

CHUYÊN ĐỀ TOÁN THI VÀO 10

CHỦ ĐỀ 1: RÚT GỌN BIỂU THỨC _ BÀI TOÁN PHỤ

A. LÝ THUYẾT

1. CÁC CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI CĂN THỨC

$$1. \sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A \text{ neu } A \geq 0 \\ -A \text{ neu } A < 0 \end{cases}$$

$$2. \sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B} \quad (\text{Vói } A \geq 0; B \geq 0)$$

$$3. \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \quad (\text{Vói } A \geq 0; B > 0)$$

$$4. \sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B} \quad (\text{Vói } B \geq 0)$$

$$5. A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B} \quad (\text{Vói } A \geq 0; B \geq 0)$$

$$6. A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B} \quad (\text{Vói } A < 0; B \geq 0)$$

$$7. \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{1}{|B|} \sqrt{AB} \quad (\text{Vói } A \geq 0; B > 0)$$

$$8. \frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B} \quad (\text{Vói } B > 0)$$

$$9. \frac{C}{\sqrt{A \pm B}} = \frac{C(\sqrt{A \pm B})}{A - B^2} \quad (\text{Vói } A \geq 0; A \neq B^2)$$

$$10. \frac{C}{\sqrt{A \pm \sqrt{B}}} = \frac{C(\sqrt{A \pm \sqrt{B}})}{A - B} \quad (\text{Vói } A \geq 0; B \geq 0; A \neq B)$$

$$11. (\sqrt[3]{A})^3 = \sqrt[3]{A^3} = A$$

2. XÁC ĐỊNH NHANH ĐIỀU KIỆN CỦA BIỂU THỨC

BIỂU THỨC - ĐKXĐ:

VÍ DỤ

1.	\sqrt{A}	ĐKXĐ: $A \geq 0$	Ví dụ: $\sqrt{x-2018}$	ĐKXĐ: $x \geq 2018$
----	------------	------------------	------------------------	---------------------

2.	$\frac{A}{B}$	ĐKXĐ: $B \neq 0$	Ví dụ: $\frac{x+2}{x-3}$	ĐKXĐ: $x \neq 3$
3.	$\frac{A}{\sqrt{B}}$	ĐKXĐ: $B > 0$	Ví dụ: $\frac{x+2}{\sqrt{x-3}}$	ĐKXĐ: $x > 3$
4.	$\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$	ĐKXĐ: $A \geq 0; B > 0$	Ví dụ: $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}}$	ĐKXĐ: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$
5.	$\sqrt{\frac{A}{B}}$	ĐKXĐ: $\begin{cases} A \leq 0 \\ B < 0 \\ A \geq 0 \\ B > 0 \end{cases}$	Ví dụ: $\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$	ĐKXĐ: $\begin{cases} x+1 \leq 0 \\ x+2 < 0 \\ x+1 \geq 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x \geq 1 \end{cases}$
Cho $a > 0$ ta có:				
6.	$x^2 > a \Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{a} \\ x < -\sqrt{a} \end{cases}$		Ví dụ: $x^2 > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{1} \\ x < -\sqrt{1} \end{cases}$	
Cho $a > 0$ ta có:				
7.	$x^2 < a \Leftrightarrow -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$		Ví dụ: $x^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 2$	

Chú ý 1: Giải phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

- Dạng tổng quát 1: $|A(x)| = k \Leftrightarrow A(x) = \pm k$ ($k \geq 0$) với k là hằng số
- Dạng tổng quát 2: $|A(x)| = |B(x)| \Leftrightarrow A(x) = \pm B(x)$
- Dạng tổng quát 3: $|A(x)| = B(x)$
 - Trường hợp 1: Nếu $A(x) \geq 0$ thì phương trình trở thành $A(x) = B(x)$
 - Trường hợp 2: Nếu $A(x) < 0$ thì phương trình trở thành $A(x) = -B(x)$

Chú ý 2: Giải bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

- Dạng tổng quát 1: $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x)$
1. Đặc biệt với hằng số $k > 0$ thì $|f(x)| < k \Leftrightarrow -k < f(x) < k$
- Dạng tổng quát 2: $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{cases}$
2. Đặc biệt với hằng số $k > 0$ thì $|f(x)| > k \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > k \\ f(x) < -k \end{cases}$
3. Dạng tổng quát 3:
- Trường hợp 1 $|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow |f(x)|^2 > |g(x)|^2$
 - Trường hợp 2 $|f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow |f(x)|^2 < |g(x)|^2$

Chú ý 3: Bất đẳng thức Cô – Si cho hai số a, b không âm ta có:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

Ví dụ: cho $x \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x + \frac{1}{x}$

Hướng dẫn

Vì $x \geq 1 > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô – Si ta có $A = x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1$

Vậy $A_{\min} = 2 \Leftrightarrow x = 1$

Ví dụ: cho $x \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = x + \frac{1}{x}$

Hướng dẫn

Cách giải sai: Vì $x \geq 2 > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô – Si ta có $B = x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1$ (không thỏa mãn vì $x \geq 2$)

Vậy $B_{\min} = 2 \Leftrightarrow x = 1$

Gợi ý cách giải đúng:

Dự đoán B_{\min} đạt được tại mức $x = 2$ ta có $B = nx + \frac{1}{x} + x - nx$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} nx = \frac{1}{x} \\ x = 2 \end{cases}$

Do đó ta có $B = \frac{3x}{4} + \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right)$ Áp dụng bất đẳng thức Cô – Si ta có

$$\frac{4}{x} + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{4} \cdot \frac{1}{x}} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{4} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 2$ (vì $x \geq 2$)

Vậy $B_{\min} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = 2$

Ví dụ: cho $x \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = x + \frac{1}{x}$

Hướng dẫn

Tương tự: Vì $x \geq 3 > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô – Si ta có $C = x + \frac{1}{x} = \frac{8x}{9} + \left(\frac{x}{9} + \frac{1}{x}\right) \geq \frac{10}{3}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 3$

Ví dụ: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $D = \frac{x+12}{\sqrt{x+2}}$ với $x \geq 0$

Hướng dẫn

Gợi ý: Áp dụng bất đẳng thức Cô – Si ta có $D = \sqrt{x+2} + \frac{16}{\sqrt{x+2}} - 4 \geq 4$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 4$

3. CÁC BƯỚC RÚT GỌN MỘT BIỂU THỨC

- Bước 1: Tìm điều kiện xác định
- Bước 2: Tìm mẫu thức chung, quy đồng mẫu thức, rút gọn tử, phân tích tử thành nhân tử
- Bước 3: Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung của tử và mẫu
- Bước 4: Khi nào phân thức tối giản thì ta hoàn thành việc rút gọn

Ví dụ: Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) \cdot \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}+1 \right)$

Hướng dẫn

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) \cdot \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}+1 \right)$$

$$A = \left[\frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2} - \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right] \cdot \frac{x+1+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}}$$

$$A = \left[\frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)} - \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)^2} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

$$A = \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

$$A = \frac{2}{x-1}$$