DÃY SỐ
CẤP SỐ CỘNG
CẤP SỐ NHÂN

TÁC GIẢ
TOÁN TỪ TÂM

MỤC LỤC

Bài 1. DÃY SỐ
A. Lý thuyết
1. Dãy số 3
2. Cách xác định dãy số....3
3. Dãy số tăng, dãy số giảm và dãy số bị chặn 4
4. Dãy số bị chặn 4
B. Các dạng bài tập
Dạng 1. Tìm số hạng của dãy số từ dãy số cho trước....5
Dạng 2. Tính tăng – giảm của dãy số....11
Dạng 3. Tính bị chặn của dãy số 15
C. Luyện tập
A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm 18
B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai 20
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn....22
Bài 2. CẤP SỐ CỘNG
A. Lý thuyết
1. Cấp số cộng 24
2. Số hạng tổng quát 24
3. Tính chất các số hạng của cấp số cộng 24
4. Tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng.... 25
B. Các dạng bài tập
Dạng 1. Xác định dãy đã cho là cấp số cộng 26
Dạng 2. Xác định các yếu tố qua số hạng tổng quát....28
Dạng 3. Tính chất cấp số cộng 31
Dạng 4. Tính tổng n số hạng đầu của một cấp số cộng 34
C. Luyện tập
A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm 38
B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai 40
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn....42
Bài 3. CẤP SỐ NHÂN
A. Lý thuyết
1. Cấp số nhân.... 44
2. Số hạng tổng quát 44
3. Tính chất các số hạng của cấp số nhân.... 44
4. Tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng....45

B. Các dạng bài tập

Dạng 1. Xác định dãy đã cho là cấp số nhân 46
Dạng 2. Xác định các yếu tố qua số hạng tổng quát..48
Dạng 3. Tính tổng n số hạng đầu của một cấp số nhân..50
Dạng 4. Cấp số nhân liên quan hình học 52
Dạng 5. Nghiệm của phương trình liên quan cấp số nhân 56
Dạng 6. Cấp số nhân & cấp số cộng..58
Dạng 7. Bài toán thực tế liên quan cấp số nhân 60

C. Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm 63
B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai 68
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn..70

Chương 02
Bài 1. DÃY SỐ

A Lý thuyết

1. Dãy số

Định nghĩa:

- Mỗi hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn. Nghĩa là:

$$u:\mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u_n = u(n).$$

Dãy số trên được kí hiệu là (u_n)

Dạng khai triển của dãy số (u_n) là: $u_1,\ u_2,\ u_3,\ ...,\ u_n,...$

Chú ý

(1) $u_1 = u(1)$ là số hạng đầu,
$u_n = u(n)$ là số hạng thứ n (số hạng tổng quát) của dãy số.

(2) Nếu $u_n = C, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta nói (u_n) là dãy số không đổi.

(3) Hàm số u xác định trên tập $M = \{1,2,3,...,m\}$ với $m \in \mathbb{N}^*$ thì được gọi là một dãy số hữu hạn.

(4) Dạng khai triển của dãy số này là: $u_1,\ u_2,\ u_3,\ ...,\ u_m$, trong đó u_1 là số hạng đầu, u_m là số hạng cuối.

2. Cách xác định dãy số

- Một dãy số có thể được cho bằng các cách sau:
  (1) Cho bằng liệt kê các số hạng.
  (2) Cho bằng công thức của số hạng tổng quát.
  (3) Cho bằng phương pháp truy hồi.
  Tức là: + Cho số hạng đầu.
  + Cho hệ thức truy hồi, tức là hệ thức biểu thị số hạng thứ n qua số hạng đứng trước nó.
  (4) Cho bằng phương pháp mô tả.

3. Dãy số tăng, dãy số giảm và dãy số bị chặn

Định nghĩa:

- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu ta có $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu ta có $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Chú ý

Không phải mọi dãy số đều tăng hoặc giảm.
Chẳng hạn:

Dãy số (u_n) với $u_n = (-3)^n$ tức là dãy $-3, 9, -27, 81, \ldots$ không tăng cũng không giảm.

4. Dãy số bị chặn

Định nghĩa:

- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M: $u_n \le M,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$
- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một số m: $u_n \ge m,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$
- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới.

  Tức là tồn tại các số m, M: $m \le u_n \le M,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Chú ý

(1) Dãy tăng sẽ bị chặn dưới bởi u_1

(2) Dãy giảm sẽ bị chặn trên bởi u_1

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Tìm số hạng của dãy số từ dãy số cho trước

Phương pháp

Ở dạng này, ta có 4 bài toán thường gặp:

⁂ Bài toán 1: Cho dãy số (u_n): $u_n = f(n)$. Hãy tìm số hạng u_k.

⁂ Bài toán 2: Cho dãy số (u_n): $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$. Hãy tìm số hạng u_k.

⁂ Bài toán 3: Cho dãy số (u_n): $\begin{cases} u_1 = a, u_2 = b \\ u_{n+2} = c.u_{n+1} + d.u_n + e \end{cases}$. Hãy tìm số hạng u_k.

⁂ Bài toán 4: Cho dãy số (u_n): $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = f(\{n, u_n\}) \end{cases}$. Trong đó $f(\{n, u_n\})$ là kí hiệu của biểu thức u_{n+1} tính theo u_n và n. Hãy tìm số hạng u_k.

⁂ Bài toán 1: Cho dãy số (u_n): $u_n = f(n)$. Hãy tìm số hạng u_k.

✓ **Cách 1.** *Tự luận:* Thay trực tiếp $n = k$ vào $u_n = 2n + 3$.

✓ **Cách 2.** *Dùng máy tính:* » Nhập: $f(n)$ CALC $\mathrm{X} = k$

» Bấm = → Kết quả

⁂ Bài toán 2: Cho dãy số (u_n): $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$. Hãy tìm số hạng u_k.

✓ **Cách 1.** *Tự luận:*

Tính lần lượt $u_2; u_3; \ldots; u_k$ bằng cách thế u_1 vào u_2, thế u_2 vào u_3, …, thế u_{k-1} vào u_{k+1}.

✓ **Cách 2.** *Dùng máy tính:* Cách lập quy trình bấm máy:

» Nhập giá trị của số hạng u_1: $a =\!\!\longrightarrow$ ANS

» Nhập biểu thức của $u_{n+1} = f(u_n)$

» Lặp dấu = lần thứ $\boxed{k-1}$ cho ra giá trị của số hạng u_k.

⁂ Bài toán 3: Cho dãy số (u_n): $\begin{cases} u_1 = a, u_2 = b \\ u_{n+2} = c.u_{n+1} + d.u_n + e \end{cases}$. Hãy tìm số hạng u_k.

✓ **Cách 1.** *Tự luận:*

Tính lần lượt $u_2; u_3; \ldots; u_k$ bằng cách thế u_1 vào u_2, thế u_2 vào u_3, …, thế u_{k-1} vào u_{k+1}.

✓ **Cách 2.** *Dùng máy tính:* Cách lập quy trình bấm máy:

$\boxed{\mathrm{A}}$ *: chứa giá trị của* u_n

$\boxed{\mathrm{B}}$ *: chứa giá trị của* u_{n+1}

$\boxed{\text{C}}$: *chứa giá trị của* u_{n+2}

» Nhập $\boxed{\text{C}=c.\text{B}+d.\text{A}+e:\text{A}=\text{B}:\text{B}=\text{C}}$
» Bấm = rồi cho $\text{B}=b$, ấn =, nhập $\text{A}=a$ ấn =
» Lặp dấu = cho đến khi xuất hiện lần thứ $k-2$ giá trị của C thì đó chính là giá trị của số hạng u_k.

⁂ **Bài toán 4:** Cho dãy số $(u_n):\begin{cases}u_1=a\\ u_{n+1}=f(\{n,u_n\})\end{cases}$. Trong đó $f(\{n,u_n\})$ là kí hiệu của biểu thức u_{n+1} tính theo u_n và n. Hãy tìm số hạng u_k.

✓ **Cách 1.** *Tự luận:*

Tính lần lượt $u_2;u_3;...;u_k$ bằng cách thế $\{1,u_1\}$ vào u_2; thế $\{2,u_2\}$ vào u_3; ...; thế $\{k-1,u_{k-1}\}$ vào u_k.

✓ **Cách 2.** *Dùng máy tính:* Cách lập quy trình bấm máy:

$\boxed{\text{A}}$: *chứa giá trị của* n

$\boxed{\text{B}}$: *chứa giá trị của* u_n

$\boxed{\text{C}}$: *chứa giá trị của* u_{n+1}

Lập công thức tính u_{n+1}

» Gán $\text{A}=\boxed{\text{A}}+1$; $\boxed{\text{B}}:=\boxed{\text{C}}$ để tính số hạng tiếp theo của dãy
» Lặp dấu = cho đến khi xuất hiện lần thứ $k-1$ giá trị của C thì đó chính là giá trị của số hạng u_k.

Ví dụ 1.1.

(1) Xét dãy số gồm tất cả các số tự nhiên chia cho 5 dư 1 theo thứ tự tăng dần. Xác định số hạng tổng quát của dãy số.

(2) Viết dãy số hữu hạn gồm năm số hạng đầu của dãy số trong câu a. Xác định số hạng đầu và số hạng cuối của dãy số hữu hạn này.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 1.2.

(1) Viết năm số hạng đầu của dãy số (u_n) với số hạng tổng quát $u_n = n!$.

(2) Viết năm số hạng đầu của dãy số Fibonacci (F_n) cho bởi hệ thức truy hồi

$$\begin{cases} F_1 = 1, F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 3) \end{cases}$$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 1.3.

Viết năm số hạng đầu và số hạng thứ 100 của các dãy số (u_n) có số hạng tổng quát cho bởi:

(1) $u_n = 3n - 2$ (2) $u_n = 3 \cdot 2^n$ (3) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 1.4.

Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$. Tìm số hạng u_6.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 1.5.

Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$. Số $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ mấy?

Lời giải

....
....
....
....
....
....

Ví dụ 1.6.

Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1} \end{cases}$. Tìm số hạng u_{10}.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 1.7.

Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 2 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n + 5 \end{cases}$. Tìm số hạng u_8.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 1.8.

Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}(u_n + 1) \end{cases}$. Tìm số hạng u_{11}.

Lời giải

....
....
....
....

Dạng 2. Tính tăng - giảm của dãy số

Phương pháp

- Dãy số (u_n) được gọi là ***dãy số tăng*** nếu ta có $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là ***dãy số giảm*** nếu ta có $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Cách 1: Xét hiệu $\boxed{u_{n+1} - u_n}$

◎ Nếu $u_{n+1} - u_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số tăng.

◎ Nếu $u_{n+1} - u_n < 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Cách 2: Khi $u_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ ta xét tỉ số $\boxed{\dfrac{u_{n+1}}{u_n}}$

◎ Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.

◎ Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Tính chất:

(1) Nếu $\begin{cases}(u_n)\uparrow\\(v_n)\uparrow\end{cases}$ thì dãy số $(u_n+v_n)\uparrow$

(2) Nếu $\begin{cases}(u_n)\downarrow\\(v_n)\downarrow\end{cases}$ thì dãy số $(u_n+v_n)\downarrow$

(3) Nếu $\begin{cases}(u_n)\uparrow; u_n \ge 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*\\(v_n)\uparrow; v_n \ge 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*\end{cases}$ thì dãy số $(u_n.v_n)\uparrow$

(4) Nếu $\begin{cases}(u_n)\downarrow; u_n \ge 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*\\(v_n)\downarrow; v_n \ge 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*\end{cases}$ thì dãy số $(u_n.v_n)\downarrow$

(5) Nếu $(u_n)\uparrow$ và $u_n \ge 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số $\left(\sqrt{u_n}\right)\uparrow$ và dãy số $\left((u_n)^m\right)\uparrow\ \forall m \in \mathbb{N}^*$

(6) Nếu $(u_n)\downarrow$ và $u_n \ge 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số $\left(\sqrt{u_n}\right)\downarrow$ và dãy số $\left((u_n)^m\right)\downarrow\ \forall m \in \mathbb{N}^*$

(7) Nếu $(u_n)\uparrow$ và $u_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)\downarrow$

(8) Nếu $(u_n)\downarrow$ và $u_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)\uparrow$

Một vài kết quả về dạng toán tăng - giảm dãy số:

(1)	Dãy số (u_n) có $u_n = an+b$	◎ Tăng khi $a>0$ ◎ Giảm khi $a<0$
(2)	Dãy số (u_n) có $u_n = q^n$	◎ Tăng khi $q>1$ ◎ Giảm khi $0<q<1$ ◎ Không tăng, không giảm khi $q<0$

(3)	Dãy số (u_n) có $u_n=\dfrac{an+b}{cn+d}$ với điều kiện $cn+d>0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$	◎ Tăng khi $ad-bc>0$ ◎ Giảm khi $ad-bc<0$
(4)	Dãy số ***đan dấu*** cũng là dãy số không tăng, không giảm	
(5)	Nếu dãy số (u_n) tăng hoặc giảm thì dãy số $(q^n.u_n)$ không tăng, không giảm	
(6)	Dãy số (u_n) có $u_{n+1}=au_n+b$	◎ Tăng nếu $\begin{cases}a>0\\u_2-u_1>0\end{cases}$ ◎ Giảm nếu $\begin{cases}a>0\\u_2-u_1<0\end{cases}$ ◎ Không tăng không giảm nếu $a<0$
(7)	Dãy số (u_n) có $\begin{cases}u_{n+1}=\dfrac{au_n+b}{cu_n+d}\\c,d>0,u_n>0\ \forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$	◎ Tăng nếu $\begin{cases}ad-bc>0\\u_2-u_1>0\end{cases}$ ◎ Giảm nếu $\begin{cases}ad-bc>0\\u_2-u_1<0\end{cases}$
(8)	Dãy số (u_n) có $\begin{cases}u_{n+1}=\dfrac{au_n+b}{cu_n+d}\\c,d>0,u_n>0\ \forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$ không tăng không giảm nếu $ad-bc<0$	

Ví dụ 2.1.

Xét tính đơn điệu của dãy số (u_n) biết

(1) $u_n=3n+6$.

(2) $u_n=\dfrac{n+5}{n+2}$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.2.

Xét tính tăng giảm của các dãy số sau:

(1) Dãy số (u_n) với $u_n = 2n^3 - 5n + 1$.

(2) Dãy số (u_n) với $u_n = 3^n - n$.

(3) Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$.

(4) Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2^n}$.

Lời giải

Ví dụ 2.3.

Anh Thanh vừa được tuyển dụng vào một công ty công nghệ, được cam kết lương năm đầu sẽ là 200 triệu đồng và lương mỗi năm tiếp theo sẽ được tăng thêm 25 triệu đồng. Gọi s_n (triệu đồng) là lương vào năm thứ n mà anh Thanh làm việc cho công ty đó. Khi đó ta có: $s_1 = 200, s_n = s_{n-1} + 25; n \geq 2$.

(1) Tính lương của anh Thanh vào năm thứ 5 làm việc cho công ty..

(2) Chứng minh (s_n) là dãy số tăng. Giải thích ý nghĩa thực tế của kết quả này.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 3. Tính bị chặn của dãy số

Phương pháp

- Dãy số (u_n) được gọi là ***bị chặn trên*** nếu tồn tại một số $M: u_n \le M,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$
- Dãy số (u_n) được gọi là ***bị chặn dưới*** nếu tồn tại một số $m: u_n \ge m,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$
- Dãy số (u_n) được gọi là ***bị chặn*** nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới.

  Tức là tồn tại các số $m, M: m \le u_n \le M,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

✓ **Phương pháp:** Chứng minh trực tiếp bằng các phương pháp chứng minh bất đẳng thức

Cách 1: Dãy số (u_n) có $u_n = f(n)$ là hàm số đơn giản.

◎ Ta chứng minh trực tiếp bất đẳng thức $\left[\begin{array}{l} u_n = f(n) \le M, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ u_n = f(n) \ge m, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array}\right.$

Cách 2: Dãy số (u_n) có $u_n = v_1 + v_2 + \dots + v_k + \dots + v_n$

◎ Ta làm trội $v_k \le a_k - a_{k+1}$

◎ Lúc đó $u_n \le (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots (a_n - a_{n+1})$. Suy ra $u_n \le a_1 - a_{n+1} \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Cách 3: Dãy số (u_n) có $u_n = v_1.v_2v_3 \dots v_n$ với $v_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

◎ Ta làm trội $v_k \le \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$

◎ Lúc đó $u_n \le \dfrac{a_2}{a_1}.\dfrac{a_3}{a_2} \dots \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. Suy ra $u_n \le \dfrac{a_{n+1}}{a_1} \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*$

» **Chú ý:** *Nếu dãy số (u_n) giảm thì bị chặn trên, dãy số (u_n) tăng thì bị chặn dưới*

Một vài kết quả về dạng toán dãy số bị chặn:

(1) Dãy số (u_n) có $u_n = q^n$ $(|q| \le 1)$ bị chặn

(2) Dãy số (u_n) có $u_n = q^n$ $(q < -1)$ không bị chặn

(3) Dãy số (u_n) có $u_n = q^n$ với $q > 1$ bị chặn dưới

(4) Dãy số (u_n) có $u_n = an + b$ bị chặn dưới nếu $a > 0$ và bị chặn trên nếu $a < 0$

(5) Dãy số (u_n) có $u_n = an^2 + bn + c$ bị chặn dưới nếu $a > 0$ và bị chặn trên nếu $a < 0$

(6) Dãy số (u_n) có $u_n = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + .. + a_1 n + a_0$ bị chặn dưới nếu $a_m > 0$, bị chặn trên nếu $a_m < 0$

(7) Dãy số (u_n) có $u_n = q^n\left(a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0\right)$ với $a_m \ne 0$ và $q < -1$ không bị chặn

(8) Dãy số (u_n) có $u_n = \sqrt{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0}$ bị chặn dưới với $a_m > 0$

(9) Dãy số (u_n) có $u_n = \sqrt[3]{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0}$ bị chặn dưới nếu $a_m > 0$, bị chặn trên nếu $a_m < 0$

(10) Dãy số (u_n) có $u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ trong đó $P(n)$ và $Q(n)$ là các đa thức, bị chặn nếu bậc của $P(n)$ nhỏ hơn hoặc bằng bậc của $Q(n)$

(11) Dãy số (u_n) có $u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ trong đó $P(n)$ và $Q(n)$ là các đa thức, bị chặn dưới hoặc bị chặn trên nếu bậc của $P(n)$ lớn hơn bậc của $Q(n)$

Ví dụ 3.1.

Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) biết

(1) $u_n = \dfrac{-1}{2n+3}$.

(2) $u_n = \dfrac{n+5}{n+2}$

Lời giải

Ví dụ 2.2.

Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

(1) $u_n = \dfrac{1}{2n^2-1}$

(2) $u_n = 3.\cos\dfrac{nx}{3}$

(3) $u_n = 2n^3+1$

(4) $u_n = \dfrac{n^2+2n}{n^2+n+1}$

Lời giải

Ví dụ 3.3.

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 0$ và $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4$, $\forall n \geq 1$.

(1) Chứng minh dãy (u_n) bị chặn trên bởi số 8.

(2) Chứng minh dãy (u_n) tăng, từ đó suy ra dãy (u_n) bị chặn.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.4.

Cho dãy số (u_n) với $u_n = n^2 - 4n + 3$.

(1) Viết công thức truy hồi của dãy số.

(2) Chứng minh dãy số bị chặn dưới.

(3) Tính tổng n số hạng đầu của dãy số đã cho.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» **Câu 1.** Cho dãy số có các số hạng đầu là: $\frac{1}{3};\frac{1}{3^2};\frac{1}{3^3};\frac{1}{3^4};\frac{1}{3^5};...$ Số hạng tổng quát của dãy số này là?

A. $u_n=\frac{1}{3}.\frac{1}{3^{n+1}}$. **B.** $u_n=\frac{1}{3^{n+1}}$. **C.** $u_n=\frac{1}{3^n}$. **D.** $u_n=\frac{1}{3^{n-1}}$.

» **Câu 2.** Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases}u_1=2\\u_{n+1}-u_n=2n-1\end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n=2+(n-1)^2$. **B.** $u_n=2+n^2$. **C.** $u_n=2+(n+1)^2$. **D.** $u_n=2-(n-1)^2$.

» **Câu 3.** Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases}u_1=-2\\u_{n+1}=-2-\frac{1}{u_n}\end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n=-\frac{n-1}{n}$. **B.** $u_n=\frac{n+1}{n}$. **C.** $u_n=-\frac{n+1}{n}$. **D.** $u_n=-\frac{n}{n+1}$.

» **Câu 4.** Cho dãy số (u_n), biết $u_n=\frac{n}{2^n}$. Chọn đáp án đúng.

A. $u_4=\frac{1}{4}$. **B.** $u_5=\frac{1}{16}$. **C.** $u_5=\frac{1}{32}$. **D.** $u_3=\frac{1}{8}$.

» **Câu 5.** Cho dãy số (u_n), biết $u_n=\frac{2n+5}{5n-4}$. Số $\frac{7}{12}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. 6. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

» **Câu 6.** Cho dãy số (u_n), biết $u_n=\frac{n-1}{n^2+1}$. Số $\frac{2}{13}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. Thứ 3. **B.** Thứ tư. **C.** Thứ năm. **D.** Thứ 6.

» **Câu 7.** Cho dãy số (u_n), biết $u_n=n^3-8n^2-5n+7$. Số -33 là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. 5. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 9.

» **Câu 8.** Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{n^2+3n+7}{n+1}$. Hỏi dãy số trên có bao nhiêu số hạng nhận giá trị nguyên.

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** Không có.

» **Câu 9.** Cho dãy số (u_n) với $u_n=2^n$. Tìm số hạng u_{n+1}.

A. $u_{n+1}=2^n.2$. **B.** $u_{n+1}=2^n+1$. **C.** $u_{n+1}=2(n+1)$. **D.** $u_{n+1}=2^n+2$.

» **Câu 10.** Cho dãy số (u_n) với $u_n=3^n$. Số hạng u_{n+1} bằng:

A. 3^n+1. **B.** 3^n+3. **C.** $3^n.3$. **D.** $3(n+1)$.

» **Câu 11.** Cho dãy số (u_n) với $u_n=3^n$. Số hạng u_{2n} bằng:

A. 3^n+3. **B.** 9^n. **C.** $3^n.3$. **D.** 4^{2n}.

» **Câu 12.** Cho dãy số (u_n) với $u_n=5^{n+1}$. Tìm số hạng u_{n-1}.

A. $u_{n-1}=5^{n-1}$. **B.** $u_{n-1}=5^{n}$. **C.** $u_{n-1}=5.5^{n+1}$. **D.** $u_{n-1}=5.5^{n-1}$.

» **Câu 13.** Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases}u_1=2\\ u_{n+1}=\dfrac{1}{3}(u_n+1)\end{cases}$. Tìm số hạng u_4.

A. $u_4=\dfrac{5}{9}$. **B.** $u_4=1$. **C.** $u_4=\dfrac{2}{3}$. **D.** $u_4=\dfrac{14}{27}$.

» **Câu 14.** Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases}u_1=3\\ u_{n+1}=\dfrac{u_n}{2}+2\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $u_2=\dfrac{5}{2}$. **B.** $u_3=\dfrac{15}{4}$. **C.** $u_4=\dfrac{31}{8}$. **D.** $u_5=\dfrac{63}{16}$.

» **Câu 15.** Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases}u_1=3\\ u_{n+1}=u_n+5\end{cases}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó là

A. $-3;6;9$. **B.** $3;-2;-7$. **C.** $3;8;13$. **D.** $3;5;7$.

» **Câu 16.** Cho dãy số (u_n), biết công thức số hạng tổng quát $u_n=2n-3$. Số hạng thứ 10 của dãy số bằng:

A. 17 **B.** 20 **C.** 10 **D.** 7

» **Câu 17.** Cho dãy số (u_n) có công thức số hạng tổng quát $u_n=8-3n$. Tính u_4.

A. 2. **B.** -7. **C.** -5. **D.** -4.

» **Câu 18.** Cho dãy số $\begin{cases}u_1=4\\ u_{n+1}=u_n+n\end{cases}$. Tìm số hạng thứ 5 của dãy số.

A. 16. **B.** 12. **C.** 15. **D.** 14.

» **Câu 19.** Cho dãy số (u_n) biết $u_n=\dfrac{10}{3^n}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm
C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** Dãy số vừa tăng vừa giảm

» **Câu 20.** Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào tăng?

A. $u_n=\dfrac{1}{3^n}$. **B.** $u_n=\dfrac{1}{2n+1}$. **C.** $u_n=\dfrac{n+1}{3n+2}$. **D.** $u_n=\dfrac{4n-2}{n+3}$.

» **Câu 21.** Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào giảm?

A. $u_n=\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$. **B.** $u_n=(-1)^n(5^n-1)$. **C.** $u_n=-3^n$. **D.** $u_n=\sqrt{n+4}$.

» **Câu 22.** Cho dãy số (u_n) biết $u_n=5^n-4^n$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm
C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** Dãy số có số hạng thứ 100 bé hơn 1

» **Câu 23.** Cho dãy số (u_n) biết $u_n=\dfrac{an+2}{3n+1}$. Tìm tất cả các giá trị của a để dãy số tăng.

A. $a=6$ **B.** $a>6$ **C.** $a<6$ **D.** $a\ge 6$

» **Câu 24.** Cho dãy số (u_n) biết $u_n=2^n-an$. Tìm tất cả các giá trị của a để dãy số tăng.

A. $a=2$ **B.** $a>2$ **C.** $a<2$ **D.** $a\ge 2$

» **Câu 25.** Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{3+u_n} \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** Có $u_{10} = 2$

» **Câu 26.** Trong các dãy số sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n = \dfrac{2n+1}{n-1}$. **B.** $u_n = n^3 - 1$. **C.** $u_n = n^2$. **D.** $u_n = 2n$.

» **Câu 27.** Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát (u_n) sau, dãy số nào bị chặn?

A. $u_n = n^2$. **B.** $u_n = 2^n$. **C.** $u_n = \dfrac{1}{n}$. **D.** $u_n = \sqrt{n+1}$.

» **Câu 28.** Trong các dãy số (u_n)cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào bị chặn?

A. $u_n = \dfrac{1}{2^n}$. **B.** $u_n = 3^n$. **C.** $u_n = \sqrt{n+1}$. **D.** $u_n = n^2 + 1$.

» **Câu 29.** Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n = 4 - 3n - n^2$

A. Bị chặn. **B.** Không bị chặn. **C.** Bị chặn trên. **D.** Bị chặn dưới.

» **Câu 30.** Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào bị chặn?

A. $u_n = n - \sin 3n$ **B.** $u_n = \dfrac{n^2+1}{n}$. **C.** $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. **D.** $u_n = n.\sin(3n-1)$.

» **Câu 31.** Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log^2 u_1 + \log u_1 - 6 = 0$ và $u_{n+1} = u_n + 5$, với mọi $n \geq 1, n \in N$. Giá trị lớn nhất của n để $u_n < 500$ bằng:

A. 80. **B.** 100. **C.** 99. **D.** 82.

» **Câu 32.** Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = \dfrac{2}{3}$ và $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2(2n+1)u_n + 1}$, $(n \in \mathbb{N}^*)$. Tính tổng 2018 số hạng đầu tiên của dãy số đó?

A. $\dfrac{4036}{4035}$. **B.** $\dfrac{4035}{4034}$. **C.** $\dfrac{4038}{4037}$. **D.** $\dfrac{4036}{4037}$.

» **Câu 33.** Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_n = u_{n-1} + 6$, $\forall n \geq 2$ và $\log_2 u_5 + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{u_9 + 8} = 11$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất thỏa mãn $S_n \geq 20172018$.

A. 2587. **B.** 2590. **C.** 2593. **D.** 2584.

» **Câu 34.** Tìm x biết: $(x+3)+(x+7)+(x+11)+\ldots+(x+79)=860$

A. $x=2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=4$. **D.** $x=3$.

» **Câu 35.** Tìm x biết: $(2x+3)+(2x+7)+(2x+11)+...+(2x+79)=1720$

A. $x=35$. **B.** $x=\dfrac{45}{2}$. **C.** $x=10$. **D.** $x=15$.

B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai

» **Câu 36.** Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{-n}{n+1}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai

(a)	Năm số hạng đầu tiên của dãy số là $u_1=-\frac{1}{2};u_2=-\frac{2}{3};u_3=-\frac{3}{4};u_4=-\frac{4}{5};u_5=-\frac{5}{6}$		
(b)	Số hạng u_{10},u_{100} lần lượt là $-\frac{10}{11};-\frac{100}{101}$		
(c)	$-\frac{85}{86}$ là số hạng thứ 86 của dãy số (u_n)		
(d)	$-\frac{99}{101}$ là một số hạng của dãy số (u_n)		

» Câu 37. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n=\frac{2n+1}{n+2}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Số hạng đầu tiên của dãy số là 1		
(b)	Số hạng $u_2=\frac{5}{4};u_3=\frac{7}{5}$		
(c)	$u_4>u_5$		
(d)	Số $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ 252 của dãy số (u_n)		

» Câu 38. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_n=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Số hạng thứ 2021 là $\frac{2021}{4040}$		
(b)	Số hạng thứ 2022 là $\frac{2022}{4043}$		
(c)	Số hạng thứ 2023 là $\frac{2023}{4047}$		
(d)	Tổng các số hạng thứ 2021; 2022; 2023 và 2024 nhỏ hơn 2		

» Câu 39. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n=1-\frac{1}{n}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$u_3=\frac{2}{3}$		
(b)	$u_7-u_8=\frac{1}{56}$		
(c)	$u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{n(n+1)}$		
(d)	Dãy số (u_n) là dãy số tăng		

» Câu 40. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n=\frac{n}{4^n}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$u_n=\frac{n}{4^n}<0,\forall n\in\mathbb{N}^*$		

(b)	$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1, \forall n \ge 1$		
(c)	$u_{2024} < u_{2023}$		
(d)	Dãy số (u_n) là dãy số tăng		

» **Câu 41.** Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}}$		
(b)	$\dfrac{u_{2024}}{u_{2023}} < 1$		
(c)	$u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$		
(d)	Dãy số (u_n) là dãy số giảm		

» **Câu 42.** Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+3)(n+2)}$		
(b)	$u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$		
(c)	Dãy số (u_n) là dãy số giảm		
(d)	Dãy (u_n) là dãy số bị chặn		

» **Câu 43.** Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = n + \dfrac{1}{n}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$		
(b)	Dãy số (u_n) là dãy số tăng		
(c)	$u_n \ge 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$		
(d)	Dãy số đã cho bị chặn trên		

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» **Câu 44.** Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{2n+1}{n^2}$. Hãy tính số hạng thứ 6 của dãy số. *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

Điền đáp số: ☐

» **Câu 45.** Cho dãy số (u_n): $-3; -1; 1; 3; 5; \ldots$ Một hệ thức truy hồi xác định dãy số đã cho có dạng $\begin{cases} u_1 = -b \\ u_{n+1} = a.u_n + 2 \end{cases}$ với $n \ge 1$ và $a; b$ là các số tự nhiên. Tính $T = a + b$

Điền đáp số: ☐

» **Câu 46.** Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$. Số $\dfrac{167}{84}$ là số hạng thứ mấy của dãy?

✍ **Điền đáp số:**

» **Câu 47.** Số hạng tổng quát u_n theo n của dãy số $(u_n):\begin{cases}u_1=2\\u_{n+1}=2u_n,\forall n\ge 1\end{cases}$ có dạng $u_n=a^n$, với a là số tự nhiên. Xác định giá trị của a.

✍ **Điền đáp số:**

» **Câu 48.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong đoạn $[-20;20]$ để dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{mn+1}{n+1}$ là dãy số tăng.

✍ **Điền đáp số:**

» **Câu 49.** Cho hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng 4. Với mọi số nguyên dương $n\ge 2$, gọi A_n,B_n,C_n,D_n lần lượt là trung điểm của các cạnh $A_{n-1}B_{n-1},B_{n-1}C_{n-1},C_{n-1}D_{n-1}$, $D_{n-1}A_{n-1}$. Gọi S_n là diện tích của tứ giác $A_nB_nC_nD_n$. Kết quả của S_{12} có dạng $\left(\dfrac{a}{2}\right)^b$ với $a;b$ là các số tự nhiên. Khi đó giá trị của $b-4a$ bằng bao nhiêu?

✍ **Điền đáp số:**

---------------------------- Hết ----------------------------

Chương 02

Bài 2. CẤP SỐ CỘNG

A. Lý thuyết

1. Cấp số cộng

Định nghĩa:

- *Cấp số cộng* là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d. Nghĩa là:

$$u_{n+1} = u_n + d \text{ với } n \in \mathbb{N}^*$$

Số không đổi d được gọi là *công sai* của cấp số cộng.

- **Đặc biệt:**

*Khi $d = 0$ thì cấp số cộng là một **dãy số không đổi** (tất cả các số hạng đều bằng nhau).*

2. Số hạng tổng quát

Định lý:

- Nếu một cấp số cộng có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát của nó được xác định theo công thức:

$$u_n = u_1 + (n-1)d, \forall n \ge 1.$$

3. Tính chất các số hạng của cấp số cộng

Định lý:

- Trong một cấp số cộng, mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và số hạng cuối) đều bằng trung bình cộng của hai số hạng đứng liền kề với nó, nghĩa là:

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}, \forall k \ge 1.$$

- **Hệ quả:** Ba số a, b, c (theo thứ tự đó)lập thành một cấp số cộng $a + c = 2b$.

4. Tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng

Định lý:

- Cho cấp số cộng (u_n) có công sai d.

  Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ (S_n là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng).

  Ta có $S_n = \dfrac{n(u_1+u_n)}{2} = n.u_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d$.

Chứng minh

Ta có $S_n = u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d + ... + u_1 + (n-2)d + u_1 + (n-1)d\,(1)$.

Mà $S_n = u_n - (n-1)d + u_n - (n-2)d + ... + u_n - 2d + u_n - d + u_n\,(2)$.

Cộng vế với vế của (1) và (2) ta được $2S_n = n(u_1+u_n) \Rightarrow S_n = \dfrac{n(u_1+u_n)}{2}$.

Do $u_n = u_1 + (n-1)d$ nên $S_n = \dfrac{n[u_1+u_1+(n-1)d]}{2} = nu_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d$.

Nhận xét

(1) Nếu (u_n) là một cấp số cộng thì mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là $u_k = \dfrac{u_{k-1}+u_{k+1}}{2}$ với $k \geq 2$. (3)

(2) Cấp số cộng (u_n) là một ***dãy số tăng*** khi và chỉ khi công sai $d > 0$.

(3) Cấp số cộng (u_n) là một ***dãy số giảm*** khi và chỉ khi công sai $d < 0$..

B. Các dạng bài tập

Dạng 1. Xác định dãy đã cho là cấp số cộng

Phương pháp

Nếu (u_n) là một cấp số cộng với công sai d thì $u_{n+1} = u_n + d$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Để chứng minh một dãy đã cho là 1 cấp số cộng thì ta chứng minh:

$u_{n+1} - u_n = C$ với C là một hằng số không đổi

Ví dụ 1.1.

Cho (u_n) là một cấp số cộng có sáu số hạng với $u_1 = -2$, $d = 3$.

Viết khai triển của cấp số cộng.

Lời giải

Ví dụ 1.2.

Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2n - 3$.

Chứng minh rằng (u_n) là một cấp số cộng. Tìm u_1 và d.

Lời giải

Ví dụ 1.3.

Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào là cấp số cộng?

(1) $u_n = 3n + 2$

(2) $u_n = 3^n - 1$

(3) $u_n = (n+2)^2 - n^2$

(4) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3 - u_n \end{cases}$ với $n \geq 1$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 1.4.

Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào là cấp số cộng? Nếu là cấp số cộng, hãy tính số hạng đầu và công sai.

(1) $u_n = 2 - 3n$

(2) $u_n = \frac{n}{3} - 2$

(3) $u_n = \frac{1}{n} + 3$

(4) $u_n = 2^n + 4$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 2. Xác định các yếu tố qua số hạng tổng quát

Phương pháp

- Nếu một cấp số cộng có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát của nó được xác định theo công thức:

$$u_n = u_1 + (n-1)d, \forall n \geq 1.$$

Ví dụ 2.1.

Cho cấp số cộng (u_n), biết $u_1 = -3, d = 7$. Tìm $u_{15}, u_{20}, u_{25}, u_{30}$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.2.

Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n), biết : $\begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases}$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.3.

Giữa các số 7 và 35 hãy đặt thêm 6 số nữa để được một cấp số cộng

Lời giải

....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.4.

Cho cấp số cộng (u_n), biết: $\begin{cases} u_1 = -15 \\ d = 18 \end{cases}$.

(1) Tìm $u_5, u_{10}, u_{15}, u_{20}, u_{25}$.

(2) Số 1209 là số hạng thứ bao nhiêu?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.5.

Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n), biết:

(1) $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$.

(2) $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_3 + u_4 = 17. \end{cases}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.6.

Tổng ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng bằng 2 và tổng các bình phương của ba số đó bằng $\frac{14}{9}$. Xác định ba số đó và tính công sai của cấp số cộng.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 3. Tính chất cấp số cộng

Phương pháp

- Trong một cấp số cộng, mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và số hạng cuối) đều bằng trung bình cộng của hai số hạng đứng liền kề với nó, nghĩa là:

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}, \forall k \geq 1.$$

- **Hệ quả:** Ba số a, b, c (theo thứ tự đó)lập thành một cấp số cộng $a + c = 2b$.

  Đôi khi ta cũng viết $b - a = c - b$ sẽ thuận lợi hơn trong việc giải toán.

⁂ **Các bài toán thường gặp:**

(1) Tìm ẩn x để 3 số đã cho lập thành cấp số cộng.

(2) Ba góc trong một tam giác.

(3) Ba nghiệm phân biệt tạo thành một cấp số cộng.

…

Ví dụ 3.1.

Ba số lập thành một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 2 và tổng bình phương của chúng bằng $\frac{14}{9}$. Tìm ba số hạng đó.

Lời giải

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Ví dụ 3.2.

Tìm x biết ba số $10 - 3x$, $3x^2 + 5$, $5 - 4x$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.

Lời giải

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Ví dụ 3.3.

Cho tam giác ABC có số đo ba góc lập thành một cấp số cộng và một góc có số đo bằng 25°. Tính số đo hai góc còn lại.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.4.

Tìm x để ba số a,b,c theo thứ tự lập thành cấp số cộng, biết

(1) $a=10-3x, b=2x^2+3, c=7-4x$

(2) $a=x+1, b=3x-2, c=x^2-1$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.5.

Cho ba số dương a, b, c. Đặt $A=\dfrac{1}{b+c}$, $B=\dfrac{1}{c+a}$, $C=\dfrac{1}{a+b}$. Chứng minh rằng C, A, B theo thứ tự lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi c^2, a^2, b^2 theo thứ tự lập thành cấp số cộng.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.6.

Cho tam giác ABC có $\cot A$, $\cot B$, $\cot C$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh rằng a^2, b^2, c^2 cũng lập thành cấp số cộng.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3.7.

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2x^3 - 18x^2 + mx - 6 = 0$ có ba nghiệm phân biệt tạo thành một cấp số cộng.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 4. Tính tổng n số hạng đầu của một cấp số cộng

Phương pháp

- Tìm u_1, d hoặc u_1, u_n và tính S_n theo một trong hai công thức sau:

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$$

$$S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

Ví dụ 4.1.

Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 3$.

Tính tổng S_{100} của 100 số hạng đầu tiên.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4.2.

Tính tổng $S = 100 + 105 + 110 + ... + 995$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4.3.

Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 = -15, u_4 = 18$. Tính tổng S_{20} của 20 số hạng đầu tiên.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4.4.

Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn: $\begin{cases} S_4 = 9 \\ S_6 = \dfrac{45}{2} \end{cases}$. Tính u_1, d.

Lời giải

Ví dụ 4.5.

Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2n - 3$.

(1) Chứng minh rằng (u_n) là cấp số cộng.

(2) Tính tổng của 30 số hạng đầu.

(3) Biết $S_n = 195$, tìm n.

Lời giải

Ví dụ 4.6.

Cho cấp số cộng (u_n) có $\begin{cases} u_7 + u_{15} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases}$ và công sai $d > 0$.

Tính tổng S_{2017} của 2017 số hạng đầu.

Lời giải

Ví dụ 4.7.

Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$. Tính tổng S_{10} của 10 số hạng đầu.

Lời giải

Ví dụ 4.8.

Một cấp số hữu hạn (u_n) có tổng tất cả các số hạng trừ số hạng đầu tiên bằng -36, còn tổng tất cả các số hạng cuối cùng bằng 0. Biết $u_{10} - u_6 = -16$. Tìm số hạng đầu tiên và công sai của cấp số cộng đó.

Lời giải

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số cộng?

A. $1;-2;-4;-6;-8$. **B.** $1;-3;-6;-9;-12$. **C.** $1;-3;-7;-11;-15$. **D.** $1;-3;-5;-7;-9$.

» Câu 2. Trong các dãy số có công thức tổng quát sau, dãy số nào là cấp số cộng?

A. $u_n=2021^n$. **B.** $u_n=2n+2021$. **C.** $u_n=\dfrac{2}{n+2021}$. **D.** $u_n=n^2-2$.

» Câu 3. Trong các dãy số sau đây, dãy số nào là cấp số cộng?

A. $u_n=3^n$. **B.** $u_n=(-3)^{n+1}$. **C.** $u_n=3n+1$. **D.** $u_n=2^{n+1}$.

» Câu 4. Trong các dãy số sau đây, dãy số nào là một cấp số cộng?

A. $u_n=n^2+1,\quad n\ge 1$. **B.** $u_n=2^n,\quad n\ge 1$. **C.** $u_n=\sqrt{n+1}, n\ge 1$. **D.** $u_n=2n-3,\quad n\ge 1$

» Câu 5. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1=2$ và $u_2=7$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

A. 5. **B.** $\dfrac{2}{7}$. **C.** -5. **D.** $\dfrac{7}{2}$.

» Câu 6. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1=9$ và công sai $d=2$. Giá trị của u_2 bằng

A. 11. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** 18. **D.** 7.

» Câu 7. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1=8$ và công sai $d=3$. Giá trị của u_2 bằng

A. $\dfrac{8}{3}$. **B.** 24. **C.** 5. **D.** 11.

» Câu 8. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1=2022$ và công sai $d=7$. Giá trị của u_6 bằng

A. 2043. **B.** 2064. **C.** 2050. **D.** 2057.

» Câu 9. Tìm công sai d của cấp số cộng (u_n), $n\in\mathbb{N}^*$ có $u_1=1;\ u_4=13$.

A. $d=3$. **B.** $d=\dfrac{1}{4}$. **C.** $d=4$. **D.** $d=\dfrac{1}{3}$.

» Câu 10. Cho cấp số cộng có $u_3=2$, công sai $d=-2$. Số hạng thứ hai của cấp số cộng đó là

A. $u_2=4$ **B.** $u_2=0$ **C.** $u_2=-4$ **D.** $u_2=3$

» Câu 11. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_{17}=33$ và $u_{33}=65$ thì công sai bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** -2. **D.** 2.

» Câu 12. Một cấp số cộng gồm 5 số hạng. Hiệu số hạng đầu và số hạng cuối bằng 20. Tìm công sai d của cấp số cộng đã cho

A. $d=-5$. **B.** $d=4$. **C.** $d=-4$. **D.** $d=5$.

» Câu 13. Cho cấp số cộng u_n có các số hạng đầu lần lượt là $5;9;13;17;\ldots$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng?

A. $u_n=4n+1$. **B.** $u_n=5n-1$. **C.** $u_n=5n+1$. **D.** $u_n=4n-1$.

» Câu 14. Tìm công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) thỏa mãn: $\begin{cases}u_2-u_3+u_5=7\\u_1+u_6=12\end{cases}$

A. $u_n=2n+3$. **B.** $u_n=2n-1$. **C.** $u_n=2n+1$. **D.** $u_n=2n-3$.

» Câu 15. Cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1=3$, công sai $d=-2$ thì số hạng thứ 5 là

A. $u_5=8$. **B.** $u_5=1$. **C.** $u_5=-5$. **D.** $u_5=-7$.

» Câu 16. Cho cấp số cộng có $u_1=-3$, $d=4$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $u_5=15$. **B.** $u_4=8$. **C.** $u_3=5$. **D.** $u_2=2$.

» Câu 17. Một cấp số cộng (u_n) có $u_{13}=8$ và $d=-3$. Tìm số hạng thứ ba của cấp số cộng (u_n).

A. 50. **B.** 28. **C.** 38. **D.** 44

» Câu 18. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1=3$ và công sai $d=2$. Giá trị của u_7 bằng:

A. 15. **B.** 17. **C.** 19. **D.** 13.

» Câu 19. Tìm số hạng thứ 11 của cấp số cộng có số hạng đầu bằng 3 và công sai $d=-2$.

A. -21. **B.** 23. **C.** -19. **D.** -17.

» Câu 20. Viết ba số xen giữa 2 và 22 để ta được một cấp số cộng có 5 số hạng?

A. 6, 12, 18. **B.** 8, 13, 18. **C.** 7, 12, 17. **D.** 6, 10, 14.

» Câu 21. Cho cấp số cộng (u_n), biết $u_2=3$ và $u_4=7$. Giá trị của u_{15} bằng

A. 27. **B.** 31. **C.** 35. **D.** 29.

» Câu 22. Cho dãy số (u_n) là một cấp số cộng có $u_1=3$ và công sai $d=4$. Biết tổng n số hạng đầu của dãy số (u_n) là $S_n=253$. Tìm n.

A. 9. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 10.

» Câu 23. Cho (u_n) là cấp số cộng biết $u_3+u_{13}=80$. Tổng 15 số hạng đầu của cấp số cộng đó bằng

A. 800. **B.** 600. **C.** 570. **D.** 630

» Câu 24. Cho dãy (u_n) là một cấp số cộng với số hạng đầu 2 và số hạng thứ 36 là 72. Công sai của cấp số cộng (u_n) là

A. $d=3$ **B.** $d=-2$. **C.** $d=2$. **D.** $d=\frac{1}{2}$.

» Câu 25. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_{2013}+u_6=1000$. Tổng 2018 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó là:

A. 1009000. **B.** 100800. **C.** 1008000. **D.** 100900.

» Câu 26. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $\begin{cases} u_2-u_3+u_5=10 \\ u_4+u_6=26 \end{cases}$. Tính $S=u_1+u_4+u_7+...+u_{2011}$

A. $S=2023736$. **B.** $S=2023563$. **C.** $S=6730444$. **D.** $S=6734134$.

» Câu 27. Gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên trong cấp số cộng (a_n). Biết $S_6=S_9$, tỉ số $\frac{a_3}{a_5}$ bằng:

A. $\frac{9}{5}$. **B.** $\frac{5}{9}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

» Câu 28. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1=1$ và tổng 100 số hạng đầu bằng 10000. Tính tổng $S=\frac{1}{u_1u_2}+\frac{1}{u_2u_3}+...+\frac{1}{u_{99}u_{100}}$.

A. $S=\frac{100}{201}$. **B.** $S=\frac{200}{201}$. **C.** $S=\frac{198}{199}$. **D.** $S=\frac{99}{199}$.

» **Câu 29.** Người ta trồng 820 cây theo một hình tam giác như sau: Hàng thứ nhất trồng 1 cây, kể từ hàng thứ hai trở đi số cây trồng mỗi hàng nhiều hơn 1 cây so với hàng liền trước nó. Hỏi có tất cả bao nhiêu hàng cây?

A. 42. **B.** 41. **C.** 40. **D.** 39.

» **Câu 30.** Một công ti trách nhiệm hữu hạn thực hiện việc trả lương cho các kĩ sư theo phương thức sau: Mức lương của quý làm việc đầu tiên cho công ti là $4,5$ triệu đồng/quý, và kể từ quý làm việc thứ hai, mức lương sẽ được tăng thêm $0,3$ triệu đồng mỗi quý. Hãy tính tổng số tiền lương một kĩ sư nhận được sau 3 năm làm việc cho công ti.

A. $83,7$. **B.** $78,3$. **C.** $73,8$. **D.** $87,3$.

» **Câu 31.** Trong sân vận động có tất cả 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 15 ghế, các dãy liền sau nhiều hơn dãy trước 4 ghế, hỏi sân vận động đó có tất cả bao nhiêu ghế?

A. 2250. **B.** 1740. **C.** 4380. **D.** 2190.

» **Câu 32.** Một tam giác vuông có chu vi bằng 3 và độ dài các cạnh lập thành một cấp số cộng. Độ dài các cạnh của tam giác đó là:

A. $\frac{1}{3};1;\frac{5}{3}$. **B.** $\frac{1}{4};1;\frac{7}{4}$. **C.** $\frac{3}{4};1;\frac{5}{4}$. **D.** $\frac{1}{2};1;\frac{3}{2}$.

» **Câu 33.** Người ta trồng 3003 cây theo hình tam giác như sau: Hàng thứ nhất trồng 1 cây, hàng thứ hai trồng 2 cây, hàng thứ ba trồng 3 cây,….Hỏi có bao nhiêu hàng cây.

A. 78. **B.** 243. **C.** 77. **D.** 244.

» **Câu 34.** Người ta trồng 3240 cây theo một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, kể từ hàng thứ hai trở đi số cây trồng mỗi hàng nhiều hơn 1 cây so với hàng liền trước nó. Hỏi có tất cả bao nhiêu hàng cây?

A. 81. **B.** 82. **C.** 80. **D.** 79.

» **Câu 35.** Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1=5$ và tổng của 40 số hạng đầu là 3320. Tìm công sai của cấp số cộng đó.

A. -4. **B.** 8. **C.** -8. **D.** 4.

B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai

» **Câu 36.** Cho dãy số hữu hạn gồm các số hạng: $-1;2;5;8;11;14;17$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Dãy số đã cho là không phải cấp số cộng		
(b)	Số hạng $u_1=-1$		
(c)	Nếu dãy số đã cho là một cấp số cộng thì công sai của cấp số cộng là $d=2$		
(d)	Tổng tất cả số hạng của dãy số bằng 56		

» **Câu 37.** Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1=\frac{3}{2}$, công sai $d=\frac{1}{2}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Công thức cho số hạng tổng quát $u_n=1+\frac{n}{3}$		
(b)	5 là số hạng thứ 8 của cấp số cộng đã cho		
(c)	$\frac{15}{4}$ một số hạng của cấp số cộng đã cho		
(d)	Tổng 100 số hạng đầu của cấp số cộng (u_n) bằng 2620		

» Câu 38. Cho cấp số cộng (u_n), biết rằng: $u_1=-3, u_6=27$, khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Công sai của cấp số cộng bằng 7		
(b)	Số hạng $u_{85}=501$		
(c)	Số hạng $u_{10}=52$		
(d)	Tổng của 85 số hạng đầu $S_{85}=21165$		

» Câu 39. Cho cấp số cộng (u_n), biết rằng: $u_1=5$ và tổng của 50 số hạng đầu bằng 5150, khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Công sai của cấp số cộng bằng 6		
(b)	Số hạng $u_{85}=341$		
(c)	Số hạng $u_{10}=42$		
(d)	Tổng của 85 số hạng đầu $S_{85}=14705$		

» Câu 40. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_5=18$ và $4S_n=S_{2n}$ (trong đó S_n, S_{2n} theo thứ tự là tổng của n và $2n$ số hạng đầu của cấp số cộng).

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Số hạng đầu của cấp số cộng (u_n) bằng 2		
(b)	Công sai của cấp số cộng (u_n) bằng 3		
(c)	Số hạng $u_{15}=58$		
(d)	Tổng 15 số hạng đầu của cấp số cộng bằng 350		

» Câu 41. Cho cấp số cộng (u_n), gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên của nó. Biết $S_7=77$ và $S_{12}=192$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Số hạng $u_1=5$		
(b)	Tổng $u_1+u_3=14$		
(c)	Công sai của cấp số cộng bằng		
(d)	Số hạng $u_{11}=25$		

» Câu 42. Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d<0$ thoả mãn $\begin{cases} u_1+u_7=26 \\ u_2^2+u_6^2=466 \end{cases}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Số hạng $u_1=25$		
(b)	Công sai $d=-3$		
(c)	Số hạng $u_{10}=-11$		
(d)	Số hạng $u_{2024}=-8067$		

» Câu 43. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=5$ và $d=-7$. Khi đó

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$u_{11}=-65$		
(b)	$u_5+u_7=-50$		
(c)	Số -849 là số hạng thứ 123 của cấp số cộng		
(d)	Số -114 là số hạng thứ 18 của cấp số cộng		

» **Câu 44.** Cho cấp số cộng (u_n) thoả mãn $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 15 \\ u_1 + u_6 = 27 \end{cases}$. Khi đó

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Số hạng $u_1 = 21$		
(b)	Công sai của cấp số cộng bằng -2		
(c)	Số hạng $u_{11} = -9$		
(d)	Số -6048 là số hạng thứ 2024		

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» **Câu 45.** Tìm số hạng đầu u_1 của cấp số cộng (u_n) biết rằng: $\begin{cases} u_4 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$

Điền đáp số:

» **Câu 46.** Trong một khán phòng có tất cả 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 15 ghế, các dãy liền sau nhiều hơn dãy trước đó 4 ghế, hỏi khán phòng đó có tất cả bao nhiêu ghế?

Điền đáp số:

» **Câu 47.** Cho bốn số thực tạo thành một cấp số cộng có tổng bằng 28 và tổng các bình phương của chúng bằng 276. Tìm tích của bốn số đó.

Điền đáp số:

» **Câu 48.** Cho cấp số cộng có số hạng tổng quát $u_n = 5n - 7$, biết tổng n số hạng đầu của cấp số cộng là $S_n = 817$. Tìm n.

Điền đáp số:

» **Câu 49.** Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12, u_{14} = 18$. Tìm u_9.

Điền đáp số:

» **Câu 50.** Giải phương trình sau: $2 + 7 + 12 + \ldots + x = 245$.

Điền đáp số:

» **Câu 51.** Một ngôi nhà hình kim tự tháp (có gạch nâu ốp bên ngoài) được bao quanh bởi rất nhiều cây cối và là nơi tuyệt vời để nghỉ mát mùa hè; ngôi nhà có chiều dài, chiều rộng là $6,8m$, chiều cao là $2,72m$. Khi xây dựng ngôi nhà, người chủ đã tính toán số viên gạch nâu hình hộp chữ nhật cần ốp tường; biết hàng trên ít hơn hàng dưới 1 viên, hàng trên cùng là 1 viên, kích thước viên gạch nâu hình hộp chữ nhật là $0,2m - 0,08m - 1m$. Hãy dự tính số viên gạch nâu ốp tường cả bốn mặt của ngôi nhà.

Điền đáp số:

» Câu 52. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng: $x^3-3mx^2+2m(m-4)x+9m^2-m=0$.

Điền đáp số:

------------------------------ Hết ------------------------------

Chương 02

Bài 3.

CẤP SỐ NHÂN

A Lý thuyết

1. Cấp số nhân

Định nghĩa:

- *Cấp số nhân* là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với một số không đổi q. Nghĩa là:

$$(u_n) \text{ là cấp số nhân } \Leftrightarrow n \ge 2, u_n = q.u_{n-1}$$

Số q được gọi là công bội của cấp số nhân $\left(q = \dfrac{u_n}{u_{n-1}}; n \ge 1\right)$

- **Đặc biệt:**

Khi $q = 0$, *cấp số nhân có dạng* $u_1, 0, 0, 0, ...$

Khi $q = 1$, *cấp số nhân có dạng* $u_1, u_1, u_1, ...$

Khi $u_1 = 0$, *cấp số nhân có dạng* $0, 0, 0, 0, ...$

2. Số hạng tổng quát

Định lý:

- Nếu một cấp số nhân có số hạng đầu là u_1 và công bội q thì số hạng tổng quá u_n của nó tính bởi công thức

$$u_n = q^{n-1}.u_1,\ n \ge 2$$

3. Tính chất các số hạng của cấp số nhân

Định lý:

- Trong một cấp số nhân, bình phương của mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là trung bình nhân của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là:

$$u_k = \sqrt{u_{k-1}.u_{k+1}} \text{ hay } u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1}\ (k \ge 2)$$

- **Hệ quả:** Nếu a, b, c là ba số khác 0, thì " ba số a, b, c theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân khi và chỉ khi $ac = b^2$

4. Tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng

Định lý:

- Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 1$.

  Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$

  » Nếu $q = 1$ thì $S_n = n$.

  » Nếu $q \neq 1$ thì $S_n = \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q}$.

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Xác định dãy đã cho là cấp số nhân

Phương pháp

Nếu (u_n) là một cấp số nhân với công bội q thì $u_{n+1} = u_n q$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Để chứng minh một dãy đã cho là 1 cấp số cộng thì ta chứng minh:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q; n \geq 1 \text{ với } q \text{ là một hằng số không đổi}$$

Ví dụ 1.1.

Chứng minh rằng dãy số $(v_n): v_n = (-1)^n .3^{2n}$ là một cấp số nhân.

Lời giải

....

....

....

Ví dụ 1.2.

Chứng minh các dãy số (u_n) sau là cấp số nhân biết:

(1) $u_n = \frac{3}{5}.2^n$ (2) $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.3.

Chứng minh các dãy số sau là một cấp số nhân. Xác định công bội và số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó?

(1) Dãy số (u_n) với $u_n=(-3)^{2n+1}$ (2) Dãy số (u_n) với $u_n=(-1)^n.5^{3n+2}$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.4.

Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số nhân?

(1) Dãy số (x_n), với $x_n=n^2$. (2) Dãy số (y_n), với $y_n=\sqrt{5}^{2n-3}$.

(3) Dãy số (z_n), với $z_n=\dfrac{2}{n}$. (4) Dãy số (w_n), với $w_n=\dfrac{3^n+1}{3^{n+1}}$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 2. Xác định các yếu tố qua số hạng tổng quát

Phương pháp

- Nếu một cấp số nhân có số hạng đầu là u_1 và công bội q thì số hạng tổng quá u_n của nó tính bởi công thức:

$$u_n = q^{n-1}.u_1,\ n \geq 2$$

Ví dụ 2.1.

Cho cấp số nhân (u_n) với công bội q < 0 và $u_2 = 4, u_4 = 9$. Tìm u_1.

Lời giải

....

....

....

Ví dụ 2.2.

Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_1 + u_5 = 51; u_2 + u_6 = 102$.

Hỏi số 12288 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân (u_n)?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.3.

Cho cấp số nhân (u_n) thỏa: $\begin{cases} u_4 = \dfrac{2}{27} \\ u_3 = 243u_8 \end{cases}$.

(1) Viết năm số hạng đầu của cấp số nhân.

(2) Số $\dfrac{2}{6561}$ là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.4.

Cho tứ giác $ABCD$ có 4 góc tạo thành 1 cấp số nhân có công bội bằng 2.
Tìm số đo 4 góc ấy.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.5.

Cho 5 số lập thành một cấp số nhân. Biết công bội bằng một phần tư số hạng đầu tiên và tổng 2 số hạng đầu bằng 8.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....

.

Dạng 3. Tính tổng n số hạng đầu của một cấp số nhân

Phương pháp

- Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 1$.

  Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$

  » Nếu $q = 1$ thì $S_n = n$.

  » Nếu $q \neq 1$ thì $S_n = \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q}$.

Ví dụ 3.1.

Tính tổng sau: $A = 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{512}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3.2.

Cho n là số tự nhiên ≥ 2, tính tổng sau: $S_n = \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2^2 + \frac{1}{2^2}\right)^2 + \ldots + \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)^2$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3.3.

Tính tổng sau: $S_n = 5 + 55 + 555 + \ldots + \underbrace{555\ldots5}_{n}$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.4.

Giải phương trình sau: $2 + 4 + 8 + ... + y = 1022$ biết y là số hạng thứ n của cấp số nhân.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.5.

Giải phương trình sau: $5^2.5^4.5^8...5^{2x} = (0,04)^{-63}$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 4. Cấp số nhân liên quan hình học

Phương pháp

- Để giải các bài toán cấp số nhân liên quan hình học, ngoài vận dụng các tính chất của cấp số nhân, tính chất hình học thuần túy như vuông,.. cần vận dụng linh hoạt các hệ thức lượng trong tam giác, các công thức lượng giác.

  Ta chú ý các tính chất sau:

  (1) Tổng các góc ở đỉnh đa giác lồi bằng $360°$.

  (2) Định lí Cô-sin trong tam giác:

  Cho tam giác ΔABC với $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

  (3) Định lí hàm sin: $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$.

  ...

Ví dụ 4.1.

Tìm 4 góc của một tứ giác, biết rằng các góc đó lập thành một cấp số nhân và góc cuối gấp 9 lần góc thứ hai.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4.2.

Độ dài các cạnh của ΔABC lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng ΔABC có hai góc không quá $60°$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4.3.

Tìm điều kiện cho một cấp số nhân để ba số hạng liên tiếp của nó là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4.4.

Số đo ba kích thước của hình hộp chữ nhật lập thành một cấp số nhân. Biết thể tích của khối hộp là 125cm^3 và diện tích toàn phần là 175cm^2. Tính tổng số đo ba kích thước của hình hộp chữ nhật đó.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4.5.

Cho α, β, γ đều khác $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Giả sử $\sin^2\alpha$, $\sin^2\beta$, $\sin^2\gamma$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng đồng thời $\sin\beta\neq 0$ và $\tan\alpha\tan\gamma=1$. Chứng minh rằng $\tan\alpha$, $\tan\beta$, $\tan\gamma$ lập thành cấp số nhân.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4.6.

Cho tam giác ABC có $A=90^0$ và $a,\frac{b\sqrt{6}}{3},c$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Tính góc B,C.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4.7.

Cho tam giác ABC có $C-A=60^0$ và $\sin A,\sin B,\sin C$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Tính góc A,B,C (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị) .

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 5. Nghiệm của phương trình liên quan cấp số nhân

Phương pháp

(1) Định lý Vi-ét đối với phương trình bậc ba:

Nếu phương trình bậc ba $ax^3+bx^2+cx+d=0$ có ba nghiệm x_1, x_2, x_3

Thì $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$

(2) Sử dụng kết quả này kết hợp với giả thiết của bài toán để tìm ra nghiệm của phương trình hoặc xác định mối liên hệ giữa các hệ số của phương trình.

Trường hợp nếu $x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a}$ là hằng số thì điều kiện cần để phương trình bậc ba nói trên có ba nghiệm lập thành một cấp số nhân là $x=\sqrt[3]{-\dfrac{d}{a}}$ là nghiệm của phương trình bậc ba đó.

Ví dụ 5.1.

Cho phương trình $x^2-12x+m=0$ (1) và $x^2-48x+q=0$ (2). Giả sử (1) có hai nghiệm là x_1, x_2; (2) có hai nghiệm là x_3, x_4. Tìm m, q biết rằng x_1, x_2, x_3, x_4 theo thứ tự lập thành cấp số nhân tăng.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 5.2.

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để phương trình $x^3+x^2+2ax+a=0$ có ba nghiệm lập thành cấp số nhân.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 5.3.

Chứng minh phương trình $x^3-\left(m^2+3\right)x^2+\left(m^2+3\right)x-1=0$, với $m\neq 0$ luôn có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 6. Cấp số nhân & cấp số cộng

Phương pháp

» Để làm các bài toán dạng này học sinh cần nắm vững và vận dụng linh hoạt định nghĩa và các tính chất cấp số nhân và cấp số cộng

	Cấp số cộng	*Cấp số nhân*
Định nghĩa	$u_{n+1}=u_n+d$ với $n\in\mathbb{N}^*$ d được gọi là *công sai.*	$u_n=q.u_{n-1}$ với $n\geq 2$ q được gọi là *công bội.*
Số hạng tổng quát	$u_n=u_1+(n-1)d, \forall n\geq 1.$	$u_n=q^{n-1}.u_1, n\geq 2$
Tính chất	$u_k=\dfrac{u_{k-1}+u_{k+1}}{2}, \forall k\geq 1.$	$u_k=\sqrt{u_{k-1}.u_{k+1}}$ hay $u_k^2=u_{k-1}.u_{k+1}\ (k\geq 2)$

Ví dụ 6.1.

Tìm 4 số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng tổng 3 số hạng đầu là $\dfrac{148}{9}$, đồng thời, theo thứ tự, chúng là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 6.2.

Tìm 4 số trong đó ba số đầu là ba số hạng kế tiếp của một cấp số nhân, còn ba số sau là ba số hạng kế tiếp của một cấp số cộng; tổng hai số đầu và cuối bằng 32, tổng hai số giữa bằng 24.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 6.3.

Tìm các các số dương a và b sao cho $a, a+2b, 2a+b$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng và $(b+1)^2, ab+5, (a+1)^2$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

Ví dụ 6.4.

Chứng minh rằng nếu ba số $\frac{2}{y-x}, \frac{1}{y}, \frac{2}{y-z}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì x, y, z theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

Ví dụ 6.5.

Một cấp số nhân và một cấp số cộng đều có số hạng thứ nhất bằng 5, số hạng thứ 2 của cấp số cộng lớn hơn số hạng thứ 2 của một cấp số nhân là 10, còn các số hạng thứ 3 thì bằng nhau. Tìm các cấp số ấy.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 7. Bài toán thực tế liên quan cấp số nhân

Ví dụ 7.1.

Một khu rừng có trữ lượng gỗ là 4.10^5 mét khối. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây ở khu rừng đó là 4% mỗi năm. Hỏi sau 5 năm, khu rừng sẽ có bao nhiêu mét khối gỗ?

Lời giải

....
....
....
....
....
....

Ví dụ 7.2.

Một người gửi số tiền 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7% năm. Biết rằng, nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi được nhập vào vốn ban đầu *(người ta gọi là lãi kép)*. Giả sử trong khoảng thời gian gửi người gửi không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi, hỏi sau 10 năm thì tổng số tiền cả vốn lẫn lãi mà người gửi nhận được gần với số tiền nào trong các số tiền dưới đây?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 7.3.

Một người gửi ngân hàng 150 triệu đồng theo thể thức lãi kép, lãi suất $0,58\%$ một tháng (kể từ tháng thứ 2, tiền lãi được tính theo phần trăm của tổng tiền lãi tháng trước đó và tiền gốc của tháng trước đó). Sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có 180 triệu đồng?

Lời giải

....
....
....
....
....
....

Ví dụ 7.4.

Một của hàng kinh doanh, ban đầu bán mặt hàng A với giá 100 (đơn vị nghìn đồng). Sau đó, cửa hàng tăng giá mặt hàng A lên 10%. Nhưng sau một thời gian, cửa hàng lại tiếp tục tăng giá mặt hàng đó lên 10%. Hỏi giá của mặt hàng A của cửa hàng sau hai lần tăng giá là bao nhiêu?

Lời giải

....

....

....

Ví dụ 7.5.

Tỷ lệ tăng dân số của tỉnh M là $1,2\%$. Biết rằng số dân của tỉnh M hiện nay là 2 triệu người. Nếu lấy kết quả chính xác đến hàng nghìn thì sau 9 năm nữa số dân của tỉnh M sẽ là bao nhiêu?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 7.6.

Anh An mua nhà trị giá 500 triệu đồng theo phương thức trả góp

(1) Nếu cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất anh An trả 6000000 và chịu lãi số tiền chưa trả là $0,5\%$/tháng thì sau bao lâu anh An trả hết số tiền trên?

(2) Nếu anh An muốn trả hết nợ trong 3 năm và phải trả lãi với mức 6%/năm thì mỗi tháng anh phải trả bao nhiêu tiền? (Làm tròn đến nghìn đồng).

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 7.7.

Bố bạn An tặng bạn ấy một máy vi tính trị giá 15 triệu đồng bằng cách cho bạn ấy tiền hàng tháng theo phương thức: tháng đầu tiên cho 300000 đồng, các tháng từ tháng thứ 2 trở đi mỗi tháng nhận được số tiền nhiều hơn tháng trước 50000 đồng.

(1) Nếu chọn cách gửi tiết kiệm số tiền được nhận hàng tháng với lãi suất 0,6%/tháng thì bạn An gửi bao nhiêu tháng mới đủ mua máy vi tính?

(2) Nếu bạn An muốn có ngay máy vi tính để học bằng phương thức mua trả góp hàng tháng bằng số tiền bố cho với lãi suất ngân hàng là 0,7%/tháng thì bạn An mất bao nhiêu tháng để trả đủ số tiền và tháng cuối cùng trả bao nhiêu?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» **Câu 1.** Dãy số nào sau đây **không phải** là cấp số nhân?

A. $1;-3;9;-27;54$. **B.** $1;2;4;8;16$. **C.** $1;-1;1;-1;1$. **D.** $1;-2;4;-8;16$.

» **Câu 2.** Trong các dãy số cho dưới đây, dãy số nào là cấp số nhân?

A. $1;2;3;4;5$. **B.** $1;3;6;9;12$. **C.** $2;4;6;8;10$. **D.** $2;2;2;2;2$.

» **Câu 3.** Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. $1;2;3;4;5;6;...$. **B.** $2;4;6;8;16;32;...$.

C. $-2;-3;-4;-5;-6;-7;...$. **D.** $1;2;4;8;16;32;...$.

» **Câu 4.** Chọn cấp số nhân trong các dãy số sau:

A. $1;\ 0,2;\ 0,04;\ 0,0008;\ ...$ **B.** $2;\ 22;\ 222;2222;\ ...$

C. $x;\ 2x;\ 3x;\ 4x;\ ...$ **D.** $1;\ -x^2;\ x^4;\ -x^6;\ ...$

» **Câu 5.** Xác định x để 3 số $x-2;\ x+1;\ 3-x$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân:

A. Không có giá trị nào của x. **B.** $x=\pm 1$.

C. $x=2$. **D.** $x=-3$.

» **Câu 6.** Trong các dãy số (u_n) sau, dãy nào là cấp số nhân?

A. $u_n=n^2+n+1$. **B.** $u_n=(n+2).3^n$.

C. $\begin{cases} u_1=2 \\ u_{n+1}=\dfrac{6}{u_n}, \forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$. **D.** $u_n=(-4)^{2n+1}$.

» **Câu 7.** u_n được cho bởi công thức nào dưới đây là số hạng tổng quát của một cấp số nhân?

A. $u_n=\dfrac{1}{2^{n+1}}$. **B.** $u_n=n^2-\dfrac{1}{2}$. **C.** $u_n=\dfrac{1}{2^n}-1$. **D.** $u_n=n^2+\dfrac{1}{2}$.

» **Câu 8.** Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n=3.2^{n+1}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$. Chọn kết luận đúng:

A. Dãy số là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1=12$.

B. Dãy số là cấp số cộng có công sai $d=2$.

C. Dãy số là cấp số cộng có số hạng đầu $u_1=6$.

D. Dãy số là cấp số nhân có công bội $q=3$.

» **Câu 9.** Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1=2$ và công bội $q=3$. Giá trị của u_2 bằng

A. 6. **B.** 9. **C.** 8. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

» **Câu 10.** Tìm công bội q của một cấp số nhân (u_n) có $u_1=\dfrac{1}{2}$ và $u_6=16$.

A. $q=\dfrac{1}{2}$. **B.** $q=-2$. **C.** $q=2$. **D.** $q=-\dfrac{1}{2}$.

» **Câu 11.** Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=2$ và $u_4=54$. Giá trị của công bội q bằng

A. 3. **B.** 9. **C.** 27. **D.** -3.

» **Câu 12.** Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1=2$ và công bội $q=3$. Tìm số hạng thứ 4 của cấp số nhân?

A. 24. **B.** 54. **C.** 162. **D.** 48.

» Câu 13. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$. Giá trị u_{2019} bằng

A. 2.3^{2018}. **B.** 3.2^{2018}. **C.** 2.3^{2019}. **D.** 3.2^{2019}.

» Câu 14. Cho cấp số nhân $(u_n); u_1 = 1, q = 2$. Hỏi số 1024 là số hạng thứ mấy?

A. 11. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 10.

» Câu 15. Tập hợp các giá trị x thỏa mãn $x, 2x, x+3$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân là

A. $\{0;1\}$. **B.** $\varnothing$. **C.** $\{1\}$. **D.** $\{0\}$

» Câu 16. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào là **sai**?

A. Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số nhân.
B. Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số cộng.
C. Một cấp số cộng có công sai dương là một dãy số tăng.
D. Một cấp số cộng có công sai dương là một dãy số dương.

» Câu 17. Giả sử $\frac{\sin\alpha}{6}$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ theo thứ tự đó là một cấp số nhân. Tính $\cos 2\alpha$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{1}{2}$.

» Câu 18. Cho dãy số có các số hạng đầu là $\frac{1}{3}; \frac{1}{3^2}; \frac{1}{3^3}; \frac{1}{3^4}; \ldots$ Số hạng tổng quát của dãy số này là

A. $\frac{1}{3^{n-1}}$ **B.** $\frac{1}{3^{n+2}}$. **C.** $\frac{1}{3^n}$. **D.** $\frac{1}{3^{n+1}}$.

» Câu 19. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 1$ và $u_2 = 2$. Công bội của cấp số nhân đã cho là

A. $q = \frac{1}{2}$. **B.** $q = 2$. **C.** $q = -2$. **D.** $q = -\frac{1}{2}$.

» Câu 20. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$ và $u_2 = 9$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

A. -6. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 3. **D.** 6.

» Câu 21. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$ và $u_2 = 12$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

A. 9. **B.** -9. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** 4.

» Câu 22. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$ và $u_2 = 15$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

A. -12. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** 5. **D.** 12.

» Câu 23. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = 6$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

A. 3. **B.** -4. **C.** 4. **D.** $\frac{1}{3}$.

» Câu 24. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$ và công bội $q = 2$. Giá trị của u_2 bằng

A. 8. **B.** 9. **C.** 6. **D.** $\frac{3}{2}$.

» Câu 25. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -\frac{1}{2}$; $u_7 = -32$. Tìm q ?

A. $q = \pm\frac{1}{2}$. **B.** $q = \pm 2$. **C.** $q = \pm 4$. **D.** $q = \pm 1$.

» **Câu 26.** Biết ba số $x^2;8;x$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Giá trị của x bằng

A. $x=4$ **B.** $x=5$ **C.** $x=2$ **D.** $x=1$

» **Câu 27.** Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q. Chọn hệ thức đúng trong các hệ thức sau:

A. $u_k=\sqrt{u_{k+1}.u_{k+2}}$ **B.** $u_k=\dfrac{u_{k-1}+u_{k+1}}{2}$.

C. $u_k=u_1.q^{k-1}$. **D.** $u_k=u_1+(k-1)q$.

» **Câu 28.** Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1=-2 \\ u_{n+1}=\dfrac{-1}{10}.u_n \end{cases}$. Chọn hệ thức đúng:

A. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q=-\dfrac{1}{10}$. **B.** $u_n=(-2)\dfrac{1}{10^{n-1}}$.

C. $u_n=\dfrac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2}\ (n\ge 2)$. **D.** $u_n=\sqrt{u_{n-1}.u_{n+1}}\ (n\ge 2)$.

» **Câu 29.** Với x là số nguyên dương, ba số $2x,\ 3x+3,\ 5x+5$ theo thứ tự là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân. Số hạng tiếp theo của cấp số nhân đó là

A. $-\dfrac{250}{3}$. **B.** $\dfrac{250}{3}$. **C.** 250. **D.** -250.

» **Câu 30.** Cho cấp số nhân (u_n), biết $u_1=1,\ u_4=64$. Tính công bội q của cấp số nhân đã cho

A. $q=4$. **B.** $q=-4$. **C.** $q=21$. **D.** $q=2\sqrt{2}$.

» **Câu 31.** Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=-2$ và $u_5=-162$. Công bội q bằng:

A. $q=-3$. **B.** $q=3$. **C.** $q=3; q=-3$. **D.** $q=-2$.

» **Câu 32.** Cấp số nhân (u_n) có $u_4=9,\ u_5=81$ có công bội là

A. 3. **B.** 72. **C.** 18. **D.** 9.

» **Câu 33.** Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=-3$ và $q=-2$. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

A. $S_{10}=-511$. **B.** $S_{10}=1023$. **C.** $S_{10}=1025$. **D.** $S_{10}=-1025$.

» **Câu 34.** Cho một cấp số nhân có các số hạng đều không âm thỏa mãn $u_2=6,\ u_4=24$. Tính tổng của 12 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó.

A. $3.2^{12}-3$. **B.** $2^{12}-1$. **C.** $3.2^{12}-1$. **D.** 3.2^{12}.

» **Câu 35.** Cho dãy (u_n) với $u_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Tính $S_{2019}=u_1+u_2+u_3+...+u_{2019}$, ta được kết quả

A. $2020-\dfrac{1}{2^{2019}}$. **B.** $\dfrac{4039}{2}$. **C.** $2019+\dfrac{1}{2^{2019}}$. **D.** $\dfrac{6057}{2}$.

» **Câu 36.** Cho cấp số nhân (u_n) có $u_3=12,\ u_5=48$, có công bội âm. Tổng 7 số hạng đầu của cấn số nhân đã cho bằng

A. 129. **B.** -129. **C.** 128. **D.** -128.

» **Câu 37.** Biết rằng $S=1+2.3+3.3^2+...+11.3^{10}=a+\dfrac{21.3^b}{4}$. Tính $P=a+\dfrac{b}{4}$.

A. $P=1$. **B.** $P=2$. **C.** $P=3$. **D.** $P=4$.

» **Câu 38.** Cho cấp số nhân (u_n) có $S_2=4$ và $S_3=13$. Tìm S_5.

A. $S_5 = 121$ hoặc $S_5 = \frac{181}{16}$. **B.** $S_5 = 121$ hoặc $S_5 = \frac{35}{16}$.

C. $S_5 = 114$ hoặc $S_5 = \frac{185}{16}$. **D.** $S_5 = 141$ hoặc $S_5 = \frac{183}{16}$.

» Câu 39. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 8$ và biểu thức $4u_3 + 2u_2 - 15u_1$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính S_{10}.

A. $S_{10} = \frac{2(4^{11}+1)}{5.4^9}$. **B.** $S_{10} = \frac{2(4^{10}+1)}{5.4^8}$. **C.** $S_{10} = \frac{2^{10}-1}{3.2^6}$. **D.** $S_{10} = \frac{2^{11}-1}{3.2^7}$

» Câu 40. Cho cấp số nhân (u_n) có $\begin{cases} u_4 + u_6 = -540 \\ u_3 + u_5 = 180 \end{cases}$. Tính S_{21}.

A. $S_{21} = \frac{1}{2}(3^{21}+1)$ **B.** $S_{21} = 3^{21} - 1$. **C.** $S_{21} = 1 - 3^{21}$. **D.** $S_{21} = -\frac{1}{2}(3^{21}+1)$.

» Câu 41. Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là $\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1; \cdots; 2048$. Tính tổng S của tất cả các số hạng của cấp số nhân đã cho.

A. $S = 2047,75$. **B.** $S = 2049,75$. **C.** $S = 4095,75$. **D.** $S = 4096,75$.

» Câu 42. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,121212...$ được biểu diễn bởi phân số

A. $\frac{3}{25}$. **B.** $\frac{12}{99}$. **C.** $\frac{1}{11}$. **D.** $\frac{3}{22}$.

» Câu 43. Cho dãy số xác định bởi $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2u_n + \frac{n-1}{n^2+3n+2}\right)$; $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó u_{2018} bằng:

A. $u_{2018} = \frac{2^{2016}}{3^{2017}} + \frac{1}{2019}$. **B.** $u_{2018} = \frac{2^{2018}}{3^{2017}} + \frac{1}{2019}$.

C. $u_{2018} = \frac{2^{2017}}{3^{2018}} + \frac{1}{2019}$. **D.** $u_{2018} = \frac{2^{2017}}{3^{2018}} + \frac{1}{2019}$.

» Câu 44. Ba số theo thứ tự lập thành một cấp số nhân có số hạng cuối lớn hơn số hạng đầu 16 đơn vị. Ba số đó là các số hạng thứ nhất, thứ hai và thứ năm của một cấp số cộng. Tìm ba số đó.

A. $2,6,18$. **B.** $4,8,20$. **C.** $\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{49}{3}$. **D.** $4, 4\sqrt{5}, 20$.

» Câu 45. Ba số dương x,y,z theo thứ tự lập thành một cấp số cộng và có tổng bằng 30. Biết $x+2; y+2; z+18$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Tính $T = x^2 + z^2$.

A. $T = 328$. **B.** $T = 424$. **C.** $T = 296$. **D.** $T = 428$.

» Câu 46. Ba số x,y,z theo thứ tự lập thành một cấp số cộng tăng có tổng bằng 24. Nếu cộng thêm lần lượt các số $1,4,13$ vào ba số x,y,z ta được ba số theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tính giá trị biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^2$.

A. 200. **B.** 210. **C.** 220. **D.** 190.

» Câu 47. Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) biết $u_1 = 1$ và u_1, u_3, u_4 theo thứ tự là ba số hạng liên tiếp trong một cấp số cộng.

A. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{5}-1}$. **D.** 2.

» Câu 48. Người ta thiết kế một cái tháp 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp. Tính diện tích mặt trên cùng.

A. 8 m^2. **B.** 6 m^2. **C.** 10 m^2. **D.** 12 m^2.

» Câu 49. Một hình vuông $ABCD$ có cạnh $AB=a$, diện tích S_1. Nối 4 trung điểm A_1, B_1, C_1, D_1 theo thứ tự của 4 cạnh AB, BC, CD, DA ta được hình vuông thứ hai là $A_1B_1C_1D_1$ có diện tích S_2. Tiếp tục như thế ta được hình vuông thứ ba $A_2B_2C_2D_2$ có diện tích S_3 và cứ tiếp tục như thế, ta được diện tích $S_4, S_5, \ldots$ Tính $S=S_1+S_2+S_3+\ldots+S_{100}$.

A. $S=\dfrac{2^{100}-1}{2^{99}a^2}$. **B.** $S=\dfrac{a\left(2^{100}-1\right)}{2^{99}}$. **C.** $S=\dfrac{a^2\left(2^{100}-1\right)}{2^{99}}$. **D.** $S=\dfrac{a^2\left(2^{99}-1\right)}{2^{99}}$.

» Câu 50. Bạn A thả quả bóng cao su từ độ cao 10 m theo phương thẳng đứng. Mỗi khi chạm đất nó lại nảy lên theo phương thẳng đứng có độ cao bằng $\dfrac{3}{4}$ độ cao trước đó. Tính tổng quãng đường bóng đi được đến khi bóng dừng hẳn.

A. 40 m. **B.** 70 m. **C.** 50 m. **D.** 80 m.

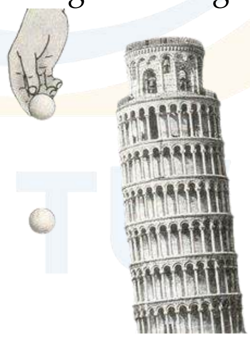
» Câu 51. Một loại vi khuẩn sau mỗi phút số lượng tăng gấp đôi biết rằng sau 5 phút người ta đếm được có 64000 con hỏi sau bao nhiêu phút thì có được 2048000 con.

A. 10. **B.** 11. **C.** 26. **D.** 50.

» Câu 52. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1=5$, $a_{n+1}=q.a_n+3$ với mọi $n\ge 1$, trong đó q là hằng số, $q\ne 0$, $q\ne 1$. Biết công thức số hạng tổng quát của dãy số viết được dưới dạng $a_n=\alpha.q^{n-1}+\beta\dfrac{1-q^{n-1}}{1-q}$. Tính $\alpha+2\beta$?

A. 13. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 16.

» Câu 53. Từ độ cao 55,8m của tháp nghiêng Pisa nước Italia người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất. Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\dfrac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt trước đó. Tổng độ dài hành trình của quả bóng được thả từ lúc ban đầu cho đến khi nó nằm yên trên mặt đất thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

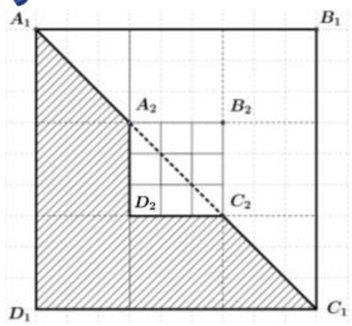


A. $(67m;69m)$. **B.** $(60m;63m)$. **C.** $(64m;66m)$. **D.** $(69m;72m)$.

» Câu 54. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để phương trình $(x-1)(x-3)(x-m)=0$ có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân tăng?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

» Câu 55. Với hình vuông như hình vẽ bên, cách tô màu như phần gạch sọc được gọi là cách tô màu "đẹp". Một nhà thiết kế tiến hành tô màu cho một hình vuông như hình bên, theo quy trình sau:



Bước 1: Tô màu "đẹp" cho hình vuông $A_1B_1C_1D_1$.

Bước 2: Tô màu "đẹp" cho hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ là hình vuông ở chính giữa khi chia hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ thành 9 phần bằng nhau như hình vẽ.

Bước 3: Tô màu "đẹp" cho hình vuông $A_3B_3C_3D_3$ là hình vuông ở chính giữa khi chia hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ thành 9 phần bằng nhau. Cứ tiếp tục như vậy. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu bước để tổng diện tích phần được tô màu chiếm $49,99\%$.

A. 9 bước. **B.** 4 bước. **C.** 8 bước. **D.** 7 bước.

» Câu 56. Cho năm số a, b, c, d, e tạo thành một cấp số nhân theo thứ tự đó và các số đều khác 0, biết $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=10$ và tổng của chúng bằng 40. Tính giá trị $|S|$ với $S=abcde$.

A. $|S|=42$. **B.** $|S|=62$. **C.** $|S|=32$. **D.** $|S|=52$.

» Câu 57. Các số $x+6y,\ 5x+2y,\ 8x+y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng, đồng thời, các số $x+\frac{5}{3},\ y-1,\ 2x-3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm x và y

A. $x=-3, y=-1$ hoặc $x=\frac{3}{8}, y=\frac{1}{8}$.
B. $x=3, y=1$ hoặc $x=-\frac{3}{8}, y=-\frac{1}{8}$.
C. $x=24, y=8$ hoặc $x=-3, y=-1$.
D. $x=-24, y=-8$ hoặc $x=3, y=1$

» Câu 58. Ba số x,y,z lập thành một cấp số cộng và có tổng bằng 21. Nếu lần lượt thêm các số $2;3;9$ vào ba số đó thì được ba số lập thành một cấp số nhân. Tính $F=x^2+y^2+z^2$.

A. $F=389$. hoặc $F=395$.
B. $F=395$. hoặc $F=179$.
C. $F=389$. hoặc $F=179$.
D. $F=441$ hoặc $F=357$.

» Câu 59. Một người đem 100 triệu đồng đi gửi tiết kiệm với kỳ hạn 6 tháng, mỗi tháng lãi suất là $0,7\%$ số tiền mà người đó có. Hỏi sau khi hết kỳ hạn, người đó được lĩnh về bao nhiêu tiền?

A. $10^8.(0,007)^5$ **B.** $10^8.(1,007)^5$ **C.** $10^8.(0,007)^6$ **D.** $10^8.(1,007)^6$

» Câu 60. Tỷ lệ tăng dân số của tỉnh M là $1,2\%$. Biết rằng số dân của tỉnh M hiện nay là 2 triệu người. Nếu lấy kết quả chính xác đến hàng nghìn thì sau 9 năm nữa số dân của tỉnh M sẽ là bao nhiêu?

A. 10320 nghìn người.
B. 3000 nghìn người.
C. 2227 nghìn người.
D. 2300 nghìn người.

» Câu 61. Tế bào E. Coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại nhân đôi một lần. Nếu lúc đầu có 10^{12} tế bào thì sau 3 giờ sẽ phân chia thành bao nhiêu tế bào?

A. 1024.10^{12} tế bào. **B.** 256.10^{12} tế bào. **C.** 512.10^{12} tế bào. **D.** 512.10^{13} tế bào.

B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai

» Câu 62. Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q<0$ và $u_2=4, u_4=9$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Số hạng đầu $u_1=-\frac{8}{3}$		
(b)	Số hạng $u_5=\frac{27}{2}$		
(c)	$-\frac{2187}{32}$ là số hạng thứ 8		
(d)	Cấp số nhân có công bội $q=-\frac{3}{2}$		

» Câu 63. Cho cấp số nhân (u_n), biết $u_1+u_5=51;u_2+u_6=102$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Số hạng $u_1=3$		
(b)	Số hạng $u_4=48$		
(c)	Số 12288 là số hạng thứ 12 của cấp số nhân (u_n)		
(d)	Tổng tám số hạng đầu của cấp số nhân là: 765.		

» Câu 64. Cho cấp số nhân (u_n) thoả mãn: $\begin{cases} u_4=\frac{2}{27} \\ u_3=243u_8 \end{cases}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Số hạng $u_1=2;u_2=\frac{2}{3}$		
(b)	$u_5-u_3=-\frac{16}{81}$		
(c)	Số $\frac{2}{6561}$ là số hạng thứ 8 của cấp số nhân		
(d)	Tổng chín số hạng đầu của cấp số nhân là số lớn hơn 3.		

» Câu 65. Cho cấp số nhân (u_n) thoả mãn $\begin{cases} u_4+u_6=-540 \\ u_3+u_5=180 \end{cases}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Số hạng $u_1=2$		
(b)	Gọi q là công bội của cấp số nhân, thì ba số $q;1;3$ tạo thành một cấp số cộng		
(c)	Số -486 là số hạng thứ 5 của cấp số nhân		
(d)	Tổng của 21 số hạng đầu cấp số nhân đã cho bằng 5230176602		

» Câu 66. Cho tứ giác $ABCD$ có bốn góc tạo thành một cấp số nhân có công bội bằng 2. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Số đo góc nhỏ nhất bằng $24°$		
(b)	Số đo góc lớn nhất bằng $196°$		
(c)	Tổng số đo góc lớn nhất với góc nhỏ nhất bằng $220°$		
(d)	Số đo góc lớn nhất trừ cho số đo góc nhỏ nhất bằng $168°$		

» Câu 67. Cho cấp số nhân (u_n) biết rằng $u_1+u_2+u_3=168$ và $u_4+u_5+u_6=21$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai

(a)	Số hạng $u_1 = 90$		
(b)	Công bội của cấp số nhân bằng 2		
(c)	Số 24 là số hạng thứ 3 của cấp số nhân		
(d)	Tổng của 10 số hạng đầu cấp số nhân đã cho bằng $\dfrac{3069}{16}$		

» Câu 68. Aladin nhặt được cây đèn thần, chàng miết tay vào cây đèn và gọi Thần đèn ra. Thần đèn cho chàng 3 điều ước. Aladin ước 2 điều đầu tiên tùy thích, nhưng điều ước thứ 3 của chàng là: "Ước gì ngày mai tôi lại nhặt được cây đèn và Thần cho tôi số điều ước gấp đôi số điều ước ngày hôm nay". Thần đèn chấp thuận và mỗi ngày Aladin đều thực hiện theo quy tắc như trên: ước hết các điều đầu tiên và luôn chừa lại điều ước cuối cùng để kéo dài thỏa thuận với thần đèn cho ngày hôm sau. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Ngày thứ hai Aladin ước 6 điều		
(b)	Ngày thứ ba Aladin ước 12 điều		
(c)	Ngày thứ tư Aladin ước 48 điều		
(d)	Sau 10 ngày gặp Thần đèn, Aladin ước tất cả 3269 điều ước		

» Câu 69. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội nguyên và các số hạng thoả mãn $\begin{cases} u_4 - u_2 = 54 \\ u_5 - u_3 = 108 \end{cases}$

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Số hạng đầu của cấp số nhân bằng 9		
(b)	Công bội của cấp số nhân $q = 3$		
(c)	Tổng của 9 số hạng đầu tiên bằng 4599		
(d)	Số 576 là số hạng thứ 6 của cấp số nhân		

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 70. Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = 5^n - 1$. Tính tổng số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân đó.

✍ **Điền đáp số:** ☐

» Câu 71. Tìm số hạng đầu của cấp số nhân (u_n), biết: $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases}$

✍ **Điền đáp số:** ☐

» Câu 72. Biết $(u_1; q)$ là cặp số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n): $\begin{cases} u_2 = 6 \\ S_3 = 43 \end{cases}$. Có bao nhiêu cặp $(u_1; q)$ thỏa cấp số nhân đã cho?

✍ **Điền đáp số:** ☐

» Câu 73. Biết $(u_1; q)$ là cặp số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n): $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 31 \\ u_1 + u_3 = 26 \end{cases}$. Có bao nhiêu cặp $(u_1; q)$ có công bội là số nguyên thỏa cấp số nhân đã cho?

✍ **Điền đáp số:** ☐

» Câu 74. Tìm số hạng đầu của cấp số nhân (u_n), biết: $\begin{cases} u_5+u_2=36 \\ u_6-u_4=48 \end{cases}$

Điền đáp số:

» Câu 75. Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_1=5, u_5=405$ và tổng $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n=1820$. Tìm n.

Điền đáp số:

» Câu 76. Viết thêm bốn số vào giữa hai số 160 và 5 để được một cấp số nhân gồm sáu số hạng. Tìm tổng tất cả các số hạng của cấp số nhân đó.

Điền đáp số:

» Câu 77. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=3$ và $15u_1-4u_2+u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm số hạng thứ 10 của cấp số nhân đã cho.

Điền đáp số:

» Câu 78. Biết một cấp số nhân có số hạng đầu bằng 18, số hạng thứ hai bằng 54 và số hạng cuối bằng 39366. Tổng tất cả các số hạng của một cấp số nhân có dạng $\overline{5a0b0}$, với $a;b$ là các số tự nhiên. Tính $S=a+b$

Điền đáp số:

» Câu 79. Kết quả của tổng sau theo n: $S_n=\left(2+\frac{1}{2}\right)^2+\left(4+\frac{1}{4}\right)^2+\ldots+\left(2^n+\frac{1}{2^n}\right)^2$ có dạng $-1+\frac{a^{n+1}}{3}-\frac{1}{3\cdot a^n}+\frac{a}{2}n$ với a là số tự nhiên. Giá trị của a bằng bao nhiêu?

Điền đáp số:

» Câu 80. Kết quả của tổng sau theo n: $S_n=8+88+888+\ldots+\underbrace{88\ldots8}_{n \text{ chu so } 8}$ có dạng $\frac{a(10^n-b)}{81}-\frac{8}{9}n$ với $a;b$ là các số tự nhiên. Giá trị của $P=a-30b$ bằng bao nhiêu?

Điền đáp số:

» Câu 81. Tổng ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng là 21. Nếu lấy số thứ hai trừ đi 1 và số thứ ba cộng thêm 1 thì ba số đó lập thành một cấp số nhân. Tính tích ba số đó biết số hạng đầu có giá trị nhỏ hơn 4

Điền đáp số:

» Câu 82. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân: $x^3-7x^2+2(m^2+6m)x-8=0$.

Điền đáp số:

» Câu 83. Chu kì bán rã của nguyên tố phóng xạ polonium 210 là 138 ngày (nghĩa là sau 138 ngày khối lượng của nguyên tố đó chỉ còn một nửa). Khối lượng còn lại của 20 gam polonium 210 sau 7314 ngày (khoảng 20 năm) có dạng $\approx a,22\cdot10^{-b}$ với $a;b$ là các số tự nhiên. Tính $S=b-2a$

✍ **Điền đáp số:**

» **Câu 84.** Ông Minh gửi số tiền 100 triệu đồng vào một ngân hàng với hình thức lãi kép kì hạn 12 tháng lãi suất 7% /năm Giả sử trong khoảng thời gian gửi tiền ông Minh không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi. Sau 10 năm thì tổng số tiền cả vốn lẫn lãi mà ông nhận được là $\approx \overline{a9b7c5000}$ với $a;b;c$ là các số tự nhiên và đơn vị: đồng, kết quả gần đúng đến hàng nghìn. Tính $S=a+b+c$

✍ **Điền đáp số:**

» **Câu 85.** Cho cấp số nhân có $u_1=-3, q=\dfrac{2}{3}$. Số $\dfrac{-96}{243}$ là số hạng thứ mấy của cấp số này?

✍ **Điền đáp số:**

» **Câu 86.** Cho cấp số nhân (u_n) có $S_2=4$ và $S_3=13$ (trong đó S_2, S_3 theo thứ tự là tổng của hai và của ba số hạng đầu của cấp số nhân). Tổng của năm số hạng đầu của cấp số nhân có công bội dương có giá trị bằng bao nhiêu?

✍ **Điền đáp số:**

» **Câu 87.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để các số $2x-1; x; 2x+1$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.

✍ **Điền đáp số:**

» **Câu 88.** Cho các số $x+6y; 5x+2y; 8x+y$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng; đồng thời các số $x-1; y+2; x-3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Tính x^2+y^2.

✍ **Điền đáp số:**

» **Câu 89.** Kết quả của tổng $S=1+2\cdot5+3\cdot5^2+\ldots+79\cdot5^{78}$ được viết dưới dạng $a+\dfrac{315}{16}\cdot5^b\left(b\in\mathbb{N}, a\right.$ là phân số tối giản). Tính giá trị biểu thức $P=a+\dfrac{b}{16}$.

✍ **Điền đáp số:**

» **Câu 90.** Theo báo cáo của Chính phủ, dân số của nước ta tính đến tháng 12 năm 2018 là 95,93 triệu người, nếu tỉ lệ tăng trưởng dân số trung bình hằng năm là $1,33\%$ thì dân số nước ta vào tháng 12 năm 2025 là bao nhiêu người? (Tính theo đơn vị triệu người, làm tròn đến hàng đơn vị)

✍ **Điền đáp số:**

» **Câu 91.** Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=-3$, công bội $q=-2$. Hỏi -192 là số hạng thứ mấy của (u_n) ?

✍ **Điền đáp số:**

» **Câu 92.** Một cấp số nhân hữu hạn có công bội $q=-3$, số hạng thứ ba bằng 27 và số hạng cuối bằng 1594323. Hỏi cấp số nhân đó có bao nhiêu số hạng?

✍ **Điền đáp số:**

» **Câu 93.** Cho các số nguyên x và y thỏa mãn $5x-y,2x+3y,x+2y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng, đồng thời $(y+1)^2;xy+1;(x-1)^2$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tính tổng giá trị x và y.

✍ **Điền đáp số:**

» **Câu 94.** Cho tam giác ABC cân tại A. Biết rằng độ dài cạnh BC, trung tuyến AM và độ dài cạnh AB theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân có công bội q. Có bao nhiêu giá trị công bội q nguyên của cấp số nhân đó?

✍ **Điền đáp số:**

» **Câu 95.** Cho 3 số tạo thành một cấp số cộng có tổng 21. Nếu thêm 2,3,9 lần lượt vào số thứ nhất, số thứ hai, số thứ ba tạo thành một cấp số nhân. Có bao nhiêu bộ 3 số thỏa các điều kiện trên?

✍ **Điền đáp số:**

» **Câu 96.** Bạn Lan thả quả bóng cao su từ độ cao $12m$ theo phương thẳng đứng. Mỗi khi chạm đất nó lại nảy lên theo phương thẳng đứng với độ cao bằng $\frac{2}{3}$ độ cao trước đó. Tổng quãng đường bóng đi được đến khi bóng dừng hẳn là bao nhiêu mét?

✍ **Điền đáp số:**

» **Câu 97.** Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=\frac{1}{3}$ và $u_{n+1}=\frac{n+1}{3n}\cdot u_n$. Tổng $S=u_1+\frac{u_2}{2}+\frac{u_3}{3}+\ldots+\frac{u_{10}}{10}$ có giá trị bằng bao nhiêu? *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

✍ **Điền đáp số:**

» **Câu 98.** Cho 3 số dương có tổng là 65 lập thành một cấp số nhân tăng. Nếu bớt một đơn vị ở số hạng thứ nhất và 19 đơn vị ở số hạng thứ ba ta được một cấp số cộng. Tính tích 3 số đó?

✍ **Điền đáp số:**

» **Câu 99.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thì phương trình $x^3-mx^2-6x-8=0$ có ba nghiệm thực lập thành một cấp số nhân?

✍ **Điền đáp số:**

----------------------------- Hết -----------------------------

Chương 02

Bài 1. DÃY SỐ

A Lý thuyết

1. Dãy số

Định nghĩa:

- Mỗi hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn. Nghĩa là:

$$\begin{aligned} u:\mathbb{N}^* &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto u_n = u(n). \end{aligned}$$

Dãy số trên được kí hiệu là (u_n)

Dạng khai triển của dãy số (u_n) là: $u_1,\ u_2,\ u_3,\ ...,\ u_n,...$

Chú ý

(1) $u_1 = u(1)$ là số hạng đầu,
$u_n = u(n)$ là số hạng thứ n (số hạng tổng quát) của dãy số.

(2) Nếu $u_n = C, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta nói (u_n) là dãy số không đổi.

(3) Hàm số u xác định trên tập $M = \{1,2,3,...,m\}$ với $m \in \mathbb{N}^*$ thì được gọi là một dãy số hữu hạn.

(4) Dạng khai triển của dãy số này là: $u_1,\ u_2,\ u_3,\ ...,\ u_m$, trong đó u_1 là số hạng đầu, u_m là số hạng cuối.

2. Cách xác định dãy số

- Một dãy số có thể được cho bằng các cách sau:

(1) Cho bằng liệt kê các số hạng.

(2) Cho bằng công thức của số hạng tổng quát.

(3) Cho bằng phương pháp truy hồi.

Tức là: + Cho số hạng đầu.
+ Cho hệ thức truy hồi, tức là hệ thức biểu thị số hạng thứ n qua số hạng đứng trước nó.

(4) Cho bằng phương pháp mô tả.

3. Dãy số tăng, dãy số giảm và dãy số bị chặn

Định nghĩa:

- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu ta có $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu ta có $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Chú ý

Không phải mọi dãy số đều tăng hoặc giảm.
Chẳng hạn:

Dãy số (u_n) *với* $u_n = (-3)^n$ *tức là dãy* $-3, 9, -27, 81, \ldots$ *không tăng cũng không giảm.*

4. Dãy số bị chặn

Định nghĩa:

- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M: $u_n \le M,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$
- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một số m: $u_n \ge m,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$
- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới.

  Tức là tồn tại các số m, M: $m \le u_n \le M,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Chú ý

(1) Dãy tăng sẽ bị chặn dưới bởi u_1

(2) Dãy giảm sẽ bị chặn trên bởi u_1

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Tìm số hạng của dãy số từ dãy số cho trước

Phương pháp

Ở dạng này, ta có 4 bài toán thường gặp:

⁂ **Bài toán 1:** Cho dãy số (u_n): $u_n = f(n)$. Hãy tìm số hạng u_k.

⁂ **Bài toán 2:** Cho dãy số (u_n): $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$. Hãy tìm số hạng u_k.

⁂ **Bài toán 3:** Cho dãy số (u_n): $\begin{cases} u_1 = a, u_2 = b \\ u_{n+2} = c.u_{n+1} + d.u_n + e \end{cases}$. Hãy tìm số hạng u_k.

⁂ **Bài toán 4:** Cho dãy số (u_n): $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = f(\{n, u_n\}) \end{cases}$. Trong đó $f(\{n, u_n\})$ là kí hiệu của biểu thức u_{n+1} tính theo u_n và n. Hãy tìm số hạng u_k.

⁂ **Bài toán 1:** Cho dãy số (u_n): $u_n = f(n)$. Hãy tìm số hạng u_k.

✓ **Cách 1.** *Tự luận:* Thay trực tiếp $n = k$ vào $u_n = 2n + 3$.

✓ **Cách 2.** *Dùng máy tính:* » Nhập: $f(n)$ CALC X $= k$

» Bấm $=$ $\rightarrow$ Kết quả

⁂ **Bài toán 2:** Cho dãy số (u_n): $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$. Hãy tìm số hạng u_k.

✓ **Cách 1.** *Tự luận:*

Tính lần lượt $u_2; u_3; \ldots; u_k$ bằng cách thế u_1 vào u_2, thế u_2 vào u_3, …, thế u_{k-1} vào u_{k+1}.

✓ **Cách 2.** *Dùng máy tính:* Cách lập quy trình bấm máy:

» Nhập giá trị của số hạng u_1: $a = \longrightarrow$ ANS

» Nhập biểu thức của $u_{n+1} = f(u_n)$

» Lặp dấu $=$ lần thứ $\boxed{k-1}$ cho ra giá trị của số hạng u_k.

⁂ **Bài toán 3:** Cho dãy số (u_n): $\begin{cases} u_1 = a, u_2 = b \\ u_{n+2} = c.u_{n+1} + d.u_n + e \end{cases}$. Hãy tìm số hạng u_k.

✓ **Cách 1.** *Tự luận:*

Tính lần lượt $u_2; u_3; \ldots; u_k$ bằng cách thế u_1 vào u_2, thế u_2 vào u_3, …, thế u_{k-1} vào u_{k+1}.

✓ **Cách 2.** *Dùng máy tính:* Cách lập quy trình bấm máy:

$\boxed{\text{A}}$: *chứa giá trị của* u_n

$\boxed{\text{B}}$: *chứa giá trị của* u_{n+1}

$\boxed{\text{C}}$: *chứa giá trị của* u_{n+2}

» Nhập $\boxed{C = c.B + d.A + e : A = B : B = C}$
» Bấm = rồi cho $B = b$, ấn =, nhập $A = a$ ấn =
» Lặp dấu = cho đến khi xuất hiện lần thứ $k-2$ giá trị của C thì đó chính là giá trị của số hạng u_k.

⁂ **Bài toán 4:** Cho dãy số (u_n): $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = f\left(\{n, u_n\}\right) \end{cases}$. Trong đó $f\left(\{n, u_n\}\right)$ là kí hiệu của biểu thức u_{n+1} tính theo u_n và n. Hãy tìm số hạng u_k.

✓ **Cách 1.** *Tự luận:*

Tính lần lượt $u_2; u_3; ...; u_k$ bằng cách thế $\{1, u_1\}$ vào u_2; thế $\{2, u_2\}$ vào u_3; …; thế $\{k-1, u_{k-1}\}$ vào u_k.

✓ **Cách 2.** *Dùng máy tính:* Cách lập quy trình bấm máy:

$\boxed{\text{A}}$: *chứa giá trị của* n

$\boxed{\text{B}}$: *chứa giá trị của* u_n

$\boxed{\text{C}}$: *chứa giá trị của* u_{n+1}

Lập công thức tính u_{n+1}

» Gán $A = \boxed{A} + 1$; $\boxed{B} := \boxed{C}$ để tính số hạng tiếp theo của dãy
» Lặp dấu = cho đến khi xuất hiện lần thứ $k-1$ giá trị của C thì đó chính là giá trị của số hạng u_k.

Ví dụ 1.1.

(1) Xét dãy số gồm tất cả các số tự nhiên chia cho 5 dư 1 theo thứ tự tăng dần. Xác định số hạng tổng quát của dãy số.

(2) Viết dãy số hữu hạn gồm năm số hạng đầu của dãy số trong câu a. Xác định số hạng đầu và số hạng cuối của dãy số hữu hạn này.

Lời giải

(1) Xét dãy số gồm tất cả các số tự nhiên chia cho 5 dư 1 theo thứ tự tăng dần. Xác định số hạng tổng quát của dãy số.

Số hạng tổng quát của dãy số $u_n = 5n + 1 \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$

(2) Viết dãy số hữu hạn gồm năm số hạng đầu của dãy số trong câu a. Xác định số hạng đầu và số hạng cuối của dãy số hữu hạn này.

dãy số hữu hạn gồm năm số hạng đầu: $6;\ 11;\ 16;\ 21;\ 26$

Số hạng đầu của dãy số này là 6, số hạng cuối là 26

Ví dụ 1.2.

(1) Viết năm số hạng đầu của dãy số (u_n) với số hạng tổng quát $u_n = n!$.

(2) Viết năm số hạng đầu của dãy số Fibonacci (F_n) cho bởi hệ thức truy hồi

$$\begin{cases} F_1 = 1, F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 3) \end{cases}$$

Lời giải

(1) Viết năm số hạng đầu của dãy số (u_n) với số hạng tổng quát $u_n = n!$.

Năm số hạng đầu của dãy: $1, 2, 6, 24, 120$

(2) Viết năm số hạng đầu của dãy số Fibonacci (F_n) cho bởi hệ thức truy hồi $\begin{cases} F_1 = 1, F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 3) \end{cases}$

$F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 1 + 1 = 2, F_4 = 2 + 1 = 3, F_5 = 3 + 2 = 5$

Ví dụ 1.3.

Viết năm số hạng đầu và số hạng thứ 100 của các dãy số (u_n) có số hạng tổng quát cho bởi:

(1) $u_n = 3n - 2$ (2) $u_n = 3 \cdot 2^n$ (3) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Lời giải

(1) $u_n = 3n - 2$

$u_1 = 1, u_2 = 4, u_3 = 7, u_4 = 10, u_5 = 13, u_{100} = 298$

(2) $u_n = 3 \cdot 2^n$

$u_1 = 6, u_2 = 12, u_3 = 24, u_4 = 48, u_5 = 96, u_{100} = 3.803 \times 10^{30}$

(3) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$u_1 = 2, u_2 = \frac{9}{4}, u_3 = \frac{64}{27}, u_4 = \frac{625}{256}, u_5 = 2.48832, u_{100} = 2.7148$

Ví dụ 1.4.

Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$. Tìm số hạng u_6.

Lời giải

✓ **Cách 1:** Giải theo tự luận:

Thế trực tiếp: $u_6 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^6 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^6\right] = 8$.

✓ **Cách 2:** Dùng máy tính cầm tay:

» Nhập: $\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x\right]$

» Bấm $\boxed{\text{CALC}}$ nhập $X=6$

» Máy hiện: 8

Ví dụ 1.5.

Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n=\frac{2n+1}{n+2}$. Số $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ mấy?

Lời giải

✓ **Cách 1:** Giải theo tự luận:

Giả sử $u_n=\frac{167}{84}\Leftrightarrow\frac{2n+1}{n+2}=\frac{167}{84}\Leftrightarrow 84(2n+1)=167(n+2)\Leftrightarrow n=250$.

Vậy $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ 250 của dãy số (u_n).

✓ **Cách 2:** Dùng máy tính cầm tay:

» Nhập: $\frac{2X+1}{X+2}$

» Bấm $\boxed{\text{CALC}}$ nhập $X=250$

» Máy hiện: $\frac{167}{84}$

Ví dụ 1.6.

Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}=\frac{u_n+2}{u_n+1} \end{cases}$. Tìm số hạng u_{10}.

Lời giải

✓ **Cách 1:** Giải theo tự luận:

$$u_2=\frac{u_1+2}{u_1+1}=\frac{1+2}{1+1}=\frac{3}{2}\;;\; u_3=\frac{u_2+2}{u_2+1}=\frac{\frac{3}{2}+2}{\frac{3}{2}+1}=\frac{7}{5}\;;\; u_4=\frac{u_3+2}{u_3+1}=\frac{\frac{7}{5}+2}{\frac{7}{5}+1}=\frac{17}{12}\;;$$

$$u_5=\frac{u_4+2}{u_4+1}=\frac{\frac{17}{12}+2}{\frac{17}{12}+1}=\frac{41}{29}\;;\; u_6=\frac{u_5+2}{u_5+1}=\frac{\frac{41}{29}+2}{\frac{41}{29}+1}=\frac{99}{70}\;;\; u_7=\frac{u_6+2}{u_6+1}=\frac{\frac{99}{70}+2}{\frac{99}{70}+1}=\frac{239}{169}$$

$$u_8=\frac{u_7+2}{u_7+1}=\frac{\frac{239}{169}+2}{\frac{239}{169}+1}=\frac{577}{408}\;;\; u_9=\frac{u_8+2}{u_8+1}=\frac{\frac{577}{408}+2}{\frac{577}{408}+1}=\frac{1393}{985}\;;\; u_{10}=\frac{u_9+2}{u_9+1}=\frac{\frac{1393}{985}+2}{\frac{1393}{985}+1}=\frac{3363}{2378}$$

✓ **Cách 2:** Dùng máy tính cầm tay:

Lập quy trình bấm máy:

» Nhập: 1 $\boxed{=}$ (u_1)

» Nhập $\dfrac{\boxed{\text{ANS}}+2}{\boxed{\text{ANS}}+1}$

» Lặp dấu $\boxed{=}$ ta được giá trị số hạng $u_{10}=\dfrac{3363}{2378}$.

Ví dụ 1.7.

Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1=1;u_2=2 \\ u_{n+2}=2u_{n+1}+3u_n+5 \end{cases}$. Tìm số hạng u_8.

Lời giải

✓ **Cách 1:** Giải theo tự luận:

$u_3=2u_2+3u_1+5=12$; $u_4=2u_3+3u_2+5=35$; $u_5=2u_4+3u_3+5=111$;

$u_6=2u_5+3u_4+5=332$; $u_7=2u_6+3u_5+5=1002$; $u_8=2u_7+3u_6+5=3005$

✓ **Cách 2:** Dùng máy tính cầm tay:

$\boxed{\text{A}}$ *: chứa giá trị của* u_n

$\boxed{\text{B}}$ *: chứa giá trị của* u_{n+1}

$\boxed{\text{C}}$ *: chứa giá trị của* u_{n+2}

Lập quy trình bấm máy:

» Nhập: $\text{C}=2\text{B}+3\text{A}+5:\text{A}=\text{B}:\text{B}=\text{C}$

» Bấm $\boxed{\textbf{CALC}}$ nhập $\text{B}=2$, ấn $\boxed{=}$, nhập $\text{A}=1$ ấn $\boxed{=}$

» Lặp dấu $\boxed{=}$ cho đến khi giá trị của C xuất hiện lần thứ 6 thì đó là giá trị của số hạng u_8 bằng 3005.

Ví dụ 1.8.

Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1=0 \\ u_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}(u_n+1) \end{cases}$. Tìm số hạng u_{11}.

Lời giải

✓ **Cách 1:** Giải theo tự luận:

$u_2=\dfrac{1}{2}(u_1+1)=\dfrac{1}{2}$; $u_3=\dfrac{2}{3}(u_2+1)=1$; $u_4=\dfrac{3}{4}(u_3+1)=\dfrac{3}{2}$; $u_5=\dfrac{4}{5}(u_4+1)=2$;

$u_6=\dfrac{5}{6}(u_5+1)=\dfrac{5}{2}$; $u_7=\dfrac{6}{7}(u_6+1)=3$; $u_8=\dfrac{7}{8}(u_7+1)=\dfrac{7}{2}$; $u_9=\dfrac{8}{9}(u_8+1)=4$

$u_{10}=\dfrac{9}{10}(u_9+1)=\dfrac{9}{2}$; $u_{11}=\dfrac{10}{11}(u_{10}+1)=5$

✓ **Cách 2:** Dùng máy tính cầm tay:

$\boxed{\text{A}}$ *: chứa giá trị của* n

$\boxed{\text{B}}$ *: chứa giá trị của* u_n

$\boxed{\text{C}}$ *: chứa giá trị của* u_{n+1}

Lập quy trình bấm máy:

» Nhập: $C=\frac{A}{A+1}(B+1):A=A+1:B=C$

» Bấm $\boxed{\textbf{CALC}}$ nhập $A=1$ ấn =, nhập $B=0$ ấn =

» Lặp dấu = cho đến khi giá trị của C xuất hiện lần thứ 10 thì đó là giá trị của số hạng u_{11} bằng 5.

Dạng 2. Tính tăng - giảm của dãy số

Phương pháp

- Dãy số (u_n) được gọi là ***dãy số tăng*** nếu ta có $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là ***dãy số giảm*** nếu ta có $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Cách 1: Xét hiệu $\boxed{u_{n+1} - u_n}$

- Nếu $u_{n+1} - u_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $u_{n+1} - u_n < 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Cách 2: Khi $u_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ ta xét tỉ số $\boxed{\dfrac{u_{n+1}}{u_n}}$

- Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Tính chất:

(1) Nếu $\begin{cases}(u_n)\uparrow \\ (v_n)\uparrow\end{cases}$ thì dãy số $(u_n + v_n)\uparrow$

(2) Nếu $\begin{cases}(u_n)\downarrow \\ (v_n)\downarrow\end{cases}$ thì dãy số $(u_n + v_n)\downarrow$

(3) Nếu $\begin{cases}(u_n)\uparrow; u_n \ge 0\ \forall n \in \mathbb{N}^* \\ (v_n)\uparrow; v_n \ge 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*\end{cases}$ thì dãy số $(u_n.v_n)\uparrow$

(4) Nếu $\begin{cases}(u_n)\downarrow; u_n \ge 0\ \forall n \in \mathbb{N}^* \\ (v_n)\downarrow; v_n \ge 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*\end{cases}$ thì dãy số $(u_n.v_n)\downarrow$

(5) Nếu $(u_n)\uparrow$ và $u_n \ge 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số $(\sqrt{u_n})\uparrow$ và dãy số $((u_n)^m)\uparrow\ \forall m \in \mathbb{N}^*$

(6) Nếu $(u_n)\downarrow$ và $u_n \ge 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số $(\sqrt{u_n})\downarrow$ và dãy số $((u_n)^m)\downarrow\ \forall m \in \mathbb{N}^*$

(7) Nếu $(u_n)\uparrow$ và $u_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)\downarrow$

(8) Nếu $(u_n)\downarrow$ và $u_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)\uparrow$

Một vài kết quả về dạng toán tăng - giảm dãy số:

(1)	Dãy số (u_n) có $u_n = an + b$	Tăng khi $a > 0$ Giảm khi $a < 0$
(2)	Dãy số (u_n) có $u_n = q^n$	Tăng khi $q > 1$ Giảm khi $0 < q < 1$ Không tăng, không giảm khi $q < 0$

(3)	Dãy số (u_n) có $u_n=\dfrac{an+b}{cn+d}$ với điều kiện $cn+d>0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$	◎ Tăng khi $ad-bc>0$ ◎ Giảm khi $ad-bc<0$
(4)	Dãy số ***đan dấu*** cũng là dãy số không tăng, không giảm	
(5)	Nếu dãy số (u_n) tăng hoặc giảm thì dãy số $(q^n.u_n)$ không tăng, không giảm	
(6)	Dãy số (u_n) có $u_{n+1}=au_n+b$	◎ Tăng nếu $\begin{cases}a>0\\u_2-u_1>0\end{cases}$ ◎ Giảm nếu $\begin{cases}a>0\\u_2-u_1<0\end{cases}$ ◎ Không tăng không giảm nếu $a<0$
(7)	Dãy số (u_n) có $\begin{cases}u_{n+1}=\dfrac{au_n+b}{cu_n+d}\\c,d>0,u_n>0\ \forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$	◎ Tăng nếu $\begin{cases}ad-bc>0\\u_2-u_1>0\end{cases}$ ◎ Giảm nếu $\begin{cases}ad-bc>0\\u_2-u_1<0\end{cases}$
(8)	Dãy số (u_n) có $\begin{cases}u_{n+1}=\dfrac{au_n+b}{cu_n+d}\\c,d>0,u_n>0\ \forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$	không tăng không giảm nếu $ad-bc<0$

Ví dụ 2.1.

Xét tính đơn điệu của dãy số (u_n) biết

(1) $u_n=3n+6$.

(2) $u_n=\dfrac{n+5}{n+2}$

Lời giải

(1) $u_n=3n+6$.

Ta có $u_n=3n+6\Rightarrow u_{n+1}=3(n+1)+6=3n+9$

Xét hiệu $u_{n+1}-u_n=(3n+9)-(3n+6)=3>0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Vậy (u_n) là dãy số tăng

✓ **Giải nhanh:** Dãy này có dạng $u_n=an+b$; a $=3>0$ nên dãy số tăng

(2) $u_n=\dfrac{n+5}{n+2}$

Ta có $u_n=\dfrac{n+5}{n+2}=1+\dfrac{3}{n+2}\Rightarrow u_{n+1}=1+\dfrac{3}{n+3}$

Xét hiệu $u_{n+1}-u_n=\dfrac{3}{n+3}-\dfrac{3}{n+2}=\dfrac{-3}{(n+2)(n+3)}<0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Vậy (u_n) là dãy số giảm

✓ **Giải nhanh:** Dãy này có dạng $u_n=\dfrac{an+b}{cn+d}$; $\begin{cases}n+2>0\ \forall n\in\mathbb{N}^*\\ad-bc=-3<0\end{cases}$ nên (u_n) là dãy giảm

Ví dụ 2.2.

Xét tính tăng giảm của các dãy số sau:

(1) Dãy số (u_n) với $u_n = 2n^3 - 5n + 1$.

(2) Dãy số (u_n) với $u_n = 3^n - n$.

(3) Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$.

(4) Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2^n}$.

Lời giải

(1) Dãy số (u_n) với $u_n = 2n^3 - 5n + 1$.

Với mỗi $n \in N^*$, ta có: $u_{n+1} - u_n = \left[2(n+1)^3 - 5(n+1) + 1\right] - \left(2n^3 - 5n + 1\right)$

$= 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 5n - 5 - 1 - 2n^3 + 5n - 1$

$= 6n^2 + 6n - 3 = 6n^2 + 3n + (3n-3) > 0$ (đúng) do $n \geq 1$.

Vì thế dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

(2) Dãy số (u_n) với $u_n = 3^n - n$.

Với mỗi $n \in N^*$, ta có: $u_{n+1} - u_n = \left[3^{n+1} - (n+1)\right] - \left(3^n - n\right)$.

$= 3.3^n - n - 1 - 3^n + n$

$= 2.3^n + 3^n - 3^n - 1 = 2.3^n - 1 > 0$ (đúng) (vì $n \geq 1$.)

Kết luận dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

(3) Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$.

Với mỗi $n \in N^*$, ta có:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{(n+1)^2+1} - \frac{n}{n^2+1} = \frac{(n+1)(n^2+1) - n\left[(n+1)^2+1\right]}{\left[(n+1)^2+1\right](n^2+1)}$$

$$= \frac{n^3 + n + n^2 + 1 - (n^3 + 2n^2 + 2n)}{\left[(n+1)^2+1\right](n^2+1)} = \frac{-n^2 - n + 1}{\left[(n+1)^2+1\right](n^2+1)} < 0.$$

Vì $-n^2 - n + 1 < 0 \quad \forall n \geq 1$, và $\left[(n+1)^2+1\right](n^2+1) > 0 \quad \forall n \geq 1$.

Kết luận: dãy số (u_n) là một dãy số giảm.

(4) Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2^n}$.

Dễ thấy $u_n > 0 \quad \forall n \in N^*$. Xét tỉ số: $\dfrac{u_n}{u_{n+1}}$

Ta có: $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \dfrac{\sqrt{n}}{2^n} . \dfrac{2^{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} > 1 \quad (\forall n \geq 1)$

Thật vậy: $\dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{4n}{n+1} > 1 \Leftrightarrow 4n > n+1 \Leftrightarrow 3n > 1$ (đúng $\forall n \geq 1$)

Kết luận: (u_n) là một dãy số giảm.

Ví dụ 2.3.

Anh Thanh vừa được tuyển dụng vào một công ty công nghệ, được cam kết lương năm đầu sẽ là 200 triệu đồng và lương mỗi năm tiếp theo sẽ được tăng thêm 25 triệu đồng. Gọi s_n (triệu đồng) là lương vào năm thứ n mà anh Thanh làm việc cho công ty đó. Khi đó ta có: $s_1 = 200, s_n = s_{n-1} + 25; n \geq 2$.

(1) Tính lương của anh Thanh vào năm thứ 5 làm việc cho công ty..

(2) Chứng minh (s_n) là dãy số tăng. Giải thích ý nghĩa thực tế của kết quả này.

Lời giải

(1) Tính lương của anh Thanh vào năm thứ 5 làm việc cho công ty..

Số hạng tổng quát của dãy số là: $s_n = 200 + 25(n-1) = 175 + 25n$

Lương của anh Thanh vào năm thứ 5 làm việc cho công ty: $175 + 25.5 = 300$ (triệu đồng)

(2) Chứng minh (s_n) là dãy số tăng. Giải thích ý nghĩa thực tế của kết quả này.

Ta có: $s_{n+1} = 175 + 25(n+1) = 200 + 25n > s_n$ suy ra (s_n) là dãy số tăng

Ý nghĩa: Tiền lương của anh Thành sẽ được tăng dần hàng năm

Dạng 3. Tính bị chặn của dãy số

Phương pháp

- Dãy số (u_n) được gọi là ***bị chặn trên*** nếu tồn tại một số $M: u_n \le M,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$
- Dãy số (u_n) được gọi là ***bị chặn dưới*** nếu tồn tại một số $m: u_n \ge m,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$
- Dãy số (u_n) được gọi là ***bị chặn*** nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới.

  Tức là tồn tại các số $m,\ M: m \le u_n \le M,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

✓ **Phương pháp:** Chứng minh trực tiếp bằng các phương pháp chứng minh bất đẳng thức

Cách 1: Dãy số (u_n) có $u_n = f(n)$ là hàm số đơn giản.

◎ Ta chứng minh trực tiếp bất đẳng thức $\left[\begin{array}{l} u_n = f(n) \le M, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ u_n = f(n) \ge m, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array}\right.$

Cách 2: Dãy số (u_n) có $u_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_k + \ldots + v_n$

◎ Ta làm trội $v_k \le a_k - a_{k+1}$

◎ Lúc đó $u_n \le (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots (a_n - a_{n+1})$. Suy ra $u_n \le a_1 - a_{n+1} \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Cách 3: Dãy số (u_n) có $u_n = v_1.v_2v_3\ldots v_n$ với $v_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

◎ Ta làm trội $v_k \le \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$

◎ Lúc đó $u_n \le \dfrac{a_2}{a_1}.\dfrac{a_3}{a_2}\ldots\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. Suy ra $u_n \le \dfrac{a_{n+1}}{a_1} \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*$

» **Chú ý:** *Nếu dãy số (u_n) giảm thì bị chặn trên, dãy số (u_n) tăng thì bị chặn dưới*

Một vài kết quả về dạng toán dãy số bị chặn:

(1) Dãy số (u_n) có $u_n = q^n \quad (|q| \le 1)$ bị chặn

(2) Dãy số (u_n) có $u_n = q^n \quad (q < -1)$ không bị chặn

(3) Dãy số (u_n) có $u_n = q^n$ với $q > 1$ bị chặn dưới

(4) Dãy số (u_n) có $u_n = an + b$ bị chặn dưới nếu $a > 0$ và bị chặn trên nếu $a < 0$

(5) Dãy số (u_n) có $u_n = an^2 + bn + c$ bị chặn dưới nếu $a > 0$ và bị chặn trên nếu $a < 0$

(6) Dãy số (u_n) có $u_n = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + .. + a_1 n + a_0$ bị chặn dưới nếu $a_m > 0$, bị chặn trên nếu $a_m < 0$

(7) Dãy số (u_n) có $u_n = q^n\left(a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \ldots + a_1 n + a_0\right)$ với $a_m \ne 0$ và $q < -1$ không bị chặn

(8) Dãy số (u_n) có $u_n = \sqrt{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \ldots + a_1 n + a_0}$ bị chặn dưới với $a_m > 0$

(9) Dãy số (u_n) có $u_n = \sqrt[3]{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \ldots + a_1 n + a_0}$ bị chặn dưới nếu $a_m > 0$, bị chặn trên nếu $a_m < 0$

(10) Dãy số (u_n) có $u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ trong đó $P(n)$ và $Q(n)$ là các đa thức, bị chặn nếu bậc của $P(n)$ nhỏ hơn hoặc bằng bậc của $Q(n)$

(11) Dãy số (u_n) có $u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ trong đó $P(n)$ và $Q(n)$ là các đa thức, bị chặn dưới hoặc bị chặn trên nếu bậc của $P(n)$ lớn hơn bậc của $Q(n)$

Ví dụ 3.1.

Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) biết

(1) $u_n = \dfrac{-1}{2n+3}$.

(2) $u_n = \dfrac{n+5}{n+2}$

Lời giải

(1) $u_n = \dfrac{-1}{2n+3}$.

Ta có $2n+3 \ge 5, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{2n+3} \le \dfrac{1}{5} \Rightarrow -\dfrac{1}{5} \le \dfrac{-1}{2n+3} < 0 \Rightarrow -\dfrac{1}{5} \le u_n < 0$

Suy ra dãy số (u_n) bị chặn

✓ **Giải nhanh:** dãy số (u_n) có u_n có bậc của tử thấp hơn bậc của mẫu nên bị chặn

(2) $u_n = \dfrac{4n+5}{n+1}$

Ta có $u_n = \dfrac{4n+5}{n+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$u_n = \dfrac{4n+5}{n+1} = \dfrac{4(n+1)+1}{n+1} = 4 + \dfrac{1}{n+1} \le 4 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{9}{2} \Rightarrow u_n \le \dfrac{9}{2} \Rightarrow 0 < u_n \le \dfrac{9}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy dãy số (u_n) bị chặn

✓ **Giải nhanh:** dãy số (u_n) có u_n có bậc của tử bằng bậc của mẫu nên bị chặn

Ví dụ 2.2.

Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

(1) $u_n = \dfrac{1}{2n^2-1}$

(2) $u_n = 3.\cos\dfrac{nx}{3}$

(3) $u_n = 2n^3+1$

(4) $u_n = \dfrac{n^2+2n}{n^2+n+1}$

Lời giải

(1) $u_n = \dfrac{1}{2n^2-1}$

$u_n = \dfrac{1}{2n^2-1}$ Có $2n^2-1 \ge 1 \Rightarrow u_n = \dfrac{1}{2n^2-1} \le 1,\ \forall n \ge 1$. Vậy dãy số bị chặn trên bởi 1.

(2) $u_n = 3.\cos\dfrac{nx}{3}$

$u_n = 3.\cos\dfrac{nx}{3}$ có $-1 \le \cos\dfrac{nx}{3} \le 1 \Rightarrow -3 \le 3.\cos\dfrac{nx}{3} \le 3$.

Vậy dãy số bị chặn dưới bởi -3; chặn trên bởi 3.

(3) $u_n = 2n^3 + 1$

$u_n = 2n^3 + 1$ có $2n^3 + 1 \ge 3, \quad \forall n \ge 1$. Vậy dãy số bị chặn dưới bởi 3.

(4) $u_n = \dfrac{n^2 + 2n}{n^2 + n + 1}$

$u_n = \dfrac{n^2 + 2n}{n^2 + n + 1}$ có $u_n = \dfrac{n^2 + 2n}{n^2 + n + 1} = 1 + \dfrac{n-1}{n^2 + n + 1} \ge 1, \ \forall n \ge 1$.

Vậy dãy số bị chặn dưới bởi 1.

Ví dụ 3.3.

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 0$ và $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 4, \ \forall n \ge 1$.

(1) Chứng minh dãy (u_n) bị chặn trên bởi số 8.

(2) Chứng minh dãy (u_n) tăng, từ đó suy ra dãy (u_n) bị chặn.

Lời giải

(1) Chứng minh dãy (u_n) bị chặn trên bởi số 8.

Ta chứng minh $u_n \le 8$ với mọi $n \ge 1$.

Khi $n = 1$, ta có $u_1 = 0 < 8$.

Giả sử $u_n \le 8$ với $n = k \ge 1$, tức là $u_k \le 8$. Ta cần chứng minh $u_{k+1} \le 8$.

Thật vậy, $u_{k+1} = \dfrac{1}{2}u_k + 4 \le \dfrac{1}{2} \cdot 8 + 4 \le 8$.

Vậy $u_n \le 8$, với mọi $n \ge 1$ hay (u_n) bị chặn trên bởi 8.

(2) Chứng minh dãy (u_n) tăng, từ đó suy ra dãy (u_n) bị chặn.

Với mọi $n \ge 1$, ta có $u_{n+1} - u_n = 4 - \dfrac{1}{2}u_n$. Mà $u_n \le 8$ nên $u_{n+1} - u_n \ge 0$.

Suy ra u_n là dãy số tăng. Do đó (u_n) bị chặn dưới bởi $u_1 = 0$.

Kết hợp với câu (1), ta được dãy số (u_n) bị chặn.

Ví dụ 3.4.

Cho dãy số (u_n) với $u_n = n^2 - 4n + 3$.

(1) Viết công thức truy hồi của dãy số.

(2) Chứng minh dãy số bị chặn dưới.

(3) Tính tổng n số hạng đầu của dãy số đã cho.

Lời giải

(1) Viết công thức truy hồi của dãy số.

Ta có: $u_1 = 1^2 - 4.1 + 3 = 0$.

Xét hiệu: $u_{n+1} - u_n = \left[(n+1)^2 - 4(n+1) + 3\right] - (n^2 - 4n + 3) = 2n - 3 \Rightarrow u_{n+1} = u_n + 2n - 3$.

Vậy công thức truy hồi: $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 2n - 3 \end{cases} \quad \forall n \geq 1.$

(2) Chứng minh dãy số bị chặn dưới.

Ta có: $u_n = n^2 - 4n + 4 - 1 = (n-2)^2 - 1 \geq -1 \quad \forall n \geq 1.$

Vậy dãy số bị chặn dưới, nhưng không bị chặn trên.

(3) Tính tổng n số hạng đầu của dãy số đã cho.

Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = 1^2 - 4.1 + 3 \\ u_2 = 2^2 - 4.2 + 3 \\ u_3 = 3^2 - 4.2 + 3 \\ \ldots \\ u_n = n^2 - 4.n + 3 \end{array}\right\} +$$

$$S_n = \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2\right) - 4\left(1 + 2 + 3 + \ldots + n\right) + 3n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + 3n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) - 12n(n+1) + 18n}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n-11) + 18n}{6}$$

Chương 02

Bài 1. DÃY SỐ

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Cho dãy số có các số hạng đầu là: $\frac{1}{3};\frac{1}{3^2};\frac{1}{3^3};\frac{1}{3^4};\frac{1}{3^5};...$ Số hạng tổng quát của dãy số này là?

A. $u_n=\frac{1}{3}.\frac{1}{3^{n+1}}$. **B.** $u_n=\frac{1}{3^{n+1}}$. **C.** $u_n=\frac{1}{3^n}$. **D.** $u_n=\frac{1}{3^{n-1}}$.

Lời giải

Chọn C

Từ các số hạng đầu tiên của dãy số ta dự đoán $u_n=\frac{1}{3^n}, n\in\mathbb{N}^*$

» Câu 2. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases}u_1=2\\u_{n+1}-u_n=2n-1\end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n=2+(n-1)^2$. **B.** $u_n=2+n^2$. **C.** $u_n=2+(n+1)^2$. **D.** $u_n=2-(n-1)^2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\begin{cases}u_1=2\\u_2=u_1+1\\u_3=u_2+3\\...\\u_n=u_{n-1}+2n-3\end{cases}$. Cộng hai vế ta được $u_n=2+1+3+5+...+(2n-3)=2+(n-1)^2$

» Câu 3. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases}u_1=-2\\u_{n+1}=-2-\frac{1}{u_n}\end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n=-\frac{n-1}{n}$. **B.** $u_n=\frac{n+1}{n}$. **C.** $u_n=-\frac{n+1}{n}$. **D.** $u_n=-\frac{n}{n+1}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $u_1=-\frac{3}{2};u_2=-\frac{4}{3};u_3=-\frac{5}{4};...$ Dễ dàng dự đoán được $u_n=-\frac{n+1}{n}$.

» Câu 4. Cho dãy số (u_n), biết $u_n=\frac{n}{2^n}$. Chọn đáp án đúng.

A. $u_4=\frac{1}{4}$. **B.** $u_5=\frac{1}{16}$. **C.** $u_5=\frac{1}{32}$. **D.** $u_3=\frac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $u_4 = \frac{4}{2^4} = \frac{1}{4}$

» Câu 5. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \frac{2n+5}{5n-4}$. Số $\frac{7}{12}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. 6. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Ta có $u_n = \frac{7}{12} \Leftrightarrow \frac{2n+5}{5n-4} = \frac{7}{12} \left(n \in \mathbb{N}^*\right) \Leftrightarrow 24n + 60 = 35n - 28 \Leftrightarrow 11n = 88 \Leftrightarrow n = 8$

» Câu 6. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \frac{n-1}{n^2+1}$. Số $\frac{2}{13}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. Thứ 3. **B.** Thứ tư. **C.** Thứ năm. **D.** Thứ 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_n = \frac{2}{13} \Leftrightarrow \frac{n-1}{n^2+1} = \frac{2}{13} \left(n \in \mathbb{N}^*\right) \Leftrightarrow 13n - 13 = 2n^2 + 2 \Leftrightarrow 2n^2 - 13n + 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 5\ (n) \\ n = \frac{3}{2}\ (l) \end{array}\right.$

» Câu 7. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = n^3 - 8n^2 - 5n + 7$. Số -33 là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. 5. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_n = -33 \Leftrightarrow n^3 - 8n^2 - 5n + 7 = -33 \left(n \in \mathbb{N}^*\right) \Leftrightarrow n^3 - 8n^2 - 5n + 40 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 8\ (n) \\ n = \pm\sqrt{5}\ (l) \end{array}\right.$

» Câu 8. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n^2+3n+7}{n+1}$. Hỏi dãy số trên có bao nhiêu số hạng nhận giá trị nguyên.

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** Không có.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_n = \frac{n^2+3n+7}{n+1} = n + 2 + \frac{5}{n+1} \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$

Để u_n nhận giá trị nguyên thì $\frac{5}{n+1}\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ là số nguyên hay $n = 4$

Vậy dãy số (u_n) chỉ có một số hạng nhận giá trị nguyên.

» Câu 9. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2^n$. Tìm số hạng u_{n+1}.

A. $u_{n+1} = 2^n.2$. **B.** $u_{n+1} = 2^n + 1$. **C.** $u_{n+1} = 2(n+1)$. **D.** $u_{n+1} = 2^n + 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $u_{n+1} = 2^{n+1} = 2.2^n$

» Câu 10. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 3^n$. Số hạng u_{n+1} bằng:

A. 3^n+1. **B.** 3^n+3. **C.** $3^n.3$. **D.** $3(n+1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_{n+1}=3^{n+1}=3^n.3$

» Câu 11. Cho dãy số (u_n) với $u_n=3^n$. Số hạng u_{2n} bằng:

A. 3^n+3. **B.** 9^n. **C.** $3^n.3$. **D.** 4^{2n}.

Lời giải

Chọn B

Ta có $u_{2n}=3^{2n}=9^n$

» Câu 12. Cho dãy số (u_n) với $u_n=5^{n+1}$. Tìm số hạng u_{n-1}.

A. $u_{n-1}=5^{n-1}$. **B.** $u_{n-1}=5^n$. **C.** $u_{n-1}=5.5^{n+1}$. **D.** $u_{n-1}=5.5^{n-1}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $u_{n-1}=5^{(n-1)+1}=5^n$

» Câu 13. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1=2 \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{3}(u_n+1) \end{cases}$. Tìm số hạng u_4.

A. $u_4=\dfrac{5}{9}$. **B.** $u_4=1$. **C.** $u_4=\dfrac{2}{3}$. **D.** $u_4=\dfrac{14}{27}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $u_2=\dfrac{1}{3}(2+1)=1$, $u_3=\dfrac{1}{3}(1+1)=\dfrac{2}{3}$, $u_4=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}+1\right)=\dfrac{5}{9}$

» Câu 14. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1=3 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n}{2}+2 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $u_2=\dfrac{5}{2}$. **B.** $u_3=\dfrac{15}{4}$. **C.** $u_4=\dfrac{31}{8}$. **D.** $u_5=\dfrac{63}{16}$.

Lời giải

Chọn A

Vì $u_2=\dfrac{3}{2}+2=\dfrac{7}{2}$

» Câu 15. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1=3 \\ u_{n+1}=u_n+5 \end{cases}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó là

A. $-3;6;9$. **B.** $3;-2;-7$. **C.** $3;8;13$. **D.** $3;5;7$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_1=3$, $u_2=3+5=8$, $u_3=8+5=13$

» Câu 16. Cho dãy số (u_n), biết công thức số hạng tổng quát $u_n=2n-3$. Số hạng thứ 10 của dãy số bằng:

A. 17 **B.** 20 **C.** 10 **D.** 7

Lời giải

Chọn A

$u_n = 2n - 3 \to\Rightarrow u_{10} = 2.10 - 3 = 17$

» **Câu 17.** Cho dãy số (u_n) có công thức số hạng tổng quát $u_n = 8 - 3n$. Tính u_4.

A. 2. **B.** -7. **C.** -5. **D.** -4.

Lời giải

Chọn D

$u_4 = 8 - 3.4 = -4.$

» **Câu 18.** Cho dãy số $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$. Tìm số hạng thứ 5 của dãy số.

A. 16. **B.** 12. **C.** 15. **D.** 14.

Lời giải

Chọn D

Ta có $u_2 = u_1 + 1 = 5$; $u_3 = u_2 + 2 = 7$; $u_4 = u_3 + 3 = 10$.

Do đó số hạng thứ 5 của dãy số là $u_5 = u_4 + 4 = 14$.

$= u_{218} - u_1 \Rightarrow u_{218} = S_{217} + u_1 = 23653$.

» **Câu 19.** Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \dfrac{10}{3^n}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** Dãy số vừa tăng vừa giảm

Lời giải

Chọn B

Ta có $u_{n+1} - u_n = \dfrac{10}{3^{n+1}} - \dfrac{10}{3^n} = \dfrac{10}{3.3^n} - \dfrac{10}{3^n} = \dfrac{-20}{3.3^n} < 0$

Vậy $u_{n+1} - u_n < 0 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

» **Câu 20.** Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào tăng?

A. $u_n = \dfrac{1}{3^n}$. **B.** $u_n = \dfrac{1}{2n+1}$. **C.** $u_n = \dfrac{n+1}{3n+2}$. **D.** $u_n = \dfrac{4n-2}{n+3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{3^{n+1}} - \dfrac{1}{3^n} = \dfrac{1}{3.3^n} - \dfrac{1}{3^n} = \dfrac{-2}{3.3^n} < 0 \ \to$ loại A

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2(n+1)+1} - \dfrac{1}{2n+1} = \dfrac{1}{2n+3} - \dfrac{1}{2n+1} = \dfrac{-2}{(2n+3)(2n+1)} < 0 \ \to$ loại B

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+2}{3n+5} - \dfrac{n+1}{3n+2} = -\dfrac{1}{(3n+5)(3n+2)} < 0 \ \to$ loại C

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{4n+2}{n+4} - \dfrac{4n-2}{n+3} = \dfrac{14}{(n+4)(n+3)} > 0$

» **Câu 21.** Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào giảm?

A. $u_n=\left(\frac{4}{3}\right)^n$. **B.** $u_n=(-1)^n(5^n-1)$. **C.** $u_n=-3^n$. **D.** $u_n=\sqrt{n+4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$u_{n+1}-u_n=\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}-\left(\frac{4}{3}\right)^n=\frac{4}{3}.\left(\frac{4}{3}\right)^n-\left(\frac{4}{3}\right)^n=\frac{1}{3}.\left(\frac{4}{3}\right)^n>0 \to$ loại A

Dãy (u_n) với $u_n=(-1)^n(5^n-1)$. có các số hạng đan dấu nên dãy không tăng, không giảm $\to$ loại B

$u_{n+1}-u_n=-3^{n+1}+3^n=-3.3^n+3^n=-2.3^n<0 \to$ Chọn C

$u_{n+1}-u_n=\sqrt{n+5}-\sqrt{n+4}=\frac{1}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n+4}}>0 \to$ loại D

» Câu 22. Cho dãy số (u_n) biết $u_n=5^n-4^n$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm
C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** Dãy số có số hạng thứ 100 bé hơn 1

Lời giải

Chọn A

Ta có $u_{n+1}-u_n=5^{n+1}-4^{n+1}-5^n+4^n=4\left(5^n-4^n\right)>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$

Vậy $u_{n+1}-u_n>0\Leftrightarrow u_{n+1}>u_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$

» Câu 23. Cho dãy số (u_n) biết $u_n=\frac{an+2}{3n+1}$. Tìm tất cả các giá trị của a để dãy số tăng.

A. $a=6$ **B.** $a>6$ **C.** $a<6$ **D.** $a\geq 6$

Lời giải

Chọn B

Ta có $u_{n+1}-u_n=\frac{an+a+2}{3n+4}-\frac{an+2}{3n+1}=\frac{a-6}{(3n+4)(3n+1)},\forall n\in\mathbb{N}^*$

Để dãy số tăng thì $u_{n+1}-u_n=\frac{a-6}{(3n+4)(3n+1)}>0,\forall n\in\mathbb{N}^*\Leftrightarrow a>6$

» Câu 24. Cho dãy số (u_n) biết $u_n=2^n-an$. Tìm tất cả các giá trị của a để dãy số tăng.

A. $a=2$ **B.** $a>2$ **C.** $a<2$ **D.** $a\geq 2$

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_{n+1}-u_n=2^{n+1}-an-a-2^n+an=2^n-\mathrm{a},\forall n\in\mathbb{N}^*$

Để dãy số tăng thì $u_{n+1}-u_n=2^n-\mathrm{a}>0,\forall n\in\mathbb{N}^*\Leftrightarrow a<2^n,\forall n\in\mathbb{N}^*\Leftrightarrow a<2,\forall n\in\mathbb{N}^*$

» Câu 25. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases}u_1=3\\ u_{n+1}=\frac{3u_n}{3+u_n}\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm
C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** Có $u_{10}=2$

Lời giải

Chọn B

Ta có $u_1 > u_2 > u_3$. Dự đoán dãy số đã cho giảm, ta chứng minh bằng quy nạp

Từ giả thiết thì $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Giả sử $u_k < u_{k-1}, k \geq 2$. Ta chứng minh $u_{k+1} < u_k$

Thật vậy: $u_{k+1} - u_k = \dfrac{3u_k}{3+u_k} - \dfrac{3u_{k-1}}{3+u_{k-1}} = \dfrac{9\left(u_k - u_{k-1}\right)}{\left(3+u_k\right)\left(3+u_{k-1}\right)} < 0 \Leftrightarrow u_{k+1} < u_k$. vậy dãy đã cho là dãy giảm

» **Câu 26.** Trong các dãy số sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n = \dfrac{2n+1}{n-1}$. **B.** $u_n = n^3 - 1$. **C.** $u_n = n^2$. **D.** $u_n = 2n$.

Lời giải

Chọn A

Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Ta có

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)+1}{(n+1)-1} - \frac{2n+1}{n-1} = \frac{2n+3}{n} - \frac{2n+1}{n-1}$$

$$= \frac{(2n+3)(n-1) - n(2n+1)}{n(n-1)} = \frac{(2n+3)(n-1) - n(2n+1)}{n(n-1)} = \frac{-3}{n(n-1)} < 0, \text{ với mọi } n \in \mathbb{N},\ n > 1.$$

Suy ra dãy số giảm.

» **Câu 27.** Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát (u_n) sau, dãy số nào bị chặn?

A. $u_n = n^2$. **B.** $u_n = 2^n$. **C.** $u_n = \dfrac{1}{n}$. **D.** $u_n = \sqrt{n+1}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $0 < u_n = \dfrac{1}{n} \leq 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy (u_n) bị chặn.

Nhận xét: Các dãy số n^2; 2^n; $n+1$ là các dãy tăng đến vô hạn khi n tăng lên vô hạn nên chúng không bị chặn trên.

» **Câu 28.** Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào bị chặn?

A. $u_n = \dfrac{1}{2^n}$. **B.** $u_n = 3^n$. **C.** $u_n = \sqrt{n+1}$. **D.** $u_n = n^2 + 1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $0 < u_n = \dfrac{1}{2^n} \leq \dfrac{1}{2}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy (u_n) bị chặn.

» **Câu 29.** Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n = 4 - 3n - n^2$

A. Bị chặn. **B.** Không bị chặn. **C.** Bị chặn trên. **D.** Bị chặn dưới.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $u_n = \dfrac{25}{4} - \left(n + \dfrac{3}{2}\right)^2 < \dfrac{25}{4} \Rightarrow (u_n)$ bị chặn trên; dãy (u_n) không bị chặn dưới.

» **Câu 30.** Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào bị chặn?

A. $u_n = n - \sin 3n$ **B.** $u_n = \dfrac{n^2+1}{n}$. **C.** $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. **D.** $u_n = n.\sin(3n-1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $0 < u_n = \dfrac{1}{n(n+1)} \le \dfrac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ Dãy (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ bị chặn

» Câu 31. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log^2 u_1 + \log u_1 - 6 = 0$ và $u_{n+1} = u_n + 5$, với mọi $n \ge 1, n \in N$. Giá trị lớn nhất của n để $u_n < 500$ bằng:

A. 80. **B.** 100. **C.** 99. **D.** 82.

Lời giải

Chọn B

+) $\log^2 u_1 + \log u_1 - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log u_1 = -3 \\ \log u_1 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u_1 = 0,001 \\ u_1 = 100 \end{array}\right.$

+) Từ giả thiết suy ra (u_n) là cấp số cộng có công sai $d = 5$. Do đó, ta có $u_n = u_1 + (n-1)d$.

+) Vậy $\left[\begin{array}{l} u_n = 0,001 + 5(n-1) = 5n - 4,999 \\ u_n = 100 + 5(n-1) = 5n + 95 \end{array}\right.$. Suy ra $u_n < 500 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n < 100,9998 \\ n < 81 \end{array}\right.$.

Vậy số n lớn nhất để $u_n < 500$ là 100.

» Câu 32. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = \dfrac{2}{3}$ và $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2(2n+1)u_n + 1}$, $(n \in \mathbb{N}^*)$. Tính tổng 2018 số hạng đầu tiên của dãy số đó?

A. $\dfrac{4036}{4035}$. **B.** $\dfrac{4035}{4034}$. **C.** $\dfrac{4038}{4037}$. **D.** $\dfrac{4036}{4037}$.

Lời giải

Chọn D

- Ta có: $\dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{2(2n+1)u_n + 1}{u_n} = \dfrac{1}{u_n} + 4n + 2 = \left(\dfrac{1}{u_{n-1}} + 4(n-1) + 2\right) + 4n + 2$

Tương tự ta được:

$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_1} + (4.1+2) + (4.2+2) + ... + (4n+2) = \frac{3}{2} + 2n + 2n(n+1) = \frac{4n^2+8n+3}{2}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = \frac{2}{4n^2+8n+3} = \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} u_k = 1 - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \Rightarrow \sum_{k=1}^{2018} u_k = \frac{4036}{4037}.$$

» Câu 33. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_n = u_{n-1} + 6$, $\forall n \ge 2$ và $\log_2 u_5 + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{u_9 + 8} = 11$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất thỏa mãn $S_n \ge 20172018$.

A. 2587. **B.** 2590. **C.** 2593. **D.** 2584.

Lời giải

Chọn C

Ta có dãy số (u_n) là cấp số cộng có công sai $d=6$.

$\log_2 u_5 + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{u_9+8} = 11 \Leftrightarrow \log_2 u_5(u_9+8) = 11$ $(*)$ với $u_5 > 0$.

Mặt khác $u_5 = u_1 + 4d = u_1 + 24$ và $u_9 = u_1 + 8d = u_1 + 48$.

Thay vào $(*)$ ta được $\left[\begin{array}{l} u_1 = 8 \Rightarrow u_5 = 32 \\ u_1 = -88 \Rightarrow u_5 = -64 \end{array}\right.$. Suy ra $u_1 = 8$.

$S_n \geq 20172018 \Leftrightarrow \frac{n}{2}\left[2u_1 + (n-1)d\right] \geq 20172018 \Leftrightarrow 3n^2 + 5n - 20172018 \geq 0$.

Vậy số tự nhiên n nhỏ nhất thỏa mãn $S_n \geq 20172018$ là $n = 2593$.

» **Câu 34.** Tìm x biết: $(x+3)+(x+7)+(x+11)+\ldots+(x+79)=860$

A. $x=2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=4$. **D.** $x=3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $1720 = (x+3+x+79)+(x+7+x+75)+\ldots+(x+79+x+3)$

Do đó $1720 = 20(x+3+x+79) \Leftrightarrow 1720 = 20(2x+82) \Leftrightarrow x = 2$

» **Câu 35.** Tìm x biết: $(2x+3)+(2x+7)+(2x+11)+\ldots+(2x+79)=1720$

A. $x=35$. **B.** $x=\frac{45}{2}$. **C.** $x=10$. **D.** $x=15$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $3440 = (2x+3+2x+79)+(2x+7+2x+75)+\ldots+(2x+79+2x+3)$

Do đó $3440 = 20(2x+3+2x+79) \Leftrightarrow 3440 = 20(4x+82) \Leftrightarrow x = \frac{45}{2}$

B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai

» **Câu 36.** Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \frac{-n}{n+1}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Năm số hạng đầu tiên của dãy số là $u_1 = -\frac{1}{2}; u_2 = -\frac{2}{3}; u_3 = -\frac{3}{4}; u_4 = -\frac{4}{5}; u_5 = -\frac{5}{6}$		
(b)	Số hạng u_{10}, u_{100} lần lượt là $-\frac{10}{11}; -\frac{100}{101}$		
(c)	$-\frac{85}{86}$ là số hạng thứ 86 của dãy số (u_n)		
(d)	$-\frac{99}{101}$ là một số hạng của dãy số (u_n)		

Lời giải

(a) Năm số hạng đầu tiên của dãy số là $u_1 = -\frac{1}{2}; u_2 = -\frac{2}{3}; u_3 = -\frac{3}{4}; u_4 = -\frac{4}{5}; u_5 = -\frac{5}{6}$

Ta có: $u_1 = -\frac{1}{2}; u_2 = -\frac{2}{3}; u_3 = -\frac{3}{4}; u_4 = -\frac{4}{5}; u_5 = -\frac{5}{6}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) *Số hạng u_{10}, u_{100} lần lượt là $-\frac{10}{11}; -\frac{100}{101}$*

Ta có: $u_{10} = -\frac{10}{11}, u_{100} = -\frac{100}{101}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) $-\frac{85}{86}$ *là số hạng thứ 86 của dãy số (u_n)*

Xét $-\frac{85}{86} = \frac{-n}{n+1} \Leftrightarrow 85n + 85 = 86n \Leftrightarrow n = 85$.

Vậy $-\frac{85}{86}$ là số hạng thứ 85 của dãy (u_n).

» **Chọn** SAI.

(d) $-\frac{99}{101}$ *là một số hạng của dãy số (u_n)*

Xét $-\frac{99}{101} = \frac{-n}{n+1} \Leftrightarrow 99n + 99 = 101n \Leftrightarrow n = \frac{99}{2} \notin \mathbb{N}^*$ (loại).

Vậy $-\frac{99}{101}$ không phải là số hạng của dãy số (u_n).

» **Chọn** SAI.

» **Câu 37.** Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Số hạng đầu tiên của dãy số là 1		
(b)	Số hạng $u_2 = \frac{5}{4}; u_3 = \frac{7}{5}$		
(c)	$u_4 > u_5$		
(d)	Số $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ 252 của dãy số (u_n)		

Lời giải

Ta có: $u_1 = 1; u_2 = \frac{5}{4}; u_3 = \frac{7}{5}; u_4 = \frac{3}{2}; u_5 = \frac{11}{7}$.

(a) *Số hạng đầu tiên của dãy số là 1*

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) *Số hạng $u_2 = \frac{5}{4}; u_3 = \frac{7}{5}$*

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) $u_4 > u_5$

$$u_4 - u_5 = \frac{3}{2} - \frac{11}{7} = -\frac{1}{14} < 0 \Rightarrow u_4 < u_5$$

» **Chọn** SAI.

(d) *Số $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ 252 của dãy số (u_n)*

Xét $\frac{2n+1}{n+2} = \frac{167}{84} \Leftrightarrow 84(2n+1) = 167(n+2) \Leftrightarrow n = 250$.

Vậy $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ 250 của dãy số (u_n).

» **Chọn** SAI.

» **Câu 38.** Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_n=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Số hạng thứ 2021 là $\frac{2021}{4040}$		
(b)	Số hạng thứ 2022 là $\frac{2022}{4043}$		
(c)	Số hạng thứ 2023 là $\frac{2023}{4047}$		
(d)	Tổng các số hạng thứ 2021; 2022; 2023 và 2024 nhỏ hơn 2		

Lời giải

Với k là số nguyên dương, ta có:

$$\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}=\frac{1}{2}\left[\frac{(2k+1)-(2k-1)}{(2k-1)\cdot(2k+1)}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2k-1)}-\frac{1}{(2k+1)}\right).$$

Khi đó: $u_n=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{(2n-1)}-\frac{1}{(2n+1)}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{(2n+1)}\right]=\frac{n}{2n+1}$.

Vậy $u_n=\frac{n}{2n+1}$, với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

(a) Số hạng thứ 2021 là $\frac{2021}{4040}$

Áp dụng công thức số hạng tổng quát ta có:

$u_{2021}=\frac{2021}{2.2021+1}=\frac{2021}{4043}$

» **Chọn** SAI.

(b) Số hạng thứ 2022 là $\frac{2022}{4043}$

$u_{2022}=\frac{2022}{2.2022+1}=\frac{2022}{4045}$

» **Chọn** SAI.

(c) Số hạng thứ 2023 là $\frac{2023}{4047}$

$u_{2023}=\frac{2023}{2.2023+1}=\frac{2023}{4047}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) Tổng các số hạng thứ 2021; 2022; 2023 và 2024 nhỏ hơn 2

$u_{2024}=\frac{2024}{2.2024+1}=\frac{2024}{4049}$.

Vậy $u_{2021}+u_{2022}+u_{2023}+u_{2024}=\frac{2021}{4043}+\frac{2022}{4045}+\frac{2023}{4047}+\frac{2024}{4049}\approx 1,9995<2$

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 39.** Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n=1-\frac{1}{n}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$u_3=\frac{2}{3}$		
(b)	$u_7-u_8=\frac{1}{56}$		
(c)	$u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{n(n+1)}$		
(d)	Dãy số (u_n) là dãy số tăng		

Lời giải

(a) $u_3=\frac{2}{3}$

Ta có $u_3=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $u_7-u_8=\frac{1}{56}$

$u_7-u_8=-\frac{1}{56}$

» **Chọn** SAI.

(c) $u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{n(n+1)}$

Ta có: $u_{n+1}-u_n=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}>0,\forall n\ge 1$.

» **Chọn** SAI.

(d) Dãy số (u_n) là dãy số tăng.

Suy ra $u_{n+1}>u_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng.

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 40.** Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n=\frac{n}{4^n}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$u_n=\frac{n}{4^n}<0,\forall n\in\mathbb{N}^*$		
(b)	$\frac{u_{n+1}}{u_n}<1,\forall n\ge 1$		
(c)	$u_{2024}<u_{2023}$		
(d)	Dãy số (u_n) là dãy số tăng		

Lời giải

(a) $u_n = \dfrac{n}{4^n} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Nhận xét: $u_n = \dfrac{n}{4^n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

» **Chọn** SAI.

(b) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1, \forall n \ge 1$

Ta có: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{4^{n+1}} : \dfrac{n}{4^n} = \dfrac{n+1}{4n} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4n} < 1, \forall n \ge 1$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) $u_{2024} < u_{2023}$

Suy ra $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_{2024} < u_{2023}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) Dãy số (u_n) là dãy số tăng

Vậy dãy số (u_n) là dãy số giảm.

» **Chọn** SAI.

» Câu 41. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}}$		
(b)	$\dfrac{u_{2024}}{u_{2023}} < 1$		
(c)	$u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$		
(d)	Dãy số (u_n) là dãy số giảm		

Lời giải

(a) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}}$

Nhận xét: $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

$$= \frac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)} = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}.$$

» **Chọn** SAI.

(b) $\dfrac{u_{2024}}{u_{2023}} < 1$

Vì $0 < \sqrt{n+1} + \sqrt{n} < \sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}$ nên $\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} < 1$

Hay $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1,\forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \dfrac{u_{2024}}{u_{2023}}<1,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) $u_{n+1}<u_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$

$\Rightarrow u_{n+1}<u_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) Dãy số (u_n) là dãy số giảm.

Suy ra $u_{n+1}<u_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Vậy dãy số (u_n) là dãy số giảm.

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 42.** Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n=\dfrac{n+1}{n+2}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{(n+3)(n+2)}$		
(b)	$u_{n+1}<u_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$		
(c)	Dãy số (u_n) là dãy số giảm		
(d)	Dãy (u_n) là dãy số bị chặn		

Lời giải

(a) $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{(n+3)(n+2)}$

Xét $u_{n+1}-u_n=\dfrac{n+2}{n+3}-\dfrac{n+1}{n+2}=\dfrac{n^2+4n+4-(n^2+4n+3)}{(n+3)(n+2)}=\dfrac{1}{(n+3)(n+2)}$

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $u_{n+1}<u_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$

$\Rightarrow u_{n+1}-u_n>0$.

Suy ra $u_{n+1}>u_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

» **Chọn** SAI.

(c) Dãy số (u_n) là dãy số giảm

Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng.

» **Chọn** SAI.

(d) Dãy (u_n) là dãy số bị chặn.

Ta có: $u_n=\dfrac{n+1}{n+2}>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Mặt khác: $u_n=\dfrac{n+1}{n+2}=\dfrac{(n+2)-1}{n+2}=1-\dfrac{1}{n+2}<1,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Do đó: $0<u_n<1,\forall n\in\mathbb{N}^*$ nên dãy (u_n) là dãy số bị chặn.

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 43.** Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n=n+\dfrac{1}{n}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$		
(b)	Dãy số (u_n) là dãy số tăng		
(c)	$u_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$		
(d)	Dãy số đã cho bị chặn trên		

Lời giải

(a) $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Với mọi số nguyên dương n, ta có:

$$u_{n+1} - u_n = n+1+\frac{1}{n+1} - \left(n+\frac{1}{n}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)n} = \frac{(n+1)n-1}{(n+1)n} > 0 \ \left(\text{vì } (n+1)n > 1, \forall n \geq 1\right).$$

Suy ra $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) Dãy số (u_n) là dãy số tăng

Vì vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) $u_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $n, \frac{1}{n}$, ta được:

$$n + \frac{1}{n} \geq 2\sqrt{n \cdot \frac{1}{n}} = 2 \text{ hay } u_n \geq 2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

» **Chọn** SAI.

(d) Dãy số đã cho bị chặn trên

Vì vậy dãy số đã cho bị chặn dưới.

» **Chọn** SAI.

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» **Câu 44.** Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n+1}{n^2}$. Hãy tính số hạng thứ 6 của dãy số. *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

Lời giải

✓ *Trả lời: 0,7*

$u_6 = \frac{2.6+1}{6^2} = \frac{13}{36}$.

» **Câu 45.** Cho dãy số (u_n): $-3;-1;1;3;5;\ldots$ Một hệ thức truy hồi xác định dãy số đã cho có dạng $\begin{cases} u_1 = -b \\ u_{n+1} = a.u_n + 2 \end{cases}$ với $n \geq 1$ và $a;b$ là các số tự nhiên. Tính $T = a + b$

Lời giải

✓ *Trả lời: 4*

Ta có $u_1 = -3, u_2 = -1, u_3 = 1, u_4 = 3, u_5 = 5, \ldots$

Suy ra $u_2 = u_1 + 2, u_3 = u_2 + 2, u_4 = u_3 + 2, u_5 = u_4 + 2, \ldots$

Vậy hệ thức truy hồi xác định dãy số đã cho là $\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$ với $n \geq 1$.

Khi đó $\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow T = 4$

» Câu 46. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$. Số $\dfrac{167}{84}$ là số hạng thứ mấy của dãy?

Lời giải

✓ ***Trả lời: 250***

Ta có: $u_n = \dfrac{167}{84}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2n+1}{n+2} = \dfrac{167}{84} \Leftrightarrow 84.(2n+1) = 167(n+2) \Leftrightarrow n = 250$

Vậy $\dfrac{167}{84}$ là số hạng thứ 250 của dãy số (u_n).

» Câu 47. Số hạng tổng quát u_n theo n của dãy số (u_n): $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n, \forall n \geq 1 \end{cases}$ có dạng $u_n = a^n$, với a là số tự nhiên. Xác định giá trị của a.

Lời giải

✓ ***Trả lời: 2***

Từ công thức $u_{n+1} = 2u_n, \forall n \geq 1$ suy ra $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 2, \forall n \geq 1$. Từ đó ta có:

$\dfrac{u_2}{u_1} = 2; \dfrac{u_3}{u_2} = 2; \dfrac{u_4}{u_3} = 2; \ldots; \dfrac{u_n}{u_{n-1}} = 2$

Nhân theo vế tất cả các đẳng thức trên ta được:

$\dfrac{u_n}{u_1} = 2^{n-1} \Leftrightarrow u_n = u_1 \cdot 2^{n-1} \Leftrightarrow u_n = 2.2^{n-1} \Leftrightarrow u_n = 2^n$

» Câu 48. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong đoạn $[-20; 20]$ để dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{mn+1}{n+1}$ là dãy số tăng.

Lời giải

✓ ***Trả lời: 19***

Xét $u_{n+1} - u_n = \dfrac{m(n+1)+1}{(n+1)+1} - \dfrac{mn+1}{n+1} = \dfrac{mn+m+1}{n+2} - \dfrac{mn+1}{n+1}$

$= \dfrac{mn^2 + 2mn + m + n + 1 - (mn^2 + 2mn + n + 2)}{(n+2)(n+1)} = \dfrac{m-1}{(n+2)(n+1)}$.

Dãy số đã cho là dãy tăng $\Leftrightarrow \dfrac{m-1}{(n+2)(n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow m > 1$

$\left(\text{do } (n+2)(n+1) > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \right)$.

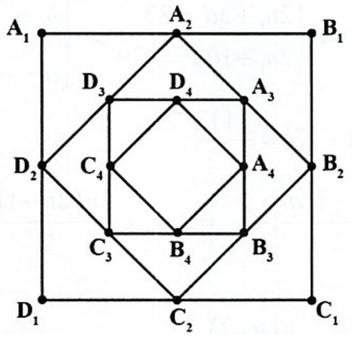
Vậy $m > 1$ thoả mãn đề bài.

Khi đó có 19 giá trị nguyên của m

» **Câu 49.** Cho hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng 4. Với mọi số nguyên dương $n \geq 2$, gọi A_n, B_n, C_n, D_n lần lượt là trung điểm của các cạnh $A_{n-1}B_{n-1}, B_{n-1}C_{n-1}, C_{n-1}D_{n-1}$, $D_{n-1}A_{n-1}$. Gọi S_n là diện tích của tứ giác $A_nB_nC_nD_n$. Kết quả của S_{12} có dạng $\left(\frac{a}{2}\right)^b$ với $a;b$ là các số tự nhiên. Khi đó giá trị của $b-4a$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

✓ ***Trả lời: 11***



Ta thấy mỗi tứ giác $A_nB_nC_nD_n$ là một hình vuông có cạnh là A_nB_n.

Ta có: $A_1B_1 = 4, A_2B_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}A_1B_1 = 2\sqrt{2}, A_3B_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}A_2B_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 A_1B_1 = 2, \ldots$

Tổng quát: $A_nB_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} A_1B_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} \cdot 4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+3}$.

Diện tích hình vuông $A_nB_nC_nD_n$ là $S_n = \left(A_nB_n\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Áp dụng với $n = 12$ có: $S_{12} = \left(\frac{1}{2}\right)^{15}$.

Khi đó $\begin{cases} a = 1 \\ b = 15 \end{cases} \Rightarrow b - 4a = 11$

------------------------------------- Hết -------------------------------------

Chương 02

Bài 2. CẤP SỐ CỘNG

A. Lý thuyết

1. Cấp số cộng

Định nghĩa:

- *Cấp số cộng* là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d. Nghĩa là:

$$u_{n+1} = u_n + d \text{ với } n \in \mathbb{N}^*$$

Số không đổi d được gọi là *công sai* của cấp số cộng.

- **Đặc biệt:**
*Khi $d = 0$ thì cấp số cộng là một **dãy số không đổi** (tất cả các số hạng đều bằng nhau).*

2. Số hạng tổng quát

Định lý:

- Nếu một cấp số cộng có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát của nó được xác định theo công thức:

$$u_n = u_1 + (n-1)d, \forall n \geq 1.$$

3. Tính chất các số hạng của cấp số cộng

Định lý:

- Trong một cấp số cộng, mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và số hạng cuối) đều bằng trung bình cộng của hai số hạng đứng liền kề với nó, nghĩa là:

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}, \forall k \geq 1.$$

- **Hệ quả:** Ba số a, b, c (theo thứ tự đó)lập thành một cấp số cộng $a + c = 2b$.

4. Tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng

Định lý:

- Cho cấp số cộng (u_n) có công sai d.

  Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ (S_n là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng).

  Ta có $S_n = \dfrac{n(u_1+u_n)}{2} = n.u_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d$.

Chứng minh

Ta có $S_n = u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d + ... + u_1 + (n-2)d + u_1 + (n-1)d (1)$.

Mà $S_n = u_n - (n-1)d + u_n - (n-2)d + ... + u_n - 2d + u_n - d + u_n (2)$.

Cộng vế với vế của (1) và (2) ta được $2S_n = n(u_1+u_n) \Rightarrow S_n = \dfrac{n(u_1+u_n)}{2}$.

Do $u_n = u_1 + (n-1)d$ nên $S_n = \dfrac{n[u_1 + u_1 + (n-1)d]}{2} = nu_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d$.

Nhận xét

(1) Nếu (u_n) là một cấp số cộng thì mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là $u_k = \dfrac{u_{k-1}+u_{k+1}}{2}$ với $k \geq 2$. (3)

(2) Cấp số cộng (u_n) là một ***dãy số tăng*** khi và chỉ khi công sai $d > 0$.

(3) Cấp số cộng (u_n) là một ***dãy số giảm*** khi và chỉ khi công sai $d < 0$..

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Xác định dãy đã cho là cấp số cộng

Phương pháp

Nếu (u_n) là một cấp số cộng với công sai d thì $u_{n+1} = u_n + d$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Để chứng minh một dãy đã cho là 1 cấp số cộng thì ta chứng minh:

$$u_{n+1} - u_n = C \text{ với } C \text{ là một hằng số không đổi}$$

Ví dụ 1.1.

Cho (u_n) là một cấp số cộng có sáu số hạng với $u_1 = -2$, $d = 3$.

Viết khai triển của cấp số cộng.

Lời giải

Theo định nghĩa cấp số cộng ta có:

$u_2 = u_1 + d = -2 + 3 = 1$

$u_3 = u_2 + d = 1 + 3 = 4$

$u_4 = u_3 + d = 4 + 3 = 7$

$u_5 = u_4 + d = 7 + 3 = 10$

$u_6 = u_5 + d = 10 + 3 = 13$

Nên dạng khai triển của cấp số cộng là: $-2; 1; 4; 7; 10; 13; \ldots$

Ví dụ 1.2.

Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2n - 3$.

Chứng minh rằng (u_n) là một cấp số cộng. Tìm u_1 và d.

Lời giải

Ta có $u_1 = -1$

Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 3 - (2n - 3) = 2$. Suy ra $u_{n+1} = u_n + 2$

Vậy (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 2$.

Ví dụ 1.3.

Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào là cấp số cộng?

(1) $u_n = 3n + 2$

(2) $u_n = 3^n - 1$

(3) $u_n = (n+2)^2 - n^2$

(4) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3 - u_n \end{cases}$ với $n \geq 1$

Lời giải

(1) $u_n = 3n+2$

Ta có $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 2 - (3n+2) = 3$. Vậy (u_n) là cấp số cộng.

(2) $u_n = 3^n - 1$

Ta có $u_1 = 2, u_2 = 8, u_3 = 26$.

Khi đó $u_2 - u_1 = 6$, $u_3 - u_2 = 18 \neq u_2 - u_1$. Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

(3) $u_n = (n+2)^2 - n^2$

Ta có $u_n = (n+2)^2 - n^2 = n^2 + 4n + 4 - n^2 = 4n + 4$

Khi đó $u_{n+1} - u_n = 4(n+1) + 4 - (4n+4) = 4$. Vậy (u_n) là cấp số cộng.

(4) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3 - u_n \end{cases}$ với $n \geq 1$

$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3 - u_n \end{cases}$ với $n \geq 1$

Ta có $u_1 = 2$, $u_2 = 1$, $u_2 = 2$.

Khi đó $u_2 - u_1 = -1$, $u_3 - u_2 = 1 \neq u_2 - u_1$. Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

Ví dụ 1.4.

Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào là cấp số cộng? Nếu là cấp số cộng, hãy tính số hạng đầu và công sai.

(1) $u_n = 2 - 3n$

(2) $u_n = \dfrac{n}{3} - 2$

(3) $u_n = \dfrac{1}{n} + 3$

(4) $u_n = 2^n + 4$

Lời giải

(1) $u_n = 2 - 3n$

Ta có: $u_{n+1} - u_n = 2 - 3(n+1) - 2 + 3n = -3$. Vậy (u_n) là cấp số cộng, $u_1 = -1, d = -3$.

(2) $u_n = \dfrac{n}{3} - 2$

Ta có: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+1}{3} - 2 - \dfrac{n}{3} + 2 = \dfrac{1}{3}$. Vậy (u_n) là cấp số cộng, $u_1 = -\dfrac{5}{3}, d = \dfrac{1}{3}$.

(3) $u_n = \dfrac{1}{n} + 3$

Ta có: $u_1 = 4, u_2 = \dfrac{7}{2}, u_3 = \dfrac{10}{3} \Rightarrow u_3 - u_2 \neq u_2 - u_1$. Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

(4) $u_n = 2^n + 4$

Ta có: $u_1 = 6, u_2 = 8, u_3 = 12 \Rightarrow u_3 - u_2 \neq u_2 - u_1$. Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

Dạng 2. Xác định các yếu tố qua số hạng tổng quát

Phương pháp

- *Nếu một cấp số cộng có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát của nó được xác định theo công thức:*

$$u \qquad\qquad 1$$

Ví dụ 2.1.

Cho cấp số cộng (u_n), biết $u_1 = -3$, $d = 7$. Tìm u_{15}, u_{20}, u_{25}, u_{30}.

Lời giải

Theo công thức ta có:

$u_{15} = u_1 + (15-1)d = -3 + 14.7 = 95$.

$u_{20} = u_1 + (20-1)d = -3 + 19.7 = 130$.

$u_{25} = u_1 + (25-1)d = -3 + 24.7 = 165$.

$u_{30} = u_1 + (30-1)d = -3 + 29.7 = 200$.

Ví dụ 2.2.

Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n), biết : $\begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases}$.

Lời giải

$$\begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + 4d - (u_1 + 2d) = 10 \\ u_1 + u_1 + 5d = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = 10 \\ 2u_1 + 5d = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 16 \\ d = -3 \end{cases}$$

Ví dụ 2.3.

Giữa các số 7 và 35 hãy đặt thêm 6 số nữa để được một cấp số cộng

Lời giải

Ta có $\begin{cases} u_1 = 7 \\ u_8 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 7 \\ u_1 + 7d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 7 \\ d = 4 \end{cases}$.

Vậy 6 số đặt thêm giữa các số 7 và 35 để được một cấp số cộng là $11, 15, 19, 23, 27, 31$.

Ví dụ 2.4.

Cho cấp số cộng (u_n), biết: $\begin{cases} u_1 = -15 \\ d = 18 \end{cases}$.

(1) Tìm $u_5, u_{10}, u_{15}, u_{20}, u_{25}$.

(2) Số 1209 là số hạng thứ bao nhiêu?

Lời giải

(1) Tìm 1209 .

Áp dụng định lý ta có

$u_5 = u_1 + 4d = -15 + 4.18 = 57$

$u_{10} = u_1 + 9d = -15 + 9.18 = 147$

$u_{15} = u_1 + 14d = -15 + 14.18 = 237$

$u_{20} = u_1 + 19d = -15 + 19.18 = 327$

$u_{25} = u_1 + 24d = -15 + 24.18 = 417$.

(2) Số 1209 là số hạng thứ bao nhiêu?

Giả sử số 1209 là số hạng thứ k.

Ta có $u_k = 1209 \Leftrightarrow u_1 + (k-1)d = 1209 \Leftrightarrow k = 69$

Vậy số 1209 là số hạng thứ 69.

Ví dụ 2.5.

Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n), biết:

(1) $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$. (2) $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_3 + u_4 = 17. \end{cases}$

Lời giải

(1) $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_3 + u_4 = 17. \end{cases}$

$$\begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d + u_1 + 4d - (u_1 + 2d) = 5 \\ u_1 + 3d + u_1 + 5d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ 2u_1 + 8d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3 \end{cases}.$$

(2) $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_3 + u_4 = 17. \end{cases}$

Ta có : $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_3 + u_4 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_3 + u_4 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_3 + u_4 - u_3 = 10 \\ u_3 + u_4 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_4 = 10 \\ u_3 + u_4 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_4 = 10 \\ u_3 = 7 \end{cases}$

$\Rightarrow d = u_4 - u_3 = 3$. Vậy công sai là $d = 3$.

Ví dụ 2.6.

Tổng ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng bằng 2 và tổng các bình phương của ba số đó bằng $\frac{14}{9}$. Xác định ba số đó và tính công sai của cấp số cộng.

Lời giải

Ta có hệ $\begin{cases} u_k + u_{k+1} + u_{k+2} = 2 \\ u_k^2 + u_{k+1}^2 + u_{k+2}^2 = \dfrac{14}{9} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_k + u_k + d + u_k + 2d = 2 \\ u_k^2 + \left(u_k + d\right)^2 + \left(u_k + 2d\right)^2 = \dfrac{14}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_k + 3d = 2 \\ 3u_k^2 + 6u_k d + 5d^2 = \dfrac{14}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u_k = 1 \\ d = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} u_k = \dfrac{1}{3} \\ d = \dfrac{1}{3} \end{cases} \end{array} \right. .$$

Vậy ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng thỏa yêu cầu bài toán: $1;\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}$ ứng với $d = \dfrac{-1}{3}$ hoặc $\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3};1$ ứng với $d = \dfrac{1}{3}$.

Dạng 3. Tính chất cấp số cộng

Phương pháp

- Trong một cấp số cộng, mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và số hạng cuối) đều bằng trung bình cộng của hai số hạng đứng liền kề với nó, nghĩa là:

$$u_k = \frac{u_{k-1}+u_{k+1}}{2}, \forall k \geq 1.$$

- **Hệ quả:** Ba số $u_k = \frac{u_{k-1}+u_{k+1}}{2}, \forall k \geq 1$ (theo thứ tự đó)lập thành một cấp số cộng a , b , c

  Đôi khi ta cũng viết $b-a=c-b$ sẽ thuận lợi hơn trong việc giải toán.

⁂ **Các bài toán thường gặp:**

(1) Tìm ẩn x để 3 số đã cho lập thành cấp số cộng.

(2) Ba góc trong một tam giác.

(3) Ba nghiệm phân biệt tạo thành một cấp số cộng.

...

Ví dụ 3.1.

Ba số lập thành một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 2 và tổng bình phương của chúng bằng $\frac{14}{9}$. Tìm ba số hạng đó.

Lời giải

Gọi 3 số hạng cần tìm là u_1, u_2, u_3.

Theo đề bài ta có hệ phương trình: $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=2 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2=\frac{14}{9} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3u_2=2 \\ u_1^2+u_3^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{14}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_3=2.u_2=\frac{4}{3} \\ \left(u_1+u_3\right)^2-2u_1.u_3=\frac{10}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_3=\frac{4}{3} \\ u_1.u_3=\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u_1=1; u_3=\frac{1}{3} \\ u_1=\frac{1}{3}; u_3=1. \end{array}\right.$$

Vậy bộ ba số cần tìm là $\left(1;\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right);\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};1\right)$.

Ví dụ 3.2.

Tìm x biết ba số $10-3x$, $3x^2+5$, $5-4x$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.

Lời giải

Đặt $a=10-3x$, $b=3x^2+5$, $c=5-4x$.

Vì a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng nên $a+c=2b$.

Do đó ta có: $a+c=2b \Leftrightarrow 10-3x+5-4x=2\left(3x^2+5\right) \Leftrightarrow 6x^2+7x-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x=-\frac{5}{3}. \end{array}\right.$

Ví dụ 3.3.

Cho tam giác ABC có số đo ba góc lập thành một cấp số cộng và một góc có số đo bằng 25°. Tính số đo hai góc còn lại.

Lời giải

Giả sử $x,\ y,\ z$ là số đo ba góc của tam giác trên và theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng với $x \le y \le z$.

Ta có: $\begin{cases} x+y+z=180^\circ \\ x+z=2y \end{cases} \Rightarrow 3y=180^\circ \Rightarrow y=60^\circ.$

Từ đó dễ dàng suy ra $x=25^\circ$ và $z=95^\circ$.

Ví dụ 3.4.

Tìm x để ba số a,b,c theo thứ tự lập thành cấp số cộng, biết

(1) $a=10-3x,\ b=2x^2+3,\ c=7-4x$ (2) $a=x+1,\ b=3x-2,\ c=x^2-1$

Lời giải

(1) $a=x+1,\ b=3x-2,\ c=x^2-1$

$a,\ b,\ c$ lập thành cấp số cộng khi $b-a=c-b$. Khi đó

$2x^2+3-10+3x=7-4x-4x^2-3 \Leftrightarrow 4x^2+7x-11=0 \Leftrightarrow x=1,\ x=-\frac{11}{4}$

(2) $a=x+1,\ b=3x-2,\ c=x^2-1$

$a,\ b,\ c$ lập thành cấp số cộng khi $b-a=c-b$.

Do đó ta có $x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow x=1,\ x=4.$

Ví dụ 3.5.

Cho ba số dương a,b,c. Đặt $A=\frac{1}{b+c},\ B=\frac{1}{c+a},\ C=\frac{1}{a+b}$. Chứng minh rằng C,A,B theo thứ tự lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi c^2,a^2,b^2 theo thứ tự lập thành cấp số cộng.

Lời giải

C,A,B theo thứ tự lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi

$A-C=B-A \Leftrightarrow \frac{a-c}{(b+c)(a+b)}=\frac{b-a}{(b+c)(a+c)} \Leftrightarrow a^2-c^2=b^2-a^2$

Tương đương với c^2,a^2,b^2 theo thứ tự lập thành cấp số cộng.

Ví dụ 3.6.

Cho tam giác ABC có $\cot A$, $\cot B$, $\cot C$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh rằng a^2, b^2, c^2 cũng lập thành cấp số cộng.

Lời giải

Do $\cot A$, $\cot B$, $\cot C$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng

Nên: $\cot A + \cot C = 2\cot B$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(A+C)}{\sin A.\sin C} = \frac{2\cos B}{\sin B} \Leftrightarrow \sin^2 B = 2\cos B.\sin A.\sin C$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{b}{2R}\right)^2 = 2.\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}.\frac{a}{2R}.\frac{c}{2R} \Leftrightarrow 2b^2 = a^2 + c^2.$$

Vậy a^2, b^2, c^2 theo thứ tự lập thành cấp số cộng.

Ví dụ 3.7.

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2x^3 - 18x^2 + mx - 6 = 0$ có ba nghiệm phân biệt tạo thành một cấp số cộng.

Lời giải

Giả sử phương trình có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 với $x_1 < x_2 < x_3$.

Ba nghiệm theo thứ tự trên lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi $x_1 + x_3 = 2x_2 \quad (1)$.

Mặt khác, theo định lí Vi-ét, $x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{-18}{2} = 9. \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $x_2 = \dfrac{9}{3} = 3$.

Thay $x = 3$ vào phương trình ban đầu ta được $2.3^3 - 18.3^2 + m.3 - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 38$.

Thử lại thấy $m = 38$ thỏa yêu cầu.

Dạng 4. Tính tổng n số hạng đầu của một cấp số cộng

Phương pháp

- Tìm u_1, d hoặc u_1, u_n và tính S_n theo một trong hai công thức sau:

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$$

$$S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

Ví dụ 4.1.

Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 3$.

Tính tổng S_{100} của 100 số hạng đầu tiên.

Lời giải

Ta có: $S_{100} = 100.2 + \frac{100(100-1)}{2}.3 = 15050$

Ví dụ 4.2.

Tính tổng $S = 100 + 105 + 110 + ... + 995$

Lời giải

Các số hạng của tổng S lập thành cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 100, d = 5$

Giả sử 995 là số hạng thứ $n, n \in \mathbb{N}^*$,

Ta có $995 = 100 + (n-1)5 \Leftrightarrow 5n = 900 \Leftrightarrow n = 180$

Do đó $S = S_{180} = \frac{180(100+995)}{2} = 98550$.

Ví dụ 4.3.

Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 = -15, u_4 = 18$. Tính tổng S_{20} của 20 số hạng đầu tiên.

Lời giải

Áp dụng công thức $u_{n+1} = u_n + d$, ta có $d = u_4 - u_3 = 18 - (-15) = 33$.

Áp dụng công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$, ta có $u_1 = u_3 - (3-1)d = -15 - (3-1)33 = -81$.

Áp dụng công thức (4), ta có $S_{20} = 20.(-81) + \frac{20(20-1)}{2}33 = 4650$.

Ví dụ 4.4.

Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn: $\begin{cases} S_4 = 9 \\ S_6 = \frac{45}{2} \end{cases}$. Tính u_1, d.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} S_4 = \dfrac{4\left(2u_1+3d\right)}{2} = 9 \\ S_6 = \dfrac{6\left(2u_1+5d\right)}{2} = \dfrac{45}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1+6d=9 \\ 4u_1+10d=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=\dfrac{3}{2} \\ u_1=0 \end{cases}.$

Vậy ta có: $u_1=0, d=\dfrac{3}{2}$.

Ví dụ 4.5.

Cho dãy số $\left(u_n\right)$ với $u_n=2n-3$.

(1) Chứng minh rằng $\left(u_n\right)$ là cấp số cộng.

(2) Tính tổng của 30 số hạng đầu.

(3) Biết $S_n=195$, tìm n.

Lời giải

(1) Chứng minh rằng 30 là cấp số cộng.

Vì $u_n=2n-3$ nên $u_1=-1$

Với $n\ge 1$, xét hiệu $u_{n+1}-u_n=2\left(n+1\right)-3-\left(2n-3\right)=2$. Suy ra $u_{n+1}=u_n+2, \forall n\ge 1$

Vậy $\left(u_n\right)$ là cấp số cộng với công sai $d=2$.

(2) Tính tổng của $S_n=195$ số hạng đầu.

Vì $u_1=-1, d=2, n=30$ nên ta có $S_{30}=30.\left(-1\right)+\dfrac{30\left(30-1\right)}{2}.2=840$

(3) Biết n, tìm n.

Vì $u_1=-1, d=2, S_n=195$

Nên ta có: $n.\left(-1\right)+\dfrac{n\left(n-1\right)}{2}.2=195 \Leftrightarrow n^2-2n-195=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=15 \\ n=-13 \end{array}\right.$

Do $n\in \mathbb{N}^*$ nên $n=15$.

Ví dụ 4.6.

Cho cấp số cộng $\left(u_n\right)$ có $\begin{cases} u_7+u_{15}=60 \\ u_4^2+u_{12}^2=1170 \end{cases}$ và công sai $d>0$.

Tính tổng S_{2017} của 2017 số hạng đầu.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} 2u_1+20d=60 \\ \left(u_1+3d\right)^2+\left(u_1+11d\right)^2=1170 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=30-10d \\ \left(30-7d\right)^2+\left(30+7d\right)^2=1170 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1=30-10d \\ 5d^2-36d+63=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=0 \\ d=3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_1=36 \\ d=-\dfrac{3}{5} \end{cases}.$

Do $d>0$ nên $u_1=0, d=3$.

Vậy $S_{2017}=2017.0+\dfrac{2017(2017-1)}{2}.3=6099408$.

Ví dụ 4.7.

Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_2+u_5-u_3=10 \\ u_4+u_6=26 \end{cases}$. Tính tổng S_{10} của 10 số hạng đầu.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} u_2+u_5-u_3=10 \\ u_4+u_6=26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_1+d)+(u_1+4d)-(u_1+2d)=10 \\ (u_1+3d)+(u_1+5d)=26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+3d=10 \\ 2u_1+8d=26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=-99 \\ d=28 \end{cases}$

Vậy $S_{10}=10.(-99)+\dfrac{10(10-1)}{2}.28=270$.

Ví dụ 4.8.

Một cấp số hữu hạn (u_n) có tổng tất cả các số hạng trừ số hạng đầu tiên bằng -36, còn tổng tất cả các số hạng cuối cùng bằng 0. Biết $u_{10}-u_6=-16$. Tìm số hạng đầu tiên và công sai của cấp số cộng đó.

Lời giải

$u_{10}-u_6=-16 \Rightarrow u_1+9d-u_1-5d=-16 \Rightarrow d=-4$

Ta có: $\begin{cases} u_2+u_3+u_4+...+u_n=-36 & (1) \\ u_1+u_2+...+u_{n-1}=0 & (2) \end{cases}$

Suy ra: $-u_1+u_n=-36 \Rightarrow (n-1)d=-36$ mà $d=-4 \Rightarrow n=10$.

Từ (2) suy ra: $S_9=0=9\left[u_1+\dfrac{8(-4)}{2}\right]$.

Chương 02

Bài 2. CẤP SỐ CỘNG

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số cộng?

A. $1;-2;-4;-6;-8$. **B.** $1;-3;-6;-9;-12$. **C.** $1;-3;-7;-11;-15$. **D.** $1;-3;-5;-7;-9$.

Lời giải

Chọn C

Dãy số (u_n) có tính chất $u_{n+1}=u_n+d$ thì được gọi là một cấp số cộng.

Ta thấy dãy số: $1;-3;-7;-11;-15$ là một cấp số cộng có số hạng đầu là 1 và công sai bằng -4.

» Câu 2. Trong các dãy số có công thức tổng quát sau, dãy số nào là cấp số cộng?

A. $u_n=2021^n$. **B.** $u_n=2n+2021$. **C.** $u_n=\dfrac{2}{n+2021}$. **D.** $u_n=n^2-2$.

Lời giải

Chọn B

Với $u_n=2n+2021$ thì $u_{n+1}=2(n+1)+2021=u_n+2$, như vậy dãy số này là một cấp số cộng.

» Câu 3. Trong các dãy số sau đây, dãy số nào là cấp số cộng?

A. $u_n=3^n$. **B.** $u_n=(-3)^{n+1}$. **C.** $u_n=3n+1$. **D.** $u_n=2^{n+1}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

Xét đáp án A: $u_{n+1}-u_n=3^{n+1}-3^n=2.3^n\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$ nên $u_n=3^n$ không phải là cấp số cộng.

Xét đáp án B: $u_{n+1}-u_n=(-3)^{n+1}-(-3)^n=-4.(-3)^n\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$ nên $u_n=(-3)^{n+1}$ không phải là cấp số cộng.

Xét đáp án C: $u_{n+1}-u_n=\left[3(n+1)+1\right]-(3n+1)=3\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$ không đổi, nên $u_n=3n+1$ là cấp số cộng.

Xét đáp án D: $u_{n+1}-u_n=2^{n+2}-2^{n+1}=2^{n+1}\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$ nên $u_n=2^{n+1}$ không phải là cấp số cộng.

» Câu 4. Trong các dãy số sau đây, dãy số nào là một cấp số cộng?

A. $u_n=n^2+1,\quad n\ge 1$. **B.** $u_n=2^n,\quad n\ge 1$. **C.** $u_n=\sqrt{n+1},n\ge 1$. **D.** $u_n=2n-3,\quad n\ge 1$

Lời giải

Chọn D

Theo định nghĩa cấp số cộng ta có: $u_{n+1}=u_n+d\Leftrightarrow u_{n+1}-u_n=d,\quad \forall n\ge 1,\ d=const$

Thử các đáp án ta thấy với dãy số: $u_n=2n-3,\quad n\ge 1$ thì:

$$\begin{cases} u_n = 2n-3 \\ u_{n+1} = 2(n+1)-3 = 2n-1 \end{cases} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 2 = const$$

» Câu 5. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = 7$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

A. 5. **B.** $\frac{2}{7}$. **C.** -5. **D.** $\frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $u_2 = u_1 + d \Leftrightarrow d = u_2 - u_1 = 7 - 2 = 5$.

» Câu 6. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 9$ và công sai $d = 2$. Giá trị của u_2 bằng

A. 11. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** 18. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $u_2 = u_1 + d = 9 + 2 = 11$.

» Câu 7. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 8$ và công sai $d = 3$. Giá trị của u_2 bằng

A. $\frac{8}{3}$. **B.** 24. **C.** 5. **D.** 11.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức ta có: $u_2 = u_1 + d = 8 + 3 = 11$.

» Câu 8. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2022$ và công sai $d = 7$. Giá trị của u_6 bằng

A. 2043. **B.** 2064. **C.** 2050. **D.** 2057.

Lời giải

Chọn D

Ta có công thức tính số hạng thứ n của cấp số cộng

$u_n = u_1 + (n-1)d \Rightarrow u_6 = u_1 + 5d = 2022 + 5.7 = 2057$

» Câu 9. Tìm công sai d của cấp số cộng (u_n), $n \in \mathbb{N}^*$ có $u_1 = 1$; $u_4 = 13$.

A. $d = 3$. **B.** $d = \frac{1}{4}$. **C.** $d = 4$. **D.** $d = \frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_4 = 13 \Leftrightarrow u_1 + 3d = 13 \Leftrightarrow 1 + 3d = 13 \Leftrightarrow 3d = 12 \Leftrightarrow d = 4$.

» Câu 10. Cho cấp số cộng có $u_3 = 2$, công sai $d = -2$. Số hạng thứ hai của cấp số cộng đó là

A. $u_2 = 4$ **B.** $u_2 = 0$ **C.** $u_2 = -4$ **D.** $u_2 = 3$

Lời giải

Chọn A

Ta có $u_3 = u_2 + d = u_2 + (-2) = 2 \Rightarrow u_2 = 4$.

» Câu 11. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_{17} = 33$ và $u_{33} = 65$ thì công sai bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** -2. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Gọi u_1, d lần lượt là số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n).

Khi đó, ta có: $u_{17} = u_1 + 16d$, $u_{33} = u_1 + 32d$

Suy ra: $u_{33} - u_{17} = 65 - 33 \Leftrightarrow 16d = 32 \Leftrightarrow d = 2$

Vậy công sai bằng: 2.

» Câu 12. Một cấp số cộng gồm 5 số hạng. Hiệu số hạng đầu và số hạng cuối bằng 20. Tìm công sai d của cấp số cộng đã cho

A. $d = -5$. **B.** $d = 4$. **C.** $d = -4$. **D.** $d = 5$.

Lời giải

Chọn C

Gọi năm số hạng của cấp số cộng đã cho là: $u_1; u_2; u_3; u_4; u_5$.

Theo đề bài ta có: $u_1 - u_5 = 20 \Leftrightarrow u_1 - (u_1 + 4d) = 20 \Leftrightarrow d = -5$

» Câu 13. Cho cấp số cộng u_n có các số hạng đầu lần lượt là $5;9;13;17;...$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng?

A. $u_n = 4n + 1$. **B.** $u_n = 5n - 1$. **C.** $u_n = 5n + 1$. **D.** $u_n = 4n - 1$.

Lời giải

Chọn A

☑ $u_n = u_1 + (n-1)d$

▪ $u_3 = u_1 + (3-1)d = 13 \Leftrightarrow 5 + 2d = 13 \Leftrightarrow d = 4$

▪ $u_n = 5 + (n-1).4 = 4n + 1$

» Câu 14. Tìm công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) thỏa mãn: $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 7 \\ u_1 + u_6 = 12 \end{cases}$

A. $u_n = 2n + 3$. **B.** $u_n = 2n - 1$. **C.** $u_n = 2n + 1$. **D.** $u_n = 2n - 3$.

Lời giải

Chọn B

Giả sử dãy cấp số cộng (u_n) có công sai là d. Khi đó, $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 7 \\ u_1 + u_6 = 12 \end{cases}$ trở thành:

$$\begin{cases} (u_1 + d) - (u_1 + 2d) + (u_1 + 4d) = 7 \\ u_1 + (u_1 + 5d) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 7 \\ 2u_1 + 5d = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases}$$

Số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n): $u_n = u_1 + (n-1)d = 1 + (n-1).2 = 2n - 1$

Vậy $u_n = 2n - 1$.

» Câu 15. Cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$, công sai $d = -2$ thì số hạng thứ 5 là

A. $u_5 = 8$. **B.** $u_5 = 1$. **C.** $u_5 = -5$. **D.** $u_5 = -7$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $u_5 = u_1 + 4d = 3 + 4.(-2) = -5$.

» Câu 16. Cho cấp số cộng có $u_1 = -3$, $d = 4$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $u_5 = 15$. **B.** $u_4 = 8$. **C.** $u_3 = 5$. **D.** $u_2 = 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_3 = u_1 + 2d = -3 + 2.4 = 5$.

» Câu 17. Một cấp số cộng (u_n) có $u_{13} = 8$ và $d = -3$. Tìm số hạng thứ ba của cấp số cộng (u_n).

A. 50. **B.** 28. **C.** 38. **D.** 44

Lời giải

Chọn C

Ta có: $u_{13} = u_1 + 12d \Leftrightarrow 8 = u_1 + 12.(-3) \Rightarrow u_1 = 44 \Rightarrow u_3 = u_1 + 2d = 44 - 6 = 38$.

» Câu 18. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công sai $d = 2$. Giá trị của u_7 bằng:

A. 15. **B.** 17. **C.** 19. **D.** 13.

Lời giải

Chọn A

Ta có $u_7 = u_1 + 6.d = 3 + 6.2 = 15$.

» Câu 19. Tìm số hạng thứ 11 của cấp số cộng có số hạng đầu bằng 3 và công sai $d = -2$.

A. -21. **B.** 23. **C.** -19. **D.** -17.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng ta có

$u_{11} = u_1 + 10d = 3 + 10.(-2) = -17$.

» Câu 20. Viết ba số xen giữa 2 và 22 để ta được một cấp số cộng có 5 số hạng?

A. 6, 12, 18. **B.** 8, 13, 18. **C.** 7, 12, 17. **D.** 6, 10, 14.

Lời giải

Chọn C

Xem cấp số cộng cần tìm là (u_n) có: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_5 = 22 \end{cases}$. Suy ra: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ d = 5 \end{cases}$.

Vậy cấp số cộng cần tìm là (u_n): $2, 7, 12, 17, 22$.

» Câu 21. Cho cấp số cộng (u_n), biết $u_2 = 3$ và $u_4 = 7$. Giá trị của u_{15} bằng

A. 27. **B.** 31. **C.** 35. **D.** 29.

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết $u_2 = 3$ và $u_4 = 7$ suy ra ta có hệ phương trình: $\begin{cases} u_1 + d = 3 \\ u_1 + 3d = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases}$.

Vậy $u_{15} = u_1 + 14d = 29$.

» Câu 22. Cho dãy số (u_n) là một cấp số cộng có $u_1 = 3$ và công sai $d = 4$. Biết tổng n số hạng đầu của dãy số (u_n) là $S_n = 253$. Tìm n.

A. 9. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Ta có $S_n = \dfrac{n\left(2u_1 + (n-1)d\right)}{2} \Leftrightarrow \dfrac{n\left(2.3 + (n-1).4\right)}{2} = 253$

$\Leftrightarrow 4n^2+2n-506=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=11 \\ n=-\frac{23}{2}(L) \end{array}\right.$.

» Câu 23. Cho (u_n) là cấp số cộng biết $u_3+u_{13}=80$. Tổng 15 số hạng đầu của cấp số cộng đó bằng

A. 800. **B.** 600. **C.** 570. **D.** 630

Lời giải

Chọn B

$S_{15}=u_1+u_2+u_3+...+u_{15}=(u_1+u_{15})+(u_2+u_{14})+(u_3+u_{13})+...+(u_7+u_9)+u_8$

Vì $u_1+u_{15}=u_2+u_{14}=u_3+u_{13}=...=u_7+u_9=2u_8$ và $u_3+u_{13}=80 \Rightarrow S=7.80+40=600$.

» Câu 24. Cho dãy (u_n) là một cấp số cộng với số hạng đầu 2 và số hạng thứ 36 là 72. Công sai của cấp số cộng (u_n) là

A. $d=3$ **B.** $d=-2$. **C.** $d=2$. **D.** $d=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_{36}=u_1+35d$ mà $u_{36}=72, u_1=2$ nên ta có: $72=2+35d \Leftrightarrow d=2$.

Vậy $d=2$.

» Câu 25. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_{2013}+u_6=1000$. Tổng 2018 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó là:

A. 1009000. **B.** 100800. **C.** 1008000. **D.** 100900.

Lời giải

Chọn A

Gọi d là công sai của cấp số cộng. Khi đó:

$u_{2013}+u_6=1000 \Leftrightarrow u_1+2012d+u_1+5d=1000 \Leftrightarrow 2u_1+2017d=1000$.

Ta có: $S_{2018}=2018u_1+\frac{2017.2018}{2}d=1009.(2u_1+2017d)=1009000$.

» Câu 26. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $\begin{cases} u_2-u_3+u_5=10 \\ u_4+u_6=26 \end{cases}$. Tính $S=u_1+u_4+u_7+...+u_{2011}$

A. $S=2023736$. **B.** $S=2023563$. **C.** $S=6730444$. **D.** $S=6734134$.

Lời giải

Chọn A

$\begin{cases} u_2-u_3+u_5=10 \\ u_4+u_6=26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+d-u_1-2d+u_1+4d=10 \\ u_1+3d+u_1+5d=26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+3d=10 \\ 2u_1+8d=26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=1 \\ d=3 \end{cases}$.

$u_4=10$, $u_7=19$, $u_{10}=28$...

Ta có u_1, u_4, u_7, u_{10}, ..., u_{2011} là cấp số cộng có $\begin{cases} u_1=1 \\ d=9 \\ n=671 \end{cases}$

$S=\frac{671}{2}(2.1+670.9)=2023736$.

» Câu 27. Gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên trong cấp số cộng (a_n). Biết $S_6=S_9$, tỉ số $\frac{a_3}{a_5}$ bằng:

A. $\frac{9}{5}$. **B.** $\frac{5}{9}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $S_6 = S_9 \Leftrightarrow \frac{6(2a_1+5d)}{2} = \frac{9(2a_1+8d)}{2} \Leftrightarrow a_1 = -7d.$

$\frac{a_3}{a_5} = \frac{a_1+2d}{a_1+4d} = \frac{-7d+2d}{-7d+4d} = \frac{5}{3}.$

» Câu 28. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1$ và tổng 100 số hạng đầu bằng 10000. Tính tổng $S = \frac{1}{u_1u_2} + \frac{1}{u_2u_3} + ... + \frac{1}{u_{99}u_{100}}$.

A. $S = \frac{100}{201}$. **B.** $S = \frac{200}{201}$. **C.** $S = \frac{198}{199}$. **D.** $S = \frac{99}{199}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi d là công sai của cấp số cộng đã cho.

Ta có: $S_{100} = 50(2u_1 + 99d) = 10000 \Rightarrow d = \frac{200-2u_1}{99} = 2$.

$\Rightarrow 2S = \frac{2}{u_1u_2} + \frac{2}{u_2u_3} + ... + \frac{2}{u_{99}u_{100}}$

$= \frac{u_2-u_1}{u_1u_2} + \frac{u_3-u_2}{u_2u_3} + ... + \frac{u_{99}-u_{100}}{u_{99}u_{100}}$

$= \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3} + ... + \frac{1}{u_{98}} - \frac{1}{u_{99}} + \frac{1}{u_{99}} - \frac{1}{u_{100}}$

$= \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{100}} = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_1+99d} = \frac{198}{199}$

$\Rightarrow S = \frac{99}{199}$.

» Câu 29. Người ta trồng 820 cây theo một hình tam giác như sau: Hàng thứ nhất trồng 1 cây, kể từ hàng thứ hai trở đi số cây trồng mỗi hàng nhiều hơn 1 cây so với hàng liền trước nó. Hỏi có tất cả bao nhiêu hàng cây?

A. 42. **B.** 41. **C.** 40. **D.** 39.

Lời giải

Chọn C

Giả sử trồng được n hàng cây $(n \ge 1, n \in \mathbb{N})$.

Số cây ở mỗi hàng lập thành cấp số cộng có $u_1 = 1$ và công sai $d = 1$.

Theo giả thiết: $S_n = 820 \Leftrightarrow \frac{n}{2}\left[2u_1 + (n-1)d\right] = 820$

$\Leftrightarrow n(n+1) = 1640 \Leftrightarrow n^2 + n - 1640 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 40 \\ n = -41 \end{array}\right.$

So với điều kiện, suy ra: $n = 40$. Vậy có tất cả 40 hàng cây.

» **Câu 30.** Một công ti trách nhiệm hữu hạn thực hiện việc trả lương cho các kĩ sư theo phương thức sau: Mức lương của quý làm việc đầu tiên cho công ti là $4,5$ triệu đồng/quý, và kể từ quý làm việc thứ hai, mức lương sẽ được tăng thêm $0,3$ triệu đồng mỗi quý. Hãy tính tổng số tiền lương một kĩ sư nhận được sau 3 năm làm việc cho công ti.

A. $83,7$. **B.** $78,3$. **C.** $73,8$. **D.** $87,3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có 3 năm bằng 12 quý.

Gọi $u_1, u_2, \ldots, u_{12}$ là tiền lương kĩ sư đó trong các quý.

Suy ra (u_n) là cấp số cộng với công sai $4,5$.

Vậy số tiền lương kĩ sư nhận được là

$$S_{12} = n\frac{2u_1 + (n-1)d}{2} = 12\frac{2\times 4,5 + 11\times 0,3}{2} = 73,8.$$

» **Câu 31.** Trong sân vận động có tất cả 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 15 ghế, các dãy liền sau nhiều hơn dãy trước 4 ghế, hỏi sân vận động đó có tất cả bao nhiêu ghế?

A. 2250. **B.** 1740. **C.** 4380. **D.** 2190.

Lời giải

Chọn D

Gọi $u_1, u_2, \ldots u_{30}$ lần lượt là số ghế của dãy ghế thứ nhất, dãy ghế thứ hai,… và dãy ghế số ba mươi. Ta có công thức truy hồi ta có $u_n = u_{n-1} + 4\ (n = 2,3,\ldots,30)$.

Ký hiệu: $S_{30} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{30}$, theo công thức tổng các số hạng của một cấp số cộng, ta được:

$$S_{30} = \frac{30}{2}\left(2u_1 + (30-1)4\right) = 15(2.15 + 29.4) = 2190.$$

» **Câu 32.** Một tam giác vuông có chu vi bằng 3 và độ dài các cạnh lập thành một cấp số cộng. Độ dài các cạnh của tam giác đó là:

A. $\frac{1}{3};1;\frac{5}{3}$. **B.** $\frac{1}{4};1;\frac{7}{4}$. **C.** $\frac{3}{4};1;\frac{5}{4}$. **D.** $\frac{1}{2};1;\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi d là công sai của cấp số cộng và các cạnh có độ dài lần lượt là $a-d$, a, $a+d$ $(0 < d < a)$.

Vì tam giác có chu vi bằng 3 nên $3a = 3 \Leftrightarrow a = 1$.

Vì tam giác vuông nên theo định lý Pytago ta có $(1+d)^2 = (1-d)^2 + 1^2 \Leftrightarrow 4d = 1 \Leftrightarrow d = \frac{1}{4}$.

Suy ra ba cạnh của tam giác có độ dài là $\frac{3}{4};1;\frac{5}{4}$.

» **Câu 33.** Người ta trồng 3003 cây theo hình tam giác như sau: Hàng thứ nhất trồng 1 cây, hàng thứ hai trồng 2 cây, hàng thứ ba trồng 3 cây,….Hỏi có bao nhiêu hàng cây.

A. 78. **B.** 243. **C.** 77. **D.** 244.

Lời giải

Chọn C

Giả sử có n hàng cây.

Theo đề bài ta có:

$$1+2+3+....+n=3003 \Leftrightarrow \frac{n.(n+1)}{2}=3003 \Leftrightarrow n^2+n-6006=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=77 \quad (TM) \\ n=-78 \; (L) \end{array}\right..$$

» Câu 34. Người ta trồng 3240 cây theo một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, kể từ hàng thứ hai trở đi số cây trồng mỗi hàng nhiều hơn 1 cây so với hàng liền trước nó. Hỏi có tất cả bao nhiêu hàng cây?

A. 81. **B.** 82. **C.** 80. **D.** 79.

Lời giải

Chọn C

Giả sử trồng được n hàng cây $(n \geq 1, n \in \mathbb{N})$.

Số cây ở mỗi hàng lập thành cấp số cộng có $u_1=1$ và công sai $d=1$.

Theo giả thiết:

$$S_n=3240 \Leftrightarrow \frac{n}{2}\left[2u_1+(n-1)d\right]=3240 \Leftrightarrow n(n+1)=6480 \Leftrightarrow n^2+n-6480=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=80 \\ n=-81 \end{array}\right.$$

So với điều kiện, suy ra: $n=80$.

Vậy có tất cả 80 hàng cây.

» Câu 35. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1=5$ và tổng của 40 số hạng đầu là 3320. Tìm công sai của cấp số cộng đó.

A. -4. **B.** 8. **C.** -8. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Gọi d là công sai của cấp số cộng.

Ta có tổng 40 số hạng đầu của cấp số cộng là: $S_{40}=\dfrac{40(2u_1+39d)}{2}=3320$.

$$\Leftrightarrow \frac{40(2.5+39d)}{2}=3320 \Leftrightarrow d=4.$$

B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai

» Câu 36. Cho dãy số hữu hạn gồm các số hạng: $-1;2;5;8;11;14;17$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Dãy số đã cho là không phải cấp số cộng		
(b)	Số hạng $u_1=-1$		
(c)	Nếu dãy số đã cho là một cấp số cộng thì công sai của cấp số cộng là $d=2$		
(d)	Tổng tất cả số hạng của dãy số bằng 56		

Lời giải

(a) Dãy số đã cho là không phải cấp số cộng.

Đặt: $u_1=-1; u_2=2; u_3=5; u_4=8; u_5=11; u_6=14; u_7=17$.

Ta có: $u_2-u_1=u_3-u_2=u_4-u_3=u_5-u_4=u_6-u_5=u_7-u_6=3$.

Vậy dãy số hữu hạn đã cho là một cấp số cộng.

» Chọn SAI.

(b) Số hạng $u_1=-1$

$u_1=-1$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) Nếu dãy số đã cho là một cấp số cộng thì công sai của cấp số cộng là $d=2$

Xét: $u_2-u_1=u_3-u_2=u_4-u_3=u_5-u_4=u_6-u_5=u_7-u_6=3$.

Công sai cấp số cộng là $d=3$.

» **Chọn** SAI.

(d) Tổng tất cả số hạng của dãy số bằng 56

Với $u_1=-1, n=7, d=3$ thì $S_n=\dfrac{n\left[2u_1+(n-1)d\right]}{2}=\dfrac{7\left[2(-1)+6.3\right]}{2}=56$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 37.** Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1=\dfrac{3}{2}$, công sai $d=\dfrac{1}{2}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Công thức cho số hạng tổng quát $u_n=1+\dfrac{n}{3}$		
(b)	5 là số hạng thứ 8 của cấp số cộng đã cho		
(c)	$\dfrac{15}{4}$ một số hạng của cấp số cộng đã cho		
(d)	Tổng 100 số hạng đầu của cấp số cộng (u_n) bằng 2620		

Lời giải

(a) Công thức cho số hạng tổng quát $u_n=1+\dfrac{n}{3}$

Ta có: $u_n=u_1+(n-1)d=\dfrac{3}{2}+(n-1)\cdot\dfrac{1}{2}=1+\dfrac{n}{2}$.

» **Chọn** SAI.

(b) 5 là số hạng thứ 8 của cấp số cộng đã cho

Xét $5=1+\dfrac{n}{2}\Rightarrow n=8\in\mathbb{N}^*$; suy ra 5 là số hạng thứ 8 của cấp số cộng đã cho.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) $\dfrac{15}{4}$ một số hạng của cấp số cộng đã cho

Xét $\dfrac{15}{4}=1+\dfrac{n}{2}\Rightarrow n=\dfrac{11}{2}\notin\mathbb{N}^*$; suy ra $\dfrac{15}{4}$ không là một số hạng của cấp số cộng đã cho.

» **Chọn** SAI.

(d) Tổng 100 số hạng đầu của cấp số cộng (u_n) bằng 2620

Tổng 100 số hạng đầu của cấp số cộng là: $S_{100}=\dfrac{100\left[2\cdot\dfrac{3}{2}+(100-1)\cdot\dfrac{1}{2}\right]}{2}=2625$.

» **Chọn** SAI.

» **Câu 38.** Cho cấp số cộng (u_n), biết rằng: $u_1=-3, u_6=27$, khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Công sai của cấp số cộng bằng 7		
(b)	Số hạng $u_{85}=501$		
(c)	Số hạng $u_{10}=52$		

(d)	Tổng của 85 số hạng đầu $S_{85}=21165$		

Lời giải

(a) Công sai của cấp số cộng bằng 7

Ta có: $u_6=u_1+5d\Leftrightarrow 27=-3+5d\Leftrightarrow d=6$.

» **Chọn** SAI.

(b) Số hạng $u_{85}=501$

Suy ra $u_n=u_1+(n-1)d=-3+(n-1)\cdot 6=-9+6n$.

Do đó $u_{85}=-9+6.85=501$

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) Số hạng $u_{10}=52$

Và $u_{10}=-9+6.10=51$

» **Chọn** SAI.

(d) Tổng của 85 số hạng đầu $S_{85}=21165$

$$S_{85}=\frac{85}{2}\left(2u_1+84d\right)=\frac{85}{2}[2\cdot(-3)+84\cdot 6]=21165$$

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 39.** Cho cấp số cộng (u_n), biết rằng: $u_1=5$ và tổng của 50 số hạng đầu bằng 5150, khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Công sai của cấp số cộng bằng 6		
(b)	Số hạng $u_{85}=341$		
(c)	Số hạng $u_{10}=42$		
(d)	Tổng của 85 số hạng đầu $S_{85}=14705$		

Lời giải

(a) Công sai của cấp số cộng bằng 6

Ta có: $S_{50}=\frac{50}{2}\left(2u_1+49d\right)=\frac{50}{2}\left(2\cdot 5+49d\right)=5150\Rightarrow d=4$.

» **Chọn** SAI.

(b) Số hạng $u_{85}=341$

Suy ra $u_n=u_1+\left(n-1\right)d=5+\left(n-1\right)4=1+4n$.

Do đó $u_{85}=1+4.85=341$

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) Số hạng $u_{10}=42$

Và $u_{10}=1+4.10=41$

» **Chọn** SAI.

(d) Tổng của 85 số hạng đầu $S_{85}=14705$

$$S_{85}=\frac{85}{2}\left(2u_1+84d\right)=\frac{85}{2}(2\cdot 5+84\cdot 4)=14705.$$

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 40.** Cho cấp số cộng (u_n) có $u_5=18$ và $4S_n=S_{2n}$ (trong đó S_n,S_{2n} theo thứ tự là tổng của n và $2n$ số hạng đầu của cấp số cộng).

	Mệnh đề	Đúng	Sai

(a)	Số hạng đầu của cấp số cộng (u_n) bằng 2		
(b)	Công sai của cấp số cộng (u_n) bằng 3		
(c)	Số hạng $u_{15}=58$		
(d)	Tổng 15 số hạng đầu của cấp số cộng bằng 350		

Lời giải

Gọi d là công sai của cấp số cộng, ta có: $u_5=18 \Leftrightarrow u_1+4d=18$;

Theo giả thiết $4S_n=S_{2n} \Leftrightarrow \frac{4n}{2}\left[2u_1+(n-1)d\right]=\frac{2n}{2}\left[2u_1+(2n-1)d\right]$

$\Leftrightarrow 4u_1+(2n-2)d=2u_1+(2n-1)d \Leftrightarrow 2u_1-d=0.$

(a) Số hạng đầu của cấp số cộng (u_n) bằng 2

Từ (1) và (2) suy ra $u_1=2$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) Công sai của cấp số cộng (u_n) bằng 3

Từ (1) và (2) suy ra $d=4$.

» Chọn SAI.

(c) Số hạng $u_{15}=58$

Số hạng tổng quát $u_n=2+(n-1)4=4n-2$ suy ra $u_{15}=58$

» Chọn ĐÚNG.

(d) Tổng 15 số hạng đầu của cấp số cộng bằng 350

Tổng 15 số hạng đầu cấp số cộng là:

$S_{15}=\frac{15}{2}(2u_1+14d)=\frac{15}{2}(2\cdot 2+14\cdot 4)=450.$

» Chọn SAI.

» Câu 41. Cho cấp số cộng (u_n), gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên của nó. Biết $S_7=77$ và $S_{12}=192$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Số hạng $u_1=5$		
(b)	Tổng $u_1+u_3=14$		
(c)	Công sai của cấp số cộng bằng		
(d)	Số hạng $u_{11}=25$		

Lời giải

(a) Số hạng $u_1=5$

Gọi d là công sai của cấp số cộng.

Ta có: $\begin{cases} S_7=77 \\ S_{12}=192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{2}(2u_1+6d)=77 \\ \frac{12}{2}(2u_1+11d)=192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7u_1+21d=77 \\ 12u_1+66d=192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=5 \\ d=2 \end{cases}.$

» Chọn ĐÚNG.

(b) Tổng $u_1+u_3=14$

Khi đó: $u_n=u_1+(n-1)d=5+2(n-1)=3+2n$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) Công sai của cấp số cộng bằng 3

Công sai của cấp số cộng $d=2$.

» **Chọn** SAI.

(d) Số hạng $u_{11}=25$

Khi đó: $u_{11}=3+2.11=25$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 42.** Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d<0$ thoả mãn $\begin{cases} u_1+u_7=26 \\ u_2^2+u_6^2=466 \end{cases}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Số hạng $u_1=25$		
(b)	Công sai $d=-3$		
(c)	Số hạng $u_{10}=-11$		
(d)	Số hạng $u_{2024}=-8067$		

Lời giải

$$\begin{cases} u_1+u_7=26 \\ u_2^2+u_6^2=466 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1+6d=26 \\ (u_1+d)^2+(u_1+5d)^2=466 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=13-3d & (1) \\ (u_1+d)^2+(u_1+5d)^2=466 & (2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2), ta được: $(13-2d)^2+(13+2d)^2=466 \Leftrightarrow 8d^2+338=466 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=4 \\ d=-4 \end{array}\right.$

(a) Số hạng $u_1=25$

khi đó $u_1=25$

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) Công sai $d=-3$

Vì $d<0$ nên ta nhận $d=-4$,

» **Chọn** SAI.

(c) Số hạng $u_{10}=-11$

Ta có: $u_n=u_1+(n-1)d=25+(n-1)(-4)=29-4n$.

Nên $u_{10}=-11$

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) Số hạng $u_{2024}=-8067$

Và $u_{2024}=-8067$

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 43.** Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=5$ và $d=-7$. Khi đó

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$u_{11}=-65$		
(b)	$u_5+u_7=-50$		
(c)	Số -849 là số hạng thứ 123 của cấp số cộng		
(d)	Số -114 là số hạng thứ 18 của cấp số cộng		

Lời giải

Công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng là:

$$u_n=u_1+(n-1)d=5+(n-1)\cdot(-7)=-7n+12$$

(a) $u_{11}=-65$

Ta có: $u_{11}=-7.11+12=-65$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $u_5+u_7=-50$

$u_5+u_7=(-7.5+12)+(-7.7+12)=-60$

» **Chọn** SAI.

(c) Số -849 là số hạng thứ 123 của cấp số cộng

Ta có: $-849=-7n+12\Rightarrow n=123$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) Số -114 là số hạng thứ 18 của cấp số cộng

Ta có $-114=-7n+12\Rightarrow n=18$

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 44.** Cho cấp số cộng (u_n) thoả mãn $\begin{cases}u_1-u_3+u_5=15\\u_1+u_6=27\end{cases}$. Khi đó

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Số hạng $u_1=21$		
(b)	Công sai của cấp số cộng bằng -2		
(c)	Số hạng $u_{11}=-9$		
(d)	Số -6048 là số hạng thứ 2024		

Lời giải

(a) Số hạng $u_1=21$

Áp dụng công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng: $u_n=u_1+(n-1)d$.

Khi đó: $\begin{cases}u_1-u_3+u_5=15\\u_1+u_6=27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1-(u_1+2d)+(u_1+4d)=15\\u_1+(u_1+4d)=27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+2d=15\\2u_1+5d=27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=21\\d=-3\end{cases}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) Công sai của cấp số cộng bằng -2

» **Chọn** SAI.

(c) Số hạng $u_{11}=-9$

Suy ra $u_n=u_1+(n-1)d=21+(n-1)(-3)=-3n+24$

Vậy $u_{11}=-9$

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) Số -6048 là số hạng thứ 2024

Ta có $-6048=-3n+24\Rightarrow n=2024$

» **Chọn** ĐÚNG.

C. *Câu hỏi – Trả lời ngắn*

» **Câu 45.** Tìm số hạng đầu u_1 của cấp số cộng (u_n) biết rằng: $\begin{cases}u_4=10\\u_4+u_6=26\end{cases}$

Lời giải

✓ *Trả lời: 1*

$\begin{cases}u_4=10\\u_4+u_6=26\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+3d=10\\u_1+3d+u_1+5d=26\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+3d=10\\2u_1+8d=26\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=1\\d=3\end{cases}$

Vậy cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 1$ công sai $d = 3$.

» **Câu 46.** Trong một khán phòng có tất cả 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 15 ghế, các dãy liền sau nhiều hơn dãy trước đó 4 ghế, hỏi khán phòng đó có tất cả bao nhiêu ghế?

Lời giải

✓ ***Trả lời: 2190***

Gọi $u_1, u_2, \ldots, u_{30}$ lần lượt là số ghế của dãy ghế thứ nhất, dãy ghế thứ hai,., dãy ghế thứ ba mươi.

Khi đó, (u_n) là một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 15$, công sai $d = 4$ (trong đó $1 \le n \le 30$). Gọi S_{30} là tổng số ghế trong khán phòng. Ta có:

$$S_{30} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{30} = \frac{30}{2}\left[2u_1 + (30-1)d\right] = 15(2.15 + 29.4) = 2190.$$

» **Câu 47.** Cho bốn số thực tạo thành một cấp số cộng có tổng bằng 28 và tổng các bình phương của chúng bằng 276. Tìm tích của bốn số đó.

Lời giải

✓ ***Trả lời: 585***

Gọi bốn số cần tìm theo thứ tự cấp số cộng là: $a-3r, a-r, a+r, a+3r$.

Ta có: $\begin{cases} a-3r+a-r+a+r+a+3r = 28 \\ (a-3r)^2 + (a-r)^2 + (a+r)^2 + (a+3r)^2 = 276 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 28 \\ 4a^2 + 20r^2 = 276 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ r^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ r = \pm 2 \end{cases}.$

Vậy bốn số cần tìm là $1,5,9,13$; tích của chúng bằng 585

» **Câu 48.** Cho cấp số cộng có số hạng tổng quát $u_n = 5n - 7$, biết tổng n số hạng đầu của cấp số cộng là $S_n = 817$. Tìm n.

Lời giải

✓ ***Trả lời: 19***

Gọi u_1 là số hạng đầu của cấp số cộng (u_n).

Vì $u_n = 5n - 7$ nên $u_1 = 5.1 - 7 = -2$.

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} \Leftrightarrow 817 = \frac{n\left[-2 + (5n-7)\right]}{2} \Leftrightarrow 5n^2 - 9n - 1634 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 19 \\ n = -\dfrac{86}{5} \end{array}\right.$$

Với điều kiện $n \in \mathbb{N}^*$, ta tìm được $n = 19$.

» **Câu 49.** Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12, u_{14} = 18$. Tìm u_9.

Lời giải

✓ ***Trả lời: 3***

Ta có: $\begin{cases} u_4 = u_1 + 3d \\ u_{14} = u_1 + 13d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = -12 \\ u_1 + 13d = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 3 \\ u_1 = -21 \end{cases} \Rightarrow u_9 = u_1 + 8d = -21 + 8.3 = 3.$

» **Câu 50.** Giải phương trình sau: $2 + 7 + 12 + \ldots + x = 245$.

Lời giải

✓ ***Trả lời: 47***

Ta có dãy số $2,7,12,\ldots,x$ lập thành cấp số cộng có $\begin{cases} u_1 = 2 \\ d = 5 \\ u_n = x \\ S_n = 245 \end{cases}$

Suy ra: $S_n = 245 \Leftrightarrow 245 = \dfrac{n}{2}\left[2u_1 + (n-1)d\right] \Leftrightarrow 245.2 = n\left[2.2 + (n-1)5\right] \Rightarrow n = 10$.

Vậy $x = u_{10} = u_1 + 9d = 47$.

» **Câu 51.** Một ngôi nhà hình kim tự tháp (có gạch nâu ốp bên ngoài) được bao quanh bởi rất nhiều cây cối và là nơi tuyệt vời để nghỉ mát mùa hè; ngôi nhà có chiều dài, chiều rộng là $6,8m$, chiều cao là $2,72m$. Khi xây dựng ngôi nhà, người chủ đã tính toán số viên gạch nâu hình hộp chữ nhật cần ốp tường; biết hàng trên ít hơn hàng dưới 1 viên, hàng trên cùng là 1 viên, kích thước viên gạch nâu hình hộp chữ nhật là $0,2m - 0,08m - 1m$. Hãy dự tính số viên gạch nâu ốp tường cả bốn mặt của ngôi nhà.

Lời giải

✓ ***Trả lời: 2380***

Một bức tường có 2,72:0,08 = 34 hàng gạch.

Số gạch ở mỗi hàng tạo thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 1$ và công sai $d = 1$.

Số viên gạch trên một bức tường là $S_{34} = 34.1 + \dfrac{34.33}{2} \cdot 1 = 595$ viên gạch.

Vì 4 mặt đều bằng nhau nên có 4.595 = 2380 viên gạch người chủ dự tính đặt mua.

» **Câu 52.** Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng: $x^3 - 3mx^2 + 2m(m-4)x + 9m^2 - m = 0$.

Lời giải

✓ ***Trả lời: 1***

Phương trình: $x^3 - 3mx^2 + 2m(m-4)x + 9m^2 - m = 0 \quad (*)$

Giả sử phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 lập thành một cấp số cộng.

Theo định lý Vi-ét đối với phương trình bậc ba, ta có: $x_1 + x_2 + x_3 = 3m \qquad (1)$

Vì x_1, x_2, x_3 lập thành một cấp số cộng nên $x_1 + x_3 = 2x_2 \qquad (2)$

Thay (2) vào (1) ta được: $3x_2 = 3m \Leftrightarrow x_2 = m$.

Thay $x_2 = m$ vào phương trình $(*)$ ta được:

$$m^3 - 3m \cdot m^2 + 2m(m-4) \cdot m + 9m^2 - m = 0 \Leftrightarrow m^2 - m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right.$$

Với $m = 0$, ta có: $x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (loại vì phương trình có một nghiệm duy nhất).

Với $m = 1$, ta có: $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = -2; x = 4$ (thỏa mãn).

Vậy $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

---------------------------- Hết ----------------------------

Chương 02

Bài 3.

CẤP SỐ NHÂN

A. Lý thuyết

1. Cấp số nhân

Định nghĩa:

- ***Cấp số nhân*** là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với một số không đổi q.

  Nghĩa là:

  $$(u_n) \text{ là cấp số nhân } \Leftrightarrow n \geq 2, u_n = q.u_{n-1}$$

  Số q được gọi là công bội của cấp số nhân $\left(q = \dfrac{u_n}{u_{n-1}}; n \geq 1\right)$

- **Đặc biệt:**

  Khi $q = 0$, *cấp số nhân có dạng* $u_1, 0, 0, 0, \ldots\ldots$

  Khi $q = 1$, *cấp số nhân có dạng* $u_1, u_1, u_1, \ldots\ldots$

  Khi $u_1 = 0$, *cấp số nhân có dạng* $0, 0, 0, 0, \ldots\ldots$

2. Số hạng tổng quát

Định lý:

- Nếu một cấp số nhân có số hạng đầu là u_1 và công bội q thì số hạng tổng quá u_n của nó tính bởi công thức

  $$u_n = q^{n-1}.u_1,\ n \geq 2$$

3. Tính chất các số hạng của cấp số nhân

Định lý:

- Trong một cấp số nhân, bình phương của mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là trung bình nhân của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là:

  $$u_k = \sqrt{u_{k-1}.u_{k+1}} \text{ hay } u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1}\ (k \geq 2)$$

- **Hệ quả:** Nếu a, b, c là ba số khác 0, thì " ba số a, b, c theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân khi và chỉ khi $ac = b^2$

4. Tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng

Định lý:

- Cho cấp số nhân $\left(u_n\right)$ với công bội $q \neq 1$.

  Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

  » Nếu $q = 1$ thì $S_n = n$.

  » Nếu $q \neq 1$ thì $S_n = \dfrac{u_1\left(1 - q^n\right)}{1 - q}$.

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Xác định dãy đã cho là cấp số nhân

Phương pháp

Nếu (u_n) là một cấp số nhân với công bội q thì $u_{n+1} = u_n q$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Để chứng minh một dãy đã cho là 1 cấp số cộng thì ta chứng minh:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q; n \ge 1 \text{ với } q \text{ là một hằng số không đổi}$$

Ví dụ 1.1.

Chứng minh rằng dãy số $(v_n): v_n = (-1)^n.3^{2n}$ là một cấp số nhân.

Lời giải

$\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{(-1)^{n+1}3^{2(n+1)}}{(-1)^n 3^{2n}} = -9, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy $(v_n): v_n = (-1)^n.3^{2n}$ là một cấp số nhân.

Ví dụ 1.2.

Chứng minh các dãy số (u_n) sau là cấp số nhân biết:

(1) $u_n = \dfrac{3}{5}.2^n$ (2) $u_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

Lời giải

(1) $u_n = \dfrac{3}{5}.2^n$

Với $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\frac{3}{5}.2^{n+1}}{\frac{3}{5}.2^n} = 2$ không đổi.

Suy ra dãy số (u_n) là cấp số nhân với công bội bằng 2

(2) $u_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Với $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^n} = -\dfrac{1}{2}$ không đổi.

Suy ra dãy số (u_n) là cấp số nhân với công bội bằng $-\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 1.3.

Chứng minh các dãy số sau là một cấp số nhân. Xác định công bội và số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó?

(1) Dãy số (u_n) với $u_n = (-3)^{2n+1}$ (2) Dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n.5^{3n+2}$

Lời giải

(1) Dãy số (u_n) với $u_n = (-3)^{2n+1}$

Xét $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} = \dfrac{(-3)^{2n+1}}{(-3)^{2(n-1)+1}} = \dfrac{(-3)^{2n-1+2}}{(-3)^{2n-1}} = (-3)^2 = 9$

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(-3)^{2(n+1)+1}}{(-3)^{2n+1}} = \dfrac{(-3)^{2n+1+2}}{(-3)^{2n+1}} = (-3)^2 = 9$

Vậy dãy số (u_n) với $u_n = (-3)^{2n+1}$ là cấp số nhân với công bội $q = 9$

(2) Dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n.5^{3n+2}$.

Xét $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} = \dfrac{(-1)^n.5^{3n+2}}{(-1)^{n-1}.5^{3(n-1)+2}} = \dfrac{(-1)^{n-1}.(-1).5^{3n-1+3}}{(-1)^{n-1}.5^{3n-1}} = (-1).5^3 = -125$

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(-1)^{n+1}.5^{3(n+1)+2}}{(-1)^n.5^{3n+2}} = \dfrac{(-1)^n.(-1).5^{3n+2+3}}{(-1)^n.5^{3n+2}} = (-1).5^3 = -125$

Vậy dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n.5^{3n+2}$ là cấp số nhân với công bội $q = -125$

Ví dụ 1.4.

Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số nhân?

(1) Dãy số (x_n), với $x_n = n^2$.

(2) Dãy số (y_n), với $y_n = \sqrt{5}^{2n-3}$.

(3) Dãy số (z_n), với $z_n = \dfrac{2}{n}$.

(4) Dãy số (w_n), với $w_n = \dfrac{3^n+1}{3^{n+1}}$.

Lời giải

(1) Dãy số (x_n), với $x_n = n^2$.

Cách 1: Ba số hạng đầu của dãy số (x_n) là 1, 4, 9. Vì $4 = 1.4$; $9 \neq 4.4$ nên dãy số (x_n) không phải là cấp số nhân.

Cách 2: Ta có $x_{n+1} = (n+1)^2$ nên $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{(n+1)^2}{n^2} = 1 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}$ (phụ thuộc vào n không phải là số không đổi). Do đó (x_n) không phải là cấp số nhân.

(2) Dãy số (y_n), với $y_n = \sqrt{5}^{2n-3}$.

Ta có $y_{n+1} = \left(\sqrt{5}\right)^{2(n+1)-3} = \sqrt{5}^{2n-1}$ nên $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} = \sqrt{5}^2 = 5$ (là số không đổi). Do đó, $\left(y_n\right)$ là cấp số nhân với công bội $q = 5$.

(3) Dãy số $\left(z_n\right)$, với $z_n = \dfrac{2}{n}$.

Ta có $z_{n+1} = \dfrac{2}{n+1}$ nên $\dfrac{z_n+1}{z_n} = \dfrac{n}{n+1}$ (phụ thuộc vào n, không phải là số không đổi). Do đó $\left(z_n\right)$ không phải là một cấp số nhân.

(4) Dãy số $\left(w_n\right)$, với $w_n = \dfrac{3^n+1}{3^{n+1}}$.

Ba số hạng đầu của dãy số $\left(\mathrm{w}_n\right)$ là $\dfrac{4}{9}, \dfrac{10}{27}, \dfrac{28}{81}$.

Vì $\dfrac{10}{27} = \dfrac{4}{9}.\dfrac{5}{6}, \dfrac{28}{81} \neq \dfrac{10}{27}.\dfrac{5}{6}$ nên dãy số $\left(\mathrm{w}_n\right)$ không phải là cấp số nhân.

Dạng 2. Xác định các yếu tố qua số hạng tổng quát

Phương pháp

- Nếu một cấp số nhân có số hạng đầu là u_1 và công bội q thì số hạng tổng quá u_n của nó tính bởi công thức:

$$u_n = q^{n-1}.u_1,\ n \geq 2$$

Ví dụ 2.1.

Cho cấp số nhân (u_n) với công bội q < 0 và $u_2 = 4, u_4 = 9$. Tìm u_1.

Lời giải

Vì $q < 0, u_2 > 0$ nên $u_3 < 0$. Do đó $u_3 = -\sqrt{u_2.u_4} = -\sqrt{4.9} = -6$; $u_2^2 = u_1.u_3 \Rightarrow u_1 = \dfrac{u_2^2}{u_3} = \dfrac{4^2}{-6} = -\dfrac{8}{3}$.

Ví dụ 2.2.

Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_1 + u_5 = 51; u_2 + u_6 = 102$.

Hỏi số 12288 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân (u_n)?

Lời giải

Gọi q là công bội của cấp số nhân đã cho.

Theo đề bài, ta có $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q^4\right) = 51 \\ u_1q\left(1+q^4\right) = 102 \end{cases} \Rightarrow q = 2 \Rightarrow u_1 = 3 \Rightarrow u_n = 3.2^{n-1}$.

Mặt khác $u_n = 12288 \Leftrightarrow 3.2^{n-1} = 12288 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 2^{12} \Leftrightarrow n = 13$.

Ví dụ 2.3.

Cho cấp số nhân (u_n) thỏa: $\begin{cases} u_4 = \dfrac{2}{27} \\ u_3 = 243u_8 \end{cases}$.

(1) Viết năm số hạng đầu của cấp số nhân.

(2) Số $\dfrac{2}{6561}$ là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số?

Lời giải

Gọi q là công bội của cấp số.

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} u_1q^3 = \dfrac{2}{27} \\ u_1q^2 = 243.u_1q^7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^3 = \dfrac{2}{27} \\ q^5 = \dfrac{1}{243} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \dfrac{1}{3} \\ u_1 = 2 \end{cases}$

(1) Viết năm số hạng đầu của cấp số nhân.

Năm số hạng đầu của cấp số là: $u_1 = 2, u_2 = \frac{2}{3}, u_3 = \frac{2}{9}; u_4 = \frac{2}{27}, u_5 = \frac{2}{81}$.

(2) Số $\frac{2}{6561}$ là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số?

Ta có: $u_n = \frac{2}{3^{n-1}} \Rightarrow u_n = \frac{2}{6561} \Leftrightarrow 3^{n-1} = 6561 = 3^8 \Rightarrow n = 9$

Vậy $\frac{2}{6561}$ là số hạng thứ 9 của cấp số.

Ví dụ 2.4.

Cho tứ giác $ABCD$ có 4 góc tạo thành 1 cấp số nhân có công bội bằng 2.
Tìm số đo 4 góc ấy.

Lời giải

$$\begin{cases} U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = 360^0 \\ q = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_1 \dfrac{1-q^4}{1-q} = 360^0 \\ q = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_1 = 24^0 \\ q = 2 \end{cases}$$

Vậy số đo 4 góc là: $24°; 48°; 96°; 192°$.

Ví dụ 2.5.

Cho 5 số lập thành một cấp số nhân. Biết công bội bằng một phần tư số hạng đầu tiên và tổng 2 số hạng đầu bằng 8.

Lời giải

$$\begin{cases} U_1 + U_2 = 8 \\ q = \dfrac{1}{4} U_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_1^2 + 4U_1 = 32 \\ q = \dfrac{1}{4} U_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} U_1 = -8 \\ U_1 = 4 \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} q = -2 \\ q = 1 \end{array} \right. \end{cases}$$

Vậy CSN là: $-8; 16; -32; 64; -128; 4; 4; 4; 4; 4$

.

Dạng 3. Tính tổng n số hạng đầu của một cấp số nhân

Phương pháp

- Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 1$.

Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$

» Nếu $q = 1$ thì $S_n = n$. » Nếu $q \neq 1$ thì $S_n = \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q}$.

Ví dụ 3.1.

Tính tổng sau: $A = 2 - 1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{512}$

Lời giải

Ta có các số hạng trong tổng lập thành cấp số nhân với

$$\begin{cases} u_1 = 2, q = -\dfrac{1}{2} \\ u_n = \dfrac{1}{512} = 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 2, q = -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{1024} = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 2, q = -\dfrac{1}{2} \\ n = 11 \end{cases}.$$

Suy ra $A = S_{11} = u_1 \cdot \dfrac{q^{11} - 1}{q - 1} = 2 \cdot \dfrac{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{11} - 1}{-\dfrac{1}{2} - 1} = \dfrac{638}{512}$.

Ví dụ 3.2.

Cho n là số tự nhiên ≥ 2, tính tổng sau: $S_n = \left(2 + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(2^2 + \dfrac{1}{2^2}\right)^2 + \ldots + \left(2^n + \dfrac{1}{2^n}\right)^2$

Lời giải

Ta có $S_n = \left(2 + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(2^2 + \dfrac{1}{2^2}\right)^2 + \ldots + \left(2^n + \dfrac{1}{2^n}\right)^2$

$$= \left(2^2 + 2^4 + 2^6 + \ldots + 2^{2n}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \ldots + \frac{1}{2^{2n}}\right) + 2n$$

$$= 2^2 \cdot \frac{2^{2n} - 1}{3} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{\dfrac{1}{2^{2n}} - 1}{\dfrac{1}{4} - 1} + 2n = \frac{2^{2n+2} - 4}{3} + \frac{1 - \dfrac{1}{2^{2n}}}{3} + 2n = \frac{2^{2n} - \dfrac{1}{2^{2n}} - 3}{3} + 2n.$$

Ví dụ 3.3.

Tính tổng sau: $S_n = 5 + 55 + 555 + \ldots + \underbrace{555\ldots5}_{n}$

Lời giải

$$S_n = 5+55+555+\ldots+\underbrace{555\ldots5}_{n} = 5(1+11+111+\ldots+\underbrace{111\ldots1}_{n})$$

$$= \frac{5}{9}\left(10-1+10^2-1+10^3-1+\ldots+10^n-1\right) = \frac{5}{9}\left(10+10^2+10^3+\ldots+10^n-n\right)$$

$$= \frac{5}{9}\left(10.\frac{10^n-1}{9}-n\right) = \frac{5}{81}.10^{n+1}-\frac{50}{81}-\frac{5n}{9}\ .$$

Ví dụ 3.4.

Giải phương trình sau: $2+4+8+\ldots+y=1022$ biết y là số hạng thứ n của cấp số nhân.

Lời giải

Ta có các số hạng trong tổng lập thành cấp số nhân với

$$\begin{cases} u_1 = 2, q = 2 \\ u_n = y; S_n = 1022 \end{cases} \Rightarrow 1022 = 2.\frac{2^n-1}{2-1}.$$

$2^n = 512 = 2^9 \Rightarrow n = 9 \Rightarrow y = u_9 = 512$.

Vậy $y = 512$.

Ví dụ 3.5.

Giải phương trình sau: $5^2.5^4.5^8\ldots5^{2x} = (0,04)^{-63}$.

Lời giải

$5^2.5^4.5^8\ldots5^{2x} = (0,04)^{-63}$

$\Leftrightarrow 5^{2+4+8+\ldots+2x} = \left(\frac{1}{25}\right)^{-63}$

$\Leftrightarrow 2+4+8+\ldots+2x = 126$.

Ta có các số hạng trong tổng lập thành cấp số nhân với $\begin{cases} u_1 = 2, q = 2 \\ u_x = 2x; S_x = 126 \end{cases} \Rightarrow 126 = 2.\frac{2^x-1}{2-1}$.

Khi đó $2+4+8+\ldots+2x = 126 \Leftrightarrow 2.\frac{2^x-1}{2-1} = 126 \Leftrightarrow 2^x-1 = 63 \Leftrightarrow 2^x = 64 \Leftrightarrow x = 6$

Vậy $x = 6$.

Dạng 4. Cấp số nhân liên quan hình học

Phương pháp

- Để giải các bài toán cấp số nhân liên quan hình học, ngoài vận dụng các tính chất của cấp số nhân, tính chất hình học thuần túy như vuông,.. cần vận dụng linh hoạt các hệ thức lượng trong tam giác, các công thức lượng giác.

Ta chú ý các tính chất sau:

(1) Tổng các góc ở đỉnh đa giác lồi bằng $360°$.

(2) Định lí Cô-sin trong tam giác:

Cho tam giác ΔABC với $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

(3) Định lí hàm sin: $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$.

...

Ví dụ 4.1.

Tìm 4 góc của một tứ giác, biết rằng các góc đó lập thành một cấp số nhân và góc cuối gấp 9 lần góc thứ hai.

Lời giải

Từ giả thiết gọi bốn góc là $A = u_1$, $B = u_2$, $C = u_3$, $D = u_4$ lập thành cấp số nhân.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} A + B + C + D = 360° \\ D = 9B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1 + q + q^2 + q^3\right) = 360 \\ u_1.q^3 = 9u_1q \end{cases} \Rightarrow q = 3 \Rightarrow u_1 = 9$.

Vậy 4 góc đó là $9°$, $27°$, $81°$, $243°$.

Ví dụ 4.2.

Độ dài các cạnh của ΔABC lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng ΔABC có hai góc không quá $60°$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \le b \le c \Rightarrow A \le B \le C$.

Từ giả thiết gọi ba cạnh là $a = u_1$, $b = u_2$, $c = u_3$ lập thành cấp số nhân. Suy ra $b^2 = ac$.

Mà theo định lí cosin ta có $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B \ge 2ac - 2ac\cos B$

$\Leftrightarrow ac \ge 2ac - 2ac\cos B \Leftrightarrow 1 \ge 2 - 2\cos B \Leftrightarrow \cos B \ge \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow B \le 60°$,

từ $A \le B \le C$ suy ra $A \le 60°$.

Ví dụ 4.3.

Tìm điều kiện cho một cấp số nhân để ba số hạng liên tiếp của nó là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Lời giải

Gọi ba cạnh của tam giác đó lần lượt là u_1, u_1q, u_1q^2 ($u_1 > 0, q > 0$) (q là công bội).

» Nếu $q > 1$ thì ba số hạng liên tiếp của cấp số nhân đó là $u_1 < u_1q < u_1q^2$.

Theo bất đẳng thức trong tam giác: $u_1q^2 < u_1 + u_1q \Leftrightarrow \begin{cases} q^2 - q - 1 < 0 \\ q > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < q < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

» Nếu $0 < q < 1$ thì ba số hạng liên tiếp của cấp số nhân đó là $u_1 > u_1q > u_1q^2$.

Theo bất đẳng thức trong tam giác: $u_1 > u_1q + u_1q^2 \Leftrightarrow \begin{cases} q^2 + q - 1 < 0 \\ 0 < q < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < q < 1$.

Vậy để ba số hạng liên tiếp của cấp số nhân là độ dài ba cạnh của một tam giác thì công bội $q \in \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$.

Ví dụ 4.4.

Số đo ba kích thước của hình hộp chữ nhật lập thành một cấp số nhân. Biết thể tích của khối hộp là $125\,\text{cm}^3$ và diện tích toàn phần là $175\,\text{cm}^2$. Tính tổng số đo ba kích thước của hình hộp chữ nhật đó.

Lời giải

Vì ba kích thước của hình hộp chữ nhật lập thành một cấp số nhân nên ta có thể gọi ba kích thước đó là $\dfrac{a}{q}$, q, aq.

Thể tích của khối hình hộp chữ nhật là $V = \dfrac{a}{q}.a.qa = a^3 = 125 \Rightarrow a = 5$.

Diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật là

$$S_{tp} = 2\left(\frac{a}{q}.a + a.aq + aq.\frac{a}{q} \right) = 2a^2\left(1 + q + \frac{1}{q} \right) = 50\left(1 + q + \frac{1}{q} \right).$$

Theo giả thiết, ta có $50\left(1 + q + \dfrac{1}{q} \right) = 175 \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = 2 \\ q = \dfrac{1}{2} \end{array} \right.$.

Với $q = 2$ hoặc $q = \dfrac{1}{2}$ thì kích thước của hình hộp chữ nhật là $2,5\,\text{cm}$; $5\,\text{cm}$; $10\,\text{cm}$. Suy ra tổng ba kích thước này là $2,5 + 5 + 10 = 17,5\,\text{cm}$.

Ví dụ 4.5.

Cho α, β, γ đều khác $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Giả sử $\sin^2\alpha$, $\sin^2\beta$, $\sin^2\gamma$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng đồng thời $\sin\beta \neq 0$ và $\tan\alpha\tan\gamma = 1$. Chứng minh rằng $\tan\alpha$, $\tan\beta$, $\tan\gamma$ lập thành cấp số nhân.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $\sin^2\beta - \sin^2\alpha = \sin^2\gamma - \sin^2\beta \Leftrightarrow \cos^2\beta - \cos^2\alpha = \cos^2\gamma - \cos^2\beta$.

Từ đó suy ra

$$\frac{1}{1+\tan^2\beta} - \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1+\tan^2\gamma} - \frac{1}{1+\tan^2\beta} \Leftrightarrow \frac{2}{1+\tan^2\beta} = \frac{2+\tan^2\alpha+\tan^2\gamma}{1+\tan^2\alpha+\tan^2\gamma+\tan^2\alpha\tan^2\gamma}$$

Vì $\tan\alpha\tan\gamma = 1$ nên ta được $\tan^2\beta = \tan\alpha\tan\gamma$. Vậy $\tan\alpha, \tan\beta, \tan\gamma$ lập thành cấp số nhân.

Ví dụ 4.6.

Cho tam giác ABC có $A = 90^0$ và $a, \dfrac{b\sqrt{6}}{3}, c$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Tính góc B, C.

Lời giải

Do $a.\dfrac{b\sqrt{6}}{3}, c$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân nên ta có

$$\frac{\frac{b\sqrt{6}}{3}}{a} = \frac{c}{\frac{b\sqrt{6}}{3}} \Leftrightarrow \frac{2}{3}\cdot\frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow \frac{2}{3}\sin B = \tan C \Leftrightarrow \frac{2}{3}\cos C = \frac{\sin C}{\cos C}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 C - 3\sin C = 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 C - 3\sin C + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin C = \frac{1}{2} \\ \sin C = -2 \end{array}\right. \Rightarrow C = 30^0 \Rightarrow B = 60^0$$

Ví dụ 4.7.

Cho tam giác ABC có $C - A = 60^0$ và $\sin A, \sin B, \sin C$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Tính góc A, B, C (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị) .

Lời giải

Do $\sin A, \sin B, \sin C$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân nên ta có

$$\sin^2 B = \sin A \cdot \sin C \Leftrightarrow \sin^2 B = \frac{1}{2}\left(\cos(A-C) - \cos(A+C)\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 B = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + \cos B\right] \Leftrightarrow 4\sin^2 B = 1 + 2\cos B \Leftrightarrow 4\cos^2 B + 2\cos B - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos B = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{4} \\ \cos B = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{4} \end{array}\right. \quad \text{(Loại)} \Rightarrow B \approx 49^0$$

Giải hệ $\begin{cases} C - A = 60^0 \\ C + A = 180^0 - 49^0 = 131^0 \end{cases}$ Ta được $A = 35,5^0; C = 95,5^0$

Dạng 5. Nghiệm của phương trình liên quan cấp số nhân

Phương pháp

(1) Định lý Vi-ét đối với phương trình bậc ba:

Nếu phương trình bậc ba $ax^3+bx^2+cx+d=0$ có ba nghiệm $x_1,\ x_2,\ x_3$

Thì $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$

(2) Sử dụng kết quả này kết hợp với giả thiết của bài toán để tìm ra nghiệm của phương trình hoặc xác định mối liên hệ giữa các hệ số của phương trình.

Trường hợp nếu $x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a}$ là hằng số thì điều kiện cần để phương trình bậc ba nói trên có ba nghiệm lập thành một cấp số nhân là $x=\sqrt[3]{-\dfrac{d}{a}}$ là nghiệm của phương trình bậc ba đó.

Ví dụ 5.1.

Cho phương trình $x^2-12x+m=0$ (1) và $x^2-48x+q=0$ (2). Giả sử (1) có hai nghiệm là $x_1,\ x_2$; (2) có hai nghiệm là $x_3,\ x_4$. Tìm $m,\ q$ biết rằng $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân tăng.

Lời giải

Phương trình (1) có nghiệm khi $\Delta'=36-m\ge 0\Leftrightarrow m\le 36$.

Phương trình (2) có nghiệm khi $\Delta'=576-q\ge 0\Leftrightarrow q\le 576$.

Theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1+x_2=12 \\ x_1x_2=m \end{cases}$ và $\begin{cases} x_3+x_4=48 \\ x_3x_4=q \end{cases}$.

Gọi d là công bội của cấp số nhân đã cho ta có $x_2=x_1d$; $x_3=x_1d^2$; $x_4=x_1d^3$,

Do đó $\begin{cases} x_1+x_2=12 \\ x_3+x_4=48 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_1(1+d)=12 \\ x_1(d^2+d^3)=48 \end{cases}$ suy ra $d=\pm 2$. Vì cấp số nhân tăng nên $d=2$.

Ví dụ 5.2.

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để phương trình $x^3+x^2+2ax+a=0$ có ba nghiệm lập thành cấp số nhân.

Lời giải

Theo tính chất của cấp số nhân và định lý Vi-ét ta được

$$\begin{cases} x_1x_3 = x_2^2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 2a \\ x_1x_2x_3 = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2^2 = -a \\ x_2^2 - (1 + x_2)x_2 = 2a \\ x_1x_2x_3 = -a \end{cases}.$$

Từ đó ta được $\begin{cases} x_2^2 = -a \\ x_2 - 2 = -2a \end{cases} \Leftrightarrow -8a^3 = -a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \end{array}\right.$.

Thử lại với các giá trị của a vừa tìm được ta thấy chỉ có $a = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ thỏa đề bài.

Ví dụ 5.3.

Chứng minh phương trình $x^3 - (m^2 + 3)x^2 + (m^2 + 3)x - 1 = 0$, với $m \neq 0$ luôn có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân.

Lời giải

Phương trình $\Leftrightarrow (x-1)\left[x^2 - (m^2+2)x + 1\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_2 = 1 \\ g(x) = x^2 - (m^2+2)x + 1 = 0 \ (*) \end{array}\right.$.

Ta có $\begin{cases} \Delta = m^4 + 4m^2 > 0 \\ g(1) = -m^2 \neq 0 \end{cases}$, $\forall m \neq 0 \Rightarrow (*)$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1;\ x_3 \neq 1$.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa $x_1.x_2 = 1 = x_2^2 \Rightarrow$ (điều phải chứng minh).

Dạng 6. Cấp số nhân & cấp số cộng

Phương pháp

» Để làm các bài toán dạng này học sinh cần nắm vững và vận dụng linh hoạt định nghĩa và các tính chất cấp số nhân và cấp số cộng

	Cấp số cộng	*Cấp số nhân*
Định nghĩa	$u_{n+1}=u_n+d$ với $n\in\mathbb{N}^*$ d được gọi là *công sai*.	$u_n=q.u_{n-1}$ với $n\geq 2$ q được gọi là *công bội*.
Số hạng tổng quát	$u_n=u_1+(n-1)d,\forall n\geq 1.$	$u_n=q^{n-1}.u_1, n\geq 2$
Tính chất	$u_k=\dfrac{u_{k-1}+u_{k+1}}{2},\forall k\geq 1.$	$u_k=\sqrt{u_{k-1}.u_{k+1}}$ hay $u_k^2=u_{k-1}.u_{k+1}\ (k\geq 2)$

Ví dụ 6.1.

Tìm 4 số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng tổng 3 số hạng đầu là $\dfrac{148}{9}$, đồng thời, theo thứ tự, chúng là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng.

Lời giải

Gọi (u_n) là cấp số nhân, (v_n) là cấp số cộng thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases}u_1+u_2+u_3=\dfrac{148}{9}\\u_1=v_1\\u_2=v_4\\u_3=v_8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1\left(1+q+q^2\right)=\dfrac{148}{9}\\u_1=v_1\\u_1q=v_1+3d\\u_1q^2=v_1+7d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1\left(1+q+q^2\right)=\dfrac{148}{9}\\u_1=v_1\\u_1(q-1)=3d\\u_1(q-1)(q+1)=7d\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}u_1\left(1+q+q^2\right)=\dfrac{148}{9}\\u_1=v_1\\q+1=\dfrac{7}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}q=\dfrac{4}{3}\\u_1=4\end{cases}.$$

Vậy 4 số hạng đó là $4;\dfrac{16}{3};\dfrac{64}{9};\dfrac{256}{27}$.

Ví dụ 6.2.

Tìm 4 số trong đó ba số đầu là ba số hạng kế tiếp của một cấp số nhân, còn ba số sau là ba số hạng kế tiếp của một cấp số cộng; tổng hai số đầu và cuối bằng 32, tổng hai số giữa bằng 24.

Lời giải

Gọi bốn số thỏa yêu cầu đề bài là a, b, c, d. Theo giả thiết ta có $\begin{cases} b^2 = ac \\ 2c = b + d \\ a + d = 32 \\ b + c = 24 \end{cases}$.

Suy ra $\begin{cases} a = 32 - d \\ b = 16 - \dfrac{d}{3} \\ c = 8 + \dfrac{d}{3} \\ b^2 = ac \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d = 0, a = 32, b = 16, c = 8 \\ d = 30, a = 2, b = 6, c = 18 \end{array}\right.$.

Ví dụ 6.3.

Tìm các các số dương a và b sao cho $a, a + 2b, 2a + b$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng và $(b+1)^2, ab + 5, (a+1)^2$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.

Lời giải

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} 2a + 4b = 3a + b \\ (ab+5)^2 = (a+1)^2(b+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3b \\ (3b^2+5)^2 = (3b+1)^2(b+1)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3b \\ (b-1)(3b^2 + 2b + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Ví dụ 6.4.

Chứng minh rằng nếu ba số $\dfrac{2}{y-x}, \dfrac{1}{y}, \dfrac{2}{y-z}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì x, y, z theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.

Lời giải

Theo giả thiết ta có $\dfrac{2}{y} = \dfrac{2}{y-x} + \dfrac{2}{y-z} \Leftrightarrow \dfrac{1}{y} = \dfrac{2y - x - z}{y^2 - xy - yz + xz}$

$$\Leftrightarrow y^2 - xy - yz + xz = 2y^2 - xy - zy \Leftrightarrow y^2 = zx.$$

Vậy x, y, z theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.

Ví dụ 6.5.

Một cấp số nhân và một cấp số cộng đều có số hạng thứ nhất bằng 5, số hạng thứ 2 của cấp số cộng lớn hơn số hạng thứ 2 của một cấp số nhân là 10, còn các số hạng thứ 3 thì bằng nhau. Tìm các cấp số ấy.

Lời giải

Gọi (u_n) là cấp số nhân, (v_n) là cấp số cộng thỏa yêu cầu đề bài.

Theo giả thiết : $\begin{cases} u_1 = v_1 = 5 \\ u_2 + 10 = v_2 \\ u_3 = v_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 = 5 \\ 5q + 10 = 5 + d \\ 5q^2 = 5 + 2(5q + 5) \end{cases} \Rightarrow 5q^2 - 10q - 15 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} q = 3 \Rightarrow d = 20 \\ q = -1 \Rightarrow d = 0 \end{array}\right.$.

Vậy ta có cấp số nhân là $5;15;45$ và cấp số cộng là $5;25;45$

Hoặc ta có cấp số nhân là $5;-5;45$ và cấp số cộng là $5;5;5$.

Dạng 7. Bài toán thực tế liên quan cấp số nhân

Ví dụ 7.1.

Một khu rừng có trữ lượng gỗ là 4.10^5 mét khối. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây ở khu rừng đó là 4% mỗi năm. Hỏi sau 5 năm, khu rừng sẽ có bao nhiêu mét khối gỗ?

Lời giải

Đặt $u_0 = 4.10^5$ và $r = 4\% = 0,04$. Gọi u_n là trữ lượng gỗ của khu rừng sau năm thứ n.

Khi đó ta có $u_{n+1} = u_n + u_n r = u_n(1+r), n \in \mathbb{N}$.

Suy ra (u_n) là cấp số nhân với số hạng đầu là u_0 và công bội là $q = 1+r$.

Do đó số hạng tổng quát của cấp số nhân (u_n) là $u_n = u_0(1+r)^n, n \in \mathbb{N}$.

Vậy sau 5 năm, khu rừng sẽ có: $u_5 = u_0(1+r)^5 = 4.10^5.(1+0,04)^5 = 4.(10,4)^5$ mét khối gỗ.

Ví dụ 7.2.

Một người gửi số tiền 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7% năm. Biết rằng, nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi được nhập vào vốn ban đầu *(người ta gọi là lãi kép)*. Giả sử trong khoảng thời gian gửi người gửi không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi, hỏi sau 10 năm thì tổng số tiền cả vốn lẫn lãi mà người gửi nhận được gần với số tiền nào trong các số tiền dưới đây?

Lời giải

Đặt $M_0 = 10^8$ (đồng) và $r = 7\% = 0,07$.

Gọi M_n là số tiền cả vốn lẫn lãi mà người gửi nhận được sau n năm.

Theo giả thiết, ta có $M_{n+1} = M_n + M_n.r = M_n(1+r), \forall n \geq 1$.

Do đó dãy số (M_n) là cấp số nhân với số hạng đầu M_0 và công bội $q = 1+r$. Suy ra $M_n = M_0(1+r)^n$. Vì vậy, sau 10 năm thì tổng số tiền cả vốn lẫn lãi mà người gửi nhận được là $M_{10} = M_0(1+r)^{10} = 10^8.(1,07)^{10} \approx 196715000$.

Ví dụ 7.3.

Một người gửi ngân hàng 150 triệu đồng theo thể thức lãi kép, lãi suất $0,58\%$ một tháng (kể từ tháng thứ 2, tiền lãi được tính theo phần trăm của tổng tiền lãi tháng trước đó và tiền gốc của tháng trước đó). Sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có 180 triệu đồng?

Lời giải

Theo ví dụ trên, thì sau n tháng gửi tiết kiệm, ta có $M_n = M_0(1+r)^n$, trong đó $M_0 = 15.10^7, r = 0,0058$. Do đó $M_n = 15.10^7.(1,0058)^n$.

Theo giả thiết, ta có $M_n = 18.10^7$ (đồng).

Do đó, ta có $18.10^7 = 15.10^7.(1,0058)^n \Leftrightarrow (1,0058)^n = \frac{6}{5}$. Sử dụng máy tính cầm tay, ta tính được $n \approx \log\left(\frac{6}{5}\right) : \log(1,0058)$ hay $n \approx 31,562$. Do đó $n = 32$.

Ví dụ 7.4.

Một của hàng kinh doanh, ban đầu bán mặt hàng A với giá 100 (đơn vị nghìn đồng). Sau đó, cửa hàng tăng giá mặt hàng A lên 10%. Nhưng sau một thời gian, cửa hàng lại tiếp tục tăng giá mặt hàng đó lên 10%. Hỏi giá của mặt hàng A của cửa hàng sau hai lần tăng giá là bao nhiêu?

Lời giải

Sau lần tăng giá thứ nhất thì giá của mặt hàng A là: $M_1 = 100 + 100.10\% = 110$.

Sau lần tăng giá thứ hai thì giá của mặt hàng A là: $M_2 = 110 + 110.10\% = 121$.

Ví dụ 7.5.

Tỷ lệ tăng dân số của tỉnh M là $1,2\%$. Biết rằng số dân của tỉnh M hiện nay là 2 triệu người. Nếu lấy kết quả chính xác đến hàng nghìn thì sau 9 năm nữa số dân của tỉnh M sẽ là bao nhiêu?

Lời giải

Đặt $P_0 = 2000000 = 2.10^6$ và $r = 1,2\% = 0,012$.

Gọi P_n là số dân của tỉnh M sau n năm nữa.

Ta có: $P_{n+1} = P_n + P_n.r = P_n(1+r)$.

Suy ra (P_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu (P_0) và công bội $q = 1 + r$.

Do có số dân của tỉnh M sau 10 năm nữa là: $P_9 = M_0(1+r)^9 = 2.10^6(1,012)^{10} \approx 2227000$.

Ví dụ 7.6.

Anh An mua nhà trị giá 500 triệu đồng theo phương thức trả góp

(1) Nếu cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất anh An trả 6000000 và chịu lãi số tiền chưa trả là $0,5\%$ /tháng thì sau bao lâu anh An trả hết số tiền trên?

(2) Nếu anh An muốn trả hết nợ trong 3 năm và phải trả lãi với mức 6% /năm thì mỗi tháng anh phải trả bao nhiêu tiền? (Làm tròn đến nghìn đồng).

Lời giải

(1) *Nếu cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất anh An trả 6000000 và chịu lãi số tiền chưa trả là $0,5\%$ /tháng thì sau bao lâu anh An trả hết số tiền trên?*

Ta có $6000000 = \dfrac{500.10^6.0,005.1,005^n}{1,005^n - 1}$.

Suy ra $1,005^n = 1,714$. Do đó $n \approx 108,04$.

Vậy sau 108 tháng anh An sẽ trả hết số tiền trên.

(2) *Nếu anh An muốn trả hết nợ trong 3 năm và phải trả lãi với mức 6% /năm thì mỗi tháng anh phải trả bao nhiêu tiền? (Làm tròn đến nghìn đồng).*

Gọi x là số tiền anh An phải trả.

Ta có $x=\dfrac{500.10^6.0,06.1,06^3}{1,06^3-1}\approx 187054906,4$.

Suy ra số tiền trả mỗi tháng là $\dfrac{187054906,4}{12}\approx 15587908,87$.

Làm tròn 15588000 (đồng).

Ví dụ 7.7.

Bố bạn An tặng bạn ấy một máy vi tính trị giá 15 triệu đồng bằng cách cho bạn ấy tiền hàng tháng theo phương thức: tháng đầu tiên cho 300000 đồng, các tháng từ tháng thứ 2 trở đi mỗi tháng nhận được số tiền nhiều hơn tháng trước 50000 đồng.

(1) Nếu chọn cách gửi tiết kiệm số tiền được nhận hàng tháng với lãi suất 0,6%/tháng thì bạn An gửi bao nhiêu tháng mới đủ mua máy vi tính?

(2) Nếu bạn An muốn có ngay máy vi tính để học bằng phương thức mua trả góp hàng tháng bằng số tiền bố cho với lãi suất ngân hàng là 0,7%/tháng thì bạn An mất bao nhiêu tháng để trả đủ số tiền và tháng cuối cùng trả bao nhiêu?

Lời giải

(1) *Nếu chọn cách gửi tiết kiệm số tiền được nhận hàng tháng với lãi suất 0,6%/tháng thì bạn An gửi bao nhiêu tháng mới đủ mua máy vi tính?*

Đầu tháng 1 số tiền có là 300000.

Đầu tháng 2 số tiền có là $300000.1,006 + 300000 + 50000$.

Đầu tháng n có (số tiền có đầu tháng $n-1$)$.1,006 + 300000 + \left(n-1\right).50000$.

Ta tìm được bạn An cần gửi tiết kiệm trong 48 tháng để mua được máy vi tính.

(2) *Nếu bạn An muốn có ngay máy vi tính để học bằng phương thức mua trả góp hàng tháng bằng số tiền bố cho với lãi suất ngân hàng là 0,7%/tháng thì bạn An mất bao nhiêu tháng để trả đủ số tiền và tháng cuối cùng trả bao nhiêu?*

Vừa mua xong thì An trả luôn bằng tiền nhận được ở tháng đó nên đầu tháng 1, số tiền còn nợ là $15000000-300000=14700000$ đồng.

Đầu tháng 2 số tiền còn nợ $14700000.1,007-300000-50000$.

Đầu tháng n bằng (số tiền còn nợ đầu tháng $n-1$)$.1,007$ - 300000 -$\left(n-1\right).50000$.

Ta tìm được bạn An phải mất 50 tháng để trả hết nợ và số tiền trả trong tháng 20 là 132590 đồng.

Chương 02

Bài 3.

CẤP SỐ NHÂN

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» **Câu 1.** Dãy số nào sau đây **không phải** là cấp số nhân?

A. $1;-3;9;-27;54$. **B.** $1;2;4;8;16$. **C.** $1;-1;1;-1;1$. **D.** $1;-2;4;-8;16$.

Lời giải

Chọn A

Dãy $1;2;4;8;16$ là cấp số nhân với công bội $q=2$.

Dãy $1;-1;1;-1;1$ là cấp số nhân với công bội $q=-1$.

Dãy $1;-2;4;-8;16$ là cấp số nhân với công bội $q=-2$.

Dãy $1;-3;9;-27;54$ không phải là cấp số nhân vì $-3=1.(-3);(-27).(-3)=81\neq 54$.

» **Câu 2.** Chọn cấp số nhân trong các dãy số sau:

A. $1;\ 0,2;\ 0,04;\ 0,0008;\ ...$ **B.** $2;\ 22;\ 222;2222;\ ...$

C. $x;\ 2x;\ 3x;\ 4x;\ ...$ **D.** $1;\ -x^2;\ x^4;\ -x^6;\ ...$

Lời giải

Chọn D

Dãy số : $1;\ -x^2;\ x^4;\ -x^6;\ ...$ là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1=1;$ công bội $q=-x^2$.

» **Câu 3.** Xác định x để 3 số $x-2;\ x+1;\ 3-x$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân:

A. Không có giá trị nào của x. **B.** $x=\pm 1$.

C. $x=2$. **D.** $x=-3$.

Lời giải

Chọn A

Ba số $x-2;\ x+1;\ 3-x$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân $\Leftrightarrow (x-2)(3-x)=(x+1)^2$

$\Leftrightarrow 2x^2-3x+7=0$

» **Câu 4.** u_n được cho bởi công thức nào dưới đây là số hạng tổng quát của một cấp số nhân?

A. $u_n=\frac{1}{2^{n+1}}$. **B.** $u_n=n^2-\frac{1}{2}$. **C.** $u_n=\frac{1}{2^n}-1$. **D.** $u_n=n^2+\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$u_n=\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{4}.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ là số hạng tổng quát của một cấp số nhân có $u_1=\frac{1}{4}$ và $q=\frac{1}{2}$.

$u_n=n^2-\frac{1}{2}$ có $u_1=\frac{1}{2};u_2=\frac{7}{2}=\frac{1}{2}.7;u_3=\frac{17}{2}\neq\frac{7}{2}.7$ nên không phải số hạng tổng quát của một cấp số nhân.

$u_n = \frac{1}{2^n} - 1$ có $u_1 = -\frac{1}{2}; u_2 = -\frac{3}{4} = -\frac{1}{2}.\frac{3}{2}; u_3 = -\frac{7}{8} \neq -\frac{3}{4}.\frac{3}{2}$ nên không phải số hạng tổng quát của một cấp số nhân.

$u_n = n^2 + \frac{1}{2}$ có $u_1 = \frac{3}{2}; u_2 = \frac{9}{2} = \frac{3}{2}.3; u_3 = \frac{19}{2} \neq \frac{9}{2}.3$ nên không phải số hạng tổng quát của một cấp số nhân.

» Câu 5. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = 3.2^{n+1}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$. Chọn kết luận đúng:

A. Dãy số là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 12$.

B. Dãy số là cấp số cộng có công sai $d = 2$.

C. Dãy số là cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 6$.

D. Dãy số là cấp số nhân có công bội $q = 3$.

Lời giải

Chọn A

Dãy số (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = 3.2^{n+1}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow u_{n+1} = 3.2^{n+2}$.

Xét thương $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3.2^{n+2}}{3.2^{n+1}} = 2 = const$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy số (u_n) là một cấp số nhân có công bội $q = 2$ và có số hạng đầu là $u_1 = 3.2^{1+1} = 12$.

» Câu 6. Tìm công bội q của một cấp số nhân (u_n) có $u_1 = \frac{1}{2}$ và $u_6 = 16$.

A. $q = \frac{1}{2}$. **B.** $q = -2$. **C.** $q = 2$. **D.** $q = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_6 = u_1 \cdot q^5 \Rightarrow q^5 = \frac{u_6}{u_1} = \frac{16}{\frac{1}{2}} = 32 \Rightarrow q = 2$.

» Câu 7. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$. Giá trị u_{2019} bằng

A. 2.3^{2018}. **B.** 3.2^{2018}. **C.** 2.3^{2019}. **D.** 3.2^{2019}.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức của số hạng tổng quát $u_n = u_1.q^{n-1} = 2.3^{2018}$.

» Câu 8. Tập hợp các giá trị x thỏa mãn $x, 2x, x+3$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân là

A. $\{0;1\}$. **B.** $\varnothing$. **C.** $\{1\}$. **D.** $\{0\}$

Lời giải

Chọn C

Gọi q là công bội của cấp số nhân.

Ta có

$$\begin{cases} 2x = x.q \\ x+3 = 2x.q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x.q \\ x+3 = 2.2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Tập hợp các giá trị x thỏa mãn $x, 2x, x+3$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân là $\{1\}$.

» Câu 9. Giả sử $\frac{\sin\alpha}{6}$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ theo thứ tự đó là một cấp số nhân. Tính $\cos2\alpha$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\cos\alpha\neq0\Leftrightarrow\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Theo tính chất của cấp số nhân, ta có: $\cos^2\alpha=\frac{\sin\alpha}{6}.\tan\alpha\Leftrightarrow6\cos^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$.

$\Leftrightarrow6\cos^3\alpha-\sin^2\alpha=0\Leftrightarrow6\cos^3\alpha+\cos^2\alpha-1=0\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

Ta có: $\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2.\left(\frac{1}{2}\right)^2-1=-\frac{1}{2}$.

» Câu 10. Cho dãy số có các số hạng đầu là $\frac{1}{3};\frac{1}{3^2};\frac{1}{3^3};\frac{1}{3^4};...$ Số hạng tổng quát của dãy số này là

A. $\frac{1}{3^{n-1}}$ **B.** $\frac{1}{3^{n+2}}$. **C.** $\frac{1}{3^n}$. **D.** $\frac{1}{3^{n+1}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$u_1=\frac{1}{3}=\frac{1}{3^1}$

$u_2=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{3^2}$

$u_3=\frac{1}{3^3}=\frac{1}{3^3}$

....

Vậy $u_n=\frac{1}{3^n}$..

» Câu 11. Cho cấp số nhân $\left(u_n\right)$ với $u_1=3$ và $u_2=12$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

A. 9. **B.** -9. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Công bội của cấp số nhân đã cho là $q=\frac{u_2}{u_1}=\frac{12}{3}=4$

» Câu 12. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1=3$ và $u_2=15$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

A. -12. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** 5. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C

Từ định nghĩa cấp số nhân ta có $q=\dfrac{u_2}{u_1}=5$.

» **Câu 13.** Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1=2$ và $u_2=6$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

A. 3. **B.** -4. **C.** 4. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Công bội của cấp số nhân là $q=\dfrac{u_2}{u_1}=\dfrac{6}{2}=3$.

» **Câu 14.** Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1=3$ và công bội $q=2$. Giá trị của u_2 bằng

A. 8. **B.** 9. **C.** 6. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $u_2=u_1.q=3.2=6$.

» **Câu 15.** Biết ba số $x^2;8;x$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Giá trị của x bằng

A. $x=4$ **B.** $x=5$ **C.** $x=2$ **D.** $x=1$

Lời giải

Chọn C

Do ba số $x^2;8;x$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân nên theo tính chất cấp số nhân ta được $x^2.x=8\Leftrightarrow x^3=8\Leftrightarrow x=2$.

» **Câu 16.** Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q. Chọn hệ thức đúng trong các hệ thức sau:

A. $u_k=\sqrt{u_{k+1}.u_{k+2}}$ **B.** $u_k=\dfrac{u_{k-1}+u_{k+1}}{2}$.

C. $u_k=u_1.q^{k-1}$. **D.** $u_k=u_1+(k-1)q$.

Lời giải

Chọn C

Theo tính chất các số hạng của cấp số nhân.

» **Câu 17.** Với x là số nguyên dương, ba số $2x,\ 3x+3,\ 5x+5$ theo thứ tự là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân. Số hạng tiếp theo của cấp số nhân đó là

A. $-\dfrac{250}{3}$. **B.** $\dfrac{250}{3}$. **C.** 250. **D.** -250.

Lời giải

Chọn B

Ba số $2x,\ 3x+3,\ 5x+5$ theo thứ tự là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân nên

$$2x(5x+5)=(3x+3)^2\Leftrightarrow x^2-8x-9=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=9\end{array}\right.\Rightarrow x=9.$$

Với $x=9$, suy ra $q=\dfrac{3.9+3}{2.9}=\dfrac{30}{18}=\dfrac{5}{3}$

Số hạng tiếp theo của cấp số nhân đó là: $(5.9+5).\dfrac{5}{3}=\dfrac{250}{3}$.

» Câu 18. Cho cấp số nhân (u_n), biết $u_1=1$, $u_4=64$. Tính công bội q của cấp số nhân đã cho

A. $q=4$. **B.** $q=-4$. **C.** $q=21$. **D.** $q=2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $u_4=64 \Leftrightarrow u_1.q^3=64 \Leftrightarrow q^3=64 \Leftrightarrow q=4$.

» Câu 19. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=-2$ và $u_5=-162$ .Công bội q bằng:

A. $q=-3$. **B.** $q=3$. **C.** $q=3; q=-3$. **D.** $q=-2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_5=-162 \Leftrightarrow u_1.q^4=-162 \Leftrightarrow q^4=\dfrac{-162}{u_1}=\dfrac{-162}{-2}=81 \Leftrightarrow q=\pm 3$.

» Câu 20. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=-3$ và $q=-2$. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

A. $S_{10}=-511$. **B.** $S_{10}=1023$. **C.** $S_{10}=1025$. **D.** $S_{10}=-1025$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $S_{10}=u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q}=-3.\dfrac{1-(-2)^{10}}{1-(-2)}=1023$.

» Câu 21. Cho một cấp số nhân có các số hạng đều không âm thỏa mãn $u_2=6$, $u_4=24$. Tính tổng của 12 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó.

A. $3.2^{12}-3$. **B.** $2^{12}-1$. **C.** $3.2^{12}-1$. **D.** 3.2^{12}.

Lời giải

Chọn A

Gọi công bội của CSN bằng q. Suy ra $u_4=u_2.q^2 \Rightarrow q=\pm 2$. Do CSN có các số hạng không âm nên $q=2$.

Ta có $S_{12}=u_1.\dfrac{1-q^{12}}{1-q}=3.\dfrac{1-2^{12}}{1-2}=3\left(2^{12}-1\right)$.

» Câu 22. Cho dãy (u_n) với $u_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+1$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Tính $S_{2019}=u_1+u_2+u_3+...+u_{2019}$, ta được kết quả

A. $2020-\dfrac{1}{2^{2019}}$. **B.** $\dfrac{4039}{2}$. **C.** $2019+\dfrac{1}{2^{2019}}$. **D.** $\dfrac{6057}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$S_{2019}=2019+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+...+\left(\frac{1}{2}\right)^{2019}=2019+\frac{1}{2}.\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2019}}{1-\frac{1}{2}}=2020-\frac{1}{2^{2019}}.$$

» Câu 23. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_3=12$, $u_5=48$, có công bội âm. Tổng 7 số hạng đầu của cấn số nhân đã cho bằng

A. 129. **B.** -129. **C.** 128. **D.** -128.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $u_4^2 = u_3.u_5 = 576$.

Vì $u_3 > 0, u_5 > 0$ và công bội âm nên: $u_4 = -24 \Rightarrow q = -2$.

Lại có: $u_3 = u_1q^2 \Rightarrow u_1 = \frac{u_3}{q^2} = \frac{12}{4} = 3$.

Áp dụng công thức ta có: $S_7 = u_1\frac{1-q^7}{1-q} = 3.\frac{1-(-2)^7}{1-(-2)} = 129$.

» Câu 24. Biết rằng $S = 1 + 2.3 + 3.3^2 + ... + 11.3^{10} = a + \frac{21.3^b}{4}$. Tính $P = a + \frac{b}{4}$.

A. $P = 1$. **B.** $P = 2$. **C.** $P = 3$. **D.** $P = 4$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết suy ra $3S = 3 + 2.3^2 + 3.3^3 + ... + 11.3^{11}$. Do đó

$$-2S = S - 3S = 1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{10} - 10.3^{11} = \frac{1-3^{11}}{1-3} - 11.3^{11} = -\frac{1}{2} - \frac{21.3^{11}}{2} \Rightarrow S = \frac{1}{4} + \frac{21}{4}.3^{11}.$$

Vì $S = \frac{1}{4} + \frac{21.3^{11}}{4} = a + \frac{21.3^b}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{4}, b = 11 \longrightarrow P = \frac{1}{4} + \frac{11}{4} = 3$.

» Câu 25. Cho cấp số nhân (u_n) có $S_2 = 4$ và $S_3 = 13$. Tìm S_5.

A. $S_5 = 121$ hoặc $S_5 = \frac{181}{16}$. **B.** $S_5 = 121$ hoặc $S_5 = \frac{35}{16}$.

C. $S_5 = 114$ hoặc $S_5 = \frac{185}{16}$. **D.** $S_5 = 141$ hoặc $S_5 = \frac{183}{16}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $u_3 = S_3 - S_2 = 9 \Rightarrow u_1q^2 = 9 \Rightarrow u_1 = \frac{9}{q^2}$

Vì $S_2 = 4$ nên $u_1 + u_1q = 4$. Do đó $\frac{9}{q^2} + \frac{9}{q} = 4 \Leftrightarrow 4q^2 - 9q - 9 = 0 \Leftrightarrow q = 3$ hoặc $q = -\frac{3}{4}$.

+ Với $q = 3$ thì $u_1 = 1, u_6 = u_1q^5 = 243$. Suy ra $S_5 = \frac{u_1 - u_6}{1-q} = \frac{1-243}{1-3} = 121$.

+ Với $q = -\frac{3}{4}$ thì $u_1 = 16, u_6 = -\frac{243}{64}$. Suy ra $S_5 = \frac{u_1 - u_6}{1-q} = \frac{181}{16}$.

» Câu 26. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 8$ và biểu thức $4u_3 + 2u_2 - 15u_1$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính S_{10}.

A. $S_{10} = \frac{2(4^{11}+1)}{5.4^9}$. **B.** $S_{10} = \frac{2(4^{10}+1)}{5.4^8}$. **C.** $S_{10} = \frac{2^{10}-1}{3.2^6}$. **D.** $S_{10} = \frac{2^{11}-1}{3.2^7}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi q là công bội của cấp số nhân. Khi đó $4u_3 + 2u_2 - 15u_1 = 2(4q+1)^2 - 122 \ge -122, \forall q$.

Dấu bằng xảy ra khi $4q+1=0 \Leftrightarrow q=-\frac{1}{4}$. Suy ra: $S_{10}=u_1.\frac{1-q^{10}}{1-q}=8.\frac{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^{10}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{2\left(4^{10}-1\right)}{5.4^8}$

» Câu 27. Cho cấp số nhân (u_n) có $\begin{cases} u_4+u_6=-540 \\ u_3+u_5=180 \end{cases}$. Tính S_{21}.

A. $S_{21}=\frac{1}{2}\left(3^{21}+1\right)$ **B.** $S_{21}=3^{21}-1$. **C.** $S_{21}=1-3^{21}$. **D.** $S_{21}=-\frac{1}{2}\left(3^{21}+1\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $u_4+u_6=-540 \Leftrightarrow (u_3+u_5)q=-540$.

Kết hợp với phương trình thứ hai trong hệ, ta tìm được $q=-3$. Lại có $u_3+u_5=180$

$\Leftrightarrow u_1\left(q^2+q^4\right)=180$.

Vì $q=-3$ nên $u_1=2$. Suy ra $S_{21}=\frac{u_1\left(1-q^{21}\right)}{1-q}=\frac{1}{2}\left(3^{21}+1\right)$.

Vậy phương án đúng là A.

» Câu 28. Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; 1; $\cdots$; 2048. Tính tổng S của tất cả các số hạng của cấp số nhân đã cho.

A. $S=2047,75$. **B.** $S=2049,75$. **C.** $S=4095,75$. **D.** $S=4096,75$.

Lời giải

Chọn A

Cấp số nhân đã cho có

$$\begin{cases} u_1=\frac{1}{4} \\ q=2 \end{cases} \longrightarrow 2048=2^{11}=u_1q^{n-1}=\frac{1}{2}.2^{n-1}=2^{n-2} \Leftrightarrow n=13.$$

Vậy cấp số nhân đã cho có tất cả 13 số hạng.

Vậy $S_{13}=u_1.\frac{1-q^{13}}{1-q}=\frac{1}{4}.\frac{1-2^{13}}{1-2}=2047,75$

» Câu 29. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,121212...$ được biểu diễn bởi phân số

A. $\frac{3}{25}$. **B.** $\frac{12}{99}$. **C.** $\frac{1}{11}$. **D.** $\frac{3}{22}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $0,121212...=\frac{12}{10^2}+\frac{12}{10^4}+\frac{12}{10^6}+...+\frac{12}{10^{2n}}+...=12\left(\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+...+\frac{1}{10^{2n}}+...\right)$

$=12\left(\frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{1}{100}}\right)=\frac{4}{33}=\frac{12}{99}$.

» Câu 30. Cho dãy số xác định bởi $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2u_n + \frac{n-1}{n^2+3n+2}\right)$; $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó u_{2018} bằng:

A. $u_{2018} = \frac{2^{2016}}{3^{2017}} + \frac{1}{2019}$.
B. $u_{2018} = \frac{2^{2018}}{3^{2017}} + \frac{1}{2019}$.
C. $u_{2018} = \frac{2^{2017}}{3^{2018}} + \frac{1}{2019}$.
D. $u_{2018} = \frac{2^{2017}}{3^{2018}} + \frac{1}{2019}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $u_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2u_n + \frac{n-1}{n^2+3n+2}\right) = \frac{1}{3}\left(2u_n + \frac{3}{n+2} - \frac{2}{n+1}\right) = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{n+2} - \frac{2}{3}.\frac{1}{n+1}$.

$\Leftrightarrow u_{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{2}{3}\left(u_n - \frac{1}{n+1}\right)$ (1)

Đặt $v_n = u_n - \frac{1}{n+1}$, từ (1) ta suy ra: $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$.

Do đó (v_n) là cấp số nhân với $v_1 = u_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, công bội $q = \frac{2}{3}$.

Suy ra: $v_n = v_1.q^{n-1} = \frac{1}{2}.\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \Leftrightarrow u_n - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2}.\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{2}.\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{n+1}$.

Vậy $u_{2018} = \frac{1}{2}.\left(\frac{2}{3}\right)^{2017} + \frac{1}{2019} = \frac{2^{2016}}{3^{2017}} + \frac{1}{2019}$.

» Câu 31. Ba số theo thứ tự lập thành một cấp số nhân có số hạng cuối lớn hơn số hạng đầu 16 đơn vị. Ba số đó là các số hạng thứ nhất, thứ hai và thứ năm của một cấp số cộng. Tìm ba số đó.

A. $2,6,18$. **B.** $4,8,20$. **C.** $\frac{1}{3},\frac{7}{3},\frac{49}{3}$. **D.** $4,4\sqrt{5},20$.

Lời giải

Chọn A

Ta gọi ba số đó lần lượt là a,b,c và d là công sai của cấp số cộng.

Theo đề bài ta có: $\begin{cases} c = a+16 \\ c = a+4d \end{cases} \Rightarrow d = 4$.

Ngoài ra $b^2 = ac \Leftrightarrow (a+4)^2 = a(a+16) \Leftrightarrow a = 2$

Suy ra $b = 6, c = 18$.

Vậy các số cần tìm là $2,6,18$.

» Câu 32. Ba số dương x,y,z theo thứ tự lập thành một cấp số cộng và có tổng bằng 30. Biết $x+2; y+2; z+18$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Tính $T = x^2 + z^2$.

A. $T = 328$. **B.** $T = 424$. **C.** $T = 296$. **D.** $T = 428$.

Lời giải

Chọn A

Theo tính chất của cấp số cộng, ta có $x + z = 2y$.

Kết hợp với giả thiết $x+y+z = 30$, ta suy ra $3y = 30 \Leftrightarrow y = 10$.

Gọi d là công sai của cấp số cộng thì $x = y - d = 10 - d$ và $z = y + d = 10 + d$.

$x+2; y+2; z+18$ là cấp số nhân hay $12-d, 12, 28+d$.

Theo tính chất của cấp số nhân, ta có : $(12-d)(28+d)=12^2 \Leftrightarrow d^2+16d-192=0$.

$$\left[\begin{array}{l} d=8 \Rightarrow (x;y;z)=(2;10;18) \\ d=-24 \Rightarrow (x;y;z)=(34;\,10;\,-14)(l) \end{array}\right.$$

$T=x^2+z^2=18^2+2^2=328$.

» Câu 33. Ba số x, y, z theo thứ tự lập thành một cấp số cộng tăng có tổng bằng 24. Nếu cộng thêm lần lượt các số $1, 4, 13$ vào ba số x, y, z ta được ba số theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tính giá trị biểu thức $P=x^2+y^2+z^2$.

A. 200. **B.** 210. **C.** 220. **D.** 190.

Lời giải

Chọn B

Ba số x, y, z theo thứ tự lập thành một cấp số cộng có tổng bằng 24 nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+z=24 \\ x+z=2y \end{cases} \Rightarrow 3y=24 \Rightarrow y=8.$$

Ta viết lại 3 số x, y, z lần lượt bằng $8-d$, 8, $8+d$.

Nếu cộng thêm lần lượt các số $1, 4, 13$ vào ba số x, y, z ta được ba số là $9-d, 12, 21+d$.

Vì ba số này theo thứ tự lập thành cấp số nhân nên ta có phương trình

$(9-d)(21+d)=12^2$

$$\Leftrightarrow d^2+12d-45=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=3 \\ d=-15 \end{array}\right..$$

Vì cấp số cộng tăng nên $d>0 \Rightarrow d=3 \Rightarrow$ ba số x, y, z lần lượt bằng $5, 8, 11$.

Suy ra $P=x^2+y^2+z^2=5^2+8^2+11^2=210$.

» Câu 34. Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) biết $u_1=1$ và u_1, u_3, u_4 theo thứ tự là ba số hạng liên tiếp trong một cấp số cộng.

A. $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}-1}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

(u_n) là cấp số nhân lùi vô hạn có công bội q,

Suy ra $|q|<1$ và $u_3=u_1.q^2=q^2, u_4=u_1.q^3=q^3$

Mà và u_1, u_3, u_4 theo thứ tự là ba số hạng liên tiếp trong một cấp số cộng nên $u_1+u_4=2.u_3$

Từ đó ta có $1+q^3=2.q^2 \Leftrightarrow q^3-2.q^2+1=0 \Leftrightarrow (q-1)(q^2-q-1)=0 \Leftrightarrow q^2-q-1=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ q=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow q=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}. \text{Vậy } S=\dfrac{u_1}{1-q}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

» **Câu 35.** Bạn A thả quả bóng cao su từ độ cao $10\,\text{m}$ theo phương thẳng đứng. Mỗi khi chạm đất nó lại nảy lên theo phương thẳng đứng có độ cao bằng $\frac{3}{4}$ độ cao trước đó. Tính tổng quãng đường bóng đi được đến khi bóng dừng hẳn.

A. $40\,\text{m}$. **B.** $70\,\text{m}$. **C.** $50\,\text{m}$. **D.** $80\,\text{m}$.

Lời giải

Chọn B

Các quãng đường khi bóng đi xuống tạo thành một cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1=10$ và $q=\frac{3}{4}$.

Tổng các quãng đường khi bóng đi xuống là $S=\frac{u_1}{1-q}=\frac{10}{1-\frac{3}{4}}=40$.

Tổng quãng đường bóng đi được đến khi bóng dừng hẳn $2S-10=70$.

» **Câu 36.** Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1=5,\ a_{n+1}=q.a_n+3$ với mọi $n\ge 1$, trong đó q là hằng số, $q\ne 0$, $q\ne 1$. Biết công thức số hạng tổng quát của dãy số viết được dưới dạng $a_n=\alpha.q^{n-1}+\beta\frac{1-q^{n-1}}{1-q}$. Tính $\alpha+2\beta$?

A. 13. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 16.

Lời giải

Chọn C

Cách 1. Ta có: $a_{n+1}-k=q(a_n-k)\Leftrightarrow k-kq=3\Leftrightarrow k=\frac{3}{1-q}$

Đặt $v_n=a_n-k\Rightarrow v_{n+1}=q.v_n=q^2.v_{n-1}=...=q^n.v_1$

Khi đó $v_n=q^{n-1}.v_1=q^{n-1}.(a_1-k)=q^{n-1}.\left(5-\frac{3}{1-q}\right)$

Vậy $a_n=v_n+k=q^{n-1}.\left(5-\frac{3}{1-q}\right)+k=q^{n-1}.\left(5-\frac{3}{1-q}\right)+\frac{3}{1-q}=5.q^{n-1}+3.\frac{1-q^{n-1}}{1-q}$.

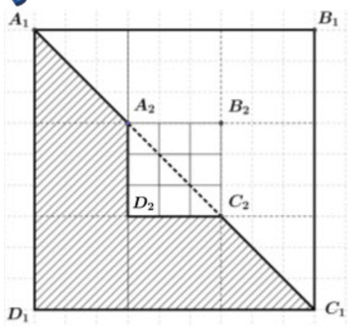
Do đó: $\alpha=5;\ \beta=3\Rightarrow\alpha+2\beta=5+2.3=11$.

Cách 2. Theo giả thiết ta có $a_1=5,\ a_2=5q+3$. Áp dụng công thức tổng quát, ta được

$$\begin{cases}a_1=\alpha.q^{1-1}+\beta\frac{1-q^{1-1}}{1-q}=\alpha\\ a_2=\alpha.q^{2-1}+\beta\frac{1-q^{2-1}}{1-q}=\alpha q+\beta\end{cases}$$, suy ra $\begin{cases}5=\alpha\\5q+3=\alpha q+\beta\end{cases}$, hay $\begin{cases}\alpha=5\\ \beta=3\end{cases}$

$\Rightarrow\alpha+2\beta=5+2.3=11$

» **Câu 37.** Với hình vuông như hình vẽ bên, cách tô màu như phần gạch sọc được gọi là cách tô màu "đẹp". Một nhà thiết kế tiến hành tô màu cho một hình vuông như hình bên, theo quy trình sau:



Bước 1: Tô màu "đẹp" cho hình vuông $A_1B_1C_1D_1$.

Bước 2: Tô màu "đẹp" cho hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ là hình vuông ở chính giữa khi chia hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ thành 9 phần bằng nhau như hình vẽ.

Bước 3: Tô màu "đẹp" cho hình vuông $A_3B_3C_3D_3$ là hình vuông ở chính giữa khi chia hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ thành 9 phần bằng nhau. Cứ tiếp tục như vậy. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu bước để tổng diện tích phần được tô màu chiếm $49,99\%$.

A. 9 bước. **B.** 4 bước. **C.** 8 bước. **D.** 7 bước.

Lời giải

Chọn B

Gọi diện tích được tô màu ở mỗi bước là u_n, $n \in \mathbb{N}^*$.

Dễ thấy dãy các giá trị u_n là một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = \frac{4}{9}$ và công bội $q = \frac{1}{9}$

Gọi S_k là tổng của k số hạng đầu trong cấp số nhân đang xét thì $S_k = \frac{u_1\left(q^k - 1\right)}{q-1}$.

Để tổng diện tích phần được tô màu chiếm $49,99\%$ thì $\frac{u_1\left(q^k - 1\right)}{q-1} \ge 0,4999 \Leftrightarrow k \ge 3,8$.

Vậy cần ít nhất 4 bước.

» Câu 38. Cho năm số a, b, c, d, e tạo thành một cấp số nhân theo thứ tự đó và các số đều khác 0, biết $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=10$ và tổng của chúng bằng 40. Tính giá trị $|S|$ với $S = abcde$.

A. $|S| = 42$. **B.** $|S| = 62$. **C.** $|S| = 32$. **D.** $|S| = 52$.

Lời giải

Chọn C

Gọi q $(q \ne 0)$ là công bội của cấp số nhân a, b, c, d, e. Khi đó $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \frac{1}{e}$ là cấp số nhân có công bội $\frac{1}{q}$.

Theo đề bài ta có

$$\begin{cases} a+b+c+d+e=40 \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a.\frac{1-q^5}{1-q}=40 \\ \frac{1}{a}.\frac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^5}{1-\frac{1}{q}}=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a.\frac{1-q^5}{1-q}=40 \\ \frac{1}{a}.\frac{q^5-1}{q^4\left(q-1\right)}=10 \end{cases} \Leftrightarrow a^2q^4=4.$$

Ta có $S = abcde = a.aq.aq^2.aq^3.aq^4 = a^5q^{10}$.

Nên $S^2 = \left(a^5q^{10}\right)^2 = \left(a^2q^4\right)^5 = 4^5$.

Suy ra $|S| = \sqrt{4^5} = 32$.

» Câu 39. Ba số x, y, z lập thành một cấp số cộng và có tổng bằng 21. Nếu lần lượt thêm các số $2;3;9$ vào ba số đó thì được ba số lập thành một cấp số nhân. Tính $F = x^2 + y^2 + z^2$.

A. $F = 389$. hoặc $F = 395$. **B.** $F = 395$. hoặc $F = 179$.
C. $F = 389$. hoặc $F = 179$. **D.** $F = 441$ hoặc $F = 357$.

Lời giải

Chọn C

Theo tính chất của cấp số cộng, ta có $x + z = 2y$.

Kết hợp với giả thiết $x + y + z = 21$, ta suy ra $3y = 21 \Leftrightarrow y = 7$.

Gọi d là công sai của cấp số cộng thì $x = y - d = 7 - d$ và $z = y + d = 7 + d$.

Sau khi thêm các số $2;3;9$ vào ba số x, y, z ta được ba số là $x+2, y+3, z+9$ hay $9-d, 10, 16+d$.

Theo tính chất của cấp số nhân, ta có $(9-d)(16+d) = 10^2 \Leftrightarrow d^2 + 7d - 44 = 0$.

Giải phương trình ta được $d = -11$ hoặc $d = 4$.

Với $d = -11$, cấp số cộng $18, 7, -4$. Lúc này $F = 389$.

Với $d = 4$, cấp số cộng $3, 7, 11$. Lúc này $F = 179$.

» Câu 40. Tế bào E. Coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại nhân đôi một lần. Nếu lúc đầu có 10^{12} tế bào thì sau 3 giờ sẽ phân chia thành bao nhiêu tế bào?

A. 1024.10^{12} tế bào. **B.** 256.10^{12} tế bào. **C.** 512.10^{12} tế bào. **D.** 512.10^{13} tế bào.

Lời giải

Chọn C

Lúc đầu có 10^{22} tế bào và mỗi lần phân chia thì một tế bào tách thành hai tế bào nên ta có cấp số nhân với $u_1 = 10^{22}$ và công bội $q = 2$.

Do cứ 20 phút phân đôi một lần nên sau 3 giờ sẽ có 9 lần phân chia tế bào.

Ta có u_{10} là số tế bào nhận được sau 3 giờ.

Vậy, số tế bào nhận được sau 3 giờ là $u_{10} = u_1q^9 = 512.10^{12}$.

B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai

» Câu 41. Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q < 0$ và $u_2 = 4, u_4 = 9$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Số hạng đầu $u_1 = -\dfrac{8}{3}$		
(b)	Số hạng $u_5 = \dfrac{27}{2}$		
(c)	$-\dfrac{2187}{32}$ là số hạng thứ 8		
(d)	Cấp số nhân có công bội $q = -\dfrac{3}{2}$		

Lời giải

(a) Số hạng đầu $u_1 = -\frac{8}{3}$

Ta có: $u_2 = u_1q = 4, u_4 = u_1q^3 = 9 \Rightarrow \frac{u_4}{u_2} = \frac{u_1q^3}{u_1q} \Rightarrow \frac{9}{4} = q^2 \Rightarrow q = -\frac{3}{2}(q < 0)$.

Thay $q = -\frac{3}{2}$ vào u_2, ta được: $u_1\left(-\frac{3}{2}\right) = 4 \Rightarrow u_1 = -\frac{8}{3}$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) Số hạng $u_5 = \frac{27}{2}$

Vậy cấp số nhân đã cho có số hạng đầu $u_1 = -\frac{8}{3}$ và công bội $q = -\frac{3}{2}$.

Khi đó $u_n = -\frac{8}{3}.\left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

Vậy $u_5 = -\frac{27}{2}$

» Chọn SAI.

(c) $-\frac{2187}{32}$ *là số hạng thứ 8*

$-\frac{2187}{32} \neq -\frac{8}{3}.\left(-\frac{3}{2}\right)^7$ nên không phải là số hạng thứ 8

» Chọn SAI.

(d) Cấp số nhân có công bội $q = -\frac{3}{2}$

Ta có: $u_2 = u_1q = 4, u_4 = u_1q^3 = 9 \Rightarrow \frac{u_4}{u_2} = \frac{u_1q^3}{u_1q} \Rightarrow \frac{9}{4} = q^2 \Rightarrow q = -\frac{3}{2}(q < 0)$.

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 42. Cho cấp số nhân (u_n), biết $u_1 + u_5 = 51; u_2 + u_6 = 102$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Số hạng $u_1 = 3$		
(b)	Số hạng $u_4 = 48$		
(c)	Số 12288 là số hạng thứ 12 của cấp số nhân (u_n)		
(d)	Tổng tám số hạng đầu của cấp số nhân là: 765.		

Lời giải

(a) Số hạng $u_1 = 3$

Gọi q là công bội của cấp số nhân đã cho.

$$\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q^4 = 51 \\ u_1q + u_1q^5 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q^4\right) = 51 & (1) \\ u_1q\left(1+q^4\right) = 102 & (2) \end{cases}$$

Nhận xét: Nếu $u_1 = 0$ hay $q = 0$ thì (1) và (2) đều không thoả mãn, vì vậy ta có $u_1q \neq 0$.

Chia theo vế (2) cho (1), ta được: $q = 2$.

Thay $q=2$ vào (1) suy ra $u_1=\dfrac{51}{1+2^4}=3$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) Số hạng $u_4=48$

Công thức số hạng tổng quát của cấp số nhân: $u_n=3\cdot 2^{n-1}$.

$u_4=3.2^3=24$

» **Chọn** SAI.

(c) Số 12288 là số hạng thứ 12 của cấp số nhân (u_n)

Xét $u_n=12288 \Leftrightarrow 3.2^{n-1}=12288 \Leftrightarrow 2^{n-1}=2^{12} \Leftrightarrow n=13$.

Vậy 12288 là số hạng thứ 13 của cấp số nhân đã cho.

» **Chọn** SAI.

(d) Tổng tám số hạng đầu của cấp số nhân là: 765.

Tổng tám số hạng đầu của cấp số nhân là: $S_8=\dfrac{u_1\left(1-q^8\right)}{1-q}=\dfrac{3.\left(1-2^8\right)}{1-2}=765$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 43.** Cho cấp số nhân (u_n) thoả mãn: $\begin{cases} u_4=\dfrac{2}{27} \\ u_3=243u_8 \end{cases}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Số hạng $u_1=2;u_2=\dfrac{2}{3}$		
(b)	$u_5-u_3=-\dfrac{16}{81}$		
(c)	Số $\dfrac{2}{6561}$ là số hạng thứ 8 của cấp số nhân		
(d)	Tổng chín số hạng đầu của cấp số nhân là số lớn hơn 3.		

Lời giải

(a) Số hạng $u_1=2;u_2=\dfrac{2}{3}$

Gọi q là công bội của cấp số nhân (u_n).

Theo giả thiết, ta có: $\begin{cases} u_1q^3=\dfrac{2}{27} \\ u_1q^2=243\cdot u_1q^7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1q^3=\dfrac{2}{27} \\ q^5=\dfrac{1}{243} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q=\dfrac{1}{3} \\ u_1=2 \end{cases}$

Năm số hạng đầu của (u_n) là: $u_1=2;u_2=\dfrac{2}{3};u_3=\dfrac{2}{9};u_4=\dfrac{2}{27};u_5=\dfrac{2}{81}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $u_5-u_3=-\dfrac{16}{81}$

Ta có: $u_3=\dfrac{2}{9};u_5=\dfrac{2}{81} \Rightarrow u_5-u_3=-\dfrac{16}{81}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) Số $\dfrac{2}{6561}$ là số hạng thứ 8 của cấp số nhân

Số hạng tổng quát của cấp số nhân: $u_n = u_1 q^{n-1} = \dfrac{2}{3^{n-1}}$.

Xét $u_n = \dfrac{2}{6561} \Rightarrow \dfrac{2}{3^{n-1}} = \dfrac{2}{6561}$

$\Rightarrow 3^{n-1} = 6561 = 3^8 \Rightarrow n = 9.$

Vậy $\dfrac{2}{6561}$ là số hạng thứ 9 của cấp số nhân (u_n).

» Chọn SAI.

(d) Tổng chín số hạng đầu của cấp số nhân là số lớn hơn 3.

Tổng chín số hạng đầu của cấp số nhân là: $S_9 = \dfrac{u_1(1-q^9)}{1-q} = \dfrac{2.\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^9\right)}{1-\frac{1}{3}} \approx 2{,}99985 < 3$

» Chọn SAI.

» Câu 44. Cho cấp số nhân (u_n) thoả mãn $\begin{cases} u_4 + u_6 = -540 \\ u_3 + u_5 = 180 \end{cases}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Số hạng $u_1 = 2$		
(b)	Gọi q là công bội của cấp số nhân, thì ba số $q;1;3$ tạo thành một cấp số cộng		
(c)	Số -486 là số hạng thứ 5 của cấp số nhân		
(d)	Tổng của 21 số hạng đầu cấp số nhân đã cho bằng 5230176602		

Lời giải

(a) Số hạng $u_1 = 2$

Gọi q là công bội và S_{21} là tổng của 21 số hạng đầu của cấp số nhân (u_n).

Ta có: $\begin{cases} u_4 + u_6 = -540 \\ u_3 + u_5 = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_3 + u_5)q = -540 \\ u_3 + u_5 = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 180q = -540 \\ u_3 + u_5 = 180 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} q = -3 \\ u_1(-3)^2 + u_1(-3)^4 = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -3 \\ u_1(9+81) = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -3 \\ u_1 = 2 \end{cases}$

» Chọn ĐÚNG.

(b) Gọi q là công bội của cấp số nhân, thì ba số $q;1;3$ tạo thành một cấp số cộng

Với $q = -3$, khi đó ba số $\dfrac{3+(-3)}{2} = 0 \neq 1$ không tạo thành một cấp số cộng.

» Chọn SAI.

(c) Số -486 là số hạng thứ 5 của cấp số nhân

Số $-486 = 2.(-3)^5$ nên số -486 là số hạng thứ 6

» Chọn SAI.

(d) Tổng của 21 số hạng đầu cấp số nhân đã cho bằng 5230176602

Suy ra $S_{21}=\dfrac{u_1\left(1-q^{21}\right)}{1-q}=\dfrac{2\left[1-(-3)^{21}\right]}{1-(-3)}=\dfrac{1+3^{21}}{2}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 45.** Cho tứ giác $ABCD$ có bốn góc tạo thành một cấp số nhân có công bội bằng 2. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Số đo góc nhỏ nhất bằng $24°$		
(b)	Số đo góc lớn nhất bằng $196°$		
(c)	Tổng số đo góc lớn nhất với góc nhỏ nhất bằng $220°$		
(d)	Số đo góc lớn nhất trừ cho số đo góc nhỏ nhất bằng $168°$		

Lời giải

Đặt $u_1;u_2;u_3;u_4$ theo thứ tự là số đo bốn góc của tứ giác $ABCD$, gọi q là công bội của cấp số nhân $u_1;u_2;u_3;u_4 \Rightarrow q=2$.

Ta có: $\begin{cases} u_1+u_2+u_3+u_4=360^\circ \\ q=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\cdot\dfrac{1-q^4}{1-q}=360^\circ \\ q=2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1\cdot\dfrac{1-2^4}{1-2}=360^\circ \\ q=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=24^\circ \\ q=2 \end{cases}$.

Vậy số đo bốn góc của tứ giác $ABCD$ là: $24^\circ;48^\circ;96^\circ;192^\circ$.

(a) Số đo góc nhỏ nhất bằng $24°$

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) Số đo góc lớn nhất bằng $196°$

Số đo bốn góc của tứ giác $ABCD$ là: $24^\circ;48^\circ;96^\circ;192^\circ$.

Vậy số đo góc lớn nhất bằng 192°

» **Chọn** SAI.

(c) Tổng số đo góc lớn nhất với góc nhỏ nhất bằng $220°$

Tổng số đo góc lớn nhất với góc nhỏ nhất bằng $24^\circ+192^\circ=216^\circ$

» **Chọn** SAI.

(d) Số đo góc lớn nhất trừ cho số đo góc nhỏ nhất bằng $168°$

Số đo góc lớn nhất trừ cho số đo góc nhỏ nhất bằng $192^\circ-24^\circ=168^\circ$

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 46.** Cho cấp số nhân (u_n) biết rằng $u_1+u_2+u_3=168$ và $u_4+u_5+u_6=21$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Số hạng $u_1=90$		
(b)	Công bội của cấp số nhân bằng 2		
(c)	Số 24 là số hạng thứ 3 của cấp số nhân		
(d)	Tổng của 10 số hạng đầu cấp số nhân đã cho bằng $\dfrac{3069}{16}$		

Lời giải

(a) Số hạng $u_1=90$

Ta có: $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=168 \\ u_4+u_5+u_6=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_1\cdot q+u_1\cdot q^2=168 \\ u_1\cdot q^3+u_1\cdot q^4+u_1\cdot q^5=21 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2\right)=168 \\ u_1q^3\left(1+q+q^2\right)=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=\dfrac{168}{1+q+q^2} \\ q^3=\dfrac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=96 \\ q=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

» **Chọn** SAI.

(b) *Công bội của cấp số nhân bằng 2*

$u_1=96; q=\dfrac{1}{2}$

» **Chọn** SAI.

(c) *Số 24 là số hạng thứ 3 của cấp số nhân*

Ta có $24=96.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3-1}$

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) *Tổng của 10 số hạng đầu cấp số nhân đã cho bằng* $\dfrac{3069}{16}$

Ta có $S_{10}=\dfrac{u_1\left(1-q^{10}\right)}{1-q}=\dfrac{96\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{3069}{16}$

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 47.** Aladin nhặt được cây đèn thần, chàng miết tay vào cây đèn và gọi Thần đèn ra. Thần đèn cho chàng 3 điều ước. Aladin ước 2 điều đầu tiên tùy thích, nhưng điều ước thứ 3 của chàng là: "Ước gì ngày mai tôi lại nhặt được cây đèn và Thần cho tôi số điều ước gấp đôi số điều ước ngày hôm nay". Thần đèn chấp thuận và mỗi ngày Aladin đều thực hiện theo quy tắc như trên: ước hết các điều đầu tiên và luôn chừa lại điều ước cuối cùng để kéo dài thỏa thuận với thần đèn cho ngày hôm sau. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Ngày thứ hai Aladin ước 6 điều		
(b)	Ngày thứ ba Aladin ước 12 điều		
(c)	Ngày thứ tư Aladin ước 48 điều		
(d)	Sau 10 ngày gặp Thần đèn, Aladin ước tất cả 3269 điều ước		

Lời giải

(a) *Ngày thứ hai Aladin ước 6 điều.*

Ngày thứ nhất Aladin ước 3 điều.

Ngày thứ hai Aladin ước 2.3 điều.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) *Ngày thứ ba Aladin ước 12 điều.*

Ngày thứ ba Aladin ước $2.2.3=2^2.3$ điều.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) *Ngày thứ tư Aladin ước 48 điều.*

Ngày thứ tư Aladin ước $2\cdot 2^2\cdot 3=2^3\cdot 3$ điều.

» **Chọn** SAI.

(d) Sau 10 ngày gặp Thần đèn, Aladin ước tất cả 3269 điều ước

Ngày thứ 10 Aladin ước $2^9.3$ điều.

Vậy sau 10 ngày Aladin đã ước: $3\left(1+2+2^2+2^3+\ldots+2^9\right)=3\left(\dfrac{1-2^{10}}{1-2}\right)=3069$ điều.

» **Chọn** SAI.

» **Câu 48.** Cho cấp số nhân (u_n) có công bội nguyên và các số hạng thoả mãn $\begin{cases} u_4-u_2=54 \\ u_5-u_3=108 \end{cases}$

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Số hạng đầu của cấp số nhân bằng 9		
(b)	Công bội của cấp số nhân $q=3$		
(c)	Tổng của 9 số hạng đầu tiên bằng 4599		
(d)	Số 576 là số hạng thứ 6 của cấp số nhân		

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} u_4-u_2=54 \\ u_5-u_3=108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^3-u_1q=54 \\ u_1q^4-u_1q^2=108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q\left(q^2-1\right)=54 \\ u_1q^2\left(q^2-1\right)=108 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1=\dfrac{54}{q(q^2-1)} \\ \dfrac{1}{q}=\dfrac{54}{108} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=\dfrac{54}{2(2^2-1)} \\ q=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=9 \\ q=2 \end{cases}$

(a) Số hạng đầu của cấp số nhân bằng 9

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) Công bội của cấp số nhân $q=3$

$u_1=9; q=2$

» **Chọn** SAI.

(c) Tổng của 9 số hạng đầu tiên bằng 4599

Ta có: $S_n=4599 \Leftrightarrow \dfrac{u_1\cdot\left(1-q^n\right)}{1-q}=4599 \Leftrightarrow \dfrac{9\cdot\left(1-2^n\right)}{1-2}=4599$

$\Leftrightarrow -9.\left(1-2^n\right)=4599 \Leftrightarrow 1-2^n=-511 \Leftrightarrow 2^n=512 \Leftrightarrow n=9$

Vậy tổng của 9 số hạng đầu tiên bằng 4599.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) Số 576 là số hạng thứ 6 của cấp số nhân

Ta có: $u_k=576 \Leftrightarrow u_1\cdot q^{k-1}=576 \Leftrightarrow 9.2^{k-1}=576 \Leftrightarrow 2^{k-1}=64 \Leftrightarrow k-1=6 \Leftrightarrow k=7$

Vậy số 576 là số hạng thứ 7 của cấp số nhân.

» **Chọn** SAI.

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» **Câu 49.** Tìm số hạng đầu của cấp số nhân (u_n), biết: $\begin{cases} u_1+u_5=51 \\ u_2+u_6=102 \end{cases}$

Lời giải

✓ *Trả lời: 3*

Áp dụng công thức: $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$

$$\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q^4 = 51 \\ u_1 q + u_1 q^5 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot \left(1+q^4\right) = 51 \\ u_1 q \cdot \left(1+q^4\right) = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{51}{1+q^4} \\ \dfrac{u_1 \cdot \left(1+q^4\right)}{u_1 q \cdot \left(1+q^4\right)} = \dfrac{51}{102} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow q = 2$$

Khi đó: $u_1 = \dfrac{51}{1+2^4} = 3$

Vậy $u_1 = 3; q = 2$.

» Câu 50. Biết $(u_1;q)$ là cặp số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n): $\begin{cases} u_2 = 6 \\ S_3 = 43 \end{cases}$. Có bao nhiêu cặp $(u_1;q)$ thỏa cấp số nhân đã cho?

Lời giải

✓ Trả lời: 2

Áp dụng công thức $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$ và $S_n = \dfrac{u_1 \cdot \left(1-q^n\right)}{1-q}$

$$\begin{cases} u_2 = 6 \\ S_3 = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q = 6 \\ \dfrac{u_1 \cdot \left(1-q^3\right)}{1-q} = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q = 6 \\ u_1\left(1+q+q^2\right) = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{6}{q} \\ \dfrac{q}{1+q+q^2} = \dfrac{6}{43} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 43q = 6.\left(1+q+q^2\right) \Leftrightarrow 6q^2 - 37q + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = 6 \\ q = \dfrac{1}{6} \end{array}\right.$$

Với $q = 6$ thì $u_1 = \dfrac{6}{6} = 1$. Với $q = \dfrac{1}{6}$ thì $u_1 = \dfrac{6}{\frac{1}{6}} = 36$

Vậy $\begin{cases} q = 6 \\ u_1 = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} q = \dfrac{1}{6} \\ u_1 = 36 \end{cases}$.

» Câu 51. Biết $(u_1;q)$ là cặp số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n): $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 31 \\ u_1 + u_3 = 26 \end{cases}$. Có bao nhiêu cặp $(u_1;q)$ có công bội là số nguyên thỏa cấp số nhân đã cho?

Lời giải

✓ Trả lời: 1

Ta có:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 31 \\ u_1 + u_3 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 31 \\ u_1 + u_1 q^2 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2\right) = 31 \\ u_1\left(1+q^2\right) = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1+q+q^2}{1+q^2} = \dfrac{31}{26} \\ u_1 = \dfrac{26}{1+q^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 26.\left(1+q+q^2\right)=31.\left(1+q^2\right) \Leftrightarrow 26+26q+26q^2=31+31q^2 \Leftrightarrow 5q^2-26q+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q=5 \\ q=\dfrac{1}{5} \end{array}\right.$$

Với $q=5$ thì $u_1=\dfrac{26}{1+5^2}=1$.

Với $q=\dfrac{1}{5}$ loại.

» Câu 52. Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_1=5, u_5=405$ và tổng $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n=1820$. Tìm n.

Lời giải

✓ *Trả lời: 6*

Ta có: $\begin{cases} u_1=5 \\ u_5=405 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=5 \\ u_1q^4=405 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=5 \\ q^4=\dfrac{405}{u_1}=81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=5 \\ q=\pm 3 \end{cases}$.

Trường hợp 1: $u_1=5; q=3$.

$S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n=1820\left(n\in N^*\right)$

$\Leftrightarrow u_1\dfrac{1-q^n}{1-q}=1820 \Leftrightarrow \dfrac{1-3^n}{1-3}=\dfrac{1820}{5} \Leftrightarrow 3^n=729 \Leftrightarrow n=6.$

Trường hợp 2: $u_1=5; q=-3$.

$S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n=1820 \quad \left(n\in N^*\right)$

$\Leftrightarrow u_1\dfrac{1-q^n}{1-q}=1820 \Leftrightarrow \dfrac{1-(-3)^n}{1+3}=\dfrac{1820}{5} \Leftrightarrow (-3)^n=-1455 \Leftrightarrow n\in\varnothing, \forall n\in N^*$

Vậy $n=6$

» Câu 53. Viết thêm bốn số vào giữa hai số 160 và 5 để được một cấp số nhân gồm sáu số hạng. Tìm tổng tất cả các số hạng của cấp số nhân đó.

Lời giải

✓ *Trả lời: 315*

Gọi (u_n) là cấp số nhân lập được và q là công bội của cấp số nhân đó.

Cấp số nhân cần lập có dạng: $160; u_2; u_3; u_4; u_5; 5$.

Ta có: $\begin{cases} u_1=160 \\ u_6=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=160 \\ u_1q^5=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=160 \\ 160q^5=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=160 \\ q=\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Tổng các số hạng của cấp số nhân là: $S_6=\dfrac{u_1\left(1-q^6\right)}{1-q}=\dfrac{160\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^6\right]}{\dfrac{1}{2}}=315$.

» Câu 54. Biết một cấp số nhân có số hạng đầu bằng 18, số hạng thứ hai bằng 54 và số hạng cuối bằng 39366. Tổng tất cả các số hạng của một cấp số nhân có dạng $\overline{5a0b0}$, với $a;b$ là các số tự nhiên. Tính $S=a+b$

Lời giải

✓ *Trả lời: 13*

Gọi (u_n) là cấp số nhân cần tìm, q là công bội của cấp số nhân đó.

Ta có: $u_1=18, u_2=54 \Rightarrow q=\frac{u_2}{u_1}=\frac{54}{18}=3$.

Xét số hạng cuối $u_n=39366$

$\Leftrightarrow u_1q^{n-1}=39366 \Leftrightarrow 18.3^{n-1}=39366 \Leftrightarrow 3^{n-1}=3^7 \Leftrightarrow n=8$.

Vậy tổng tám số hạng của cấp số nhân là: $S_8=\frac{u_1(1-q^8)}{1-q}=18\cdot\frac{1-3^8}{1-3}=59040$.

Khi đó $\begin{cases} a=9 \\ b=4 \end{cases} S=a+b=13$

» Câu 55. Kết quả của tổng sau theo n: $S_n=\left(2+\frac{1}{2}\right)^2+\left(4+\frac{1}{4}\right)^2+\ldots+\left(2^n+\frac{1}{2^n}\right)^2$ có dạng $-1+\frac{a^{n+1}}{3}-\frac{1}{3\cdot a^n}+\frac{a}{2}n$ với a là số tự nhiên. Giá trị của a bằng bao nhiêu?

Lời giải

✓ *Trả lời: 4*

$$S_n=2^2+\frac{1}{2^2}+2+2^4+\frac{1}{2^4}+2+\ldots+2^{2n}+\frac{1}{2^{2n}}+2$$
$$=\left(2^2+2^4+\ldots+2^{2n}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}}\right)+2n$$

Ta thấy S_n chứa hai tổng của cấp số nhân: cấp số nhân thứ nhất có n phần tử, số hạng đầu bằng 4, công bội bằng 4; cấp số nhân thứ hai có n phần tử, số hạng đầu bằng $\frac{1}{4}$, công bội bằng $\frac{1}{4}$.

Vì vậy

$$S_n=4\cdot\frac{1-4^n}{1-4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}}+2n=-\frac{4}{3}\left(1-4^n\right)+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)+2n=-1+\frac{4^{n+1}}{3}-\frac{1}{3\cdot 4^n}+2n$$

Do đó $a=4$

» Câu 56. Kết quả của tổng sau theo n: $S_n=8+88+888+\ldots+\underbrace{88\ldots8}_{n\text{ chu so }8}$ có dạng $\frac{a\left(10^n-b\right)}{81}-\frac{8}{9}n$ với $a;b$ là các số tự nhiên. Giá trị của $P=a-30b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

✓ *Trả lời: 50*

$$S_n=\frac{8}{9}\left(9+99+999+\ldots+\underbrace{99\ldots9}_{n\text{chu so}}\right)$$
$$=\frac{8}{9}\left(10-1+10^2-1+10^3-1+\ldots+10^n-1\right)$$
$$=\frac{8}{9}\left[\left(10+10^2+10^3+\ldots+10^n\right)-n\right]=\frac{8}{9}\left(10\cdot\frac{1-10^n}{1-10}-n\right)=\frac{80\left(10^n-1\right)}{81}-\frac{8}{9}n$$

Vậy $\begin{cases} a = 80 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow P = a - 30b = 50$

» **Câu 57.** Tổng ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng là 21. Nếu lấy số thứ hai trừ đi 1 và số thứ ba cộng thêm 1 thì ba số đó lập thành một cấp số nhân. Tính tích ba số đó biết số hạng đầu có giá trị nhỏ hơn 4

Lời giải

✓ *Trả lời: 231*

Gọi (u_n) là cấp số cộng có công sai d.

Ta có: $u_1 + u_2 + u_3 = 21 \Rightarrow u_1 + (u_1 + d) + (u_1 + 2d) = 21 \Rightarrow u_1 + d = 7 (*)$..

Theo giả thiết: $u_1; u_2 - 1; u_3 + 1$ lập thành cấp số nhân hay $u_1; u_1 + d - 1; u_1 + 2d + 1$ lập thành một cấp số nhân.

Suy ra: $(u_1 + d - 1)^2 = u_1(u_1 + 2d + 1) \Rightarrow (u_1 + d - 1)^2 = u_1\left[2(u_1 + d) - u_1 + 1\right]$.

Kết hợp với $(*)$, ta được: $(7-1)^2 = u_1(2.7 - u_1 + 1) \Rightarrow 36 = u_1(15 - u_1)$

$\Rightarrow u_1^2 - 15u_1 + 36 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u_1 = 12 > 4 (L) \\ u_1 = 3 \end{array}\right.$

Với $u_1 = 3$ thì $d = 4 \Rightarrow u_2 = 7; u_3 = 11$.

Vậy tích các số đó bằng 231

» **Câu 58.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân: $x^3 - 7x^2 + 2(m^2 + 6m)x - 8 = 0$.

Lời giải

✓ *Trả lời: 2*

Điều kiện cần: *Giả sử phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 lập thành một cấp số nhân.*

Ta có: $x^3 - 7x^2 + 2(m^2 + 6m)x - 8 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3), \forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1x_2x_3 = 8$.

Theo tính chất của cấp số nhân: $x_1x_3 = x_2^2$.

Suy ra: $x_2^3 = 8 \Rightarrow x_2 = 2$.

Thay nghiệm $x = x_2 = 2$ vào phương trình đã cho, ta có:

$8 - 28 + 2(m^2 + 6m) \cdot 2 - 8 = 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 24m - 28 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -7 \end{array}\right.$.

Điều kiện đủ: *Thử lại với các giá trị m tìm được.*

Với $m = 1$, ta có phương trình: $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 2 \\ x = 1 \end{array}\right.$ (thoả mãn).

Với $m = -7$, ta có phương trình $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 2 \\ x = 1 \end{array}\right.$ (thoả mãn).

Vậy $m = 1; m = -7$ là các giá trị cần tìm.

» **Câu 59.** Chu kì bán rã của nguyên tố phóng xạ polonium 210 là 138 ngày (nghĩa là sau 138 ngày khối lượng của nguyên tố đó chỉ còn một nửa). Khối lượng còn lại của 20 gam polonium

210 sau 7314 ngày (khoảng 20 năm) có dạng $\approx a,22\cdot 10^{-b}$ với $a;b$ là các số tự nhiên. Tính $S=b-2a$

Lời giải

✓ ***Trả lời: 11***

Gọi u_n (gam) là khối lượng còn lại của 20 gam polonium 210 sau n chu kì bán rã.
Ta có 7314 ngày gồm 53 chu kì bán rã.
Theo đề bài ra, ta cần tính u_{53}.

Từ giả thiết suy ra dãy (u_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu là $u_1=\frac{20}{2}=10$ và công bội $q=0,5$. Suy ra $u_n=10\cdot(0,5)^{n-1}$.

Do đó $u_{53}=10\cdot\left(0,5\right)^{52}\approx 2,22\cdot 10^{-15}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=15\end{cases}\Rightarrow S=15-4=11$.

» Câu 60. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để các số $2x-1;x;2x+1$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.

Lời giải

✓ ***Trả lời: 2***

Vì $2x-1;x;2x+1$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân

$\Rightarrow\left(2x-1\right)\left(2x+1\right)=x^2\Rightarrow 4x^2-1=x^2\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy có hai giá trị $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ thoả mãn đề bài.

» Câu 61. Kết quả của tổng $S=1+2\cdot 5+3\cdot 5^2+\ldots+79\cdot 5^{78}$ được viết dưới dạng $a+\frac{315}{16}\cdot 5^b\left(b\in\mathbb{N},a\right.$ là phân số tối giản). Tính giá trị biểu thức $P=a+\frac{b}{16}$.

Lời giải

✓ ***Trả lời: 5***

Từ giả thiết, ta có: $5S=5+2\cdot 5^2+3\cdot 5^3+\ldots+79\cdot 5^{79}$.
Do đó: $-4S=S-5S=\underbrace{1+5+5^2+\ldots+5^{78}}_{S'}-79.5^{79}$.

Xét tổng $S'=1+5+5^2+\ldots+5^{78}$ là tổng của 79 số hạng của một cấp số nhân có số hạng đầu bằng 1 và công bội bằng 5, ta có: $S'=\frac{1-5^{79}}{1-5}$.

Vậy $-4S=S'-79\cdot 5^{79}=\frac{1-5^{79}}{1-5}-79\cdot 5^{79}=-\frac{1}{4}-\frac{315\cdot 5^{79}}{4}\Rightarrow S=\frac{1}{16}+\frac{315}{16}\cdot 5^{79}$.

Ta có: $S=\frac{1}{16}+\frac{315}{16}\cdot 5^{79}=a+\frac{315}{16}\cdot 5^b\Rightarrow a=\frac{1}{16},b=79\Rightarrow P=\frac{1}{16}+\frac{79}{16}=5$.

» Câu 62. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=-3$, công bội $q=-2$. Hỏi -192 là số hạng thứ mấy của (u_n) ?

Lời giải

✓ ***Trả lời: 7***

Giả sử $u_n=-192$ và (u_n) là cấp số nhân, ta có:

$-192=-3.(-2)^{n-1}\Leftrightarrow(-2)^{n-1}=64\Leftrightarrow(-2)^{n-1}=(-2)^6\Leftrightarrow n=7$.

Vậy -192 là số hạng thứ 7.

» Câu 63. Cho các số nguyên x và y thỏa mãn $5x-y,2x+3y,x+2y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng, đồng thời $(y+1)^2;xy+1;(x-1)^2$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tính tổng giá trị x và y.

Lời giải

✓ ***Trả lời: 0***

Do $5x-y,2x+3y,x+2y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng nên:

$2(2x+3y)=5x-y+x+2y \Leftrightarrow 2x=5y \quad (1)$.

Do $(y+1)^2;xy+1;(x-1)^2$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân nên:

$(xy+1)^2=(y+1)^2(x-1)^2 \Leftrightarrow (4+2y-2x)(4xy+2x-2y)=0$ (2).

Thay (1) vào (2) ta được phương trình:

$$(4+2y-5y)(10y^2+5y-2y)=0 \Leftrightarrow y(4-3y)(10y+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=\dfrac{4}{3} \\ y=-\dfrac{3}{10} \end{array}\right..$$

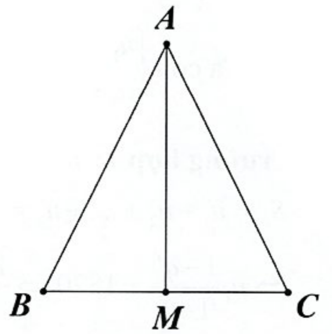
Vì $y\in\mathbb{Z}$ nên suy ra $y=0$ khi đó $x=0$.

» Câu 64. Cho tam giác ABC cân tại A. Biết rằng độ dài cạnh BC, trung tuyến AM và độ dài cạnh AB theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân có công bội q. Có bao nhiêu giá trị công bội q nguyên của cấp số nhân đó?

Lời giải

✓ ***Trả lời: 0***

Ta có: AM là đường trung tuyến nên cũng là đường cao



$\Rightarrow AM<AB \Rightarrow BC<AM<AB$ và $q=\dfrac{AB}{AM}>1$.

Do đó: $\begin{cases} AM=BC.q \\ AB=BC\cdot q^2 \end{cases}$.

Ta có: $AB^2=AM^2+BM^2$ (Áp dụng định lý Pythagore cho ΔABM vuông tại M)

$\Leftrightarrow BC^2\cdot q^4=BC^2\cdot q^2+\dfrac{BC^2}{4}$

$$\Leftrightarrow q^4 = q^2 + \frac{1}{4} \Leftrightarrow q^4 - q^2 - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \\ q^2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow q = \frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}.$$

» Câu 65. Bạn Lan thả quả bóng cao su từ độ cao $12m$ theo phương thẳng đứng. Mỗi khi chạm đất nó lại nảy lên theo phương thẳng đứng với độ cao bằng $\frac{2}{3}$ độ cao trước đó. Tổng quãng đường bóng đi được đến khi bóng dừng hẳn là bao nhiêu mét?

Lời giải

✓ *Trả lời: 60*

Các quãng đường khi bóng đi xuống tạo thành một cấp số nhân có $u_1 = 12$ và $q = \frac{2}{3}$.

Tổng các quãng đường khi bóng đi xuống là $S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{12}{\left(1-\frac{2}{3}\right)} = 36(m)$

Vậy tổng quãng đường bóng đi được (cả lên và xuống) đến khi bóng dừng hẳn là $2S - 12 = 2.36 - 12 = 60(m)$

» Câu 66. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thì phương trình $x^3 - mx^2 - 6x - 8 = 0$ có ba nghiệm thực lập thành một cấp số nhân?

Lời giải

✓ *Trả lời: 1*

Ta chứng minh nếu $x_1; x_2; x_3$ là nghiệm của phương trình $x^3 - mx^2 - 6x - 8 = 0$

thì $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = m \\ x_1x_2x_3 = 8 \end{cases}$

Thật vậy $x^3 - mx^2 - 6x - 8 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

$$\Leftrightarrow x^3 - mx^2 - 6x - 8 = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)x - x_1x_2x_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = m \\ x_1x_2x_3 = 8 \end{cases}$$

Điều kiện cần: Phương trình $x^3 - mx^2 - 6x - 8 = 0$ có ba nghiệm thực $x_1 < x_2 < x_3$ lập thành một cấp số nhân nên $x_1 \cdot x_3 \cdot x_2 = x_2^2 \cdot x_2 \Leftrightarrow 8 = x_2^3 \Leftrightarrow x_2 = 2$.

Vậy phương trình $x^3 - mx^2 - 6x - 8 = 0$ phải có nghiệm bằng 2

Thay $x_2 = 2$ vào phương trình $x^3 - mx^2 - 6x - 8 = 0$ ta được $m = -3$.

Điều kiện đủ: Thử lại với $m = -3$ ta có:

$$x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 2 \\ x = -1 \end{array}\right. \text{(thỏa yêu cầu bài toán)}$$

Vậy $m = -3$ thì phương trình đã cho có ba nghiệm $x_1; x_2; x_3$ lập thành cấp số nhân.

----------------------------------- Hết -----------------------------------