CHƯƠNG II

HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

6. BẤT PHƯƠNG TRÌNH – MŨ – LOGARIT

DẠNG 1: BẤT PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN - PHƯƠNG PHÁP ĐƯA VỀ CÙNG CƠ SỐ

I LÝ THUYẾT.

1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

- Nếu $a>1$, $b>0$ thì $a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)>g(x)$

$$a^{f(x)}>b \Leftrightarrow f(x)>\log_a b$$

- Nếu $0<a<1$, $b>0$ thì $a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)<g(x)$

$$a^{f(x)}>b \Leftrightarrow f(x)<\log_a b$$

- Lưu ý: $b\le 0$ thì $a^{f(x)}>b$ đúng với mọi x thỏa mãn điều kiện xác định của $f(x)$, còn $a^{f(x)}\le b$ vô nghiệm.

2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

- Nếu $a>1$ thì $\log_a f(x)>\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)>0 \\ f(x)>g(x) \end{cases}$
- Nếu $0<a<1$ thì $\log_a f(x)>\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)<g(x) \end{cases}$

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Giải bất phương trình $\left(\frac{4}{3}\right)^{x^2-4}\ge 1$.

Câu 2. Có bao nhiêu số nguyên $x\le 10$ là nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}}\ge 3^{-x}$?

Câu 3. Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-3)\ge \log_{\frac{1}{2}}4$.

Câu 4. Giải bất phương trình: $\log(3-2x)\ge \log(x+1)$.

Câu 5. Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-5x+7\right)>0$.

Câu 6. Bất phương trình $\log_3(3x+1)<\log_3(x+7)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên ?

Câu 7. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{0,5}(x+1)>\log_{0,5}2x$

Câu 8. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_x 3 < \log_{\frac{x}{3}} 3$

Câu 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình

$\log_5\left(x^2+1\right)+1 \ge \log_5\left(mx^2+4x+m\right)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$?

DẠNG 2: BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ GIẢI BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

I. LÝ THUYẾT.

Phương pháp: $f\left[a^{g(x)}\right] > 0 \quad (0 < a \ne 1) \iff \begin{cases} t = a^{g(x)} > 0 \\ f(t) > 0 \end{cases}$.

Ta thường gặp các dạng:

Dạng toán I: Đặt một ẩn, đưa BPT ban đầu về một BPT theo ẩn mới.

- $m.a^{2f(x)} + n.a^{f(x)} + p > 0$.
- $m.a^{f(x)} + n.b^{f(x)} + p > 0$, trong đó $a.b = 1$. Đặt $t = a^{f(x)}$ $(t > 0)$, suy ra $b^{f(x)} = \frac{1}{t}$.
- $m.a^{2f(x)} + n.(a.b)^{f(x)} + p.b^{2f(x)} > 0$. Chia hai vế cho $b^{2f(x)}$ và đặt $t = \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} > 0$.

Dạng toán II: Đặt một ẩn phụ, nhưng không làm mất ẩn ban đầu. Khi đó, đưa BPT ban đầu về dạng tích hoặc xem một ẩn là tham số để giải.

Dạng toán III: Đặt nhiều ẩn phụ chuyển BPT mũ ban đầu thành BPT tích hoặc xem một ẩn là tham số để giải.

II. HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Giải bất phương trình $9^{x-1} - 36.3^{x-3} + 3 \le 0$.

Câu 2. Giải bất phương trình $7^{2x} - 7^{x+1} + 6 > 0$.

Câu 3. Giải bất phương trình: $3^x + 9.3^{-x} - 10 < 0$

Câu 4. Giải bất phương trình: $3.4^x - 2.6^x > 9^x$.

Câu 5. Giải bất phương trình: $2.4^{x^2+1} + 6^{x^2+1} \ge 9^{x^2+1}$.

Câu 6. Giải bất phương trình: $\left(4+\sqrt{15}\right)^x + \left(4-\sqrt{15}\right)^x \le 62$.

Câu 7. Giải bất phương trình $3^{x+2} - 3^{2-x} > 24$.

Câu 8. Giải bất phương trình $\sqrt{3^x+1} \le 3^{\frac{x}{2}} + \frac{2}{\sqrt{3^x+1}}$.

Câu 9. Giải bất phương trình $\left(2^x-2\right)^2 < \left(2^x+2\right)\left(1-\sqrt{2^x-1}\right)^2$.

BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT GIẢI BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

Dạng bất phương trình: $A\log_a^2 x + B\log_a x + C > 0\ (0 < a \neq 1)$.

Phương pháp giải

Đặt $\log_a x = t$, bất phương trình trở thành: $At^2 + Bt + C > 0$.

Giải bất phương trình ẩn t, từ đó giải ra x.

Dạng bất phương trình: $A\log_a x + B\log_x a + C > 0\ (0 < a \neq 1,\ 0 < x \neq 1)$.

Phương pháp giải

Đặt $\log_a x = t$, bất phương trình trở thành: $At + \frac{B}{t} + C > 0$.

Giải bất phương trình ẩn t, từ đó giải ra x.

Câu 1. Giải bất phương trình $\log_{0,2}^2 x - 5\log_{0,2} x < -6$.

Câu 2. Giải bất phương trình $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 \geq 0$.

Câu 3. Giải bất phương trình $\log_3^2(x+1) - 4\log_3(x+1) + 3 \leq 0$.

Câu 4. Tìm các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2(5^x - 1).\log_2(2.5^x - 2) \geq m$

Câu 5. Giải bất phương trình $\log_2(2^x - 1).\log_2(2^{x+1} - 2) - 2 \leq 0$.

Câu 6. Giải bất phương trình: $\log_2(5^x + 2) + 2.\log_{(5^x+2)} 2 > 3$

Câu 7. Giải bất phương trình: $\log_{2x} 64 + \log_{x^2} 16 \geq 3$

Câu 8. Giải bất phương trình $\dfrac{\log_2 \frac{x}{2}}{\log_2 x} - \dfrac{\log_2 x^2}{\log_2 x - 1} \leq 1$

Câu 9. Tìm m để bất phương trình $\sqrt{\log_2^2 x + 3\log_{\frac{1}{2}} x^2 - 7} < m(\log_4 x^2 - 7)$ có nghiệm với mọi $x \geq 256$.

DẠNG 4: BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ – LOGA PHƯƠNG PHÁP XÉT HÀM.

Câu 1. Giải bất phương trình $2^{x+1} + 3^{x+1} < 6^x - 1$.

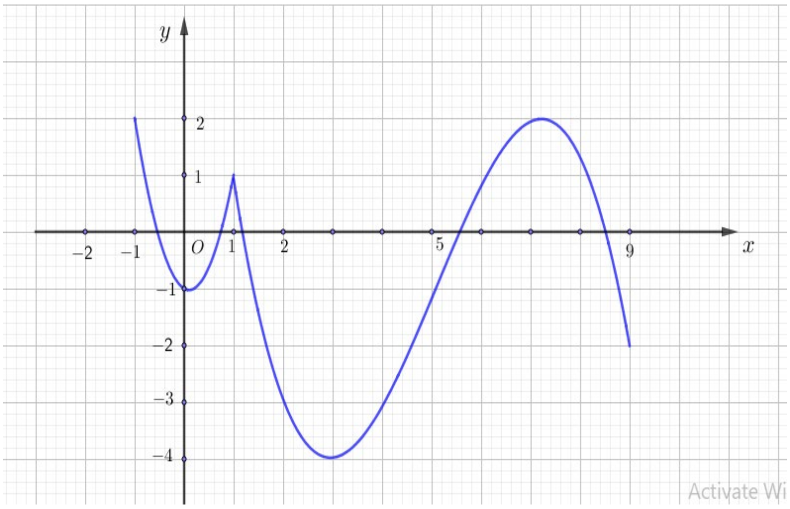
Câu 2. Tìm tham số m để bất phương trình: $m + e^{\frac{x}{2}} \geq \sqrt[4]{e^{2x} + 1}$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Câu 3. Tìm tham số m để bất phương trình $4^{\sqrt{x^2+x-m}} + 4x^2 + 2 > 2\left(2^{\sqrt{x^2+x-m}} + 2x\right)$ nghiệm đúng với mọi x.

Câu 4. Giải bất phương trình $\log_2(x^2 + 3) - \log_2 x + x^2 - 4x + 1 \leq 0$.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2(5^x - 1).\log_2(2.5^x - 2) \geq m$ có nghiệm với mọi $x \geq 1$?

Câu 6. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[-1;9\right]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Tìm tham số m để bất phương trình $16.3^{f(x)} - \left[f^2\left(x\right) + 2f\left(x\right) - 8\right].4^{f(x)} \geq \left(m^2 - 3m\right).6^{f(x)}$ nghiệm đúng với mọi giá trị x thuộc đoạn $\left[-1;9\right]$?

DẠNG 5: MỘT SỐ BÀI TOÁN KẾT HỢP CÁC PHƯƠNG PHÁP

Câu 1. Giải bất phương trình $x^2 - 4x + 2 + \log_3\left(x^2 - 4x + 6\right) > 0$

Câu 2. Tìm tất cả giá trị của m để bất phương trình $4^{x^2} - \left(m+1\right)2^{x^2+1} + m + 3 \geq 0$ nghiệm đúng với mọi x .

Câu 3. Giải bất phương trình $x^2 + 3^{\log_2 x} > x^{\log_2 5}$

Câu 4. Cho bất phương trình $\ln\dfrac{x^3 - 2x^2 + 2}{x^2 + m} + x^3 - 3x^2 + 2 - m \geq 0$. Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in \left[0;3\right]$.

CHƯƠNG II HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

6. BẤT PHƯƠNG TRÌNH – MŨ – LOGARIT

DẠNG 1: BẤT PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN - PHƯƠNG PHÁP ĐƯA VỀ CÙNG CƠ SỐ

I LÝ THUYẾT.

1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

- Nếu $a>1$, $b>0$ thì $a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)>g(x)$

  $a^{f(x)}>b \Leftrightarrow f(x)>\log_a b$
- Nếu $0<a<1$, $b>0$ thì $a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)<g(x)$

  $a^{f(x)}>b \Leftrightarrow f(x)<\log_a b$
- Lưu ý: $b\le 0$ thì $a^{f(x)}>b$ đúng với mọi x thỏa mãn điều kiện xác định của $f(x)$, còn $a^{f(x)}\le b$ vô nghiệm.

2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

- Nếu $a>1$ thì $\log_a f(x)>\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)>0 \\ f(x)>g(x) \end{cases}$
- Nếu $0<a<1$ thì $\log_a f(x)>\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)<g(x) \end{cases}$

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Giải bất phương trình $\left(\frac{4}{3}\right)^{x^2-4}\ge 1$.

Lời giải

Bất phương trình $\left(\frac{4}{3}\right)^{x^2-4}\ge 1 \Leftrightarrow x^2-4\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -2 \\ x\ge 2 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$.

Câu 2. Có bao nhiêu số nguyên $x \le 10$ là nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} \ge 3^{-x}$?

Lời giải

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} > 3^{-x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} \ge \left(\frac{1}{3}\right)^{x} \Leftrightarrow \sqrt{x+2} \le x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x+2 \ge 0 \\ x+2 \le x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x \ge -2 \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 2 \\ x \le -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 2$$

Theo giả thiết số nguyên $x \le 10 \Rightarrow x \in [2;10]$.

Vậy có 9 số nguyên x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3. Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \ge \log_{\frac{1}{2}} 4$.

Lời giải

Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \ge \log_{\frac{1}{2}} 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \le 4 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 7 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x \le 7$.

Vì $\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ 3 < x \le 7 \end{cases} \Rightarrow x \in \{4;5;6;7\}$.

Vậy bất phương trình đã cho có tất cả 4 nghiệm nguyên.

Câu 4. Giải bất phương trình: $\log(3-2x) \ge \log(x+1)$.

Lời giải

$$\log(3-2x) \ge \log(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ 3-2x \ge x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \le \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \le \frac{2}{3}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left(-1;\frac{2}{3}\right]$.

Câu 5. Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-5x+7\right) > 0$.

Lời giải

$\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-5x+7\right) > 0 \Leftrightarrow 0 < x^2-5x+7 < 1$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+6 < 0 \\ x^2-5x+7 > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 2 < x < 3$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (2;3)$.

Câu 6. Bất phương trình $\log_3(3x+1)<\log_3(x+7)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên ?

Lời giải

Ta có:

$$\log_3(3x+1)<\log_3(x+7)\Leftrightarrow\begin{cases}3x+1<x+7\\3x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<3\\x>-\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow-\frac{1}{3}<x<3.$$

Vì x là số nguyên nên $x\in\{0;1;2\}$. Vậy bất phương trình có 3 nghiệm nguyên.

Câu 7. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{0,5}(x+1)>\log_{0,5}2x$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}x+1>0\\2x>0\end{cases}\Leftrightarrow x>0$.

Ta có: $\log_{0,5}(x+1)>\log_{0,5}2x\Leftrightarrow x+1<2x\Leftrightarrow x>1$, kết hợp điều kiện ta được $x>1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(1;+\infty)$.

Câu 8. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_x 3<\log_{\frac{x}{3}}3$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}x>0\\x\neq1\\x\neq3\end{cases}$.

Ta có: $\log_x 3<\log_{\frac{x}{3}}3\Leftrightarrow\dfrac{1}{\log_3 x}<\dfrac{1}{\log_3\dfrac{x}{3}}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\log_3 x}-\dfrac{1}{\log_3 x-1}<0$

$$\Leftrightarrow\frac{-1}{\log_3 x.(\log_3 x-1)}<0\Leftrightarrow\log_3 x.(\log_3 x-1)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_3 x<0\\\log_3 x-1<0\end{cases}\\\begin{cases}\log_3 x>0\\\log_3 x-1>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_3 x<0\\\log_3 x>1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<1\\x>3\end{array}\right.,$$ kết hợp

điều kiện ta được $0<x<1$ hoặc $x>3$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(0;1)\cup(3;+\infty)$.

Câu 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\log_5(x^2+1)+1\geq\log_5(mx^2+4x+m)$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$?

Lời giải

Bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}mx^2+4x+m>0\\5\left(x^2+1\right)\ge mx^2+4x+m\end{cases}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ (dễ thấy

m=0 không thỏa mãn hệ) $\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\\Delta_{(1)}=16-4m^2<0\\5-m>0\\\Delta_{(2)}=16-4\left(5-m\right)^2\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\m<-2\vee m>2\\m<5\\m\le 3\vee m\ge 7\end{cases}\Leftrightarrow 2<m\le 3$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=3$.

Vậy có 1 giá trị nguyên của m thoả mãn.

DẠNG 2: BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ GIẢI BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

I. LÝ THUYẾT.

Phương pháp: $f\left[a^{g(x)}\right]>0\quad\left(0<a\ne 1\right)\;\Leftrightarrow\;\begin{cases}t=a^{g(x)}>0\\f\left(t\right)>0\end{cases}$.

Ta thường gặp các dạng:

Dạng toán I: Đặt một ẩn, đưa BPT ban đầu về một BPT theo ẩn mới.

- $m.a^{2f(x)}+n.a^{f(x)}+p>0$.
- $m.a^{f(x)}+n.b^{f(x)}+p>0$, trong đó $a.b=1$. Đặt $t=a^{f(x)}$ $\left(t>0\right)$, suy ra $b^{f(x)}=\dfrac{1}{t}$.
- $m.a^{2f(x)}+n.\left(a.b\right)^{f(x)}+p.b^{2f(x)}>0$. Chia hai vế cho $b^{2f(x)}$ và đặt $t=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{f(x)}>0$.

Dạng toán II: Đặt một ẩn phụ, nhưng không làm mất ẩn ban đầu. Khi đó, đưa BPT ban đầu về dạng tích hoặc xem một ẩn là tham số để giải.

Dạng toán III: Đặt nhiều ẩn phụ chuyển BPT mũ ban đầu thành BPT tích hoặc xem một ẩn là tham số để giải.

II. HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Giải bất phương trình $9^{x-1}-36.3^{x-3}+3\le 0$.

Lời giải

Ta có: $9^{x-1}-36.3^{x-3}+3\le 0\Leftrightarrow\dfrac{9^x}{9}-\dfrac{4}{3}.3^x+3\le 0\Leftrightarrow\dfrac{1}{9}.\left(3^x\right)^2-\dfrac{4}{3}.3^x+3\le 0\Leftrightarrow\left(3^x\right)^2-12.3^x+27\le 0$

Đặt $t=3^x$ (điều kiện: $t>0$)

Khi đó bất phương trình $\left(*\right)$ trở thành: $t^2-12t+27\le 0\Leftrightarrow 3\le t\le 9\;\Rightarrow 3\le 3^x\le 9\;\Leftrightarrow 1\le x\le 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S=\left[1;2\right]$.

Câu 2. Giải bất phương trình $7^{2x}-7^{x+1}+6>0$.

Lời giải

Ta có: $7^{2x}-7^{x+1}+6>0\Leftrightarrow\left(7^{x}\right)^{2}-7.7^{x}+6>0\Leftrightarrow\left(7^{x}\right)^{2}-7.7^{x}+6>0\ \ (*)$

Đặt $t=7^{x}$, $t>0$. Khi đó bất phương trình $(*)$ trở thành:

$t^2-7t+6>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<t<1\\ t>6\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}0<7^{x}<1\\ 7^{x}>6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0\\ x>\log_7 6\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S=\left(-\infty;0\right)\cup\left(\log_7 6;+\infty\right)$.

Câu 3. Giải bất phương trình: $3^{x}+9.3^{-x}-10<0$

Lời giải

Đặt $t=3^{x}$, $t>0$

Bất phương trình trên trở thành

$t+\dfrac{9}{t}-10<0\Leftrightarrow t^2-10t+9<0\Leftrightarrow 1<t<9\Rightarrow 1<3^{x}<9\Leftrightarrow 0<x<2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S=\left(0;2\right)$.

Câu 4. Giải bất phương trình: $3.4^{x}-2.6^{x}>9^{x}$.

Lời giải

Chia cả hai vế của bất phương trình cho $4^{x}>0$ ta được $3-2.\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x}>\left(\dfrac{9}{4}\right)^{x}\ \ (*)$

Đặt $t=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x}$, $t>0$. Bất phương trình $(*)$ trở thành:

$3-2t>t^2\Leftrightarrow t^2+2t-3<0\Leftrightarrow 0<t<1\Rightarrow 0<\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x}<1\Leftrightarrow\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x}<1\Leftrightarrow x<0$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S=\left(-\infty;0\right)$.

Câu 5. Giải bất phương trình: $2.4^{x^2+1}+6^{x^2+1}\ge 9^{x^2+1}$.

Lời giải

Bất phương trình đã cho tương đương với $2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x^2+1}\ge\left(\dfrac{9}{4}\right)^{x^2+1}$.

Đặt $t=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x^2+1}$, $t>0$; bất phương trình trở thành $t^2-t-2\le 0\Leftrightarrow -1\le t\le 2$.

Vì $t>0$ nên $0<t\le 2\Rightarrow\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x^2+1}\le 2\Leftrightarrow x^2+1\le\log_{\frac{3}{2}}2$

$\Leftrightarrow x^2\le\log_{\frac{3}{2}}2-1\Leftrightarrow -\sqrt{\log_{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{4}{3}\right)}\le x\le\sqrt{\log_{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{4}{3}\right)}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=\left[-\sqrt{\log_{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{4}{3}\right)};\sqrt{\log_{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{4}{3}\right)}\right]$.

Câu 6. Giải bất phương trình: $\left(4+\sqrt{15}\right)^x+\left(4-\sqrt{15}\right)^x\le 62$.

Lời giải

Ta có: $\left(4+\sqrt{15}\right).\left(4-\sqrt{15}\right)=1$

$$\left(4+\sqrt{15}\right)^x+\left(4-\sqrt{15}\right)^x\le 62\Leftrightarrow\left(4+\sqrt{15}\right)^x+\left(\frac{1}{4+\sqrt{15}}\right)^x\le 62\Leftrightarrow\left(4+\sqrt{15}\right)^x+\frac{1}{\left(4+\sqrt{15}\right)^x}\le 62$$

Đặt $t=\left(4+\sqrt{15}\right)^x$, $t>0$.

Bất phương trên trở thành: $t+\frac{1}{t}\le 62\Leftrightarrow t^2-62t+1\le 0\Leftrightarrow 31-8\sqrt{15}\le t\le 31+8\sqrt{15}$

$\Rightarrow 31-8\sqrt{15}\le\left(4+\sqrt{15}\right)^x\le 31+8\sqrt{15}\Leftrightarrow -2\le x\le 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S=\left[-2;2\right]$.

Câu 7. Giải bất phương trình $3^{x+2}-3^{2-x}>24$.

Lời giải

Bất phương trình đã cho tương đương với $9.3^x-\frac{9}{3^x}-24>0$.

Đặt $t=3^x, t>0$, bất phương trình trở thành $9t-\frac{9}{t}-24>0\Leftrightarrow 9t^2-24t-9>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t>3\ (n)\\ t<-\frac{1}{3}\ (l)\end{array}\right.$.

Với $t>3\Rightarrow 3^x>3\Leftrightarrow x>1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=\left(1;+\infty\right)$.

Câu 8. Giải bất phương trình $\sqrt{3^x+1}\le 3^{\frac{x}{2}}+\frac{2}{\sqrt{3^x+1}}$.

Lời giải

Ta có phương trình:

$$\sqrt{3^x+1}\le 3^{\frac{x}{2}}+\frac{2}{\sqrt{3^x+1}}\Leftrightarrow\sqrt{3^x+1}\le\sqrt{3^x}+\frac{2}{\sqrt{3^x+1}}\Leftrightarrow\sqrt{3^x+1}\le\frac{\sqrt{3^x(3^x+1)}+2}{\sqrt{3^x+1}}$$

$\Leftrightarrow 3^x+1\le\sqrt{3^x(3^x+1)}+2\,(*)$

Đặt $t=3^x+1>1\Rightarrow 3^x=t-1$

Từ đó phương trình (*) trở thành $t\le\sqrt{(t-1)\mathrm{t}}+2\Leftrightarrow t-2\le\sqrt{(t-1)\mathrm{t}}$

Trường hợp 1:

$$\begin{cases}1<t<2\\(t-1)t\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1<t<2\\\left[\begin{array}{l}t\ge 1\\t\le 0\end{array}\right.\end{cases}$$

$\Leftrightarrow 1<t<2 \Leftrightarrow 1<3^x+1<2 \Leftrightarrow 3^x<1 \Leftrightarrow x<0$

Trường hợp 2:

$$\begin{cases}t\ge 2\\(t-1)t\ge (t-2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge 2\\t^2-t\ge t^2-4t+4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge 2\\t\ge \dfrac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow t\ge 2 \Leftrightarrow 3^x\ge 2 \Leftrightarrow x\ge \log_3 2$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $\left[\begin{array}{l}x\ge \log_3 2\\x<0\end{array}\right.$.

Câu 9. Giải bất phương trình $\left(2^x-2\right)^2<\left(2^x+2\right)\left(1-\sqrt{2^x-1}\right)^2$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $2^x-1\ge 0 \Leftrightarrow 2^x\ge 1 \Leftrightarrow x\ge 0$

Đặt $\sqrt{2^x-1}=t,\left(t\ge 0\right)\Rightarrow 2^x-1=t^2 \Leftrightarrow 2^x=t^2+1$

Bất phương trình trở thành:

$$\left(t^2+1-2\right)^2<\left(t^2+1+2\right)\left(1-t\right)^2 \Leftrightarrow \left(t^2-1\right)^2<\left(t^2+3\right)\left(1-t\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(t-1\right)^2\left(t+1\right)^2<\left(t^2+3\right)\left(t-1\right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases}\left(t+1\right)^2<t^2+3\\t\ne 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t^2+2t+1<t^2+3\\t\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t<1\\t\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow t<1.$$

Do đó $\sqrt{2^x-1}<1 \Leftrightarrow 2^x-1<1 \Leftrightarrow 2^x<2 \Leftrightarrow x<1$.

Kết hợp điều kiện: $0\le x<1$.

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là: $S=\left[0;1\right)$.

BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT GIẢI BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

Dạng bất phương trình: $A\log_a^2 x+B\log_a x+C>0\ \left(0<a\ne 1\right)$.

Phương pháp giải

Đặt $\log_a x=t$, bất phương trình trở thành: $At^2+Bt+C>0$.

Giải bất phương trình ẩn t, từ đó giải ra x.

Dạng bất phương trình: $A\log_a x+B\log_x a+C>0\ \left(0<a\ne 1,\ 0<x\ne 1\right)$.

Phương pháp giải

Đặt $\log_a x=t$, bất phương trình trở thành: $At+\dfrac{B}{t}+C>0$.

Giải bất phương trình ẩn t, từ đó giải ra x.

Câu 1. Giải bất phương trình $\log_{0,2}^2 x - 5\log_{0,2} x < -6$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $x > 0$.

Đặt $\log_{0,2} x = t$, bất phương trình trở thành:

$t^2 - 5t < -6 \Leftrightarrow 2 < t < 3$.

Do đó ta có $2 < \log_{0,2} x < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{125} < x < \frac{1}{25}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(\frac{1}{125}; \frac{1}{25}\right)$.

Câu 2. Giải bất phương trình $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 \geq 0$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $x > 0$.

Đặt $\log_2 x = t$, bất phương trình trở thành:

$t^2 - 5t + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leq 1 \\ t \geq 4 \end{array}\right.$.

Do đó $\left[\begin{array}{l} \log_2 x \leq 1 \\ \log_2 x \geq 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 2 \\ x \geq 16 \end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện ta có: $\left[\begin{array}{l} 0 < x \leq 2 \\ x \geq 16 \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (0;2] \cup [16;+\infty)$.

Câu 3. Giải bất phương trình $\log_3^2(x+1) - 4\log_3(x+1) + 3 \leq 0$.

Lời giải

Điều kiện $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

Đặt $t = \log_3(x+1)$, bất phương trình trở thành $t^2 - 4t + 3 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq t \leq 3$.

Suy ra $1 \leq \log_3(x+1) \leq 3 \Leftrightarrow 3 \leq x + 1 \leq 27 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 26$.

So với điều kiện, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = [2;26]$.

Câu 4. Tìm các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2(5^x - 1).\log_2(2.5^x - 2) \geq m$

Lời giải

Ta có: $\log_2(5^x - 1).\log_2(2.5^x - 2) \geq m \Leftrightarrow \log_2(5^x - 1)\left[1 + \log_2(5^x - 1)\right] \geq m$.

Đặt $\mathrm{t} = \log_2(5^x - 1)$. Vì $x \geq 1$ nên $t \in [2;+\infty)$.

Bất phương trình trở thành: $t(t+1)\ge m \Leftrightarrow t^2+t\ge m$ với mọi $t\in[2;+\infty)$

Xét $f(t)=t^2+t$, $f'(t)=2t+1>0$ với $t\in[2;+\infty)$ nên hàm đồng biến trên $t\in[2;+\infty)$.

Nên $\min\limits_{[2;+\infty)} f(t)=f(2)=6$

Bất phương trình $\log_2(5^x-1).\log_2(2.5^x-2)\ge m$ nghiệm đúng với mọi $x\ge 1$ khi và chỉ khi

$f(t)\ge m\ \forall t\in[2;+\infty)\Leftrightarrow m\le \min\limits_{[2;+\infty)} f(t)\Leftrightarrow m\le 6$.

Vậy $m\le 6$.

Câu 5. Giải bất phương trình $\log_2(2^x-1).\log_2(2^{x+1}-2)-2\le 0$.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases}2^x-1>0\\ 2^{x+1}-2>0\end{cases}\Leftrightarrow 2^x>1$.

Ta có bất phương trình tương đương với

$\log_2(2^x-1).\log_2\left[2.(2^x-1)\right]-2\le 0\Leftrightarrow \log_2(2^x-1).\left[\log_2(2^x-1)+1\right]-2\le 0$.

Đặt $t=\log_2(2^x-1)$, bất phương trình trở thành $t(t+1)-2<0\Leftrightarrow -2<t<1$.

Suy ra $-2\le \log_2(2^x-1)\le 1\Leftrightarrow \dfrac{1}{4}\le 2^x-1\le 2\Leftrightarrow \dfrac{5}{4}\le 2^x\le 3$ (thỏa điều kiện)

$\Leftrightarrow \log_2\dfrac{5}{4}\le x\le \log_2 3\Leftrightarrow \log_2 5-2\le x\le \log_2 3$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=\left[\log_2 5-2;\log_2 3\right]$.

Câu 6. Giải bất phương trình: $\log_2(5^x+2)+2.\log_{(5^x+2)}2>3$

Lời giải

Ta có : $\log_2(5^x+2)+2.\log_{(5^x+2)}2>3\Leftrightarrow \log_2(5^x+2)+2.\dfrac{1}{\log_2(5^x+2)}>3\ (*)$.

Đặt $t=\log_2(5^x+2)>1$. Khi đó $(*)$ thành $t+\dfrac{2}{t}>3\Leftrightarrow t^2-3t+2>0\Leftrightarrow t>2$ (do $t>1$).

Với $t>2$ thì $\log_2(5^x+2)>2=\log_2 2^2\Leftrightarrow 5^x>2\Leftrightarrow x>\log_5 2$

Câu 7. Giải bất phương trình: $\log_{2x}64+\log_{x^2}16\ge 3$

Lời giải

ĐK: $\begin{cases}0<2x\ne 1\\ 0<x^2\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}0<x\ne \dfrac{1}{2}\\ x\ne 1\end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{\log_2 64}{\log_2 2x}+\dfrac{\log_2 16}{\log_2 x^2}\ge 3\Leftrightarrow \dfrac{6}{1+\log_2 x}+\dfrac{2}{\log_2 x}\ge 3\quad (1)$

Đặt $t=\log_2 x$, $t\ne 0$ và $t\ne -1$

Khi đó, (1) trở thành $\frac{6}{1+t}+\frac{2}{t}\ge 3 \Leftrightarrow \frac{6t+2(1+t)}{t^2+t}\ge\frac{3t^2+3t}{t^2+t}\Leftrightarrow\frac{3t^2-5t-2}{t^2+t}\le 0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<t\le-\frac{1}{3}\\0<t\le 2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<\log_2 x\le-\frac{1}{3}\\0<\log_2 x\le 2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\\1<x\le 4\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện, ta suy ra tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]\cup(1;4]$.

Câu 8. Giải bất phương trình $\frac{\log_2\frac{x}{2}}{\log_2 x}-\frac{\log_2 x^2}{\log_2 x-1}\le 1$

Lời giải

$\frac{\log_2\frac{x}{2}}{\log_2 x}-\frac{\log_2 x^2}{\log_2 x-1}\le 1\ (1)$. ĐK: $\begin{cases}x>0\\\log_2 x\ne 0\\\log_2 x-1\ne 0\end{cases}.\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\\log_2 x\ne 0\\\log_2 x-1\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x\ne 1\\x\ne 2\end{cases}$

$(1)\Leftrightarrow\frac{\log_2 x-1}{\log_2 x}-\frac{2\log_2 x}{\log_2 x-1}\le 1.$

Đặt $t=\log_2 x$. Bất phương trình trở thành: $\frac{t-1}{t}-\frac{2t}{t-1}\le 1\Leftrightarrow\frac{-2t^2-t+1}{t(t-1)}\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t>1\\0<t\le\frac{1}{2}\\t\le-1\end{array}\right.$.

$t>1\Leftrightarrow\log_2 x>1\Leftrightarrow x>2$.

$0<t\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0<\log_2 x\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow 1<x\le\sqrt{2}$.

$t\le-1\Leftrightarrow\log_2 x\le-1\Leftrightarrow 0<x\le\frac{1}{2}$.

Kết hợp với điều kiện, bất phương trình (1) có tập nghiệm $S=\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup\left(1;\sqrt{2}\right]\cup(2;+\infty)$.

Câu 9. Tìm m để bất phương trình $\sqrt{\log_2^2 x+3\log_{\frac{1}{2}}x^2-7}<m\left(\log_4 x^2-7\right)$ có nghiệm với mọi $x\ge 256$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases}x>0\\\log_2^2 x+3\log_{\frac{1}{2}}x^2-7\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\\log_2^2 x-6\log_2 x-7\ge 0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\\left[\begin{array}{l}\log_2 x<-1\\\log_2 x>7\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\\left[\begin{array}{l}x\le\frac{1}{2}\\x\ge 128\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x\le\frac{1}{2}\\x\ge 128\end{array}\right.$$

Với điều kiện trên bất phương trình trở thành $\sqrt{\log_2^2 x-6\log_6 x-7}<m\left(\log_2 x-7\right)\ (*)$

Đặt $t=\log_2 x$ thì $t\ge 8$ vì $x\ge 256$.

(*) trở thành $\sqrt{(t+1)(t-7)}<m(t-7)\Leftrightarrow\sqrt{\frac{t+1}{t-7}}<m,\ \forall t\ge 8$.

Đặt $f(t)=\sqrt{\frac{t+1}{t-7}}$.

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{\frac{t+1}{t-7}}$ trên nửa khoảng $[8;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\frac{-4}{(t-7)^2}.\sqrt{\frac{t-7}{t+1}}<0,\forall t\ge 8\Rightarrow f(t)$ luôn nghịch biến trên khoảng $[8;+\infty)$.

Do đó $\max\limits_{[8;+\infty)} f(t)=f(8)=3$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m\ge\max\limits_{[8;+\infty)} f(t)\Leftrightarrow m\ge 3$. Vậy $m\ge 3$.

DẠNG 4: BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ – LOGA PHƯƠNG PHÁP XÉT HÀM.

Câu 1. Giải bất phương trình $2^{x+1}+3^{x+1}<6^x-1$.

Lời giải

Ta có: $2^{x+1}+3^{x+1}<6^x-1\Leftrightarrow 2.\left(\frac{1}{3}\right)^x+3.\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{6}\right)^x<1$ (*)

Đặt $f(x)=2.\left(\frac{1}{3}\right)^x+3.\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{6}\right)^x$.

Ta có: $f'(x)=2.\left(\frac{1}{3}\right)^x.\ln\left(\frac{1}{3}\right)+3.\left(\frac{1}{2}\right)^x.\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{6}\right)^x.\ln\left(\frac{1}{6}\right)<0,\forall x\in\mathbb{R}$

Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó: $(*)\Leftrightarrow f(x)<f(2)\Leftrightarrow x>2$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S=(2;+\infty)$.

Câu 2. Tìm tham số m để bất phương trình: $m+e^{\frac{x}{2}}\ge\sqrt[4]{e^{2x}+1}$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Lời giải

TXĐ: $\mathbb{R}$

Ta có bất phương trình tương đương $m\ge\sqrt[4]{e^{2x}+1}-e^{\frac{x}{2}}$.

Đặt $e^{\frac{x}{2}}=t,\ t>0$, khi đó yêu cầu bài toán tương đương $m\ge\sqrt[4]{t^4+1}-t$ đúng với mọi $t>0$ (*)

Đặt $y=f(t)=\sqrt[4]{t^4+1}-t,\ t>0$.

Ta có: $f'(t)=\frac{t^3}{\sqrt[4]{(t^4+1)^3}}-1;\ f'(t)=0\Leftrightarrow\frac{t^3}{\sqrt[4]{(t^4+1)^3}}-1=0$

$\Leftrightarrow t^3=\sqrt[4]{\left(t^4+1\right)^3} \Leftrightarrow t^{12}=\left(t^4+1\right)^3 \Leftrightarrow t^{12}=t^{12}+3t^8+3t^4+1 \Leftrightarrow 3t^8+3t^4+1=0$ (Vô nghiệm)

Nhận xét: $f'(t)=\dfrac{t^3}{\sqrt[4]{\left(t^4+1\right)^3}}-1=\dfrac{t^3-\sqrt[4]{\left(t^4+1\right)^3}}{\sqrt[4]{\left(t^4+1\right)^3}}<0,\ \forall t>0$ (vì $\sqrt[4]{\left(t^4+1\right)^3}>\sqrt[4]{\left(t^4\right)^3}=t^3$)

Mặt khác $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t)=1$;

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt[4]{t^4+1}-t\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{t^4+1}-t^2}{\left(\sqrt[4]{t^4+1}+t\right)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[4]{t^4+1}+t\right)\left(\sqrt{t^4+1}+t^2\right)}=0.$$

Bảng biến thiên:

t	0		$+\infty$
y'		$-$	
y	1	$\searrow$	0

Do đó (*) $\Leftrightarrow m\ge 1$. Vậy $m\ge 1$.

Câu 3. Tìm tham số m để bất phương trình $4^{\sqrt{x^2+x-m}}+4x^2+2>2\left(2^{\sqrt{x^2+x-m}}+2x\right)$ nghiệm đúng với mọi x.

Lời giải

Để bất phương trình có nghiệm đúng với mọi x, trước hết bất phương trình phải xác định trên $\mathbb{R}$.

Tức là $x^2+x-m\ge 0,\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow m\le g(x)=x^2+x,\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow m\le \min\limits_{x\in\mathbb{R}} g(x)=g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}$

Khi đó yêu cầu bài toán tương đương với

$\left(4^{\sqrt{x^2+x-m}}-2\cdot 2^{\sqrt{x^2+x-m}}+1\right)+\left(4x^2-4x+1\right)>0,\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \left(2^{\sqrt{x^2+x-m}}-1\right)^2+(2x-1)^2>0,\forall x\in\mathbb{R}$

Ta có $\left(2^{\sqrt{x^2+x-m}}-1\right)^2+(2x-1)^2\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ và dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases}2^{\sqrt{x^2+x-m}}-1=0\\ 2x-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\ m=\dfrac{3}{4}.\end{cases}.$$

Với điều kiện $m\le -\dfrac{1}{4}$ thì dấu bằng không thể xảy ra, nên suy ra bất phương trình luôn nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Vậy $m\le -\dfrac{1}{4}$.

Câu 4. Giải bất phương trình $\log_2\left(x^2+3\right)-\log_2 x+x^2-4x+1\le 0$.

Lời giải

Điều kiện: $x>0$.

Ta có

$\log_2\left(x^2+3\right)-\log_2 x+x^2-4x+1\le 0 \Leftrightarrow \log_2\left(x^2+3\right)+x^2+3\le \log_2 4x+4x \ (*)$.

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ trên $D=(0;+\infty)$. Ta có

$f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0 \ \forall t\in D \Rightarrow$ hàm số f đồng biến trên D.

Suy ra $(*)\Leftrightarrow f\left(x^2+3\right)\le f(4x)\Leftrightarrow x^2+3\le 4x\Leftrightarrow 1\le x\le 3$.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2(5^x-1).\log_2(2.5^x-2)\ge m$ có nghiệm với mọi $x\ge 1$?

Lời giải

BPT $\Leftrightarrow \log_2(5^x-1).\log_2(2.5^x-2)\le \text{m} \Leftrightarrow \log_2(5^x-1).\left[1+\log_2(5^x-1)\right]\le \text{m}$

Đặt $t=\log_2\left(5^x-1\right)$ do $x\ge 1\Rightarrow t\in[2;+\infty)$

BPT $\Leftrightarrow t(1+t)\ge m \Leftrightarrow t^2+t\ge m \Leftrightarrow f(t)\ge m$

Với $f(t)=t^2+t$

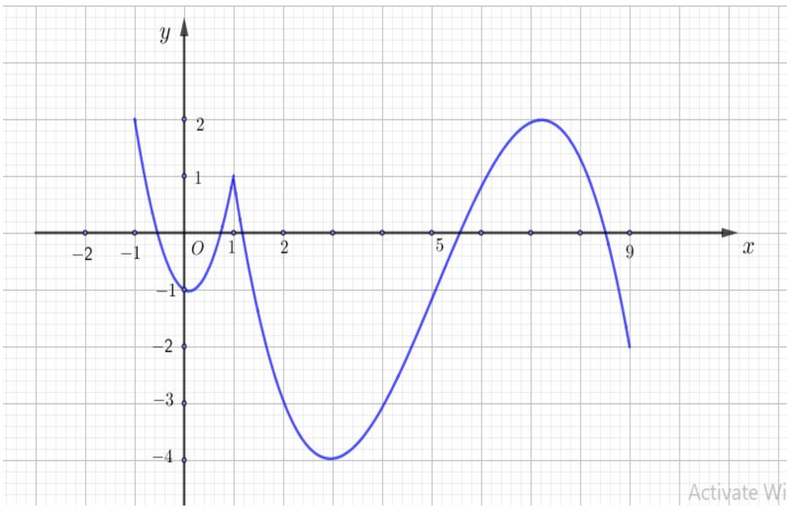
$f'(t)=2t+1>0$ với $t\in[2;+\infty)$ nên hàm đồng biến trên $t\in[2;+\infty)$

Nên $Minf(t)=f(2)=6$

Do đó để để bất phương trình $\log_2(5^x-1).\log_2(2.5^x-2)\ge \text{m}$ có nghiệm với mọi $x\ge 1$ thì :

$m\le Minf(t)\Leftrightarrow m\le 6$

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;9]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Tìm tham số m để bất phương trình $16.3^{f(x)}-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right].4^{f(x)}\ge\left(m^2-3m\right).6^{f(x)}$ nghiệm đúng với mọi giá trị x thuộc đoạn $[-1;9]$?

Lời giải

Từ đồ thị ta suy ra $-4\le f(x)\le 2 \ \ \forall x\in[-1;9]$.

Đặt $t=f(x)$, $t\in[-4;2]$.

Ta tìm m sao cho bất phương trình $16.3^t - \left[t^2+2t-8\right].4^t \ge \left(m^2-3m\right).6^t$ (1) đúng với $\forall t\in[-4;2]$.

(1) $\Leftrightarrow \dfrac{16}{2^t} - \left[t^2+2t-8\right].\left(\dfrac{2}{3}\right)^t \ge m^2-3m$ với $\forall t\in[-4;2]$ (*).

Ta có $\dfrac{16}{2^t}\ge 4,\ \forall t\in[-4;2]$. Dấu bằng xảy ra khi $t=2$.

Lại có $t^2+2t-8\le 0$ với $\forall t\in[-4;2]$.

Do đó $\left(t^2+2t-8\right).\left(\dfrac{2}{3}\right)^t \le 0,\ \forall t\in[-4;2]$. Dấu bằng xảy ra khi $t=2\vee t=-4$.

Như vậy $\dfrac{16}{2^t}-\left[t^2+2t-8\right].\left(\dfrac{2}{3}\right)^t \ge 4\ \forall t\in[4;-2]$. Mà $\dfrac{16}{2^t}-\left[t^2+2t-8\right].\left(\dfrac{2}{3}\right)^t \ge m^2-3m$ với $\forall t\in[-4;2]$.

Suy ra $m^2-3m\le 4 \Leftrightarrow -1\le m\le 4$.

Vậy $-1\le m\le 4$.

DẠNG 5: MỘT SỐ BÀI TOÁN KẾT HỢP CÁC PHƯƠNG PHÁP

Câu 1. Giải bất phương trình $x^2-4x+2+\log_3\left(x^2-4x+6\right)>0$

Lời giải

Đặt $t=x^2-4x+2=(x-2)^2-2,\ t\ge -2$. Ta có bất phương trình $t+\log_3(t+4)>0$.

Đặt $f(t)=t+\log_3(t+4), t\ge -2$

Ta có $f'(t)=1+\dfrac{1}{(t+4)\ln 3}>0, \forall t\ge -2$. Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[-2;+\infty)$.

Mặt khác $f(-1)=0$.

Do đó $f(t)>0 \Rightarrow t>-1 \Rightarrow x^2-4x+2>-1 \Rightarrow x^2-4x+3>0 \Rightarrow x\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $T=(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$.

Câu 2. Tìm tất cả giá trị của *m* để bất phương trình $4^{x^2}-(m+1)2^{x^2+1}+m+3\ge 0$ nghiệm đúng với mọi x.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Đặt $t=2^{x^2}, (t\ge 1)$, khi đó bất phương trình trở thành $t^2-2(m+1)t+m+3\ge 0$ (*)

Với $t\ge 1$ thì $(*) \Leftrightarrow t^2-2t+3\ge m(2t-1) \Leftrightarrow \dfrac{t^2-2t+3}{2t-1}\ge m$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2-2t+3}{2t-1}$ trên $[1;+\infty)$

Ta có $f'(t)=\dfrac{(2t-2)(2t-1)-2\left(t^2-2t+3\right)}{(2t-1)^2}=\dfrac{2t^2-2t-4}{(2t-1)^2}$.

Do đó hàm số $f(t)$ có bảng biến thiên như sau

t	1		2		$+\infty$
$f'(t)$	|	$-$	0	$+$	
$f(t)$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để bất phương trình $f(t)\ge m,\forall t\in[1;+\infty)$ thì $m\le 1$.

Câu 3. Giải bất phương trình $x^2+3^{\log_2 x}>x^{\log_2 5}$

Lời giải

+) Điều kiện: $x>0$

+) Đặt $t=\log_2 x\Rightarrow x=2^t$.

Khi đó bất phương trình đã cho có dạng: $\left(2^t\right)^2+3^t>\left(2^t\right)^{\log_2 5}\Leftrightarrow 4^t+3^t>5^t$.

Chia 2 vế của bất phương trình cho 5^t, ta được: $\left(\dfrac{4}{5}\right)^t+\left(\dfrac{3}{5}\right)^t>1$.

+) Xét hàm số $f(t)=\left(\dfrac{4}{5}\right)^t+\left(\dfrac{3}{5}\right)^t\Rightarrow f'(t)=\left(\dfrac{4}{5}\right)^t\ln\dfrac{4}{5}+\left(\dfrac{3}{5}\right)^t\ln\dfrac{3}{5}<0,\forall t$.

Do đó hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $f(2)=1$ nên $f(t)>1\Leftrightarrow f(t)>f(2)\Leftrightarrow t<2\Rightarrow\log_2 x<2\Leftrightarrow x<4$.

+) Đối chiếu điều kiện ta được: $0<x<4$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $S=(0;4)$.

Câu 4. Cho bất phương trình $\ln\dfrac{x^3-2x^2+2}{x^2+m}+x^3-3x^2+2-m\ge 0$. Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x\in[0;3]$.

Lời giải

Điều kiện: $\dfrac{x^3-2x^2+2}{x^2+m}>0$.

Do $x^3-2x^2+2>0$ với $\forall x\in[0;3]$ nên bài toán này ta chỉ xét với điều kiện $x^2+m>0\ \ (*)$

Với điều kiện $(*)$ ta có:

bất phương trình $\Leftrightarrow\ln\left(x^3-2x^2+2\right)-\ln\left(x^2+m\right)+x^3-3x^2+2-m\ge 0$

$\Leftrightarrow \ln\left(x^3-2x^2+2\right)+x^3-2x^2+2 \geq \ln\left(x^2+m\right)+x^2+m \quad (1)$

Xét hàm: $f(t)=\ln t+t$ trên $(0;+\infty)$.

$f'(t)=\dfrac{1}{t}+1>0$ với $\forall t \in (0;+\infty) \Rightarrow f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó: $(1) \Leftrightarrow x^3-2x^2+2 \geq x^2+m \Leftrightarrow m \leq x^3-3x^2+2$.

Đặt $g(x)=x^3-3x^2+2$.

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với $\forall x \in [0;3]$ khi:

$$\begin{cases} x^2+m>0 \ \forall x \in [0;3] \\ m \leq \min\limits_{x\in[0;3]} g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ m \leq -2 \end{cases}.$$

Vậy không tồn tại giá trị của m thỏa mãn bài toán.

CHƯƠNG II

HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

6. BẤT PHƯƠNG TRÌNH – MŨ – LOGARIT

III. HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THAM KHẢO VÀ ĐỀ CHÍNH THỨC CỦA BỘ GIÁO DỤC TỪ NĂM 2017 ĐẾN NAY

Câu 1: **(MĐ 101-2022)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_5(x+1)>2$ là:

A. $(9\,;+\infty)$. **B.** $(25\,;+\infty)$. **C.** $(31\,;+\infty)$. **D.** $(24\,;+\infty)$.

Câu 2: **(MĐ 102-2022)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_5(x+1)>2$ là

A. $(24;+\infty)$. **B.** $(9;+\infty)$. **C.** $(25;+\infty)$. **D.** $(31;+\infty)$.

Câu 3: **(MĐ 101-2022)** Có bao nhiêu số nguyên dương a sao cho ứng với mỗi a có đúng ba số nguyên b thỏa mãn $(3^b-3)(a.2^b-18)<0$?

A. 72. **B.** 73. **C.** 71. **D.** 74.

Câu 4: **(MĐ 102-2022)** Có bao nhiêu số nguyên dương a sao cho ứng với mỗi a có đúng hai số nguyên b thỏa mãn $(5^b-1)(a.2^b-5)<0$

A. 20. **B.** 21. **C.** 22. **D.** 19.

Câu 5: **(MĐ 103-2022)** Có bao nhiêu số nguyên dương a sao cho ứng với mỗi a có đúng hai số nguyên b thỏa mãn $(4^b-1)(a.3^b-10)<0$?

A. 182. **B.** 179. **C.** 180. **D.** 181.

Câu 6: **(MĐ 104-2022)** Có bao nhiêu số nguyên dương a sao cho ứng với mỗi a có đúng hai số nguyên b thoả mãn $(3^b-3)(a.2^b-16)<0$?

A. 34. **B.** 32. **C.** 31. **D.** 33.

Câu 7: **(MĐ 101-2022)** Xét tất cả các số thực x,y sao cho $a^{4x-\log_5 a^2}\le 25^{40-y^2}$ với mọi số thực dương a. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+x-3y$ bằng

A. $\dfrac{125}{2}$. **B.** 80. **C.** 60. **D.** 20.

Câu 8: **(MĐ 102-2022)** Xét tất cả các số thực $x,\ y$ sao cho $49^{9-y^2}\ge a^{4x-\log_7 a^2}$ với mọi số thực dương a. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+4x-3y$ bằng

A. $\dfrac{121}{4}$. **B.** $\dfrac{39}{4}$. **C.** 24. **D.** 39.

Câu 9: **(MĐ 103-2022)** Xét tất cả các số thực x,y sao cho $27^{5-y^2}\ge a^{6x-\log_3 a^3}$ với mọi số thực dương a. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2-4x+8y$ bằng

A. -15. **B.** 25. **C.** -5. **D.** -20.

Câu 10: **(MĐ 104-2022)** Xét tất cả các số thực x, y sao cho $8^{9-y^2} \ge a^{6x-\log_2 a^3}$ với mọi số thực dương a. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 - 6x - 8y$ bằng

A. -21. **B.** -6. **C.** -25. **D.** 39.

Câu 11: **(2020-2021 – ĐỢT 1)** Tập nghiệm của bất phương trình $3^x < 2$ là

A. $(-\infty; \log_3 2)$. **B.** $(\log_3 2; +\infty)$. **C.** $(-\infty; \log_2 3)$. **D.** $(\log_2 3; +\infty)$.

Câu 12: **(2020-2021 – ĐỢT 1)** Tập nghiệm của bất phương trình $2^x > 5$ là

A. $(-\infty; \log_2 5)$. **B.** $(\log_5 2; +\infty)$. **C.** $(-\infty; \log_5 2)$. **D.** $(\log_2 5; +\infty)$

Câu 13: **(2020-2021 – ĐỢT 1)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3x) > 5$ là

A. $\left(0; \dfrac{32}{3}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{32}{3}; +\infty\right)$. **C.** $\left(0; \dfrac{25}{3}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{25}{3}; +\infty\right)$.

Câu 14: **(2020-2021 – ĐỢT 2)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3x) > 3$ là

A. $(3; +\infty)$. **B.** $\left(\dfrac{8}{3}; +\infty\right)$. **C.** $\left(0; \dfrac{8}{3}\right)$. **D.** $(0; 3)$.

Câu 15: **(2020-2021 – ĐỢT 2)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(2x) > 4$

A. $(0; 32)$. **B.** $\left(0; \dfrac{81}{2}\right)$. **C.** $(32; +\infty)$. **D.** $\left(\dfrac{81}{2}; +\infty\right)$.

Câu 16: **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Tập nghiệm của bất phương trình $5^{x-1} \ge 5^{x^2-x-9}$ là

A. $[-2; 4]$. **B.** $[-4; 2]$.

C. $(-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$. **D.** $(-\infty; -4] \cup [2; +\infty)$.

Câu 17: **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Tập nghiệm của bất phương trình $9^x + 2.3^x - 3 > 0$ là

A. $[0; +\infty)$. **B.** $(0; +\infty)$. **C.** $(1; +\infty)$. **D.** $[1; +\infty)$.

Câu 18: **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-13} < 27$ là

A. $(4; +\infty)$. **B.** $(-4; 4)$. **C.** $(-\infty; 4)$. **D.** $(0; 4)$.

Câu 19: **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-23} < 9$ là

A. $(-5; 5)$. **B.** $(-\infty; 5)$. **C.** $(5; +\infty)$. **D.** $(0; 5)$.

Câu 20: **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-7} < 4$ là

A. $(-3; 3)$. **B.** $(0; 3)$. **C.** $(-\infty; 3)$. **D.** $(3; +\infty)$.

Câu 21: **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-1} < 8$ là

A. $(0; 2)$. **B.** $(-\infty; 2)$. **C.** $(-2; 2)$. **D.** $(2; +\infty)$.

Câu 22: **(Đề Tham Khảo 2018)** Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x} < 2^{x+6}$ là:

A. $(-\infty; 6)$ **B.** $(0; 64)$ **C.** $(6; +\infty)$ **D.** $(0; 6)$

Câu 23: **(Đề Tham Khảo 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-2x} < 27$ là

A. $(3; +\infty)$ **B.** $(-1; 3)$ **C.** $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$ **D.** $(-\infty; -1)$

Câu 24: **(Đề Minh Họa 2017)** Cho hàm số $f(x) = 2^x.7^{x^2}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

A. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x + x^2 \log_2 7 < 0$ **B.** $f(x) < 1 \Leftrightarrow x\ln 2 + x^2 \ln 7 < 0$

C. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x\log_7 2 + x^2 < 0$ **D.** $f(x) < 1 \Leftrightarrow 1 + x\log_2 7 < 0$

Câu 25: **(Đề Tham Khảo 2017)** Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+1}-\frac{1}{5}>0$.

A. $S=(-\infty;-2)$. **B.** $S=(1;+\infty)$. **C.** $S=(-1;+\infty)$. **D.** $S=(-2;+\infty)$.

Câu 26: **(Đề Tham Khảo 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-2x}<27$ là

A. $(-\infty;-1)$ **B.** $(3;+\infty)$ **C.** $(-1;3)$ **D.** $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$

Câu 27: **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log x\ge 1$ là

A. $(10;+\infty)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $[10;+\infty)$. **D.** $(-\infty;10)$.

Câu 28: **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(13-x^2\right)\ge 2$ là

A. $(-\infty;-2]\cup[2:+\infty)$. **B.** $(-\infty;2]$. **C.** $(0;2]$. **D.** $[-2;2]$.

Câu 29: **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(36-x^2\right)\ge 3$ là

A. $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;3]$. **C.** $[-3;3]$. **D.** $(0;3]$.

Câu 30: **(Mã 101 - 2020 Lần 2)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(18-x^2\right)\ge 2$ là

A. $(-\infty;3]$. **B.** $(0;3]$.

C. $[-3;3]$. **D.** $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$.

Câu 31: **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(31-x^2\right)\ge 3$ là

A. $(-\infty;2]$. **B.** $[-2;2]$. **C.** $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. **D.** $(0;2]$.

Câu 32: **(Đề Minh Họa 2017)** Giải bất phương trình $\log_2(3x-1)>3$.

A. $x>3$ **B.** $\frac{1}{3}<x<3$ **C.** $x<3$ **D.** $x>\frac{10}{3}$

Câu 33: **(Mã 123 2017)** Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x-5\log_2 x+4\ge 0$.

A. $S=(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$ **B.** $S=[2;16]$

C. $S=(0;2]\cup[16;+\infty)$ **D.** $(-\infty;2]\cup[16;+\infty)$

Câu 34: **(Mã 105 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2^2 x-2\log_2 x+3m-2<0$ có nghiệm thực.

A. $m<1$ **B.** $m\le 1$ **C.** $m<0$ **D.** $m<\frac{2}{3}$

Câu 35: **(TK 2020-2021)** Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho ứng với mỗi y có không quá 10 số nguyên x thỏa mãn $\left(2^{x+1}-\sqrt{2}\right)\left(2^x-y\right)<0$?

A. 1024. **B.** 2047. **C.** 1022. **D.** 1023.

Câu 36: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(3^{x^2}-9^x\right).\left[\log_3(x+25)-3\right]\le 0$?

A. 24. **B.** Vô số. **C.** 26. **D.** 25.

Câu 37: **(MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(3^{x^2}-9^x\right)\left[\log_2(x+30)-5\right]\le 0$

A. 30. **B.** Vô số. **C.** 31. **D.** 29.

Câu 38: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn $\left(2^{x^2}-4^x\right)\left[\log_2\left(x+14\right)-4\right]\le 0$?

A. 14. **B.** 13. **C.** Vô số. **D.** 15.

Câu 39: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn

$$\left(2^{x^2}-4^x\right)\left[\log_3\left(x+25\right)-3\right]\le 0?$$

A. 24. **B.** Vô số. **C.** 25. **D.** 26.

Câu 40: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[\log_2\left(x^2+1\right)-\log_2\left(x+31\right)\right]\left(32-2^{x-1}\right)\ge 0$?

A. 27. **B.** Vô số. **C.** 26. **D.** 28.

Câu 41: Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn $\left[\log_3\left(x^2+1\right)-\log_3\left(x+21\right)\right].\left(16-2^{x-1}\right)\ge 0$?

A. 17. **B.** 18. **C.** 16. **D.** Vô số.

Câu 42: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[\log_2(x^2+1)-\log_2(x+21)\right](16-2^{x-1})\ge 0$?

A. Vô số. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 18.

Câu 43: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2)** Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[\log_3\left(x^2+1\right)-\log_3(x+31)\right]\left(32-2^{x-1}\right)\ge 0$?

A. 27. **B.** 26. **C.** Vô số. **D.** 28.

CHƯƠNG II

HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

6. BẤT PHƯƠNG TRÌNH – MŨ – LOGARIT

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THAM KHẢO VÀ ĐỀ CHÍNH THỨC CỦA BỘ GIÁO DỤC TỪ NĂM 2017 ĐẾN NAY

Câu 1: **(MĐ 101-2022)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_5(x+1)>2$ là:

A. $(9\,;+\infty)$. **B.** $(25\,;+\infty)$. **C.** $(31\,;+\infty)$. **D.** $(24\,;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_5(x+1)>2 \Leftrightarrow x+1>5^2 \Leftrightarrow x>25-1 \Leftrightarrow x>24$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S=(24\,;+\infty)$.

Câu 2: **(MĐ 102-2022)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_5(x+1)>2$ là

A. $(24;+\infty)$. **B.** $(9;+\infty)$. **C.** $(25;+\infty)$. **D.** $(31;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_5(x+1)>2 \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x+1>5^2 \end{cases} \Leftrightarrow x>24$.

Câu 3: **(MĐ 101-2022)** Có bao nhiêu số nguyên dương a sao cho ứng với mỗi a có đúng ba số nguyên b thỏa mãn $(3^b-3)(a.2^b-18)<0$?

A. 72. **B.** 73. **C.** 71. **D.** 74.

Lời giải

Chọn B

Xét $(3^b-3)(a.2^b-18)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^b-3=0 \\ a.2^b-18=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=\log_2\dfrac{18}{a} \end{array}\right.$.

TH1: Nếu $\log_2\dfrac{18}{a}>1 \Leftrightarrow 0<a<9$. Khi đó ta có bảng xét dấu vế trái BPT như sau:

b	$-\infty$		1		$\log_2\dfrac{18}{a}$		$+\infty$
VT		$+$	0	-	0	$+$	

Để với mỗi a có đúng ba số nguyên b thì $b\in\{2;3;4\}$ nên

$$4<\log_2\frac{18}{a}\le 5\Leftrightarrow 16<\frac{18}{a}\le 32\Leftrightarrow \frac{9}{16}\le a<\frac{9}{8}.$$

Vậy $a=1$.TH này có 1 giá trị a thỏa mãn.

TH2: Nếu $\log_2\frac{18}{a}<1\Leftrightarrow a>9$. Khi đó ta có bảng xét dấu vế trái BPT như sau:

b	$-\infty$		$\log_2\frac{18}{a}$		1		$+\infty$
VT		+	0	-	0	+	

Để với mỗi a có đúng ba số nguyên b thì $b\in\{-2;-1;0\}$ nên

$$-3\le\log_2\frac{18}{a}<-2\Leftrightarrow 2^{-3}\le\frac{18}{a}<2^{-2}\Leftrightarrow 72<a\le 144.$$

Vậy $a\in\{73;74;...;144\}$. TH này có 72 giá trị của a thỏa mãn.

Gom cả hai trường hợp ta có 73 giá trị của a thỏa.

Câu 4: **(MĐ 102-2022)** Có bao nhiêu số nguyên dương a sao cho ứng với mỗi a có đúng hai số nguyên b thỏa mãn $(5^b-1)(a.2^b-5)<0$

A. 20. **B.** 21. **C.** 22. **D.** 19.

Lời giải

Chọn B

$(5^b-1)(a.2^b-5)<0$

TH1: $\begin{cases}5^b-1>0\\a.2^b-5<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b>0\\b<\log_2\left(\frac{5}{a}\right)\end{cases}\Leftrightarrow 0<b<\log_2\left(\frac{5}{a}\right)$

Để có đúng hai số nguyên b thỏa mãn thì $2<\log_2\left(\frac{5}{a}\right)\le 3\Leftrightarrow\frac{5}{8}\le a<\frac{5}{4}$ $\Rightarrow a=1$ (có 1 giá trị a).

TH2: $\begin{cases}5^b-1<0\\a.2^b-5>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b<0\\b>\log_2\left(\frac{5}{a}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\log_2\left(\frac{5}{a}\right)<b<0$

Để có đúng hai số nguyên b thỏa mãn thì $-3\le\log_2\left(\frac{5}{a}\right)<-2\Leftrightarrow\frac{1}{8}\le\frac{5}{a}<\frac{1}{4}\Leftrightarrow 20<a\le 40$

$\Rightarrow a\in\{21;22;...;40\}$ (có 20 giá trị a).

Vậy có tất cả 21 giá trị a thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5: **(MĐ 103-2022)** Có bao nhiêu số nguyên dương a sao cho ứng với mỗi a có đúng hai số nguyên b thỏa mãn $(4^b-1)(a.3^b-10)<0$?

A. 182. **B.** 179. **C.** 180. **D.** 181.

Lời giải

Chọn D

Ta có $a\ge 1,b\in\mathbb{Z}$.

$$\left(4^b-1\right)\left(a.3^b-10\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=\log_3\left(\dfrac{10}{a}\right) \end{array}\right.$$

Trường hợp 1: $\dfrac{10}{a}>1 \Leftrightarrow a<10$.

b	$-\infty$		0		$log_3(10/a)$		$+\infty$
VT		$+$	0	$-$	0	$+$	

Tập nghiệm bất phương trình $S=\left(0;\log_3\left(\dfrac{10}{a}\right)\right)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 2<\log_3\left(\dfrac{10}{a}\right)\le 3 \Leftrightarrow \begin{cases} a<\dfrac{10}{9} \\ a\ge\dfrac{10}{27} \end{cases} \Leftrightarrow a=1$.

Trường hợp 2: $0<\dfrac{10}{a}<1 \Leftrightarrow a>10$

Tập nghiệm bất phương trình $S=\left(\log_3\left(\dfrac{10}{a}\right);0\right)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -3\le\log_3\left(\dfrac{10}{a}\right)<-2 \Leftrightarrow \begin{cases} a\le 270 \\ a>90 \end{cases} \Leftrightarrow 90<a\le 270$.

Cả 2 trường hợp có tất cả 181 giá trị nguyên của a thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 6: **(MĐ 104-2022)** Có bao nhiêu số nguyên dương a sao cho ứng với mỗi a có đúng hai số nguyên b thoả mãn $\left(3^b-3\right)\left(a.2^b-16\right)<0$?

A. 34. **B.** 32. **C.** 31. **D.** 33.

Lời giải

Chọn D

Do $a\in\mathbb{Z}^+$ nên ta có $\left(3^b-3\right)\left(a.2^b-16\right)<0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3^b-3<0 \\ a.2^b-16>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 3^b-3>0 \\ a.2^b-16<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b<1 \\ 2^b>\dfrac{16}{a} \end{cases} (I) \\ \begin{cases} b>1 \\ 2^b<\dfrac{16}{a} \end{cases} (II) \end{array}\right.$$

Trường hợp 1: Nếu b thoả mãn $2^b>\dfrac{16}{a}$. Khi đó hệ (II) vô nghiệm.

Do đó để có đúng hai giá trị b thoả mãn yêu cầu bài toán khi và chỉ khi $b=\{0;1\}$ thoả mãn (I)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}>\dfrac{16}{a} \\ 2^{-2}\le \dfrac{16}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>32 \\ a\le 64 \end{cases} \Rightarrow a=\{33;34;.....;64\}$$

Trường hợp 2: Nếu b thoả mãn $2^b<\dfrac{16}{a}$. Khi đó hệ (I) vô nghiệm

Do đó để có đúng hai giá trị b thoả mãn yêu cầu bài toán khi và chỉ khi $b=\{2;3\}$ thoả mãn yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{16}{a}>8 \\ 16\ge \dfrac{16}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<2 \\ a\ge 1 \end{cases} \Rightarrow a=1$$

Vậy có 33 giá trị a thoả mãn yêu cầu bài toán

Câu 7: **(MĐ 101-2022)** Xét tất cả các số thực x,y sao cho $a^{4x-\log_5 a^2}\le 25^{40-y^2}$ với mọi số thực dương a. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+x-3y$ bằng

A. $\dfrac{125}{2}$. **B.** 80. **C.** 60. **D.** 20.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $a^{4x-\log_5 a^2}\le 25^{40-y^2} \Leftrightarrow a^{4x-2.\log_5 a}\le 5^{2(40-y^2)} \Leftrightarrow \log_5 a^{4x-2.\log_5 a}\le \log_5 5^{2(40-y^2)}$

$\Leftrightarrow (4x-2.\log_5 a).\log_5 a\le 2(40-y^2) \Leftrightarrow 2x.\log_5 a-\log_5^2 a\le 40-y^2$

$\Leftrightarrow \log_5^2 a-2x.\log_5 a+40-y^2\ge 0 \quad (1)$

Đặt $t=\log_5 a$. Vì $a>0$ nên $t\in\mathbb{R}$.

Khi đó, bất phương trình (1) trở thành: $t^2-2x.t+40-y^2\ge 0 \quad (2)$

Để (1) đúng với mọi số thực dương a $\Leftrightarrow (2)$ đúng với mọi $t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1>0 & (\text{lđ}) \\ \Delta'=x^2-40+y^2\le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2\le 40$.

Giả sử $M(x;y)$ thuộc hình tròn (C) tâm $O(0;0)$ và bán kính $R=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$.

Ta có: $P=x^2+y^2+x-3y=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{5}{2}=\left(\sqrt{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2}\right)^2-\dfrac{5}{2}$

$\Rightarrow P=IM^2-\dfrac{5}{2}$ (với $I\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$). Để $P_{\max}\Leftrightarrow IM_{\max}$.

Ta có: $OI=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}<R$ nên I nằm trong hình tròn (C).

Vì M thuộc hình tròn (C), I nằm trong hình tròn (C) nên

$$IM_{\max}=OI+R=\frac{\sqrt{10}}{2}+2\sqrt{10}=\frac{5\sqrt{10}}{2}.$$

Do đó: $P_{\max}=\left(IM_{\max}\right)^2-\frac{5}{2}=\left(\frac{5\sqrt{10}}{2}\right)^2-\frac{5}{2}=60.$

Câu 8: **(MĐ 102-2022)** Xét tất cả các số thực x, y sao cho $49^{9-y^2}\ge a^{4x-\log_7 a^2}$ với mọi số thực dương a. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+4x-3y$ bằng

A. $\frac{121}{4}$. **B.** $\frac{39}{4}$. **C.** 24. **D.** 39.

Lời giải

Chọn C

Lấy loga cơ số 7 hai vế của bất phương trình $49^{9-y^2}\ge a^{4x-\log_7 a^2}$ ta được

$2\left(9-y^2\right)\ge\left(4x-2\log_7 a\right)\log_7 a\Leftrightarrow-\left(\log_7 a\right)^2+2x.\log_7 a+y^2-9\le 0$.

Đặt $t=\log_7 a$; $t\in\mathbb{R}$.

Khi đó ta có bất phương trình $-t^2+2x.t+y^2-9\le 0$ nghiệm đúng với mọi t.

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=x^2+y^2-9\le 0\\-1<0\end{cases}\Leftrightarrow x^2+y^2\le 9$.

Khi đó $P=\left(x^2+y^2\right)+\left(4x-3y\right)\le 9+\sqrt{25\left(x^2+y^2\right)}\le 9+\sqrt{25.9}=24$.

Vậy $\max P=24$ khi $\begin{cases}x^2+y^2=9\\\frac{x}{4}=\frac{y}{-3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-\frac{3}{4}x\\x^2+\frac{9}{16}x^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\mp\frac{9}{5}\\x=\pm\frac{12}{5}\end{cases}$.

Câu 9: **(MĐ 103-2022)** Xét tất cả các số thực x,y sao cho $27^{5-y^2}\ge a^{6x-\log_3 a^3}$ với mọi số thực dương a. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2-4x+8y$ bằng

A. -15. **B.** 25. **C.** -5. **D.** -20.

Lời giải

Chọn A

Giả sử điểm $M\left(x;y\right)$.

Ta có: $27^{5-y^2}\ge a^{6x-\log_3 a^3}\Leftrightarrow 3^{3\left(5-y^2\right)}\ge a^{6x-3\log_3 a}\Leftrightarrow 3\left(5-y^2\right)\ge\left(6x-3\log_3 a\right)\log_3 a$

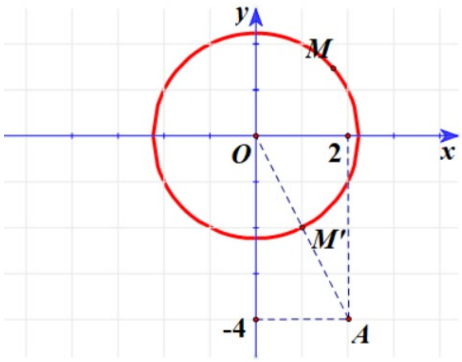
$\Leftrightarrow 3\log_3^2 a-6x\log_3 a-3y^2+15\ge 0$, $\forall a>0$.

$\Leftrightarrow\Delta'=9x^2+9y^2-45\le 0\Leftrightarrow x^2+y^2-5\le 0$ $(*)$.

Từ $(*)$ suy ra điểm M thuộc hình tròn tâm $O(0;0)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$

Xét $P = x^2 + y^2 - 4x + 8y = (x-2)^2 + (y+4)^2 - 20$.

Chọn điểm $A(2;-4)$ suy ra $P = MA^2 - 20$.



$P_{\min} \Leftrightarrow MA_{\min} \Leftrightarrow M \equiv M' \Rightarrow AM_{\min} = AO - R = \sqrt{5} \Rightarrow P_{\min} = -15$.

Câu 10: **(MĐ 104-2022)** Xét tất cả các số thực x, y sao cho $8^{9-y^2} \geq a^{6x - \log_2 a^3}$ với mọi số thực dương a. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 - 6x - 8y$ bằng

A. -21. **B.** -6. **C.** -25. **D.** 39.

Lời giải

Chọn A

Ta có $8^{9-y^2} \geq a^{6x-\log_2 a^3} \Leftrightarrow \log_2 8^{9-y^2} \geq \log_2 a^{6x-\log_2 a^3} \Leftrightarrow \log_2^2 a - 2x\log_2 a + 9 - y^2 \geq 0, \forall a > 0$

$\Leftrightarrow \Delta' = x^2 + y^2 - 9 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 9 (C)$.

$P = x^2 + y^2 - 6x - 8y \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = P + 25$

Gọi $I(3;4)$; $A(x;y)$ thuộc hình tròn (C).

Dễ thấy I nằm ngoài đường tròn (C).

$P + 25 = IA^2$.

$\Rightarrow IA_{\min} = OI - 3 = 2 \Rightarrow P + 25 \geq 4 \Leftrightarrow P \geq -21$.

****

Câu 11: **(2020-2021 – ĐỢT 1)** Tập nghiệm của bất phương trình $3^x < 2$ là

A. $(-\infty; \log_3 2)$. **B.** $(\log_3 2; +\infty)$. **C.** $(-\infty; \log_2 3)$. **D.** $(\log_2 3; +\infty)$.

Lời giải

Ta có $3^x < 2 \Leftrightarrow x < \log_3 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (-\infty; \log_3 2)$.

Câu 12: **(2020-2021 – ĐỢT 1)** Tập nghiệm của bất phương trình $2^x > 5$ là

A. $(-\infty; \log_2 5)$. **B.** $(\log_5 2; +\infty)$. **C.** $(-\infty; \log_5 2)$. **D.** $(\log_2 5; +\infty)$

Lời giải

Ta có: $2^x > 5 \Leftrightarrow x > \log_2 5$.

Tập nghiệm của bất phương trình là: $(\log_2 5;+\infty)$

Câu 13: **(2020-2021 – ĐỢT 1)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3x) > 5$ là

A. $\left(0;\frac{32}{3}\right)$. **B.** $\left(\frac{32}{3};+\infty\right)$. **C.** $\left(0;\frac{25}{3}\right)$. **D.** $\left(\frac{25}{3};+\infty\right)$.

Lời giải

Ta có $\log_2(3x) > 5 \Leftrightarrow 3x > 2^5 \Leftrightarrow x > \frac{32}{3}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $\left(\frac{32}{3};+\infty\right)$.

Câu 14: **(2020-2021 – ĐỢT 2)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3x) > 3$ là

A. $(3;+\infty)$. **B.** $\left(\frac{8}{3};+\infty\right)$. **C.** $\left(0;\frac{8}{3}\right)$. **D.** $(0;3)$.

Lời giải

Ta có : $\log_2(3x) > 3 \Leftrightarrow 3x > 2^3 \Leftrightarrow 3x > 8 \Leftrightarrow x > \frac{8}{3}$

Câu 15: **(2020-2021 – ĐỢT 2)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(2x) > 4$

A. $(0;32)$. **B.** $\left(0;\frac{81}{2}\right)$. **C.** $(32;+\infty)$. **D.** $\left(\frac{81}{2};+\infty\right)$.

Lời giải

Ta có: $\log_3(2x) > 4 \Leftrightarrow 2x > 3^4 \Leftrightarrow x > \frac{81}{2}$

Câu 16: **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Tập nghiệm của bất phương trình $5^{x-1} \ge 5^{x^2-x-9}$ là

A. $[-2;4]$. **B.** $[-4;2]$.

C. $(-\infty;-2]\cup[4;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-4]\cup[2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$5^{x-1} \ge 5^{x^2-x-9} \Leftrightarrow x-1 \ge x^2-x-9 \Leftrightarrow x^2-2x-8 \le 0 \Leftrightarrow -2 \le x \le 4$.

Vậy Tập nghiệm của bất phương trình là $[-2;4]$.

Câu 17: **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Tập nghiệm của bất phương trình $9^x + 2.3^x - 3 > 0$ là

A. $[0;+\infty)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $[1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

$9^x + 2.3^x - 3 > 0 \Leftrightarrow (3^x-1)(3^x+3) > 0 \Leftrightarrow 3^x > 1$ (vì $3^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow x > 0$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(0;+\infty)$.

Câu 18: **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-13}<27$ là

A. $(4;+\infty)$. **B.** $(-4;4)$. **C.** $(-\infty;4)$. **D.** $(0;4)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $3^{x^2-13}<27 \Leftrightarrow 3^{x^2-13}<3^3 \Leftrightarrow x^2-13<3 \Leftrightarrow x^2<16 \Leftrightarrow |x|<4 \Leftrightarrow -4<x<4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=(-4;4)$.

Câu 19: **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-23}<9$ là

A. $(-5;5)$. **B.** $(-\infty;5)$. **C.** $(5;+\infty)$. **D.** $(0;5)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $3^{x^2-23}<9 \Leftrightarrow x^2-23<2 \Leftrightarrow x^2<25 \Leftrightarrow -5<x<5$.

Vậy nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-23}<9$ là $(-5;5)$.

Câu 20: **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-7}<4$ là

A. $(-3;3)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có : $2^{x^2-7}<4 \Leftrightarrow 2^{x^2-7}<2^2 \Rightarrow x^2-7<2 \Leftrightarrow x^2<9 \Rightarrow x\in(-3;3)$.

Câu 21: **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-1}<8$ là

A. $(0;2)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(-2;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Từ phương trình ta có $x^2-1<3 \Leftrightarrow -2<x<2$.

Câu 22: **(Đề Tham Khảo 2018)** Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x}<2^{x+6}$ là:

A. $(-\infty;6)$ **B.** $(0;64)$ **C.** $(6;+\infty)$ **D.** $(0;6)$

Lời giải:

Chọn A

Cách 1: $2^{2x}<2^{x+6} \Leftrightarrow 2x<x+6 \Leftrightarrow x<6$

Cách 2:

Đặt $t=2^x$, $t>0$

Bất phương trình trở thành: $t^2-64t<0 \Leftrightarrow 0<t<64 \Leftrightarrow 0<2^x<64 \Leftrightarrow x<6$.

Câu 23: **(Đề Tham Khảo 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-2x}<27$ là

A. $(3;+\infty)$ **B.** $(-1;3)$

C. $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$ **D.** $(-\infty;-1)$

Lời giải

Chọn B

Ta có $3^{x^2-2x}<27\Leftrightarrow x^2-2x<3\Leftrightarrow x^2-2x-3<0\Leftrightarrow -1<x<3$.

Câu 24: **(Đề Minh Họa 2017)** Cho hàm số $f(x)=2^x.7^{x^2}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

A. $f(x)<1\Leftrightarrow x+x^2\log_2 7<0$ **B.** $f(x)<1\Leftrightarrow x\ln 2+x^2\ln 7<0$

C. $f(x)<1\Leftrightarrow x\log_7 2+x^2<0$ **D.** $f(x)<1\Leftrightarrow 1+x\log_2 7<0$

Lời giải

Chọn D

Đáp án A đúng vì $f(x)<1\Leftrightarrow \log_2 f(x)<\log_2 1\Leftrightarrow \log_2\left(2^x.7^{x^2}\right)<0\Leftrightarrow \log_2 2^x+\log_2 7^{x^2}<0$

$\Leftrightarrow x+x^2.\log_2 7<0$

Đáp án B đúng vì $f(x)<1\Leftrightarrow \ln f(x)<\ln 1\Leftrightarrow \ln\left(2^x.7^{x^2}\right)<0\Leftrightarrow \ln 2^x+\ln 7^{x^2}<0$

$\Leftrightarrow x.\ln 2+x^2.\ln 7<0$

Đáp án C đúng vì $f(x)<1\Leftrightarrow \log_7 f(x)<\log_7 1\Leftrightarrow \log_7\left(2^x.7^{x^2}\right)<0\Leftrightarrow \log_7 2^x+\log_7 7^{x^2}<0$

$\Leftrightarrow x.\log_7 2+x^2<0$

Vậy D sai vì $f(x)<1\Leftrightarrow \log_2 f(x)<\log_2 1\Leftrightarrow \log_2\left(2^x.7^{x^2}\right)<0\Leftrightarrow \log_2 2^x+\log_2 7^{x^2}<0$

$\Leftrightarrow x+x^2\log_2 7<0$.

Câu 25: **(Đề Tham Khảo 2017)** Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+1}-\dfrac{1}{5}>0$.

A. $S=(-\infty;-2)$. **B.** $S=(1;+\infty)$. **C.** $S=(-1;+\infty)$. **D.** $S=(-2;+\infty)$.

Lời giải

Bất phương trình tương đương $5^{x+1}>5^{-1}\Leftrightarrow x+1>-1\Leftrightarrow x>-2$.

Câu 26: **(Đề Tham Khảo 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-2x}<27$ là

A. $(-\infty;-1)$ **B.** $(3;+\infty)$ **C.** $(-1;3)$ **D.** $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$

Lời giải

Chọn C

Ta có $3^{x^2-2x}<27\Leftrightarrow x^2-2x<3\Leftrightarrow x^2-2x-3<0\Leftrightarrow -1<x<3$.

Câu 27: **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log x\geq 1$ là

A. $(10;+\infty)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $[10;+\infty)$. **D.** $(-\infty;10)$.

Lời giải

Chọn C

$\log x \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 10 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 10.$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $[10;+\infty)$.

Câu 28: **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(13-x^2) \geq 2$ là

A. $(-\infty;-2]\cup[2:+\infty)$. **B.** $(-\infty;2]$.
C. $(0;2]$. **D.** $[-2;2]$.

Lời giải

Chọn D

◆ Bất phương trình $\log_3(13-x^2) \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 13-x^2 > 0 \\ 13-x^2 \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 < 13 \\ x^2 \leq 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{13} < x < \sqrt{13} \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$.

◆Vậy, tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(13-x^2) \geq 2$ là $[-2;2]$.

Câu 29: **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(36-x^2) \geq 3$ là

A. $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;3]$. **C.** $[-3;3]$. **D.** $(0;3]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_3(36-x^2) \geq 3 \Leftrightarrow 36-x^2 \geq 27 \Leftrightarrow 9-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$.

Câu 30: **(Mã 101 - 2020 Lần 2)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(18-x^2) \geq 2$ là

A. $(-\infty;3]$. **B.** $(0;3]$.
C. $[-3;3]$. **D.** $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $18-x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-3\sqrt{2};3\sqrt{2})$ (*).

Khi đó ta có: $\log_3(18-x^2) \geq 2 \Leftrightarrow 18-x^2 \geq 9 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$.

Kết hợp với điều kiện (*) ta được tập ngiệm của bất phương trình đã cho là $[-3;3]$.

Câu 31: **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(31-x^2) \geq 3$ là

A. $(-\infty;2]$. **B.** $[-2;2]$. **C.** $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. **D.** $(0;2]$.

Lời giải

Chọn B

$\log_3(31-x^2)\geq 3 \Leftrightarrow 31-x^2\geq 27 \Leftrightarrow x^2-4\leq 0 \Leftrightarrow x\in[-2;2]$.

Câu 32: **(Đề Minh Họa 2017)** Giải bất phương trình $\log_2(3x-1)>3$.

A. $x>3$ **B.** $\frac{1}{3}<x<3$ **C.** $x<3$ **D.** $x>\frac{10}{3}$

Lời giải

Chọn A

Đkxđ: $3x-1>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{3}$

Bất phương trình $\Leftrightarrow 3x-1>2^3 \Leftrightarrow 3x>9 \Leftrightarrow x>3$ (t/m đk).

Vậy bpt có nghiệm $x>3$.

Câu 33: **(Mã 123 2017)** Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x-5\log_2 x+4\geq 0$.

A. $S=(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$ **B.** $S=[2;16]$

C. $S=(0;2]\cup[16;+\infty)$ **D.** $(-\infty;2]\cup[16;+\infty)$

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x>0$

Bpt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x\geq 4\\ \log_2 x\leq 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\geq 16\\ x\leq 2\end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện ta có $S=(0;2]\cup[16;+\infty)$.

Câu 34: **(Mã 105 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2^2 x-2\log_2 x+3m-2<0$ có nghiệm thực.

A. $m<1$ **B.** $m\leq 1$ **C.** $m<0$ **D.** $m<\frac{2}{3}$

Lời giải

Chọn.A

Đặt $t=\log_2 x\ \ (x>0)$, ta có bất phương trình : $t^2-2t+3m-2<0$.

Để BPT luôn có nghiệm thực thì $\Delta'=3-3m>0 \Leftrightarrow m<1$.

Câu 35: **(ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2020-2021)** Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho ứng với mỗi y có không quá 10 số nguyên x thỏa mãn $\left(2^{x+1}-\sqrt{2}\right)\left(2^x-y\right)<0$?

A. 1024. **B.** 2047. **C.** 1022. **D.** 1023.

Lời giải

Đặt $t=2^x>0$ thì ta có bất phương trình $(2t-\sqrt{2})(t-y)<0$ hay $(t-\frac{\sqrt{2}}{2})(t-y)<0$ (*).

Vì $y\in\mathbb{Z}^+$ nên $y>\frac{\sqrt{2}}{2}$, do đó (*) $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}<t<y \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}<2^x<y \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<x<\log_2 y$.

Nếu $\log_2 y>10$ thì $x\in\{0,1,2,\ldots,10\}$ đều là nghiệm, không thỏa. Suy ra $\log_2 y\le 10$ hay $y\le 2^{10}=1024$, từ đó có $y\in\{1,2,\ldots,1024\}$.

Câu 36: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(3^{x^2}-9^x\right).\left[\log_3\left(x+25\right)-3\right]\le 0$?

A. 24. **B.** Vô số. **C.** 26. **D.** 25.

Lời giải

Điều kiện: $x>-25$ $(*)$.

Trường hợp 1:

$$\begin{cases}3^{x^2}-9^x\ge 0\\ \log_3\left(x+25\right)-3\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3^{x^2}\ge 3^{2x}\\ \log_3\left(x+25\right)\le 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\ge 2x\\ x+25\le 27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le 0\\ x\ge 2\end{array}\right.\\ x\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le 0\\ x=2\end{array}\right..$$

Kết hợp với điều kiện $(*)$ ta được $x\in\left(-25;0\right]\cup\left\{2\right\}$.

Mà $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\left\{-24;-23;...;1;0;2\right\}\Rightarrow$ có 26 giá trị nguyên của x thỏa mãn.

Trường hợp 2:

$$\begin{cases}3^{x^2}-9^x\le 0\\ \log_3\left(x+25\right)-3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3^{x^2}\le 3^{2x}\\ \log_3\left(x+25\right)\ge 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\le 2x\\ x+25\ge 27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 2\\ x\ge 2\end{cases}\Leftrightarrow x=2\ (tm).$$

Kết hợp các trường hợp, ta có tất cả 26 giá trị nguyên của của x thỏa mãn đề.

Câu 37: **(MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(3^{x^2}-9^x\right)\left[\log_2\left(x+30\right)-5\right]\le 0$

A. 30. **B.** Vô số. **C.** 31. **D.** 29.

Lời giải

Điều kiện: $x>-30$

Trường hợp 1: $\begin{cases}3^{x^2}-9^x\ge 0\\ \log_2\left(x+30\right)-5\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3^{x^2}\ge 3^{2x}\\ \log_2\left(x+30\right)\le 5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\ge 2x\\ x+30\le 32\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le 0\\ x\ge 2\end{array}\right.\\ x\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le 0\\ x=2\end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện ta có: $\left[\begin{array}{l}-30<x\le 0\\ x=2\end{array}\right.$. Nên $x\in\left\{-29,-28,...0,2\right\}$ nên có 31 số nguyên

Trường hợp 2:

$$\begin{cases}3^{x^2}-9^x\le 0\\ \log_2\left(x+30\right)-5\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3^{x^2}\le 3^{2x}\\ \log_2\left(x+30\right)\ge 5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\le 2x\\ x+30\ge 32\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 2\\ x\ge 2\end{cases}\Leftrightarrow x=2$$

Vậy tổng cộng có 31 số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 38: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn $\left(2^{x^2}-4^x\right)\left[\log_2(x+14)-4\right]\le 0$?

A. 14. **B.** 13. **C.** Vô số. **D.** 15.

Lời giải

Ta có: $\left(2^{x^2}-4^x\right)\left[\log_2(x+14)-4\right]\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^{x^2}-4^x\ge 0\\ \log_2(x+14)-4\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}2^{x^2}-4^x\le 0\\ \log_2(x+14)-4\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^{x^2}\ge 2^{2x}\\ \log_2(x+14)\le 4\end{cases}\\ \begin{cases}2^{x^2}\le 2^{2x}\\ \log_2(x+14)\ge 4\end{cases}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2\ge 2x\\ 0<x+14\le 16\end{cases}\\ \begin{cases}x^2\le 2x\\ x+14\ge 16\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge 2\\ x\le 0\end{array}\right.\\ -14<x\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}0\le x\le 2\\ x\ge 2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ -14<x\le 0\\ x=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ -14<x\le 0\end{array}\right.$.

Vì x nguyên nên $x\in\{-13;-12;...;0;2\}$. Vậy có 15 số nguyên x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 39: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn

$$\left(2^{x^2}-4^x\right)\left[\log_3(x+25)-3\right]\le 0?$$

A. 24. **B.** Vô số. **C.** 25. **D.** 26.

Lời giải

ĐK: $x>-25$

+) Ta có $\left(2^{x^2}-4^x\right)\left[\log_3(x+25)-3\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2=2x\\ x+25=27\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\end{array}\right.$

Ta có bảng xét dấu $f(x)=\left(2^{x^2}-4^x\right)\left[\log_3(x+25)-3\right]$

x	$-\infty$		-25		0		2		$+\infty$
$f(x)$				$-$	0	$+$	0	$+$	

+) Suy ra: $f(x)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-25<x\le 0\\ x=2\end{array}\right.$

+) Vì $x\in\mathbb{Z}$ nên ta có $x\in\{-24;-23;...;-1;0;2\}$. Vậy có 26 giá trị x nguyên thỏa bài toán.

Câu 40: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[\log_2(x^2+1)-\log_2(x+31)\right]\left(32-2^{x-1}\right)\ge 0$?

A. 27. **B.** Vô số. **C.** 26. **D.** 28.

Lời giải

Ta có

$$\left[\log_2\left(x^2+1\right)-\log_2\left(x+31\right)\right]\left(32-2^{x-1}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-31\\ \log_2\left(x^2+1\right)\ge\log_2\left(x+31\right)\\ 32\ge 2^{x-1}\end{cases}\\ \begin{cases}x>-31\\ \log_2\left(x^2+1\right)\le\log_2\left(x+31\right)\\ 32\le 2^{x-1}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-31\\ x^2-x-30\ge 0\\ x-1\le 5\end{cases}\\ \begin{cases}x>-31\\ x^2-x-30\le 0\\ x-1\ge 5\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-31\\ \left[\begin{array}{l}x\le -5\\ x\ge 6\end{array}\right.\\ x\le 6\end{cases}\\ \begin{cases}x>-31\\ x\in\left[-5;6\right]\\ x\ge 6\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}31<x\le -5\\ x=6\end{array}\right.$$

Do x nguyên nên $x\in\left\{-30;-29;-28;...;-5;6\right\}$.

Vậy có 27 giá trị nguyên của x thỏa mãn bất phương trình đã cho.

Câu 41: Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn $\left[\log_3\left(x^2+1\right)-\log_3\left(x+21\right)\right].\left(16-2^{x-1}\right)\ge 0$?

A. 17. **B.** 18. **C.** 16. **D.** Vô số.

Lời giải

Điều kiện: $x>-21$.

Khi đó

$$\left[\log_3\left(x^2+1\right)-\log_3\left(x+21\right)\right].\left(16-2^{x-1}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\begin{cases}\log_3\left(x^2+1\right)-\log_3\left(x+21\right)\ge 0\\ 16-2^{x-1}\ge 0\end{cases} & (I)\\ \begin{cases}\log_3\left(x^2+1\right)-\log_3\left(x+21\right)\le 0\\ 16-2^{x-1}\le 0\end{cases} & (II)\end{array}\right.$$

Giải (I) ta có

$$\begin{cases}\log_3\left(x^2+1\right)-\log_3\left(x+21\right)\ge 0\\ 16-2^{x-1}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_3\left(x^2+1\right)\ge\log_3\left(x+21\right)\\ 2^{x-1}\le 2^4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+1\ge x+21\\ x-1\le 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-x-20\ge 0\\ x\le 5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le -4\\ x\ge 5\end{array}\right.\\ x\le 5\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le -4\\ x=5\end{array}\right..$$

Kết hợp điều kiện ta được $\left[\begin{array}{l}-21<x\le -4\\ x=5\end{array}\right.\quad(1)$.

Giải (II) ta có

$$\begin{cases}\log_3\left(x^2+1\right)-\log_3\left(x+21\right)\le 0\\ 16-2^{x-1}\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_3\left(x^2+1\right)\le\log_3\left(x+21\right)\\ 2^{x-1}\ge 2^4\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1 \le x+21 \\ x-1 \ge 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-20 \le 0 \\ x \ge 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \le x \le 5 \\ x \ge 5 \end{cases} \Leftrightarrow x=5 \ (2).$

Từ (1) và (2) ta có các giá trị của x thoả mãn bất phương trình đã cho là $\left[\begin{array}{l} -21 < x \le -4 \\ x=5 \end{array}\right.$.

Vì $x \in Z$ nên suy ra $x \in \{-20;-19;...;-4;5\}$. Vậy có tất cả 18 số nguyên x thoả mãn đề bài.

Câu 42: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[\log_2(x^2+1)-\log_2(x+21)\right](16-2^{x-1}) \ge 0$?

A. Vô số. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 18.

Lời giải

Điều kiện: $x+21>0 \Leftrightarrow x>-21$

Đặt $f(x)=\left[\log_2(x^2+1)-\log_2(x+21)\right](16-2^{x-1})$

Ta có: $\log_2(x^2+1)-\log_2(x+21)=0 \Leftrightarrow \log_2(x^2+1)=\log_2(x+21)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-21 \\ x^2+1=x+21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-21 \\ x^2-x-20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-21 \\ \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-4 \end{array}\right.$

$16-2^{x-1}=0 \Leftrightarrow 2^{x-1}=16 \Leftrightarrow 2^{x-1}=2^4 \Leftrightarrow x-1=4 \Leftrightarrow x=5$

Bảng xét dấu:

x	-21		-4		5		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu ta có: $f(x) \ge 0 \Leftrightarrow -21 < x \le -4$

Vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-20;-19;-18...;-4\}$

Vậy, có 17 số nguyên x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 43: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2) Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[\log_3(x^2+1)-\log_3(x+31)\right](32-2^{x-1}) \ge 0$?

A. 27. **B.** 26. **C.** Vô số. **D.** 28.

Lời giải

Đặt $h(x)=\left[\log_3(x^2+1)-\log_3(x+31)\right](32-2^{x-1})$.

Điều kiện: $x>-31$.

Ta có: $h(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3(x^2+1)-\log_3(x+31)=0 \\ 32-2^{x-1}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3(x^2+1)=\log_3(x+31) \\ 2^{x-1}=32 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+1=x+31 \\ x=6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-30=0 \\ x=6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x=6 \end{array}\right.$$

Bảng xét dấu $h(x)$

x	-31				-5		6		$+\infty$
$h(x)$	$\|$	$+$	0		$-$		0	$-$	

Từ bảng xét dấu của $h(x)$ ta suy ra

$$\left[\log_3\left(x^2+1\right)-\log_3(x+31)\right]\left(32-2^{x-1}\right)\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-31;-5]\cup\{6\}$$

Vậy có 27 số nguyên x thỏa mãn.

CHƯƠNG II

HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

6. BẤT PHƯƠNG TRÌNH – MŨ – LOGARIT

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

+ Nếu $a>1$ thì $a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)>g(x)$.

+ Nếu $0<a<1$ thì $a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)<g(x)$.

+ Nếu a chứa ẩn thì $a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow (a-1)\left[f(x)-g(x)\right]>0$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-2;+\infty)$.

Câu 1: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x>9$ trên tập số thực là

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(-2;+\infty)$.

Câu 2: Tập nghiệm của bất phương trình $4^{x+1}\le 8^{x-2}$ là

A. $[8;+\infty)$. **B.** $\varnothing$. **C.** $(0;8)$. **D.** $(-\infty;8]$.

Câu 3: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2+2x}\le 8$ là

A. $(-\infty;-3]$. **B.** $[-3;1]$. **C.** $(-3;1)$. **D.** $(-3;1]$.

Câu 4: Tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+2}<\left(\dfrac{1}{25}\right)^{-x}$ là

A. $S=(-\infty;2)$ **B.** $S=(-\infty;1)$ **C.** $S=(1;+\infty)$ **D.** $S=(2;+\infty)$

Câu 5: Tập nghiệm bất phương trình $2^{x^2-3x}<16$ là

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(4;+\infty)$. **C.** $(-1;4)$. **D.** $(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$.

Câu 6: Tập nghiệm bất phương trình: $2^x>8$ là

A. $(-\infty;3)$. **B.** $[3;+\infty)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;3]$.

Câu 7: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+3x}<\frac{1}{4}$.

A. $S=[1;2]$ **B.** $S=(-\infty;1)$ **C.** $S=(1;2)$ **D.** $S=(2;+\infty)$

Câu 8: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-3x-7}>3^{2x-21}$ là

A. 7. **B.** 6. **C.** vô số. **D.** 8.

Câu 9: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{3x}<\left(\frac{1}{2}\right)^{-2x-6}$ là

A. $(0;6)$. **B.** $(-\infty;6)$. **C.** $(0;64)$. **D.** $(6;+\infty)$.

Câu 10: Bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}\geq\frac{1}{8}$ có tập nghiệm là

A. $[3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1]$. **C.** $[-1;3]$. **D.** $(-1;3)$.

Câu 11: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^{-x^2}>\frac{81}{256}$ là

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $(-2;2)$.

Câu 12: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-2x}>8$ là

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;3)$.

C. $(3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

Câu 13: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{e}{\pi}\right)^{x}>1$ là

A. $\mathbb{R}$ **B.** $(-\infty;0)$ **C.** $(0;+\infty)$ **D.** $[0;+\infty)$

Câu 14: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $2^{x^2+3x}\leq 16$ là số nào sau đây ?

A. 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 15: Tập nghiệm S của bất phương trình $3^x<e^x$ là:

A. $S=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **B.** $S=(0;+\infty)$. **C.** $S=\mathbb{R}$. **D.** $S=(-\infty;0)$.

Câu 16: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{x}}\leq\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2}$ là:

A. $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $\left(0;\frac{1}{2}\right]$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$.

Câu 17: Bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}\geq\frac{1}{8}$ có tập nghiệm là

A. $[3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1]$. **C.** $[-1;3]$. **D.** $(-1;3)$.

Câu 18: Cho bất phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-x+1} > \left(\frac{2}{3}\right)^{2x+1}$ có tập nghiệm $S=(a;b)$. Giá trị của $b-a$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 19: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{\sqrt{x}} < 2$ là

A. $[0;1)$. **B.** $(-\infty;\,1)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $(1;\,+\infty)$.

Câu 20: Tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} < 8$ là

A. $S=(-\infty;3)$. **B.** $S=(1;+\infty)$. **C.** $S=(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$. **D.** $S=(1;3)$.

Câu 21: Tìm tập nghiệm của bất phương trình $2^x+2^{x+1} \le 3^x+3^{x-1}$.

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(-\infty;2]$. **D.** $[2;+\infty)$.

Câu 22: Cho bất phương trình $4^x-5.2^{x+1}+16 \le 0$ có tập nghiệm là đoạn $[a;b]$. Tính $\log\left(a^2+b^2\right)$

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 10.

Câu 23: Cho bất phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-x+1} > \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1}$ có tập nghiệm $S=(a;b)$. Giá trị của $b-a$ bằng

A. -2. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 24: Tập nghiệm của bất phương trình $(5)^{4+x^2} < \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-6x}$ là

A. $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(1;2)$.

Câu 25: Bất phương trình $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{x-1} \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2x+3}$ có nghiệm là

A. $x \le -4$. **B.** $x > -4$. **C.** $x < -4$. **D.** $x \ge -4$.

DẠNG 2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

+ Nếu $a>1$ thì $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$

+ Nếu $0<a<1$ thì $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

+ Nếu a chứa ẩn thì $\left[\begin{array}{l}\log_a B > 0 \Leftrightarrow (a-1)(B-1) > 0\\ \dfrac{\log_a A}{\log_a B} > 0 \Leftrightarrow (A-1)(B-1) > 0\end{array}\right.$.

Câu 26: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(2x+3) \ge 0$ là

A. $S=(-\infty;-1]$. **B.** $S=[-1;+\infty)$. **C.** $S=(-\infty;-1)$. **D.** $S=(-\infty;0]$.

Câu 27: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3x+1)<2$ là

A. $\left[-\frac{1}{3};1\right)$ **B.** $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ **C.** $\left(-\frac{1}{3};1\right)$ **D.** $(-\infty;1)$

Câu 28: Tập hợp nghiệm của bất phương trình $\log_2(x+1)<3$ là:

A. $S=(-1;\ 8)$. **B.** $S=(-\infty;\ 7)$. **C.** $S=(-\infty;\ 8)$. **D.** $S=(-1;\ 7)$.

Câu 29: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x^2-1)\geq 3$ là?

A. $[-2;2]$. **B.** $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$.

C. $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. **D.** $[-3;3]$.

Câu 30: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{0,8}(2x-1)<0$ là

A. $S=\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $S=(1;+\infty)$. **C.** $S=\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $S=(-\infty;1)$.

Câu 31: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\ln x^2<0$.

A. $S=(-1;1)$. **B.** $S=(-1;0)$. **C.** $S=(-1;1)\setminus\{0\}$. **D.** $S=(0;1)$.

Câu 32: Bất phương trình $\log_3(x^2-2x)>1$ có tập nghiệm là

A. $S=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$. **B.** $S=(-1;3)$.

C. $S=(3;+\infty)$. **D.** $S=(-\infty;-1)$.

Câu 33: Tập nghiệm của bất phương trình $\ln 3x<\ln(2x+6)$ là:

A. $[0;6)$. **B.** $(0;6)$. **C.** $(6;+\infty)$. **D.** $(-\infty;6)$.

Câu 34: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(x-1)<3$ là

A. $S=(1;9)$. **B.** $S=(1;10)$. **C.** $S=(-\infty;9)$. **D.** $S=(-\infty;10)$.

Câu 35: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x^2-1)\geq 3$ là?

A. $[-2;2]$. **B.** $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$.

C. $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. **D.** $[-3;3]$.

Câu 36: Bất phương trình $\log_2(3x-2)>\log_2(6-5x)$ có tập nghiệm là $(a;b)$. Tổng $a+b$ bằng

A. $\frac{8}{3}$. **B.** $\frac{28}{15}$. **C.** $\frac{26}{5}$. **D.** $\frac{11}{5}$.

Câu 37: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)<\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$.

A. $S=(2;+\infty)$. **B.** $S=(-1;2)$. **C.** $S=(-\infty;2)$. **D.** $S=\left(\frac{1}{2};2\right)$.

Câu 38: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0.3}(5-2x) > \log_{\frac{3}{10}} 9$ là

A. $\left(0;\frac{5}{2}\right)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $\left(-2;\frac{5}{2}\right)$. **D.** $(-2;+\infty)$.

Câu 39: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,5}(x-1) > 1$ là

A. $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left[1;\frac{3}{2}\right)$.

Câu 40: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{\pi}{4}}(x+1) > \log_{\frac{\pi}{4}}(2x-5)$ là

A. $(-1;6)$ **B.** $\left(\frac{5}{2};6\right)$ **C.** $(6;+\infty)$ **D.** $(-\infty;6)$

Câu 41: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_3(2x+3) < \log_3(1-x)$

A. $\left(-\frac{2}{3};+\infty\right)$ **B.** $\left(-\frac{3}{2};-\frac{2}{3}\right)$ **C.** $\left(-\frac{3}{2};1\right)$ **D.** $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)$

Câu 42: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) < 1$ là

A. $(0;1)$. **B.** $\left(\frac{1}{8};3\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{8};1\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{8};+\infty\right)$.

Câu 43: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{0,8}(15x+2) > \log_{0,8}(13x+8)$ là

A. Vô số. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 44: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,5}(5x+14) \le \log_{0,5}\left(x^2+6x+8\right)$ là

A. $(-2;2]$. **B.** $(-\infty;2]$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\left[-\frac{3}{2};0\right]$. **D.** $[-3;2]$.

Câu 45: Bất phương trình $\log_2(3x-2) > \log_2(6-5x)$ có tập nghiệm là

A. $(0;+\infty)$ **B.** $\left(\frac{1}{2};3\right)$. **C.** $(-3;1)$ **D.** $\left(1;\frac{6}{5}\right)$

Câu 46: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\ln x^2 > \ln(4x-4)$.

A. $S=(2;+\infty)$. **B.** $S=(1;+\infty)$. **C.** $S=R\setminus\{2\}$. **D.** $S=(1;+\infty)\setminus\{2\}$.

Câu 47: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2\left[x^2-1\right] \ge 3$ là:

A. $[-2;2]$. **B.** $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$.

C. $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. **D.** $[-3;3]$.

Câu 48: Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{\log\left(x^2-9\right)}{\log(3-x)} \le 1$ là:

A. $(-4;-3)$. **B.** $[-4;-3)$. **C.** $(3;4]$. **D.** ϕ.

Câu 49: Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để bất phương trình $\log_2\left(x^2+mx+m+2\right) \ge \log_2\left(x^2+2\right)$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 50: Giải bất phương trình $\log_2(3x-2) > \log_2(6-5x)$ được tập nghiệm là $(a;b)$. Hãy tính tổng $S=a+b$.

A. $S=\dfrac{26}{5}$. **B.** $S=\dfrac{11}{5}$. **C.** $S=\dfrac{28}{15}$. **D.** $S=\dfrac{8}{3}$.

Câu 51: Có tất cả bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left[\log_2\left(2-x^2\right)\right] > 0$?

A. Vô số. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 52: Nghiệm của bất phương trình $\log_{2-\sqrt{3}}(2x-5) \ge \log_{2-\sqrt{3}}(x-1)$ là

A. $\dfrac{5}{2} < x \le 4$. **B.** $1 < x \le 4$. **C.** $\dfrac{5}{2} \le x \le 4$ 1. **D.** $x \ge 4$.

Câu 53: Bất phương trình $\log_4(x+7) > \log_2(x+1)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 54: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{3}{5}}\left(2x^2-x+1\right) < 0$ là

A. $\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $(-\infty;1)\cup\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$. **C.** $(-\infty;0)\cup\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 55: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+2x-8\right) \ge -4$ là

A. 6. **B.** Vô số. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 56: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_6 x^2 < \log_6(x+6)$ là

A. $S=(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$. **B.** $S=(-2;3)$.

C. $S=(-3;2)\setminus\{0\}$. **D.** $S=(-2;3)\setminus\{0\}$.

Câu 57: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(7-x)+\log_{\frac{1}{2}}(x-1) \le 0$ là

A. $S=[1;4]$. **B.** $S=(-\infty;4]$. **C.** $S=[4;+\infty)$. **D.** $S=[4;7)$.

Câu 58: Bất phương trình $1+\log_2(x-2) > \log_2\left(x^2-3x+2\right)$ có các nghiệm là

A. $S=(3;+\infty)$. **B.** $S=(1;3)$. **C.** $S=(2;+\infty)$. **D.** $S=(2;3)$.

DẠNG 3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ – MỨC ĐỘ 2 - 3

Câu 59: Tập nghiệm của bất phương trình: $\left(3^x+2\right)\left(4^{x+1}-8^{2x+1}\right)\le 0$

A. $\left[-\frac{1}{4};+\infty\right)$ **B.** $\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right]$. **C.** $\left(-\infty;4\right]$ **D.** $\left[4;+\infty\right)$.

Câu 60: Bất phương trình $3^{2x+1}-7.3^x+2>0$ có tập nghiệm là

A. $\left(-\infty;-1\right)\cup\left(\log_2 3;+\infty\right)$.
B. $\left(-\infty;-2\right)\cup\left(\log_2 3;+\infty\right)$.
C. $\left(-\infty;-1\right)\cup\left(\log_3 2;+\infty\right)$.
D. $\left(-\infty;-2\right)\cup\left(\log_3 2;+\infty\right)$.

Câu 61: Biết tập nghiệm của bất phương trình $2^x<3-\frac{2}{2^x}$ là $\left(a;b\right)$. Giá trị $a+b$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 62: Tập nghiệm của bất phương trình $3^{3x+1}-9+3^{x+1}-9.3^{2x}>0$ là

A. $\left(-\infty;1\right)$. **B.** $\left(3;+\infty\right)$. **C.** $\left(1;+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;3\right)$.

Câu 63: Bất phương trình $6.4^x-13.6^x+6.9^x>0$ có tập nghiệm là?

A. $S=\left(-\infty;-1\right)\cup\left[1;+\infty\right)$.
B. $S=\left(-\infty;-2\right)\cup\left(1;+\infty\right)$.
C. $S=\left(-\infty;-1\right)\cup\left(1;+\infty\right)$.
D. $S=\left(-\infty;-2\right]\cup\left[2;+\infty\right)$.

Câu 64: Cho bất phương trình: $2.5^{x+2}+5.2^{x+2}-133.\sqrt{10^x}\le 0$ có tập nghiệm là: $S=\left[a;b\right]$. Biểu thức $A=1000b-5a$ có giá trị bằng

A. 2021 **B.** 2020 **C.** 2019 **D.** 2018

Câu 65: Số nghiệm nguyên của bất phương trình: $\left(17-12\sqrt{2}\right)^x\ge\left(3+\sqrt{8}\right)^{x^2}$ là:

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 66: Tìm tập nghiệm của bất phương trình $2^x+2^{x+1}\le 3^x+3^{x-1}$.

A. $\left(2;+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;2\right)$. **C.** $\left(-\infty;2\right]$. **D.** $\left[2;+\infty\right)$.

Câu 67: Cho bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}}+3\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}+1}>12$ có tập nghiệm $S=\left(a;b\right)$. Giá trị của biểu thức $P=3a+10b$ là

A. 5. **B.** -3. **C.** -4. **D.** 2.

Câu 68: Bất phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nguyên dương $9^x-4.3^x+3<0$.

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 69: Bất phương trình $6.4^x-13.6^x+6.9^x>0$ có tập nghiệm là?

A. $S=\left(-\infty;-1\right)\cup\left[1;+\infty\right)$.
B. $S=\left(-\infty;-2\right)\cup\left(1;+\infty\right)$.
C. $S=\left(-\infty;-1\right)\cup\left(1;+\infty\right)$.
D. $S=\left(-\infty;-2\right]\cup\left[2;+\infty\right)$.

Câu 70: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2+4x-14}\ge 7+4\sqrt{3}$ là:

A. $[-6;2]$. **B.** $(-\infty-6]\cup[2;+\infty)$. **C.** $(-6;2)$. **D.** $(-\infty;-6)\cup(2;+\infty)$.

Câu 71: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $6^x+4\le 2^{x+1}+2.3^x$

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0

Câu 72: Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-9}+(x^2-9).5^{x+1}<1$ là khoảng $(a;b)$. Tính $b-a$

A. 6. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 4.

Câu 73: Tập hợp tất cả các số thực x không thỏa mãn bất phương trình $9^{x^2-4}+(x^2-4).2019^{x-2}\ge 1$ là khoảng $(a;b)$. Tính $b-a$.

A. 5. **B.** 4. **C.** -5. **D.** -1.

Câu 74: Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-9}+(x^2-9).5^{x+1}<1$ là khoảng $(a;b)$. Tính $b-a$.

A. 6. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 4.

Câu 75: Có bao nhiêu giá trị nguyên của x trong đoạn $[0;2020]$ thỏa mãn bất phương trình sau

$16^x+25^x+36^x\le 20^x+24^x+30^x$.

A. 3. **B.** 2000. **C.** 1. **D.** 1000.

Câu 76: Tập nghiệm của bất phương trình $(3^{2x}-9)(3^x-\frac{1}{27})\sqrt{3^{x+1}-1}\le 0$ chứa bao nhiêu số nguyên ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 77: Tập nghiệm của bất phương trình $9^x-2(x+5).3^x+9(2x+1)\ge 0$ là

A. $[0;1]\cup[2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$. **C.** $[1;2]$. **D.** $(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$.

Câu 78: Tập nghiệm của bất phương trình $2.7^{x+2}+7.2^{x+2}\le 351.\sqrt{14^x}$ có dạng là đoạn $S=[a;b]$. Giá trị $b-2a$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(3;\sqrt{10})$. **B.** $(-4;2)$. **C.** $(\sqrt{7};4\sqrt{10})$. **D.** $\left(\frac{2}{9};\frac{49}{5}\right)$.

Câu 79: Bất phương trình $2.5^{x+2}+5.2^{x+2}\le 133.\sqrt{10^x}$ có tập nghiệm là $S=[a;b]$ thì biểu thức $A=1000b-4a+1$ có giá trị bằng

A. 3992. **B.** 4008. **C.** 1004. **D.** 2017.

DẠNG 4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT – MỨC ĐỘ 2-3

Câu 80: Tập nghiệm của bất phương trình $2\log_2(x-1) \le \log_2(5-x)+1$ là

A. $[3;5]$ **B.** $(1;3]$ **C.** $[1;3]$ **D.** $(1;5)$

Câu 81: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $2\log_3(4x-3) \le \log_3(18x+27)$.

A. $S=\left[-\frac{3}{8};3\right]$. **B.** $S=\left(\frac{3}{4};3\right]$. **C.** $S=\left(\frac{3}{4};+\infty\right)$. **D.** $S=[3;+\infty)$.

Câu 82: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2^2(2x)+\log_2\frac{x}{4}<9$ chứa tập hợp nào sau đây?

A. $\left(\frac{3}{2};6\right)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(1;5)$. **D.** $\left(\frac{1}{2};2\right)$.

Câu 83: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x) \ge 0$ là:

A. $(-\infty;4]$. **B.** $(1;4]$. **C.** $(1;4)$. **D.** $\left[4;\frac{11}{2}\right)$.

Câu 84: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x) \ge 0$ là

A. $(-\infty;4]$ **B.** $(1;4]$ **C.** $(1;4)$ **D.** $\left[4;\frac{11}{2}\right)$

Câu 85: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x) \ge 0$ là:

A. $S=(-\infty;4]$. **B.** $S=(1;4)$. **C.** $S=(1;4]$. **D.** $S=\left(3;\frac{11}{2}\right)$.

Câu 86: Tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $2\log_2\sqrt{x+1} \le 2-\log_2(x-2)$ bằng

A. 12 **B.** 9 **C.** 5 **D.** 3

Câu 87: Tìm tất cả giá trị của tham số m để bất phương trình $\log(2x^2+3) > \log(x^2+mx+1)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

A. $-2<m<2$. **B.** $m<2\sqrt{2}$. **C.** $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$. **D.** $m<2$.

Câu 88: Biết rằng bất phương trình $\log_2(5^x+2)+2.\log_{(5^x+2)}2>3$ có tập nghiệm là $S=(\log_a b;+\infty)$, với a, b là các số nguyên dương nhỏ hơn 6 và $a \ne 1$. Tính $P=2a+3b$.

A. $P=7$. **B.** $P=11$. **C.** $P=18$. **D.** $P=16$.

Câu 89: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x-5\log_2 x-6 \le 0$ là

A. $S=\left[\frac{1}{2};64\right]$. **B.** $S=\left(0;\frac{1}{2}\right]$. **C.** $S=[64;+\infty)$. **D.** $S=\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup[64;+\infty)$.

Câu 90: Bất phương trình $(x^3-9x)\ln(x+5)\le 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** Vô số.

Câu 91: Tính tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2(x^2+3)-\log_2 x+x^2-4x+1\le 0$.

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 92: Biết bất phương trình $\log_2\left(\dfrac{x^2+x+1}{16x+3}\right)+\left(\sqrt{x}-2\right)^2+x\le 1$ có tập nghiệm là $S=(a;b)$. Hãy tính tổng $T=20a+10b$.

A. $T=45-10\sqrt{2}$. **B.** $T=46-10\sqrt{2}$. **C.** $T=46-11\sqrt{2}$. **D.** $T=47-11\sqrt{2}$.

Câu 93: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(10-3^{x+1}\right)\ge 1-x$ chứa tất cả bao nhiêu số nguyên?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** Vô số.

Câu 94: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2 x+\log_3 x\ge 1+\log_2 x.\log_3 x$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Câu 95: Bất phương trình $\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{3x-7}{x+3}\right)\ge 0$ có tập nghiệm là $(a;b]$. Tính giá trị $P=3a-b$.

A. $P=5$. **B.** $P=4$. **C.** $P=10$. **D.** $P=7$.

Câu 96: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(-\log_2 x)<0$ là

A. $(0;5)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{4};4\right)$. **D.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 97: Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $\log^2_{\sqrt{5}} x^5-25\log_{\sqrt{5}} x^2-75\le 0$ là

A. 70. **B.** 64. **C.** 62. **D.** 66.

Câu 98: Cho bất phương trình $(\log x+1)(4-\log x)>0$. Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn bất phương trình trên.

A. 10000. **B.** 10001. **C.** 9998. **D.** 9999.

CHƯƠNG II

HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

6. BẤT PHƯƠNG TRÌNH – MŨ – LOGARIT

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

+ Nếu $a>1$ thì $a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)>g(x)$.

+ Nếu $0<a<1$ thì $a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)<g(x)$.

+ Nếu a chứa ẩn thì $a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow (a-1)\left[f(x)-g(x)\right]>0$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-2;+\infty)$.

Câu 1: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^x>9$ trên tập số thực là

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(-2;+\infty)$.

Lời giải

$\left(\frac{1}{3}\right)^x>9 \Leftrightarrow 3^{-x}>3^2 \Leftrightarrow -x>2 \Leftrightarrow x<-2$.

Vậy tập nghiệm là: $S=(-\infty;-2)$.

Câu 2: Tập nghiệm của bất phương trình $4^{x+1}\le 8^{x-2}$ là

A. $[8;+\infty)$. **B.** $\varnothing$. **C.** $(0;8)$. **D.** $(-\infty;8]$.

Lời giải

Ta có: $4^{x+1}\le 8^{x-2} \Leftrightarrow 2^{2x+2}\le 2^{3x-6} \Leftrightarrow 2x+2\le 3x-6 \Leftrightarrow x\ge 8$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=[8;+\infty)$.

Câu 3: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2+2x}\le 8$ là

A. $(-\infty;-3]$. **B.** $[-3;1]$. **C.** $(-3;1)$. **D.** $(-3;1]$.

Lời giải

Ta có : $2^{x^2+2x}\le 8 \Leftrightarrow 2^{x^2+2x}\le 2^3 \Leftrightarrow x^2+2x-3\le 0 \Leftrightarrow -3\le x\le 1$.

Câu 4: Tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+2}<\left(\frac{1}{25}\right)^{-x}$ là

A. $S=(-\infty;2)$ **B.** $S=(-\infty;1)$ **C.** $S=(1;+\infty)$ **D.** $S=(2;+\infty)$

Lời giải

$$5^{x+2} < \left(\frac{1}{25}\right)^{-x} \Leftrightarrow 5^{x+2} < 5^{2x} \Leftrightarrow x+2 < 2x \Leftrightarrow x > 2$$

Câu 5: Tập nghiệm bất phương trình $2^{x^2-3x} < 16$ là

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(4;+\infty)$. **C.** $(-1;4)$. **D.** $(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$.

Lời giải

$$2^{x^2-3x} < 16 \Leftrightarrow 2^{x^2-3x} < 2^4 \Leftrightarrow x^2-3x < 4 \Leftrightarrow -1 < x < 4.$$

Câu 6: Tập nghiệm bất phương trình: $2^x > 8$ là

A. $(-\infty;3)$. **B.** $[3;+\infty)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;3]$.

Lời giải

Ta có: $2^x > 8 \Leftrightarrow 2^x > 2^3 \Leftrightarrow x > 3$

Vậy tập nghiệm bất phương trình là $(3;+\infty)$.

Câu 7: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+3x} < \frac{1}{4}$.

A. $S=[1;2]$ **B.** $S=(-\infty;1)$ **C.** $S=(1;2)$ **D.** $S=(2;+\infty)$

Lời giải

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+3x} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+3x} < \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow -x^2+3x > 2 \Leftrightarrow x^2-3x+2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trìnhđã cho là $S=(1;2)$.

Câu 8: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-3x-7} > 3^{2x-21}$ là

A. 7. **B.** 6. **C.** vô số. **D.** 8.

Lời giải

Ta có $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-3x-7} > 3^{2x-21} \Leftrightarrow 3^{-(2x^2-3x-7)} > 3^{2x-21}$

$$\Leftrightarrow -(2x^2-3x-7) > 2x-21 \Leftrightarrow -2x^2+3x+7 > 2x-21$$

$$\Leftrightarrow -2x^2+x+28 > 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{2} < x < 4.$$

Do $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$.

Vậy bất phương trình đã cho có 7 nghiệm nguyên.

Câu 9: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{3x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2x-6}$ là

A. $(0;6)$. **B.** $(-\infty;6)$. **C.** $(0;64)$. **D.** $(6;+\infty)$.

Lời giải

Ta có $2^{3x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2x-6} \Leftrightarrow 2^{3x} < 2^{2x+6} \Leftrightarrow 3x < 2x+6 \Leftrightarrow x < 6$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty;6)$.

Câu 10: Bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} \ge \frac{1}{8}$ có tập nghiệm là

A. $[3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1]$. **C.** $[-1;3]$. **D.** $(-1;3)$.

Lời giải

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} \ge \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow x^2-2x \le 3 \Leftrightarrow x^2-2x-3 \le 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 3$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S = [-1;3]$.

Câu 11: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^{-x^2} > \frac{81}{256}$ là

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $(-2;2)$.

Lời giải

Ta có: $\left(\frac{3}{4}\right)^{-x^2} > \frac{81}{256} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{-x^2} > \left(\frac{3}{4}\right)^4 \Leftrightarrow -x^2 < 4 \Leftrightarrow -x^2-4 < 0 \Leftrightarrow x \in R$

Câu 12: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-2x} > 8$ là

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;3)$.

C. $(3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

Lời giải

Bất phương trình $2^{x^2-2x} > 8 \Leftrightarrow 2^{x^2-2x} > 2^3 \Leftrightarrow x^2-2x > 3 \Leftrightarrow x^2-2x-3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < -1 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

Câu 13: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{\mathrm{e}}{\pi}\right)^x > 1$ là

A. $\mathbb{R}$ **B.** $(-\infty;0)$ **C.** $(0;+\infty)$ **D.** $[0;+\infty)$

Lời giải

Vì $\frac{\mathrm{e}}{\pi} < 1$ nên $\left(\frac{\mathrm{e}}{\pi}\right)^x > 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{\mathrm{e}}{\pi}}\left(\frac{\mathrm{e}}{\pi}\right)^x < \log_{\frac{\mathrm{e}}{\pi}} 1 \Leftrightarrow x < 0$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty;0)$.

Câu 14: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $2^{x^2+3x} \le 16$ là số nào sau đây ?

A. 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

$$2^{x^2+3x} \le 16 \Leftrightarrow 2^{x^2+3x} \le 2^4 \Leftrightarrow x^2+3x \le 4 \Leftrightarrow x \in [-4;\, 1].$$

Các nghiệm nguyên của bất phương trình là : $-4;-3;-2;-1;0;1$.

Câu 15: Tập nghiệm S của bất phương trình $3^x < \mathrm{e}^x$ là:

A. $S = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. **B.** $S = (0\,;+\infty)$. **C.** $S = \mathbb{R}$. **D.** $S = (-\infty\,;0)$.

Lời giải

$3^x < \mathrm{e}^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{\mathrm{e}}\right)^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$. Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty\,;0)$.

Câu 16: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{x}} \le \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$ là:

A. $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $\left(0;\frac{1}{2}\right]$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Cơ số $a = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$ nên bất phương trình: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{x}} \le \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \ge 2 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{x} \ge 0 \Leftrightarrow 0 < x \le \frac{1}{2}$.

Câu 17: Bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} \ge \frac{1}{8}$ có tập nghiệm là

A. $[3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1]$. **C.** $[-1;3]$. **D.** $(-1;3)$.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} \ge \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow x^2-2x \le 3 \Leftrightarrow x^2-2x-3 \le 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 3$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S = [-1;3]$.

Câu 18: Cho bất phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-x+1} > \left(\frac{2}{3}\right)^{2x+1}$ có tập nghiệm $S = (a;b)$. Giá trị của $b-a$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-x+1} > \left(\frac{2}{3}\right)^{2x+1} \Leftrightarrow x^2-x+1 < 2x+1 \Leftrightarrow x^2-3x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 3$.

Vậy tập nghiệm $S = (0;3)$, suy ra $b-a = 3-0 = 3$.

Câu 19: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{\sqrt{x}} < 2$ là

A. $[0;1)$. **B.** $(-\infty;\, 1)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $(1;\, +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$$2^{\sqrt{x}} < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0;1)$$

Câu 20: Tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} < 8$ là

A. $S = (-\infty;3)$. **B.** $S = (1;+\infty)$. **C.** $S = (-\infty;1) \cup (3;+\infty)$. **D.** $S = (1;3)$.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} < 8 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Leftrightarrow x^2 - 4x > -3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < 1 \end{array}\right.$.

Nên tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} < 8$ là $S = (-\infty;1) \cup (3;+\infty)$.

Câu 21: Tìm tập nghiệm của bất phương trình $2^x + 2^{x+1} \leq 3^x + 3^{x-1}$.

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(-\infty;2]$. **D.** $[2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2^x + 2^{x+1} \leq 3^x + 3^{x-1} \Leftrightarrow 3.2^x \leq 4.3^{x-1} \Leftrightarrow 2^{x-2} \leq 3^{x-2}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} \leq 1 \Leftrightarrow x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Câu 22: Cho bất phương trình $4^x - 5.2^{x+1} + 16 \leq 0$ có tập nghiệm là đoạn $[a;b]$. Tính $\log\left(a^2 + b^2\right)$

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 2^x, t > 0\, (*)$

Khi đó bất phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 10t + 16 \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq t \leq 8$)

$\Rightarrow 2 \leq 2^x \leq 2^3 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow \log\left(a^2 + b^2\right) = 1$.

Câu 23: Cho bất phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-x+1} > \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1}$ có tập nghiệm $S = (a;b)$. Giá trị của $b - a$ bằng

A. -2. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-x+1} > \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} \Leftrightarrow x^2 - x + 1 < 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2 \Rightarrow S = (1;2)$.

Vậy $a = 1; b = 2 \Rightarrow b - a = 1$.

Câu 24: Tập nghiệm của bất phương trình $(5)^{4+x^2} < \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-6x}$ là

A. $(-\infty;1) \cup (2;+\infty)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $(5)^{4+x^2} < \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-6x} \Leftrightarrow 5^{4+x^2} < 5^{-x^2+6x} \Leftrightarrow -x^2 + 6x > 4 + x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 4 < 0$

$\Leftrightarrow 1 < x < 2$.

Câu 25: Bất phương trình $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{x-1} \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2x+3}$ có nghiệm là

A. $x \le -4$. **B.** $x > -4$. **C.** $x < -4$. **D.** $x \ge -4$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{x-1} \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2x+3}$

$\Leftrightarrow x - 1 \le 2\text{x} + 3$

$\Leftrightarrow x \ge -4$

DẠNG 2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

+ Nếu $a > 1$ thì $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$

+ Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

+ Nếu a chứa ẩn thì $\left[\begin{array}{l} \log_a B > 0 \Leftrightarrow (a-1)(B-1) > 0 \\ \dfrac{\log_a A}{\log_a B} > 0 \Leftrightarrow (A-1)(B-1) > 0 \end{array}\right.$.

Câu 26: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(2x+3) \ge 0$ là

A. $S = (-\infty;-1]$. **B.** $S = [-1;+\infty)$. **C.** $S = (-\infty;-1)$. **D.** $S = (-\infty;0]$.

Lời giải

Ta có $\log_2(2x+3) \ge 0 \Leftrightarrow 2x + 3 \ge 1 \Leftrightarrow x \ge -1$

Vậy tập nghiệm bất phương trình $S = [-1;+\infty)$

Câu 27: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3x+1) < 2$ là

A. $\left[-\frac{1}{3};1\right)$ **B.** $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ **C.** $\left(-\frac{1}{3};1\right)$ **D.** $(-\infty;1)$

Lời giải

Chọn C

ĐK: $x > -\dfrac{1}{3}$

$\log_2(3x+1) < 2 \Leftrightarrow 3x+1 < 4 \Leftrightarrow x < 1$

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của bất phương trình là $-\dfrac{1}{3} < x < 1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $\left(-\dfrac{1}{3};1\right)$.

Câu 28: Tập hợp nghiệm của bất phương trình $\log_2(x+1) < 3$ là:

A. $S = (-1;\ 8)$. **B.** $S = (-\infty;\ 7)$. **C.** $S = (-\infty;\ 8)$. **D.** $S = (-1;\ 7)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_2(x+1) < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x+1 < 2^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 7$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-1;\ 7)$.

Câu 29: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x^2-1) \geq 3$ là?

A. $[-2;2]$. **B.** $(-\infty;-3] \cup [3;+\infty)$.

C. $(-\infty;-2] \cup [2;+\infty)$. **D.** $[-3;3]$.

Lời giải

$\log_2(x^2-1) \geq 3 \Leftrightarrow x^2-1 \geq 8 \Leftrightarrow x^2 \geq 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ x \leq -3 \end{array}\right.$

Câu 30: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{0,8}(2x-1) < 0$ là

A. $S = \left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $S = (1;+\infty)$. **C.** $S = \left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $S = (-\infty;1)$.

Lời giải

Bất phương trình $\log_{0,8}(2x-1) < 0 \Leftrightarrow 2x-1 > (0,8)^0 \Leftrightarrow 2x > 2 \Leftrightarrow x > 1$.

Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{0,8}(2x-1) < 0$ là $S = (1;+\infty)$.

Câu 31: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\ln x^2 < 0$.

A. $S = (-1;1)$. **B.** $S = (-1;0)$. **C.** $S = (-1;1)\backslash\{0\}$. **D.** $S = (0;1)$.

Lời giải

Ta có: $\ln x^2 < 0 \Leftrightarrow 0 < x^2 < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases}$. Vậy $S = (-1;1)\backslash\{0\}$.

Câu 32: Bất phương trình $\log_3\left(x^2-2x\right)>1$ có tập nghiệm là

A. $S=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$. **B.** $S=(-1;3)$.

C. $S=(3;+\infty)$. **D.** $S=(-\infty;-1)$.

Lời giải

$$\log_3\left(x^2-2x\right)>1\Leftrightarrow x^2-2x>3\Leftrightarrow x^2-2x-3>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\x<-1\end{array}\right..$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

Câu 33: Tập nghiệm của bất phương trình $\ln 3x<\ln(2x+6)$ là:

A. $[0;6)$. **B.** $(0;6)$. **C.** $(6;+\infty)$. **D.** $(-\infty;6)$.

Lời giải

Chọn B

Bất phương trình $\ln 3x<\ln(2x+6)\Leftrightarrow\begin{cases}3x>0\\3x<2x+6\end{cases}\Leftrightarrow 0<x<6$.

Câu 34: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(x-1)<3$ là

A. $S=(1;9)$. **B.** $S=(1;10)$. **C.** $S=(-\infty;9)$. **D.** $S=(-\infty;10)$.

Lời giải

Chọn A

$\log_2(x-1)<3\Leftrightarrow 0<x-1<2^3\Leftrightarrow 1<x<9$.

Câu 35: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2\left(x^2-1\right)\geq 3$ là?

A. $[-2;2]$. **B.** $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$.

C. $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. **D.** $[-3;3]$.

Lời giải

Chọn B

$$\log_2\left(x^2-1\right)\geq 3\Leftrightarrow x^2-1\geq 8\Leftrightarrow x^2\geq 9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq 3\\x\leq -3\end{array}\right..$$

Câu 36: Bất phương trình $\log_2(3x-2)>\log_2(6-5x)$ có tập nghiệm là $(a;b)$. Tổng $a+b$ bằng

A. $\frac{8}{3}$. **B.** $\frac{28}{15}$. **C.** $\frac{26}{5}$. **D.** $\frac{11}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_2(3x-2)>\log_2(6-5x)\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2>6-5x\\6-5x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x<\frac{6}{5}\end{cases}\Leftrightarrow 1<x<\frac{6}{5}$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $(1;\frac{6}{5})$.

Vậy $a+b=1+\frac{6}{5}=\frac{11}{5}$.

Câu 37: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)<\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$.

A. $S=(2;+\infty)$. **B.** $S=(-1;2)$. **C.** $S=(-\infty;2)$. **D.** $S=\left(\frac{1}{2};2\right)$.

Lời giải

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)<\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)\Leftrightarrow\begin{cases}x+1>2x-1\\2x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{1}{2}<x<2$.

Câu 38: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0.3}(5-2x)>\log_{\frac{3}{10}}9$ là

A. $\left(0;\frac{5}{2}\right)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $\left(-2;\frac{5}{2}\right)$. **D.** $(-2;+\infty)$.

Lời giải

$\log_{0.3}(5-2x)>\log_{\frac{3}{10}}9\Leftrightarrow\begin{cases}5-2x>0\\5-2x<9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<\frac{5}{2}\\x>-2\end{cases}\Leftrightarrow-2<x<\frac{5}{2}$.

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S=\left(-2;\frac{5}{2}\right)$.

Câu 39: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,5}(x-1)>1$ là

A. $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left[1;\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Bất phương trình $\Leftrightarrow 0<x-1<0,5\Leftrightarrow 1<x<\frac{3}{2}$.

Vậy tập nghiệm bất phương trình đã cho là: $S=\left(1;\frac{3}{2}\right)$.

Câu 40: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{\pi}{4}}(x+1)>\log_{\frac{\pi}{4}}(2x-5)$ là

A. $(-1;6)$ **B.** $\left(\frac{5}{2};6\right)$ **C.** $(6;+\infty)$ **D.** $(-\infty;6)$

Lời giải

Do $\frac{\pi}{4}<1$ nên $\log_{\frac{\pi}{4}}(x+1)>\log_{\frac{\pi}{4}}(2x-5)\Leftrightarrow\begin{cases}x+1>0\\x+1<2x-5\end{cases}\Leftrightarrow x>6$.

Câu 41: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_3(2x+3)<\log_3(1-x)$

A. $\left(-\frac{2}{3};+\infty\right)$ **B.** $\left(-\frac{3}{2};-\frac{2}{3}\right)$ **C.** $\left(-\frac{3}{2};1\right)$ **D.** $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)$

Lời giải

Chọn B

Điều kiện : $\begin{cases}2x+3>0\\1-x>0\end{cases}\Leftrightarrow -\dfrac{3}{2}<x<1$.

$\log_3(2x+3)<\log_3(1-x)\Leftrightarrow 2x+3<1-x\Leftrightarrow x<-\dfrac{2}{3}$.

So với điều kiện, ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{2}{3}\right)$.

Câu 42: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)<1$ là

A. $(0;1)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{8};3\right)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{8};1\right)$. **D.** $\left(\dfrac{1}{8};+\infty\right)$.

Lời giải

Ta có $\log_3\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)<1\Leftrightarrow 0<\log_{\frac{1}{2}}x<3^1\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{2}\right)^0>x>\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\Leftrightarrow 1>x>\dfrac{1}{8}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(\dfrac{1}{8};1\right)$.

Câu 43: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{0,8}(15x+2)>\log_{0,8}(13x+8)$ là

A. Vô số. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Điều kiện $x>-\dfrac{2}{15}$.

Khi đó, $\log_{0,8}(15x+2)>\log_{0,8}(13x+8)\Leftrightarrow 15x+2<13x+8\Leftrightarrow 2x<6\Leftrightarrow x<3$.

Tập nghiệm bất phương trình là: $T=\left(-\dfrac{2}{15};3\right)\Rightarrow x\in\{0;1;2\}$.

Câu 44: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,5}(5x+14)\le\log_{0,5}\left(x^2+6x+8\right)$ là

A. $(-2;2]$. **B.** $(-\infty;2]$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\left[-\dfrac{3}{2};0\right]$. **D.** $[-3;2]$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}5x+14>0\\x^2+6x+8>0\end{cases}\Leftrightarrow x>-2\quad(*)$

Ta có: $\log_{0,5}(5x+14)\le\log_{0,5}\left(x^2+6x+8\right)\Leftrightarrow 5x+14\ge x^2+6x+8\Leftrightarrow -3\le x\le 2$

Kết hợp với điều kiện $(*)$ ta được $-2<x\le 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-2;2]$.

Câu 45: Bất phương trình $\log_2(3x-2)>\log_2(6-5x)$ có tập nghiệm là

A. $(0;+\infty)$ **B.** $\left(\frac{1}{2};3\right)$. **C.** $(-3;1)$ **D.** $\left(1;\frac{6}{5}\right)$

Lời giải

Vì $2>1$ nên

$$\log_2(3x-2)>\log_2(6-5x)\ \begin{cases}3x-2>6-5x\\6-5x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x<\frac{6}{5}\end{cases}\Leftrightarrow 1<x<\frac{6}{5}.$$

Câu 46: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\ln x^2>\ln(4x-4)$.

A. $S=(2;+\infty)$. **B.** $S=(1;+\infty)$. **C.** $S=R\setminus\{2\}$. **D.** $S=(1;+\infty)\setminus\{2\}$.

Lời giải

$$\ln x^2>\ln(4x-4)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2>4x-4\\4x-4>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-4x+4>0\\x>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 2\\x>1\end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(1;+\infty)\setminus\{2\}$.

Câu 47: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2\left[x^2-1\right]\geq 3$ là:

A. $[-2;2]$. **B.** $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$.

C. $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. **D.** $[-3;3]$.

Lời giải

Ta có $\log_2\left[x^2-1\right]\geq 3\Leftrightarrow x^2-9\geq 0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$

Câu 48: Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{\log\left(x^2-9\right)}{\log(3-x)}\leq 1$ là:

A. $(-4;-3)$. **B.** $[-4;-3)$. **C.** $(3;4]$. **D.** ϕ.

Lời giải

$$\text{ĐK: }\begin{cases}x^2-9>0\\3-x>0\\3-x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>3\vee x<-3\\x<3\\x\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow x<-3.$$

Với $x<-3$ suy ra $\log(3-x)>0$ nên bất phương trình đã cho tương đương với

$$\log\left(x^2-9\right)\leq\log(3-x)\Leftrightarrow x^2+x-12\leq 0\Leftrightarrow x\in[-4;3]$$

Kết hợp điều kiện suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $[-4;-3)$

Câu 49: Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để bất phương trình $\log_2\left(x^2+mx+m+2\right)\geq\log_2\left(x^2+2\right)$ nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Ta có : $\log_2(x^2+mx+m+2)\ge\log_2(x^2+2)$ nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2+mx+m+2\ge x^2+2,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow mx+m\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m=0$.

Suy ra có 1 giá trị m thỏa mãn.

Câu 50: Giải bất phương trình $\log_2(3x-2)>\log_2(6-5x)$ được tập nghiệm là $(a;b)$. Hãy tính tổng $S=a+b$.

A. $S=\frac{26}{5}$. **B.** $S=\frac{11}{5}$. **C.** $S=\frac{28}{15}$. **D.** $S=\frac{8}{3}$.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases}3x-2>0\\6-5x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{2}{3}\\x<\frac{6}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{2}{3}<x<\frac{6}{5}$.

Ta có

$$\log_2(3x-2)>\log_2(6-5x)\Leftrightarrow 3x-2>6-5x\Leftrightarrow 8x>8\Leftrightarrow x>1.$$

Kết hợp với điều kiện, ta được $1<x<\frac{6}{5}$.

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $\left(1;\frac{6}{5}\right)$.

Từ đó, $S=a+b=1+\frac{6}{5}=\frac{11}{5}$.

Lời giải ngắn gọn như sau:

$\log_2(3x-2)>\log_2(6-5x)\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2>6-5x\\6-5x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x<\frac{6}{5}\end{cases}\Leftrightarrow 1<x<\frac{6}{5}$.

Câu 51: Có tất cả bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left[\log_2\left(2-x^2\right)\right]>0$?

A. Vô số. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

$\log_{\frac{1}{2}}\left[\log_2\left(2-x^2\right)\right]>0$

$\Leftrightarrow 0<\log_2\left(2-x^2\right)<1$

$\Leftrightarrow 1<2-x^2<2$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2-x^2<2\\2-x^2>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2>0\\x^2<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne 0\\-1<x<1\end{cases}$

Kết hợp với giả thiết x là số nguyên ta thấy không có số nguyên x nào thỏa mãn bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left[\log_2\left(2-x^2\right)\right]>0$.

Câu 52: Nghiệm của bất phương trình $\log_{2-\sqrt{3}}\left(2x-5\right)\ge\log_{2-\sqrt{3}}\left(x-1\right)$ là

A. $\frac{5}{2}<x\le 4$. **B.** $1<x\le 4$. **C.** $\frac{5}{2}\le x\le 4$ 1. **D.** $x\ge 4$.

Lời giải

Chọn A

$$\log_{2-\sqrt{3}}\left(2x-5\right)\ge\log_{2-\sqrt{3}}\left(x-1\right)\Leftrightarrow\begin{cases}2x-5\le x-1\\2x-5>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 4\\x>\frac{5}{2}\end{cases}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $\frac{5}{2}<x\le 4$.

Câu 53: Bất phương trình $\log_4\left(x+7\right)>\log_2\left(x+1\right)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định của bất phương trình là $\begin{cases}x+7>0\\x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-7\\x>-1\end{cases}\Leftrightarrow x>-1$

Ta có $\log_4\left(x+7\right)>\log_2\left(x+1\right)\Leftrightarrow\frac{1}{2}\log_2\left(x+7\right)>\log_2\left(x+1\right)\Leftrightarrow\log_2\left(x+7\right)>\log_2\left(x+1\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2+x-6<0\Leftrightarrow -3<x<2$

Kết hợp điều kiện ta được $-1<x<2$

Vì $x\in\mathbb{Z}$ nên tìm được $x=0, x=1$.

Câu 54: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{3}{5}}\left(2x^2-x+1\right)<0$ là

A. $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(-\infty;1\right)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;0\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2x^2-x+1>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó $\log_{\frac{3}{5}}\left(2x^2-x+1\right)<0\Leftrightarrow 2x^2-x+1>1\Leftrightarrow 2x^2-x>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0\\x>\frac{1}{2}\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\infty;0\right)\cup\left(\frac{1}{2}:+\infty\right)$.

Câu 55: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+2x-8\right)\ge -4$ là

A. 6. **B.** Vô số. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+2x-8\right)\ge -4 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-8>0 \\ x^2+2x-8\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<-4\end{array}\right. \\ x^2+2x-24\le 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<-4\end{array}\right. \\ -6\le x\le 4\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -6\le x<-4 \\ 2<x\le 4\end{array}\right..$$

Do đó các nghiệm nguyên của bất phương trình đã cho là $-6;-5;3;4$.

Câu 56: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_6 x^2<\log_6\left(x+6\right)$ là

A. $S=\left(-\infty;-2\right)\cup\left(3;+\infty\right)$. **B.** $S=\left(-2;3\right)$.

C. $S=\left(-3;2\right)\backslash\{0\}$. **D.** $S=\left(-2;3\right)\backslash\{0\}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases} x\ne 0 \\ x>-6\end{cases}$.

$\log_6 x^2<\log_6\left(x+6\right)\Leftrightarrow x^2<x+6\Leftrightarrow x^2-x-6<0\Leftrightarrow -2<x<3.$

Kết hợp với điều kiện, suy ra tập nghiệm $S=\left(-2;3\right)\backslash\{0\}$.

Câu 57: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2\left(7-x\right)+\log_{\frac{1}{2}}\left(x-1\right)\le 0$ là

A. $S=\left(1;4\right]$. **B.** $S=\left(-\infty;4\right]$. **C.** $S=\left[4;+\infty\right)$. **D.** $S=\left[4;7\right)$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $1<x<7$.

Ta có:

$\log_2\left(7-x\right)+\log_{\frac{1}{2}}\left(x-1\right)\le 0\Leftrightarrow \log_2\left(7-x\right)-\log_2\left(x-1\right)\le 0$

$$\Leftrightarrow \log_2\frac{7-x}{x-1}\le 0\Leftrightarrow \frac{7-x}{x-1}\le 1\Leftrightarrow \frac{-2x+8}{x-1}\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<1 \\ x\ge 4\end{array}\right..$$

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm là $\left[4;7\right)$.

Câu 58: Bất phương trình $1+\log_2\left(x-2\right)>\log_2\left(x^2-3x+2\right)$ có các nghiệm là

A. $S=\left(3;+\infty\right)$. **B.** $S=\left(1;3\right)$. **C.** $S=\left(2;+\infty\right)$. **D.** $S=\left(2;3\right)$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x>2$.

$1+\log_2(x-2)>\log_2(x^2-3x+2)\Leftrightarrow \log_2(x^2-3x+2)-\log_2(x-2)<1$

$\Leftrightarrow \log_2(x-1)<1\Leftrightarrow x<3.$

Đối chiếu điều kiện, ta có tập nghiệm là $S=(2;3)$.

DẠNG 2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ – MỨC ĐỘ 2

Câu 59: Tập nghiệm của bất phương trình: $(3^x+2)(4^{x+1}-8^{2x+1})\le 0$

A. $\left[-\frac{1}{4};+\infty\right)$ **B.** $\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right]$. **C.** $(-\infty;4]$ **D.** $[4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$(3^x+2)(4^{x+1}-8^{2x+1})\le 0\Leftrightarrow 4^{x+1}-8^{2x+1}\le 0$

$\Leftrightarrow 4.2^{2x}-8.(2^{2x})^3\le 0\Leftrightarrow -2.(2^{2x})^3+2^{2x}\le 0(*)$

Đặt $2^{2x}=t,\ t>0$, suy ra bpt trở thành: $-2.t^3+t\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\frac{\sqrt{2}}{2}\le t\le 0\\ t\ge \frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$

Giao với Đk $t>0$ ta được: $t\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow 2^{2x}\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow 2^{2x}\ge 2^{-\frac{1}{2}}\Leftrightarrow 2x\ge-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x\ge-\frac{1}{4}$

Vậy tập nghiệm của BPT đã cho là $T=\left[-\frac{1}{4};+\infty\right)$.

Câu 60: Bất phương trình $3^{2x+1}-7.3^x+2>0$ có tập nghiệm là

A. $(-\infty;-1)\cup(\log_2 3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)\cup(\log_2 3;+\infty)$.

C. $(-\infty;-1)\cup(\log_3 2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2)\cup(\log_3 2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $3^{2x+1}-7.3^x+2>0\Leftrightarrow 3.(3^x)^2-7.3^x+2>0$.

Đặt $3^x=t>0$ ta được $\begin{cases}t>0\\3t^2-7t+2>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<t<\frac{1}{3}\\t>2\end{array}\right.$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l}0<3^x<\frac{1}{3}\\3^x>2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<3^x<3^{-1}\\3^x>3^{\log_3 2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\x>\log_3 2\end{array}\right.$.

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $(-\infty;-1)\cup(\log_3 2;+\infty)$.

Câu 61: Biết tập nghiệm của bất phương trình $2^x < 3 - \frac{2}{2^x}$ là $(a;b)$. Giá trị $a+b$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $2^x < 3 - \frac{2}{2^x} \Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 - 3.\left(2^x\right) + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < 2^x < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

Tập nghiệm của bất phương trình là: $S = (0;1)$.

Suy ra $a = 0$ và $b = 1$ nên $a + b = 1$.

Câu 62: Tập nghiệm của bất phương trình $3^{3x+1} - 9 + 3^{x+1} - 9.3^{2x} > 0$ là

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;3)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $3^{3x+1} - 9 + 3^{x+1} - 9.3^{2x} > 0 \Leftrightarrow 3.3^{3x} - 9 + 3.3^x - 9.3^{2x} > 0$

Đặt $3^x = t\,(t > 0)$.

Ta có bất phương trình $3t^3 - 9 + 3t - 9t^2 > 0$

$\Leftrightarrow 3t^3 - 9t^2 + 3t - 9 > 0$

$\Leftrightarrow 3t^2(t-3) + 3(t-3) > 0$

$\Leftrightarrow (3t^2+3)(t-3) > 0$

$\Leftrightarrow t - 3 > 0$

$\Leftrightarrow t > 3$

Khi đó ta có $3^x > 3 \Leftrightarrow x > 1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (1;+\infty)$.

Câu 63: Bất phương trình $6.4^x - 13.6^x + 6.9^x > 0$ có tập nghiệm là?

A. $S = (-\infty;-1) \cup [1;+\infty)$. **B.** $S = (-\infty;-2) \cup (1;+\infty)$.

C. $S = (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$. **D.** $S = (-\infty;-2] \cup [2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $6.4^x - 13.6^x + 6.9^x > 0 \Leftrightarrow 6.\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 13.\left(\frac{2}{3}\right)^x + 6 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^x > \frac{3}{2} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x < \frac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 1 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

.

Câu 64: Cho bất phương trình: $2.5^{x+2}+5.2^{x+2}-133.\sqrt{10^x}\le 0$ có tập nghiệm là: $S=[a;b]$. Biểu thức $A=1000b-5a$ có giá trị bằng

A. 2021 **B.** 2020 **C.** 2019 **D.** 2018

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2.5^{x+2}+5.2^{x+2}-133.\sqrt{10^x}\le 0 \Leftrightarrow 50.\left(5^{\frac{x}{2}}\right)^2-133.5^{\frac{x}{2}}.2^{\frac{x}{2}}+20.\left(2^{\frac{x}{2}}\right)^2\le 0$

$\Leftrightarrow\left(2.5^{\frac{x}{2}}-5.2^{\frac{x}{2}}\right)\left(25.5^{\frac{x}{2}}-4.2^{\frac{x}{2}}\right)\le 0 \Leftrightarrow \left(2.5^{\frac{x}{2}}-5.2^{\frac{x}{2}}\right)\left(5^{\frac{x}{2}+2}-2^{\frac{x}{2}+2}\right)\le 0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2.5^{\frac{x}{2}}-5.2^{\frac{x}{2}}\le 0\\ 25.5^{\frac{x}{2}}-4.2^{\frac{x}{2}}\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}2.5^{\frac{x}{2}}-5.2^{\frac{x}{2}}\ge 0\\ 25.5^{\frac{x}{2}}-4.2^{\frac{x}{2}}\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}5^{\frac{x}{2}-1}\le 2^{\frac{x}{2}-1}\\ 5^{\frac{x}{2}+2}\ge 2^{\frac{x}{2}+2}\end{cases}\\ \begin{cases}5^{\frac{x}{2}-1}\ge 2^{\frac{x}{2}-1}\\ 5^{\frac{x}{2}+2}\le 2^{\frac{x}{2}+2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{x}{2}-1}\le 1\\ \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{x}{2}+2}\ge 1\end{cases}\\ \begin{cases}\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{x}{2}-1}\ge 1\\ \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{x}{2}+2}\le 1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{x}{2}-1\le 0\\ \frac{x}{2}+2\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{x}{2}-1\ge 0\\ \frac{x}{2}+2\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 2\\ x\ge -4\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2\\ x\le -4\end{cases}\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow -4\le x\le 2$. Suy ra $S=[-4;2]$. Vậy $A=1000b-5a=1000.2-5.(-4)=2020$.

Câu 65: Số nghiệm nguyên của bất phương trình: $\left(17-12\sqrt{2}\right)^x\ge\left(3+\sqrt{8}\right)^{x^2}$ là:

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $\left(17-12\sqrt{2}\right)^x\ge\left(3+\sqrt{8}\right)^{x^2}\Leftrightarrow\left(3-\sqrt{8}\right)^{2x}\ge\left(3+\sqrt{8}\right)^{x^2}$

$\Leftrightarrow\left(3+\sqrt{8}\right)^{x^2+2x}\le 1\Leftrightarrow x^2+2x\le 0\Leftrightarrow x\in[-2;0]$.

Vậy bất phương trình đã cho có 3 nghiệm nguyên.

Câu 66: Tìm tập nghiệm của bất phương trình $2^x+2^{x+1}\le 3^x+3^{x-1}$.

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(-\infty;2]$. **D.** $[2;+\infty)$.

Lời giải

Ta có $2^x+2^{x+1}\le 3^x+3^{x-1}\Leftrightarrow 3.2^x\le 4.3^{x-1}\Leftrightarrow 2^{x-2}\le 3^{x-2}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} \le 1 \Leftrightarrow x-2 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 2$.

Câu 67: Cho bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + 3\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}+1} > 12$ có tập nghiệm $S=(a;b)$. Giá trị của biểu thức $P=3a+10b$ là

A. 5. **B.** -3. **C.** -4. **D.** 2.

Lời giải

Đặt $t=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}\ (t>0)$. Khi đó bất phương trình đã cho trở thành

$t^2+t>12 \Leftrightarrow (t-3)(t+4)>0 \Leftrightarrow t>3$.

Từ đó suy ra: $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}} > 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < -1 \Leftrightarrow -1<x<0$. Tập nghiệm của bất phương trình là $(-1;0)$.

Vậy $a=-1$ và $b=0$. Suy ra $P=3a+10b=-3$.

Câu 68: Bất phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nguyên dương $9^x-4.3^x+3<0$.

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Đặt $t=3^x>0$.

Bất phương trình đã cho trở thành $t^2-4.t+3<0 \Leftrightarrow 1<t<3 \Leftrightarrow 1<3^x<3 \Leftrightarrow 0<x<1$.

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=(0,1)$ nên nó không có nghiệm nguyên dương.

Câu 69: Bất phương trình $6.4^x-13.6^x+6.9^x>0$ có tập nghiệm là?

A. $S=(-\infty;-1)\cup[1;+\infty)$. **B.** $S=(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$.

C. $S=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **D.** $S=(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$.

Lời giải

Ta có $6.4^x-13.6^x+6.9^x>0 \Leftrightarrow 6.\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-13.\left(\frac{2}{3}\right)^{x}+6>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^x>\frac{3}{2}\\ \left(\frac{2}{3}\right)^x<\frac{2}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-1\\ x>1\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Câu 70: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2+4x-14} \ge 7+4\sqrt{3}$ là:

A. $[-6;2]$. **B.** $(-\infty-6]\cup[2;+\infty)$. **C.** $(-6;2)$. **D.** $(-\infty;-6)\cup(2;+\infty)$.

Lời giải

Ta có $7+4\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^2$, $\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)=1$ và $2+\sqrt{3}=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1} \Rightarrow 7+4\sqrt{3}=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-2}$

.

$\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2+4x-14} \geq 7+4\sqrt{3} \Leftrightarrow \left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2+4x-14} \geq \left(2-\sqrt{3}\right)^{-2}$

$\Leftrightarrow x^2+4x-14 \leq -2 \Leftrightarrow x^2+4x-12 \leq 0 \Leftrightarrow -6 \leq x \leq 2$.

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $\left[-6;2\right]$.

Câu 71: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $6^x+4 \leq 2^{x+1}+2.3^x$

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0

Lời giải

Chọn C

$6^x+4 \leq 2^{x+1}+2.3^x \Leftrightarrow 6^x+4-2.2^x-2.3^x \leq 0$

$\Leftrightarrow 2^x\left(3^x-2\right)+2\left(2-3^x\right) \leq 0$

$\Leftrightarrow \left(3^x-2\right)\left(2^x-2\right) \leq 0$

$\Rightarrow x \in \left[\log_3 2;1\right]$

Câu 72: Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-9}+\left(x^2-9\right).5^{x+1}<1$ là khoảng $\left(a;b\right)$. Tính $b-a$

A. 6. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

$3^{x^2-9}+\left(x^2-9\right).5^{x+1}<1$ (1).

Có $5^{x+1}>0\ \forall x$.

Xét $x^2-9=0$, VT $(1)=3^0+0=1$.

Xét $x^2-9>0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3^{x^2-9}>3^0=1 \\ \left(x^2-9\right).5^{x+1}>0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ VT $(1)>1$.

Xét $x^2-9<0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3^{x^2-9}<3^0=1 \\ \left(x^2-9\right).5^{x+1}<0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ VT $(1)<1$ luôn đúng.

Có $x^2-9<0 \Leftrightarrow x \in \left(-3;3\right)$.

$\Rightarrow$ Tập nghiệm của bất phương trình là: $\left(-3;3\right) \Rightarrow b-a=6$.

Câu 73: Tập hợp tất cả các số thực x không thỏa mãn bất phương trình $9^{x^2-4}+\left(x^2-4\right).2019^{x-2} \geq 1$ là khoảng $\left(a;b\right)$. Tính $b-a$.

A. 5. **B.** 4. **C.** -5. **D.** -1.

Lời giải

Xét hai trường hợp: $x^2-4 \geq 0$ và $x^2-4<0$

TH1: $x^2-4\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge 2\\x\le -2\end{array}\right.$ khi đó ta có:

$$\begin{cases}9^{x^2-4}\ge 9^0=1\\x-2\ge 0\Leftrightarrow 2019^{x-2}\ge 2019^0=1\end{cases}\Rightarrow 9^{x^2-4}+\left(x^2-4\right)2019^{x-2}\ge 1$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-4=0\\x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2$

TH2: $x^2-4<0\Leftrightarrow -2<x<2$, khi đó ta có:

$$\begin{cases}9^{x^2-4}<9^0=1\\x-2<0\Leftrightarrow 2019^{x-2}<2019^0=1\end{cases}\Rightarrow 9^{x^2-4}+\left(x^2-4\right)2019^{x-2}<1$$

$\Rightarrow$ bất phương trình vô nghiệm

Vậy tập hợp tất cả các số thực x không thỏa mãn bất phương trình là

$(-2;2)\Rightarrow a=-2;b=2\Rightarrow b-a=4$

Câu 74: Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-9}+\left(x^2-9\right).5^{x+1}<1$ là khoảng $(a;b)$. Tính $b-a$.

A. 6. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

□Với $x^2-9\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\le -3\\x\ge 3\end{array}\right.$, ta có $\begin{cases}3^{x^2-9}\ge 3^0=1\\\left(x^2-9\right).5^{x+1}\ge 0\end{cases}$ nên $3^{x^2-9}+\left(x^2-9\right).5^{x+1}\ge 1$

$\Rightarrow$ không thỏa mãn bất phương trình đã cho, do đó bất phương trình vô nghiệm.

□Với $x^2-9<0\Leftrightarrow -3<x<3$, ta có $\begin{cases}3^{x^2-9}<3^0=1\\\left(x^2-9\right).5^{x+1}<0\end{cases}$ nên $3^{x^2-9}+\left(x^2-9\right).5^{x+1}<1$

$\Rightarrow$ Bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=(-3;3)$.

Khi đó, $a=-3;b=3$ nên $b-a=6$.

Câu 75: Có bao nhiêu giá trị nguyên của x trong đoạn $[0;2020]$ thỏa mãn bất phương trình sau $16^x+25^x+36^x\le 20^x+24^x+30^x$.

A. 3. **B.** 2000. **C.** 1. **D.** 1000.

Lời giải

Chọn C

Ta có $16^x+25^x+36^x\le 20^x+24^x+30^x \Leftrightarrow 4^{2x}+5^{2x}+6^{2x}\le 4^x.5^x+4^x.6^x+5^x.6^x$

$\Leftrightarrow 2\left[\left(4^x\right)^2+\left(5^x\right)^2+\left(6^x\right)^2\right]-\left(2.4^x.5^x+2.4^x.6^x+2.5^x.6^x\right)\le 0$

$\Leftrightarrow \left(4^x-5^x\right)^2+\left(4^x-6^x\right)^2+\left(5^x-6^x\right)^2\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases}4^x-5^x=0\\4^x-6^x=0\\5^x-6^x=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\left(\frac{4}{5}\right)^x=1\\\left(\frac{4}{6}\right)^x=1\\\left(\frac{5}{6}\right)^x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=0\in[0;2020]$.

Vậy có 1 giá trị nguyên của x trong đoạn $[0;2020]$ thỏa mãn bất phương trình.

Câu 76: Tập nghiệm của bất phương trình $(3^{2x}-9)(3^x-\frac{1}{27})\sqrt{3^{x+1}-1}\le 0$ chứa bao nhiêu số nguyên ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $3^{x+1}-1\ge 0\Leftrightarrow 3^{x+1}\ge 1\Leftrightarrow x\ge -1$.

Ta có $x=-1$ là một nghiệm của bất phương trình.

Với $x>-1$, bất phương trình tương đương với $(3^{2x}-9)(3^x-\frac{1}{27})\le 0$.

Đặt $t=3^x>0$, ta có $(t^2-9)(t-\frac{1}{27})\le 0\Leftrightarrow (t-3)(t+3)(t-\frac{1}{27})\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t\le -3\\ \frac{1}{27}\le t\le 3\end{array}\right.$. Kết hợp điều kiện $t=3^x>0$ ta được nghiệm $\frac{1}{27}\le t\le 3\Leftrightarrow \frac{1}{27}\le 3^x\le 3\Leftrightarrow -3\le x\le 1$. Kết hợp điều kiện $x>-1$ ta được $-1<x\le 1$ suy ra trường hợp này bất phương trình có 2 nghiệm nguyên.

Vậy bất phương trình đã cho có tất cả 3 nghiệm nguyên.

Câu 77: Tập nghiệm của bất phương trình $9^x-2\left(x+5\right).3^x+9\left(2x+1\right)\ge 0$ là

A. $[0;1]\cup[2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$. **C.** $[1;2]$. **D.** $(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$.

Lời giải

Đặt $3^x=t$, $t>0$.

Xét phương trình: $t^2-2\left(x+5\right)t+9\left(2x+1\right)=0$ (1).

Ta có $\Delta'=\left(x+5\right)^2-9\left(2x+1\right)=x^2-8x+16=\left(x-4\right)^2$ nên phương trình (1) luôn có nghiệm.

Nếu $x=4\Rightarrow \Delta'=0$ thì phương trình (1) có nghiệm kép $t=x+5$.

Do đó bất phương trình đã cho trở thành $3^x\ge x+5$.

Nếu $x\ne 4\Rightarrow \Delta'>0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\left[\begin{array}{l}t=2x+1\\t=9\end{array}\right.$.

Xét các phương trình $3^x=9\Leftrightarrow x=2$ (1) và $3^x=2x+1\Leftrightarrow 3^x-2x-1=0$ (2).

Đặt $f\left(x\right)=3^x-2x-1$; ta có $f'\left(x\right)=3^x\ln 3-2$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lại có $f(0)=f(1)=0$ và $f'(0)<0$, $f'(1)>0$ nên $f'(x)$ đổi dấu một lần duy nhất trong khoảng $[0;1]$.

Vậy phương trình (2) có đúng hai nghiệm $x=0$, $x=1$.

Lập bảng xét dấu cho (1) và (2) ta được tập nghiệm của bất phương trình là: $S=[0;1]\cup[2;+\infty)$.

Câu 78: Tập nghiệm của bất phương trình $2.7^{x+2}+7.2^{x+2}\le 351.\sqrt{14^x}$ có dạng là đoạn $S=[a;b]$. Giá trị $b-2a$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(3;\sqrt{10}\right)$. **B.** $(-4;2)$. **C.** $\left(\sqrt{7};4\sqrt{10}\right)$. **D.** $\left(\frac{2}{9};\frac{49}{5}\right)$.

Lời giải

$2.7^{x+2}+7.2^{x+2}\le 351.\sqrt{14^x}\Leftrightarrow 49.7^x+28.2^x\le 351.\sqrt{14^x}\Leftrightarrow 49.\sqrt{\frac{7^{2x}}{14^x}}+28.\sqrt{\frac{2^{2x}}{14^x}}\le 351$

$\Leftrightarrow 49.\sqrt{\frac{7^x}{2^x}}+28.\sqrt{\frac{2^x}{7^x}}\le 351$. Đặt $t=\sqrt{\frac{7^x}{2^x}}, t>0$ thì bpt trở thành $49t+\frac{28}{t}\le 351$

$\Leftrightarrow \frac{4}{49}\le t\le\frac{7}{2}\Rightarrow\frac{4}{49}\le\sqrt{\frac{7^x}{2^x}}\le\frac{7}{2}\Leftrightarrow -4\le x\le 2$, khi đó $S=[-4;2]$.

Giá trị $b-2a=10\in\left(\sqrt{7};4\sqrt{10}\right)$.

Câu 79: Bất phương trình $2.5^{x+2}+5.2^{x+2}\le 133.\sqrt{10^x}$ có tập nghiệm là $S=[a;b]$ thì biểu thức $A=1000b-4a+1$ có giá trị bằng

A. 3992. **B.** 4008. **C.** 1004. **D.** 2017.

Lời giải

Ta có: $2.5^{x+2}+5.2^{x+2}\le 133.\sqrt{10^x}\Leftrightarrow 50.5^x+20.2^x\le 133.\sqrt{10^x}$

$\Leftrightarrow 50.\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^x+20.\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^x-133\le 0$.

Đặt $t=\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^x$, $t>0$, ta được bất phương trình: $50t^2-133t+20\le 0\Leftrightarrow\frac{4}{25}\le t\le\frac{5}{2}$.

- Với $\frac{4}{25}\le t\le\frac{5}{2}$, ta có: $\frac{4}{25}\le\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^x\le\frac{5}{2}\Leftrightarrow -2\le\frac{x}{2}\le 1\Leftrightarrow -4\le x\le 2$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S=[-4;2]\Rightarrow a=-4$, $b=2$.

$\Rightarrow A=1000b-4a+1=1000.2-4(-4)+1=2017$.

DẠNG 4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT – MỨC ĐỘ 2-3

Sử dụng các phương pháp giải phương trình logarit đã đưa ra tại Chuyên đề 19. Phương trình mũ – logarit để giải

Câu 80: Tập nghiệm của bất phương trình $2\log_2(x-1)\le\log_2(5-x)+1$ là

A. $[3;5]$ **B.** $(1;3]$ **C.** $[1;3]$ **D.** $(1;5)$

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $1 < x < 5$.

Ta có $2\log_2(x-1) \le \log_2(5-x)+1 \Leftrightarrow \log_2(x-1)^2 \le \log_2[2(5-x)] \Leftrightarrow (x-1)^2 \le 10-2x$

$\Leftrightarrow x^2-9 \le 0 \Leftrightarrow -3 \le x \le 3$. Vậy tập nghiệm của bpt là $S=(1;3]$.

Câu 81: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $2\log_3(4x-3) \le \log_3(18x+27)$.

A. $S=\left[-\frac{3}{8};3\right]$. **B.** $S=\left(\frac{3}{4};3\right]$. **C.** $S=\left(\frac{3}{4};+\infty\right)$. **D.** $S=[3;+\infty)$.

Lời giải

$2\log_3(4x-3) \le \log_3(18x+27)(*)$.

Điều kiện: $\begin{cases} 4x-3>0 \\ 18x+27>0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{3}{4}$.

Với điều kiện trên, $(*) \Leftrightarrow \log_3(4x-3)^2 \le \log_3(18x+27)$

$\Leftrightarrow (4x-3)^2 \le 18x+27$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{8} \le x \le 3$.

Kết hợp điều kiện ta được $S=\left(\frac{3}{4};3\right]$.

Câu 82: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2^2(2x)+\log_2\frac{x}{4}<9$ chứa tập hợp nào sau đây?

A. $\left(\frac{3}{2};6\right)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(1;5)$. **D.** $\left(\frac{1}{2};2\right)$.

Lời giải

+ Điều kiện: $x>0$.
+ Ta có:

$\log_2^2(2x)+\log_2\frac{x}{4}<9 \Leftrightarrow (1+\log_2 x)^2+\log_2 x-2<9 \Leftrightarrow \log_2^2 x+3\log_2 x-10<0$

$\Leftrightarrow -5<\log_2 x<2 \Leftrightarrow \frac{1}{2^5}<x<4$

.

Vậy $x \in \left(\frac{1}{2^5};4\right)$ chứa tập $\left(\frac{1}{2};2\right)$.

Câu 83: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x) \ge 0$ là:

A. $(-\infty;4]$. **B.** $(1;4]$. **C.** $(1;4)$. **D.** $\left[4;\frac{11}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D

ĐK: $\begin{cases} x-1>0 \\ 11-2x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<\frac{11}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(1;\frac{11}{2}\right)$

Ta có $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x)\ge 0 \Leftrightarrow \log_3\frac{11-2x}{x-1}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{11-2x}{x-1}\ge 0 \Leftrightarrow x\in\left[1;\frac{11}{2}\right]$

Kết luận: $x\in\left(1;\frac{11}{2}\right)$. Vì $x\in\left[4;\frac{11}{2}\right)\subset\left(1;\frac{11}{2}\right)$. Ta chọn đáp án D

Câu 84: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x)\ge 0$ là

A. $(-\infty;4]$ **B.** $(1;4]$ **C.** $(1;4)$ **D.** $\left[4;\frac{11}{2}\right)$

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định: $1<x<\frac{11}{2}$.

Khi đó ta có: $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x)\ge 0 \Leftrightarrow \log_3(11-2x)\ge\log_3(x-1)\Leftrightarrow 11-2x\ge x-1>0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(1;4]$.

Câu 85: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x)\ge 0$ là:

A. $S=(-\infty;4]$. **B.** $S=(1;4)$. **C.** $S=(1;4]$. **D.** $S=\left(3;\frac{11}{2}\right)$.

Lời giải

$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x)\ge 0 \Leftrightarrow \log_3(11-2x)-\log_3(x-1)\ge 0$

$\Leftrightarrow \log_3(11-2x)\ge\log_3(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} 11-2x\ge x-1 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x\le 4$.

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S=(1;4]$.

Câu 86: Tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $2\log_2\sqrt{x+1}\le 2-\log_2(x-2)$ bằng

A. 12 **B.** 9 **C.** 5 **D.** 3

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $\begin{cases} x+1>0 \\ x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow x>2$

$$2\log_2 \sqrt{x+1} \le 2-\log_2 (x-2) \Leftrightarrow \log_2 (x+1) \le \log_2 \frac{4}{(x-2)} \Leftrightarrow x+1 \le \frac{4}{(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x-2-4}{x-2} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-x-6}{x-2} \le 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-2] \cup [2;3]$$

Suy ra nghiệm của bất phương trình là: $x \in (2;3]$.

Nghiệm nguyên là: $x=3$. Vậy tổng tất cả các nghiệm nguyên là 3

Câu 87: Tìm tất cả giá trị của tham số m để bất phương trình $\log(2x^2+3) > \log(x^2+mx+1)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

A. $-2<m<2$. **B.** $m<2\sqrt{2}$. **C.** $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$. **D.** $m<2$.

Lời giải

Ta có $\log(2x^2+3) > \log(x^2+mx+1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+mx+1>0 \\ 2x^2+3>x^2+mx+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+mx+1>0 \\ x^2-mx+2>0 \end{cases} (*)$$

Để bất phương trình $\log(2x^2+3) > \log(x^2+mx+1)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ thì hệ $(*)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 = m^2-4<0 \\ \Delta_2 = m^2-8<0 \end{cases} \Leftrightarrow -2<m<2.$$

Câu 88: Biết rằng bất phương trình $\log_2(5^x+2)+2.\log_{(5^x+2)} 2 > 3$ có tập nghiệm là $S=(\log_a b;+\infty)$, với a, b là các số nguyên dương nhỏ hơn 6 và $a \ne 1$. Tính $P=2a+3b$.

A. $P=7$. **B.** $P=11$. **C.** $P=18$. **D.** $P=16$.

Lời giải

Đặt $\log_2(5^x+2)=t$. Do $5^x+2>2$ với mọi x nên $\log_2(5^x+2)>\log_2 2=1$ hay $t>1$.

Bất phương trình đã cho trở thành: $t+\frac{2}{t}>3 \Leftrightarrow t^2-3t+2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<1 \\ t>2 \end{array}\right.$.

Đối chiếu với $t>1$ ta lấy $t>2$.

Khi đó $\log_2(5^x+2)>2 \Leftrightarrow 5^x>2 \Leftrightarrow x>\log_5 2$.

Vậy bất phương trình có nghiệm là $S=(\log_5 2;+\infty)$, ta có $a=5,\ b=2 \Rightarrow 2a+3b=16$.

Câu 89: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x - 5\log_2 x - 6 \le 0$ là

A. $S=\left[\frac{1}{2};64\right]$.

B. $S=\left(0;\frac{1}{2}\right]$.

C. $S=\left[64;+\infty\right)$.

D. $S=\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup\left[64;+\infty\right)$.

Lời giải

$\log_2^2 x-5\log_2 x-6\le 0\ (1)$

ĐK: $x>0\ (*)$

Đặt $t=\log_2 x\ (2)$

(1) thành $t^2-5t-6\le 0\Leftrightarrow -1\le t\le 6\overset{(2)}{\Leftrightarrow}-1\le \log_2 x\le 6\Leftrightarrow \frac{1}{2}\le x\le 64$

So với $(*)$: $(1)\Leftrightarrow \frac{1}{2}\le x\le 64$

Vậy $S=\left[\frac{1}{2};64\right]$.

Câu 90: Bất phương trình $\left(x^3-9x\right)\ln\left(x+5\right)\le 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x>-5$.

Cho $\left(x^3-9x\right)\ln\left(x+5\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^3-9x=0\\ \ln\left(x+5\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-3\\ x=0\\ x=3\\ x=-4\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	-5		-4		-3		0		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $f\left(x\right)\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-4\le x\le -3\\ 0\le x\le 3\end{array}\right.$.

Vì $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\left\{-4;-3;0;1;2;3\right\}$.

Vậy có 6 giá trị nguyên của x thỏa bài toán.

Câu 91: Tính tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2\left(x^2+3\right)-\log_2 x+x^2-4x+1\le 0$.

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x>0$.

Ta có

$\log_2\left(x^2+3\right)-\log_2 x+x^2-4x+1\le 0\Leftrightarrow \log_2\left(x^2+3\right)+x^2+3\le \log_2 4x+4x\ (*)$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=\log_2 t+t$ trên $D=\left(0;+\infty\right)$. Ta có

$f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0\ \forall t\in D\Rightarrow$ hàm số f đồng biến trên D.

Suy ra

$(*)\Leftrightarrow f\left(x^2+3\right)\le f\left(4x\right)\Leftrightarrow x^2+3\le 4x\Leftrightarrow 1\le x\le 3$.

Vậy tập hợp các nghiệm nguyên của bất phương trình là $\{1;\ 2;\ 3\}$.

Nhận xét: Với cách hỏi và đáp án của câu này ta chỉ cần mở MODE 7 của máy tính cầm tay, nhập vế trái của bất phương trình và cho biến chạy từ 1 đến 6 là tìm được đáp án ngay.

Câu 92: Biết bất phương trình $\log_2\left(\dfrac{x^2+x+1}{16x+3}\right)+\left(\sqrt{x}-2\right)^2+x\le 1$ có tập nghiệm là $S=\left(a;b\right)$. Hãy tính tổng $T=20a+10b$.

A. $T=45-10\sqrt{2}$. **B.** $T=46-10\sqrt{2}$. **C.** $T=46-11\sqrt{2}$. **D.** $T=47-11\sqrt{2}$.

Lời giải:

Chọn A

Điều kiện: $x\ge 0$.

$$\log_2\left(\frac{x^2+x+1}{16x+3}\right)+\left(\sqrt{x}-2\right)^2+x\le 1\Leftrightarrow \log_2\left(x^2+x+1\right)-\log_2\left(16x+3\right)+2x-4\sqrt{x}+3\le 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)+2\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}\right)\le \log_2\left(\left(2\sqrt{x}\right)^2+\frac{3}{4}\right)+2\left(2\sqrt{x}+\frac{3}{4}\right)$$

Xét hàm số $f\left(t\right)=\log_2\left(t^2+\dfrac{3}{4}\right)+2\left(t+\dfrac{3}{4}\right)$ với $t\ge 0$ có $f'\left(t\right)=\dfrac{2t}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)\ln 2}+2>0,\ \forall t\ge 0$

nên $f\left(t\right)$ đồng biến trên khoảng $\left[0;+\infty\right)$.

Suy ra $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{3}{4}\le 2\sqrt{x}+\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow 2\sqrt{x}\ge x+\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0\\ x^2-3x+\dfrac{1}{4}\le 0\end{cases}\Leftrightarrow \dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}\le x\le \dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow a=\frac{3-2\sqrt{2}}{2};b=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\Rightarrow T=20a+10b=45-10\sqrt{2}$$

Câu 93: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(10-3^{x+1}\right)\ge 1-x$ chứa tất cả bao nhiêu số nguyên?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_3\left(10-3^{x+1}\right)\ge 1-x\Leftrightarrow 10-3^{x+1}\ge 3^{1-x}\Leftrightarrow 3.3^x+\dfrac{3}{3^x}-10\le 0$.

Giải ta có $\dfrac{1}{3}\le 3^x\le 3\Leftrightarrow -1\le x\le 1$. Vậy có 3 số nguyên thuộc tập nghiệm của bất phương trình.

Câu 94: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2 x + \log_3 x \ge 1 + \log_2 x.\log_3 x$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Điều kiện xác định: $x > 0$.

Ta có: $\log_2 x + \log_3 x \ge 1 + \log_2 x.\log_3 x \Leftrightarrow (\log_2 x - 1)(\log_3 x - 1) \le 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_2 x - 1 \le 0 \\ \log_3 x - 1 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2 x - 1 \ge 0 \\ \log_3 x - 1 \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x \le 2 \\ x \ge 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 2 \\ 0 < x \le 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 2 \le x \le 3.$$

Do đó có 2 nghiệm nguyên thỏa mãn.

Câu 95: Bất phương trình $\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{3x-7}{x+3}\right) \ge 0$ có tập nghiệm là $(a;b]$. Tính giá trị $P = 3a - b$.

A. $P = 5$. **B.** $P = 4$. **C.** $P = 10$. **D.** $P = 7$.

Lời giải

$$\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-7}{x+3}\right) \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x-7}{x+3} > 0 \\ \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{3x-7}{x+3} > 0 \\ \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{3x-7}{x+3} \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x-7}{x+3} > 0 \\ \dfrac{3x-7}{x+3} < 1 \\ \dfrac{3x-7}{x+3} \le \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x-7}{x+3} > 0 \\ \dfrac{3x-7}{x+3} \le \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x-7}{x+3} > 0 \\ \dfrac{8(x-3)}{3(x+3)} \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -3) \cup \left(\dfrac{7}{3}; +\infty\right) \\ \dfrac{8(x-3)}{3(x+3)} < 0 x \in [-3;3] \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{7}{3}; 3\right].$$

Suy ra $a = \dfrac{7}{3}$; $b = 3$. Vậy $P = 3a - b = 3.\dfrac{7}{3} - 3 = 4$.

Câu 96: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(-\log_2 x) < 0$ là

A. $(0;5)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{4};4\right)$. **D.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x > 0 \\ -\log_2 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 1 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 1$

$$\log_{\frac{1}{3}}(-\log_2 x) < 0 \Leftrightarrow -\log_2 x > 1 \Leftrightarrow \log_2 x < -1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

So sánh điều kiện, suy ra $S = \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 97: Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $\log^2_{\sqrt{5}} x^5 - 25\log_{\sqrt{5}} x^2 - 75 \le 0$ là

A. 70 . **B.** 64 . **C.** 62 . **D.** 66 .

Lời giải

Điều kiện $x>0$.

$\log_{\sqrt{5}}^2 x^5 - 25\log_{\sqrt{5}} x^2 - 75 \le 0 \Leftrightarrow 4\log_5^2 x - 4\log_5 x - 3 \le 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le \log_5 x \le \frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{\sqrt{5}} \le x \le \sqrt{125}$. Nghiệm nguyên của bất phương trình là: $0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11$.

$S = 1+2+...+11 = \frac{11.(11+1)}{2} = 66$.

Câu 98: Cho bất phương trình $(\log x+1)(4-\log x)>0$. Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn bất phương trình trên.

A. 10000. **B.** 10001. **C.** 9998. **D.** 9999.

Lời giải

$(\log x+1)(4-\log x)>0 \ (1)$

Điều kiện: $x>0$.

Khi ấy $(1) \Leftrightarrow -1<\log x<4 \Leftrightarrow \frac{1}{10}<x<10000$. Vì $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{1;2;3;...;9999\}$

Vậy có tất cả 9999 số nguyên x thoả mãn bất phương trình trên.

CHƯƠNG II

HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

6. BẤT PHƯƠNG TRÌNH – MŨ – LOGARIT

MỨC ĐỘ VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

III. HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT CHỨA THAM SỐ

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_{0,02}\left(\log_2\left(3^x+1\right)\right)>\log_{0,02}m$ có nghiệm với mọi $x\in(-\infty;0)$

A. $m\geq 1$. **B.** $0<m<1$. **C.** $m>1$. **D.** $m<2$.

Lời giải

Đk: $x\in\mathbb{R};m>0$.

Ta có: $\log_{0,02}\left(\log_2\left(3^x+1\right)\right)>\log_{0,02}m,\forall x\in(-\infty;0)$.

$\Leftrightarrow \log_2\left(3^x+1\right)<m,\forall x\in(-\infty;0)$.

$\Leftrightarrow 3^x+1<2^m,\forall x\in(-\infty;0)$.

Xét hàm $f(x)=3^x+1$ trên $(-\infty;0)$. Ta có $f'(x)=3^x.\ln 3>0,\forall x\in(-\infty;0)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0
y'		$+$	
y	1	$\nearrow$	2

Để phương trình có nghiệm với mọi $x\in(-\infty;0)$ ta phải có $2^m\geq 2 \Leftrightarrow m\geq 1$.

Câu 2: Gọi S là tổng tất cả các giá trị nguyên của m để bất phương trình $\ln\left(7x^2+7\right)\geq \ln\left(mx^2+4x+m\right)$ nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$. Tính S.

A. $S=14$. **B.** $S=0$. **C.** $S=12$. **D.** $S=35$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$\ln\left(7x^2+7\right)\geq \ln\left(mx^2+4x+m\right)\Leftrightarrow\begin{cases}7x^2+7\geq mx^2+4x+m\\ mx^2+4x+m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(7-m)x^2-4x+7-m\geq 0\ (1)\\ mx^2+4x+m>0\ (2)\end{cases}$$

Bất phương trình đã cho đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi các bất phương trình $(1),(2)$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Xét $(7-m)x^2-4x+7-m\geq 0\ (1)$.

+ Khi $m=7$ ta có (1) trở thành $-4x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 0$. Do đó $m=7$ không thỏa mãn.

+ Khi $m\neq 7$ ta có (1) đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}7-m>0\\ \Delta'\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<7\\ 4-(7-m)^2\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<7\\ m\leq 5\vee m\geq 9\end{cases}\Leftrightarrow m\leq 5\ (*).$$

Xét $mx^2-4x+m>0\ (2)$.

+ Khi $m=0$ ta có (2) trở thành $-4x>0\Leftrightarrow x<0$. Do đó $m=0$ không thỏa mãn.

+ Khi $m\neq 0$ ta có (2) đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ \Delta'<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ 4-m^2<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ m<-2\vee m>2\end{cases}\Leftrightarrow m>2\ (**).$$

Từ $(*)$ và $(**)$ ta có $2<m\leq 5$. Do $m\in Z$ nên $m\in\{3;4;5\}$. Từ đó $S=3+4+5=12$.

Câu 3: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để bất phương trình $\log_2\left(7x^2+7\right)\geq\log_2\left(mx^2+4x+m\right)$ nghiệm đúng với mọi x.

A. 5 **B.** 4 **C.** 0 **D.** 3

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Bpt: $\log_2\left(7x^2+7\right)\geq\log_2\left(mx^2+4x+m\right)\Leftrightarrow\begin{cases}7x^2+7\geq mx^2+4x+m\\ mx^2+4x+m>0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=(m-7)x^2+4x+m-7\leq 0\\ g(x)=mx^2+4x+m>0\end{cases}$$

Bpt đã cho nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\leq 0\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}\\ g(x)>0\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$

• Trường hợp 1: $m=7$

$$\begin{cases} f(x) \le 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x \le 0 \\ 7x^2 + 4x + 7 > 0 \end{cases}$$

Vậy $m = 7$ không thỏa yêu cầu bài toán.

• Trường hợp 2: $m = 0$

$$\begin{cases} f(x) \le 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7x^2 + 4x - 7 \le 0 \\ 4x > 0 \end{cases}$$

Vậy $m = 0$ không thỏa yêu cầu bài toán.

• Trường hợp 3: $m \ne 0;\ m \ne 7$

Khi đó: $\begin{cases} f(x) \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \\ g(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_f < 0 \\ \Delta'_f \le 0 \\ a_g > 0 \\ \Delta'_g < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 7 < 0 \\ 4 - (m-7)^2 \le 0 \\ m > 0 \\ 4 - m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 7 \\ m \le 5 \vee m \ge 9 \\ m > 0 \\ m < -2 \vee m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \le 5$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{3;4;5\}$.

Cách 2:

$$\log_2(7x^2 + 7) \ge \log_2(mx^2 + 4x + m) \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2 + 7 \ge mx^2 + 4x + m \\ mx^2 + 4x + m > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-7)x^2 + 4x + m - 7 \le 0 \\ mx^2 + 4x + m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2 - 4x + 7 \ge m(x^2+1) \\ m(x^2+1) > -4x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7x^2 - 4x + 7}{x^2+1} \ge m \\ m > \dfrac{-4x}{x^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 + \dfrac{-4x}{x^2+1} \ge m \\ m > \dfrac{-4x}{x^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 7 \le \dfrac{-4x}{x^2+1} \\ m > \dfrac{-4x}{x^2+1} \end{cases}$$

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{-4x}{x^2+1}$ trên $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = \frac{-4(x^2+1) + 4x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^2 - 4}{(x^2+1)^2}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

Vậy đk $\Leftrightarrow \begin{cases} m-7\le -2 \\ m>2 \end{cases} \Leftrightarrow\ 2<m\le 5$

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{3;4;5\}$.

Câu 4: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{\frac{1}{2}}\left(x^3+x-m\right)$ có nghiệm.

A. $m\le 2$. **B.** $m\in\mathbb{R}$.
C. $m<2$. **D.** Không tồn tại m.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $\begin{cases} x>1 \\ x^3+x-m>0 \end{cases}$.

Phương trình tương đương

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{\frac{1}{2}}\left(x^3+x-m\right)\Leftrightarrow x-1<x^3+x-m\Leftrightarrow x^3+1>m$$

Khi đó ta có

$$f(x)=x^3+1>m,(x>1)\Leftrightarrow m<\min_{(1;+\infty)}f(x)$$

Ta có

$$f'(x)=3x^2=0\Rightarrow x=0\notin(1;+\infty)$$

Bảng biến thiên

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên và đề bài hỏi "có nghiệm" nên ta chọn $m\in\mathbb{R}$.

Câu 5: Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để bất phương trình $\log_2\left(x^2+mx+m+2\right)\ge\log_2\left(x^2+2\right)$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta thấy $x^2+2>0\ \forall x\in\mathbb{R}$

Do đó bất phương trình

$\log_2\left(x^2+mx+m+2\right)\ge\log_2\left(x^2+2\right)\Leftrightarrow x^2+mx+m+2\ge x^2+2\Leftrightarrow mx+m\ge 0$.

Bất phương trình $\log_2\left(x^2+mx+m+2\right)\ge\log_2\left(x^2+2\right)$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $mx+m\ge0\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m=0$

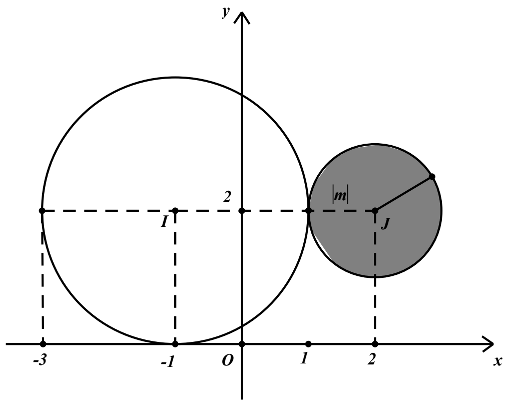
Câu 6: Tìm tập S tất cả các giá trị thực của số m để tồn tại duy nhất cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}\left(4x+4y-6+m^2\right)\ge1$ và $x^2+y^2+2x-4y+1=0$.

A. $S=\{-5;-1;1;5\}$. **B.** $S=\{-1;1\}$.

C. $S=\{-5;5\}$. **D.** $S=\{-7-5;-1;1;5;7\}$.

Lời giải

Chọn A



Nhận thấy $x^2+y^2+2>1$ với mọi $x,y\in\mathbb{R}$ nên:

$\log_{x^2+y^2+2}\left(4x+4y-6+m^2\right)\ge1\Leftrightarrow 4x+4y-6+m^2\ge x^2+y^2+2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-4x-4y+8-m^2\le0\Leftrightarrow(x-2)^2+(y-2)^2\le m^2$.

Khi $m=0$ thì $\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$. Cặp $(2;2)$ không là nghiệm của phương trình $x^2+y^2+2x-4y+1=0$.

Khi $m\ne0$, tập hợp các điểm $(x;y)$ thỏa mãn là hình tròn tâm $J(2;2)$, bán kính là $|m|$.

Trường hợp này, yêu cầu bài toán trở thành tìm m để đường tròn tâm $I(-1;2)$, bán kính 2 và hình tròn tâm $J(2;2)$, bán kính $|m|$ có đúng một điểm chung

Điều này xảy ra khi $\left[\begin{array}{l}|m|=1\\|m|=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\pm1\\m=\pm5\end{array}\right.$.

Vậy $S=\{-5;-1;1;5\}$.

Câu 7: Xét bất phương trình $\log_2^2(2x)-2(m+1)\log_2x-2<0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

A. $m\in\left(-\frac{3}{4};0\right)$. **B.** $m\in(0;+\infty)$. **C.** $m\in(-\infty;0)$. **D.** $m=\in\left(-\frac{3}{4};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn D

Bất phương trình $\log_2^2(2x)-2(m+1)\log_2x-2<0\Leftrightarrow\log_2^2x-2m\log_2x-1<0\ (1)$.

Đặt $t=\log_2 x$, vì $x\in\left(\sqrt{2};+\infty\right)\Rightarrow t\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Bất phương trình trở thành $t^2-2mt-1<0\Leftrightarrow 2mt>t^2-1\Leftrightarrow 2m>\frac{t^2-1}{t}\ (2)$.

Đặt $f(t)=\frac{t^2-1}{t}$ với $t\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Bất phương trình (1) có nghiệm thuộc khoảng $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$ khi và chỉ khi bất phương trình (2) có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Ta có $f'(t)=1+\frac{1}{t^2}>0\ \ \forall t\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Bảng biến thiên

x	$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra bất phương trình đã cho có nghiệm thuộc khoảng $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$ khi và chỉ khi $2m>-\frac{3}{2}\Leftrightarrow m>-\frac{3}{4}$.

Câu 8: Cho bất phương trình $\log_7\left(x^2+2x+2\right)+1>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để bất phương trình có tập nghiệm chứa khoảng $(1;3)$?

A. 36. **B.** 34. **C.** 35. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$\log_7\left(x^2+2x+2\right)+1>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right),\ \forall x\in(1;3)$

$\Leftrightarrow \log_7\left(7x^2+14x+14\right)>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right),\ \forall x\in(1;3)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+6x+5+m>0,\forall x\in(1;3)\\ 6x^2+8x+9>m,\forall x\in(1;3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-\left(x^2+6x+5\right),\forall x\in(1;3)\ (1)\\ 6x^2+8x+9>m,\forall x\in(1;3)\quad (2)\end{cases}$$

Xét $g(x)=-\left(x^2+6x+5\right),x\in(1;3)$, có $g(x)=-(x+3)^2+4<-(1+3)^2+4=-12,\forall x\in(1;3)$

Do đó $(1)\Leftrightarrow m\geq -12$.

Xét $h(x)=6x^2+8x+9,x\in(1;3)$, có $h(x)>6.1^2+8.1+9=23,\forall x\in(1;3)$.

Do đó $(2) \Leftrightarrow m \le 23$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-12;23]$ nên ta được tập các giá trị của m là $\{-12;-11;-10;...;23\}$.

Vậy có tổng cộng 36 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 9: Gọi S là tập hợp tất cả các điểm $M(x;y)$ trong đó x, y là các số nguyên thoả mãn điều kiện $\log_{x^2+y^2+1}(2x+2y+m) \ge 1$, với m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2020;2019]$ để tập S có không quá 5 phần tử?

A. 1. **B.** 2020. **C.** 2021. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn C

$\log_{x^2+y^2+1}(2x+2y+m) \ge 1 \Leftrightarrow 2x+2y+m \ge x^2+y^2+1$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2 \le m+1$ Để bất phương trình có 5 phần tử thì $\sqrt{m+1} < \sqrt{2} \Leftrightarrow m < 1$

Vậy có 2021 số nguyên m thuộc đoạn $[-2020;2019]$ để tập S có không quá 5 phần tử.

Câu 10: Có bao nhiêu số nguyên m sao cho bất phương trình $\ln 5+\ln(x^2+1) \ge \ln(mx^2+4x+m)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Ta có bất phương trình $\ln 5+\ln(x^2+1) \ge \ln(mx^2+4x+m) \Leftrightarrow \ln(5x^2+5) \ge \ln(mx^2+4x+m)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2+5 \ge mx^2+4x+m \\ mx^2+4x+m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2+5-4x \ge m(x^2+1) \\ m(x^2+1) > -4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le \dfrac{5x^2+5-4x}{x^2+1} = f(x) \\ m > \dfrac{-4x}{x^2+1} = g(x) \end{cases}.$$

Hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	5	$\nearrow$	7	$\searrow$	3	$\nearrow$	5

Hàm số $g(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

Từ bảng biến thiên suy ra để bất phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi $2 < m \le 3$.

Vậy có 1 giá trị nguyên của m.

DẠNG 2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ CHỨA THAM SỐ

Câu 11: Bất phương trình $4^x - (m+1)2^{x+1} + m \ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x \ge 0$. Tập tất cả các giá trị của m là

A. $(-\infty;12)$. **B.** $(-\infty;-1]$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $(-1;16]$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 2^x$. ĐK: $t \ge 1$

BPT $\Leftrightarrow t^2 - 2(m+1)t + m \ge 0 \Leftrightarrow (2t-1)m \le t^2 - 2t \Leftrightarrow m \le \dfrac{t^2-2t}{2t-1} = g(t) \Leftrightarrow m \le \min g(t)$

Ta có $g'(t) = \dfrac{2t^2-2t+2}{(2t-1)^2} > 0, \forall t \ge 1 \Rightarrow Min\, g(t) = g(1) = -1 \Rightarrow m \in (-\infty;-1]$

Câu 12: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $4^{x-1} - m(2^x+1) > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. $m \in (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$. **B.** $m \in (-\infty;0]$.

C. $m \in (0;+\infty)$. **D.** $m \in (0;1)$.

Lời giải

Bất phương trình $4^{x-1} - m(2^x+1) > 0$ (1).

Đặt $t = 2^x$, $t > 0$.

Bất phương trình trở thành: $\dfrac{1}{4}t^2 - m(t+1) > 0 \Leftrightarrow t^2 - 4mt - 4m > 0$ (2).

Đặt $f(t) = t^2 - 4mt - 4m$.

Đồ thị hàm số $y = f(t)$ có đồ thị là một Parabol với hệ số a dương, đỉnh $I(2m;-4m^2-4m)$.

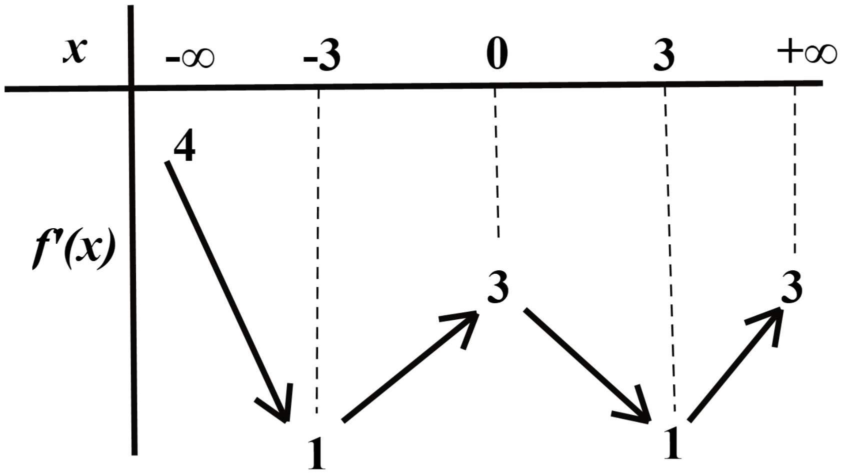
Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ Bất phương trình (2) nghiệm đúng với mọi $t > 0$ hay $f(t) > 0,\ \forall t > 0$.

TH1: $m \le 0 \Rightarrow f(0) = -4m \ge 0 \Rightarrow m \le 0$ thỏa mãn.

TH2: $m > 0 \Rightarrow -4m^2 - 4m < 0$ nên $m > 0$ không thỏa mãn.

Vậy $m \le 0$.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Bất phương trình $f(x) < 3.e^{x+2} + m$ có nghiệm $x \in (-2;2)$ khi và chỉ khi:

A. $m \ge f(-2) - 3$ **B.** $m > f(-2) - 3e^4$ **C.** $m \ge f(2) - 3e^4$ **D.** $m > f(-2) - 3$

Lời giải

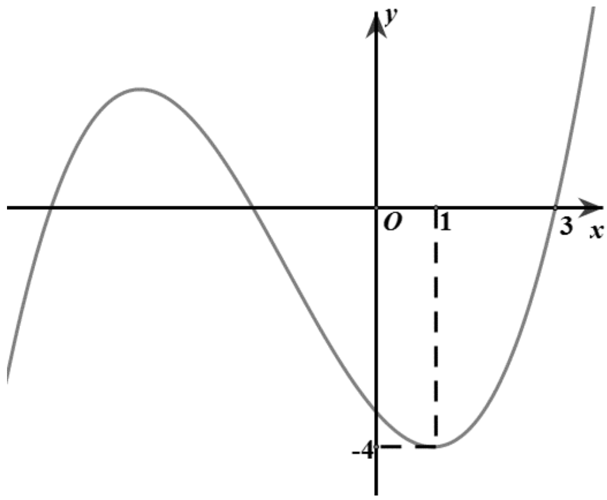
Bất phương trình tương đương với $m > g(x) = f(x) - 3.e^{x+2}$.

Ta có $g'(x) = f'(x) - 3.e^{x+2} < 3 - 3.e^{-2+2} = 0, \forall x \in (-2;2)$.

Do đó $g(x) > g(2) = f(2) - 3.e^4, \forall x \in (-2;2)$.

Vậy $m > f(2) - 3.e^4$ thì phương trình có nghiệm trên khoảng $(-2;2)$.

Câu 14: Cho hàm số bậc 3 $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Bất phương trình $f(e^x) < m(3e^x + 2019)$ có nghiệm $x \in (0;1)$ khi và chỉ khi

A. $m > -\dfrac{4}{1011}$. **B.** $m \ge -\dfrac{4}{3e + 2019}$. **C.** $m > -\dfrac{2}{1011}$. **D.** $m > \dfrac{f(e)}{3e + 2019}$.

Lời giải

Đặt $t = e^x \ \ (t > 0)$. Bất phương trình có dạng: $f(t) < m(3t + 2019) \Leftrightarrow \dfrac{f(t)}{3t + 2019} < m$.

Ta có: $x \in (0;1) \Leftrightarrow t = e^x \in (1;e)$.

Xét hàm $g(t) = \dfrac{f(t)}{3t + 2019}$ có $g'(t) = \dfrac{f'(t)(3t + 2019) - 3f(t)}{(3t + 2019)^2}$.

Dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$, ta thấy: $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;e)$ và $f(x) < 0$ $\forall x \in (1;e) \Rightarrow \begin{cases} f(x) < 0 \\ f'(x) > 0 \end{cases} \forall x \in (1;e)$.

$\Rightarrow g'(t) > 0 \ \ \forall t \in (1;e) \Rightarrow g(t)$ đồng biến trên khoảng $(1;e) \Rightarrow g(1) < g(t) < g(e) \ \ \forall t \in (1;e)$.

Vậy bất phương trình $f(e^x) < m(3e^x + 2019)$ có nghiệm $x \in (0;1)$

$\Leftrightarrow$ Bất phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{f(t)}{3t + 2019} < m$ có nghiệm $t \in (1;e) \Leftrightarrow m > g(1) = -\dfrac{4}{2022} = -\dfrac{2}{1011}$.

Câu 15: Tất cả giá trị của tham số thực m sao cho bất phương trình $9^x - 2(m+1).3^x - 3 - 2m > 0$ có nghiệm đúng với mọi số thực x là

A. $m \le -\dfrac{3}{2}$. **B.** $m \ne 2$. **C.** $m < -\dfrac{3}{2}$. **D.** $m \in \varnothing$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $9^x - 2(m+1).3^x - 3 - 2m > 0$

$\Leftrightarrow (3^x)^2 - 2.3^x - 3 > (3^x + 1).2m$

$\Leftrightarrow (3^x + 1)(3^x - 3) > (3^x + 1).2m$

$\Leftrightarrow 3^x - 3 > 2m \Leftrightarrow 3^x > 3 + 2m$

Vậy, để $9^x - 2(m+1).3^x - 3 - 2m > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ khi $3 + 2m \le 0 \Leftrightarrow m \le -\dfrac{3}{2}$.

Câu 16: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tập nghiệm của bất phương trình $(3^{x+2} - \sqrt{3})(3^x - 2m) < 0$ khác rỗng và chứa không quá 9 số nguyên?

A. 3281. **B.** 3283. **C.** 3280. **D.** 3279.

Lời giải

Chọn C

Do m là số nguyên dương nên 2m >1 => $\log_3 2m > 0$.

$3^{x+2} - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 3^{x+2} = 3^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$

$3^x - 2m = 0 \Leftrightarrow x = \log_3 2m$.

Lập bảng biến thiên, ta kết luận: tập nghiệm bất phương trình này là $\left(-\frac{3}{2}; \log_3 2m\right)$

Suy ra, $\log_3 2m \le 8 \Leftrightarrow 2m \le 3^8 \Leftrightarrow m \le \frac{6561}{2} = 3280.5$ =>

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Bất phương trình $f(x) > 2^x + m$ đúng với mọi $x \in (-1;1)$ khi và chỉ khi:

A. $m > f(1) - 2$. **B.** $m \le f(1) - 2$. **C.** $m \le f(-1) - \frac{1}{2}$. **D.** $m > f(-1) - \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$f(x) > 2^x + m$, $\forall x \in (-1;1) \Leftrightarrow f(x) - 2^x > m \Leftrightarrow f(x) - 2^x > m$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - 2^x$ trên $(-1;1)$.

Ta có: $g'(x) = f'(x) - 2^x.\ln 2$.

Ta thấy: $\forall x \in (-1;1)$ thì $f'(x) \le 0$ và $2^x.\ln 2 > 0$.

Do đó $g'(x) = f'(x) - 2^x.\ln 2 < 0$, $\forall x \in (-1;1)$.

Bảng biến thiên

x	-1		1
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$g(-1)$	$\searrow$	$g(1)$

Từ bảng biến thiên ta có: $m \le g(1) \Leftrightarrow m \le f(1) - 2$.

Câu 18: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\left(3^{x^2-x} - 9\right)\left(2^{x^2} - m\right) \le 0$ có 5 nghiệm nguyên?

A. 65021. **B.** 65024. **C.** 65022. **D.** 65023.

Lời giải

Chọn B

$\left(3^{x^2-x} - 9\right)\left(2^{x^2} - m\right) \le 0$

Th1: Xét $3^{x^2-x} - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$ là nghiệm của bất phương trình.

Th2: Xét $3^{x^2-x}-9>0 \Leftrightarrow x^2-x>2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>2 \end{array}\right.$.

Khi đó, (1) $\Leftrightarrow 2^{x^2} \le m \Leftrightarrow x^2 \le \log_2 m$ (2)

Nếu $m<1$ thì vô nghiệm.

Nếu $m \ge 1$ thì (2) $\Leftrightarrow -\sqrt{\log_2 m} \le x \le \sqrt{\log_2 m}$.

Do đó, có 5 nghiệm nguyên $\Leftrightarrow \left((-\infty;-1)\cup(2;+\infty)\right)\cap\left[-\sqrt{\log_2 m};\sqrt{\log_2 m}\right]$ có 3 giá trị nguyên $\sqrt{\log_2 m}\in[3;4) \Leftrightarrow 512 \le m < 65536$. Suy ra có 65024 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Th3: Xét $3^{x^2-x}-9<0 \Leftrightarrow x^2-x<2 \Leftrightarrow -1<x<2$. Vì $(-1;2)$ chỉ có hai số nguyên nên không có giá trị m nào để bất phương trình có 5 nghiệm nguyên.

Vậy có tất cả 65024 giá trị m nguyên thỏa ycbt.

DẠNG 3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH NHIỀU ẨN

Câu 19: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn $\log_4\left(x^2+y\right) \ge \log_3(x+y)$?

A. 59. **B.** 58. **C.** 116. **D.** 115.

Lời giải

Chọn C

Với mọi $x\in\mathbb{Z}$ ta có $x^2 \ge x$.

Xét hàm số $f(y)=\log_3(x+y)-\log_4\left(x^2+y\right)$.

Tập xác định $\mathrm{D}=(-x;+\infty)$.

$$f'(y)=\frac{1}{(x+y)\ln 3}-\frac{1}{\left(x^2+y\right)\ln 4}\ge 0,\ \forall x\in D$$

$\Rightarrow f$ tăng trên D.

Ta có $f(-x+1)=\log_3(x-x+1)-\log_4\left(x^2-x+1\right)\le 0$.

Có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn $f(y)\le 0$

$\Leftrightarrow f(-x+729)>0 \Leftrightarrow \log_3 729-\log_4\left(x^2-x+729\right)>0$

$\Leftrightarrow x^2-x+729-4^6<0 \Leftrightarrow x^2-x-3367<0$

$\Leftrightarrow -57,5\le x\le 58,5$

Mà $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{-57,-56,...,58\}$.

Vậy có $58-(-57)+1=116$ số nguyên x thỏa.

Câu 20: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 242 số nguyên y thỏa mãn $\log_4\left(x^2+y\right)\ge\log_3(x+y)$?

A. 55. **B.** 28. **C.** 29. **D.** 56.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases} x^2+y>0 \\ x+y>0 \end{cases}$.

Đặt $\log_3(x+y)=t$, ta có $\begin{cases} x^2+y\geq 4^t \\ x+y=3^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x^2-x\geq 4^t-3^t} \ (*) \\ y=3^t-x \end{cases}$.

Nhận xét rằng hàm số $f(t)=4^t-3^t$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ và $f(t)>0$ với mọi $t>0$

Gọi $n\in\mathbb{Z}$ thỏa $4^n-3^n=x^2-x$, khi đó $(*)\Leftrightarrow \boxed{t\leq n}$

Từ đó, ta có $-x<y=3^t-x\leq 3^n-x$.

Mặt khác, vì có không quá 242 số nguyên y thỏa mãn đề bài nên $3^n\leq 242\Leftrightarrow n\leq \log_3 242$.

Từ đó, suy ra $\boxed{x^2-x\leq 4^{\log_3 242}-242} \Leftrightarrow \boxed{-27,4\leq x\leq 28,4}$.

Mà $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{-27,-26,...,27,28\}$.

Vậy có 56 giá trị nguyên của x thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 21: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 127 số nguyên y thỏa mãn $\log_3(x^2+y)\geq\log_2(x+y)$?

A. 89. **B.** 46. **C.** 45. **D.** 90.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_3(x^2+y)\geq\log_2(x+y)(1)$

Đặt $t=x+y\in\mathbb{N}^*$

$(1)\Leftrightarrow \log_3(x^2-x+t)\geq\log_2 t\Leftrightarrow g(t)=\log_2 t-\log_3(x^2-x+t)\leq 0(2)$

Đạo hàm $g'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}-\dfrac{1}{(x^2-x+t)\ln 3}>0$ với mọi y. Do đó $g(t)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$

Vì mỗi x nguyên có không quá 127 giá trị $t\in\mathbb{N}^*$ nên ta có

$g(128)>0\Leftrightarrow \log_2 128-\log_3(x^2-x+128)>0$

$\Leftrightarrow \quad x^2-x+128<3^7\Leftrightarrow -44,8\leq x\leq 45,8$

Như vậy có 90 giá trị thỏa yêu cầu bài toán

Câu 22: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 255 số nguyên y thỏa mãn $\log_3(x^2+y)\geq\log_2(x+y)$?

A. 80. **B.** 79. **C.** 157. **D.** 158

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_3\left(x^2+y\right)\ge \log_2\left(x+y\right)\Leftrightarrow x^2+y\ge 3^{\log_2(x+y)}\;\Leftrightarrow x^2+y\ge\left(x+y\right)^{\log_2 3}\;(1)$

Đk: $x+y\ge 1$

Đặt $t=x+y\ge 1$, nên từ $(1)\Rightarrow x^2-x\ge t^{\log_2 3}-t\;\;(2)$

Để (1) không có quá 255 nghiệm nguyên y khi và chỉ khi bất phương trình (2) có không quá 255 nghiệm nguyên dương t.

Đặt $M=f\left(255\right)$ với $f\left(t\right)=t^{\log_2 3}-t$.

Vì f là hàm đồng biến trên $\left[1,+\infty\right)$ nên $(2)\Leftrightarrow\; 1\le t\le f^{-1}\left(x^2-x\right)$ khi $x^2-x\ge 0$.

Vậy (2) có không quá 255 nghiệm nguyên $\Leftrightarrow f^{-1}\left(x^2-x\right)\le 255\Leftrightarrow x^2-x\le 255$

$\Leftrightarrow -78\le x\le 79\;\;\left(x\in\mathbb{Z}\right)$.

Vậy có 158 số nguyên x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 23: Trong tất cả các cặp $\left(x;y\right)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}\left(4x+4y-4\right)\ge 1$. Tìm m để tồn tại duy nhất cặp $\left(x;y\right)$ sao cho $x^2+y^2+2x-2y+2-m=0$.

A. $m=\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)^2$. **B.** $m=\sqrt{10}\pm\sqrt{2}$. **C.** $m=\sqrt{10}-\sqrt{2}$. **D.** $m=\left(\sqrt{10}\pm\sqrt{2}\right)^2$.

Lời giải

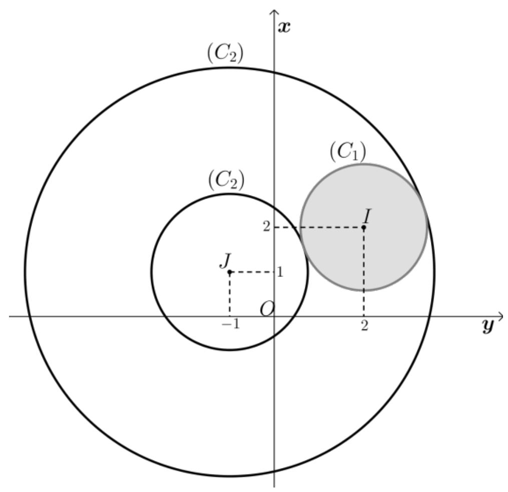
Chọn D

Với mọi $x,\,y\in\mathbb{R}$, ta luôn có $x^2+y^2+2\ge 2>1$ nên BPT $\log_{x^2+y^2+2}\left(4x+4y-4\right)\ge 1$

$\Leftrightarrow 4x+4y-4\ge x^2+y^2+2\Leftrightarrow\left(x-2\right)^2+\left(y-2\right)^2\le 2\;\;(1)$.

BPT (1) mô tả hình tròn tâm $I\left(2;2\right)$ và bán kính $R_1=\sqrt{2}$.

Mặt khác, phương trình $x^2+y^2+2x-2y+2-m=0\Leftrightarrow\left(x+1\right)^2+\left(y-1\right)^2=m\;\;(2)$ nên để (2) có nghiệm thì $m\ge 0$.



• TH1: $m=0$. Khi đó, $(2)\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$ không thỏa (1) nên loại $m=0$.

• TH2: $m > 0$. Khi đó, (2) là phương trình đường tròn (C_2) tâm $J(-1;1)$ và bán kính $R_2 = \sqrt{m}$. Do đó, yêu cầu đề bài $\Leftrightarrow$ Hệ BPT $\begin{cases}(x-2)^2+(y-2)^2 \le 2\\(x+1)^2+(y-1)^2 = m\end{cases}$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow (C_2)$ tiếp xúc với đường tròn $(C_1):(x-2)^2+(y-2)^2 = 2$ cũng có tâm $I(2;2)$ và bán kính $R_1 = \sqrt{2}$. Vì $IJ = \sqrt{10} > \sqrt{2} = R_1$ nên (C_1) hoặc tiếp xúc ngoài, hoặc tiếp xúc trong với (C_2).

➢ TH2a: (C_1) tiếp xúc ngoài với $(C_2) \Leftrightarrow IJ = R_1 + R_2 \Leftrightarrow \sqrt{10} = \sqrt{2} + \sqrt{m}$

$\Leftrightarrow \sqrt{m} = \sqrt{10} - \sqrt{2} \Leftrightarrow m = \left(\sqrt{10} - \sqrt{2}\right)^2$.

➢ TH2b: (C_1) tiếp xúc trong với $(C_2) \Leftrightarrow IJ = R_2 - R_1 \Leftrightarrow \sqrt{10} = \sqrt{m} - \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{m} = \sqrt{2} + \sqrt{10} \Leftrightarrow m = \left(\sqrt{10} + \sqrt{2}\right)^2$.

Vậy $m = \left(\sqrt{10} \pm \sqrt{2}\right)^2$.