MẶT CẦU, KHỐI CẦU

DẠNG 1: TÍNH BÁN KÍNH KHỐI CẦU

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=a$, $SB=b$, $SC=c$ và 3 cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc. Xác định bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

A. $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$. **B.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{4}$

.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi H là trung điểm của BC, gọi I là trung điểm của SA..

Vẽ Δ đi qua H và vuông góc (SBC)..

Vẽ đường trung trực d của SA cắt Δ tại O. Ta có $OA=OB=OC=OS$...

$R=\sqrt{OI^2+AI^2}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$.

Câu 2. Một khối cầu có thể tích bằng $\dfrac{32\pi}{3}$. Bán kính R của khối cầu đó là

A. $R=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ **B.** $R=2$ **C.** $R=32$ **D.** $R=4$

Hướng dẫn giải

Chọn B

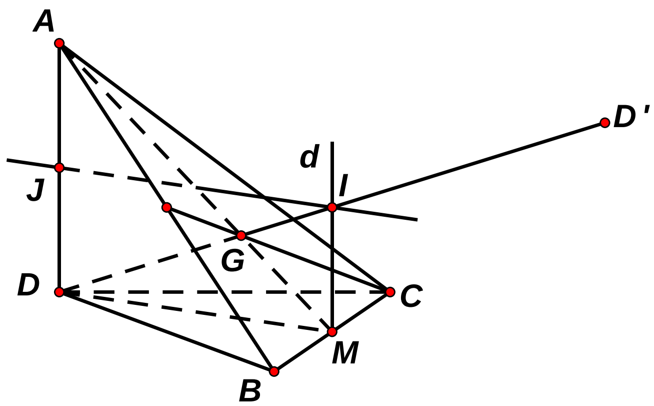
Ta có thể tích khối cầu có bán kính R là $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{32\pi}{3}\Leftrightarrow R=2$.

Câu 3. Cho bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt cầu và DA, DB, DC đôi một vuông góc, G là trọng tâm tam giác ABC, D' là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{DD'}=3\overrightarrow{DG}$. Một đường kính của mặt cầu đó là

A. DD'. **B.** BC. **C.** AB. **D.** AC.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của BC.

Dựng d qua M và vuông góc với mặt phẳng (BCD).

Khi đó $d\,//\,AD$

Gọi J là trung điểm AD. Dựng mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AD cắt d tại I, khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Ta có:

$\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IM}$ (1).

$\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{IM}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{IM}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA}\right)$

$=\overrightarrow{IM}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MD}-\frac{1}{3}.2\overrightarrow{IM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IM}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IM}+\frac{1}{3}\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IJ}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IJ}=3\overrightarrow{IG}\ \ (2)$.

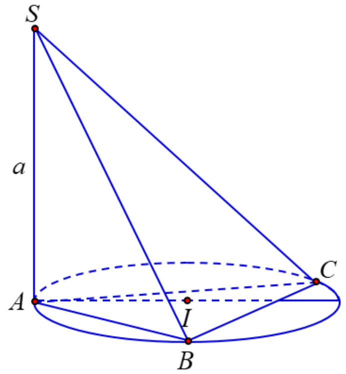
Từ (1), (2) suy ra: $\overrightarrow{ID}=3\overrightarrow{IG}$ hay ba điểm D, I, G thẳng hàng.

Mặt khác: $IM\,//\,AD$ (cùng vuông góc với mặt phẳng đáy)

$\Rightarrow \frac{DG}{GI}=\frac{AG}{GM}=2\Rightarrow \overrightarrow{DG}=2\overrightarrow{GI}\Leftrightarrow \overrightarrow{DG}=2\left(\overrightarrow{DI}-\overrightarrow{DG}\right)\Leftrightarrow 3\overrightarrow{DG}=2\overrightarrow{DI}\Leftrightarrow \overrightarrow{DD'}=2\overrightarrow{DI}$

$\Rightarrow I$ là trung điểm của DD'.

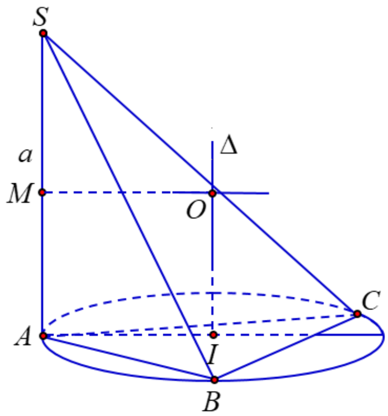
Câu 4. Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA=a$. Đáy ABC nội tiếp trong đường tròn tâm I có bán kính bằng $2a$ (tham khảo hình vẽ). Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.



A. $a\sqrt{5}$. **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{17}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Gọi Δ là đường thẳng qua I và $\Delta\perp(ABC)$.

Gọi M là trung điểm của SA, mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng SA cắt Δ tại O.

Khi đó O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$, bán kính $R=OA$.

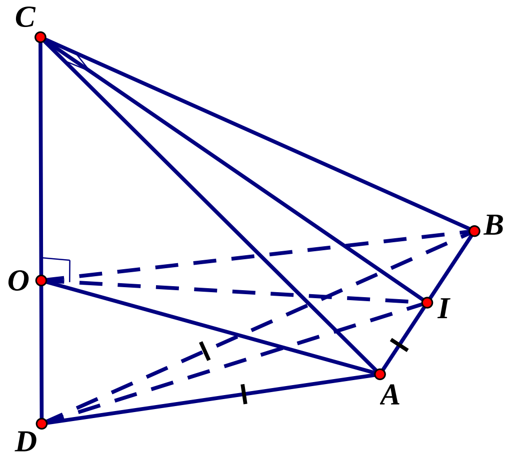
$OA=\sqrt{AI^2+OI^2}=\sqrt{4a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{17}}{2}$.

Câu 5. Trong mặt phẳng (P) cho tam giác OAB cân tại O, $OA=OB=2a$, $AOB=120^\circ$. Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại O lấy hai điểm C, D nằm về hai phía của mặt phẳng (P) sao cho tam giác ABC vuông tại C và tam giác ABD đều. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $\frac{5a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{5a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm của AB, ta có $AI = OA.\sin 60° = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow AB = 2AI = 2a\sqrt{3}$, $OI = OA.\cos 60° = a$, $CI = \frac{AB}{2} = a\sqrt{3}$, $DI = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 3a$.

Cạnh $OC = \sqrt{CI^2 - OI^2} = a\sqrt{2}$, $OD = \sqrt{DI^2 - OI^2} = 2a\sqrt{2} \Rightarrow CD = CO + OD = 3a\sqrt{2}$.

Do (CID) là mặt phẳng đối xứng của tứ diện $ABCD$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác CID là đường tròn lớn của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$, bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ được tính theo công thức

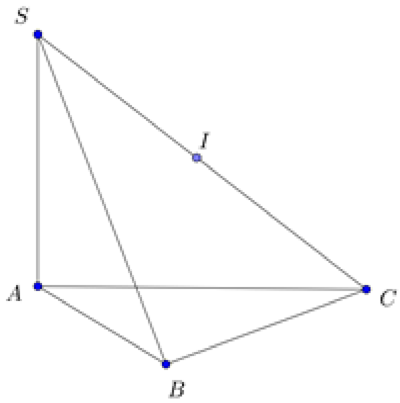
$$R = \frac{CD.CI.DI}{4S_{\Delta CID}} = \frac{CD.CI.DI}{2CD.OI} = \frac{3a.a\sqrt{3}}{2.a} = \frac{3a\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$, có SA vuông góc mặt phẳng (ABC); tam giác ABC vuông tại B. Biết $SA = 2a$, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Khi đó bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là.

A. $2a$. **B.** $2a\sqrt{2}$. **C.** a. **D.** $a\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Ta có: SAC và SBC là hai tam giác vuông tại A và B.

Nên tâm mặt cầu là I trung điểm $SC \Rightarrow R = \frac{SC}{2}$.

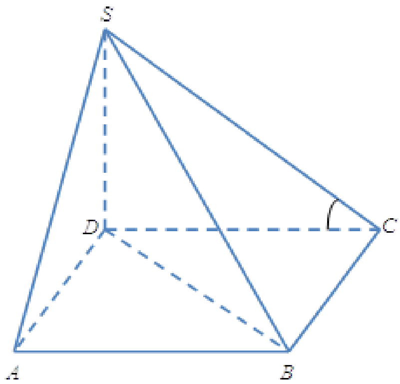
Có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a$, $SA = 2a \Rightarrow SC = 2a\sqrt{2} \Rightarrow R = a\sqrt{2}$.

Câu 7. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng 1, $\widehat{BAD}=60°$, (SCD) và (SAD) cùng vuông góc với $(ABCD)$, SC tạo với $(ABCD)$ góc $45°$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{4\pi}{3}$. **B.** 2π . **C.** $\frac{2\pi}{3}$. **D.** $\frac{8\pi}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



$$\begin{cases}(SCD)\perp(ABCD)\\(SAD)\perp(ABCD)\\(SCD)\cap(SAD)=SD\end{cases}\Rightarrow SD\perp(ABCD).$$

Hình chiếu của SC lên $(ABCD)$ là CD.

$\Rightarrow\left[SC,(ABCD)\right]=\widehat{SCD}=45^0$.

$\Rightarrow SD=CD.\tan 45°=1$.

Tam giác ABD có $AB=AD=1$, $\widehat{BAD}=60°$.

Nên tam giác ABD là tam giác đều.

Ta có : $DA=DB=DC=DS=1$.

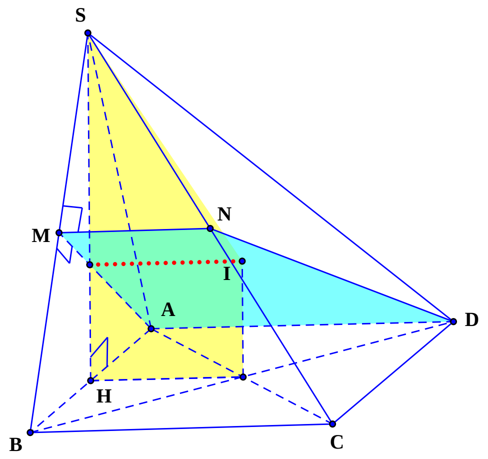
Nên D là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$. Khi đó $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Hỏi bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

A. $R=\frac{\sqrt{11}}{4}$. **B.** $R=\frac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $R=\frac{\sqrt{7}}{4}$. **D.** $R=\frac{\sqrt{21}}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Gọi O là tâm của đáy, Δ là trục của đáy $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác SAB và d là trục của mặt bên SAB.

Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$. Ta có I là giao điểm của Δ và d.

Ta có $R = IS = \sqrt{IG^2 + SG^2} = \sqrt{\left(\frac{AD}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{21}}{6}$.

Câu 9. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Biết rằng $AB = AA' = a, AC = 2a$. Gọi M là trung điểm của AC. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $MA'B'C'$ bằng.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** a. **D.** $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Cách 1:

Ta có $BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = a\sqrt{5}$.

Gọi I là trung điểm của $B'C'$, suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$.

Gọi O là trung điểm của $A'C'$.

Tam giác $MA'C'$ vuông cân tại M. Suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta MA'C'$.

Ta có $\begin{cases} OI \perp A'C' \left(OI // A'B'\right) \\ OI \perp MO \end{cases} \Rightarrow OI \perp \left(ACC'A'\right)$.

Suy ra OI là trục của tam giác $MA'C'$.

Suy ra $IA' = IC' = IM = IB'$.

Suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tự diện $MA'B'C'$ bán kính $R = \frac{1}{2}B'C' = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Cách 2: