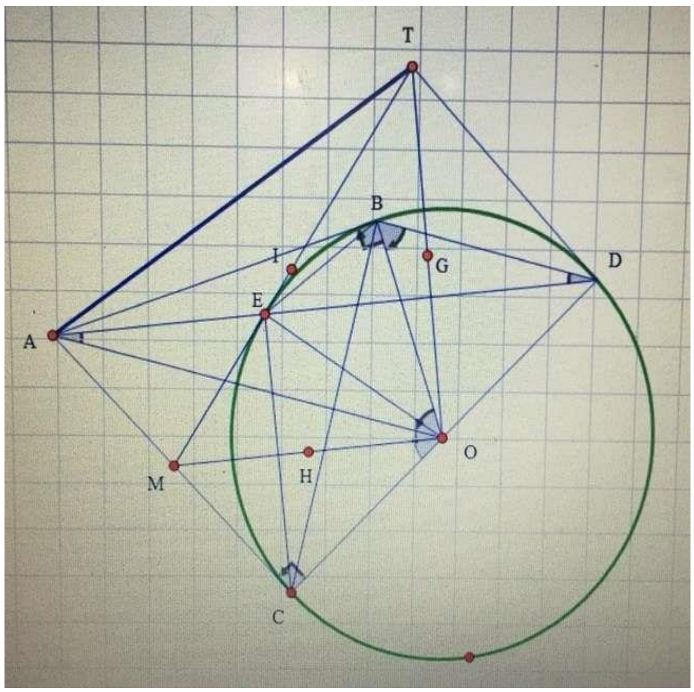
$\Rightarrow$ Loại

$\Rightarrow$TH1 đúng

Vậy $a+b+c \vdots 27$

Câu 4.

1)



a)Vì BD//AO $\Rightarrow OBD = BOA$ (1)

Có $AOC = BOA$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AOC = OBD$ (3)

Lại có: $ABC = AOC$ (4) (cung chắn cung AC)

Từ (3), (4) suy ra: $OBD = ABC$

Mặt khác: $ABC + CBO = 90^0 \Rightarrow OBD + CBO = 90^0$

Suy ra tam giác CBD vuông tại B

Do đó CD là đường kính của (O)

$\Rightarrow CED = 90^0 \Rightarrow \Delta AEC$ vuông tại C

Có M là trung điểm của AC nên EM=MC