Chương VI
HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

Bài 1 **PHÉP TÍNH LŨY THỪA**

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT
I. KHÁI NIỆM LŨY THỪA

1. Lũy thừa với số mũ nguyên

Lũy thừa với số mũ nguyên dương.

Cho $a \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó $a^n = a.a.a....a$ (*n* thừa số *a*).

Lũy thừa với số mũ nguyên âm, lũy thừa với số mũ 0

Cho $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ và $n \in \mathbb{N}^*$. Ta có: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}; a^0 = 1; a^1 = a$.

Lũy thừa với số mũ nguyên có các tính chất tương tự tính chất của lũy thừa với số mũ nguyên dương.

Chú ý: 0^0 và $0^{-n}\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ không có nghĩa.

2. Căn bậc n

Cho số thực *b* và số nguyên dương $n \geq 2$.

Số *a* được gọi là căn bậc *n* của số *b* nếu $a^n = b$.

Khi *n* lẻ, $b \in \mathbb{R}$: Tồn tại duy nhất một căn bậc *n* của số *b* là $\sqrt[n]{b}$.

Khi *n* chẵn và $b < 0$ thì không tồn tại căn bậc *n* của số *b*.

Khi *n* chẵn và $b = 0$ thì có duy nhất một căn bậc *n* của số *b* là $\sqrt[n]{0} = 0$.

Khi *n* chẵn và $b > 0$ có 2 căn bậc *n* của số thực *b* là $\sqrt[n]{b}$ và $-\sqrt[n]{b}$.

3. Lũy thừa với số mũ hữu tỷ

Cho số thực $a > 0$ và số hữu tỷ $r = \dfrac{m}{n}$, trong đó $m \in \mathbb{Z};\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$. Khi đó $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

4. Lũy thừa với số mũ vô tỷ

Giả sử a là một số dương và α là một số vô tỷ và (r_n) là một dãy số hữu tỷ sao cho $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \alpha$. Khi đó $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{r_n} = a^{\alpha}$.

II. TÍNH CHẤT CỦA LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

Cho hai số dương $a; b$ và $m;\ n \in \mathbb{R}$. Khi đó ta có các công thức sau.

Nhóm công thức 1	**Nhóm công thức 2**
1. $a^m.a^n = a^{m+n}$ **2.** $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\left(m = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a^n} = a^{-n}\right)$ **3.** $\left(a^m\right)^n = a^{m.n}$	**1.** $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ **2.** $a^n.b^n = (ab)^n, \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ **3.** $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n, \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

B. CÁC DẠNG TOÁN.

DẠNG 1:

RÚT GỌN VÀ TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC CHỨA LŨY THỪA

Phương pháp:

Sử dụng phối hợp linh hoạt các tính chất của lũy thừa.

Chọn a, b là các số thực dương, x, y là các số thực tùy ý, ta có:

- $a^{x+y} = a^x.a^y$ và $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$.
- $a^x.b^x = (ab)^x; \dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x; \left(a^x\right)^y = a^{xy}$.

Ví dụ 1. Tính $2^1;\ (4,72)^0;\ (-3)^2;\ 2^4;\ (-4)^{-3}$.

Lời giải

Ta có:

$2^1 = 2$; $(4,72)^0 = 1$; $(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$;

$2^4 = 2.2.2.2 = 16$; $(-4)^{-3} = \dfrac{1}{(-4)^3} = -\dfrac{1}{64}$.

<u>Ví dụ 2.</u> Đưa các biểu thức sau về dạng lũy thừa

1) $\sqrt{a\sqrt{a}}\ (a > 0)$. 2) $\dfrac{\sqrt{2\sqrt[3]{4}}}{16^{0,75}}$. 3) $\sqrt[5]{\dfrac{b}{a}\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}}\ (a, b > 0)$.

.Lời giải

1) $\sqrt{a\sqrt{a}} = \left(a.a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{4}}$.

2) $\dfrac{\sqrt{2\sqrt[3]{4}}}{16^{0,75}} = \dfrac{\left[2.\left(2^2\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}}{\left(2^4\right)^{\frac{3}{4}}} = \dfrac{2^{\frac{5}{6}}}{2^3} = 2^{\frac{-13}{6}}$.

3) $\sqrt[5]{\dfrac{b}{a}\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}} = \dfrac{b^{\frac{1}{5}}}{a^{\frac{1}{5}}}.\dfrac{a^{\frac{1}{15}}}{b^{\frac{1}{15}}} = a^{\frac{-2}{15}}.b^{\frac{2}{15}} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{2}{15}}$.

<u>Ví dụ 3.</u> Rút gọn các biểu thức sau đây:

1) $\sqrt{(a-5)^4}$. 2) $\sqrt{81a^4b^2}\ (b \le 0)$. 3) $\sqrt[4]{x^8(x+1)^4}\ (x \le -1)$.

Lời giải

1) $\sqrt{(a-5)^4} = (a-5)^2$.

2) $\sqrt{81a^4b^2} = 9a^2|b| = -9a^2b$ (do $b \le 0$)

3) $\sqrt[4]{x^8(x+1)^4} = x^2.|x+1| = -x^2(x+1)$ (do $x \le -1 \Leftrightarrow x+1 \le 0$).

<u>Ví dụ 4.</u> Tính giá trị của biểu thức $P = \left(5+2\sqrt{6}\right)^{2024}.\left(5-2\sqrt{6}\right)^{2025}$

Lời giải

Ta có: $\left(5+2\sqrt{6}\right)\left(5-2\sqrt{6}\right) = 25 - 24 = 1$.

Do đó

$$P=\left(5+2\sqrt{6}\right)^{2024}.\left(5-2\sqrt{6}\right)^{2025}=\left[\left(5+2\sqrt{6}\right)\left(5-2\sqrt{6}\right)\right]^{2024}.\left(5-2\sqrt{6}\right)=5-2\sqrt{6}.$$

Ví dụ 5. Không dùng máy tính, hãy tính giá trị các biểu thức sau

1) $A=\left(\left[3^{\frac{3}{2}}.5^{\frac{5}{3}}:2^{\frac{-7}{4}}\right]:\left[16:\left(5^{\frac{1}{3}}.3^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{4}}\right)\right]\right)^{\frac{1}{2}}$

2) $B=\sqrt[3]{4.\sqrt[3]{2.\sqrt{8}}}+\left(\sqrt[5]{3.\sqrt[3]{3.\sqrt{3}}}\right)^{6}$.

3) $C=\left(25^{1+\sqrt{2}}-5^{2\sqrt{2}}\right).5^{-1-2\sqrt{2}}+\left(8^{1+\sqrt{2}}.4^{1-\sqrt{2}}\right):2^{4+\sqrt{2}}$.

Lời giải

1) $A=\left(\left[3^{\frac{3}{2}}.5^{\frac{5}{3}}:2^{\frac{-7}{4}}\right]:\left[16:\left(5^{\frac{1}{3}}.3^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{4}}\right)\right]\right)^{\frac{1}{2}}=\left[3^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}.5^{\frac{5}{3}+\frac{1}{3}}.2^{\frac{7}{4}+\frac{1}{4}}:2^{4}\right]^{\frac{1}{2}}$

$$=\left(3^{2}.5^{2}.2^{2}.2^{-4}\right)^{\frac{1}{2}}=3.5.2^{-1}=\frac{15}{2}$$

2)

$$B=\sqrt[3]{4.\sqrt[3]{2.\sqrt{8}}}+\left(\sqrt[5]{3.\sqrt[3]{3.\sqrt{3}}}\right)^{6}=\left(2^{2}.2^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(3.3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{6}{5}}=\left(2^{\frac{17}{6}}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{6}{5}}=2^{\frac{17}{18}}+3^{\frac{18}{10}}.$$

3)

$$C=\left(25^{1+\sqrt{2}}-5^{2\sqrt{2}}\right).5^{-1-2\sqrt{2}}+\left(8^{1+\sqrt{2}}.4^{1-\sqrt{2}}\right):2^{4+\sqrt{2}}=\frac{\left(5^{2+2\sqrt{2}}-5^{2\sqrt{2}}\right)}{5^{1+2\sqrt{2}}}+\frac{\left(2^{3+3\sqrt{2}}.2^{2-2\sqrt{2}}\right)}{2^{4+\sqrt{2}}}$$

$$=5-5^{-1}+\frac{2^{5+\sqrt{2}}}{2^{4+\sqrt{2}}}=5-\frac{1}{5}+2=\frac{36}{5}.$$

Ví dụ 6. Cho $a=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1},b=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}$. Tính $A=\left(a+1\right)^{-1}+\left(b+1\right)^{-1}$.

Lời giải

Ta có: $a=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$.

$$b=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}\,.$$

Suy ra

$$A=\left(a+1\right)^{-1}+\left(b+1\right)^{-1}=\left(2-\sqrt{3}+1\right)^{-1}+\left(2+\sqrt{3}+1\right)^{-1}=\left(3-\sqrt{3}\right)^{-1}+\left(3+\sqrt{3}\right)^{-1}$$

$$=\frac{1}{3-\sqrt{3}}+\frac{1}{3+\sqrt{3}}=\frac{6}{9-3}=1.$$

<u>Ví dụ 7.</u> Rút gọn các biểu thức sau:

1) $P=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}-\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}\left(a>0,b>0\right).$

2) $Q=\dfrac{a^{\sqrt{3}+1}.a^{2-\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}\left(a>0\right).$

3) $K=\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^{2}\left(1-2\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}\right)^{-1}\left(x>0,y>0\right).$

Lời giải

1)Ta có

$$P=\frac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}=\frac{\left(\sqrt[4]{a}\right)^{2}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}-\frac{\left(\sqrt[4]{a}\right)^{2}-\left(\sqrt[4]{b}\right)^{2}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$$

$$=\frac{\sqrt[4]{a}\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}-\frac{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$$

$$=\sqrt[4]{a}-\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)=-\sqrt[4]{b}$$

2) Ta có: $\begin{cases} a^{\sqrt{3}+1}.a^{2-\sqrt{3}}=a^{\sqrt{3}+1+2-\sqrt{3}}=a^{3} \\ \left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}=a^{\left(\sqrt{2}+2\right)\left(\sqrt{2}-2\right)}=a^{-2} \end{cases}\Rightarrow Q=\dfrac{a^{3}}{a^{-2}}=a^{5}\,.$

3) Rút gọn $\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^{2}=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^{2}$

$$\left(1-2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}\right)^{-1}=\left[\left(\sqrt{\frac{y}{x}}-1\right)^{2}\right]^{-1}=\left(\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^{-2}=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}\right)^{2}$$

Vậy $K=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}\right)^2=x$.

<u>Ví dụ 8.</u> Biết $9^x+9^{-x}=23$. Tính 3^x+3^{-x}.

Lời giải

Ta có:

$9^x+9^{-x}=23\Leftrightarrow 3^{2x}+2.3^x.3^{-x}+3^{-2x}=25\Leftrightarrow\left(3^x+3^{-x}\right)^2=25\Rightarrow 3^x+3^{-x}=5.$

<u>DẠNG 2:</u>
CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC LŨY THỪA

<u>Phương pháp:</u>

Để chứng minh đẳng thức ta thường sử dụng các phương pháp sau **:**

1.*Biến đổi tương đương.*

2.*Biến đổi vế trái thành vé phải hoặc vế phải thành vế trái.*

3.*Biến đổi hai vế về đại lượng thứ 3.*

<u>Ví dụ 1.</u> Chứng minh đẳng thức $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}=2$.

Lời giải

Biến đổi vế trái ta có:

$VT=\sqrt{3+2\sqrt{3}+1}-\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}=\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=$

$=\left(\sqrt{3}+1\right)-\left(\sqrt{3}-1\right)=2=VP(\text{dpcm})$

<u>Ví dụ 2.</u> Chứng minh đẳng thức $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=2$.

Lời giải

$VT=\sqrt[3]{2\sqrt{2}+6+3\sqrt{2}+1}+\sqrt[3]{-2\sqrt{2}+6-3\sqrt{2}+1}$.

$=\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}\right)^3+3\left(\sqrt{2}\right)^2+3\sqrt{2}+1}-\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}\right)^3-3\left(\sqrt{2}\right)^2+3\sqrt{2}-1}$

$=\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}+1\right)^3}-\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}-1\right)^3}$

$=\left(\sqrt{2}+1\right)-\left(\sqrt{2}-1\right)=2=VP(\text{dpcm})$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu $1\le x\le 2$ thì

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2.$$

Lời giải

$$VT=\sqrt{(x-1)+2\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{(x-1)-2\sqrt{x-1}+1}.$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}=\left|\sqrt{x-1}+1\right|+\left|\sqrt{x-1}-1\right|.$$

$=\left(\sqrt{x-1}+1\right)+\left(1-\sqrt{x-1}\right)$. Do $1\le x\le 2$

Ví dụ 4. Chứng mnh rằng $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}\cdot\left(1-2\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)^{-1}=a^{\frac{2}{3}}$.

Lời giải

$$VT=\frac{\sqrt[3]{a}\,(a-8b)}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+2\sqrt[3]{ab}+\left(2\sqrt[3]{b}\right)^2}\cdot\left(\frac{\sqrt[3]{a}-2\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}}\right)^{-1}.$$

$$=\frac{\sqrt[3]{a}\,(a-8b)}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}\left(2\sqrt[3]{b}\right)+\left(2\sqrt[3]{b}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}-2\sqrt[3]{b}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{a^2}\,(a-8b)}{a-8b}=\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}}=VP.$$

Ví dụ 5. Chứng minh đẳng thức

$$\frac{8b-a}{6}\cdot\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{2a^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}}}+\frac{a^{\frac{1}{3}}-2b^{\frac{1}{3}}}{4a^{-\frac{2}{3}}+2a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}}\right)=ab.$$

Lời giải

$$VT=\frac{8b-a}{6}\cdot\frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\left(4a^{-\frac{2}{3}}+2a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}\right)+\left(2a^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}-2b^{\frac{1}{3}}\right)}{\left(2a^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}}\right)\left(4a^{-\frac{2}{3}}+2a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}\right)}.$$

$$=\frac{8b-a}{6}\cdot\frac{4a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+2+a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+2-4a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+2}{8a^{-1}-b^{-1}}.$$

$$=\frac{8b-a}{6}\cdot\frac{6}{\frac{8}{a}-\frac{1}{b}}=\frac{8b-a}{6}\cdot\frac{6ab}{8b-a}=ab=VP.$$

<u>Ví dụ 6.</u> Chứng minh đẳng thức sau:

$$\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(2^{a}-2^{-a}\right)^{2}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(2^{a}-2^{-a}\right)^{2}}}}=\frac{1-2^{a}}{1+2^{a}},\ \left(a<0\right).$$

Lời giải

Biến đổi vế trái

$$VT=\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(2^{2a}-2+2^{-2a}\right)}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(2^{2a}-2+2^{-2a}\right)}}}=\sqrt{\frac{-1+\sqrt{\frac{1}{4}\left(2^{2a}+2+2^{-2a}\right)}}{1+\sqrt{\frac{1}{4}\left(2^{2a}+2+2^{-2a}\right)}}}.$$

$$=\sqrt{\frac{-1+\sqrt{\frac{1}{4}\left(2^{a}+2^{-a}\right)^{2}}}{1+\sqrt{\frac{1}{4}\left(2^{a}+2^{-a}\right)^{2}}}}=\sqrt{\frac{-1+\frac{1}{2}\left(2^{a}+2^{-a}\right)}{1+\frac{1}{2}\left(2^{a}+2^{-a}\right)}}.$$

$$=\sqrt{\frac{\frac{1}{2\cdot 2^{a}}\left(2^{2a}-2\cdot 2^{a}+1\right)}{\frac{1}{2\cdot 2^{a}}\left(2^{2a}+2\cdot 2^{a}+1\right)}}=\sqrt{\frac{\left(2^{a}-1\right)^{2}}{\left(2^{a}+1\right)^{2}}}=\left|\frac{2^{a}-1}{2^{a}+1}\right|=\frac{1-2^{a}}{1+2^{a}}=VP.$$

<u>Ví dụ 7.</u> Chứng minh rằng $\dfrac{\left(a^{2\sqrt{3}}-1\right)\left(a^{2\sqrt{3}}+a^{\sqrt{3}}+a^{3\sqrt{3}}\right)}{a^{4\sqrt{3}}-a^{\sqrt{3}}}=a^{\sqrt{3}}+1.$

Lời giải

$$VT=\frac{\left(a^{\sqrt{3}}-1\right)\left(a^{\sqrt{3}}+1\right)a^{\sqrt{3}}\left(a^{2\sqrt{3}}+a^{\sqrt{3}}+1\right)}{a^{\sqrt{3}}\left(a^{3\sqrt{3}}-1\right)}=a^{\sqrt{3}}+1=VP\text{ (đpcm).}$$

<u>DẠNG 3:</u>
BÀI TOÁN THỰC TẾ

<u>Phương pháp:</u>

Giả sử số tiền gốc là A ; lãi suất là $r\%/$ kì hạn gửi (có thể là tháng, quý hay năm).

+ Số tiền nhận được cả gốc và lãi sau n kì hạn gửi là $A(1+r)^n$.

+ Số tiền lãi nhận được sau n kì hạn gửi là

$A(1+r)^n - \mathrm{A} = \mathrm{A}\left[(1+r)^n - 1\right]$.

<u>Ví dụ 1.</u> Bà Hạnh gửi 100 triệu vào tài khoản định kỳ tính lãi kép với lãi suất là $8\%/$ năm. Tính số tiền lãi thu được sau 10 năm.

Lời giải

Áp dụng công thức tính lãi kép, sau 10 năm số tiền cả gốc và lãi bà Hạnh thu về là $A(1+r)^n = 100(1+0,08)^{10} \approx 215,892$ triệu đồng.

Suy ra số tiền lãi bà Hạnh thu về sau 10 năm là $215,892 - 100 = 115,892$ triệu đồng.

<u>Ví dụ 2.</u> Tỉ lệ tăng dân số hàng năm ở Việt Nam được duy trì ở mức $1,05\%$. Biết rằng, dân số của Việt Nam ngày 1 tháng 4 năm 2014 là $90.728.900$ người. Với tốc độ tăng dân số như thế thì vào ngày 1 tháng 4 năm 2030 thì dân số của Việt Nam là

Lời giải

Dân số vào ngày 1 tháng 4 năm 2030 là: $90.728.900 \times (1+1,05\%)^{16}$

$= 107.232.574$ người.

<u>Ví dụ 3.</u> Một người muốn gửi tiết kiệm ở ngân hàng và hi vọng sau 4 năm có được 850 triệu đồng để mua nhà. Biết lãi suất ngân hàng mỗi tháng trong thời điểm hiện tại là $0,45\%$. Hỏi người đó mỗi tháng phải gửi vào ngân hàng tối thiểu bao nhiêu tiền để đủ số tiền mua nhà ? (giả sử số tiền mỗi tháng là như nhau và lãi suất trong 4 năm là không thay đổi).

Lời giải

Giả sử người này gửi tiền ở thời điểm t nào đó , kể từ thời điểm này sau 4 năm (48 tháng) ông muốn có số tiền 850 triệu. Như vậy rõ ràng ta có thể coi đây là bài toán gửi tiền định kì đầu tháng. Áp dụng bài toán 5 ta có số tiền phải gửi mỗi tháng là : $m = \dfrac{Ar}{(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]} (*)$.

Theo bài ra $n=48, r=0,45\%, \mathrm{A}=850$ thay vào $(*)$ ta được

$$m=\frac{850.0,45\%}{(1+0,45\%)\left[(1+0,45\%)^{48}-1\right]}=15,833 \text{ triệu đồng.}$$

<u>Ví dụ 4.</u> Một bà mẹ Việt Nam anh hùng được hưởng số tiền là 4 triệu đồng trên một tháng (chuyển vào tài khoản của mẹ ở ngân hàng vào đầu tháng). Từ tháng 1 năm 2016 mẹ không đi rút tiền mà để lại ngân hàng và được tính lãi suất 1% trên một tháng. Đến tháng 12 năm 2016 mẹ rút toàn bộ số tiền (gồm số tiền của 12 tháng và số tiền đã gửi tháng 1). Hỏi khi đó mẹ lĩnh về bao nhiêu tiền ? (kết quả làm tròn theo đơn vị nghìn đồng).

Lời giải

Nếu ban đầu gửi vào a đồng, từ đầu tháng sau gửi thêm a đồng (không đổi) vào đầu mỗi tháng với lãi suất $r\%$ trong n tháng thì tổng số tiền thu được là :

$$A=a+\frac{a}{r}(1+r)\left[(1+r)^{n}-1\right]=4+\frac{4}{1\%}(1+1\%)\left[(1+1\%)^{11}-1\right]+4=50,73$$

triệu đồng.

<u>Ví dụ 5.</u> [Đề thử nghiệm Bộ GD&ĐT 2017] Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t)=s(0).2^{t}$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con?

Lời giải

Ta có: $s(3)=s(0).2^{3} \Rightarrow s(0)=\dfrac{s(3)}{8}=78{,}125$ nghìn con

Do đó $s(t)=10$ triệu con =10000 nghìn con khi

$$10000=s(0).2^{t} \Rightarrow 2^{t}=\frac{10000}{78{,}125}=128$$

<u>Ví dụ 6.</u> Cường độ của ánh sáng I khi đi qua môi trường khác với không khí, chẳng hạn như sương mù hay nước,...sẽ giảm dần tùy theo độ dày của môi trường và một hằng số μ gọi là khả năng hấp thu ánh sáng tùy theo bản chất môi trường mà ánh sáng truyền đi và được tính theo công thức $I=I_0.e^{-\mu x}$ với x là độ dày của môi trường đó và tính bằng mét, I_0

là cường độ ánh sáng tại thời điểm trên mặt nước. Biết rằng nước hồ trong suốt có $\mu = 1,4$. Cường độ ánh sáng giảm đi bao nhiêu lần khi truyền trong hồ đó từ độ sâu 3m xuống đến độ sâu.

Số e : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e,\ \ e = 2,718281828....$

Lời giải

Cường độ ánh sáng ở độ sâu 3m là $I_1 = I_0.e^{-1,4.3} = I_0.e^{-4,2}$

Cường độ ánh sáng ở độ sâu 30m là $I_2 = I_0.e^{-1,4.30} = I_0.e^{-42}$

Ta có $\dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{e^{-4,2}}{e^{-42}} = 2,6081.10^{16}$ nên cường độ ánh sáng giảm đi $2,6081.10^{16}$

lần.

__Ví dụ 7.__ E.coli là vi khuẩn đường ruột gây tiêu chảy, đau bụng dữ dội. Cứ sau 20 phút thì số lượng vi khuẩn E. coli tăng gấp đôi. Ban đầu, chỉ có 40 vi khuẩn E. coli trong đường ruột. Hỏi sau bao nhiêu giờ, số lượng vi khuẩn E.coli lớn hơn 671088640 con?

Lời giải

Vì cứ sau 20 phút (bằng $\dfrac{1}{3}$ giờ) số lượng vi khuẩn tăng gấp đôi nên số

lượng vi khuẩn tăng theo quy luật

$N_n = N_0.2^n = 40.2^n > 671088640 \Rightarrow n > 24$. Vậy sau ít nhất $24.\dfrac{1}{3} = 8$ giờ

thì số vi khuẩn đạt mức lớn hơn 671088640 con.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

__Bài 1:__ Cho hàm số $f(x) = \left(2x^2+3x+1\right)^{\frac{3}{2}}$. Tính giá trị của $f(1)$

__Bài 2:__ Rút gọn biểu thức

a) $P = x^{\frac{1}{3}}\sqrt[6]{x}$ với $x > 0$.

b) $Q = b^{\frac{5}{3}} : \sqrt[3]{b}$ với $b > 0$.

c) $P=\sqrt{x^{\frac{4}{3}}.\sqrt[6]{x^4}}$ với $x>0$

d) $P=3^{1-\sqrt{2}}.3^{2+\sqrt{2}}.9^{\frac{1}{2}}$

<u>Bài 3:</u> Tính

a) $A=(32)^{-0,2}-\left(\dfrac{1}{64}\right)^{-0,25}+\left(\dfrac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}.$

b) $B=\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\left(\sqrt{3}+2\right)\sqrt[4]{\left(\sqrt{3}-2\right)^4}}-\left(\dfrac{25}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\sqrt[5]{32}}.$

c) $C=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}.$

d) $D=\left(\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\sqrt[3]{ab}\right):\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2$ với $a^2\neq b^2$.

<u>Bài 4:</u> Rút gọn các biểu thức sau

a) $E=\sqrt{\left(x^{\pi}+y^{\pi}\right)^2-\left(4^{\frac{1}{\pi}}xy\right)^{\pi}}.$

b) $F=\dfrac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}}+a^{-\frac{1}{4}}\right)}.$

c) $A=\dfrac{a-3a^{\frac{1}{3}}+2}{\sqrt[3]{a}-1}+\dfrac{\sqrt{a}-a^{\frac{5}{6}}+\sqrt[6]{a}}{\sqrt[6]{a}}$

d) $P=\dfrac{a^{\sqrt{7}+1}.a^{2-\sqrt{7}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}$

<u>Bài 5:</u> Chứng minh rằng nếu $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{y^4x^2}}=a$ thì $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

<u>Bài 6:</u> Chu kì bán rã của nguyên tố phóng xạ poloni 210 là 138 ngày (nghĩa là sau 138 ngày khối lượng của nguyên tố đó chỉ còn 1 nửa). Tính khối lượng còn lại của 40 gam poloni 210 sau 7314 ngày (khoảng 20 năm).

Bài 7: Cho biết $f(n)=\dfrac{2^n}{2^n+1}$, với $n\in\mathbb{Z}$. Tính

$S=f(-1000)+f(-999)+\cdots+f(-1)+f(0)+f(1)+\cdots+f(1000)$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1:Tính giá trị của biểu thức $K=\dfrac{2:4^{-2}+\left(3^{-2}\right)^3.\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-3}}{5^{-3}.25^2+\left(0,7\right)^0.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}}$

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{8}{3}$. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{33}{13}$.

Câu 2: Biết rằng $\sqrt{x}.\sqrt[3]{x^2.\sqrt{x}}=x^n$ với $x>0$. Tìm *n*.

A. $n=2$. **B.** $n=\dfrac{2}{3}$. **C.** $n=\dfrac{4}{3}$. **D.** $n=3$.

Câu 3: Cho biểu thức $P=\dfrac{a^{2+\sqrt{3}}.\left(a^{1-\sqrt{3}}\right)^{1+\sqrt{3}}}{a^{1+\sqrt{3}}}$, với $a>0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $P=a^{\sqrt{3}}$. **B.** $P=\dfrac{1}{a}$. **C.** $P=a$. **D.** $P=\dfrac{1}{a^{\sqrt{3}}}$.

Câu 4: Cho $2^x=5$. Giá trị của biểu thức $T=4^{x+1}+2^{2-x}$ bằng:

A. $\dfrac{504}{5}$. **B.** $\dfrac{104}{5}$. **C.** $\dfrac{104}{25}$. **D.** $\dfrac{504}{25}$.

Câu 5: Cho $4^x+4^{-x}=34$. Tính giá trị của biểu thức $T=\dfrac{2^x+2^{-x}-3}{1-2^{x+1}-2^{1-x}}$.

A. $T=\dfrac{3}{4}$. **B.** $T=\dfrac{3}{11}$. **C.** $T=\dfrac{-3}{11}$. **D.** $T=\dfrac{3}{13}$.

Câu 6: Tích $(2025!)\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1}\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2}...\left(1+\frac{1}{2025}\right)^{2025}$ được viết dưới dạng a^b, khi đó $(a;b)$ là cặp nào trong các cặp sau?

A. $(2026;2025)$.
B. $(2027;2026)$.
C. $(2023;2022)$.
D. $(2024;2023)$.

Câu 7: Một khu rừng có trữ lượng gỗ 4.10^5 mét khối. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây trong rừng đó là 4% mỗi năm. Hỏi sau 10 năm khu rừng đó có số mét khối gỗ gần nhất với số nào?

A. $5,9.10^5$.
B. $5,92.10^5$.
C. $5,93.10^5$.
D. $5,94.10^5$.

Câu 8: Chị Phương Anh vay trả góp ngân hàng MSB số tiền 500 triệu đồng với lãi suất $10,8$ %/năm, mỗi tháng trả 15 triệu đồng. Sau ít nhất bao nhiêu tháng thì chị Phương Anh trả hết nợ?

A. 39 tháng.
B. 41 tháng.
C. 40 tháng.
D. 42 tháng.

Câu 9: Chu kì bán rã của nguyên tố phóng xạ ponoli 210 là 138 ngày (nghĩa là sau 138 ngày khối lượng của nguyên tố đó chỉ còn một nửa). Thời gian phân rã phóng xạ ponoli 210 để từ 20 gam còn lại $2,22.10^{-15}$ gam gần đúng với đáp án nào nhất?

A. Khoảng 18 năm.
B. Khoảng 21 năm.
C. Khoảng 19 năm.
D. Khoảng 20 năm.

Câu 10: **Bài ...:** Cho $f(x)=e^{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}}$. Biết rằng $f(1).f(2).f(3)...f(2025)=e^{\frac{m}{n}}$ với m,n là các số tự nhiên và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $m-n^2$

A. $m-n^2=-1$.
B. $m-n^2=1$.
C. $m-n^2=2026$.
D. $m-n^2=-2026$.

E. HƯỚNG DẪN GIẢI

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Ta có $f\left(1\right)=6^{\frac{3}{2}}=6\sqrt{6}$.

Bài 2:

a)Ta có $P=x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{6}}=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$.

b)Ta có $Q=b^{\frac{5}{3}}:b^{\frac{1}{3}}=b^{\frac{5}{3}-\frac{1}{3}}=b^{\frac{4}{3}}$

c)Ta có $P=\sqrt{x^{\frac{4}{3}}.\sqrt[6]{x^4}}=\sqrt{x^{\frac{4}{3}}.x^{\frac{4}{6}}}=\sqrt{x^2}=x.$

d)Ta có $P=3^{1-\sqrt{2}}.3^{2+\sqrt{2}}.9^{\frac{1}{2}}=3^{1-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}+1}=3^4=81.$

Bài 3:

a) $A=\left(2^5\right)^{-\frac{1}{5}}-\left(2^6\right)^{-\frac{1}{4}}+\left(\frac{2}{3}\right)^{3\cdot\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}-2^{-\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}+\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

b) $B=\left(\frac{2}{5}\right)^{(\sqrt{3}+2)\left|\sqrt{3}-2\right|}-\left(\frac{5}{2}\right)^{2\left(-1+\frac{1}{2}\right)}+\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt[5]{2^5}}=\frac{2}{5}-\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}\frac{1}{2}$.

c) $C=\frac{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\frac{\sqrt[4]{a}\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}=\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a}=\sqrt[4]{b}$.

d) $D=\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{ab}\right):\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2$.

$D=\left(\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right):\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2=\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2:\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2=1.$

Bài 4:

a)

$$E=\sqrt{x^{2\pi}+y^{2\pi}+2x^{\pi}y^{\pi}-4x^{\pi}y^{\pi}}=\sqrt{x^{2\pi}+y^{2\pi}-2x^{\pi}y^{\pi}}=\sqrt{\left(x^{\pi}-y^{\pi}\right)^2}=\left|x^{\pi}-y^{\pi}\right|.$$

b) $F=\frac{a^{\frac{4}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}+a^{\frac{4}{3}}\cdot a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{-\frac{1}{4}}}=\frac{a+a^2}{a+1}=a$.

c)Ta có $A=\dfrac{a-3a^{\frac{1}{3}}+2}{\sqrt[3]{a}-1}+\dfrac{\sqrt{a}-a^{\frac{5}{6}}+\sqrt[6]{a}}{\sqrt[6]{a}}$

$=\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}-1\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{a}-2\right)}{\sqrt[3]{a}-1}+\dfrac{\sqrt[6]{a}\left(\sqrt[3]{a}-a^{\frac{2}{3}}+1\right)}{\sqrt[6]{a}}$

$=a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{a}-2+\sqrt[3]{a}-a^{\frac{2}{3}}+1=2\sqrt[3]{a}-1$.

d)Ta có : $P=\dfrac{a^{\sqrt{7}+1}.a^{2-\sqrt{7}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}=\dfrac{a^3}{a^{-2}}=a^5$

<u>Bài 5:</u> Biến đổi tương đương ta có

$$\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{y^4x^2}}=a\Leftrightarrow\sqrt{\sqrt[3]{x^4}\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\right)}+\sqrt{\sqrt[3]{y^4}\left(\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{x^2}\right)}=a$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\right)}\left(\sqrt{\sqrt[3]{x^4}}+\sqrt{\sqrt[3]{y^4}}\right)=a\Leftrightarrow\sqrt{\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\right)^3}=a$$

$\Leftrightarrow\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=a^{\frac{2}{3}}$ (đpcm).

<u>Bài 6:</u> Ta có 7314 ngày tương ứng 53 chu kì.
Nên khối lượng còn lại của 40 gam poloni 210 sau 7314 ngày bằng
$40\left(\dfrac{1}{2}\right)^{53}=4,44.10^{-15}\left(\text{gam}\right)$.

<u>Bài 7:</u>Ta có $f(n)+f(-n)=\dfrac{2^n}{2^n+1}+\dfrac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}+1}=1$.

Vậy $S=[f(1000)+f(-1000)]+\cdots+[f(1)+f(-1)]+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2001}{2}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1.D	2.C	3.B	4.A	5.C	6.A	7.B	8.C	9.D	10.A

<u>Câu 1:</u> Chọn D

Ta có $K=\dfrac{2:4^{-2}+\left(3^{-2}\right)^3.\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-3}}{5^{-3}.25^2+\left(0,7\right)^0.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}}=\dfrac{2.2^4+3^{-6}.3^6}{5^{-3}.5^4+1.2^3}=\dfrac{2^5+1}{5+2^3}=\dfrac{33}{13}$.

Câu 2: Chọn C

Ta có: $\sqrt{x}.\sqrt[3]{x^2.\sqrt{x}}=x^{\frac{1}{2}}.\sqrt[3]{x^2.x^{\frac{1}{2}}}=x^{\frac{1}{2}}.\sqrt[3]{x^{\frac{5}{2}}}=x^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{5}{6}}=x^{\frac{1}{2}+\frac{5}{6}}=x^{\frac{4}{3}}$.

Câu 3: Chọn B

Ta có: $P=\dfrac{a^{2+\sqrt{3}}.\left(a^{1-\sqrt{3}}\right)^{1+\sqrt{3}}}{a^{1+\sqrt{3}}}=\dfrac{a^{2+\sqrt{3}}.\mathrm{a}^{\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)}}{a^{1+\sqrt{3}}}=\dfrac{a^{2+\sqrt{3}}.\mathrm{a}^{-2}}{a^{1+\sqrt{3}}}=\dfrac{a^{\sqrt{3}}}{a^{1+\sqrt{3}}}=\dfrac{1}{a}$..

Câu 4: Chọn A

Ta có: $T=4^{x+1}+2^{2-x}=4^x.4+\dfrac{2^2}{2^x}=\left(2^x\right)^2.4+\dfrac{4}{2^x}=4.5^2+\dfrac{4}{5}=\dfrac{504}{5}$.

Câu 5: Chọn C

Ta có: $4^x+4^{-x}=34\Leftrightarrow 2^{2x}+2+2^{-2x}=36\Leftrightarrow\left(2^x+2^{-x}\right)^2=36\Leftrightarrow 2^x+2^{-x}=6$

(Do $2^x+2^{-x}>0$).

Khi đó: $T=\dfrac{6-3}{1-2\left(2^x+2^{-x}\right)}=\dfrac{3}{1-2.6}=\dfrac{-3}{11}$..

Câu 6: Chọn A

Ta có $\left(2025!\right)\left(1+\dfrac{1}{1}\right)^1\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2...\left(1+\dfrac{1}{2025}\right)^{2025}$

$=\left(2025!\right)\dfrac{2}{1}.\dfrac{3^2}{2^2}...\dfrac{2026^{2025}}{2025^{2025}}=2026^{2025}$. Suy ra $a=2026, b=2025$.

Câu 7: Chọn B

Số lượng gỗ sau 10 năm là : $4.10^5.(1+0,04)^{10}=592097,714$.

Câu 8: Chọn C

Sau tháng thứ nhất số tiền còn lại là $T_1=500\left(1+0,9\%\right)-15$.

Sau tháng thứ hai số tiền còn lại là

$$T_2 = T_1\left(1+0,9\%\right)-15 = 500\left(1+0,9\%\right)^2 - 15\left(1+0,9\%\right)-15.$$

Sau tháng thứ n số tiền còn lại là $T_n = T_{n-1}\left(1+0,9\%\right)-15$.

$$= 500\left(1+0,9\%\right)^n - 15\left(1+0,9\%\right)^{n-1} - 15\left(1+0,9\%\right)^{n-2} - ...15\left(1+0,9\%\right)-15$$

$$= 500\left(1+0,9\%\right)^n - 15\frac{1-\left(1+0,9\%\right)^n}{1-\left(1+0,9\%\right)}$$

Để $T_n = 0 \Rightarrow \left(1+0,9\%\right)^n = \frac{10}{7} \Leftrightarrow n \approx 39,81$.

Vậy sau ít nhất 40 tháng thì trả hết nợ.

<u>Câu 9:</u> Chọn D

Gọi t (ngày) là số chu kì bán rã. Khi đó ta có phương trình:

$$20.\left(\frac{1}{2}\right)^t = 2,22.10^{-15} \Rightarrow t \approx 53.$$

<u>Câu 10:</u> Chọn A

Đặt $g\left(x\right) = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1+x)^2}}$

Với $x > 0$ ta có

$$g\left(x\right) = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\left(1+x\right)^2}} = \frac{\sqrt{x^2+\left(x+1\right)^2+x^2.\left(x+1\right)^2}}{x\left(x+1\right)} = \frac{\sqrt{\left(x^2+x+1\right)^2}}{x\left(x+1\right)}$$

$$= \frac{x^2+x+1}{x\left(x+1\right)} = 1+\frac{1}{x\left(x+1\right)} = 1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$$

Suy ra $g\left(1\right)+g\left(2\right)+g\left(3\right)+\cdots+g\left(2025\right)$

$$= \left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{2017}-\frac{1}{2018}\right) = 2018-\frac{1}{2018}$$

Khi đó

$$f\left(1\right).f\left(2\right).f\left(3\right)...f\left(2025\right)=e^{g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(2025)}=e^{2026-\frac{1}{2026}}=e^{\frac{2026^2-1}{2026}}=e^{\frac{m}{n}}.$$

Do đó $m=2026^2-1,n=2026$.

Vậy $m-n^2=2026^2-1-2026^2=-1$.

Bài 2 **LÔGARIT**

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. Định nghĩa lôgarit.

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^{\alpha} = b$ được gọi là **logarit cơ số** a **của** b và kí hiệu là $\log_a b$.

Nghĩa là: $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^{\alpha} = b.$

Chú ý:

- Logarit thập phân là logarit cơ số 10. Viết : $\log_{10} b = \log b = \lg b$
- Logarit tự nhiên là logarit cơ số e . Viết : $\log_e b = \ln b$
- Không có logarit của số 0 và số âm vì $a^{\alpha} > 0,\ \forall \alpha$.
- Cơ số của logarit phải dương và khác 1 $(a \neq 1)$
- Theo định nghĩa của logarit, ta có: $\log_a 1 = 0;\ \log_a a = 1$;

$\log_a a^b = b,\ \forall b \in \mathbb{R}$; $a^{\log_a b} = b,\ \forall b \in \mathbb{R}, b > 0$.

II. Tính chất:

1. Logarit của một tích:

Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có ∘ $\log_a(b_1.b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$

2. Logarit của một thương:

Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có ∘ $\log_a \dfrac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$

- Đặc biệt: với $a, b > 0,\ a \neq 1$ $\log_a \dfrac{1}{b} = -\log_a b$

3. Logarit của lũy thừa:

Cho $a, b > 0,\ a \neq 1$, với mọi α , ta có ∘ $\log_a b^{\alpha} = \alpha \log_a b$

- Đặc biệt: $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n} \log_a b$

4. Công thức đổi cơ số:

Cho 3 số dương a, b, c với $a \neq 1, c \neq 1$, ta có ∘ $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

∘ Đặc biệt: $\log_a c = \dfrac{1}{\log_c a}$ và $\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha}\log_a b$ với $\alpha \neq 0$.

❖ B. CÁC DẠNG TOÁN.

DẠNG 1:
TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

Phương pháp:

+ Sử dụng công thức, tính chất và các quy tắc về logarit

Ví dụ 1. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_2 8 + \log_3 27 - \log_5 5^3$.

Lời giải

Ta có: $P = \log_2 8 + \log_3 27 - \log_5 5^3$

$= \log_2 2^3 + \log_3 3^3 - \log_5 5^3 = 3 + 3 - 3 = 3$.

Ví dụ 2. Tính giá trị của biểu thức $P = \ln(2e) - \log 100$.

Lời giải

Ta có: $P = \ln(2e) - \log 100 = \ln 2 + \ln e - \log 10^2 = \ln 2 + 1 - 2 = \ln 2 - 1$.

Ví dụ 3. Tính giá trị của biểu thức $P = 2^{\log_2 3} - \log_{\sqrt{3}} 3$.

Lời giải

Ta có: $P = 2^{\log_2 3} - \log_{\sqrt{3}} 3 = 3 - \log_{3^{\frac{1}{2}}} 3 = 3 - 2 = 1$.

Ví dụ 4. Tính giá trị biểu thức $P = \log_5 3.\log_2 5 - \dfrac{\ln 9}{\ln 4}$.

Lời giải

Ta có: $P = \log_5 3.\log_2 5 - \dfrac{\ln 9}{\ln 4} = \log_2 5.\log_5 3 - \log_4 9$

$= \log_2 3 - \log_{2^2} 3^2 = \log_2 3 - \log_2 3 = 0$.

Ví dụ 5. Cho a là số thực dương, a khác 1. Tính giá trị biểu thức $P = \log_a \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$.

Lời giải

Ta có $P=\log_a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}=\log_a\left(\sqrt{a}.\sqrt[4]{a}.\sqrt[8]{a}\right)=\log_a\left(a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{4}}.a^{\frac{1}{8}}\right)$

$=\log_a a^{\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}=\log_a a^{\frac{7}{8}}=\frac{7}{8}$.

DẠNG 2:

Biến đổi, rút gọn, biểu diễn biểu thức chứa logarit

Phương pháp:

+ áp dụng các tính chất, quy tắc tính logarit, đổi cơ số

Ví dụ 6. Với số dương a tùy ý, rút gọn biểu thức $\log(8a)-\log(2a)$

Lời giải

Áp dụng công thức $\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$, ta có: $\log(8a)-\log(2a)=\log\left(\frac{8a}{2a}\right)=\log 4.$

Ví dụ 7. Rút gọn biểu thức $P=2^{\log_2 a}+\log_a\left(a^b\right)$ $(a>0,a\neq 1)$.

Lời giải

Áp dụng các tính chất của logarit ta được $P=a+b$.

Ví dụ 8. Cho a,b,c,d là các số thực dương tùy ý. Rút gọn biểu thức: $P=\log\frac{a}{b}+\log\frac{b}{c}+\log\frac{c}{d}-\log\frac{a}{d}$.

Lời giải

Với a,b,c,d là các số thực dương, ta có:

$$P=\log\left(\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{d}\right)-\log\frac{a}{d}=\log\left(\frac{a}{d}:\frac{a}{d}\right)=\log 1=0.$$

Ví dụ 9. Cho a,b là các số thực dương và a khác 1 . Rút gọn biểu thức: $P=\log_a b^3+\log_{a^2} b^6$.

Lời giải

Với a,b là các số thực dương và a khác 1, ta có:

$$P=3\log_a b+6.\frac{1}{2}\log_a b=6\log_a b.$$

Ví dụ 10. Cho a,b là các số thực dương và khác 1. Rút gọn biểu thức:

$$P=\frac{\log_a\left(a^3b^2\right)-\log_b\left(\frac{b^3}{a^2}\right)}{\log_a^2 b+1}$$

Lời giải

Với a,b là các số thực dương và khác 1, ta có:

$$P=\frac{\log_a a^3+\log_a b^2-\left(\log_b b^3-\log_b a^2\right)}{\log_a^2 b+1}$$

$$=\frac{3+2\log_a b-3+2\log_b a}{\log_a^2 b+1}=\frac{2\left(\log_a b+\frac{1}{\log_a b}\right)}{\log_a^2 b+1}$$

$$=\frac{2\left(\frac{\log_a^2 b+1}{\log_a b}\right)}{\log_a^2 b+1}=\frac{2}{\log_a b}=2\log_b a.$$

DẠNG 3:

TÍNH LOGARIT THEO LOGARIT KHÁC

DẠNG 3.1:TÍNH LOGARIT THEO 1 LOGARIT KHÁC

Ví dụ 11. Cho $\log_3 2=a$. Tính $\log_3 18$ theo a.

Lời giải

Ta có: $\log_3 18=\log_3\left(2.3^2\right)=\log_3 2+\log_3 3^2=\log_3 2+2=a+2$.

Ví dụ 12. Cho $b=\log_5 3$. Tính $\log_{81} 25$ theo b.

Lời giải

Ta có: $\log_{81} 25=\log_{3^4} 5^2=2.\frac{1}{4}\log_3 5=\frac{1}{2\log_5 3}=\frac{1}{2b}$.

Ví dụ 13. Cho $a=\log_2 m$ với $0<m\neq 1$. Tính $A=\log_m 16m$ theo a.

Lời giải

Từ giả thiết ta có:

$$A=\log_m 16m=\log_m 16+1=4\log_m 2+1=\frac{4}{\log_2 m}+1=\frac{4+a}{a}.$$

Ví dụ 14. Cho $\log_{12} 3=a$. Tính $\log_{24} 18$ theo a.

Lời giải

Ta có $a=\log_{12}3=\dfrac{1}{\log_3 12}=\dfrac{1}{1+2\log_3 2}\Leftrightarrow \log_2 3=\dfrac{2a}{1-a}$.

Khi đó: $\log_{24}18=\dfrac{\log_2\left(3^2.2\right)}{\log_2\left(2^3.3\right)}=\dfrac{1+2\log_2 3}{3+\log_2 3}=\dfrac{1+2.\dfrac{2a}{1-a}}{3+\dfrac{2a}{1-a}}=\dfrac{1+3a}{3-a}$.

<u>Ví dụ 15.</u> Cho $\log_3 15=a$. Tính $A=\log_{25}15$ theo a .

Lời giải

Ta có: $\log_3 15=a\Leftrightarrow \log_3 3+\log_3 5=a\Leftrightarrow \log_3 5=a-1$.

Khi đó: $A=\log_{25}15=\dfrac{\log_3 15}{\log_3 25}=\dfrac{1+\log_3 5}{2\log_3 5}=\dfrac{a}{2(a-1)}$.

<u>DẠNG 3.2:</u>TÍNH LOGARIT THEO 2 LOGARIT KHÁC

<u>Ví dụ 16.</u> Cho $\log_2 5=\mathrm{a};\log_3 5=b$. Tính $\log_5 6$ tính theo a và b .

Lời giải

Ta có: $\log_5 6=\log_5 2+\log_5 3=\dfrac{1}{\log_2 5}+\dfrac{1}{\log_3 5}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{a+b}{ab}$.

<u>Ví dụ 17.</u> Cho $a=\log 2,\ b=\ln 2$. Hãy biểu diễn $\ln 800$ theo a và b .

Lời giải

Ta có: $\ln 800=3\ln 2+2\ln 10=3\ln 2+2\ln 2.\log_2 10$.

$=3\ln 2+\dfrac{2\ln 2}{\log 2}=3b+\dfrac{2b}{a}$.

<u>Ví dụ 18.</u> Cho $a=\log_{25}11$, $b=\log_2 5$. Hãy biểu diễn $\log_{625}\dfrac{121}{16}$ theo a và b .

Lời giải

Ta có: $\log_{625}\dfrac{121}{16}=\dfrac{1}{4}\left(\log_5 121-\log_5 16\right)=\dfrac{1}{2}\log_5 11-\log_5 2$.

Mà $a=\log_{25}11=\frac{1}{2}\log_5 11$; $\log_5 2=\frac{1}{\log_2 5}=\frac{1}{b}$ nên $\log_{625}\frac{121}{16}=a-\frac{1}{b}$.

<u>DẠNG 3.3:</u>TÍNH LOGARIT THEO 3 LOGARIT KHÁC

<u>Ví dụ 19.</u> Cho $a=\log_3 5; b=\log_2 7; \log_2 3$. Tính $\log_6 1260$ theo a,b,c.

Lời giải

Ta có: $\log_6 1260=2+\log_6 35=2+\frac{\log_2 35}{\log_2 6}=2+\frac{\log_2 5+\log_2 7}{1+\log_2 3}$.

Mà $\log_2 5=\log_2 3.\log_3 5=ac$ nên $\log_6 1260=2+\frac{ac+b}{1+c}$.

<u>Ví dụ 20.</u> Cho $\log_9 5=a;\ \log_2 7=b;\ \log_4 12=c$. Tính $\log_{18}4200$.

Lời giải

Ta có: $c=\log_4 12=\frac{\log_2 12}{\log_2 4}=\frac{2+\log_2 3}{2}\Leftrightarrow \log_2 3=2c-2$.

$$a=\log_9 5=\frac{\log_2 5}{\log_2 9}=\frac{\log_2 5}{2\log_2 3}\Leftrightarrow \log_2 5=2a\log_2 3$$
$$=2a\left(2c-2\right)=4ac-4a.$$

Khi đó: $$\log_{18}4200=\frac{\log_2 4200}{\log_2 18}=\frac{\log_2\left(2^3.3.5^2.7\right)}{\log_2\left(2.3^2\right)}$$
$$=\frac{3+\log_2 3+2\log_2 5+\log_2 7}{1+2\log_2 3}$$
$$=\frac{3+2c-2+2\left(4ac-4a\right)+b}{1+2\left(2c-2\right)}=\frac{8ac-8a+b+2c+1}{4c-3}.$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

<u>Bài 1:</u> Không sử dụng máy tính, hãy tính:

a) $\log_2\frac{1}{8}$

b) $\log_{\frac{1}{4}} 2$

c) $\log_3 \sqrt[4]{3}$

d) $\log_{0,5} 0,125$

Bài 2: Tính

a) $4^{\log_2 3}$

b) $27^{\log_9 2}$

c) $9^{\log_{\sqrt{3}} 2}$

d) $4^{\log_8 27}$

Bài 3: Rút gọn biểu thức

a) $\log_3 6.\log_8 9.\log_6 2$

b) $\log_a b^2 + \log_{a^2} b^4$

Bài 4: Tính giá trị biểu thức $P = \log_5 3.\log_2 5 - \dfrac{\ln 9}{\ln 4}$.

Bài 5: Tìm các số thực dương a biết $\log_2 a.\log_{\sqrt{2}} a = 32$.

Bài 6: Cho a, b là các số thực dương khác 1 và thỏa mãn $ab \neq 1$. Rút gọn biểu thức $P = \left(\log_a b + \log_b a + 2\right)\left(\log_a b - \log_{ab} b\right)\log_b a - 1$

Bài 7: Đặt $a = \log_2 3$ và $b = \log_5 3$. Hãy tính $\log_6 45$ theo a và b

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Với mọi số thực dương a, b, x, y và $a, b \neq 1$, mệnh đề nào sau đây sai?

A) $\log_a \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\log_a x}$.

B) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$.

C) $\log_b a.\log_a x = \log_b x$.

D) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

Câu 2: Cho $a > 0; a \neq 1$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

A. $\log_a x^n = n\log_a x$.

B. $\log_a x$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R}$.

C. $\log_a a = 0$.

D. $\log_a (x.y) = \log_a x.\log_a y; \forall x > 0$.

Câu 3: Cho a là số thực dương bất kì. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $\log a^3 = \frac{1}{3}\log a$. **B.** $\log(3a) = 3\log a$.

C. $\log(3a) = \frac{1}{3}\log a$. **D.** $\log a^3 = 3\log a$.

Câu 4: Cho a là số thực dương khác 1. Tính $I = \log_{\sqrt{a}} a$.

A. $I = \frac{1}{2}$. **B.** $I = -2$. **C.** $I = 0$. **D.** $I = 2$.

Câu 5: Cho $a,b > 0$, $a \neq 1$ thỏa $\log_a b = 3$. Tính $P = \log_{a^2} b^3$.

A. $P = 18$. **B.** $P = 2$. **C.** $P = \frac{9}{2}$. **D.** $P = \frac{1}{2}$.

Câu 6: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A) $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$ với mọi số a,b dương và $a \neq 1$.

B) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ với mọi số a,b dương và $a \neq 1$.

C) $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$ với mọi số a,b dương và $a \neq 1$.

D) $\log_a b = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ với mọi số a,b dương và $a \neq 1$.

Câu 7: Cho a,b là hai số thực dương tùy ý và $b \neq 1$. Tìm kết luận đúng.

A) $\ln a + \ln b = \ln(a+b)$. **B)** $\ln(a+b) = \ln a.\ln b$.

C) $\ln a - \ln b = \ln(a-b)$. **D)** $\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}$.

Câu 8: Cho hai số dương a, b $(a \neq 1)$. Mệnh đề nào dưới đây **SAI**?

A) $\log_a a = 2a$. **B)** $\log_a a^\alpha = \alpha$.

C) $\log_a 1 = 0$. **D)** $a^{\log_a b} = b$.

Câu 9: Với các số thực dương a,b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A) $\log(ab) = \log a.\log b$. **B)** $\log\frac{a}{b} = \frac{\log a}{\log b}$.

C) $\log(ab) = \log a + \log b$. **D)** $\log\frac{a}{b} = \log b - \log a$.

Câu 10: Với các số thực dương a,b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A) $\ln(ab)=\ln a+\ln b$. **B)** $\ln\frac{a}{b}=\frac{\ln a}{\ln b}$.

C) $\ln(ab)=\ln a.\ln b$. **D)** $\ln(\frac{a}{b})=\ln b-\ln a$.

Câu 11: Cho $a,b,c>0$, $a\neq 1$ và số $\alpha\in\mathbb{R}$, mệnh đề nào dưới đây ***sai***?

A) $\log_a a^c=c$. **B)** $\log_a a=1$.

C) $\log_a b^\alpha=\alpha\log_a b$. **D)** $\log_a|b-c|=\log_a b-\log_a c$.

Câu 12: Cho $a>0,a\neq 1$, biểu thức $D=\log_{a^3}a$ có giá trị bằng bao nhiêu?

A) -3. **B)** 3. **C)** $\frac{1}{3}$. **D)** $-\frac{1}{3}$.

Câu 13: Với a và b là hai số thực dương, $a\neq 1$. Giá trị của $a^{\log_a b^3}$ bằng

A) $b^{\frac{1}{3}}$. **B)** $\frac{1}{3}b$. **C)** $3b$. **D)** b^3.

Câu 14: Cho hai số thực dương a, b và $a\neq 1$. Khẳng định nào **đúng** ?

A) $\log_{\sqrt{a}}ab=\frac{1}{2}+\log_a\sqrt{b}$. **B)** $2021\log_a ab=1+\log_a b^{2021}$.

C) $\log_a a^{2020}b=2020+\log_a b$. **D)** $\log_a a^{2018}b=2018\left(1+\log_a b\right)$.

Câu 15: Nếu $\log 4=a$ thì $\log 4000$ bằng

A) $3+a$. **B)** $4+b$. **C)** $3+2a$.

Câu 16: Đặt $a=\log_3 15; b=\log_3 10$. Hãy biểu diễn $\log_{\sqrt{3}}50$ theo *a* và *b*.

A) $\log_{\sqrt{3}}50=\left(a+b-1\right)$. **B)** $\log_{\sqrt{3}}50=3\left(a+b-1\right)$.

C) $\log_{\sqrt{3}}50=2\left(a+b-1\right)$. **D)** $\log_{\sqrt{3}}50=4\left(a+b-1\right)$

Câu 17: Cho a,b,c là các số dương $(a,b\neq 1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

A) $\log_a(\frac{b}{a^3})=\frac{1}{3}\log_a b$. **B)** $a^{\log_b a}=b$.

C) $\log_{a^\alpha}b=\alpha\log_a b$. **D)** $\log_a c=\log_b c.\log_a b$.

Câu 18: Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A) $\log_2(\frac{2a^3}{b}) = 1 + 3\log_2 a + \log_2 b$.

B) $\log_2(\frac{2a^3}{b}) = 1 + \frac{1}{3}\log_2 a + \log_2 b$.

C) $\log_2(\frac{2a^3}{b}) = 1 + 3\log_2 a - \log_2 b$.

D) $\log_2(\frac{2a^3}{b}) = 1 + \frac{1}{3}\log_2 a - \log_2 b$.

E. HƯỚNG DẪN GIẢI

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

<u>Bài 1:</u> a) $\log_2 \frac{1}{8} = \log_2(2^{-3}) = -3.\log_2 2 = -3$

b) $\log_{\frac{1}{4}} 2 = \log_{2^{-2}} 2 = -\frac{1}{2}.\log_2 2 = -\frac{1}{2}$

c) $\log_3 \sqrt[4]{3} = \frac{1}{4}\log_3 3 = \frac{1}{4}$

d) $\log_{0,5} 0,125 = \log_{0,5}(0,5)^3 = 3\log_{0,5} 0,5 = 3$

<u>Bài 2:</u> a) $4^{\log_2 3} = (2^2)^{\log_2 3} = (2^{\log_2 3})^2 = 3^2 = 9$

b) $27^{\log_9 2} = (3^3)^{\log_9 2} = (9^{\frac{1}{2}})^{3\log_9 2} = (9^{\log_9 2})^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$

c) $9^{\log_{\sqrt{3}} 2} = ((\sqrt{3})^4)^{\log_{\sqrt{3}} 2} = ((\sqrt{3})^{\log_{\sqrt{3}} 2})^4 = 2^4 = 16$

d) $\log_8 27 = \log_{2^3} 3^3 = \frac{3}{3}\log_2 3 = \log_2 3$

nên $4^{\log_8 27} = (2^2)^{\log_2 3} = (2^{\log_2 3})^2 = 3^2 = 9$

<u>Bài 3:</u> a) $\log_3 6.\log_8 9.\log_6 2 = (\log_3 6.\log_6 2).\log_{2^3} 3^2 = \log_3 2.\frac{2}{3}\log_2 3 = \frac{2}{3}$

b) $\log_a b^2 + \log_{a^2} b^4 = \log_a b^2 + \log_a b^2 = 2\log_a b^2 = 4\log_a |b|$

Bài 4: Ta có: $P=\log_5 3.\log_2 5-\dfrac{\ln 9}{\ln 4}=\log_2 5.\log_5 3-\log_4 9$

$=\log_2 3-\log_{2^2} 3^2=\log_2 3-\log_2 3=0$.

Bài 5 : Ta có: $\log_2 a.\log_{\sqrt{2}} a=32\Leftrightarrow 2\log_2 a.\log_2 a=32\Leftrightarrow \left(\log_2 a\right)^2=16$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 a=4\\ \log_2 a=-4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2^4=16\\ a=2^{-4}=\dfrac{1}{16}\end{array}\right..$$

Bài 6: Ta có $P=\left(\log_a b+\log_b a+2\right)\left(\log_a b-\log_{ab} b\right)\log_b a-1$

$=\left(\log_a b+\dfrac{1}{\log_a b}+2\right)\left(\log_a b-\dfrac{\log_a b}{\log_a\left(ab\right)}\right)\log_b a-1$

$=\dfrac{\log_a^2 b+2\log_a b+1}{\log_a b}.\left(\log_a b-\dfrac{\log_a b}{1+\log_a b}\right)\log_b a-1$

$=\dfrac{\left(\log_a b+1\right)^2}{\log_a b}.\dfrac{\log_a^2 b}{1+\log_a b}.\log_b a-1=\left(\log_a b+1\right).\log_a b.\log_b a-1=\log_a b$.

Bài 7: $\log_6 45=\dfrac{\log_2(3^2.5)}{\log_2(3.2)}=\dfrac{2\log_2 3+\log_2 3.\log_3 5}{1+\log_2 3}=\dfrac{2\mathrm{a}+\dfrac{a}{b}}{1+a}=\dfrac{2\mathrm{a}b+a}{ab+b}$

1.A	2.A	3.D	4.D	5.C	6.A	7.A	8.A	9.C	10.A
11D	12C	13D	14C	15A	16C	17D	18A		

Câu 1: Chọn A.

Với mọi số thực dương a,b,x,y và $a,b\neq 1$. Ta có: $\log_a\dfrac{1}{x}=\log_a x^{-1}\neq\dfrac{1}{\log_a x}$.

Vậy A sai. Theo các tính chất logarit thì các phương án B,C và D đều đúng.

Câu 2: ChọnA.

$\log_a x$ có nghĩa $\forall x > 0 \Rightarrow$ câu B sai

$\log_a a = 1 \Rightarrow$ câu C sai.

$\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y; \forall x > 0 \Rightarrow$ câu D sai.

Câu 3: **ChọnD.**

$\log a^3 = 3\log a \Rightarrow$ A sai, D đúng.

$\log(3a) = \log 3 + \log a \Rightarrow$ B,C sai.

Câu 4: **ChọnD.**

$I = \log_{\sqrt{a}} a = 2\log_a a = 2$.

Câu 5: **ChọnC.**

Vì $a, b > 0$ nên ta có: $P = \frac{3}{2}\log_a b = \frac{3}{2}.3 = \frac{9}{2}$.

Câu 6: **Chọn A.**

Câu 7: **Chọn A.**

Theo tính chất làm Mũ-Log.

Câu 8: **Chọn A.**

Câu 9: **Chọn C.**

$\log(ab) = log\, a + \log b$.

Câu 10: **Chọn A.**

Câu 11: **Chọn D.**

Theo tính chất của logarit, mệnh đề sai là $\log_a |b - c| = \log_a b - \log_a c$.

Câu 12: **Chọn C.**Ta có: $D = \log_{a^3} a = \frac{1}{3}\log_a a = \frac{1}{3}$.

Câu 13: **Chọn D.**Áp dụng công thức: $a^{\log_a b} = b$

Câu 14: **Chọn C.**

$$\log_{\sqrt{a}} ab = 2\left(\log_a a + \log_a b\right)$$
$$= 2 + 2\log_a b.$$

$$2018\log_a ab = \left(2018 + \log_a b^{2018}\right)$$

$$\log_a a^{2020}b = 2020.\log_a a + \log_a b$$
$$= 2020 + \log_a b$$

<u>Câu 15:</u> Chọn A.

$$\log 4000 = \log\left(4.10^3\right) = \log 4 + \log 10^3 = \log 4 + 3 = a + 3.$$

<u>Câu 16:</u> Chọn C.

Ta có $\log_{\sqrt{3}} 50 = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 50 = 2\log_3 50 = 2\log_3\left(10.5\right)$

$$= 2\left(\log_3 10 + \log_3 5\right)$$
$$= 2\left(\log_3 10 + \log_3 15 - \log_3 3\right)$$
$$= 2\left(a + b - 1\right)$$

<u>Câu 17:</u> Chọn D.

<u>Câu 18:</u> Chọn A.

Ta có:

$$\log_2\left(\frac{2a^3}{b}\right) = \log_2(2a^3) - \log_2 b$$
$$= \log_2 2 + \log_2 a^3 - \log_2 b$$
$$= 1 + 3\log_2 a - \log_2 b$$

Bài 3.1 **HÀM SỐ MŨ**

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. Hàm số mũ

Cho số thực $a > 0$ và $a \neq 1$.

Hàm số có dạng $y = a^x$ được gọi là hàm số mũ cơ số a.

— Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

— Tập giá trị: $T = (0, +\infty)$

— Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

— Nếu $a > 1$ thì hàm số $y = a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

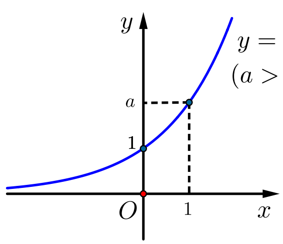
$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$

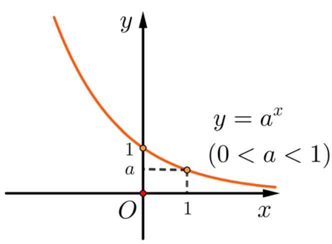
— Nếu $0 < a < 1$ thì hàm số $y = a^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$

II. Đồ thị của hàm số mũ

Đồ thị hàm số $y = a^x$ đi qua điểm $(1; a)$, cắt trục tung tại điểm $(0;1)$ và nằm phía trên trục hoành





B. CÁC DẠNG TOÁN.

DẠNG 1: So sánh các cặp số

Phương pháp:

- Với $a>1$, nếu $x<y$ thì $a^x<a^y$.
- Với $0<a<1$, nếu $x<y$ thì $a^x>a^y$.

Ví dụ 1. So sánh

a) $0,7^2$ và $0,7^{-3}$

b) $5^{2\sqrt{3}}$ và $5^{3\sqrt{2}}$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{8}}$ và $\left(\frac{3}{4}\right)^3$

d) $3^{0,4}$ và $\sqrt{3}$

e) 4^{20} và 64^7

f) $(0,2)^{0,3}$ và 1

Lời giải

a) $0,7^2<0,7^{-3}$ vì cơ số $a=0,7<1$

b) $5^{2\sqrt{3}}<5^{3\sqrt{2}}$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{8}}>\left(\frac{3}{4}\right)^3$

d) $3^{0,4}<\sqrt{3}=3^{0,5}$

e) $4^{20}<(4^3)^7=64^7$

f) $(0,2)^{0,3}<(0,2)^0=1$

Ví dụ 2. So sánh

a) 2^{300} và 3^{200}

b) 3^{99} và 11^{21}

c) 333^{444} và 444^{333}

Ví dụ 3. Viết các số sau theo thứ tự tăng dần : 3^0 ; $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$; $32^{0,2}$

Ví dụ 4. Tìm các số thực dương a thỏa $a^{\frac{13}{7}}<a^{\frac{15}{8}}$

DẠNG 2: Đồ thị của hàm số mũ

Ví dụ 5. Xét tính đồng biến, nghịch biến của các hàm số sau trên $\mathbb{R}$?

a) $y=(0,6)^x$

b) $y=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$

c) $y=\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$

d) $y=\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^x$

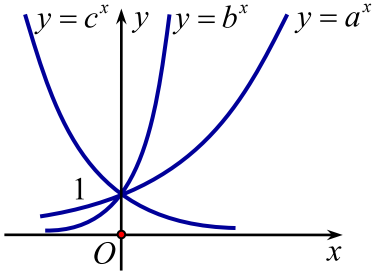
e) $y=\left(\sqrt{10}-3\right)^x$

f) $y=2^{-x}$

g) $y=\dfrac{1}{4^x}$

Ví dụ 6. Vẽ đồ thị hàm số $y=2^x$ và đồ thị hàm số $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

Ví dụ 7. Cho các hàm số $y=a^x$, $y=b^x$, $y=c^x$ $\left(0<a,\ b,\ c\neq 1\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hãy so sánh các số a,b,c **?**



DẠNG 3: Bài toán thực tế

Ví dụ 7. Trong vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bởi công thức $m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, trong đó m_0 là khối lượng ban đầu của chất phóng xạ (tại thời điểm $t = 0$); T là chu kì bán rã (từ là khoảng thời gian để một nửa khối lượng chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Chu kì bán rã của Cacbon ^{14}C là khoảng 5730 năm. Người ta tìm được trong một mẫu đồ cổ một lượng Cacbon và xác định được nó đã mất khoảng 25 lượng Cacbon ban đầu của nó. Hỏi mẫu đồ cổ có tuổi là bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: $m(t) = (100\% - 25\%)m_0 = 75\% m_0$

Khi đó, ta có: $75\% m_0 = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5330}} \Leftrightarrow t = 5730 \cdot \log_{0,5} 0,75 \approx 2378$ (năm).

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1: So sánh các cặp số sau:

a) $2^{\sqrt{2}}$ và $\left(\sqrt{2}\right)^3$

b) $0,2^{-3}$ và $0,2^{-2\sqrt{2}}$

Bài 3: Hàm số sau đây đồng biến hay nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

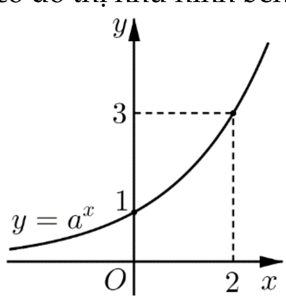
a) $y=\left(\sqrt{2}\right)^x$.

b) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

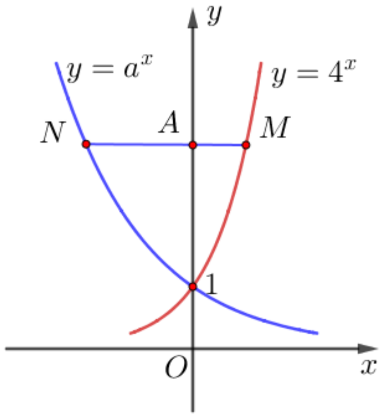
c) $y=\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$.

d) $y=\left(\dfrac{e}{\pi}\right)^x$.

Bài 3: Cho hàm số $y=a^x$ có đồ thị như hình bên. Tìm giá trị của a ?



Bài 4: Cho số thực a dương khác 1. Biết rằng bất kì đường thẳng nào song song với trục Ox mà cắt các đồ thị $y=4^x$ và $y=a^x$, trục tung lần lượt tại M, N, A thì $AN=2AM$. Tìm giá trị của a ?



<u>Bài 5:</u> Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t) = s(0).2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con?

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. Nếu $a>1$ thì $a^x>a^y$ khi và chỉ khi $x>y$.

B. Nếu $a>1$ thì $a^x\le a^y$ khi và chỉ khi $x\le y$

C. Nếu $0<a<1$ thì $a^x>a^y$ khi và chỉ khi $x>y$.

D. Nếu $0<a\ne 1$ thì $a^x=a^y$ khi và chỉ khi $x=y$.

Câu 2: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017}>\left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}$. **B.** $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018}>\left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$.

C. $2^{\sqrt{2}+1}>2^{\sqrt{3}}$. **D.** $\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}<\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2017}$.

Câu 3: Hàm số nào dưới đây đồng biến trên tập xác định của nó?

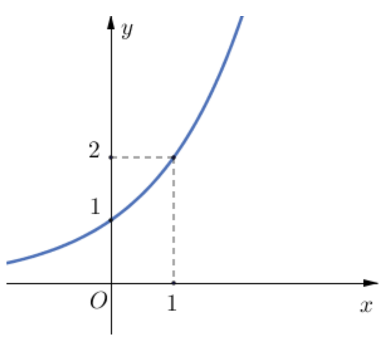
A. $y=\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$. **B.** $y=\left(\dfrac{\mathrm{e}}{\pi}\right)^x$. **C.** $y=\left(\sqrt{2}\right)^x$. **D.** $y=\left(0,5\right)^x$.

Câu 4: Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $y=\dfrac{1}{5^x}$. **B.** $y=\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^x$.

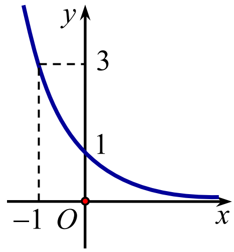
C. $y=\dfrac{1}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)^x}$. **D.** $y=\left(\dfrac{\mathrm{e}}{3}\right)^x$.

Câu 5: Đường cong trong hình sau là đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số sau:



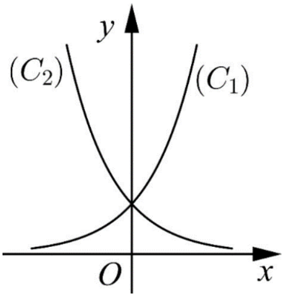
A. $y=\left(\sqrt{2}\right)^x$. **B.** $y=x^2$. **C.** $y=2^x$. **D.** $y=x+1$.

Câu 6: Đồ thị hình bên là của hàm số nào?



A. $y=\left(\sqrt{3}\right)^{x}$. **B.** $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$. **C.** $y=\left(\sqrt{2}\right)^{x}$. **D.** $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}$.

Câu 7: Cho hai hàm số $y=a^{x}, y=b^{x}$ với a,b là hai số thực dương khác 1, lần lượt có đồ thị là (C_1) và (C_2) như hình bên.

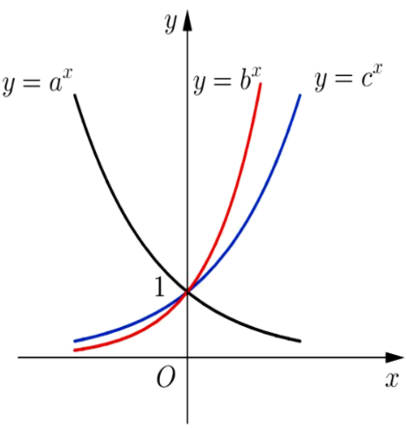


Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $0<a<b<1$. **B.** $0<b<1<a$.

C. $0<a<1<b$. **D.** $0<b<a<1$.

Câu 8: Cho ba số thực dương a,b,c khác 1. Đồ thị các hàm số $y=a^{x}$, $y=b^{x}$, $y=c^{x}$ được cho trong hình vẽ bên

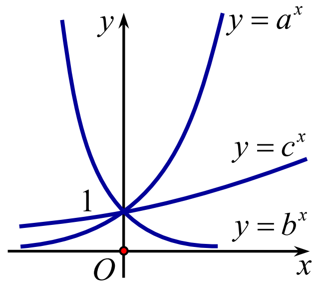


Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a<b<c$. **B.** $a<c<b$. **C.** $b<c<a$. **D.** $c<a<b$

.

Câu 9: Hình vẽ dưới đây là đồ thị của các hàm số mũ $y=a^x$, $y=b^x$, $y=c^x$

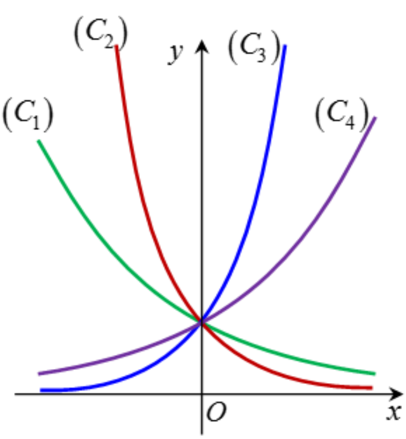


Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a>b>c$. **B.** $a>c>1>b$.

C. $b>c>1>a$. **D.** $b>a>c$.

Câu 10: Cho bốn hàm số $y=\left(\sqrt{3}\right)^x$, $y=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$, $y=4^x$, $y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$ và bốn đường cong (C_1), (C_2), (C_3), (C_4) như hình vẽ bên. Hỏi các đồ thị trên lần lượt tương ứng với hình vẽ nào?



A. (C_2), (C_3), (C_4), (C_1). **B.** (C_4), (C_3), (C_2), (C_1).

C. (C_4), (C_1), (C_3), (C_2). **D.** (C_1), (C_2), (C_3), (C_4).

E. HƯỚNG DẪN GIẢI

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: So sánh các cặp số sau:

a) Vì $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$ nên $2^{\sqrt{2}} < 2^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^3$

b) Vì $-3 < -2\sqrt{2}$ nên $0,2^{-3} > 0,2^{-2\sqrt{2}}$

Bài 2: Hàm số sau đây đồng biến hay nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

a) Hàm số $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$ đồng biến

b) Hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ nghịch biến

c) Hàm số $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ nghịch biến

d) Hàm số $y = \left(\frac{e}{\pi}\right)^x$ nghịch biến

Bài 3: Đồ thị hàm số đi qua $(2;3)$ nên $3 = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{3}$.

Bài 4:

Vì $AN = 2AM$ nên $M\left(x_1\,;4^{x_1}\right)$, $N\left(-2x_1\,;a^{-2x_1}\right)$.

Ta có $4^{x_1} = a^{-2x_1} \Leftrightarrow 4 = \frac{1}{a^2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.

Bài 5:

Sau 3 phút ta có: $s(3) = s(0).2^3 \Rightarrow s(0) = \frac{s(3)}{2^3} = 78125$.

Tại thời điểm t số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con nên ta có:

$s(t) = s(0).2^t \Leftrightarrow 2^t = \frac{s(t)}{s(0)} \Leftrightarrow 2^t = \frac{10.000.000}{78125} \Leftrightarrow 2^t = 128 \Leftrightarrow t = 7$.

1.C	2.B	3.C	4.C	5.C	6.D	7.B	8.B	9.B	10.C

Bài 3.2

HÀM SỐ LÔGARIT

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. Hàm số lôgarit

Cho số thực $a > 0$ và $a \neq 1$.
Hàm số dạng $y = \log_a x$ được gọi là hàm số lôgarit cơ số a.

— Tập xác định: $D = (0; +\infty)$

— Tập giá trị: $T = \mathbb{R}$

— Hàm số liên tục trên $(0; +\infty)$.

— Nếu $a > 1$ thì hàm số $y = \log_a x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

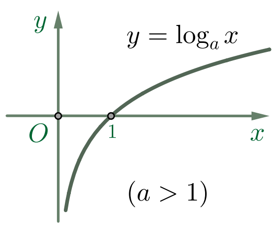
$\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} y = \lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$

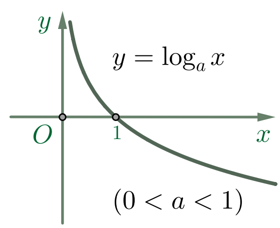
— Nếu $0 < a < 1$ thì hàm số $y = \log_a x$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} y = \lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$

II. Đồ thị của hàm số lôgarit

Đồ thị hàm số $y = \log_a x$ đi qua điểm $(a; 1)$, cắt trục hoành tại điểm $(1; 0)$ và nằm bên phải trục tung.





B. CÁC DẠNG TOÁN.

<u>DẠNG 1:</u> So sánh các cặp số

<u>Phương pháp:</u>

- Với $a>1$, nếu $x<y$ thì $\log_a x<\log_a y$.
- Với $0<a<1$, nếu $x<y$ thì $\log_a x>\log_a y$.

<u>Ví dụ 1.</u> So sánh

g) $\log_{0,2}3$ và $\log_{0,2}5$

h) $\log_{\frac{1}{5}}9$ và $\log_5\frac{1}{8}$

i) $\log_3 5$ và $\log_7 4$

<u>Ví dụ 2.</u> Tìm số lớn nhất trong các số sau $\log_3\frac{6}{5}$; $\log_3\frac{5}{6}$; $\log_{\frac{1}{3}}\frac{3}{2}$; $\log_{\sqrt{3}}2$

<u>Ví dụ 3.</u> Có bao nhiêu giá trị nguyên m thỏa $\log_{\frac{1}{2}}\left(m^2-m+2\right)\ge\log_{\frac{1}{2}}22$?

Lời giải.

Ta có

$\log_{\frac{1}{2}}\left(m^2-m+2\right)\ge\log_{\frac{1}{2}}22\Leftrightarrow m^2-m+2\le 22\Leftrightarrow m^2-m-20\le 0-4\le m\le 5$.

Từ đó suy ra có 10 giá trị nguyên m thỏa đề bài.

DẠNG 2: Đồ thị của hàm số lôgarit

Ví dụ 4. Xét tính đồng biến, nghịch biến của các hàm số sau trên tập xác định?

h) $y = \log_{0,6} x$

i) $y = \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x$

j) $y = \log_{2-\sqrt{3}} x$

k) $y = \log_{\frac{\pi}{3}} x$

l) $y = \log_{\frac{\pi}{4}} \dfrac{1}{x}$

Hướng dẫn giải

a) Hàm số $y = \log_{0,6} x$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$

b) Hàm số $y = \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$

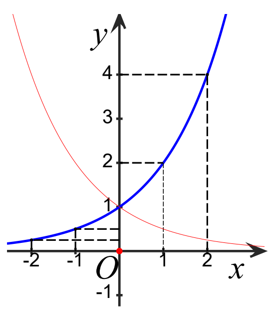
c) Hàm số $y = \log_{2-\sqrt{3}} x$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$

d) Hàm số $y = \log_{\frac{\pi}{3}} x$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

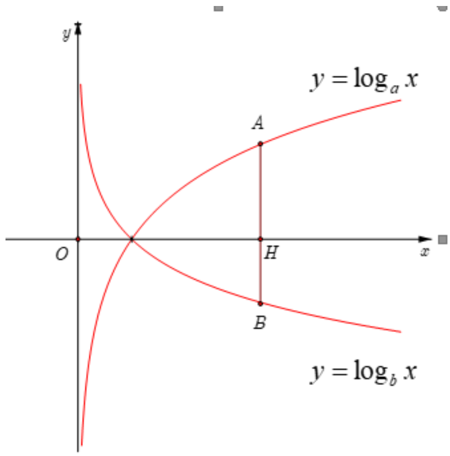
e) $y = \log_{\frac{\pi}{4}} \dfrac{1}{x} = -\log_{\frac{\pi}{4}} x$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

Ví dụ 5. Vẽ đồ thị hàm số $y = \log_2 x$ và đồ thị hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

Hướng dẫn giải



Ví dụ 6. Cho a và b là các số thực dương khác 1. Biết rằng bất kì đường thẳng nào song song với trục tung mà cắt các đồ thị $y = \log_a x$, $y = \log_b x$ và trục hoành lần lượt tại A, B và H ta đều có $2HA = 3HB$ (hình vẽ bên dưới). Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b.



Hướng dẫn giải

Ta có : $HA=\log_a x$ và $HB=-\log_b x$.

$2HA=3HB \Leftrightarrow 2\log_a x=-3\log_b x$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{a}} x=\log_{b^{\frac{-1}{3}}} x \Rightarrow \sqrt{a}=\frac{1}{\sqrt[3]{b}} \Rightarrow \sqrt{a}.\sqrt[3]{b}=1 \Rightarrow a^3.b^2=1 .$$

DẠNG 3: Bài toán thực tế

Ví dụ 7. Cường độ trận động đất M (Richter) được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8,3 độ Richter. Cũng trong cùng năm đó, một trận động đất khác ở Nam Mỹ có cường độ 9,3 độ Richter. Hỏi trận động đất ở Nam Mỹ có biên độ gấp mấy lần biên độ trận động đất ở San Francisco?

Lời giải

Gọi A, B lần lượt là biên độ rung chấn tối đa trận động đất ở San Francisco và ở Nam Mỹ.

Trận động đất ở San Francisco có cường độ 8,3 độ Richter nên

$$8,3 = \log A - \log A_0 \Leftrightarrow 8,3 = \log \frac{A}{A_0} \Leftrightarrow \frac{A}{A_0} = 10^{8,3} \Leftrightarrow A_0 = \frac{A}{10^{8,3}}$$

Trận động đất ở Nam Mỹ có cường độ 9,3 độ Richter nên

$$9,3 = \log B - \log A_0 \Leftrightarrow 9,3 = \log \frac{B}{A_0} \Leftrightarrow \frac{B}{A_0} = 10^{9,3} \Leftrightarrow A_0 = \frac{B}{10^{9,3}}$$

Khi đó $A_0 = \frac{A}{10^{8,3}} = \frac{B}{10^{9,3}} \Rightarrow \frac{A}{B} = 10^{8,3-9,3} \Leftrightarrow \frac{A}{B} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow B = 10$ A

Vậy trận động đất ở Nam Mỹ có biên độ gấp 10 lần biên độ trận động đất ở San Francisco.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1: So sánh các cặp số : $\log_{\pi} 3$ và $\log_{\pi} \sqrt{5}$

Bài 2: Tìm tập xác định của các hàm số sau :

c) $y = \log_2\left(x^2 - 1\right)$

d) $y = \log_2\left(3^x - 2\right)$

e) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2 - \log_3 x}}$

Bài 3: Vẽ đồ thị hàm số

a) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$

b) $y = \log x$

c) $y = \log_2 \dfrac{1}{x}$

Bài 4: Một nguồn âm đặt ở *O* đẳng hướng trong không gian có công suất truyền âm P không đổi. Biết rằng cường độ âm tại một điểm cách nguồn một đoạn *R* là $I = \dfrac{P}{4\pi R^2}$ và mức cường độ âm tại điểm đó là $L = \log\dfrac{I}{I_0} Ben$ với I_0 là hằng số. Như vậy có thể thấy rằng R luôn tỉ lệ với $10^{-L/2}$. Áp dụng tính chất này để tính mức cường độ âm tại trung điểm *M* của đoạn thẳng *AB* biết mức cường độ âm tại *A, B* lần lượt là $L_A = 20$ dB, $L_B = 60$ dB. và *O* nằm trên đoạn thẳng *AB*.

Bài 5: Các nhà khoa học thực hiện nghiên cứu trên một nhóm học sinh bằng cách cho họ xem một danh sách các loài động vật và sau đó kiểm tra xem họ nhớ được bao nhiêu % mỗi tháng. Sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh tính theo công thức $M\left(t\right) = 75 - 20\ln\left(t+1\right), t \ge 0$ (đợn vị %). Hỏi khoảng thời gian ngắn nhất bao lâu thì số học sinh trên nhớ được danh sách đó dưới 10%?

Bài 6: Trong một bản hợp ca, coi mọi ca sĩ đều hát với cùng cường độ âm và coi cùng tần số. Khi một ca sĩ hát thì mức cường độ ân là 68 dB. Khi cả ban hợp ca cùng hát thì đo được mức cường độ âm là 80 dB. Tính số ca sĩ có trong ban hợp ca đó biết mức cường độ ân L được tín theo công thức $L=10\log\frac{I}{I_0}$. Trong đó I là cường độ âm và I_0 là cường độ âm chuẩn.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho a là số thực lớn hơn 1. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y=\log_a x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $y=\log_a x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số $y=\log_a x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

D. Hàm số $y=\log_a x$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Câu 2. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\log_2\left(x^2-2x-3\right)$.

A. $\mathrm{D}=(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$. **B.** $\mathrm{D}=[-1;3]$.

C. $\mathrm{D}=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$. **D.** $\mathrm{D}=(-1;3)$.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\log\left(x^2-2mx+m\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m<0$; $m>1$. **B.** $0<m<1$.

C. $m\le 0$; $m\ge 1$. **D.** $0\le m\le 1$.

Câu 4. Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. $y=\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} x$. **B.** $y=\log_{\frac{e}{2}} x$.

C. $y=\log_{\frac{e}{3}} x$. **D.** $y=\log_{\frac{\pi}{4}} x$.

Câu 5. Cho hai số thực a và b, với $1<a<b$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng ?

A. $\log_a b<1<\log_b a$. **B.** $1<\log_a b<\log_b a$.

C. $\log_b a<\log_a b<1$. **D.** $\log_b a<1<\log_a b$.

Câu 6. Cho các số thực dương a,b với $a \neq 1$ và $\log_a b < 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

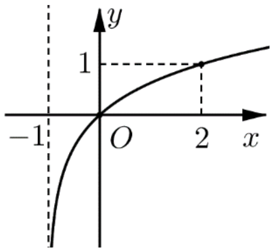
A. $\left[\begin{array}{l} 0 < b < 1 < a \\ 0 < a < 1 < b \end{array}\right.$

B. $\left[\begin{array}{l} 0 < b < 1 < a \\ 1 < a,b \end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} 0 < a,b < 1 \\ 1 < a,b \end{array}\right.$

D. $\left[\begin{array}{l} 0 < b,a < 1 \\ 0 < a < 1 < b \end{array}\right.$

Câu 7. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



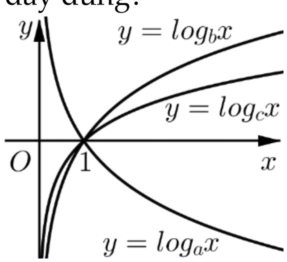
A. $y = \log_2 x$.

B. $y = \log_2(x+1)$.

C. $y = \log_3 x + 1$.

D. $y = \log_3(x+1)$.

Câu 8. Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực dương khác 1. Hình vẽ bên là đồ thị của ba hàm số $y = \log_a x,\ \ y = \log_b x,\ \ y = \log_c x.$ Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $a < c < b.$

B. $a < b < c.$

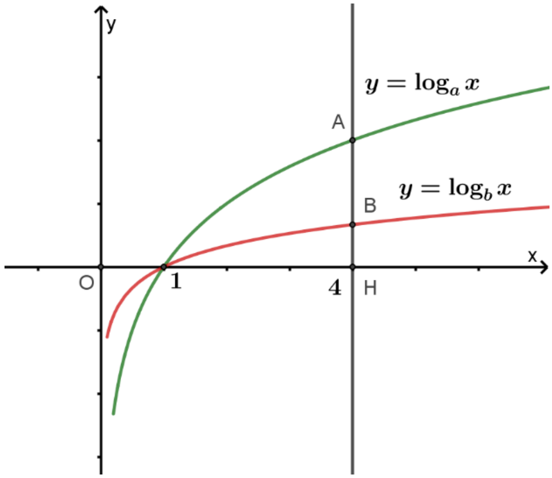
C. $b < a < c.$

D. $b > a > c.$

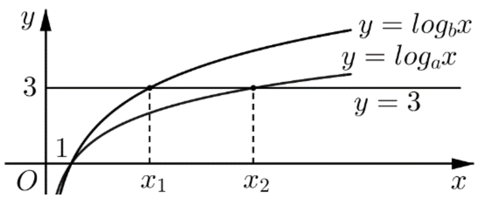
Câu 9. Cho điểm $H(4;0)$ đường thẳng $x = 4$ cắt hai đồ thị hàm số $y = \log_a^x$ và $y = \log_b^x$ lần lượt tại hai điểm A, B và sao cho $AB = 2BH$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $b = a^3$. **B.** $a = b^3$.

C. $a = 3b$. **D.** $b = 3a$.



Câu 10. Hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Đường thẳng $y = 3$ cắt hai đồ thị tại các điểm có hoành độ x_1, x_2. Biết rằng $x_2 = 2x_1$, giá trị của $\frac{a}{b}$ bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt[3]{2}$. **D.** 2.

E. HƯỚNG DẪN GIẢI

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1:

$\log_\pi 3 > \log_\pi \sqrt{5}$

Bài 2:

a) $y=\log_2\left(x^2-1\right)$

Điều kiện xác định: $x^2-1>0 \Leftrightarrow x<-1 \ \vee \ x>1$.

Tập xác định là $D=\left(-\infty;-1\right)\cup\left(1;+\infty\right)$

b) $y=\log_2\left(3^x-2\right)$

Điều kiện xác định: $3^x-2>0 \Leftrightarrow 3^x>2 \Leftrightarrow x>\log_3 2.$.

Tập xác định là $D=\left(\log_3 2;+\infty\right)$.

c) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2-\log_3 x}}$

Điều kiện xác định: $2-\log_3 x>0 \Leftrightarrow \log_3 x<2 \Leftrightarrow 0<x<9$

Tập xác định là $D=\left(0;9\right)$.

Bài 4:

M là trung điểm $AB \Rightarrow 2R_M=R_A+R_B$

Do R tỉ lệ với $10^{-L/2} \Rightarrow 2.10^{-L_M/2}=10^{-10}+10^{-30}$

$\Rightarrow L_M=-2.\log\left(\dfrac{10^{-10}+10^{-30}}{2}\right)=20,6dB$

Bài 5:

Theo đề ta có: $75-20\ln\left(t+1\right)\le 10\%$

$\Leftrightarrow \ln\left(t+1\right)\ge 3,25$

$\Leftrightarrow t\ge 24,79$

Vậy cần ít nhất 25 tháng để số học sinh trên nhớ được danh sách đó dưới 10%

Bài 6:

Ta có: $L=10\log\dfrac{I}{I_0}=68$ và $L_n=10\lg\dfrac{I_n}{I_0}=80$. $I_n=nI_1 \Rightarrow n=\dfrac{I_n}{I_1}$

Gọi n là số ca sĩ.

$$L_n-L_1=10\log\frac{I_1}{I_0}-10\log\frac{I_n}{I_0}=10\log\frac{I_n}{I_1}$$

$$\Rightarrow n=\frac{I_n}{I_1}=10^{\frac{L_n-L_1}{10}}=10^{\frac{80-68}{10}}=\sqrt[5]{10^6}\approx 16$$

1.C	2.C	3.B	4.B	5.D	6.A	7.D	8.B	9.A	10.C

<u>Câu 1:</u> Chọn C.

<u>Câu 2:</u> ChọnC.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow x^2-2x-3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<-1 \end{array}\right.$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathrm{D}=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

<u>Câu 3:</u> ChọnB.

Ycbt $\Leftrightarrow x^2-2mx+m>0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta'=m^2-m<0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m<1$.

<u>Câu 4:</u> ChọnB. Vì cơ số $a=\dfrac{e}{2}>1$.

<u>Câu 5:</u> ChọnD.

Ta có : $b>a>1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a b>\log_a a \Leftrightarrow \log_a b>1 \\ \log_b b>\log_b a \Leftrightarrow 1>\log_b a \end{cases} \Leftrightarrow \log_b a<1<\log_a b.$

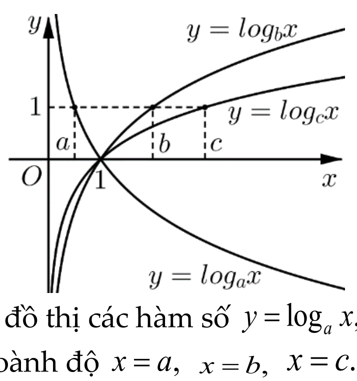
<u>Câu 6:</u> Chọn A. .

<u>Câu 7:</u> Chọn D.

Dựa vào đồ thị thấy có tiệm cận đứng $x=-1$. Loại đáp án A, C

Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(2;1)$

<u>Câu 8:</u> Chọn B.



Kẻ đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị các hàm số $y=\log_a x,\ \ y=\log_b x,\ \ y=\log_c x$ lần lượt tại các điểm có hoành độ $x=a,\ \ x=b,\ \ x=c.$

Dựa vào đồ thị ta thấy $a<b<c.$

<u>Câu 9:</u> Chọn A.

Ta có : $AB=2BH \Leftrightarrow \left|\log_a^4\right|=3\left|\log_b^4\right| \Leftrightarrow \left|\log_4^b\right|=3\left|\log_4^a\right|$.

Từ đồ thị hàm số ta có $\left|\log_4^b\right|=3\left|\log_4^a\right| \Rightarrow \log_4^b=3\log_4^a \Rightarrow b=a^3$.

Câu 10: **Chọn C.**

Từ đồ thị, suy ra:

- x_1 là nghiệm của phương trình $\log_b x = 3$ nên $\log_b x_1 = 3 \Leftrightarrow x_1 = b^3$.
- x_2 là nghiệm của phương trình $\log_a x = 3$ nên $\log_a x_2 = 3 \Leftrightarrow x_2 = a^3$.

Do $x_2 = 2x_1 \longrightarrow a^3 = 2.b^3 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^3 = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \sqrt[3]{2}$.

Bài 4 PHƯƠNG TRÌNH BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow a = 1$ hoặc $\begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$.
- $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) < g(x),\ khi\ a > 1 \\ f(x) > g(x),\ khi\ 0 < a < 1 \end{array}\right.$. (các trường hợp dấu $\leq ; > ; \geq$ giải tương tự theo quy tắc so sánh hai lũy thừa cùng cơ số).
- Phương trình $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1,\ b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases}$.
- Phương trình $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).\log_a b$ hoặc $\log_b a^{f(x)} = \log_b b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x).\log_b a = g(x)$.
- Bất phương trình $a^{f(x)} < b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} < \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x).\log_a b$ nếu $a > 1$ hoặc $\log_a a^{f(x)} > \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x).\log_a b$ nếu $0 < a < 1$.
- $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) > 0 \end{cases}$.
- $\log_a g(x) = f(x) \quad (0 < a \neq 1) \Leftrightarrow \log_a g(x) = \log_a a^{f(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ g(x) = a^{f(x)} \end{cases}$.
- $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) > 0,\ khi\ 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) < g(x),\ khi\ a > 1 \end{array}\right.$ (các trường hợp bất phương trình mang dấu khác làm tương tự theo quy tắc so sánh 2 logarit cùng cơ số).
- $\log_a g(x) < f(x) \quad (0 < a \neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ g(x) < a^{f(x)} \end{cases}$ nếu $a > 1$ hoặc $\begin{cases} g(x) > 0 \\ g(x) > a^{f(x)} \end{cases}$ nếu $0 < a < 1$. Các trường hợp khác làm tương tự.

❖ **Chú ý:**

B. CÁC DẠNG TOÁN.

DẠNG 1: ĐƯA VỀ CÙNG CƠ SỐ

Phương pháp:

+ Nắm vững khái niệm cơ bản

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau:

a) $27^{2x-3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2}$.

b) $9^x-2^{x+\frac{1}{2}}=2^{x+\frac{3}{2}}-3^{2x-1}$.

c) $\log_2\left(x^2-x+2\right)=1$

d) $\log_2\left(x+1\right)+1=\log_2\left(3x-1\right)$

Lời giải

a) Ta có: $27^{2x-3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2}\Leftrightarrow 3^{6x-9}=3^{-x^2-2}\Leftrightarrow 6x-9=-x^2-2\Leftrightarrow x^2+6x-7=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-7\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{1;-7\}$.

b) Ta có $9^x-2^{x+\frac{1}{2}}=2^{x+\frac{3}{2}}-3^{2x-1}\Leftrightarrow 9^x+3^{2x-1}=2^{x+\frac{3}{2}}+2^{x+\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow 9^x+\frac{1}{3}.9^x=2\sqrt{2}.2^x+\sqrt{2}.2^x\Leftrightarrow\frac{4}{3}.9^x=3\sqrt{2}.2^x$

$\Leftrightarrow\left(\frac{9}{2}\right)^x=\frac{9}{2\sqrt{2}}\Leftrightarrow x=\log_{\frac{9}{2}}\frac{9}{2\sqrt{2}}$.

c) $\log_2\left(x^2-x+2\right)=1\Leftrightarrow x^2-x+2=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

d) Điều kiện xác định $x>\frac{1}{3}$.

$\log_2\left(x+1\right)+1=\log_2\left(3x-1\right)\Leftrightarrow\log_2\left[\left(x+1\right).2\right]=\log_2\left(3x-1\right)$.

$\Leftrightarrow 2\left(x+1\right)=3x-1\Leftrightarrow x=3$

Vậy tập nghiệm phương trình là $S=\{3\}$.

<u>**Ví dụ 2.**</u> Giải các bất phương trình sau:

a) $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{x}}\le\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^3$.

b) $8^x.2^{1-x^2}>\left(\sqrt{2}\right)^{2x}$.

c) $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1}\ge\left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$.

d) $\log_3\left(13-x^2\right)\ge 2$.

Lời giải

a) $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{x}} \le \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{3}$.

Vì $\frac{2}{\sqrt{5}} < 1$ nên bất phương trình $\Leftrightarrow \frac{1}{x} \ge 3 \Leftrightarrow \frac{1-3x}{x} \ge 0 \Leftrightarrow 0 < x \le \frac{1}{3}$

b) $8^{x}.2^{1-x^2} > \left(\sqrt{2}\right)^{2x}$.

Bất phương trình $8^{x}.2^{1-x^2} > \left(\sqrt{2}\right)^{2x} \Leftrightarrow 2^{3x}.2^{1-x^2} > 2^{x} \Leftrightarrow 2^{3x+1-x^2} > 2^{x}$

$\Leftrightarrow 3x+1-x^2 > x \Leftrightarrow x^2-2x-1<0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right)$.

c) $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1} \ge \left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$.

$\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1} \ge \left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1} \ge \left(\sqrt{5}+2\right)^{\frac{1-x}{x+1}} \Leftrightarrow x-1 \ge \frac{1-x}{x+1}$

$\Leftrightarrow \frac{(1-x)(x+2)}{x+1} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 1 \\ -2 \le x < -1 \end{array}\right.$.

d) $\log_3\left(13-x^2\right) \ge 2$.

Bất phương trình $\log_3\left(13-x^2\right) \ge 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 13-x^2>0 \\ 13-x^2 \ge 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 < 13 \\ x^2 \le 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{13} < x < \sqrt{13} \\ -2 \le x \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \le x \le 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(13-x^2\right) \ge 2$ là $\left[-2;2\right]$.

DẠNG 2:
PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

Phương pháp:

$f\left[a^{g(x)}\right]=0 \quad (0<a\ne 1) \Leftrightarrow \begin{cases} t=a^{g(x)}>0 \\ f(t)=0 \end{cases}$.

Ta thường gặp các dạng:

- $m.a^{2f(x)}+n.a^{f(x)}+p=0$.
- $m.a^{f(x)}+n.b^{f(x)}+p=0$, trong đó $a.b=1$. Đặt $t=a^{f(x)}$ $(t>0)$, suy ra $b^{f(x)}=\frac{1}{t}$.
- $m.a^{2f(x)}+n.(a.b)^{f(x)}+p.b^{2f(x)}=0$. Chia hai vế cho $b^{2f(x)}$ và đặt

$t=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{f(x)}>0$.

$f\left[\log_a g(x)\right]=0 \quad (0<a\neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} t=\log_a g(x) \\ f(t)=0 \end{cases}$.

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau:

a) $3.9^x-10.3^x+3=0$.

b) $4^{x^2+x}+2^{x^2+x+1}-3=0$.

c) $\left(2-\sqrt{3}\right)^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x=4$.

d) $9^x-6^x=2^{2x+1}$.

Lời giải

a) $3.9^x-10.3^x+3=0$.

Phương trình $\Leftrightarrow 3.3^{2x}-10.3^x+3=0$.

Đặt $t=3^x>0$. Phương trình trở thành $3t^2-10t+3=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}$ hoặc $t=3$.

Với $t=\dfrac{1}{3} \Rightarrow 3^x=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x=-1$

Với $t=3 \Leftrightarrow 3^x=3 \Leftrightarrow x=1$.

Vậy $S=\{-1;1\}$.

b) $4^{x^2+x}+2^{x^2+x+1}-3=0$.

Phương trình tương đương với $4^{x^2+x}+2.2^{x^2+x}-3=0$.

Đặt $t=2^{x^2+x}$, $t>0$. Phương trình trở thành $t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-3\ (l) \end{array}\right.$.

Với $t=1$, ta được $2^{x^2+x}=1 \Leftrightarrow x^2+x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

c) $\left(2-\sqrt{3}\right)^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x=4$.

Ta có: $\left(2-\sqrt{3}\right)^x.\left(2+\sqrt{3}\right)^x=1$. Đặt $t=\left(2-\sqrt{3}\right)^x, t>0 \Rightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^x=\dfrac{1}{t}$.

Phương trình trở thành: $t+\dfrac{1}{t}=4 \Rightarrow t^2-4t+1=0 \Leftrightarrow t=2\pm\sqrt{3}$.

Với $t=2-\sqrt{3} \Rightarrow \left(2-\sqrt{3}\right)^x=2-\sqrt{3} \Leftrightarrow x=1$.

Với $t=2+\sqrt{3} \Rightarrow \left(2-\sqrt{3}\right)^x=2+\sqrt{3} \Leftrightarrow \left(2-\sqrt{3}\right)^x=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow x=-1$.

d) $9^x-6^x=2^{2x+1}$.

Phương trình $9^x - 6^x = 2^{2x+1} \Leftrightarrow 9^x - 6^x = 2.4^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{3}{2}\right)^x = 2\ (*)$.

Đặt $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t$ với $t > 0$, phương trình $(*)$ trở thành

$$t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1\ \ (l) \\ t = 2 \end{array}\right..$$

Với $t = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3}{2}} 2 > 0$.

<u>Ví dụ 4.</u> Giải các phương trình sau:

a) $\log_x 2 + \log_2 x = \frac{5}{2}$.

b) $\log_2^2(4x) - \log_{\sqrt{2}}(2x) = 5$.

c) $\log_x(125x).\log_{25}^2 x = 1$.

d) $\log_2^2 x + \sqrt{\log_2 x + 1} = 1$.

Lời giải

a) $\log_x 2 + \log_2 x = \frac{5}{2}$.

Điều kiện phương trình: $x > 0, x \neq 1$.

$$\log_x 2 + \log_2 x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} + \log_2 x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 - \frac{5}{2}\log_2 x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = \sqrt{2} \end{array}\right.$$

Suy ra $S = \left\{\sqrt{2}; 4\right\}$.

b) $\log_2^2(4x) - \log_{\sqrt{2}}(2x) = 5$.

Điều kiện: $x > 0$.

$$\log_2^2(4x) - \log_{\sqrt{2}}(2x) = 5 \Leftrightarrow (1 + \log_2(2x))^2 - 2\log_2(2x) - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2^2(2x) = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(2x) = 2 \\ \log_2(2x) = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \frac{1}{8} \end{array}\right..$$

c) $\log_x(125x).\log_{25}^2 x = 1$.

Điều kiện $x > 0; x \neq 1$.

Ta có $\log_x(125x).\log_{25}^2 x = 1 \Leftrightarrow (\log_x 125 + \log_x x)\left(\frac{1}{2}\log_5 x\right)^2 = 1$

$$\Leftrightarrow \left(3.\log_x 5+1\right)\log_5^2 x=4$$

Đặt $\log_5 x=t$ phương trình tương đương:

$$\left(\frac{3}{t}+1\right)t^2=4\Leftrightarrow t^2+3t-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\\ t=-4\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5 x=1\\ \log_5 x=-4\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5\\ x=\dfrac{1}{625}\end{array}\right..$$

d) $\log_2^2 x+\sqrt{\log_2 x+1}=1$.

Điều kiện $\begin{cases} x>0\\ \log_2 x+1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x>0\\ x\geq \dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x\geq \dfrac{1}{2}$.

Đặt $\sqrt{\log_2 x+1}=t$, $(t\geq 0)\Rightarrow \log_2 x=t^2-1$ ta có phương trình

$$\left(t^2-1\right)^2+t=1\Leftrightarrow t^4-2t^2+t=0\Leftrightarrow t\left(t^3-2t+1\right)=0\Leftrightarrow t\left(t-1\right)\left(t^2-2t+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\ (t/m)\\ t=1\ (t/m)\\ t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\ (t/m)\\ t=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\ (loai)\end{array}\right..$$

Với $t=0$ thì $\log_2 x=-1\Leftrightarrow x=2^{-1}$. Với $t=1$ thì $\log_2 x=0\Leftrightarrow x=2^0$.

Với $t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ thì $\log_2 x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow x=2^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$.

<u>Ví dụ 5.</u> Giải các bất phương trình sau:

a) $3^{1-x}+2.\left(\sqrt{3}\right)^{2x}\leq 7$.

b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}}+3\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}+1}>12$.

c) $6.4^x-13.6^x+6.9^x>0$.

d) $\left(3^{2x}-9\right)\left(3^x-\dfrac{1}{27}\right)\sqrt{3^{x+1}-1}\leq 0$.

Lời giải

a) $3^{1-x}+2.\left(\sqrt{3}\right)^{2x}\leq 7$.

Bất phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{3}{3^x}+2.3^x\leq 7\Leftrightarrow 2.3^{2x}-7.3^x+3\leq 0$.

Đặt $t=3^x$, $t>0$. Bất phương trình trở thành $2t^2-7t+3\le 0\Leftrightarrow \frac{1}{2}\le t\le 3$.

$\Rightarrow \frac{1}{2}\le 3^x\le 3\Leftrightarrow -\log_3 2\le x\le 1$.

Vậy $S=\left[-\log_3 2;1\right]$.

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}}+3\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}+1}>12$.

Đặt $t=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}\ (t>0)$. Khi đó bất phương trình đã cho trở thành

$t^2+t>12\Leftrightarrow (t-3)(t+4)>0\Leftrightarrow t>3$.

Từ đó suy ra: $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}>3\Leftrightarrow \frac{1}{x}<-1\Leftrightarrow -1<x<0$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-1;0)$.

c) $6.4^x-13.6^x+6.9^x>0$.

Ta có

$6.4^x-13.6^x+6.9^x>0\Leftrightarrow 6.\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-13.\left(\frac{2}{3}\right)^x+6>0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^x>\frac{3}{2}\\ \left(\frac{2}{3}\right)^x<\frac{2}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-1\\ x>1\end{array}\right.$$

d) $\left(3^{2x}-9\right)\left(3^x-\frac{1}{27}\right)\sqrt{3^{x+1}-1}\le 0$.

Điều kiện $3^{x+1}-1\ge 0\Leftrightarrow 3^{x+1}\ge 1\Leftrightarrow x\ge -1$. Ta có $x=-1$ là một nghiệm của bất phương trình.

Với $x>-1$, bất phương trình tương đương với $\left(3^{2x}-9\right)\left(3^x-\frac{1}{27}\right)\le 0$.

Đặt $t=3^x>0$, ta có $\left(t^2-9\right)\left(t-\frac{1}{27}\right)\le 0\Leftrightarrow (t-3)(t+3)\left(t-\frac{1}{27}\right)\le 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t\le -3\\ \frac{1}{27}\le t\le 3\end{array}\right..$$

Kết hợp điều kiện $t=3^x>0$ ta được nghiệm $\frac{1}{27}\le t\le 3$

$\Leftrightarrow \frac{1}{27} \le 3^x \le 3 \Leftrightarrow -3 \le x \le 1$.

<u>Ví dụ 6.</u> Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_2^2 x - 5\log_2 x - 6 \le 0$.

b) $\log_{\sqrt{5}}^2 x^5 - 25\log_{\sqrt{5}} x^2 - 75 \le 0$.

c) $\frac{16\log_2 x}{\log_2 x^2 + 3} - \frac{3\log_2 x^2}{\log_2 x + 1} < 0$.

d) $\log_2\left(5^x + 2\right) + 2.\log_{\left(5^x+2\right)} 2 > 3$.

Lời giải

a) $\log_2^2 x - 5\log_2 x - 6 \le 0 \ (1)$.

Điều kiện: $x > 0 \ (*)$

Đặt $t = \log_2 x \ (2)$.

(1) thành $t^2 - 5t - 6 \le 0 \Leftrightarrow -1 \le t \le 6 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} -1 \le \log_2 x \le 6 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le x \le 64$.

So với $(*)$: $(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le x \le 64$. Vậy $S = \left[\frac{1}{2};64\right]$.

b) $\log_{\sqrt{5}}^2 x^5 - 25\log_{\sqrt{5}} x^2 - 75 \le 0$.

Điều kiện $x > 0$.

$\log_{\sqrt{5}}^2 x^5 - 25\log_{\sqrt{5}} x^2 - 75 \le 0 \Leftrightarrow 4\log_5^2 x - 4\log_5 x - 3 \le 0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le \log_5 x \le \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} \le x \le \sqrt{125}$.

c) $\frac{16\log_2 x}{\log_2 x^2 + 3} - \frac{3\log_2 x^2}{\log_2 x + 1} < 0$.

Đặt $t = \log_2 x$.

Bất phương trình có dạng

$$\frac{16t}{2t+3} - \frac{6t}{t+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{2t(2t-1)}{(2t+3)(t+1)} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{-3}{2} < t < -1, \\ 0 < t < \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Khi đó $\left[\begin{array}{l} \frac{-3}{2} < \log_2 x < -1 \\ 0 < \log_2 x < \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2\sqrt{2}} < x < \frac{1}{2} \\ 1 < x < \sqrt{2} \end{array}\right.$.

d) $\log_2\left(5^x + 2\right) + 2.\log_{\left(5^x+2\right)} 2 > 3$.

Đặt $\log_2\left(5^x+2\right)=t$. Do $5^x+2>2$ với mọi x nên $\log_2\left(5^x+2\right)>\log_2 2=1$ hay $t>1$.

Bất phương trình đã cho trở thành: $t+\dfrac{2}{t}>3 \Leftrightarrow t^2-3t+2>0$ (do $t>1$)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<1 \\ t>2 \end{array}\right.$.

Đối chiếu với $t>1$ ta lấy $t>2$. Khi đó $\log_2\left(5^x+2\right)>2 \Leftrightarrow 5^x>2 \Leftrightarrow x>\log_5 2$.

Vậy bất phương trình có nghiệm là $S=\left(\log_5 2;+\infty\right)$.

DẠNG 3:
PHƯƠNG PHÁP MŨ HÓA, LOGARIT 2 VẾ

Phương pháp:

Dựa vào định nghĩa logarit.

Ví dụ 7. Giải các phương trình sau:

a) $3^{x^2+1}.25^{x-1}=\dfrac{3}{25}$.

b) $3^{x^2}.4^{x+1}-\dfrac{1}{3^x}=0$.

c) $\log_3\left(3^{2x-1}-3^{x-1}+1\right)=x$.

Lời giải

a) $3^{x^2+1}.25^{x-1}=\dfrac{3}{25}$.

Phương trình $3^{x^2+1}.25^{x-1}=\dfrac{3}{25} \Leftrightarrow \dfrac{3^{x^2+1}}{3}=\dfrac{1}{25^{x-1}.25} \Leftrightarrow 3^{x^2}=\dfrac{1}{25^x}$. $\quad(*)$

Lấy logarit cơ số 3 hai vế của $(*)$, ta được $\Leftrightarrow \log_3 3^{x^2}=\log_3\dfrac{1}{25^x}$

$\Leftrightarrow x^2=x\log_3\dfrac{1}{25} \Leftrightarrow x^2-x\log_3\dfrac{1}{25}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\log_3\dfrac{1}{25} \end{array}\right.$.

b) $3^{x^2}.4^{x+1}-\dfrac{1}{3^x}=0$.

Ta có

$3^{x^2}.4^{x+1}-\dfrac{1}{3^x}=0 \Leftrightarrow 3^{x(x+1)}.4^{x+1}=1 \Leftrightarrow \log\left(3^{x(x+1)}.4^{x+1}\right)=0 \Leftrightarrow \log 3^{x(x+1)}+\log 4^{x+1}=0$.

$\Leftrightarrow x\left(x+1\right)\log 3+\left(x+1\right)\log 4=0$

$\Leftrightarrow \left(x+1\right)\left(x\log 3+\log 4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-\log_3 4 \end{array}\right.$

c) $\log_3\left(3^{2x-1}-3^{x-1}+1\right)=x$.

$\log_3\left(3^{2x-1}-3^{x-1}+1\right)=x \Leftrightarrow 3^{2x-1}-3^{x-1}+1=3^x \Leftrightarrow 3^{2x}-4.3^x+3=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x=3 \\ 3^x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \end{array}\right.$.

d) .

Ví dụ 8. Giải các bất phương trình sau:

a) $10^{x^2}<\mathrm{e}^x$.

b) $2^{x^2-2x-1}\le 3$.

Lời giải

a) $10^{x^2}<\mathrm{e}^x$.

Ta có $10^{x^2}<e^x \Leftrightarrow \log\left(10^{x^2}\right)<\log\left(e^x\right) \Leftrightarrow x^2-x.\log e<0 \Leftrightarrow x\in\left(0;\log e\right)$.

b) $2^{x^2-2x-1}\le 3$.

$2^{x^2-2x-1}\le 3 \Leftrightarrow (x-1)^2-2\le \log_2 3 \Leftrightarrow (x-1)^2\le \log_2 12$

$\Leftrightarrow 1-\sqrt{\log_2 12}\le x\le 1+\sqrt{\log_2 12}$.

Vậy tập nghiệm $S=\left[1-\sqrt{\log_2 12};1+\sqrt{\log_2 12}\right]$.

DẠNG 4:
PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH THÀNH NHÂN TỬ

Phương pháp:

+ $A.B=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=0 \\ B=0 \end{array}\right.$

+ $A.B>0 \Leftrightarrow \begin{cases} A>0 \\ B>0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} A<0 \\ B<0 \end{cases}$.

+ $A.B<0 \Leftrightarrow \begin{cases} A>0 \\ B<0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} A<0 \\ B>0 \end{cases}$.

Ví dụ 9. Giải các phương trình sau:

$5^{x^2-4x+3}+5^{x^2+7x+6}=5^{2x^2+3x+9}+1$.

Lời giải

$5^{x^2-4x+3}+5^{x^2+7x+6}=5^{2x^2+3x+9}+1$.

$5^{x^2-4x+3}+5^{x^2+7x+6}=5^{2x^2+3x+9}+1 \Leftrightarrow 5^{x^2-4x+3}+5^{x^2+7x+6}=5^{\left(x^2-4x+3\right)+\left(x^2+7x+6\right)}+1$.

Đặt $\begin{cases} a=x^2-4x+3 \\ b=x^2+7x+6 \end{cases}$, ta được phương trình:

$$5^a+5^b=5^{a+b}+1 \Leftrightarrow 5^a+5^b=5^a.5^b+1 \Leftrightarrow \left(5^a-1\right)\left(1-5^b\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^a=1 \\ 5^b=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}\right.$$

Khi đó $\left[\begin{array}{l} x^2-4x+3=0 \\ x^2+7x+6=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \\ x=-1 \\ x=-6 \end{array}\right.$. Tập nghiệm của phương trình là $\{-6;-1;1;3\}$.

Ví dụ 10. Giải các bất phương trình sau:

$\log_2 x+\log_3 x \geq 1+\log_2 x.\log_3 x$.

Lời giải

a) $\log_2 x+\log_3 x \geq 1+\log_2 x.\log_3 x$.

Điều kiện xác định: $x>0$. Ta có:

$\log_2 x+\log_3 x \geq 1+\log_2 x.\log_3 x \Leftrightarrow \left(\log_2 x-1\right)\left(\log_3 x-1\right) \leq 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_2 x-1 \leq 0 \\ \log_3 x-1 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2 x-1 \geq 0 \\ \log_3 x-1 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<x \leq 2 \\ x \geq 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 2 \\ 0<x \leq 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3.$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1: Giải các phương trình sau:

a) $2^{2x^2-5x+3}=1$

b) $\log_3\left(x-1\right)=2$

c) $\log_2 x=\log_2\left(x^2-x\right)$.

d) $\log_2 x+\log_2(x-1)=1$

e) $3^{x^2}.4^{x+1}-\dfrac{1}{3^x}=0$.

f) $2^{8-x^2}.5^{8-x^2}=0,01.\left(10^5\right)^{1-x}$.

g) $\left(7+4\sqrt{3}\right)^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x=6$.

h) $3^{3+3x}+3^{3-3x}+3^{4+x}+3^{4-x}=10^3$.

Bài 2: Giải các bất phương trình sau

a) $3^{2x+1} > 3^{3-x}$.

b) $\log_{0,5}(2x-1) \ge 0$.

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} < 8$.

d) $3\log_3(x-1) + \log_{\sqrt[3]{3}}(2x-1) \le 3$.

e) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2\left(x^2-1\right)\right) \le -1$.

f) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x^2+4x-5}\right) > \log_2(x-7)$.

g) $\log^2{}_3\left(x-\frac{2x^2}{3}\right) - \log_{\frac{1}{3}}\left(x-\frac{2x^2}{3}\right) < 2$.

h) $\log_x\left(\log_3\left(9^x-72\right)\right) \le 1$.

<u>Bài 3:</u> Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để các bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

a) $\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^{x^2+2mx+1} \le \left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right)^{2x-3m}$

b) $\ln\left(2x^2+3\right) > \ln\left(x^2+ax+1\right)$.

<u>Bài 4:</u> Tìm m để phương trình $\log_6(2018x+m) = \log_4(1009x)$ có nghiệm.

<u>Bài 5:</u> Tìm tham số m để phương trình $4^x + 7 = 2^{x+3} + m^2 + 6m$ có nghiệm $x \in (1;3)$.

<u>Bài 6:</u> Tìm giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $9^{\sqrt{x^2-3x+m}} + 2.3^{\sqrt{x^2-3x+m}-2+x} < 3^{2x-3}$ có nghiệm

<u>Bài 7:</u> Cho bất phương trình: $9^x + (m-1).3^x + m > 0\ (1)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình (1) nghiệm đúng $\forall x \ge 1$.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

<u>Câu 1:</u> Tổng các nghiệm thực của phương trình $3^{x^2-3x+8} = 9^{2x-1}$ bằng

A) -7. **B)** 5. **C)** 6. **D)** 7.

<u>Câu 2:</u> Nghiệm của phương trình $\log_7(x+1) = 1 - \log_7(x-5)$ là

A) $x=6$. **B)** $x=-2$. **C)** $x=-2,\ x=6$. **D)** $x=12$.

<u>Câu 3:</u> Phương trình $\log_2\left(x^2-2\right) + \log_{\frac{1}{2}}(5x-8) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2.

Tổng $P = x_1 + x_2$ là

A) 3. **B)** 0. **C)** 6. **D)** 5.

Câu 4: Nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+1}=125^{2x}$ là

A) $-\frac{1}{8}$. **B)** 1. **C)** $-\frac{1}{4}$. **D)** 4.

Câu 5: Phương trình $3^{x^2-4}=\left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1}$ có hai nghiệm $x_1,\ x_2$. Tính x_1x_2.

A) -2. **B)** -5. **C)** 6. **D)** -6.

Câu 6: Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_2 x.\log_2(32x)+4=0$ bằng

A) $\frac{7}{16}$. **B)** $\frac{9}{16}$. **C)** $\frac{1}{32}$. **D)** $\frac{1}{2}$.

Câu 7: Số nghiệm thực của phương trình $4^{1-x}-\frac{3}{2^x}-1-0$ là

A) 0. **B)** 1. **C)** 3. **D)** 2.

Câu 8: Số nghiệm thực của phương trình $3\log_3(2x-1)-\log_{\frac{1}{3}}(x-5)^3=3$

A) 3. **B)** 1. **C)** 2. **D)** 0.

Câu 9: Tổng các nghiệm của phương trình $\log_3^2(3x)+\log_3(9x)-7=0$ bằng

A) 84. **B)** $\frac{28}{81}$. **C)** $\frac{244}{81}$. **D)** $\frac{244}{3}$.

Câu 10: Tổng các nghiệm của phương trình $\log_3(7-3^x)=2-x$ là

A) 3. **B)** 7. **C)** 1. **D)** 2.

Câu 11: Gọi $a,\ b\ (a<b)$ là các nghiệm của phương trình $6^x+6=2^{x+1}+3^{x+1}$. Tính giá trị của $P=3^a+2^b$.

A) 17. **B)** 7. **C)** 31. **D)** 5.

Câu 12: Tìm m để phương trình $\log_3^2 x-(m+3)\log_3 x+3m-1=0$ có 2 nghiệm x_1,x_2 sao cho $x_1.x_2=27$.

A) $m=1$.. **B)** $m=\frac{4}{3}$.. **C)** $m=25$.. **D)** $m=\frac{28}{3}$..

Câu 13: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $9^x-(2m-2)3^x-m+4=0$ có hai nghiệm phân biệt

A) 3. **B)** 1. **C)** 2. **D)** Vô số.

Câu 14: Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\left(2+\sqrt{3}\right)^x+m\left(2-\sqrt{3}\right)^x=1$ có hai nghiệm phân biệt là khoảng $(a;b)$. Tính $T=3a+8b$.

A) $T=5$. **B)** $T=7$. **C)** $T=2$. **D)** $T=1$.

Câu 15: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-3x-2} \geq 4$ là

A) $(-\infty;0]\cup[3;+\infty)$. **B)** $(-\infty;0]$.

C) $[3;+\infty)$. **D)** $[0;3]$.

Câu 16: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(x^2-3x+2\right)+\log_{\frac{1}{3}}(x-1)\leq 1$ là

A) $S=(2;+\infty)$. **B)** $S=(2;5]$. **C)** $S=[1;5]$. **D)** $S=(1;+\infty)$.

Câu 17: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{2-\sqrt{3}}(x-1)+\log_{2+\sqrt{3}}(11-2x)\geq 0$ là

A) 2. **B)** 3. **C)** 4. **D)** 1.

Câu 18: Cho bất phương trình $\log_2\left(x^2-x-2\right)\geq\log_{0,5}(x-1)+1$, tìm số nghiệm nguyên thuộc đoạn $[0;2021]$.

A) 2020. **B)** 2019. **C)** 2018. **D)** 2021.

Câu 19: Gọi S là tập tất hợp tất cả các nghiệm nguyên dương thỏa mãn bất phương trình $2^{x^2-5x+12}-4096<0$. Tính tổng tất cả các giá trị nghiệm đó

A) 14. **B)** 12. **C)** 10. **D)** 8.

Câu 20: Biết tập nghiệm của bất phương trình $2.9^x-5.6^x+3.4^x<0$ là $(a;b)$, với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tìm $a+3b$.

A) 1. **B)** 2. **C)** 3. **D)** 4.

Câu 21: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $4\log_4^2\frac{x}{2}-\log_2 x+1\leq 0$ là

A) 3. **B)** Vô số. **C)** 2. **D)** 1.

Câu 22: Biết rằng tập nghiệm của bất phương trình $\left(3+\sqrt{5}\right)^x+\left(3-\sqrt{5}\right)^x<3.2^x$ là khoảng $(a;b)$, hãy tính $S=b-a$

A) $S=2$. **B)** $S=3$. **C)** $S=1$. **D)** $S=4$.

Câu 23: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)>-1$ là

A) $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. **B)** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]$. **C)** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D)** $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Câu 24: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1-2x}{x}>0$ có dạng $(a;b)$. Tính $T=3a-2b$.

A) $T=0$. **B)** $T=-1$. **C)** $T=1$. **D)** $T=-\frac{2}{3}$.

Câu 25: Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho ứng với mỗi y có tối thiểu một số nguyên x và không quá 3 số nguyên x thỏa mãn $\sqrt{2^x-4}.\left(5^x-y\right)<0$

A) 15501. **B)** 78000. **C)** 15600. **D)** 15500.

Câu 26: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $2^{2x^2-15x+100}-2^{x^2+10x-50}+x^2-25x+150<0$ là

A) 6. **B)** 3. **C)** 5. **D)** 4.

Câu 27: Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho ứng với mỗi y có nhiều nhất 10 số nguyên x thỏa mãn $\left(3^{x+4}-1\right)\left(3^x-y-1\right)<0$?

A) 2187. **B)** 59048. **C)** 59049. **D)** 2186.

Câu 28: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để bất phương trình $\log_3^2 x+m\log_3 x\ge m$ nghiệm đúng với mọi giá trị của $x\in\left(0;+\infty\right)$.

A) 5. **B)** 6. **C)** 4. **D)** 7.

Câu 29: Gọi E là tập hợp tất cả các số nguyên dương y sao cho ứng với mỗi số y có không quá 4031 số nguyên x thỏa mãn $\log_2^2 x-3y\log_2 x+2y^2<0$. Tập E có bao nhiêu phần tử?

A) 6. **B)** 5. **C)** 8. **D)** 4.

E. HƯỚNG DẪN GIẢI

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Giải các phương trình sau:

a) $2^{2x^2-5x+3}=1$

Ta có $2^{2x^2-5x+3}=1\Leftrightarrow 2^{2x^2-5x+3}=2^0\Leftrightarrow 2x^2-5x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$.

b) $\log_3\left(x-1\right)=2$

Điều kiện $x-1>0\Leftrightarrow x>1$

Ta có $\log_3\left(x-1\right)=2\Leftrightarrow x-1=9\Leftrightarrow x=10$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{10\right\}$.

c) $\log_2 x=\log_2\left(x^2-x\right)$.

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x(x-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$.

Ta có $\log_2 x = \log_2 (x^2 - x) \Leftrightarrow x = x^2 - x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array} \right.$.

Đối chiếu điều kiện, phương trình có tập nghiệm là $S = \{2\}$.

d) $\log_2 x + \log_2 (x-1) = 1$

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$

Ta có $\log_2 x + \log_2 (x-1) = 1 \Leftrightarrow \log_2 [x(x-1)] = 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array} \right.$

Đối chiếu điều kiện, phương trình có tập nghiệm là $S = \{2\}$.

e) $3^{x^2}.4^{x+1} - \dfrac{1}{3^x} = 0$.

Ta có: $3^{x^2}.4^{x+1} - \dfrac{1}{3^x} = 0 \Leftrightarrow 3^{x^2}.4^{x+1} = 3^{-x} \Leftrightarrow \log_3 \left(3^{x^2}.4^{x+1}\right) = \log_3 3^{-x}$.

$\Leftrightarrow x^2 + (x+1)\log_3 4 = -x \Leftrightarrow x^2 + (1 + \log_3 4)x + \log_3 4 = 0 \ (*)$.

Do đó $T = x_1 x_2 + x_1 + x_2 = -(1 + \log_3 4) + \log_3 4 = -1$.

f) $2^{8-x^2}.5^{8-x^2} = 0,01.(10^5)^{1-x}$.

$(2.5)^{8-x^2 = 10^{-9}.10^{5-5x}} \Leftrightarrow 10^{8-x^2} = 10^{2-5x} \Leftrightarrow 8 - x^2 = 2 - 5x \Leftrightarrow x = -1; x = 6$

g) $\left(7 + 4\sqrt{3}\right)^x + \left(2 + \sqrt{3}\right)^x = 6$.

$\left(7 + 4\sqrt{3}\right)^x + \left(2 + \sqrt{3}\right)^x = 6 \ \ (1)$

$(1) \Leftrightarrow \left[\left(2 + \sqrt{3}\right)^2\right]^x + \left(2 + \sqrt{3}\right)^x - 6 = 0 \left[\left(2 + \sqrt{3}\right)^x\right]^2 + \left(2 + \sqrt{3}\right)^x - 6 = 0 \ \ (2)$

Đặt $t = \left(2 + \sqrt{3}\right)^x > 0$

Khi đó:

$(2) \Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \quad (n) \\ t = -3 \ (l) \end{array} \right.$

Với $t = 2 \Leftrightarrow \left(2 + \sqrt{3}\right)^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_{\left(2 + \sqrt{3}\right)} 2$.

h) $3^{3+3x} + 3^{3-3x} + 3^{4+x} + 3^{4-x} = 10^3$.

$3^{3+3x} + 3^{3-3x} + 3^{4+x} + 3^{4-x} = 10^3 \ \ (1)$

$(1) \Leftrightarrow 27.3^{3x} + \frac{27}{3^{3x}} + 81.3^x + \frac{81}{3^x} = 10^3 \Leftrightarrow 27.\left(3^{3x} + \frac{1}{3^{3x}}\right) + 81.\left(3^x + \frac{1}{3^x}\right) = 10^3 \quad (2)$

Đặt $t = 3^x + \frac{1}{3^x} \overset{\text{Cosi}}{\geq} 2\sqrt{3^x.\frac{1}{3^x}} = 2$

$\Rightarrow t^3 = \left(3^x + \frac{1}{3^x}\right)^3 = 3^{3x} + 3.3^{2x}.\frac{1}{3^x} + 3.3^x.\frac{1}{3^{2x}} + \frac{1}{3^{3x}} \Leftrightarrow 3^{3x} + \frac{1}{3^{3x}} = t^3 - 3t$

Khi đó: $(2) \Leftrightarrow 27(t^3 - 3t) + 81t = 10^3 \Leftrightarrow t^3 = \frac{10^3}{27} \Leftrightarrow t = \frac{10}{3} > 2 \ (n)$

Với $t = \frac{10}{3} \Rightarrow 3^x + \frac{1}{3^x} = \frac{10}{3} \ (3)$

Đặt $y = 3^x > 0$. Khi đó: $(3) \Leftrightarrow y + \frac{1}{y} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow 3y^2 - 10y + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 3 \ (n) \\ y = \frac{1}{3} \ (n) \end{array}\right.$

Với $y = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$

Với $y = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -1$.

<u>Bài 2:</u> Giải các bất phương trình sau

a) $3^{2x+1} > 3^{3-x}$.

$3^{2x+1} > 3^{3-x} \Leftrightarrow 2x + 1 > 3 - x \Leftrightarrow 3x > 2 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$.

b) $\log_{0,5}(2x-1) \geq 0$.

Điều kiện: $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2} (*)$.

$\log_{0,5}(2x-1) \geq 0 \Leftrightarrow 2x - 1 \leq (0,5)^0 \Leftrightarrow 2x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 1$.

Giao với điều kiện $(*)$ suy ra bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \left(\frac{1}{2};1\right]$.

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} < 8$.

Ta có

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} < 8 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$.

$\Leftrightarrow x^2 - 4x > -3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 1 \\ x > 3 \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty;1) \cup (3;+\infty)$.

d) $3\log_3(x-1)+\log_{\sqrt[3]{3}}(2x-1)\le 3$.

Điều kiện: $\begin{cases} x-1>0 \\ 2x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x>1$ (*).

$3\log_3(x-1)+\log_{\sqrt[3]{3}}(2x-1)\le 3 \Leftrightarrow 3\log_3(x-1)+3\log_3(2x-1)\le 3$

$\Leftrightarrow \log_3(x-1)+\log_3(2x-1)\le 1 \Leftrightarrow \log_3\left[(x-1)(2x-1)\right]\le 1$

$\Leftrightarrow (x-1)(2x-1)\le 3 \Leftrightarrow 2x^2-3x-2\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{2}\le x\le 2$.

So điều kiện (*) suy ra bất phương trình có tập nghiệm là $S=(1;2]$.

e) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2\left(x^2-1\right)\right)\le -1$.

Điều kiện: $\begin{cases} \log_2\left(x^2-1\right)>0 \\ x^2-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2-1>1 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

$\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2\left(x^2-1\right)\right)\le -1 \Leftrightarrow \log_2\left(x^2-1\right)\ge\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}=2 \Leftrightarrow \left(x^2-1\right)\ge 4$

$\Leftrightarrow x^2\ge 5 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)$.

Giao với điều kiện, bất phương trình có tập nghiệm là $S=\left(-\infty;-\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)$.

f) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{x^2+4x-5}\right)>\log_2(x-7)$.

Ta có:

$\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{x^2+4x-5}\right)>\log_2(x-7) \Leftrightarrow \log_2\left(x^2+4x-5\right)>\log_2(x-7)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-7>0 \\ x^2+4x-5>x-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>7 \\ x^2+3x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>7 \\ \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ x>-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x>7$.

g) $\log^2{}_3\left(x-\dfrac{2x^2}{3}\right)-\log_{\frac{1}{3}}\left(x-\dfrac{2x^2}{3}\right)<2$.

$\log^2{}_3\left(x-\dfrac{2x^2}{3}\right)-\log_{\frac{1}{3}}\left(x-\dfrac{2x^2}{3}\right)<2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-\dfrac{2x^2}{3}>0\\-1<\log_3\left(x-\dfrac{2x^2}{3}\right)<2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0<x<\dfrac{3}{2}\\\dfrac{1}{2}<x<1\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}<x<1$$

h) $\log_x\left(\log_3\left(9^x-72\right)\right)\le 1$.

Ta có: $\log_x\left(\log_3(9^x-72)\right)\le 1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}9^x-72>0\\0<x\ne 1\\\log_3(9^x-72)>0\\\log_3(9^x-72)\le x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9^x>73\\\log_3(9^x-72)\le x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>\log_9 73\\x\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\log_9 73<x\le 2$$

Bài 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để các bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

a) $\left(\dfrac{2}{e}\right)^{x^2+2mx+1}\le\left(\dfrac{e}{2}\right)^{2x-3m}$

$$\left(\dfrac{2}{e}\right)^{x^2+2mx+1}\le\left(\dfrac{e}{2}\right)^{2x-3m}\Leftrightarrow\left(\dfrac{2}{e}\right)^{x^2+2mx+1}\le\left(\dfrac{2}{e}\right)^{-2x+3m}\Leftrightarrow x^2+2mx+1\ge -2x+3m$$

$\Leftrightarrow x^2+2\left(m+1\right)x+1-3m\ge 0\ \left(*\right)$.

Bất phương trình có nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi bất phương trình $\left(*\right)$ có nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'\le 0\\a>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+5m\le 0\\1>0\ (\text{ld})\end{cases}\Leftrightarrow m\in\left[-5;0\right].$$

Vậy $m\in\left[-5;0\right]$ thỏa yêu cầu bài toán.

b) $\ln\left(2x^2+3\right)>\ln\left(x^2+ax+1\right)$.

$\ln\left(2x^2+3\right)>\ln\left(x^2+ax+1\right),\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+ax+1>0\\2x^2+3>x^2+ax+1\end{cases},\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+ax+1>0\ (1)\\x^2-ax+2>0\ (2)\end{cases},\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta_{(1)}=a^2-4<0\\\Delta_{(2)}=a^2-8<0\end{cases}\Leftrightarrow -2<a<2.$

Bài 4: Tìm m để phương trình $\log_6\left(2018x+m\right)=\log_4\left(1009x\right)$ có nghiệm.

Đặt $\log_6\left(2018x+m\right)=\log_4\left(1009x\right)=t\Rightarrow\begin{cases}2018x+m=6^t\\1009x=4^t\end{cases}\Rightarrow 2.4^t+m=6^t$

$\Leftrightarrow m=-2.4^t+6^t$.

Đặt $f\left(t\right)=-2.4^t+6^t$. Ta có: $f'\left(t\right)=6^t\ln 6-2.4^t.\ln 4$.

Xét $f'\left(t\right)=0\Rightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^t=\frac{2\ln 4}{\ln 6}=\log_6 16\Leftrightarrow t=\log_{\frac{3}{2}}\left(\log_6 16\right)$.

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		$\log_{\frac{3}{2}}\left(\log_6 16\right)$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(\log_{\frac{3}{2}}\left(\log_6 16\right)\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $f\left(t\right)=m$ có nghiệm khi và chỉ khi $m\geq f\left(\log_{\frac{3}{2}}\left(\log_6 16\right)\right)\approx -2,01$.

Bài 5: Tìm tham số m để phương trình $4^x+7=2^{x+3}+m^2+6m$ có nghiệm $x\in\left(1;3\right)$.

Ta có: $4^x+7=2^{x+3}+m^2+6m\Leftrightarrow 4^x-8.2^x=m^2+6m-7\quad(1)$.

Đặt $2^x=t$, với $x\in\left(1;3\right)$ thì $t\in\left(2;8\right)$.

Phương trình đã cho trở thành $t^2-8t=m^2+6m-7\quad(2)$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^2-8t,t\in\left(2;8\right)$.

Ta có $f'\left(t\right)=2t-8$; $f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=4\in\left(2;8\right)$.

Lại có $f\left(2\right)=-12$; $f\left(4\right)=-16$; $f\left(8\right)=0$.

Mà hàm $f\left(t\right)$ xác định và liên tục trên $t\in\left(2;8\right)$ nên $-16\leq f\left(t\right)<0$.

Do đó phương trình (2) có nghiệm trên $t\in\left(2;8\right)\Leftrightarrow -16\leq m^2+6m-7<0$
$\Leftrightarrow -7<m<1$.

Bài 6: Tìm giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $9^{\sqrt{x^2-3x+m}}+2.3^{\sqrt{x^2-3x+m}-2+x}<3^{2x-3}$ có nghiệm

Điều kiện $x^2-3x+m\geq 0$.

$9^{\sqrt{x^2-3x+m}}+2.3^{\sqrt{x^2-3x+m}-2+x}<3^{2x-3}\Leftrightarrow 3^{2\sqrt{x^2-3x+m}}+\frac{2}{9}.3^{\sqrt{x^2-3x+m}+x}<\frac{1}{27}.3^{2x}$

Vì $3^{2x}>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên chia 2 vế bất phương trình cho 3^{2x}, ta được:

$$\Leftrightarrow \frac{3^{2\sqrt{x^2-3x+m}}}{3^{2x}}+\frac{2}{9}.\frac{3^{\sqrt{x^2-3x+m}+x}}{3^{2x}}<\frac{1}{27}\Leftrightarrow 3^{2\sqrt{x^2-3x+m}-2x}+\frac{2}{9}.3^{\sqrt{x^2-3x+m}-x}-\frac{1}{27}<0$$

$$\Leftrightarrow 3^{2\left(\sqrt{x^2-3x+m}-x\right)}+\frac{2}{9}.3^{\sqrt{x^2-3x+m}-x}-\frac{1}{27}<0\Leftrightarrow\left(3^{\sqrt{x^2-3x+m}-x}\right)^2+\frac{2}{9}.3^{\sqrt{x^2-3x+m}-x}-\frac{1}{27}<0$$

Đặt $t=3^{\sqrt{x^2-3x+m}-x}$ (điều kiện: $t>0$), bất phương trình trở thành:

$$t^2+\frac{2}{9}t-\frac{1}{27}<0\Leftrightarrow -\frac{1}{3}<t<\frac{1}{9}$$

So điều kiện, ta có: $0<t<\frac{1}{9}\Leftrightarrow 3^{\sqrt{x^2-3x+m}-x}<\frac{1}{9}=3^{-2}\Leftrightarrow\sqrt{x^2-3x+m}-x<-2$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2-3x+m}<x-2\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-3x+m\ge 0\\ x-2>0\\ x^2-3x+m<x^2-4x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-3x+m\ge 0\\ x>2\\ x<4-m\end{cases}\Rightarrow 4-m>2\Leftrightarrow m<$$

.

Do m nguyên dương nên $m=1$ thỏa mãn.

Thử lại ta có $m=1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 7: Cho bất phương trình: $9^x+(m-1).3^x+m>0\ (1)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình (1) nghiệm đúng $\forall x\ge 1$.

Đặt $t=3^x$. Vì $x\ge 1\Rightarrow t\ge 3$ Bất phương trình đã cho thành:

$t^2+(m-1).t+m>0$ nghiệm đúng $\forall t\ge 3$

$\Leftrightarrow\frac{t^2-t}{t+1}>-m$ nghiệm đúng $\forall t\ge 3$.

Xét hàm số $g(t)=t-2+\frac{2}{t+1},\forall t\ge 3,g'(t)=1-\frac{2}{(t+1)^2}>0,\forall t\ge 3$. Hàm số đồng biến trên $[3;+\infty)$ và $g(3)=\frac{3}{2}$. Yêu cầu bài toán tương đương $-m\le\frac{3}{2}\Leftrightarrow m\ge-\frac{3}{2}$

1.D	2.A	3.D	4.C	5.D	6.B	7.B	8.B	9.C	10.D
11.D	12.A	13.B	14.C	15.A	16.D	17.B	18.B	19.B	20.C
21.C	22.A	23.A	24.D	25.A	26.D	27.D	28.D	29.A	30.A

<u>Câu 1:</u> Chọn D

$3^{x^2-3x+8}=9^{2x-1}\Leftrightarrow 3^{x^2-3x+8}=3^{2(2x-1)}\Leftrightarrow x^2-3x+8=4x-2\Leftrightarrow x^2-7x+10=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=5\end{array}\right.$. Vậy tổng hai nghiệm của phương trình là 7.

<u>Câu 2:</u> Chọn A

Điều kiện $\begin{cases}x+1>0\\x-5>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\x>5\end{cases}\Leftrightarrow x>5$.

$\log_7(x+1)=1-\log_7(x-5)$

$\Leftrightarrow\log_7(x+1)+\log_7(x-5)=1$

$\Leftrightarrow\log_7(x+1)(x-5)=1$

$\Leftrightarrow(x+1)(x-5)=7$

$\Leftrightarrow x^2-4x-12=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=6\\x=-2\end{array}\right.$

So với điều kiện, phương trình đã cho có 1 nghiệm $x=6$.

<u>Câu 3:</u> Chọn D

Điều kiện $\begin{cases}x^2-2>0\\5x-8>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>\sqrt{2}\\x<-\sqrt{2}\end{array}\right.\\x>\dfrac{8}{5}\end{cases}\Leftrightarrow x>\dfrac{8}{5}$.

Với điều kiện trên ta có phương trình

$\log_2\left(x^2-2\right)+\log_{\frac{1}{2}}(5x-8)=0$

$\Leftrightarrow\log_2\left(x^2-2\right)-\log_2(5x-8)=0$

$\Leftrightarrow\log_2\left(x^2-2\right)=\log_2(5x-8)$

$\Leftrightarrow x^2-2=5x-8\Leftrightarrow x^2-5x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=3\end{array}\right.$ (Thoả mãn điều kiện trên).

Vậy tổng $P=x_1+x_2=2+3=5$.

<u>Câu 4:</u> Chọn C

Ta có: $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{x+1}=125^{2x}\Leftrightarrow\left(5^{-2}\right)^{(x+1)}=\left(5^3\right)^{2x}$.

$\Leftrightarrow 5^{-2x-2} = 5^{6x} \Leftrightarrow -2x - 2 = 6x \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{4}$.

Câu 5: Chọn D

Ta có $3^{x^2-4} = \left(\dfrac{1}{9}\right)^{3x-1} \Leftrightarrow 3^{x^2-4} = 3^{-6x+2} \Leftrightarrow x^2 - 4 = -6x + 2 \Leftrightarrow x^2 + 6x - 6 = 0$

Do $\Delta = 36 + 4.6 = 60 > 0$ nên phương trình đã cho có 2 nghiệm x_1, x_2.

Theo hệ thức Vi-ét $x_1 x_2 = -6$.

Câu 6: Chọn B

Điều kiện xác định: $x > 0$.

Khi đó $\log_2 x.\log_2(32x) + 4 = 0 \Leftrightarrow \log_2 x.(\log_2 x + 5) + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \log_2^2 x + 5.\log_2 x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = -1 \\ \log_2 x = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{1}{16} \end{array}\right..$$

Do đó tổng tất cả các nghiệm của phương trình đã cho bằng $\dfrac{9}{16}$.

Câu 7: Chọn B

Ta có: $4^{1-x} - \dfrac{3}{2^x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{4}{2^{2x}} - \dfrac{3}{2^x} - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 2^{2x} + 3.2^x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 1 \\ 2^x = -4 \end{array}\right. \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow x = 0.$$

Câu 8: Chọn B

Điều kiện xác định: $\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ x - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 5$

Với điều kiện trên phương trình tương đương:

$\log_3(2x-1) + \log_3(x-5) = 1 \Leftrightarrow \log_3\left[(2x-1).(x-5)\right] = 1$

$\Leftrightarrow (2x-1).(x-5) = 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 11x + 5 = 3$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{11-\sqrt{105}}{4} (tm) \\ x = \dfrac{11+\sqrt{105}}{4} (ktm) \end{array}\right.$. Vậy phương trình có 1 nghiệm thực.

Câu 9: Chọn C

Xét phương trình $\log_3^2(3x) + \log_3(9x) - 7 = 0 \;\; (1)$

ĐK: $x > 0$.

Phương trình

$(1) \Leftrightarrow \log_3^2(3x) + \log_3(3x) + \log_3 3 - 7 = 0$

$\Leftrightarrow \log_3^2(3x) + \log_3(3x) - 6 = 0$.

Đặt $t = \log_3(3x)$

Phương trình (1) trở thành $t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -3 \\ t = 2 \end{array}\right.$ hoặc $\left[\begin{array}{l} \log_3(3x) = -3 \\ \log_3(3x) = 2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\mathrm{x} = 3^{-3} \\ 3\mathrm{x} = 3^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{81} \\ x = 3 \end{array}\right.$ (thỏa mãn) .

Tổng các nghiệm của phương trình (1) là $\dfrac{1}{81} + 3 = \dfrac{244}{81}$.

<u>Câu 10:</u> Chọn D

Ta có: $\log_3(7 - 3^x) = 2 - x \Leftrightarrow 7 - 3^x = 3^{2-x} \Leftrightarrow 7 - 3^x = \dfrac{3^2}{3^x}$.

$\Leftrightarrow -3^{2x} + 7.3^x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = \dfrac{7+\sqrt{13}}{2} > 0 \\ 3^x = \dfrac{7-\sqrt{13}}{2} > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log_3 \dfrac{7+\sqrt{13}}{2} \\ x = \log_3 \dfrac{7-\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$.

Khi đó $\log_3 \dfrac{7+\sqrt{13}}{2} + \log_3 \dfrac{7-\sqrt{13}}{2} = \log_3\left(\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}.\dfrac{7-\sqrt{13}}{2}\right) = \log_3 3^2 = 2$.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình đã cho là 2.

<u>Câu 11:</u> Chọn D

$6^x + 6 = 2^{x+1} + 3^{x+1} \Leftrightarrow 2^x.3^x - 2^{x+1} - 3^{x+1} + 6 = 0 \Leftrightarrow 2^x(3^x - 2) - 3(3^x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (3^x - 2)(2^x - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x - 2 = 0 \\ 2^x - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 2 \\ 2^x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log_3 2 \\ x = \log_2 3 \end{array}\right.$.

Vì $a < b$ nên $a = \log_3 2,\ b = \log_2 3$.

Vậy $P = 3^a + 2^b = 3^{\log_3 2} + 2^{\log_2 3} = 2 + 3 = 5$.

<u>Câu 12:</u> Chọn A

Đặt $t = \log_3 x$

Phương trình trở thành : $t^2 - (m+2)t + 3m - 1 = 0$

Phương trình có hai nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \ge 0$

$\Leftrightarrow (m+2)^2 - 4(3m-1) \ge 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 8m + 8 \ge 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 4 + 2\sqrt{2} \\ m \le 4 - 2\sqrt{2} \end{array}\right.$

$x_1.x_2 = 27$

$\Leftrightarrow 3^{t_1}.3^{t_2} = 27$

$\Leftrightarrow 3^{t_1+t_2} = 27$

$\Leftrightarrow 3^{m+2} = 27 \ (Vi-et)$

$\Leftrightarrow m+2 = \log_3 27$

$\Leftrightarrow m = 1$ (nhận).

<u>Câu 13:</u> Chọn B

Đặt $t = 3^x \left(t > 0\right)$. Phương trình $9^x - \left(2m-2\right)3^x - m + 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $t^2 - \left(2m-2\right)t - m + 4 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = \left(m-1\right)^2 + m - 4 > 0 \\ S = 2m - 2 > 0 \\ P = -m + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 3 > 0 \\ m > 1 \\ m < 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < \dfrac{1-\sqrt{13}}{2} \\ m > \dfrac{1+\sqrt{13}}{2} \end{array}\right. \\ m > 1 \\ m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{13}}{2} < m < 4$$

Vậy có một giá trị nguyên của m là 3 thỏa mãn yêu cầu đề bài.

<u>Câu 14:</u> Chọn C

Đặt $\left(2+\sqrt{3}\right)^x = t$, $\left(t > 0\right)$ $\Rightarrow \left(2-\sqrt{3}\right)^x = \dfrac{1}{t}$.

Phương trình trở thành $t + \dfrac{m}{t} = 1 \Leftrightarrow t^2 - t + m = 0 \left(*\right)$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\left(*\right)$ có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1 - 4m > 0 \\ t_1 + t_2 = 1 > 0 \\ t_1.t_2 = m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \dfrac{1}{4}$.

Do đó $a = 0; b = \dfrac{1}{4} \Rightarrow T = 3a + 8b = 2$.

<u>Câu 15:</u> Chọn D

Ta có: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-3x-2} \geq 4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-3x-2} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

$\Leftrightarrow x^2-3x-2 \leq -2 \Leftrightarrow x^2-3x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 3$.

<u>Câu 16:</u> Chọn B

Ta có $\log_3\left(x^2-3x+2\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(x-1\right) \leq 1$

$\Leftrightarrow \log_3\left(x^2-3x+2\right)-\log_3\left(x-1\right) \leq \log_3 3$

$\Leftrightarrow \log_3\left(x^2-3x+2\right) \leq \log_3\left[3\left(x-1\right)\right]$

$\Leftrightarrow 0 < x^2-3x+2 \leq 3\left(x-1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2>0 \\ x^2-6x+5 \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<1 \\ x>2 \end{array}\right. \\ 1 \leq x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x \leq 5$.

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left(2;5\right]$.

<u>Câu 17:</u> Chọn B

Điều kiện $1 < x < \frac{11}{2}$. Ta có $\log_{2-\sqrt{3}}\left(x-1\right)+\log_{2+\sqrt{3}}\left(11-2x\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow \log_{2-\sqrt{3}}\left(x-1\right)+\log_{2-\sqrt{3}}\frac{1}{11-2x} \geq 0$

$\Leftrightarrow \log_{2-\sqrt{3}}\left(\frac{x-1}{11-2x}\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{x-1}{11-2x} \leq 1$

$\Leftrightarrow \frac{3x-12}{11-2x} \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 4 \\ x > \frac{11}{2} \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện suy ra $1 < x \leq 4$

Vậy bất phương trình có 3 nghiệm nguyên .

<u>Câu 18:</u> Chọn B

$\log_2\left(x^2-x-2\right)\ge\log_{0,5}\left(x-1\right)+1$

$\Leftrightarrow\log_2\left(x^2-x-2\right)\ge\log_{\frac{1}{2}}\left(x-1\right)+1$

$\Leftrightarrow\log_2\left(x^2-x-2\right)+\log_2\left(x-1\right)\ge1$

$\Leftrightarrow\log_2\left[\left(x^2-x-2\right).\left(x-1\right)\right]\ge1$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-x-2>0\\x-1>0\\\left(x^2-x-2\right)\left(x-1\right)\ge2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-x-2>0\\x-1>0\\x^3-2x^2-x\ge0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<-1\\x>2\end{array}\right.\\x>1\\\left[\begin{array}{l}1-\sqrt{2}\le x\le0\\x\ge1+\sqrt{2}\end{array}\right.\end{cases}$

$\Leftrightarrow x\ge1+\sqrt{2}$

Vì x là số nguyên và thuộc đoạn $\left[0;2021\right]$ nên $x\in\left\{3;4;....;2021\right\}$.

Vậy có 2019 giá trị .

<u>Câu 19:</u> **Chọn C**

Ta có $2^{x^2-5x+12}-4096<0\Leftrightarrow2^{x^2-5x+12}<4096$

$\Leftrightarrow2^{x^2-5x+12}<2^{12}\Leftrightarrow x^2-5x+12<12\Leftrightarrow x^2-5x<0\Leftrightarrow0<x<5$.

Do x nguyên dương nên $x\in\left\{1;2;3;4\right\}$, suy ra $S=\left\{1;2;3;4\right\}$. Vậy tổng tất cả các giá trị của S là $1+2+3+4=10$.

<u>Câu 20:</u> **Chọn C**

Ta có:

$2.9^x-5.6^x+3.4^x<0$

$\Leftrightarrow2.\left(\frac{9}{4}\right)^x-5.\left(\frac{3}{2}\right)^x+3<0$.

$\Leftrightarrow1<\left(\frac{3}{2}\right)^x<\frac{3}{2}\Leftrightarrow0<x<1$

Vậy tập nghiệm bất phương trình là $S=\left(0;1\right)$ suy ra $a=0;b=1\Rightarrow a+3b=3$

Câu 21: Chọn A

TXĐ: $D=(0;+\infty)$.

Ta có

$$4\log_4^2\frac{x}{2}-\log_2 x+1\le 0$$

$$\Leftrightarrow 4.\frac{1}{4}\log_2^2\frac{x}{2}-\log_2 x+1\le 0 \quad .$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 x-1)^2-\log_2 x+1\le 0$$

Đặt $t=\log_2 x$, ta được: $(t-1)^2-t+1\le 0 \Leftrightarrow t^2-3t+2\le 0 \Leftrightarrow 1\le t\le 2$.

Suy ra $1\le \log_2 x\le 2 \Leftrightarrow 2\le x\le 4$ (Thỏa mãn ĐKXĐ).

Vậy bất phương trình có 3 nghiệm nguyên $x=2, x=3, x=4$.

Câu 22: Chọn A

Ta có $\left(3+\sqrt{5}\right)^x+\left(3-\sqrt{5}\right)^x<3.2^x$. $\Leftrightarrow \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x+\left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^x<3$.

Đặt $t=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x$ với $t>0$.

$$\Leftrightarrow t+\frac{1}{t}<3 \Leftrightarrow t^2-3t+1<0 \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2}<t<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2}<\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x<\frac{3+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \log_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)<x<\log_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow -1<x<1 \Rightarrow (a;b)=(-1;1) \Rightarrow S=2.$$

Câu 23: Chọn D

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)>-1 \Leftrightarrow \begin{cases}2x+1>0\\ 2x+1<\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>-\frac{1}{2}\\ x<\frac{1}{2}\end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Câu 24: Chọn A

Bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1-2x}{x}>0 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1-2x}{x}>0\\ \frac{1-2x}{x}<1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1-2x}{x}>0\\ \frac{1-3x}{x}<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<x<\frac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x>\frac{1}{3}\\ x<0\end{array}\right.\end{cases}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$.

Nên tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases}a=\frac{1}{3}\\ b=\frac{1}{2}\end{cases}$.

Do đó $T=3a-2b=3.\frac{1}{3}-2.\frac{1}{2}=0.$

<u>Câu 25:</u> Chọn D

Điều kiện xác định: $2^x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Xét $y \in \mathbb{Z}^+$

$\sqrt{2^x-4}.\left(5^x-y\right)<0 \Leftrightarrow \begin{cases}2^x-4>0\\ 5^x-y<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>2\\ x<\log_5 y\end{cases}$.

Từ yêu cầu bài toán suy ra: $3<\log_5 y \leq 6 \Leftrightarrow 125<y\leq 15625$.

Vậy có 15500 số nguyên dương y thỏa yêu cầu bài toán.

<u>Câu 26:</u> Chọn D

Ta có $2^{2x^2-15x+100}-2^{x^2+10x-50}+x^2-25x+150<0$.

$\Leftrightarrow 2^{2x^2-15x+100}-2^{x^2+10x-50}+2x^2-15x+100-\left(x^2+10x-50\right)<0$.

Đặt $a=2x^2-15x+100$, $b=x^2+10x-50$.

Khi đó bất phương trình trở thành: $2^a-2^b+a-b<0 \Leftrightarrow -2^a-a>-2^b-b$ (1)

Xét hàm số $f(t)=-2^t-t$ có $f'(t)=-2^t\ln 2-1<0$ với $\forall t\in\mathbb{R}$.

Suy ra $f(t)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow a<b$ $\Leftrightarrow 2x^2-15x+100<x^2+10x-50$ $\Leftrightarrow x^2-25x+150<0 \Leftrightarrow 10<x<15$.

Mà $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{11;12;13;14\}$. Vậy bất phương trình có 4 nghiệm nguyên.

<u>Câu 27:</u> Chọn D

Ta có $\left(3^{x+4}-1\right)\left(3^x-y-1\right)<0 \Leftrightarrow \left(3^4.3^x-1\right)\left(3^x-y-1\right)<0$ (1)

Vì y nguyên dương nên $y+1>\frac{1}{3^4}$, khi đó ta có:

$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{3^4} < 3^x < y+1 \Leftrightarrow \log_3 \frac{1}{81} < \log_3 3^x < \log_3(y+1)$

$\Leftrightarrow -4 < x < \log_3(y+1) \Leftrightarrow x \in (-4; \log_3(y+1))$.

Ứng với mỗi số nguyên dương y có nhiều nhất 10 số nguyên $x \in (-4; \log_3(y+1))$

$\Leftrightarrow 0 < \log_3(y+1) \leq 7 \Leftrightarrow 1 < y+1 \leq 3^7 \Leftrightarrow 0 < y \leq 2186$.

Vậy có 2186 giá trị nguyên y thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 28: Chọn A

Đặt $t = \log_3 x$. Với mọi $x \in (0; +\infty)$ ta có $t \in \mathbb{R}$.

Bất phương trình $\log_3^2 x + m\log_3 x \geq m$ trở thành $t^2 + mt - m \geq 0$.

$\log_3^2 x + m\log_3 x \geq m$ nghiệm đúng với mọi giá trị của $x \in (0; +\infty)$

$\Leftrightarrow t^2 + mt - m \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta \leq 0$

$\Leftrightarrow m^2 + 4m \leq 0$

$\Leftrightarrow -4 \leq m \leq 0.$

Vậy $m \in \{0; -1; -2; -3; -4\}$.

Câu 29: Chọn A

Điều kiện $x > 0$.

Đặt $t = \log_2 x$, bất phương trình trở thành $t^2 - 3yt + 2y^2 < 0$ $(*)$.

$\Delta = (3y)^2 - 4.2y^2 = y^2 > 0, \forall y \in \mathbb{Z}^+$, tam thức có hai nghiệm $t = y \vee t = 2y$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow y < t < 2y$ hay $y < \log_2 x < 2y \Leftrightarrow 2^y < x < 2^{2y}$.

Vì $x, y \in \mathbb{Z}^+$ nên $x \in A = \{2^y + 1; 2^y + 2; \ldots; 2^{2y} - 1\}$.

Số phần tử của tập A là $(2^{2y} - 1) - (2^y + 1) + 1 = 2^{2y} - 2^y - 1$.

Giả thiết bài toán có không quá 4031 số nguyên x nên ta có: $2^{2y} - 2^y - 1 \leq 4031$.

$\Leftrightarrow 2^{2y} - 2^y - 4032 \leq 0 \Leftrightarrow -63 \leq 2^y \leq 64 \Leftrightarrow y \leq 6$.

Vì $y \in \mathbb{Z}^+$ nên $y \in E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Số phần tử của tập hợp E là 6.

BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

B.

Bài 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau?

a) $y=\log_3\left(2x-x^2\right)$

b) $y=2^{\sqrt{1-2x}}$

c) $y=\log_2\dfrac{10-x}{x^2-3x+2}$

d) $y=\sqrt{3^x-1}-\log_2(x-2)^2$

e) $y=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x-3}{x+1}$

Bài 2.Tính giá trị các biểu thức sau

a) $A=\log\left(100a^3\right)$ biết $\log a=\dfrac{1}{3}$;

b) $B=\dfrac{b^3}{a^9}+\log_{\frac{a}{b}}\sqrt{ab}$ với a,b là các số thực dương và $a>1$, $a\neq b$ thỏa mãn $\log_a b=3$;

c) $C=\ln\left(2\sqrt{2}+3\right)^{2020}+\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)^{2020}$;

d) $D=1+2^2\log_{\sqrt{2}}2+3^2\log_{\sqrt[3]{2}}2+....+2018^2\log_{\sqrt[2018]{2}}2$;

Bài 3.Tính giá trị các biểu thức sau theo biểu thức đã cho

a) Tính $\log 16$ theo $\mathrm{a}=\log 2$;

b) Tính $\log 9000$ theo $a=\log 3$;

c) Tính $\log_3 2$ theo $a=\log_6 9$;

d) Tính $\log_{36}24$ theo $a=\log_{12}27$;

Bài 4.Tính giá trị các biểu thức sau theo các biểu thức đã cho

a) Tính $\log_6 5$ theo $a=\log_2 5; b=\log_3 5$;

b) Tính $\log_{125}30$ theo $a=\log 3; b=\log 2$;

c) Tính $\log_{30}1350$ theo Cho $a=\log_{30}3$; $b=\log_{30}5$.

d) Tính $\log_{140}63$ theo $a=\log_2 3$; $b=\log_3 5$; $c=\log_7 2$;

Bài 5. Giải các phương trình sau:

a) $3^x=\dfrac{1}{9}$;

b) $2^{2x-1}=3$;

c) $e^{x^2-2x-3}=1$;

d) $2^x.15^{x+1}=3^{x+3}$.

Bài 6. Giải các phương trình sau:

a) $\log_{\frac{1}{4}} x = \frac{1}{2}$;　　b) $\log_3(2x-1) = 2$;

c) $\log(x-1)^2 = 2$;　　d) $\log_2\left[x(x-1)\right] = 1$;

e) $(x-2)[\log_{0.5}(x^2-5x+6)+1] = 0$;

f) $\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = \log_{20} x$.

g) $\log_2(9-2^x) = 3-x$;

h) $\log_3(3^x-8) = 2-x$.

Bài 7. Giải các phương trình sau:

a) $3^{x-1} = 27$　　b) $4^{x-1} = 8^{3-2x}$;

c) $2^{x^2-x-4} = \frac{1}{16}$;　　d) $3.5^{x-2x^2+1} = 5.3^{-2x^2+x+1}$.

e) $\left(3+2\sqrt{2}\right)^{x^2-x+2} = \left(3-2\sqrt{2}\right)^{x^3-2}$.

Bài 8. Giải các phương trình sau:

a) $\log(x^2-6x+7) = \log(x-3)$;

b) $\log_2 x + \log_2(x-1) = 1$;

c) $\log_4(x+3) - \log_4(x-1) = 2 - \log_4 8$;

d) $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{1/3} x = 6$;

e) $\log_{1/2}(x-1) + \log_{1/2}(x+1) = 1 + \log_{1/\sqrt{2}}(7-x)$;

f) $\log_4(x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x} + \log_8(4+x)^3$.

Bài 9. Giải các phương trình sau

a) $12.3^x + 3.15^x - 5^{x+1} = 20$;

b) $\log_2(3x-4).\log_3 x = \log_3 x$;

c) $2^x + 2.3^x - 6^x = 2$;

d) $5^{x^2-4x+3} + 5^{x^2+7x+6} = 5^{2x^2+3x+9} + 1$;

e) $2^{x^2+x-1} - 2^{x^2-1} = 2^{2x} - 2^x$

Bài 10. Giải các phương trình sau

a) $2^{x^2-4} = 5^{x-2}$; b) $5^{3^x} = 7^{2^x}$;

c) $2^{x^2-2x}.3^x = \dfrac{3}{2}$; d) $5^x.8^{\frac{x}{x+1}} = 100$.

Bài 11. Giải các bất phương trình sau:

a) $2^x \le 5$; b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x > 27$; c) $3^{x-2} > 3^{5-x}$;

d) $2^{x^2-1} < 8$; e) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-2x} \ge \dfrac{1}{8}$; f) $3^{x-1}.5^x \le 75$.

Bài 12. Giải các bất phương trình sau

a) $\log x \ge 1$; b) $\log_{\frac{1}{2}} x > 2$;

c) $\log_2(2x+1) \le 1$; d) $\log_\pi(x^2-2x) < 0$.

Bài 13. Giải các bất phương trình sau

a) $3^{x-1} > 27$; b) $5^{x-1} \ge 5^{x^2-x-9}$; c) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} \ge 3^{-x}$

;

d) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x > 3^{\frac{2x}{x+1}}$; e) $3^{2-\sqrt{x^2+5x-6}} \ge \dfrac{1}{3^x}$.

Bài 14. Giải các bất phương trình sau

a) $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \ge \log_{\frac{1}{2}} 4$;

b) $\log(3-2x) \ge \log(x+1)$.

c) $\ln x^2 \ge 2\ln(x+1)$;

d) $\log_3 x^3 > -3\log_{\frac{1}{3}}(x-2)$;

e) $\log_{\frac{1}{2}}(4x-9) > \log_2 \dfrac{1}{x+10}$;

f) $\log_{0.8}(x+1) \le \log_{1.25}(-2x+4)$;

g) $\log_2(x+1) - 2\log_4(5-x) < 1 - \log_2(x-2)$.

Bài 15. a. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\left(\frac{2}{e}\right)^{x^2+2mx+1} \le \left(\frac{e}{2}\right)^{2x-3m}$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b.Tìm tất cả giá trị của tham số thực m sao cho bất phương trình $9^x - 2(m+1).3^x - 3 - 2m > 0$ nghiệm đúng với mọi số thực x.

C. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 1. Với α là số thực bất kì, đẳng thức nào sau đây **sai**?

A) $\sqrt{10^\alpha} = \left(\sqrt{10}\right)^\alpha$. **B)** $\sqrt{10^\alpha} = 10^{\frac{\alpha}{2}}$.

C) $\left(10^\alpha\right)^2 = 100^\alpha$. **D)** $\left(10^\alpha\right)^2 = 10^{\alpha^2}$.

Câu 2. Cho $a > 0$, $b > 0$ và x, y là các số thực bất kỳ. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A) $(a+b)^x = a^x + b^x$. **B)** $a^{x+y} = a^x + a^y$.

C) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = a^x.b^{-x}$ **D)** $a^x b^y = (ab)^{xy}$.

Câu 3. Cho a là số thực dương và m,n là số nguyên dương $(m,n \ge 2)$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$. **B)** $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[\frac{n}{m}]{a}$.

C) $\sqrt[n]{a}.\sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a}$. **D)** $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{n}{m}}$.

Câu 4. Cho $x > 0$. Biểu thức $P = x.\sqrt[9]{x}$ bằng

A) $x^{\frac{11}{9}}$. **B)** $x^{\frac{10}{9}}$.

C) $x^{\frac{1}{9}}$. **D)** $x^{\frac{8}{9}}$.

Câu 5. Cho $x > 0$. Biểu thức $P = \sqrt[3]{x^2\sqrt[4]{x}}$ bằng

A) $P = x^{\frac{2}{3}}$. **B)** $P = x^{\frac{7}{12}}$.

C) $P = x^{\frac{31}{12}}$. **D)** $P = x^{\frac{3}{4}}$.

Câu 6. Cho $\left(\sqrt{2}-1\right)^m < \left(\sqrt{2}-1\right)^n$. Khi đó, khẳng định nào sau đây là đúng?

A) $m = n$.**B)** $m < n$. **C)** $m > n$. **D)** $m \le n$.

Câu 7. Tìm tập tất cả các giá trị của a để $\sqrt[21]{a^5} > \sqrt[7]{a^2}$?

A) $(0;+\infty)$. B) $(0;1)$. C) $(1;+\infty)$. D) $\left(\frac{5}{21};\frac{2}{7}\right)$.

Câu 8. Tập xác định D của hàm số $y=(x-1)^{\frac{1}{3}}$ là:

A) $D=(1;+\infty)$. B) $D=\mathbb{R}$ C) $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. D) $D=(-\infty;1)$.

Câu 9. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\left(x^2-x-2\right)^{-3}$.

A) $D=(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$. B) $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}$.

C) $D=\mathbb{R}$. D) $D=(0;+\infty)$.

Câu 10. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3(9a)$ bằng

A) $\frac{1}{2}+\log_3 a$. B) $2\log_3 a$ C) $(\log_3 a)^2$. D) $2+\log_3 a$.

Câu 11. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_5\frac{25}{a}$ bằng

A) $2-\log_5 a$. B) $\frac{5}{\log_5 a}$. C) $\frac{2}{\log_5 a}$. D) $5-\log_5 a$.

Câu 12. Với $a;b$ là các số thực dương và $a\neq 1$, khi đó $\log_{a^2} b^3$ bằng

A) $6\log_a b$. B) $-\frac{3}{2}\log_a b$. C) $\frac{2}{3}\log_a b$. D) $\frac{3}{2}\log_a b$.

Câu 13. Với x là số thực dương tùy ý, $\log_2 x^3$ bằng

A) $3+\log_2 x$. B) $\frac{1}{3}\log_2 x$. C) $(\log_2 x)^3$. D) $3\log_2 x$.

Câu 14. Cho $a=\log_3 15$, $b=\log_3 10$. Hãy biểu diễn $\log_{\sqrt{3}} 50$ theo a và b.

A) $2(a-1+b)$ B) $2(a+1+b)$ C) $2(a-1-b)$ D) $2(a+1+b)$

Câu 15. Đặt $a=\log_2 3$ và $b=\log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b bằng:

A) $\log_6 45=\frac{a+2ab}{ab}$. B) $\log_6 45=\frac{2a^2-2ab}{ab}$.

C) $\log_6 45=\frac{a+2ab}{ab+b}$. D) $\log_6 45=\frac{2a^2-2ab}{ab+b}$.

Câu 16. Nếu $\log_8 a+\log_4 b^2=5$ và $\log_4 a^2+\log_8 b=7$ thì giá trị ab bằng:

A) 2^{18}. B) 2^9. C) 8. D)

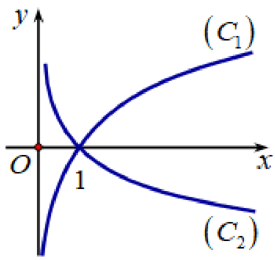
Câu 17. Cho $\log_3 4=a$, $\log_5 4=b$. Hãy biểu diễn $\log_{12} 80$ theo a và b.

A) $\frac{a+2ab}{ab+b}$. B) $\frac{a-2ab}{ab+b}$. C) $\frac{a+2ab}{ab-b}$. D) $\frac{a-2ab}{ab-b}$.

Câu 18. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{1-\log_2 x}$ là

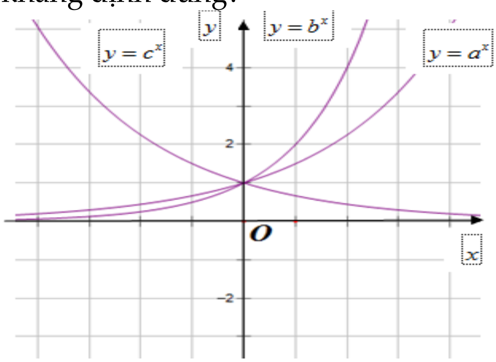
A) $(-\infty;2]$.**B)** $[0;2]$. **C)** $(0;1)$. **D)** $(0;2]$.

Câu 19. Cho hai hàm số $y=\log_a x$, $y=\log_b x$ với a, b là hai số thực dương, khác 1 và có đồ thị lần lượt là (C_1), (C_2) như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây **SAI**?



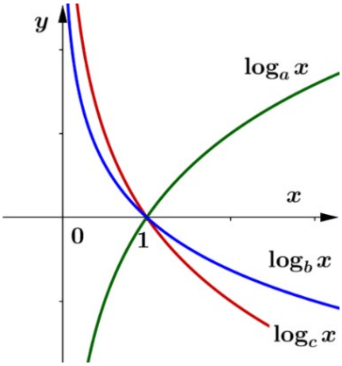
A) $0<b<a<1$. **B)** $a>1$.**C)** $0<b<1<a$. **D)**

Câu 20. Hình bên là đồ thị hàm số $y=a^x$, $y=b^x$, $y=c^x$ $(0<a,b,c\neq 1)$ được vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?



A) $a>b>c$.**B)** $c>b>a$.**C)** $a>c>b$. **D)** $b>a>c$.

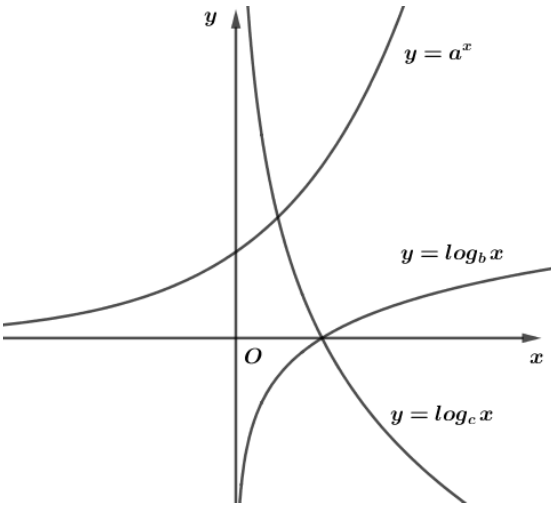
Câu 21. Cho a,b,c dương và khác 1. Các hàm số $y=\log_a x$, $y=\log_b x$, $y=\log_c x$ có đồ thị như hình vẽ



Khẳng định nào dưới đây đúng?

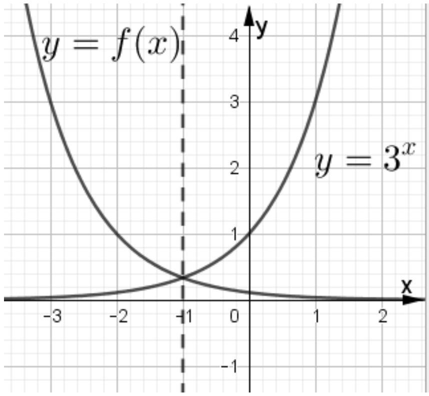
A) $a > c > b$.**B)** $a > b > c$.**C)** $c > b > a$. **D)** $b > c > a$.

Câu 22. Cho các hàm số $y = a^x$; $y = \log_b x$; $y = \log_c x$ có đồ thị như hình vẽ. Chọn mệnh đề đúng?



A) $b < c < a$.**B)** $a < c < b$.**C)** $c < b < a$. **D)** $c < a < b$.

Câu 23. Biết hàm số $f(x) = \dfrac{a}{b^2.3^x}$ có đồ thị đối xứng với đồ thị hàm số $y = 3^x$ qua đường thẳng $x = -1$ như hình vẽ bên dưới. Biết a, b là các số nguyên. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:



A) $a+b=5$.**B)** $a+2b=7$.**C)** $2a-b=0$. **D)** $a^3+b=12$.

Câu 24. Nghiệm của phương trình $3^{x-1}=27$ là

A) $x=4$.**B)** $x=3$. **C)** $x=2$. **D)** $x=1$.

Câu 25. Nghiệm của phương trình $2^{2x-4}=2^x$ là

A) $x=16$.**B)** $x=-16$. **C)** $x=-4$. **D)** $x=4$.

Câu 26. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2(x-1)+\log_2(x+1)=3$.

A) $S=\{3\}$ **B)** $S=\{-\sqrt{10};\sqrt{10}\}$ **C)** $S=\{-3;3\}$ **D)**

Câu 27. Tập nghiệm của phương trình $\log_6[x(5-x)]=1$

A) $\{1;-6\}$. **B)** $\{2;3\}$. **C)** $\{-1;6\}$. **D)**

Câu 28. Phương trình $5^{3-4x}=25$ có nghiệm là

A) $x=4$. **B)** $x=-\dfrac{1}{4}$. **C)** $x=\dfrac{1}{4}$. **D)**

Câu 29. Tổng các nghiệm của phương trình $\log_2 x+\log_8(x-3)^3=2$ bằng bao nhiêu?

A) 3 . **B)** 0 . **C)** 4 . **D)**

Câu 30. Tính tổng $S=x_1+x_2$ biết x_1 và x_2 là các giá trị thực thỏa mãn đẳng thức $2^{x^2-6x+1}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x-3}$.

A) $S=8$. **B)** $S=-5$. **C)** $S=4$. **D)**

Câu 31. Tích các nghiệm của phương trình $x\log_2 x+6=2x+3\log_2 x$ bằng bao nhiêu?

A) 7 . **B)** 0 . **C)** 12 . **D)**

Câu 32. Tích các nghiệm của phương trình $10^x+10=2^{x+1}+5^{x+1}$ bằng bao nhiêu?

A) 7 . **B)** 0 . **C)** 1 . **D)**

Câu 33. Cho hai số thực a,b với $1<a<b$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A) $\left(\frac{a}{b}\right)^x<1\Leftrightarrow x>0.$ **B)** $\left(\frac{b}{a}\right)^x<1\Leftrightarrow x>0.$ **C)** $\log_a b<1.$ **D)**

Câu 34. Tính tích các nghiệm thực của phương trình $2^{x^2-1}=3^{2x+3}$

A) $-3\log_2 3$. **B)** $1-\log_2 3$. **C)** -1. **D)**

Câu 35. Tập nghiệm bất phương trình: $2^x>8$ là:

A) $(-\infty;3)$.**B)** $[3;+\infty)$. **C)** $(3;+\infty)$. **D)** $(-\infty;3]$.

Câu 36. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{4-x^2}\geq 27$ là:

A) $[-1;1]$.**B)** $(-\infty;1]$. **C)** $\left[-\sqrt{7};\sqrt{7}\right]$. **D)** $[1;+\infty)$.

Câu 37. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $2^{x-1}>\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{x}}$.

A) $S=(2;+\infty)$.**B)** $S=(-\infty;0)$.**C)** $S=(0;+\infty)$. **D)** $S=(-\infty;+\infty)$.

Câu 38. Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2-3x-10}}>\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$.

A) 1.**B)** 0. **C)** 9. **D)** 11.

Câu 39. Tập nghiệm của bất phương trình $\log x\geq 1$ là:

A) $(10;+\infty)$.**B)** $(0;+\infty)$. **C)** $[10;+\infty)$. **D)** $(-\infty;10)$.

Câu 40. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)<\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$.

A) $S=(2;+\infty)$.**B)** $S=(-1;2)$.**C)** $S=(-\infty;2)$. **D)** $S=\left(\frac{1}{2};2\right)$.

Câu 41. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{0,8}(15x+2)>\log_{0,8}(13x+8)$ là:

A) Vô số.**B)** 4. **C)** 2. **D)** 3.

Câu 42. Tập nghiệm của bất phương trình $4^x>2^{x+8}$ là :

A) $[8;+\infty)$.**B)** $(-\infty;8)$. **C)** $(0;8)$. **D)** $(8;+\infty)$.

Câu 43. Tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+2}<\left(\frac{1}{25}\right)^{-x}$ là:

A) $S=(-\infty;2)$.**B)** $S=(-\infty;1)$.**C)** $S=(1;+\infty)$. **D)** $S=(2;+\infty)$.

Câu 44. Tập nghiệm của bất phương trình $5^{x^2-x}<25$ là:

A) $(2;+\infty)$.**B)** $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.**C)** $(-1;2)$. **D)** $\mathbb{R}$.

Câu 45. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{2x-1}>27$ là:

A) $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.**B)** $(3;+\infty)$.**C)** $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$.**D)** $(2;+\infty)$.

Câu 46. Nghiệm của bất phương trình $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1}\geq\left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$ là:

A) $-3\leq x<-1$. **B)** $x\geq 1$.

C) $-2\leq x<-1$ hoặc $x\geq 1$. **D)** $-2<x<1$.

Câu 47. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình: $\left(\frac{2}{5}\right)^{1-3x}\geq\frac{25}{4}$.

A) $S=\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$.**B)** $S=[1;+\infty)$.**C)** $S=(-\infty;1]$. **D)** $S=\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Câu 48. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\sqrt{10}-3\right)^{\frac{3-x}{x-1}}>\left(\sqrt{10}+3\right)^{\frac{x+1}{x+3}}$ là:

A) 2.**B)** 1. **C)** 0. **D)** 3.

Câu 49. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_5(2x+1)<\log_5(1-x)+1$ là:

A) $S=\left(-\frac{1}{2};1\right)$.**B)** $S=\left(-\infty;\frac{4}{7}\right)$.**C)** $S=\left(-\frac{1}{2};\frac{4}{7}\right]$. **D)** $S=\left(-\frac{1}{2};\frac{4}{7}\right)$.

Câu 50. Bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}x+\log_{\sqrt{3}}x\leq 3$ có tập nghiệm là $(a;b]$. Tính $T=a+3b$.

A) $T=0$.**B)** $T=27$. **C)** $T=81$. **D)** $T=9$.

BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

D. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TỰ LUẬN

❖

Bài 1: **a.**Hàm số $y=\log_3\left(2x-x^2\right)$ xác định khi và chỉ khi

$2x-x^2>0 \Leftrightarrow 0<x<2$.

Vậy tập xác định của hàm số $D=\left(0;2\right)$.

b) Hàm số $y=2^{\sqrt{1-2x}}$ xác định khi và chỉ khi $1-2x\ge 0 \Leftrightarrow x\le \frac{1}{2}$.

Vậy tập xác định của hàm số $D=\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]$.

c) Hàm số $y=\log_2\frac{10-x}{x^2-3x+2}$ xác định

$\Leftrightarrow \frac{10-x}{x^2-3x+2}>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<1 \\ 2<x<10 \end{array}\right.$

Vậy tập xác định của hàm số $D=\left(-\infty;1\right)\cup\left(2;10\right)$.

d) Hàm số $y=\sqrt{3^x-1}-\log_2(x-2)^2$ xác định

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^x-1\ge 0 \\ x-2\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x\ne 2 \end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số $D=\left[0;+\infty\right)\backslash\left\{2\right\}$.

e) Hàm số $y=\log_{\frac{1}{2}}\frac{x-3}{x+1}$ xác định $\Leftrightarrow \frac{x-3}{x+1}>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>3 \end{array}\right.$

Vậy tập xác định của hàm số $D=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$

Bài 2. a) $\log\left(100a^3\right)=\log 100+\log a^3=2+3\log a=5$.

b) $\log_a b=3 \Rightarrow b=a^3$ do đó

$B=\frac{\left(a^3\right)^3}{a^9}+\log_{\frac{a}{a^3}}\sqrt{aa^3}=1+\log_{a^{-2}}a^2=1-1=0$

c)

$$C=\ln\left(2\sqrt{2}+3\right)^{2020}+\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)^{2020}=\ln\left(\left(2\sqrt{2}+3\right)^{2020}\left(3-2\sqrt{2}\right)^{2020}\right)=\ln 1=0$$

.

d) Ta có $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\dfrac{\left(n\left(n+1\right)\right)^2}{4}$.

Mặt khác $D=1+2^2\log_{\sqrt{2}}2+3^2\log_{\sqrt[3]{2}}2+....+2018^2\log_{\sqrt[2018]{2}}2$

$=1+2^2\log_{2^{\frac{1}{2}}}2+3^2\log_{2^{\frac{1}{3}}}2+....+2018^2\log_{2^{\frac{1}{2018}}}2$

$=1+2^3\log_2 2+3^3\log_2 2+....+2018^3\log_2 2=1+2^3+3^3+...+2018^3$

$=\left[\dfrac{2018\left(2018+1\right)}{2}\right]^2=1009^2.2019^2$.

Bài 3.a) $\log 16=4\log 2=4a$.

b) $\log 9000=\log\left(3^2.10^3\right)=2\log 3+3=2a+3$.

c) $\log_6 9=2\log_{2.3}3\Leftrightarrow a=\dfrac{2}{\log_3 2.3}\Leftrightarrow \log_3 2+1=\dfrac{2}{a}\Leftrightarrow \log_3 2=\dfrac{2-a}{a}$..

d) Ta có $\log_{12}27=\dfrac{3}{\log_3\left(2^2.3\right)}=a$.

Suy ra $\dfrac{3}{1+2\log_3 2}=a$ hay $\log_3 2=\dfrac{3-a}{2a}$ ($a\neq 0$ vì $a=\log_{12}27>\log_{12}1$).

Khi đó: $\log_{36}24=\dfrac{\log_3 24}{\log_3 36}=\dfrac{3\log_3 2+1}{2\log_3 2+2}=\dfrac{1+\dfrac{9-3a}{2a}}{2+\dfrac{6-2a}{2a}}=\dfrac{9-a}{6+2a}$.

Bài 4.a) Ta có: $\log_2 5=a;\log_3 5=b$ nên $\log_5 2=\dfrac{1}{a};\log_5 3=\dfrac{1}{b}$.

$\log_6 5=\dfrac{1}{\log_5 6}=\dfrac{1}{\log_5 2+\log_5 3}=\dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\dfrac{ab}{a+b}$.

b) Ta có: $\log_{125}30=\dfrac{\lg 30}{\lg 125}=\dfrac{\lg\left(3.10\right)}{\lg\left(\dfrac{1000}{8}\right)}=\dfrac{\log 3+\log 10}{\log 1000-\log 8}=\dfrac{\log 3+1}{3-3\log 2}=\dfrac{a+1}{3\left(1-b\right)}$.

c) Ta có $1350=30.3^2.5$ suy ra $\log_{30}1350=1+2\log_{30}3+\log_{30}5=1+2a+b$.

d) Ta có $a.c=\log_7 3$, $\log_{140}63=\dfrac{\log_3 63}{\log_3 140}=\dfrac{2+\log_3 7}{2\log_3 2+\log_3 5+\log_3 7}=\dfrac{2ac+1}{abc+2c+1}$.

Bài 5.a) $3^x=\dfrac{1}{9}\Leftrightarrow 3^x=3^{-2}\Leftrightarrow x=-2$.

b) $2^{2x-1}=3\Leftrightarrow 2x-1=\log_2 3\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\left(1+\log_2 3\right)\Leftrightarrow x=\log_2\sqrt{6}$.

c) $e^{x^2-2x-3}=1\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$.

d) $2^x.15^{x+1}=3^{x+3}\Leftrightarrow 2^x.5^{x+1}=3^2\Leftrightarrow 10^x=\dfrac{9}{5}\Leftrightarrow x=\log\dfrac{9}{5}=\log 9-\log 5$

$\Leftrightarrow x=2\log 3-\log 5$.

Bài 6.a) $\log_{\frac{1}{4}}x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

b) $\log_3\left(2x-1\right)=2\Leftrightarrow 2x-1=3^2\Leftrightarrow x=5$

c) $\log\left(x-1\right)^2=2\Leftrightarrow 2\log\left|x-1\right|=2\Leftrightarrow$

$\log\left|x-1\right|=1\Leftrightarrow\left|x-1\right|=10\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=11\\x=-9\end{array}\right.\left(tm\right)$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{11;-9\right\}$.

d) $\log_2\left[x(x-1)\right]=1\Leftrightarrow x\left(x-1\right)=2\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x_1=-1,\ x_2=2$

e) Điều kiện: $x^2-5x+6>0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x>3\\x<2\end{array}\right.$;

$\left(x-2\right)\left[\log_{0,5}\left(x^2-5x+6\right)+1\right]=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x-2=0\\\log_{0.5}\left(x^2-5x+6\right)+1=0\end{array}\right.$.

+) $x-2=0\Leftrightarrow x=2$ (không thỏa mãn điều kiện).

+) $\log_{0.5}\left(x^2-5x+6\right)+1=0 \Leftrightarrow x^2-5x+6=2 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$ (Thỏa mãn đk).

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{1;4\}$.

f) Điều kiện: $x>0$.

Ta có: $\log_2 x+\log_3 2.\log_2 x+\log_4 2.\log_2 x=\log_{20} 2.\log_2 x$

$\Leftrightarrow \log_2 x.\left(1+\log_3 2+\log_4 2-\log_{20} 2\right)=0 \Leftrightarrow \log_2 x=0 \Leftrightarrow x=1$ (nhận)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

g) $\log_2(9-2^x)=3-x \Leftrightarrow 9-2^x=2^{3-x} \Leftrightarrow 9-2^x=\dfrac{8}{2^x}$

Đặt $t=2^x, t>0$

Ta được phương trình: $9-t=\dfrac{8}{t} \Leftrightarrow t^2-9t+8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=8 \end{array}\right.$

$+) t=1 \Leftrightarrow x=2$

$+) t=8 \Leftrightarrow x=256$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x_1=2, x_2=256$

h) $\log_3(3^x-8)=2-x \Leftrightarrow 3^x-8=3^{2-x} \Leftrightarrow 3^x-8=\dfrac{9}{3^x}$

Đặt $t=3^x$, $t>0$

Ta được phương trình: $t-8=\dfrac{9}{t} \Leftrightarrow t^2-8t-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=9 \end{array}\right.$

+) $t=-1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$

+) $t=9 \Leftrightarrow x=19683$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x_1=\dfrac{1}{3}, x_2=19683$

Bài 7.a) $3^{x-1}=27 \Leftrightarrow 3^{x-1}=3^3 \Leftrightarrow x-1=3 \Leftrightarrow x=4$.

b) $4^{x-1}=8^{3-2x}\Leftrightarrow \dfrac{2^{2x}}{4}=\dfrac{512}{2^{6x}}\Leftrightarrow 2^{8x}=2048\Leftrightarrow 2^{8x}=2^{11}\Leftrightarrow 8x=11$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{11}{8}$.

c) $2^{x^2-x-4}=2^{-4}\Leftrightarrow x^2-x-4=-4\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{0;1\}$.

d) Ta có: $3.5^{x-2x^2+1}=5.3^{-2x^2+x+1}\Leftrightarrow \dfrac{5^{x-2x^2+1}}{3^{-2x^2+x+1}}=\dfrac{5}{3}\Leftrightarrow \left(\dfrac{5}{3}\right)^{-2x^2+x+1}=\dfrac{5}{3}$

$\Leftrightarrow -2x^2+x+1=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{0;\dfrac{1}{2}\right\}$.

f) Nhận xét:

$\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)=1\Rightarrow 3-2\sqrt{2}=\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}=\left(3+2\sqrt{2}\right)^{-1}$,

Nên ta có:

$\left(3+2\sqrt{2}\right)^{x^2-x+2}=\left(3-2\sqrt{2}\right)^{x^3-2}\Leftrightarrow \left(3+2\sqrt{2}\right)^{x^2-x+2}=\left(3+2\sqrt{2}\right)^{2-x^3}$

$\Leftrightarrow x^2-x+2=2-x^3\Leftrightarrow x^3+x^2-x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{0;\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Bài 8.a) $\log(x^2-6x+7)=\log(x-3)\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x+7=x-3 \\ x-3>0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=2 \end{array}\right. \\ x>3 \end{cases}\Leftrightarrow x=5$.

b) $\log_2 x+\log_2(x-1)=1\left(*\right)$

Đk: $\begin{cases} x > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$

$$(*) \Leftrightarrow \log_2\left(x(x-1)\right) = 1 \Leftrightarrow x(x-1) = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Đối chiếu với Đk ta được nghiệm phương trình là $x = 2$

c) $\log_4(x+3) - \log_4(x-1) = 2 - \log_4 8$;

ĐKXĐ: $x > 1$.

Ta có:

$$\log_4(x+3) - \log_4(x-1) = 2 - \log_4 8 \Leftrightarrow \log_4\left(\frac{x+3}{x-1}\right) = \log_4(2) \Leftrightarrow \frac{x+3}{x-1} = 2 \Leftrightarrow x = 5$$

(nhận)

d) $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{1/3} x = 6$;

ĐKXĐ: $x > 0$.

Ta có:

$$\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{1/3} x = 6 \Leftrightarrow \log_3 x + 2\log_3 x - \log_3 x = 6 \Leftrightarrow \log_3 x = 3 \Leftrightarrow x = 27$$

(nhận)

e) $\log_{1/2}(x-1) + \log_{1/2}(x+1) = 1 + \log_{1/\sqrt{2}}(7-x)$;

ĐKXĐ: $1 < x < 7$.

Ta có:

$$\log_{1/2}(x-1) + \log_{1/2}(x+1) = 1 + \log_{1/\sqrt{2}}(7-x) \Leftrightarrow \log_{1/2}((x-1)(x+1)) = 2\log_{1/2}(7-x$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1) = \frac{1}{2}(x-7)^2 \Leftrightarrow x^2 + 14x - 51 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3(N) \\ x = -17(L) \end{array}\right.$$

f) Điều kiện: $\begin{cases} (x+1)^2 > 0 \\ 4 - x > 0 \\ (4+x)^3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x < 4 \\ x > -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < 4 \\ x \neq -1 \end{cases}$

Ta có $\log_4(x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x} + \log_8(4+x)^3$

$$\Leftrightarrow \log_2|x+1| + \log_2 4 = \log_2(4-x) + \log_2(4+x) \Leftrightarrow 4|x-1| = 16 - x^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geq 1\\ 4x-4=16-x^2\end{cases}\\ \begin{cases}x<1\\ -4x+4=16-x^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geq 1\\ x=-2+2\sqrt{6} \text{ hay } x=-2-2\sqrt{6}\end{cases}\\ \begin{cases}x<1\\ x=-2 \text{ hay } x=6\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2+2\sqrt{6}\\ x=-2\end{array}\right. \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-2;-2+2\sqrt{6}\right\}$.

Bài 9. a) Phương trình đã cho tương đương với $12.3^x+3.3^x.5^x-5.5^x-20=0$

$$\Leftrightarrow 3.3^x\left(5^x+4\right)-5\left(5^x+4\right)=0 \Leftrightarrow \left(3.3^x-5\right).\left(5^x+4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5^x+4=0\ (VN)\\ 3.3^x-5=0\ (1)\end{array}\right.$$

Giải phương trình (1) ta có : $3^x=\dfrac{5}{3} \Leftrightarrow x=\log_3 5-1$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x=\log_3 5-1$.

b) Điều kiện : $\begin{cases}3x-4>0\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>\dfrac{4}{3}\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow x>\dfrac{4}{3}$.

Phương trình đã cho tương đương với $\left[\log_2\left(3x-4\right)-1\right].\log_3 x=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2\left(3x-4\right)-1=0\\ \log_3 x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2\left(3x-4\right)=1\\ x=1\ \left(KTM\right)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 3x-4=2 \Leftrightarrow x=2\ \left(TM\right).$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=2$.

c) Phương trình đã cho tương đương với

$$2.3^x-2^x.3^x=2-2^x \Leftrightarrow 3^x\left(2-2^x\right)=2-2^x \Leftrightarrow \left(2-2^x\right)\left(3^x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-2^x=0 \\ 3^x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x=2 \\ 3^x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \end{array}\right..$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x \in \{0;1\}$.

d) Ta có:

$$5^{x^2-4x+3}+5^{x^2+7x+6}=5^{2x^2+3x+9}+1 \Leftrightarrow 5^{x^2-4x+3}+5^{x^2+7x+6}=5^{2x^2+3x+9}+1.$$

Đặt $\begin{cases} a=x^2-4x+3 \\ b=x^2+7x+6 \end{cases}$, ta được phương trình:

$$5^a+5^b=5^{a+b}+1 \Leftrightarrow 5^a+5^b=5^a.5^b+1$$

$$\Leftrightarrow \left(1-5^a\right)\left(1-5^b\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^a=1 \\ 5^b=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}\right..$$

Khi đó $\left[\begin{array}{l} x^2-4x+3=0 \\ x^2+7x+6=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \\ x=-1 \\ x=-6 \end{array}\right..$

e) Phương trình

$$\Leftrightarrow 2^{x^2-1}\left(2^x-1\right)=2^x\left(2^x-1\right) \Leftrightarrow \left(2^x-1\right)\left(2^{x^2-1}-2^x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x-1=0 \\ 2^{x^2-1}-2^x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x=1 \\ 2^{x^2-1}=2^x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-1=x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

.

Bài 10.a) Ta có:

$$2^{x^2-4}=5^{x-2} \Leftrightarrow x^2-4=(x-2)\log_2 5 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)=(x-2)\log_2 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\log_2 5 - \end{array}\right.$$

b) Lấy logarit cơ số 5 hai vế ta có:

$$\log_5 5^{3^x}=\log_5 7^{2^x} \Leftrightarrow 3^x=2^x.\log_5 7 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x=\log_5 7 \Leftrightarrow x=\log_{\frac{3}{2}}\left(\log_5 7\right)$$

.

Vậy phương trình có nghiệm là: $x=\log_{\frac{3}{2}}\left(\log_5 7\right)$.

c)Phương trình tương đương:

$$2^{x^2-2x}.2=\frac{3}{3^x} \Leftrightarrow 2^{x^2-2x+1}=3^{1-x} \Leftrightarrow 2^{(x-1)^2}=3^{-(x-1)}\ (*)$$

Lấy logarit cơ số 2 hai vế của $(*)$, ta được $(x-1)^2=-(x-1).\log_2 3$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-1+\log_2 3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1-\log_2 3=\log_2\left(\dfrac{2}{3}\right) \end{array}\right.$.

Vậy phương trình có nghiệm là: $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\log_2\left(\dfrac{2}{3}\right) \end{array}\right.$.

d) Điều kiện: $x\neq -1$.

Phương trình tương đương $5^x.2^{\frac{3x}{x+1}}=2^2.5^2 \Leftrightarrow 5^{x-2}=2^{\frac{2-x}{x+1}}$ $(*)$

Lấy logarit cơ số 5 hai vế của $(*)$, ta được $(x-2)=\dfrac{2-x}{x+1}.\log_5 2$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+1+\log_5 2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\ (TM) \\ x=-\log_5 2-1\ (TM) \end{array}\right.$.

Vậy phương trình có nghiệm là: $\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\log_5 2-1 \end{array}\right.$.

Bài 11.a) $2^x\leq 5 \Leftrightarrow x\leq \log_2 5$.

b) Ta có: $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x>27 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{3}\right)^x>\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3} \Leftrightarrow x<-3$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;-3)$.

c) Ta có: $3^{x-2}>3^{5-x} \Leftrightarrow x-2>5-x \Leftrightarrow x>\dfrac{7}{2}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(\dfrac{7}{2};+\infty\right)$.

d) Ta có $2^{x^2-1}<8 \Leftrightarrow 2^{x^2-1}<2^3 \Leftrightarrow x^2-1<3 \Leftrightarrow -2<x<2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=(-2;2)$.

e) Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} \ge \left(\frac{1}{2}\right)^{3} \Leftrightarrow x^2-2x\le 3 \Leftrightarrow x^2-2x-3\le 0 \Leftrightarrow -1\le x\le 3$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=[-1;3]$.

f) Ta có: $3^{x-1}.5^x \le 75 \Leftrightarrow \frac{1}{3}.3^x.5^x \le 75 \Leftrightarrow 15^x \le 225 = 15^2 \Leftrightarrow x \le 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;2]$.

Bài 12.a) $\log x \ge 1 \Leftrightarrow x \ge 10$

b) $\log_{\frac{1}{2}} x > 2 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{4}$

c) $\log_2(2x+1)\le 1 \Leftrightarrow 0\le 2x+1\le 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{2}$

d) $\log_\pi(x^2-2x)<0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x\ge 0 \\ x^2-2x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-\sqrt{2}<x\le 0 \\ 2<x\le 1+\sqrt{2} \end{array}\right.$

Bài 13. a) $3^{x-1} > 27 \Leftrightarrow 3^{x-1} > 3^3 \Leftrightarrow x-1>3 \Leftrightarrow x>4.$

b) Ta có bất phương trình tương đương với

$x-1\ge x^2-x-9 \Leftrightarrow x^2-2x-8\le 0 \Leftrightarrow -2\le x\le 4$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=[-2;4]$.

c) Ta có

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} > 3^{-x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} \ge \left(\frac{1}{3}\right)^{x} \Leftrightarrow \sqrt{x+2}\le x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x+2\ge 0 \\ x+2\le x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x\ge -2 \\ \left[\begin{array}{l} x\ge 2 \\ x\le -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 2$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=[2;+\infty)$.

d) Điều kiện: $x\ne -1$.

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{x} > 3^{\frac{2x}{x+1}} \Leftrightarrow 3^{-2x} > 3^{\frac{2x}{x+1}} \Leftrightarrow -2x > \frac{2x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{2x}{x+1}+2x<0 \Leftrightarrow 2x\left(\frac{1}{x+1}+1\right)<0$$

$\Leftrightarrow \frac{2x(x+2)}{x+1}<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ -1<x<0 \end{array}\right.$ (thỏa điều kiện).

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;-2)\cup(-1;0)$.

e) Ta có: $3^{2-\sqrt{x^2+5x-6}}\ge\frac{1}{3^x}\Leftrightarrow 3^{2-\sqrt{x^2+5x-6}}\ge 3^{-x}\Leftrightarrow 2-\sqrt{x^2+5x-6}\ge -x$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+5x-6}\le x+2\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+5x-6\ge 0\\ x+2\ge 0\\ x^2+5x-6\le(x+2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le -6\vee x\ge 1\\ x\ge -2\\ x\le 10\end{cases}$$

$\Leftrightarrow 1\le x\le 10$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=[1;10]$.

Bài 14.a) Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-3)\ge\log_{\frac{1}{2}}4\Leftrightarrow\begin{cases}x-3\le 4\\ x-3>0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 7\\ x>3\end{cases}\Leftrightarrow 3<x\le 7\ .$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=(3;7]$.

b) Ta có $\log(3-2x)\ge\log(x+1)\Leftrightarrow\begin{cases}x+1>0\\ 3-2x\ge x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\ x\le\frac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow -1<x\le\frac{2}{3}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=\left(-1;\frac{2}{3}\right]$.

c) Điều kiện: $\begin{cases}x^2>0\\ x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne 0\\ x>-1\end{cases}\Leftrightarrow -1<x\ne 0$.

Ta có: $\ln x^2\ge 2\ln(x+1)\Leftrightarrow \ln x^2\ge\ln(x+1)^2\Leftrightarrow x^2\ge(x+1)^2\Leftrightarrow$ $2x+1\le 0\Leftrightarrow x\le-\frac{1}{2}$.

Kết hợp với điều kiện ta được tập nghiệm $S=\left(-1;-\frac{1}{2}\right]$.

d) Đk: $\begin{cases}x^3>0\\ x-2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x>2\end{cases}\Leftrightarrow x>2$.

Ta có: $\log_3 x^3 > -3\log_{\frac{1}{3}}(x-2) \Leftrightarrow$

$3\log_3 x > 3\log_3(x-2) \Leftrightarrow x > x-2 \Leftrightarrow 0 > -2$ (thỏa mãn $\forall x \in \mathbb{R}$)

Kết hợp với điều kiện ta được tập nghiệm $S = (2;+\infty)$.

e) Điều kiện của bất phương trình là $x > \frac{9}{4}$.

Khi đó bất phương trình đã cho thành

$\log_{\frac{1}{2}}(4x-9) > \log_{\frac{1}{2}}(x+10) \Leftrightarrow 4x-9 < x+10 \Leftrightarrow x < \frac{19}{3}$. (Do $a = \frac{1}{2} < 1$).

So điều kiện ta được $\frac{9}{4} < x < \frac{19}{3}$.

f) Điều kiện: $\begin{cases} x > -1 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 2$

Ta có $\log_{0.8}(x+1) \le \log_{1.25}(-2x+4) \Leftrightarrow \log_{\frac{4}{5}}(x+1) \le \log_{\frac{5}{4}}(-2x+4)$

$\log_{\frac{4}{5}}(x+1) \le -\log_{\frac{4}{5}}(-2x+4) \Leftrightarrow \log_{\frac{4}{5}}(x+1)(-2x+4) \le 0$

$\Leftrightarrow -2x^2 + 2x + 4 \ge 1 \Leftrightarrow -2x^2 + 2x + 3 \ge 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{7}}{2} \le x \le \frac{1+\sqrt{7}}{2}$

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là

$T = \left[\frac{1-\sqrt{7}}{2}; \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right]$.

g) Ta có $\log_2(x+1) - 2\log_4(5-x) < 1 - \log_2(x-2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 5 \\ \log_2(x+1) - \log_2(5-x) < 1 - \log_2(x-2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 5 \\ \log_2(x+1) + \log_2(x-2) < \log_2 2 + \log_2(5-x) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 5 \\ \log_2\left[(x+1).(x-2)\right] < \log_2(10-2x) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 5 \\ (x+1).(x-2) < 10 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 5 \\ x^2 + x - 12 < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 5 \\ -4 < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 3.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(2; 3)$.

Bài 15. a. $\left(\frac{2}{e}\right)^{x^2+2mx+1} \le \left(\frac{e}{2}\right)^{2x-3m}$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{e}\right)^{x^2+2mx+1} \le \left(\frac{2}{e}\right)^{-2x+3m}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2 + 2mx + 1 \ge -2x + 3m$, $\quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 + 2(m+1)x + 1 - 3m \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $(*)$.

$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 + 5m \le 0 \Leftrightarrow -5 \le m \le 0$.

Bài 15.b. Ta có: $9^x - 2(m+1).3^x - 3 - 2m > 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 2.3^x - 3 > (3^x + 1).2m$

$\Leftrightarrow (3^x + 1)(3^x - 3) > (3^x + 1).2m \Leftrightarrow 3^x - 3 > 2m \Leftrightarrow 3^x > 3 + 2m$

Vậy $9^x - 2(m+1).3^x - 3 - 2m > 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow 3 + 2m \le 0 \Leftrightarrow m \le -\frac{3}{2}$.

E. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1 D	**2C**	**3A**	**4B**	**5D**	**6C**	**7B**	**8 A**	**9B**	**10 D**	**11 A**	**12 D**	**13 D**	**14 A**	**15 C**
16 B	**17 A**	**18 D**	**19 A**	**20 D**	**21 A**	**22 D**	**23 B**	**24 A**	**25 D**	**26 A**	**27 B**	**28 C**	**29 C**	**30 C**
31 C	**32 C**	**33 A**	**34 D**	**35 C**	**36 A**	**37 C**	**38 C**	**39 C**	**40 D**	**41 D**	**42 D**	**43 D**	**44 C**	**45 D**
46 C	**47 B**	**48 D**	**49 D**	**50 C**										

Câu 30. Chọn C

Câu 31. Chọn C

Điều kiện $x > 0$.

Ta có $x\log_2 x + 6 = 2x + 3\log_2 x \Leftrightarrow x\log_2 x + 6 - 2x - 3\log_2 x = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)(\log_2 x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 3 = 0 \\ \log_2 x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 4 \end{array}\right.$

Vậy: tích các nghiệm của phương trình $x\log_2 x + 6 = 2x + 3\log_2 x$ bằng 12

Câu 32. **Chọn C**

Ta có $10^x+10=2^{x+1}+5^{x+1}\Leftrightarrow 2^x.5^x+2.5-2.2^x-5.5^x=0$

$\Leftrightarrow (5^x-2).(2^x-5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5^x-2=0\\2^x-5=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\log_5 2\\x=\log_2 5\end{array}\right.$

Vậy: tích các nghiệm của phương trình $\log_2$ bằng $\log_2 5.\log_5 2=1$

Câu 33. **Chọn A**

Câu 34. **Chọn D**

Ta có:

$2^{x^2-1}=3^{2x+3}\Leftrightarrow x^2-1=(2x+3)\log_2 3\Leftrightarrow x^2-(2\log_2 3)x-1-3\log_2 3=0$

. (1)

Do $1.(-1-3\log_2 3)=-1-3\log_2 3<0$ nên phương trình (1) có 2 nghiệm thực trái dấu x_1,x_2. Khi đó theo định lý Vi-et, ta có: $x_1x_2=\dfrac{-1-3\log_2 3}{1}=-1-3\log_2 3=-\log_2 54$.

Câu 35. **Chọn C**

Ta có: $2^x>8\Leftrightarrow 2^x>2^3\Leftrightarrow x>3$.

Vậy tập nghiệm bất phương trình là $S=(3;+\infty)$.

Câu 36. **Chọn A**

Ta có: $3^{4-x^2}\ge 27 \Leftrightarrow 3^{4-x^2}\ge 3^3 \Leftrightarrow 4-x^2\ge 3 \Leftrightarrow x^2\le 1\Leftrightarrow -1\le x\le 1$.

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S=[-1;1]$.

Câu 37. **Chọn C**

$2^{x-1}>\left(\dfrac{1}{16}\right)^{\frac{1}{x}}\Leftrightarrow 2^{x-1}>2^{-\frac{4}{x}}\Leftrightarrow x-1>-\dfrac{4}{x}\Leftrightarrow \dfrac{x^2-x+4}{x}>0\Leftrightarrow x>0$.

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=(0;+\infty)$.

Câu 38. **Chọn C**

Ta có: $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2-3x-10}}>\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-2}\Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x-10}<x-2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-3x-10\ge 0\\x-2>0\\x^2-3x-10<(x-2)^2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge 5\\x\le -2\end{array}\right.\\x>2\\x<14\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge 5\\x\le -2\end{array}\right.\\2<x<14\end{cases}\Leftrightarrow 5\le x<14.$$

Vì x nguyên nên nhận $x \in \{5;6;7;8;9;10;11;12;13\}$.

Câu 39. **Chọn C**

$\log x \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 10 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 10.$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $[10;+\infty)$.

Câu 40. **Chọn D**

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 2x-1 \\ 2x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 2$.

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \left(\frac{1}{2};2\right)$.

Câu 41. **Chọn D**

Điều kiện $x > -\frac{2}{15}$.

Khi đó, $\log_{0,8}(15x+2) > \log_{0,8}(13x+8) \Leftrightarrow 15x+2 < 13x+8 \Leftrightarrow 2x < 6 \Leftrightarrow x < 3$.

Tập nghiệm bất phương trình là: $T = \left(-\frac{2}{15};3\right)$

Vì x nguyên nên $x \in \{0;1;2\}$.

Câu 42. **Chọn D**

$4^x > 2^{x+8} \Leftrightarrow 2^{2x} > 2^{x+8} \Leftrightarrow 2x > x+8 \Leftrightarrow x > 8$.

Câu 43. **Chọn D**

$5^{x+2} < \left(\frac{1}{25}\right)^{-x} \Leftrightarrow 5^{x+2} < (5)^{2x} \Leftrightarrow 2 < x$.

Câu 44. **Chọn C**

Ta có $5^{x^2-x} < 25 \Leftrightarrow x^2 - x < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 2 \Leftrightarrow x \in (-1;2)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (-1;2)$.

Câu 45. **Chọn D**

Ta có: $3^{2x-1} > 27 \Leftrightarrow 2x-1 > 3 \Leftrightarrow x > 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $(2;+\infty)$.

Câu 46. **Chọn C**

Ta có $\sqrt{5}-2=\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$.

$\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1}\geq\left(\sqrt{5}+2\right)^{\frac{1-x}{x+1}}\Leftrightarrow x-1\geq\dfrac{1-x}{x+1}\Leftrightarrow\dfrac{x^2+x-2}{x+1}\geq 0\Leftrightarrow x\in\left[-2;-1\right)\cup\left[1;+\infty\right)$

.

Câu 47. **Chọn B**

$\left(\dfrac{2}{5}\right)^{1-3x}\geq\dfrac{25}{4}\Leftrightarrow\left(\dfrac{2}{5}\right)^{1-3x}\geq\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2}\Leftrightarrow 1-3x\leq -2\Leftrightarrow x\geq 1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S=\left[1;+\infty\right)$.

Câu 48. **Chọn D**

$\left(\sqrt{10}-3\right)^{\frac{3-x}{x-1}}>\left(\sqrt{10}+3\right)^{\frac{x+1}{x+3}}\Leftrightarrow\left(\sqrt{10}+3\right)^{\frac{x-3}{x-1}}>\left(\sqrt{10}+3\right)^{\frac{x+1}{x+3}}$ ĐK:

$\begin{cases}x\neq 1\\ x\neq -3\end{cases}$

$BPT\Leftrightarrow\dfrac{x-3}{x-1}>\dfrac{x+1}{x+3}\Leftrightarrow\dfrac{-8}{(x-1)(x+3)}>0\Leftrightarrow(x-1)(x+3)<0\Leftrightarrow -3<x<1\rightarrow x\in$

.

Câu 49. **Chọn D**

Đk: $\begin{cases}2x+1>0\\ 1-x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\dfrac{1}{2}\\ x<1\end{cases}\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}<x<1$.

Ta có: $\log_5\left(2x+1\right)<\log_5\left(1-x\right)+1\Leftrightarrow$.

$\log_5\left(2x+1\right)<\log_5\left(1-x\right)+\log_5 5$. $\Leftrightarrow\log_5\left(2x+1\right)<\log_5\left(5-5x\right)$

$\Leftrightarrow 2x+1<5-5x\Leftrightarrow x<\dfrac{4}{7}$.

Kết hợp điều kiện $(*)$ suy ra bất phương trình đã cho có tập nghiệm: $S=\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{4}{7}\right)$.

Câu 50. **Chọn C**

Điều kiện $x>0$.

Ta có

$$\log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\sqrt{3}} x \le 3 \Leftrightarrow -\log_3 x + 2\log_3 x \le 3$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x \le 3 \Leftrightarrow x \le 27$$

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là $T = \left(0;27\right]$

Do đó $a = 0; b = 27$. Vậy $T = 0 + 3.27 = 81$