TỔNG HỢP NÓN-TRỤ-CẦU

Câu 1: Cho hình thang cân $ABCD$ có các cạnh đáy $AB = 2a$, $CD = 4a$ và cạnh bên $AD = BC = 3a$. Tính theo a thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình thang cân $ABCD$ xung quanh trục đối xứng của nó.

A. $V = \frac{4}{3}\pi a^3$.

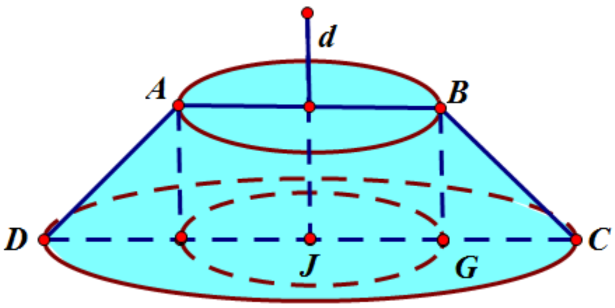
B. $V = \frac{4+10\sqrt{2}}{3}\pi a^3$.

C. $V = \frac{10\sqrt{2}}{3}\pi a^3$.

D. $V = \frac{14\sqrt{2}}{3}\pi a^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Khi quay hình thang cân $ABCD$ xung quanh trục đối xứng d của nó ta được khối nón cụt như hình vẽ.

Áp dụng công thức tính thể tích khối nón cụt là $V = \frac{1}{3}h.\left(B + B' + \sqrt{BB'}\right)$.

Với $h = BG = \sqrt{BC^2 - CG^2} = 2a\sqrt{2}$ và $B + B' + \sqrt{BB'} = \pi\left(a^2 + 4a^2 + 2a^2\right) = 7\pi a^2$.

Do đó $V = \frac{1}{3}h.\left(B + B' + \sqrt{BB'}\right) = \frac{14\sqrt{2}}{3}\pi a^3$.

Câu 2: Bên trong hình vuông cạnh a, dựng hình sao bốn cánh đều như hình vẽ bên (các kích thước cần thiết cho như ở trong hình). Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình sao đó quanh trục Oy.

A. $\frac{\pi}{8}a^3$.

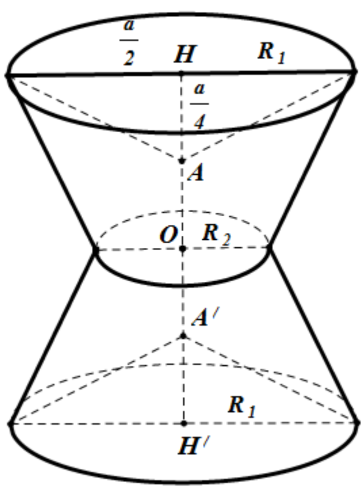
B. $\frac{5\pi}{16}a^3$.

C. $\frac{\pi}{6}a^3$.

D. $\frac{5\pi}{48}a^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Khi quay hình sao đó quanh trục Oy sinh ra hai khối có thể tích bằng nhau.

Gọi: V là thể tích khối hình sao tròn xoay cần tính.

$V_{\text{nón}}$ lần lượt là thể tích khối nón có chiều cao AH

V_C là thể tích khối nón cụt có bán kính đáy lớn là R_1 và bán kính đáy nhỏ là R_2.

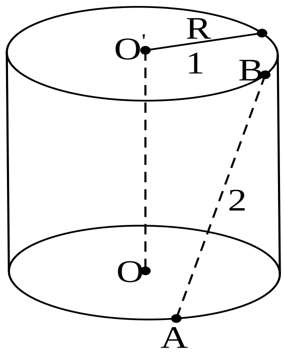
Dễ thấy $V=2\left(V_C-V_{\text{nón}}\right)=2.\left[\frac{1}{3}.\pi.OH.\left(R_1^2+R_2^2+R_1R_2\right)-\frac{1}{3}.\pi.R_1^2.AH\right]$

$=2.\frac{1}{3}.\pi.\frac{a}{2}.\left(\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{16}+\frac{a}{2}.\frac{a}{4}\right)-2.\frac{1}{3}.\pi.\frac{a^2}{4}.\frac{a}{4}$

$=\frac{7\pi a^3}{48}-\frac{2\pi a^3}{48}=\frac{5\pi a^3}{48}$.

Câu 3: Một hình trụ tròn xoay bán kính $R=1$. Trên hai đường tròn đáy (O) và. $\left(O'\right)$. lấy A và B sao cho $AB=2$. Góc giữa AB và trục OO' bằng 30^0.

Xét hai khẳng định sau:



.

(I) Khoảng cách giữa OO' và AB bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

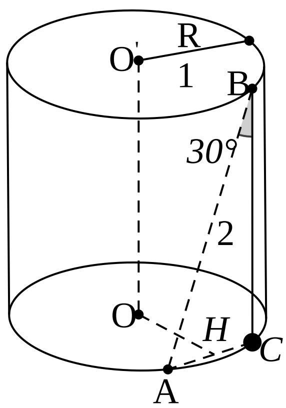
(II) Thể tích của khối trụ là $V=\pi\sqrt{3}$.

Kết luận nào sau đây là đúng?

A. Chỉ (I) đúng.
B. Cả (I) và (II) đều sai.
C. Cả (I) và (II) đều đúng.
D. Chỉ (II) đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn C



.

Kẻ đường sinh BC thì $OO'\in(ABC)$. Vì (ABC) vuông góc với (OAC) nên kẻ $OH\perp AC$ thì $OH\perp(ABC)$. Vậy $d\left(OO';AB\right)=OH$.

ΔABC có $BC = AB.\cos 30^0 = \sqrt{3}$ và $AC = AB.\sin 30^0 = 1$.

ΔOAC là tam giác đều, có cạnh bằng 1, nên $OH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Vậy (I) đúng.

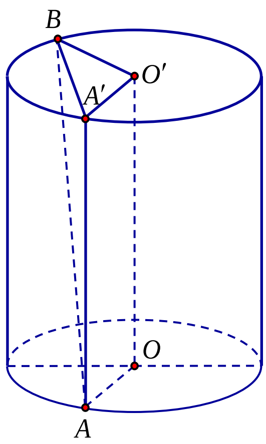
$V = \pi.R^2.h$ nên (II) đúng.

Câu 4: Cho hình trụ có hai đáy là các hình tròn (O), (O') bán kính bằng a, chiều cao hình trụ gấp hai lần bán kính đáy. Các điểm A, B tương ứng nằm trên hai đường tròn (O), (O') sao cho $AB = a\sqrt{6}$. Tính thể tích khối tứ diện $ABOO'$ theo a.

A. $\dfrac{a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\dfrac{2a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{2a^3\sqrt{5}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Ta có $OO' = 2a$, $A'B = \sqrt{AB^2 - AA'^2} = \sqrt{6a^2 - 4a^2} = a\sqrt{2}$.

Do đó $A'B^2 = O'B^2 + O'A'^2 = 2a^2$ nên tam giác $O'A'B$ vuông cân tại O' hay $O'A' \perp O'B$ $\Rightarrow OA \perp O'B$.

Khi đó $V_{OO'AB} = \dfrac{1}{6} OA.O'B.d(OA, O'B).\sin(OA, O'B) = \dfrac{1}{6} a.a.2a.\sin 90° = \dfrac{a^3}{3}$.

Câu 5: Trong không gian, cho hai điểm A, B cố định, phân biệt và điểm M thay đổi sao cho diện tích tam giác MAB không đổi. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng** ?

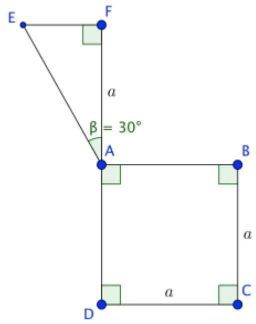
A. Tập hợp các điểm M là một mặt trụ. **B.** Tập hợp các điểm M là một mặt nón.
C. Tập hợp các điểm M là một mặt cầu. **D.** Tập hợp các điểm M là một mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Do hai điểm A, B cố định nên khoảng cách giữa hai điểm A, B cố định.
Mà diện tích tam giác MAB không đổi nên khoảng cách từ M đến đoạn thẳng AB không đổi
$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm M trong không gian cách đoạn thẳng AB một khoảng không đổi là một hình trụ.

Câu 6: Tính thể tích của vật thể tròn xoay khi quay mô hình (như hình vẽ) quanh trục DF.



.

A. $\dfrac{\pi a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{10\pi a^3}{9}$. **C.** $\dfrac{10\pi a^3}{7}$. **D.** $\dfrac{5\pi a^3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $EF = AF.\tan\beta = a.\tan 30° = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Khi quay quanh trục DF, tam giác AEF tạo ra một hình nón có thể tích.

$V_1 = \dfrac{1}{3}\pi.EF^2.AF = \dfrac{1}{3}\pi.\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2.a = \dfrac{\pi a^3}{9}$.

Khi quay quanh trục DF, hình vuông $ABCD$ tạo ra một hình trụ có thể tích.

$V_2 = \pi.DC^2.BC = \pi.a^2.a = \pi a^3$.

Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay mô hình (như hình vẽ) quanh trục DF là.

$V = V_1 + V_2 = \dfrac{\pi a^3}{9} + \pi a^3 = \dfrac{10}{9}\pi a^3$.

Câu 7: Cho hình thang vuông tại A và B với $AD = 2AB = 2BC = 2a$. Quay hình thang và miền trong của nó quanh đường thẳng chứa cạnh BC. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.

A. $V = \dfrac{5\pi a^3}{3}$ **B.** $V = \dfrac{7\pi a^3}{3}$ **C.** $V = \dfrac{4\pi a^3}{3}$ **D.** $V = \pi a^3$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Khi quay hình thang thì khối tròn xoay tạo thành là hình trụ khuyết gồm hai phần . phần khối trụ và khối nón bên trong.

Phần hình trụ có bán kính đường tròn đáy $R_1 = AB = a$.

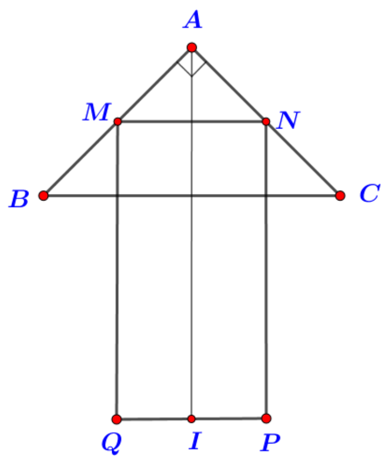
Thể tích hình trụ $V_T = \pi R_1^2 h = 2\pi a^3$.

Phần hình nón có bán kính đáy $R_2 = AB = a$.

Thể tích khối nón $V_N = \dfrac{1}{3}\pi R_2^2 h = \dfrac{1}{3}\pi a^3$.

Thể tích khối tròn xoay $V = V_T - V_N = \dfrac{5}{3}\pi a^3$.

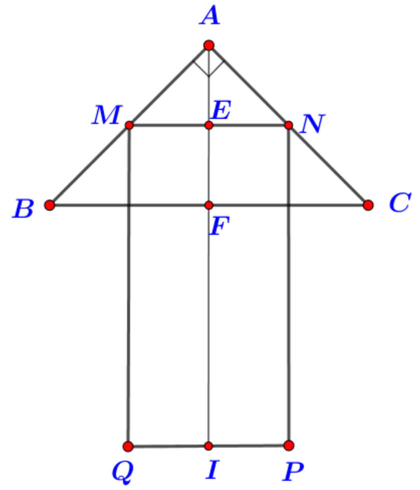
Câu 8: Cho tam giác vuông cân ABC có $AB = AC = a\sqrt{2}$ và hình chữ nhật $MNPQ$ với $MQ = 2MN$ được xếp chồng lên nhau sao cho M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC (như hình vẽ). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay mô hình trên quanh trục AI, với I là trung điểm PQ.



A. $V = \dfrac{11\pi a^3}{8}$. **B.** $V = \dfrac{17\pi a^3}{24}$. **C.** $V = \dfrac{11\pi a^3}{6}$. **D.** $V = \dfrac{5\pi a^3}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a \Rightarrow MN = a$, $MQ = 2a$.

Gọi E, F lần lượt là trung điểm MN và BC. Ta có $AF = a$, $EF = \dfrac{a}{2} \Rightarrow IF = \dfrac{3}{2}a$.

Vậy, thể tích cần tìm $V = \dfrac{1}{3}\pi.AF.FB^2 + \pi.IF.IQ^2 = \dfrac{1}{3}\pi.a.a^2 + \pi.\dfrac{3}{2}a.\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{17}{24}\pi a^3$.

Câu 9: Trong mặt phẳng cho góc xOy. Một mặt phẳng (P) thay đổi và vuông góc với đường phân giác trong của góc xOy cắt Ox, Oy lần lượt tại A, B. Trong (P) lấy điểm M sao cho $AMB = 90°$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng** ?

A. Điểm M chạy trên một mặt nón. **B.** Điểm M chạy trên một mặt trụ.
C. Điểm M chạy trên một đường tròn. **D.** Điểm M chạy trên một mặt cầu.

Hướng dẫn giải

Chọn A

+) Xét mặt phẳng (P) tại một vị trí cụ thể thì tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB, chứa trong mặt phẳng (P).

+) Gọi Ot là tia phân giác của góc xOy. Khi mặt phẳng (P) thay đổi, luôn vuông góc Ot thì tập hợp các điểm M là mặt nón đỉnh O, trục Ot với Ox, Oy là các đường sinh.

Câu 10: Cho lục giác đều $ABCDEF$ có cạnh bằng 4. Quay lục giác đều đó quanh đường thẳng AD. Tính thể tích V của khối tròn xoay được sinh ra

A. $V = 64\pi$. **B.** $V = 128\pi$. **C.** $V = 32\pi$. **D.** $V = 16\pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn A