CHƯƠNG III

NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

BÀI 3. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

I LÝ THUYẾT.

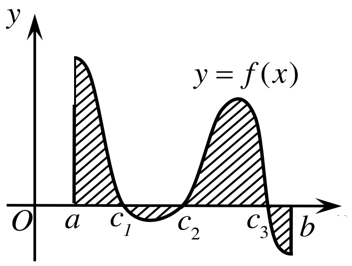
I. DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

1. Định lý 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên $\left[a;b\right]$. Khi đó diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và 2 đường thẳng $x = a, x = b$ là:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

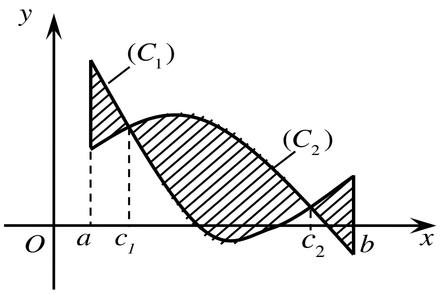
2. Bài toán liên quan

Bài toán 1: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định: $S = \int_a^b \left|f(x)\right|dx$



$$(H)\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \qquad \boxed{S = \int_a^b \left|f(x)\right|dx}$$

Bài toán 2: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định: $S = \int_a^b \left|f(x) - g(x)\right|dx$



$$(H)\begin{cases} (C_1): y = f_1(x) \\ (C_2): y = f_2(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases}$$

$$\boxed{S = \int_a^b \left|f_1(x) - f_2(x)\right|dx}$$

Chú ý:

- Nếu trên đoạn $[a;b]$, hàm số $f(x)$ không đổi dấu thì: $\int_a^b |f(x)|dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$

- Nắm vững cách tính tích phân của hàm số có chứa giá trị tuyệt đối

Bài toán 3: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, $x = h(y)$ và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ được xác định: $S = \int_c^d |g(y) - h(y)|dy$

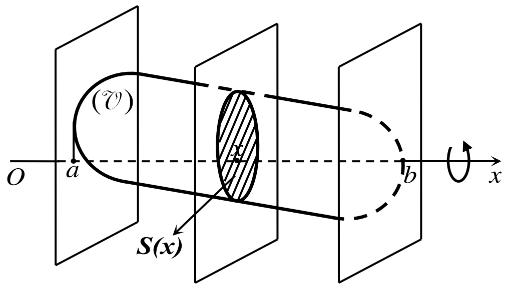
Bài toán 4: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị $(C_1): f_1(x), (C_2): f_2(x)$ là:

$S = \int_{x_1}^{x_n} |f(x) - g(x)|dx$. Trong đó: x_1, x_n tương ứng là nghiệm nhỏ nhất của phương trình $f(x) = g(x)$

II. THỂ TÍCH CỦA KHỐI TRÒN XOAY

1. Thể tích vật thể

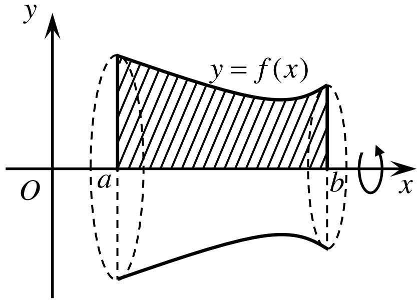
Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục *Ox* tại các điểm *a* và *b*; $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục *Ox* tại điểm x, $(a \le x \le b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$.



$$\boxed{V = \int_a^b S(x)dx}$$

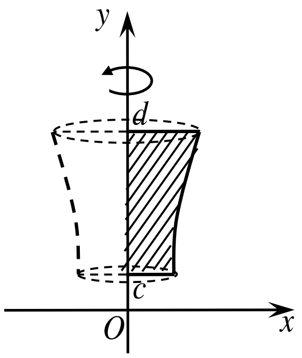
2. Thể tích khối tròn xoay

Bài toán 1: Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục *Ox*:



$$\begin{cases} (C): y = f(x) \\ (Ox): y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \qquad \boxed{V_x = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx}$$

Bài toán 2: Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ quanh trục Oy:



$$\begin{cases} (C): x = g(y) \\ (Oy): x = 0 \\ y = c \\ y = d \end{cases}$$

$$\boxed{V_y = \pi\int_c^d [g(y)]^2\, dy}$$

Bài toán 3: Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox: $V = \pi\int_a^b \left|f^2(x) - g^2(x)\right| dx$

II. HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

Dạng 1: Ứng dụng tích phân tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x), Ox, x = a, x = b.$

Phương pháp Giải theo phương pháp tự luận: Sử dụng tính chất cơ bản của tích phân để tính tích phân chứa dấu giá trị tuyệt đối .

+) Tính chất: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên K và a, b, c là ba số bất kỳ thuộc K. Khi đó, ta có

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Phương pháp trắc nghiệm:

- Xác định các yếu tố cần thiết như công thức $y = f(x), Ox, x = a, x = b.$

- Sử dụng chức năng tính tích phân có sẵn trong máy tính Casio để tính.

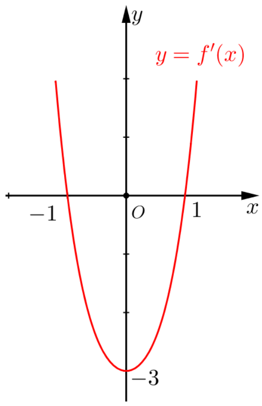
Chú ý: Nếu đề bài chưa cho $x = a, x = b$ thì ta cần giải phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = 0$ để tìm cận tích phân.

Câu 1: Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^4$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 3$

Câu 2: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 1 - \frac{1}{x^2}$, trục Ox và hai đường thẳng $x = \frac{1}{2}, x = 2$ có diện tích là

Câu 3: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x^2 - x^4$ và trục hoành

Câu 4: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d,\left(a,b,c\in\mathbb{R},a\neq 0\right)$ có đồ thị $\left(C\right)$. Biết rằng đồ thị $\left(C\right)$ tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ cho bởi hình vẽ dưới đây:



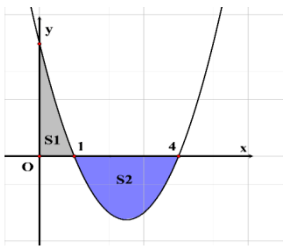
Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $\left(C\right)$ và trục hoành.

Câu 5: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\cos^2 x$, trục hoành, đường thẳng $x=0$ và $x=\pi$ là.

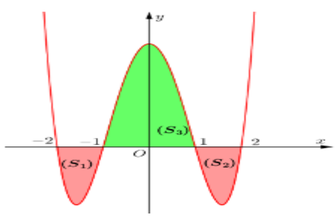
Câu 6: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-4x$, trục hoành, đường thẳng $x=-2$ và $x=4$ là

Câu 7: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$, trục hoành, hai đường thẳng $x=1$ và $x=2$ là.

Câu 8: Cho đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[0;\,4\right]$ như hình vẽ và có diện tích $S_1=\dfrac{11}{6},\ S_2=\dfrac{9}{2}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^4 f\left(x\right)dx$



Câu 9: Cho đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-2;\,2\right]$ như hình vẽ ở bên và có diện tích $S_1=S_2=\dfrac{22}{15},\ S_3=\dfrac{76}{15}$. Tính tích phân $I=\int\limits_{-2}^{2} f\left(x\right)dx$



Câu 10: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1,\ x=3$ là.

Câu 11: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sin x+1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$ và $x=\frac{7\pi}{6}$ là.

Câu 13: Tính diện tích S của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x.\ln(3x+1)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0;\ x=1$

Câu 14: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=e^x$, trục Ox, trục Oy và đường thẳng $x=2$ là.

Câu 15: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+1$ và trục Ox

Câu 16: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^3+3x^2$ và trục hoành là.

Câu 17: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=-x^2+2x$ và trục hoành là:

Câu 18: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y^2+x-5=0,\ x+y-3=0$

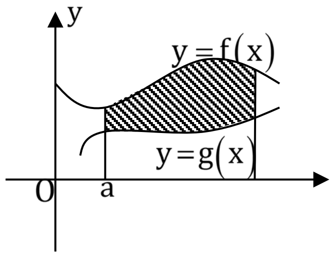
Câu 19: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số: $y=x^2-4x+4$, trục tung và trục hoành. Xác định k để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(0;\ 4)$ có hệ số góc k chia thành hai phần có diện tích bằng nhau.

2. Dạng 2: Ứng dụng tích phân tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi

$$y=f(x), y=g(x), x=a, x=b.$$

Phương pháp giải:

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị: $(C_1): y=f(x)$ $(C_2): y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a, x=b$ được xác định bởi công thức: $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$.



Chú ý: Để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta thường làm như sau:

* Giải phương trình: $f(x)=g(x)$ tìm nghiệm $x_1, x_2, ..., x_n \in (a;b)$, $(x_1<x_2<...<x_n)$.

Tính: $S=\int_a^{x_1}|f(x)-g(x)|dx+\int_{x_1}^{x_2}|f(x)-g(x)|dx+...+\int_{x_n}^{b}|f(x)-g(x)|dx$

$=\left|\int_a^{x_1}(f(x)-g(x))dx\right|+...+\left|\int_{x_n}^{b}(f(x)-g(x))dx\right|.$

Ngoài cách trên, ta có thể dựa vào đồ thị để khử dấu giá trị tuyệt đối.

Câu 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2-x^2$ và $y=x$ và các đường thẳng $x=-2, x=1$

Câu 2: . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x^3 + x$; $y = 2x$ và các đường thẳng $x = -1, x = 1$ được xác định bởi công thức.

Câu 3: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-2}$; tiệm cận ngang và hai đường thẳng $x = 3, x = e + 2$ được tính bằng:

Câu 4: Hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2, y = 2x + 3$ và hai đường $x = 0,\ \ x = 2$. Công thức nào sau đây tính diện tích hình phẳng (H)?

Câu 5: Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = x^3, y = 2 - x^2, x = 0$.

Câu 6: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y = \dfrac{x+2}{x+1}$, tiệm cận ngang của (C), trục tung và đường thẳng $x = 2$.

Câu 7: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $(C): y = \dfrac{2x+1}{x+1}$, tiệm cận ngang của (C) và hai đường thẳng $x = 1, x = 3$.

Câu 8: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $(P): y = x^2 - 2x + 2,$ trục tung, tiếp tuyến của (P) tại $M(3;5)$ là:

Câu 9: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol: $y = x^2 + 1$, tiếp tuyến với đường này tại điểm $M(2;5)$ và trục Oy.

3. Dạng 3: Ứng dụng tích phân tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x), y = g(x)$.

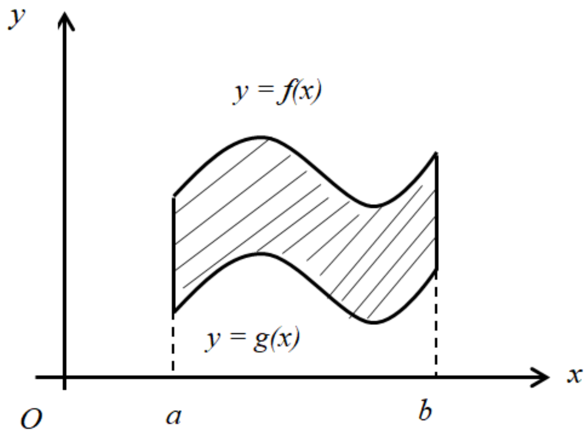
Phương pháp giải:

Dạng: Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là $S = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx$. Trong đó α, β là nghiệm nhỏ nhất và lớn nhất của phương trình $f(x) = g(x)$ $(a \le \alpha < \beta \le b)$

Cách giải:

Bước 1: Giải phương trình $f(x) = g(x)$ tìm các giá trị α, β.

Bước 2: Tính $S = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx$.



Chú ý: Nếu $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a;b]$ thì $S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

Câu 1: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2; y = x + 2$ bằng?

Câu 2: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2 - 4x + 5$ và hai tiếp tuyến của (P) tại các điểm $A(1;2)$, $B(4;5)$ là:

Câu 3: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x + 3, y = x^2 - 4x + 3$ là:

Câu 4: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x^3, y = 4x$ là:

Câu 5: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 - 12x$ và $y = x^2$ là:

Câu 6: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + x - 1, y = x^4 + x - 1$ là:

Câu 7: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y^2 = 2x, y = 2x - 2$ là:

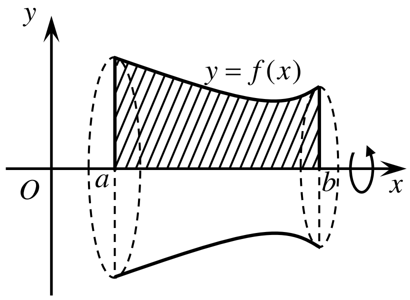
Câu 8: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y^2 - 2y + x = 0$, $x + y = 0$ là:

Câu 9: Gọi S là diện tích mặt phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2 + 2x - 3$ và đường thẳng $y = kx + 1$ với k là tham số thực. Tìm k để S nhỏ nhất.

THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY

Dạng 1: Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox :

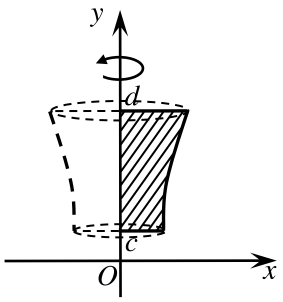
Phương pháp giải:



$$\begin{cases} (C): y = f(x) \\ (Ox): y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \qquad \boxed{V_x = \pi\int_a^b [f(x)]^2\, dx}$$

Chú ý:

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ quanh trục *Oy*:



$$\begin{cases} (C): x = g(y) \\ (Oy): x = 0 \\ y = c \\ y = d \end{cases} \qquad \boxed{V_y = \pi\int_c^d [g(y)]^2\, dy}$$

Câu 1: Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 2$ *và* $y = 0$ quanh trục Ox là:

Câu 2: Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x - x^2$ và $y = 0$. Tính thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra bởi hình phẳng đó khi nó quay quanh trục Ox .

Câu 3: Tính thể tích V của vật thể tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x\sqrt{\ln x}$, trục hoành và đường thẳng $x = e$ quay quanh Ox

Câu 4: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2; y = 0; x = 2$. Tính thể tích V ủa khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục Ox .

Câu 5: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = 4 - x^2, y = 0$. Tính thể tích V của khối tròn xoay hình thành khi cho (H) quay xung quanh Ox

Câu 6: Tính thể tích V của vật thể tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{1}{x}, y = 0, x = 1, x = a\,(a > 1)$ quay xung quanh trục Ox

Câu 7: Cho hình phẳng (D) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^{\frac{x}{2}}$ trục Ox và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay khi quay hình (D) quay quanh trục Ox.

Câu 8: Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-2x, y=0, x=0$ và $x=1$.

Câu 9: Cho hình (H) giới hạn bở đồ thị $(C): y=x\ln x$, trục hoành và các đường thẳng $x=1$, $x=e$. Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành.

Dạng 2. Thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x), y=g(x)$, $x=a, x=b$ **khi quay quanh trục** Ox **được tính bởi công thức:** $V=\pi\int_a^b\left|f^2(x)-g^2(x)\right|dx$.

Câu 1: Thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi Parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $d: y=2x$ quay xung quanh trục Ox bằng:

Câu 2: Tính thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=x^2-2x$ và $y=-x^2$ quay quanh trục Ox .

Câu 3: Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $\mathrm{y}=0, \mathrm{y}=x\sqrt{\ln(x+1)}$ và $x=1$ xung quanh trục Ox là:

Câu 4: Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=x^2$ và $x=y^2$ quay quanh trục Ox bằng bao nhiêu?

Câu 5: Thể tích khối tròn xoay khi quay quanh trục hoành phần hình phẳng giới hạn bởi 2 đường $y=x^2$ và $y=\sqrt{x}$ là

CHƯƠNG III

NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

BÀI 3. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

I LÝ THUYẾT.

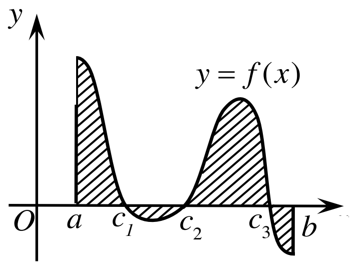
I. DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

1. Định lý 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên $\left[a;b\right]$. Khi đó diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và 2 đường thẳng $x = a, x = b$ là:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

2. Bài toán liên quan

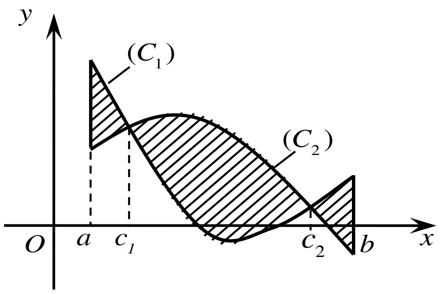
Bài toán 1: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định: $S = \int_a^b \left|f(x)\right|dx$



$$(H)\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases}$$

$$\boxed{S = \int_a^b \left|f(x)\right|dx}$$

Bài toán 2: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định: $S = \int_a^b \left|f(x) - g(x)\right|dx$



$$(H)\begin{cases} (C_1): y = f_1(x) \\ (C_2): y = f_2(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases}$$

$$\boxed{S = \int_a^b \left|f_1(x) - f_2(x)\right|dx}$$

Chú ý:

- Nếu trên đoạn $[a;b]$, hàm số $f(x)$ không đổi dấu thì: $\int_a^b |f(x)|dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$

- Nắm vững cách tính tích phân của hàm số có chứa giá trị tuyệt đối

Bài toán 3: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, $x = h(y)$ và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ được xác định: $S = \int_c^d |g(y) - h(y)|dy$

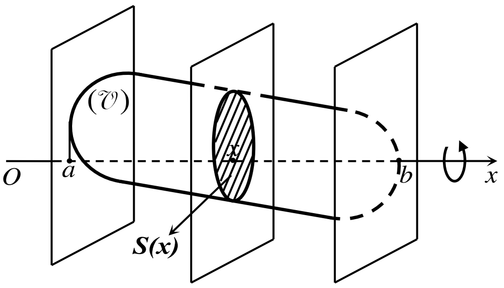
Bài toán 4: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị $(C_1): f_1(x), (C_2): f_2(x)$ là:

$S = \int_{x_1}^{x_n} |f(x) - g(x)|dx$. Trong đó: x_1, x_n tương ứng là nghiệm nhỏ nhất của phương trình $f(x) = g(x)$

II. THỂ TÍCH CỦA KHỐI TRÒN XOAY

1. Thể tích vật thể

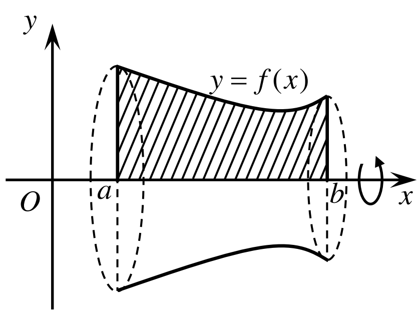
Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục *Ox* tại các điểm *a* và *b*; $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục *Ox* tại điểm x, $(a \le x \le b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$.



$$\boxed{V = \int_a^b S(x)dx}$$

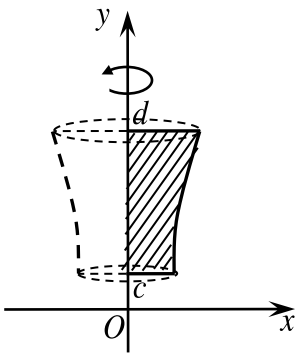
2. Thể tích khối tròn xoay

Bài toán 1: Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục *Ox*:



$$\begin{cases} (C): y = f(x) \\ (Ox): y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \qquad \boxed{V_x = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx}$$

Bài toán 2: Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ quanh trục *Oy*:



$$\begin{cases} (C): x = g(y) \\ (Oy): x = 0 \\ y = c \\ y = d \end{cases}$$

$$\boxed{V_y = \pi\int_c^d [g(y)]^2\, dy}$$

Bài toán 3: Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox: $V = \pi\int_a^b \left|f^2(x) - g^2(x)\right| dx$

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

Dạng 1: Ứng dụng tích phân tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x), Ox, x = a, x = b$.

Phương pháp Giải theo phương pháp tự luận: Sử dụng tính chất cơ bản của tích phân để tính tích phân chứa dấu giá trị tuyệt đối .

+) Tính chất: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên K và a,b,c là ba số bất kỳ thuộc K. Khi đó, ta có

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Phương pháp trắc nghiệm:

- Xác định các yếu tố cần thiết như công thức $y = f(x), Ox, x = a, x = b$.

- Sử dụng chức năng tính tích phân có sẵn trong máy tính Casio để tính.

Chú ý: Nếu đề bài chưa cho $x = a, x = b$ *thì ta cần giải phương trình hoành độ giao điểm* $f(x) = 0$ *để tìm cận tích phân.*

Câu 1: Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^4$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 3$

Lời giải

Diện tích hình phẳng cần tìm là: $S = \int_{-1}^{3}\left|x^4\right|dx = \int_{-1}^{3} x^4 dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_{-1}^{3} = \frac{3^5}{5} - \frac{(-1)^5}{5} = \frac{244}{5}$

Giải theo phương pháp trắc nghiệm

Sử dụng máy tính Casio tính tích phân $S = \int_{-1}^{3}\left|x^4\right|dx = \frac{244}{5}$

Câu 2: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 1 - \frac{1}{x^2}$, trục Ox và hai đường thẳng $x = \frac{1}{2}, x = 2$ có diện tích là

Lời giải

Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left|1-\frac{1}{x^2}\right|dx=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{\left|x^2-1\right|}{x^2}dx=-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{x^2-1}{x^2}dx+\int_{1}^{2}\frac{x^2-1}{x^2}dx$$

$$=-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx+\int_{1}^{2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx=-\left(x+\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}+\left(x+\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{1}^{2}=1$$

$\Rightarrow$ *Chọn đáp án D*

Giải theo phương pháp trắc nghiệm

Sử dụng máy tính Casio tính tích phân $S=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left|1-\frac{1}{x^2}\right|dx=1$

Câu 3: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2x^2-x^4$ và trục hoành

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và trục hoành là:

$$2x^2-x^4=0\Leftrightarrow x^2\left(2-x^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S=\int_{-\sqrt{2}}^{0}\left|2x^2-x^4\right|dx+\int_{0}^{\sqrt{2}}\left|2x^2-x^4\right|dx=\int_{-\sqrt{2}}^{0}\left(2x^2-x^4\right)dx+\int_{0}^{\sqrt{2}}\left(2x^2-x^4\right)dx$$

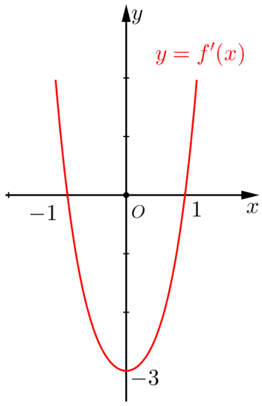
$$=\left(2\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-\sqrt{2}}^{0}+\left(2\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{0}^{\sqrt{2}}=\frac{16\sqrt{2}}{15}$$

Giải theo phương pháp trắc nghiệm

+)Tìm hoành độ giao điểm tương tự như trên

+) Sử dụng máy tính Casio tính tích phân $S=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left|2x^2-x^4\right|dx$

Câu 4: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d,\left(a,b,c\in\mathbb{R},a\neq0\right)$ có đồ thị $\left(C\right)$. Biết rằng đồ thị $\left(C\right)$ tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ cho bởi hình vẽ dưới đây:



Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành.

Lời giải

Từ đồ thị suy ra $f'(x)=3x^2-3$.

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-3)dx=x^3-3x+C$.

Do (C) tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ tại điểm có hoành độ x_0 âm nên

$f'(x_0)=0\Leftrightarrow 3x_0^2-3=0\Leftrightarrow x_0=-1$.

Suy ra $f(-1)=4\Leftrightarrow C=2\Rightarrow(C): y=x^3-3x+2$

Xét phương trình $x^3-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=1\end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là: $\int_{-2}^{1}\left|x^3-3x+2\right|dx=\frac{27}{4}$.

Câu 5: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\cos^2 x$, trục hoành, đường thẳng $x=0$ và $x=\pi$ là.

Lời giải

Diện tích S cần tìm: $S=\int_0^{\pi}\cos^2 x dx=\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}x\Big|_0^{\pi}+\frac{\sin 2x}{4}\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$.

Câu 6: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-4x$, trục hoành, đường thẳng $x=-2$ và $x=4$ là

Lời giải

Diện tích cần tìm $S=\int_{-2}^{4}\left|x^3-4x\right|dx$

Ta có: $x^3-4x=x(x^2-4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 2\end{array}\right.$

Vậy $S=\int_{-2}^{0}\left|x^3-4x\right|dx+\int_{0}^{2}\left|x^3-4x\right|dx+\int_{2}^{4}\left|x^3-4x\right|dx$

$$=\left|\left(\frac{x^4}{4}-4\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{0}\right|+\left|\left(\frac{x^4}{4}-\frac{4x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{2}\right|+\left|\left(\frac{x^4}{4}-4\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{2}^{4}\right|=44.$$

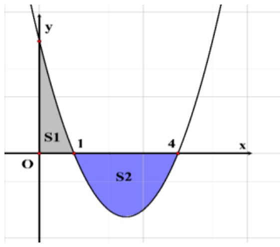
Câu 7: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)=\frac{x-1}{x}$, trục hoành, hai đường thẳng $x=1$ và $x=2$ là.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{x-1}{x}=0\Leftrightarrow x=1$

Suy ra $S=\int_1^2\left|\frac{x-1}{x}\right|dx=\left|\int_1^2\frac{x-1}{x}dx\right|=\left|\int_1^2\left(1-\frac{1}{x}\right)\right|=\left|(x-\ln x)\Big|_1^2\right|=1-\ln 2$.

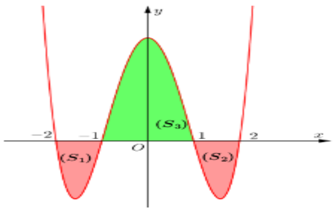
Câu 8: [2D3-5.7-2] Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[0;4]$ như hình vẽ và có diện tích $S_1=\frac{11}{6}$, $S_2=\frac{9}{2}$. Tính tích phân $I=\int_0^4 f(x)dx$



Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có $I=\int_0^4 f(x)dx=S_1-S_2=\frac{11}{6}-\frac{9}{2}=-\frac{8}{3}$.

Câu 9: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;2]$ như hình vẽ ở bên và có diện tích $S_1=S_2=\frac{22}{15}$, $S_3=\frac{76}{15}$. Tính tích phân $I=\int_{-2}^{2} f(x)dx$



Lời giải

Ta có $I=\int_{-2}^{2} f(x)dx=S_3-S_1-S_2=\frac{76}{15}-2.\frac{22}{15}=\frac{32}{15}$.

Câu 10: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1$, $x=3$ là.

Lời giải

Ta thấy $x^2 \geq 0\ \ \forall x$ nên diện tích S cần tìm bằng $S = \int_{-1}^{3} \left|x^2\right| dx = \int_{-1}^{0} x^2 dx + \int_{0}^{3} x^2 dx = \frac{28}{3}$.

Câu 11: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sin x + 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$ và $x = \frac{7\pi}{6}$ là.

Lời giải

Ta thấy $\sin x + 1 \geq 0\ \ \forall x \in \left(0;\ \frac{7\pi}{6}\right)$ nên diện tích S cần tìm bằng:

$$S = \int_{0}^{\frac{7\pi}{6}} \left|\sin x + 1\right| dx = \int_{0}^{\frac{7\pi}{6}} (\sin x + 1) dx = \left(-\cos\frac{7\pi}{6} + \frac{7\pi}{6}\right) - \left(-\cos 0 + 0\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{7\pi}{6} + 1.$$

Câu 13: Tính diện tích S của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x.\ln(3x+1)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0;\ x = 1$

Lời giải

Giải theo phương pháp tự luận:

Ta có: Diện tích hình phẳng cần tìm là: $S = \int\limits_{0}^{1} x.\ln(3x+1)\, dx$

Đặt $u = \ln(3x+1)$ và $dv = xdx$ suy ra $du = \frac{3}{3x+1}dx$; chọn $v = \frac{9x^2 - 1}{18}$

Do đó $S = \int\limits_{0}^{1} x\ln(3x+1)dx = \frac{9x^2-1}{18}\ln(3x+1)\Big|_0^1 - \frac{3}{18}\left(\frac{3}{2}x^2 - x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{4}{9}\ln 4 - \frac{1}{12} = \frac{8}{9}\ln 2 - \frac{1}{12}$

Câu 14: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$, trục Ox, trục Oy và đường thẳng $x = 2$ là.

Lời giải

Ta có: $e^x = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Vậy $S = \int_{0}^{2} \left|e^x\right| dx = \left|e^x\ \big|_0^2\right| = e^2 - 1$.

Câu 15: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ và trục Ox

Lời giải

PT hoành độ giao điểm đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ và trục Ox là $x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Suy ra diện tích hình phẳng cần tính bằng $S = \int\limits_{-1}^{1} \left(x^4 - 2x^2 + 1\right) dx = \frac{16}{15}$.

Câu 16: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2$ và trục hoành là.

Lời giải

Đặt $(C): y=-x^3+3x^2$. Phương trình hoành độ giao điểm: $-x^3+3x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$

Khi đó: $S=\int\limits_0^3\left|-x^3+3x^2\right|dx=\left|\int\limits_0^3\left(-x^3+3x^2\right)dx\right|=\left|\left(-\frac{x^4}{4}+x^3\right)\Big|_0^3\right|=\frac{27}{4}$.

Câu 17: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=-x^2+2x$ và trục hoành là:

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $-x^2+2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Ta có: $S=\int\limits_0^2\left|-x^2+2x\right|dx=\int\limits_0^2\left(-x^2+2x\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Big|_0^2=\frac{4}{3}$

Câu 18: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y^2+x-5=0,\ x+y-3=0$

Lời giải

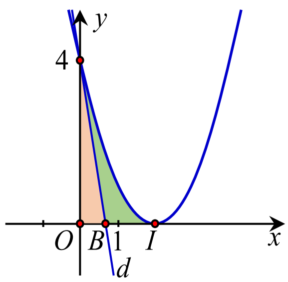
Hình phẳng giới hạn bởi $\left\{\begin{array}{l} y^2+x-5=0 \\ x+y-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5-y^2 \\ x=3-y \end{array}\right.$

Xét phương trình: $5-y^2=3-y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=2 \end{array}\right.$

Khi đó diện tích hình phẳng cần tìm là: $S=\int\limits_{-1}^2\left|y^2-y-2\right|dy=\left(\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}-2y\right)\Big|_{-1}^2=4,5$

Câu 19: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số: $y=x^2-4x+4$, trục tung và trục hoành. Xác định k để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(0;\ 4)$ có hệ số góc k chia thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Lời giải



Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^2-4x+4$ và trục hoành là:

$x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow x=2$

Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số: $y=x^2-4x+4$, trục tung và trục hoành là: $S=\int\limits_0^2\left|x^2-4x+4\right|dx=\int\limits_0^2\left(x^2-4x+4\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right)\Big|_0^2=\frac{8}{3}$.

Phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $A(0;4)$ có hệ số góc k có dạng: $y = kx + 4$.

Gọi B là giao điểm của (d) và trục hoành. Khi đó $B\left(-\frac{4}{k};\ 0\right)$.

Đường thẳng (d) chia (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau khi $B \in OI$ và

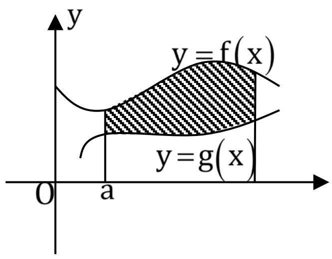
$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}S = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < -\frac{4}{k} < 2 \\ S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}.4.\frac{-4}{k} = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < -2 \\ k = -6 \end{cases} \Leftrightarrow k = -6.$$

2. Dạng 2: Ứng dụng tích phân tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi

$$y = f(x), y = g(x), x = a, x = b.$$

Phương pháp giải:

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị: $(C_1): y = f(x)$ $(C_2): y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được xác định bởi công thức: $S = \int_a^b \left|f(x) - g(x)\right| dx$.



Chú ý: Để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta thường làm như sau:

* Giải phương trình: $f(x) = g(x)$ tìm nghiệm $x_1, x_2, ..., x_n \in (a;b)$, $(x_1 < x_2 < ... < x_n)$.

Tính: $S = \int_a^{x_1} \left|f(x) - g(x)\right| dx + \int_{x_1}^{x_2} \left|f(x) - g(x)\right| dx + ... + \int_{x_n}^{b} \left|f(x) - g(x)\right| dx$

$= \left|\int_a^{x_1} \left(f(x) - g(x)\right) dx\right| + ... + \left|\int_{x_n}^{b} \left(f(x) - g(x)\right) dx\right|$.

Ngoài cách trên, ta có thể dựa vào đồ thị để khử dấu giá trị tuyệt đối.

Câu 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2 - x^2$ và $y = x$ và các đường thẳng $x = -2, x = 1$

Lời giải

Diện tích hình phẳng S = $\int\limits_{-2}^{1} \left|-x^2 - x + 2\right| dx = \left|\int\limits_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)\right| = \frac{9}{2}$

Câu 2: . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x^3 + x;\ y = 2x$ và các đường thẳng $x = -1, x = 1$ được xác định bởi công thức.

Lời giải

Giải theo phương pháp tự luận: GPT hoành độ giao điểm của hai đồ thị: $x - x^3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$

$$S = \int\limits_{-1}^{1} \left|x - x^3\right| dx = \int\limits_{-1}^{0} \left|x - x^3\right| dx + \int\limits_{0}^{1} \left|x - x^3\right| dx = \left|\int\limits_{-1}^{0} (x - x^3) dx\right| + \left|\int\limits_{0}^{1} (x - x^3) dx\right| = \int\limits_{-1}^{0} (x^3 - x) dx + \int\limits_{0}^{1} (x - x^3) dx$$

Câu 3: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$; tiệm cận ngang và hai đường thẳng $x=3, x=e+2$ được tính bằng:

Lời giải

+ Tiệm cận ngang $y=2$

+ Đồ thị hàm số không cắt tiệm cận

$$\Rightarrow S=\int_3^{e+2}\left|\frac{2x+1}{x-2}-2\right|dx=\int_3^{e+2}\left|\frac{5}{x-2}\right|dx=5\ln|x-2|\Big|_3^{e+2}=5$$

Câu 4: Hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2, y=2x+3$ và hai đường $x=0,\ \ x=2$. Công thức nào sau đây tính diện tích hình phẳng (H)?

Lời giải

Áp dụng lý thuyết: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị: $(C_1): y=f(x)$, $(C_2): y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a, x=b$ được xác định bởi công thức:

$S=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$.

Khi đó diện tích hình phẳng H = $\int_0^2\left|x^2-2x-3\right|dx$

Câu 5: Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=x^3, y=2-x^2, x=0$.

Lời giải

Ta có $x^3=2-x^2 \Leftrightarrow x^3+x^2-2=0 \Leftrightarrow x=1$

$$\Rightarrow S=\int_0^1\left|x^3+x^2-2\right|dx=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-2x\right)\Bigg|_0^1=\frac{17}{12}.$$

Câu 6: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y=\dfrac{x+2}{x+1}$, tiệm cận ngang của (C), trục tung và đường thẳng $x=2$.

Lời giải

Ta có: $(C): y=\dfrac{x+2}{x+1}$. Tiệm cận ngang của (C): $y=1$.

Diện tích: $S=\left|\int_0^2\left(\dfrac{x+2}{x+1}-1\right)dx\right|=\left|\int_0^2\dfrac{1}{x+1}dx\right|=\left|\ln(x+1)\Big|_0^1\right|=\ln 2$.

Câu 7: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $(C): y=\dfrac{2x+1}{x+1}$, tiệm cận ngang của (C) và hai đường thẳng $x=1, x=3$.

Lời giải

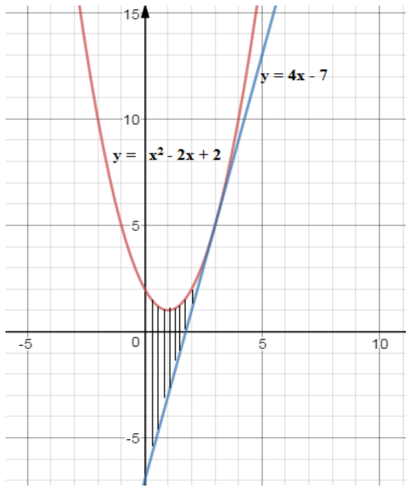
Ta có: $(C): y=\dfrac{2x+1}{x+1}$. Tiệm cận ngang của (C): $y=2$

Diện tích: $S=\left|\int_1^3\left(\frac{2x+1}{x+1}-2\right)dx\right|=\left|\int_1^3\frac{-1}{x+1}dx\right|=\left|\ln(x+1)\Big|_1^3\right|=\ln 2.$

Câu 8: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $(P): y=x^2-2x+2,$ trục tung, tiếp tuyến của (P) tại $M(3;5)$ là:

Lời giải

Ta có $y'=2x-2\Rightarrow y'(3)=4$



Phương trình tiếp tuyến tại M là: $y-5=4(x-3)$ hay $y=4x-7$

Diện tích cần tìm là: $S=\int_0^3\left[(x-2x+2)-(4x-7)\right]dx$

$=\int_0^3(x^2-6x+9)dx=\int_0^3(x-3)^2dx=\frac{(x-3)^3}{3}\Bigg|_0^3=9.$

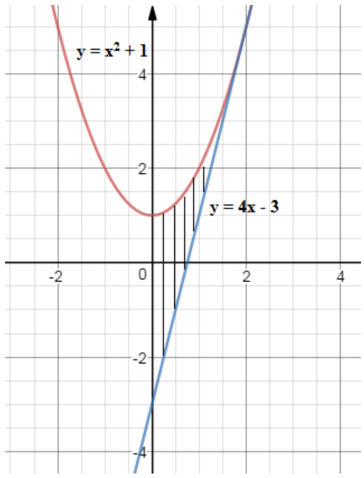
Câu 9: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol: $y=x^2+1$, tiếp tuyến với đường này tại điểm $M(2;5)$ và trục Oy.

Lời giải

$y'=f'(x)=2x\Rightarrow f'(2)=4$

Phương trình tiếp tuyến tại tiếp điểm $M(2;5)\in(P)$ là: $y-5=4(x-2)\Leftrightarrow y=4\text{x}-3$

$S=\int_0^2(x^2+1-4x+3)dx=\int_0^2(x^2-4x+4)dx=\int_0^2(x-2)^2dx$



Đặt $u = x - 2 \Rightarrow du = dx$

Đổi cận $x = 2 \Rightarrow u = 0\,; x = 0 \Rightarrow u = -2$

Do đó: $S = \int\limits_{-2}^{0} u^2 du = \left.\frac{u^3}{3}\right|_{-2}^{0} = \frac{8}{3}$ đvdt.

3. Dạng 3: Ứng dụng tích phân tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x), y = g(x)$.

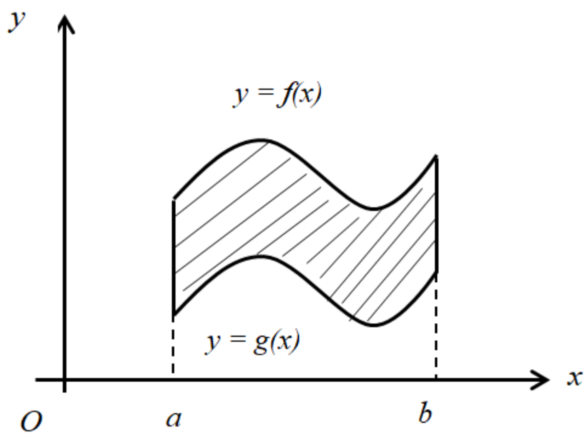
Phương pháp giải:

Dạng: Cho hai hàm số $y = f\left(x\right)$ và $y = g\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f\left(x\right)$ và $y = g\left(x\right)$ là $S = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left|f\left(x\right) - g\left(x\right)\right| dx$. Trong đó α, β là nghiệm nhỏ nhất và lớn nhất của phương trình $f\left(x\right) = g\left(x\right)$ $\left(a \le \alpha < \beta \le b\right)$

Cách giải:

Bước 1: Giải phương trình $f\left(x\right) = g\left(x\right)$ tìm các giá trị α, β.

Bước 2: Tính $S = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left|f\left(x\right) - g\left(x\right)\right| dx$.



Chú ý: Nếu $f\left(x\right) \ge g\left(x\right) \forall x \in \left[a;b\right]$ thì $S = \int\limits_{a}^{b} \left[f\left(x\right) - g\left(x\right)\right] dx$

Câu 1: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2; y = x + 2$ bằng?

Lời giải

Ta có $x^2 = x + 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Do đó: $S = \int\limits_{-1}^{2} \left|x^2 - x - 2\right| dx = \int\limits_{-1}^{2} \left(2 + x - x^2\right) dx = \frac{9}{2}$

Câu 2: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(\mathrm{P}): \mathrm{y} = \mathrm{x}^2 - 4\mathrm{x} + 5$ và hai tiếp tuyến của (P) tại các điểm $\mathrm{A}(1;2)$, $\mathrm{B}(4;5)$ là:

Lời giải

Phương trình tiếp tuyến với (P) tại $A(1;2)$ là $y = -2x + 4$

Phương trình tiếp tuyến với (P) tại $B(4;5)$ là $y = 4x - 11$

Giao của hai tiếp tuyến có hoành độ $x = \frac{5}{2}$

Xét phương trình $x^2 - 4x + 5 = -2x + 4 \Rightarrow x = 1$

Xét phương trình $x^2 - 4x + 5 = 4x - 11 \Rightarrow x = 4$

Do đó: $S = \int\limits_{1}^{\frac{5}{2}} \left|x^2 - 4x + 5 + 2x - 4\right| dx + \int\limits_{\frac{5}{2}}^{4} \left|x^2 - 4x + 5 - 4x + 11\right| dx = \frac{9}{4}$

Câu 3: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x + 3, y = x^2 - 4x + 3$ là:

Lời giải

Ta có: $x + 3 = x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 5 \end{array}\right.$

Do đó: $S = \int\limits_{0}^{5} \left|x^2 - 5x\right| dx = \left.\left(\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^5 = \frac{125}{6}$.

Câu 4: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x^3, y = 4x$ là:

Lời giải

Ta có: $x^3 = 4x \Leftrightarrow x = -2, x = 0, x = 2$

Suy ra: $S = \left|\int\limits_{-2}^{0} \left(x^3 - 4x\right) dx\right| + \left|\int\limits_{0}^{2} \left(x^3 - 4x\right) dx\right| = 8$

Nếu trong đoạn $[\alpha;\beta]$ phương trình $f(x)=g(x)$ không còn nghiệm nào nữa thì ta có thể dùng công thức $S=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx=\left|\int_{\alpha}^{\beta}[f(x)-g(x)]dx\right|$.

Câu 5: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^3-12x$ và $y=x^2$ là:

Lời giải

Ta có: $x^3-12x=x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-3\\x=4\end{array}\right.$

Do đó: $S=\int_{-3}^{4}|x^3-12x-x^2|dx=\int_{-3}^{0}|x^3-12x-x^2|dx+\int_{0}^{4}|x^3-12x-x^2|dx$

$=\left|\int_{-3}^{0}(x^3-12x-x^2)dx\right|+\left|\int_{0}^{4}(x^3-12x-x^2)dx\right|=\frac{937}{12}$.

Câu 6: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+x-1,y=x^4+x-1$ là:

Lời giải

Ta có: $x^2+x-1=x^4+x-1\Leftrightarrow x^4-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-1\end{array}\right.$

Do đó: $S=\int_{-1}^{1}|x^4-x^2|dx=\left|2\int_{0}^{1}(x^4-x^2)dx\right|=\left|2\left(\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1\right|=\frac{4}{15}$.

Câu 7: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y^2=2x,y=2x-2$ là:

Lời giải

Ta có: $(2x-2)^2=2x\Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$

Do đó: $S=2\int_{0}^{\frac{1}{2}}\sqrt{2x}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left[\sqrt{2x}-2x+2\right]dx=\frac{4\sqrt{2}}{3}\sqrt[3]{x}\Big|_0^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{x^3}-x^2+2x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{9}{4}$.

Câu 8: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y^2-2y+x=0$, $x+y=0$ là:

Lời giải

Biến đổi về hàm số theo biến số y là: $x=-y^2+2y,x=-y$

Ta có: $-y^2+2y-(-y)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=0\\y=3\end{array}\right.$

Do đó: $S=\int_0^3\left|-y^2+3y\right|dy=\int_0^3\left(-y^2+3y\right)dy=\frac{9}{2}$.

Câu 9: Gọi S là diện tích mặt phẳng giới hạn bởi parabol $y=x^2+2x-3$ và đường thẳng $y=kx+1$ với k là tham số thực. Tìm k để S nhỏ nhất.

Lời giải

Ta có $x^2+2x-3=kx+1\Leftrightarrow x^2-(k-2)x-4=0$

Do $ac=-4<0$ PT trên luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $\begin{cases}x_1+x_2=k-2\\ x_1.x_2=-4\end{cases}$

Giả sử $x_1<x_2\Rightarrow S=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(x^2-(k-2)x-4\right)dx\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}-\frac{k-2}{2}x^2-4x\right)\Big|_{x_1}^{x_2}\right|$

$=\left|\frac{1}{3}\left(x_2^3-x_1^3\right)-\frac{k-2}{2}\left(x_2^2-x_1^2\right)-4\left(x_2-x_1\right)\right|=\left|\left(x_2-x_1\right)\right|\left|\frac{1}{3}\left[x_1^2+x_2^2+x_1.x_2\right]\right|-\frac{k-2}{2}\left(x_1+x_2\right)-4\right|$

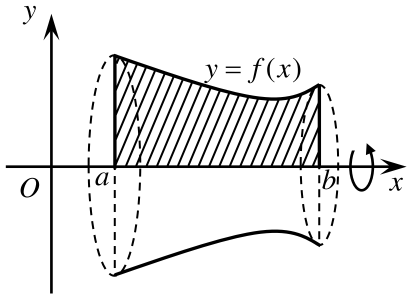
$=\sqrt{\left(x_2+x_1\right)^2-4x_1.x_2}\left|\frac{1}{3}\left[\left(x_2+x_1\right)^2-x_1.x_2\right]-\frac{k-2}{2}\left(x_1+x_2\right)-4\right|=\sqrt{(k-2)^2+16}\left|\frac{(k-2)^2}{6}+\frac{8}{3}\right|$

Vậy S nhỏ nhất khi $k=2$.

THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY

Dạng 1: Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ quanh trục Ox:

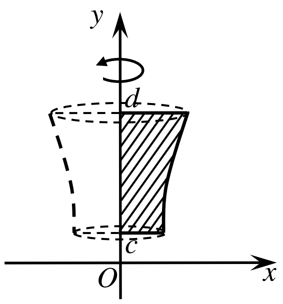
Phương pháp giải:



$\begin{cases}(C):y=f(x)\\(Ox):y=0\\x=a\\x=b\end{cases}$ $\boxed{V_x=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx}$

Chú ý:

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y=c$, $y=d$ quanh trục Oy:



$\begin{cases}(C):x=g(y)\\(Oy):x=0\\y=c\\y=d\end{cases}$ $\boxed{V_y=\pi\int_c^d\left[g(y)\right]^2dy}$

Câu 1: Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 2$ *và* $y = 0$ quanh trục Ox là:

Lời giải

$$V = \pi\int_1^2 xe^x dx = \pi(x.e^x - e^x)\Big|_1^2 = \pi e^2$$

Câu 2: Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x - x^2$ và $y = 0$. Tính thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra bởi hình phẳng đó khi nó quay quanh trục Ox .

Lời giải

Phương pháp: công thức tính thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b\,(a < b)$ quay xung quanh trục Ox là

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

Cách giải: ta có: $2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right. \Rightarrow V = \pi\int_0^2 \left(2x - x^2\right)^2 dx$

$$= \pi\int_0^2 \left(4x^2 - 4x^3 + x^4\right)dx = \pi\left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{16\pi}{15}$$

Câu 3: Tính thể tích V của vật thể tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x\sqrt{\ln x}$, trục hoành và đường thẳng $x = e$ quay quanh Ox

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) với trục Ox là $x\sqrt{\ln x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Thể tích khối tròn xoay cần tính là $V = \pi\int_1^4 x^2 \ln x dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Leftrightarrow du = \frac{dx}{x}; v = \frac{x^3}{3}$

$$V = \frac{x^3.\ln x}{3}\Bigg|_1^4 - \int_1^4 \frac{x^2}{3}dx = \left(\frac{x^3.\ln x}{3} - \frac{x^3}{9}\right)\Bigg|_1^4 = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3 + 1}{9}$$

Câu 4: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2; y = 0; x = 2$. Tính thể tích V ủa khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục Ox .

Lời giải

Thể tích cần tính là $V = \pi\int_0^2 x^4 dx = \pi.\frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{32\pi}{5}$

Câu 5: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = 4 - x^2, y = 0$. Tính thể tích V của khối tròn xoay hình thành khi cho (H) quay xung quanh Ox

Lời giải

PT hoành độ giao điểm các đồ thị là $4-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2 \end{array}\right.$

Suy ra thể tích cần tính bằng $V=\pi\int\limits_{-2}^{3}\left(4-x^2\right)^2dx=\frac{512\pi}{15}(vtt)$

Câu 6: Tính thể tích V của vật thể tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{1}{x}, y=0, x=1, x=a\,(a>1)$ quay xung quanh trục Ox

Lời giải

- **Phương pháp**: Vật thể tròn xoay: Là vật thể được tạo ra khi quay hình thang cong giới hạn bởi đường $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$ và $y=0$ quanh trục Ox. Khi đó thể tích vật thể tròn xoay được tính theo công thức: $V_x=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$

- **Cách giải**: $V=\pi\int\limits_1^a \frac{1}{x^2}dx=-\pi\left.\frac{1}{x}\right|_1^a=\pi\left(1-\frac{1}{a}\right)$.

Câu 7: Cho hình phẳng (D) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=e^{\frac{x}{2}}$ trục Ox và hai đường thẳng $x=0$, $x=1$. Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay khi quay hình (D) quay quanh trục Ox.

Lời giải

Thể tích của khối tròn xoay: $V=\pi\int\limits_0^1\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^1 e^x\mathrm{d}x$.

Câu 8: Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-2x, y=0, x=0$ và $x=1$.

Lời giải

$V=\pi\int\limits_0^1\left(x^2-2x\right)^2\mathrm{d}x=\frac{8\pi}{15}$.

Câu 9: Cho hình (H) giới hạn bở đồ thị $(C): y=x\ln x$, trục hoành và các đường thẳng $x=1$, $x=e$. Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành.

Lời giải

$V_{Ox}=\pi\int\limits_0^1(x\ln x)^2dx=\pi\int\limits_0^1 x^2\ln^2 xdx$. Đặt $\begin{cases} u=\ln^2 x \\ dv=x^2dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\frac{2}{x}\ln xdx \\ v=\frac{1}{3}x^3 \end{cases}$

$\Rightarrow V=\frac{\pi}{3}x^3\ln^2 x\Big|_1^e-\frac{2\pi}{3}\int\limits_1^e x^2\ln xdx=\frac{\pi}{3}.e^3-\frac{2\pi}{3}\left(\frac{1}{3}x^3\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{3}\int\limits_1^e x^2dx\right)=\frac{\pi}{27}\left(5e^3-2\right)$.

Dạng 2. Thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f\left(x\right), y=g\left(x\right)$, $x=a, x=b$ **khi quay quanh trục** Ox **được tính bởi công thức:** $V=\pi\int\limits_a^b\left|f^2\left(x\right)-g^2\left(x\right)\right|dx$.

Câu 1: Thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi Parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $d: y=2x$ quay xung quanh trục Ox bằng:

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2=2x \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=2$.

Do $2x\ge x^2$ với $x\in(0;2)$ nên $V=V_1-V_2$ trong đó V_1 là thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $d: y=2x$, trục Ox , đường thẳng $x=2$ và trục Ox quay quanh trục Ox ; V_2 là thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi Parabol (P) , trục Ox , đường thẳng $x=2$ và trục Ox quay quanh trục Ox .

Câu 2: Tính thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=x^2-2x$ và $y=-x^2$ quay quanh trục Ox .

Lời giải

Xét $x^2-2x=-x^2 \Rightarrow x=0; x=1$. $V_1=\pi\int_0^1\left(x^2-2x\right)^2dx=\frac{8\pi}{15}$

$V_2=\pi\int_0^1\left(-x^2\right)^2dx=\frac{1}{5}\pi$. $V=\frac{8\pi}{15}-\frac{1}{5}\pi=\frac{\pi}{3}$.

Câu 3: Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=0, y=x\sqrt{\ln(x+1)}$ và $x=1$ xung quanh trục Ox là:

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của $\left(C\right)$ và Ox là $x\sqrt{\ln(x+1)}=0 \Leftrightarrow x=0$

Thể tích khối tròn xoay cần tính là $V=\pi\int_0^1 x^2\ln(x+1)dx$.

Đặt $\begin{cases} u=\ln(x+1) \\ dv=x^2dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du=\dfrac{dx}{x+1} \\ v=\dfrac{x^3}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow I=\int_0^1 x^2\ln(x+1)dx=\left.\frac{x^3\cdot\ln(x+1)}{3}\right|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{x^3}{x+1}dx=\frac{1}{18}(12\ln2-5) \Rightarrow V=\frac{\pi}{18}(12\ln2-5).$

Câu 4: Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=x^2$ và $x=y^2$ quay quanh trục Ox bằng bao nhiêu?

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của $(C_1),(C_2)$ là $\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 0 \\ x = 1; y = 1 \end{array}\right.$

Trong đoạn $x \in [0;1]$ suy ra $y = x^2; y = \sqrt{x}$

Thể tích khối tròn xoay cần tính là $V_{Ox} = \pi\left|\int_0^1 (x^4 - x)dx\right| = \pi\left|\left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1\right| = \frac{3\pi}{10}$.

Câu 5: Thể tích khối tròn xoay khi quay quanh trục hoành phần hình phẳng giới hạn bởi 2 đường $y = x^2$ và $y = \sqrt{x}$ là:

Lời giải

Thể tích khối tròn xoay là thể tích được tạo bởi hình phẳng có diện tích là phần gạch chéo trong hình bên khi quay quanh trục hoành.

Khi đó: $V = \pi\int_0^1 \left(x - x^4\right)dx = \frac{3\pi}{10}$.

CHƯƠNG III

NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN – ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

BÀI 2. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

III. HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THAM KHẢO VÀ ĐỀ CHÍNH THỨC CỦA BỘ GIÁO DỤC TỪ NĂM 2017 ĐẾN NAY

Câu 1: **(MĐ 101-2022)** Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^3 f(x)dx = F(3)-G(0)+a,\ (a>0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x), y=G(x), x=0, x=3$. Khi $S=15$ thì a bằng

A. 15. **B.** $12\cdot$ **C.** $18\cdot$ **D.** $5\cdot$

Câu 2: **(MĐ 102-2022)** Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^5 f(x)\mathrm{d}x = F(5)-G(0)+a\ \ (a>0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x), y=G(x), x=0$ và $x=5$. Khi $S=20$ thì a bằng

A. 4. **B.** 15. **C.** 25. **D.** 20.

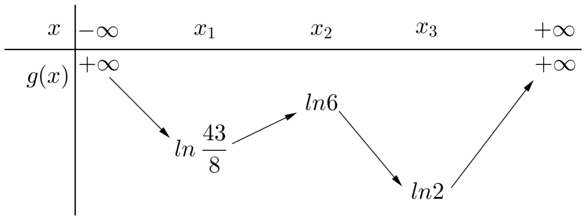
Câu 3: **(MĐ 103-2022)** Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x = F(4)-G(0)+a\ (a>0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x), y=G(x), x=0$ và $x=4$. Khi $S=8$ thì a bằng

A. 8. **B.** 4. **C.** 12. **D.** 2.

Câu 4: **(MĐ 104-2022)** Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = F(2)-G(0)+a\ (a>0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x), y=G(x), x=0$ và $x=2$. Khi $S=6$ thì a bằng

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 8.

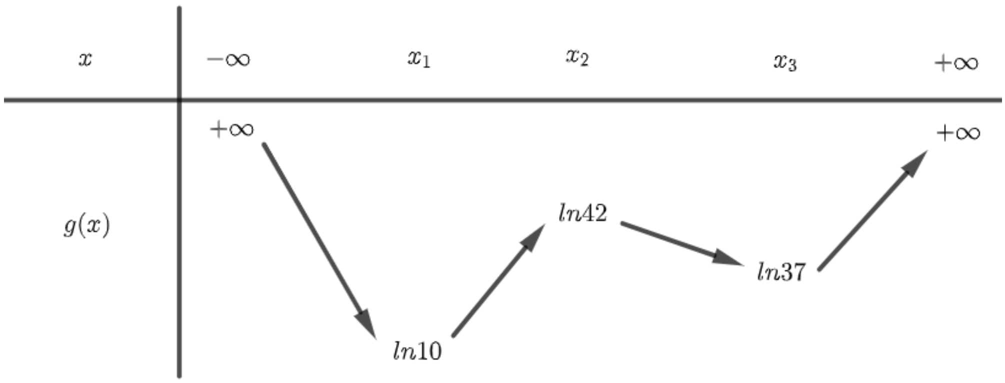
Câu 5: **(MĐ 101-2022)** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Biết rằng hàm số $g(x)=\ln f(x)$ có bảng biến thiên như hình sau



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(5;6)$. **B.** $(4;5)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;4)$.

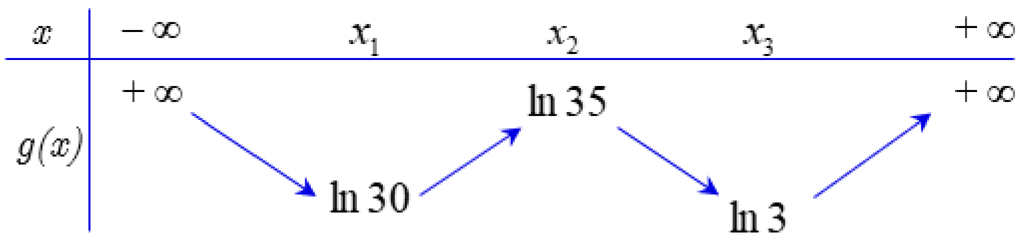
Câu 6: **(MĐ 102-2022)** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Biết rằng hàm số $g(x)=\ln f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(38;39)$. **B.** $(25;26)$. **C.** $(28;29)$. **D.** $(35;36)$.

Câu 7: **(MĐ 103-2022)** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Biết rằng hàm số $g(x)=\ln f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(33;35)$. **B.** $(37;40)$. **C.** $(29;32)$. **D.** $(24;26)$.

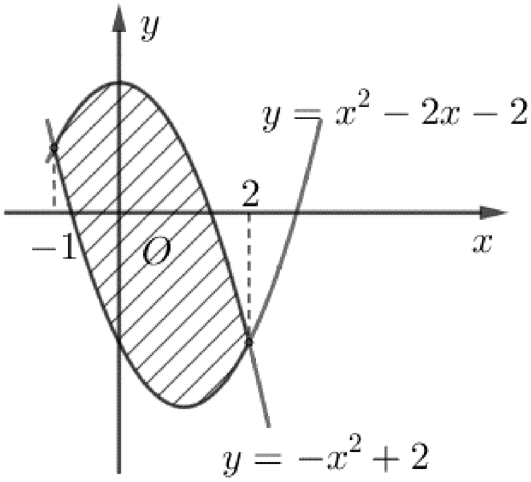
Câu 8: **(MĐ 104-2022)** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Biết rằng hàm số $g(x)=\ln f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	↘	$\ln 12$	↗	$\ln\frac{199}{16}$	↘	$\ln 4$	↗	$+\infty$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(7;8)$. **B.** $(6;7)$. **C.** $(8;9)$. **D.** $(10;11)$.

Câu 9: **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình bên bằng



A. $\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)dx$. **B.** $\int_{-1}^{2}\left(2x^2-2x-4\right)dx$.

C. $\int_{-1}^{2}\left(-2x^2-2x+4\right)dx$. **D.** $\int_{-1}^{2}\left(2x^2+2x-4\right)dx$.

Câu 10: **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2x^2$, $y=-1$, $x=0$ và $x=1$ được tính bởi công thức nào sau đây?

A. $S=\pi\int_0^1\left(2x^2+1\right)dx$. **B.** $S=\int_0^1\left(2x^2-1\right)dx$. **C.** $S=\int_0^1\left(2x^2+1\right)^2dx$. **D.** $S=\int_0^1\left(2x^2+1\right)dx$.

Câu 11: **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-4$ và $y=2x-4$ bằng

A. 36. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{4\pi}{3}$. **D.** 36π.

Câu 12: **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-1$ và $y=x-1$

A. $\frac{\pi}{6}$. **B.** $\frac{13}{6}$. **C.** $\frac{13\pi}{6}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Câu 13: **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-3$ và $y=x-3$ bằng

A. $\frac{125\pi}{6}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{125}{6}$. **D.** $\frac{\pi}{6}$.

Câu 14: **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-2$ và $y=3x-2$ bằng

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{9\pi}{2}$. **C.** $\frac{125}{6}$. **D.** $\frac{125\pi}{6}$.

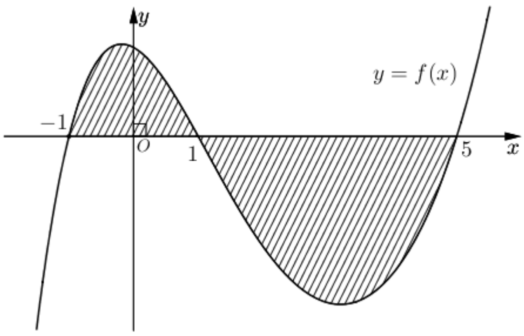
Câu 15: **(Mã 102 2018)** Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\pi\int_0^2 2^x\,dx$ **B.** $S=\int_0^2 2^x\,dx$ **C.** $S=\pi\int_0^2 2^{2x}\,dx$ **D.** $S=\int_0^2 2^{2x}\,dx$

Câu 16: **(Mã 101 2018)** Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\int_0^2 e^x\,dx$ **B.** $S=\pi\int_0^2 e^x\,dx$ **C.** $S=\pi\int_0^2 e^x\,dx$ **D.** $S=\pi\int_0^2 e^{2x}\,dx$

Câu 17: **(Mã 102 - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x), y=0, x=-1$ và $x=5$ (như hình vẽ bên).



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S=-\int_{-1}^{1} f(x)dx-\int_{1}^{5} f(x)dx$. **B.** $S=\int_{-1}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{5} f(x)dx$.

C. $S=\int_{-1}^{1} f(x)dx-\int_{1}^{5} f(x)dx$. **D.** $S=-\int_{-1}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{5} f(x)dx$.

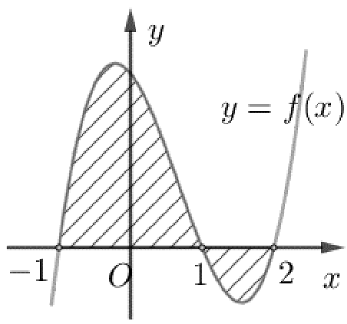
Câu 18: **(Mã 103 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x), y=0, x=-1, x=2$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx+\int_{1}^{2} f(x)\,dx$.

B. $S=-\int_{-1}^{1} f(x)\,dx-\int_{1}^{2} f(x)\,dx$.

C. $S=-\int_{-1}^{1} f(x)\,dx+\int_{1}^{2} f(x)\,dx$.

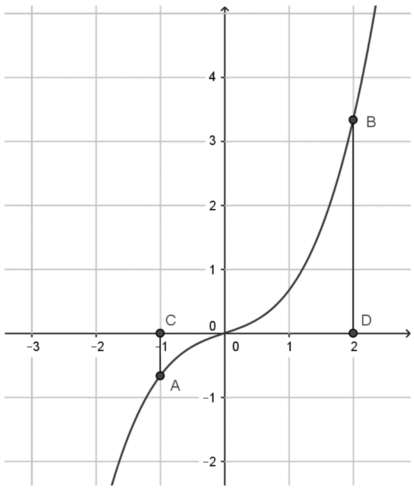
D. $S=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx-\int_{1}^{2} f(x)\,dx$.



Câu 19: **(Đề Minh Họa 2017)** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và đồ thị hàm số $y = x - x^2$.

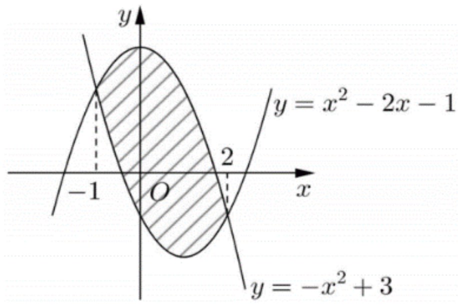
A. $\frac{37}{12}$ **B.** $\frac{9}{4}$ **C.** $\frac{81}{12}$ **D.** 13

Câu 20: **(Đề Tham Khảo 2017)** Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$. Đặt $a = \int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x$, $b = \int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x$, mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $S = b - a$ **B.** $S = b + a$ **C.** $S = -b + a$ **D.** $S = -b - a$

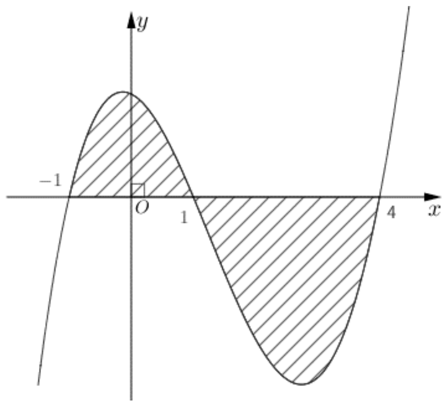
Câu 21: **(Đề Tham Khảo 2019)** Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^{2}(-2x+2)dx$ **B.** $\int_{-1}^{2}(2x-2)dx$

C. $\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)dx$ **D.** $\int_{-1}^{2}(2x^2-2x-4)dx$

Câu 22: **(Mã 101 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = -1$ và $x = 4$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



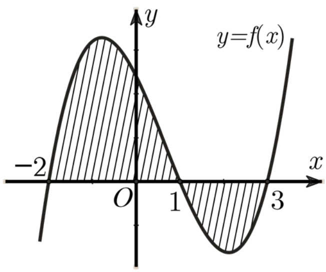
A. $S = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x - \int_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S = -\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x - \int_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S = -\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 23: **(Mã 104 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi cá đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -2$ và $x = 3$ (như hình vẽ). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S=-\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x.$ **B.** $S=\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x.$

C. $S=-\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x.$ **D.** $S=\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Câu 24: **(Đề Minh Họa 2017)** Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=a, x=b\,(a<b)$, xung quanh trục Ox.

A. $V=\int_a^b |f(x)|dx$ **B.** $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$ **C.** $V=\int_a^b f^2(x)dx$ **D.** $V=\pi\int_a^b f(x)dx$

Câu 25: **(Đề Tham Khảo 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b\,(a<b)$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức:

A. $V=\pi^2\int_a^b f(x)dx$ **B.** $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$ **C.** $V=2\pi\int_a^b f^2(x)dx$ **D.** $V=\pi^2\int_a^b f^2(x)dx$

Câu 26: **(Mã 101 2020 Lần 2)** Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^{3x}$, $y=0$, $x=0$ và $x=1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng:

A. $\pi\int_0^1 \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$. **B.** $\int_0^1 \mathrm{e}^{6x}\mathrm{d}x$. **C.** $\pi\int_0^1 \mathrm{e}^{6x}\mathrm{d}x$. **D.** $\int_0^1 \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$.

Câu 27: **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^{4x}, y=0, x=0$ và $x=1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

A. $\int_0^1 e^{4x}\mathrm{d}x$. **B.** $\pi\int_0^1 e^{8x}\mathrm{d}x$. **C.** $\pi\int_0^1 e^{4x}\mathrm{d}x$. **D.** $\int_0^1 e^{8x}\mathrm{d}x$.

Câu 28: **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^{2x}, y=0, x=0$ và $x=1$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành kho quay D quanh Ox bằng

A. $\pi\int_0^1 e^{4x}\mathrm{d}x$. **B.** $\int_0^1 e^{2x}\mathrm{d}x$. **C.** $\pi\int_0^1 e^{2x}\mathrm{d}x$. **D.** $\int_0^1 e^{4x}\mathrm{d}x$.

Câu 29: **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^{x}, y=0, x=0$ và $x=1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

A. $\pi\int_0^1 e^{2x}dx$. **B.** $\pi\int_0^1 e^{x}dx$ **C.** $\int_0^1 e^{x}dx$. **D.** $\int_0^1 e^{2x}dx$.

Câu 30: **(Mã 103 2018)** Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2+3$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\int_0^2 (x^2+3)dx$ **B.** $V=\pi\int_0^2 (x^2+3)dx$ **C.** $V=\int_0^2 (x^2+3)^2 dx$ **D.** $V=\pi\int_0^2 (x^2+3)^2 dx$

Câu 31: **(Mã 105 2017)** Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=\dfrac{\pi(e^2+1)}{2}$ **B.** $V=\dfrac{e^2-1}{2}$ **C.** $V=\dfrac{\pi e^2}{3}$ **D.** $V=\dfrac{\pi(e^2-1)}{2}$

Câu 32: **(Mã 104 2017)** Cho hình phẳng D giới hạn với đường cong $y=\sqrt{x^2+1}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=2$ **B.** $V=\dfrac{4\pi}{3}$ **C.** $V=2\pi$ **D.** $V=\dfrac{4}{3}$

Câu 33: **(Mã 123 2017)** Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=\dfrac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=(\pi+1)\pi$ **B.** $V=\pi-1$ **C.** $V=\pi+1$ **D.** $V=(\pi-1)\pi$

Câu 34: **(Mã 110 2017)** Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=2\pi(\pi+1)$ **B.** $V=2\pi$ **C.** $V=2(\pi+1)$ **D.** $V=2\pi^2$

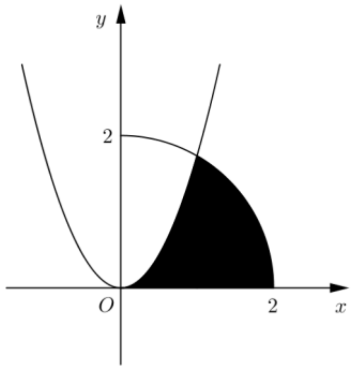
Câu 35: **(Mã 104 2018)** Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y=x^2+2, y=0, x=1, x=2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\int_1^2 (x^2+2)\mathrm{d}x$ **B.** $V=\pi\int_1^2 (x^2+2)^2\mathrm{d}x$ **C.** $V=\int_1^2 (x^2+2)^2\mathrm{d}x$ **D.** $V=\pi\int_1^2 (x^2+2)\mathrm{d}x$

Câu 36: **(Đề Tham Khảo 2017)** Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1\le x\le 3$) thì được thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2-2}$.

A. $V=\dfrac{124}{3}$ **B.** $V=(32+2\sqrt{15})\pi$ **C.** $V=32+2\sqrt{15}$ **D.** $V=\dfrac{124\pi}{3}$

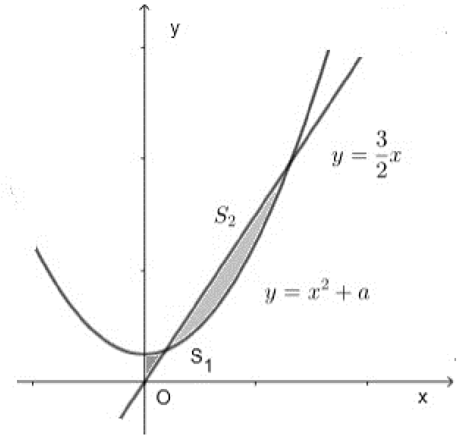
Câu 37: **(Đề Tham Khảo 2018)** Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $\mathrm{y}=\sqrt{3}\mathrm{x}^2$, cung tròn có phương trình $\mathrm{y}=\sqrt{4-\mathrm{x}^2}$ (với $0\le \mathrm{x}\le 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\dfrac{4\pi+\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\dfrac{4\pi-\sqrt{3}}{6}$

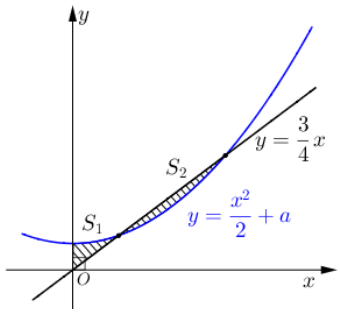
C. $\dfrac{4\pi+2\sqrt{3}-3}{6}$ **D.** $\dfrac{5\sqrt{3}-2\pi}{3}$

Câu 38: **(Mã 104 - 2019)** Cho đường thẳng $y=\frac{3}{2}x$ và parabol $y=x^2+a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 ,S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



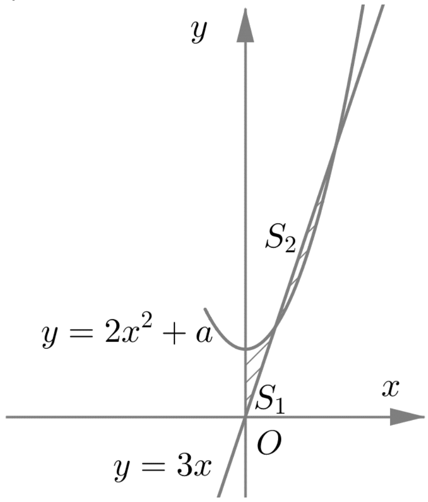
A. $\left(0;\frac{2}{5}\right)$ **B.** $\left(\frac{1}{2};\frac{9}{16}\right)$ **C.** $\left(\frac{2}{5};\frac{9}{20}\right)$ **D.** $\left(\frac{9}{20};\frac{1}{2}\right)$

Câu 39: **(Mã 102 - 2019)** Cho đường thẳng $y=\frac{3}{4}x$ và parabol $y=\frac{1}{2}x^2+a$, (a là tham số thực dương). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



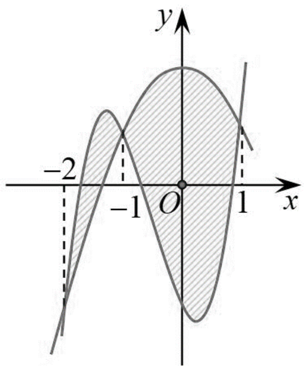
A. $\left(\frac{7}{32};\frac{1}{4}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{4};\frac{9}{32}\right)$. **C.** $\left(\frac{3}{16};\frac{7}{32}\right)$. **D.** $\left(0;\frac{3}{16}\right)$.

Câu 40: **(Mã 103 - 2019)** Cho đường thẳng $y = 3x$ và parabol $2x^2 + a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(1;\frac{9}{8}\right)$. **B.** $\left(\frac{9}{10};1\right)$. **C.** $\left(\frac{4}{5};\frac{9}{10}\right)$. **D.** $\left(0;\frac{4}{5}\right)$.

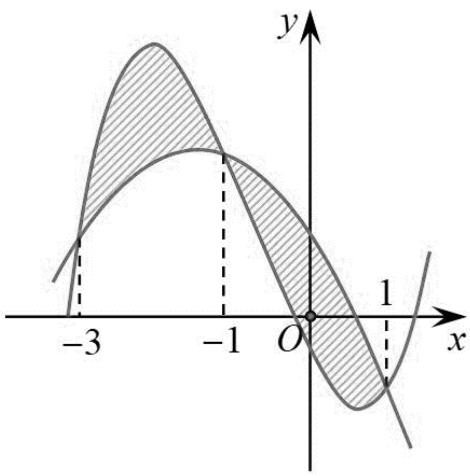
Câu 41: **(Mã 102 2018)** Cho hai hàm số $f(x) = ax^2 + bx^2 + cx - 2$ và $g(x) = dx^2 + ex + 2$ (a, b, c, d, $e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2; -1; 1 (tham khảo hình vẽ).
Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. $\frac{37}{12}$ **B.** $\frac{37}{6}$

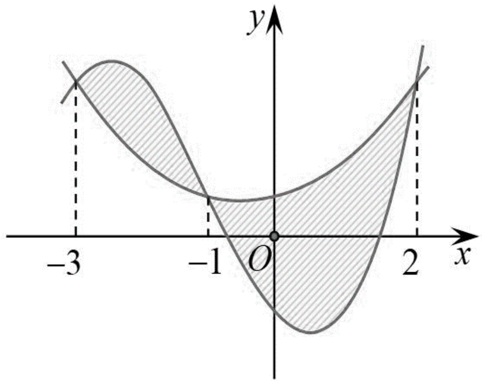
C. $\frac{13}{2}$ **D.** $\frac{9}{2}$

Câu 42: **(Mã 101 2018)** Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2}$ và $g(x) = dx^2 + ex + 1$ $(a,b,c,d,e \in \mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là -3; -1; 1 (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. 5 **B.** $\frac{9}{2}$ **C.** 8 **D.** 4

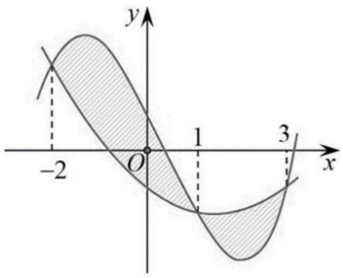
Câu 43: **(Mã 103 2018)** Cho hai hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx-1$ và $g\left(x\right)=dx^2+ex+\frac{1}{2}$ $\left(a,b,c,d,e\in\mathbb{R}\right)$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt $-3;-1;2$ (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{253}{12}$ **B.** $\frac{125}{12}$ **C.** $\frac{253}{48}$ **D.** $\frac{125}{48}$

Câu 44: **(Mã 104 2018)** Cho hai hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+\frac{3}{4}$ và $g\left(x\right)=dx^2+ex-\frac{3}{4}$, $\left(a,b,c,d,e\in\mathbb{R}\right)$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2; 1; 3 (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. $\frac{253}{48}$ **B.** $\frac{125}{24}$ **C.** $\frac{125}{48}$ **D.** $\frac{253}{24}$

Câu 45: **(Đề Minh Họa 2017)** Kí hiệu $\left(H\right)$ là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2(x-1)e^x$, trục tung và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình $\left(H\right)$ xung quanh trục Ox

A. $V=\left(e^2-5\right)\pi$ **B.** $V=\left(4-2e\right)\pi$ **C.** $V=e^2-5$ **D.** $V=4-2e$

Câu 46: **(Mã 103 2018)** Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v\left(t\right)=\frac{1}{100}t^2+\frac{13}{30}t\left(\text{m/s}\right)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 10 giây so với A và có gia tốc bằng $a\left(\text{m/s}^2\right)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $15\left(\text{m/s}\right)$ **B.** $9\left(\text{m/s}\right)$ **C.** $42\left(\text{m/s}\right)$ **D.** $25\left(\text{m/s}\right)$

Câu 47: **(Mã 104 2018)** Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v\left(t\right)=\frac{1}{120}t^2+\frac{58}{45}t\left(m/s\right)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a\left(m/s^2\right)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $21\left(m/s\right)$ **B.** $25\left(m/s\right)$ **C.** $36\left(m/s\right)$ **D.** $30\left(m/s\right)$

Câu 48: **(Đề Minh Họa 2017)** Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v\left(t\right)=-5t+10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 0,2m **B.** 2m **C.** 10m **D.** 20m

Câu 49: **(Mã 102 2018)** Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v\left(t\right)=\frac{1}{150}t^2+\frac{59}{75}t\left(m/s\right)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc a bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a\left(m/s^2\right)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $15\left(m/s\right)$ **B.** $20\left(m/s\right)$ **C.** $16\left(m/s\right)$ **D.** $13\left(m/s\right)$

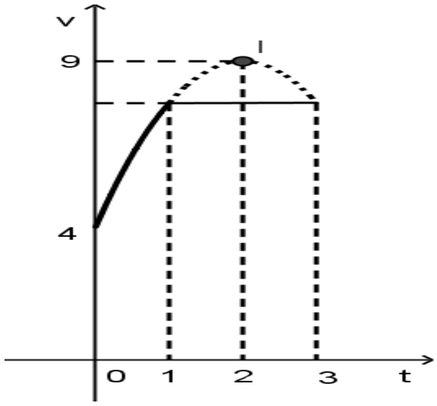
Câu 50: **(Mã 101 2018)** Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{180}t^2+\frac{11}{18}t\left(m/s\right)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 5 giây so với A và có gia tốc bằng $a\left(m/s^2\right)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $15\left(m/s\right)$ **B.** $10\left(m/s\right)$ **C.** $7\left(m/s\right)$ **D.** $22\left(m/s\right)$

Câu 51: **(Mã 105 2017)** Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{2}t^3+6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật đó bắt đầu chuyển động và $s\left(\mathrm{m}\right)$ là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. $18\left(\mathrm{m/s}\right)$ **B.** $108\left(\mathrm{m/s}\right)$ **C.** $64\left(\mathrm{m/s}\right)$ **D.** $24\left(\mathrm{m/s}\right)$

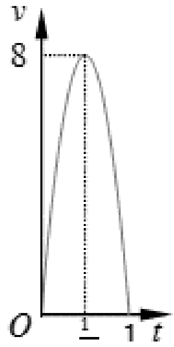
Câu 52: **(Mã 123 2017)** Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật chuyển động được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



A. $s=21,58(km)$ **B.** $s=23,25(km)$

C. $s=13,83(km)$ **D.** $s=15,50(km)$

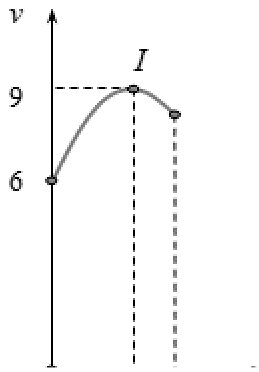
Câu 53: **(Mã 104 2017)** Một người chạy trong thời gian 1 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị là một phần parabol với đỉnh $I\left(\frac{1}{2};\ 8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quảng đường s người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi chạy?



A. $s=2,3$ (km) **B.** $s=4,5$ (km)

C. $s=5,3$ (km) **D.** $s=4$ (km)

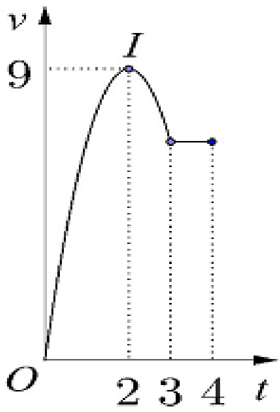
Câu 54: **(Mã 110 2017)** Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



A. $s=25,25(\text{km})$ **B.** $s=24,25(\text{km})$

C. $s=24,75(\text{km})$ **D.** $s=26,75(\text{km})$

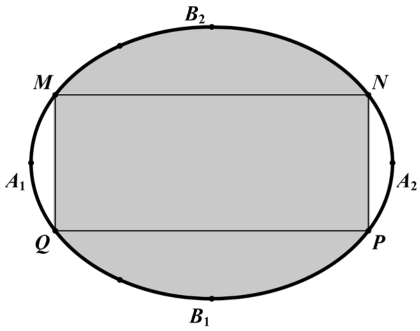
Câu 55: **(Mã 105 2017)** Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó.



A. $s=24$ (km) **B.** $s=28,5$ (km)

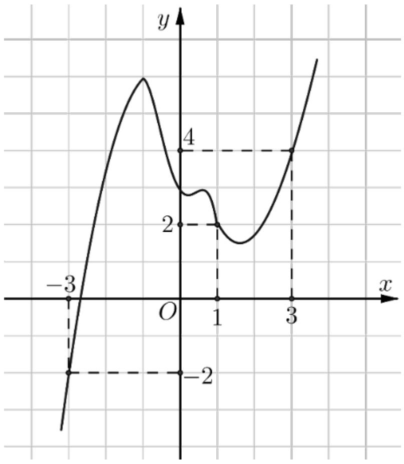
C. $s=27$ (km) **D.** $s=26,5$ (km)

Câu 56: **(Đề Tham Khảo 2019)** Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí để sơn phần tô đậm là 200.000 vnđ/m^2 và phần còn lại 100.000 vnđ/m^2. Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8\text{m}$, $B_1B_2 = 6\text{m}$ và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 3\text{m}$?



A. 5.526.000 đồng. **B.** 5.782.000 đồng **C.** 7.322.000 đồng. **D.** 7.213.000 đồng.

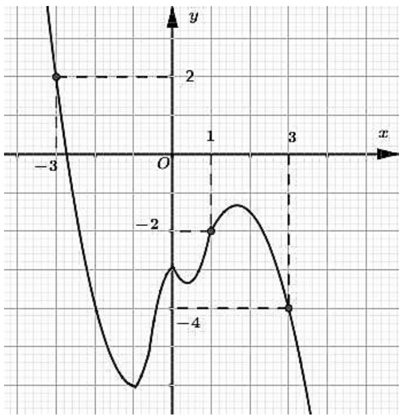
Câu 57: **(Mã 110 B 2017)** Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(1) > g(-3) > g(3)$ **B.** $g(1) > g(3) > g(-3)$

C. $g(3) > g(-3) > g(1)$ **D.** $g(-3) > g(3) > g(1)$

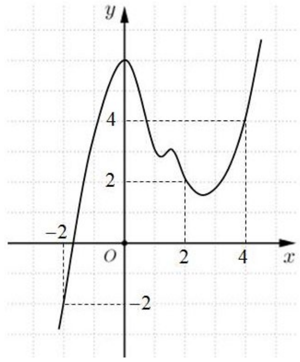
Câu 58: **(Mã 105 2017)** Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ của hàm số như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) + x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(3) < g(-3) < g(1)$ **B.** $g(1) < g(-3) < g(3)$

C. $g(-3) < g(3) < g(-1)$ **D.** $g(1) < g(3) < g(-3)$

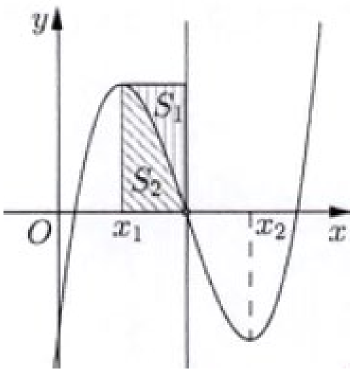
Câu 59: **(Mã 123 2017)** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $h(x)=2f(x)-x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $h(4)=h(-2)<h(2)$ **B.** $h(2)>h(-2)>h(4)$

C. $h(4)=h(-2)>h(2)$ **D.** $h(2)>h(4)>h(-2)$

Câu 60: **(TK 2020-2021)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1,x_2 thỏa mãn $x_2=x_1+2$ và $f(x_1)+f(x_2)=0$. Gọi điểm S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Câu 61: **(MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a,b,c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -3 và 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln 3$. **B.** $\ln 3$. **C.** $\ln 18$. **D.** $2\ln 2$.

Câu 62: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln 3$. **B.** $\ln 2$. **C.** $\ln 15$. **D.** $3\ln 2$.

Câu 63: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a,b,c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng

A. $\ln 3$. **B.** $3\ln 2$. **C.** $\ln 10$. **D.** $\ln 7$.

Câu 64: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hai hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+x$ và $g(x)=mx^3+nx^2-2x$ với $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f(x)-g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1,2,3$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng

A. $\dfrac{32}{3}$. **B.** $\dfrac{16}{3}$. **C.** $\dfrac{71}{12}$. **D.** $\dfrac{71}{6}$.

Câu 65: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+3x$ và hàm số $g(x)=mx^3+nx^2-x$; với $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f(x)-g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1;2$ và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng

A. $\dfrac{32}{3}$. **B.** $\dfrac{71}{9}$. **C.** $\dfrac{71}{6}$. **D.** $\dfrac{64}{9}$.

CHƯƠNG III

NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN – ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

BÀI 2. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

III. HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THAM KHẢO VÀ ĐỀ CHÍNH THỨC CỦA BỘ GIÁO DỤC TỪ NĂM 2017 ĐẾN NAY

Câu 1: **(MĐ 101-2022)** Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^3 f(x)dx = F(3) - G(0) + a,\ (a > 0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x), y = G(x), x = 0, x = 3$. Khi $S = 15$ thì a bằng

A. 15. **B.** $12\cdot$ **C.** $18\cdot$ **D.** $5\cdot$

Lời giải

Chọn D

Do $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên $G(x) = F(x) + C, \forall x \in \mathbb{R}$, với C là hằng số.

Mặt khác $\int_0^3 f(x)dx = F(3) - F(0)$

Lại có $\int_0^3 f(x)dx = F(3) - G(0) + a$, suy ra $G(0) = F(0) + a$.

Do đó $a = C \Rightarrow G(x) = F(x) + a, \forall x \in \mathbb{R}$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x), y = G(x), x = 0, x = 3$.

$S = \int_0^3 |G(x) - F(x)|dx \Leftrightarrow 15 = \int_0^3 |a|dx \overset{a>0}{\Leftrightarrow} 15 = 3a \Leftrightarrow a = 5$.

Câu 2: **(MĐ 102-2022)** Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^5 f(x)dx = F(5) - G(0) + a\ \ (a > 0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x), y = G(x), x = 0$ và $x = 5$. Khi $S = 20$ thì a bằng

A. 4. **B.** 15. **C.** 25. **D.** 20.

Lời giải

Chọn A

Vì $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên

$$\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = F(5)-F(0)=G(5)-G(0)=F(5)-G(0)+a \Rightarrow \begin{cases} F(0)=G(0)-a \\ F(5)=G(5)-a \end{cases}.$$

Do đó $F(x)=G(x)-a \Leftrightarrow F(x)-G(x)=-a$

S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x), y=G(x), x=0$ và $x=5$ nên

$$S=\int_0^5 |F(x)-G(x)|\,\mathrm{d}x=\int_0^5 |-a|\,\mathrm{d}x=\int_0^5 |a|\,\mathrm{d}x=\int_0^5 a\,\mathrm{d}x = ax\Big|_0^5 = 5a \quad (a>0).$$

Mà $S=20$ nên $5a=20 \Leftrightarrow a=4.$.

Câu 3: **(MĐ 103-2022)** Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = F(4)-G(0)+a\ (a>0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x), y=G(x), x=0$ và $x=4$. Khi $S=8$ thì a bằng

A. 8. **B.** 4. **C.** 12. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

$F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = F(4)-F(0)$.

Mà $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = F(4)-G(0)+a\ (a>0)$ nên

$F(4)-F(0)=F(4)-G(0)+a \Leftrightarrow G(0)=F(0)+a$.

Lại có $G(x)$ cũng là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên $G(x)=F(x)+a\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y=F(x), y=G(x), x=0$ và $x=4$ là

$$S=\int_0^4 |F(x)-G(x)|\,\mathrm{d}x=\int_0^4 a\,\mathrm{d}x = 4a = 8 \Rightarrow a=2.$$

Câu 4: **(MĐ 104-2022)** Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = F(2)-G(0)+a\ (a>0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x), y=G(x), x=0$ và $x=2$. Khi $S=6$ thì a bằng

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Do $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên $F(x)-G(x)=C$ với C là hằng số.

Ta có $S=\int_0^2 |F(x)-G(x)|\,\mathrm{d}x=\int_0^2 |C|\,\mathrm{d}x=|C|.\int_0^2 1\,\mathrm{d}x = 2|C| = 6 \Rightarrow |C|=3\ (*)$.

Ta lại có: $F(0)-G(0)=C \Leftrightarrow F(0)=G(0)+C$

Theo đề bài:

$\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=F(2)-F(0)=F(2)-\left(G(0)+C\right)=F(2)-G(0)-C=F(2)-G(0)+a$.

Suy ra: $a=-C$ mà $a>0$ nên $C<0\ (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra: $C=-3 \Rightarrow a=-C=3$.

Vậy: $a=3$.

Câu 5: **(MĐ 101-2022)** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Biết rằng hàm số $g(x)=\ln f(x)$ có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	↘	$ln\frac{43}{8}$	↗	$ln6$	↘	$ln2$	↗	$+\infty$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(5;6)$. **B.** $(4;5)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;4)$.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên của hàm số $g(x)=\ln f(x)$, ta có: $\ln f(x)\ge \ln 2 \Rightarrow f(x)\ge 2$.

$g(x)=\ln f(x) \Rightarrow g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hàm đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ là:

$f'(x)=g'(x) \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)} \Leftrightarrow f'(x)=0$ hay $f(x)=1$ (vô nghiệm do $f(x)\ge 2$).

$\Leftrightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2 \\ x=x_3 \end{array}\right.$.

Do đó, ta có diện tích cần tìm là: $S=\int\limits_{x_1}^{x_3}\left|f'(x)-g'(x)\right|dx$

$$S=\int\limits_{x_1}^{x_2}\left|f'(x)-g'(x)\right|dx+\int\limits_{x_2}^{x_3}\left|f'(x)-g'(x)\right|dx=\left|\int\limits_{x_1}^{x_2}\left[f'(x)-g'(x)\right]dx\right|+\left|\int\limits_{x_2}^{x_3}\left[f'(x)-g'(x)\right]dx\right|$$

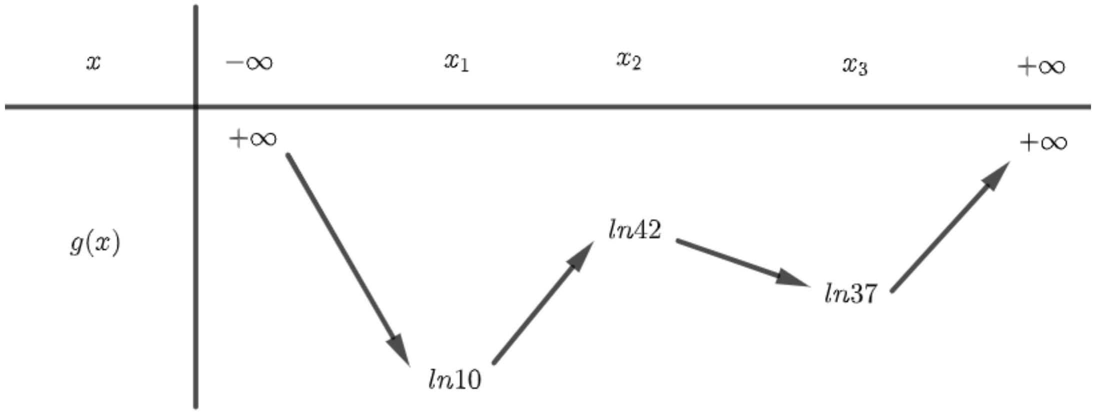
$$=\left|\left[f(x)-g(x)\right]_{x_1}^{x_2}\right|+\left|\left[f(x)-g(x)\right]_{x_2}^{x_3}\right|$$

$$=\left|f(x_2)-g(x_2)-f(x_1)+g(x_1)\right|+\left|f(x_3)-g(x_3)-f(x_2)+g(x_2)\right|$$

$$=\left|6-\ln 6-\frac{43}{8}+\ln\frac{43}{8}\right|+\left|2-\ln 2-6+\ln 6\right|=\left|\frac{5}{8}+\ln\frac{43}{48}\right|+\left|\ln 3-4\right|=\frac{5}{8}+\ln\frac{43}{48}+4-\ln 3$$

$$=\frac{37}{8}+\ln\frac{43}{144}\approx 3,416.$$

Câu 6: **(MĐ 102-2022)** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Biết rằng hàm số $g(x)=\ln f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(38;39)$. **B.** $(25;26)$. **C.** $(28;29)$. **D.** $(35;36)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $g(x)=\ln f(x)\Rightarrow g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$. Nên: $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=0$.

Mà $g'(x_1)=g'(x_2)=g'(x_3)=0\Rightarrow f'(x_1)=f'(x_2)=f'(x_3)=0$.

Theo giả thiết bài toán thì $f(x)>0\forall x$ nên: $g'(x)>0\Leftrightarrow f'(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1<x<x_2\\x>x_3\end{array}\right.$

Và: $f(x_1)=10, f(x_2)=42, f(x_3)=37\Rightarrow g'(x)-f'(x)=f'(x)\left(\dfrac{1}{f(x)}-1\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_2<x<x_3\\x<x_1\end{array}\right.$

Vậy:

$$S=\int_{x_1}^{x_3}\left|g'(x)-f'(x)\right|dx=\int_{x_1}^{x_2}\left(f'(x)-g'(x)\right)dx+\int_{x_2}^{x_3}\left(g'(x)-f'(x)\right)dx$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}f'(x)\left(1-\frac{1}{f(x)}\right)dx+\int_{x_2}^{x_3}f'(x)\left(\frac{1}{f(x)}-1\right)dx$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\left(1-\frac{1}{f(x)}\right)d\left(f(x)\right)+\int_{x_2}^{x_3}\left(\frac{1}{f(x)}-1\right)d\left(f(x)\right)$$

$$\begin{aligned}&=\left(f(x)-\ln|f(x)|\right)\Big|_{x_1}^{x_2}+\left(\ln|f(x)|-f(x)\right)\Big|_{x_2}^{x_3}\\&=37+\ln 10-\ln 37\\&\approx 35,69\end{aligned}.$$

Câu 7: **(MĐ 103-2022)** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Biết rằng hàm số $g(x)=\ln f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 30$	$\nearrow$	$\ln 35$	$\searrow$	$\ln 3$	$\nearrow$	$+\infty$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(33;35)$. **B.** $(37;40)$. **C.** $(29;32)$. **D.** $(24;26)$.

Lời giải

Chọn A

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $g(x)>\ln 3,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x)>3,\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $g'(x)=\left[\ln f(x)\right]'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}\Rightarrow f'(x)=g'(x).f(x)$

Nên

$$f'(x)=g'(x)\Leftrightarrow g'(x).f(x)=g'(x)\Leftrightarrow g'(x)\left[f(x)-1\right]=0\Leftrightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\\x=x_2\\x=x_3\end{array}\right..$$

Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ là

$$S=\left|\int_{x_1}^{x_2}f'(x)-\frac{f'(x)}{f(x)}dx\right|+\left|\int_{x_2}^{x_3}f'(x)-\frac{f'(x)}{f(x)}dx\right|$$

Đặt $t=f(x)\Rightarrow dt=f'(x)dx$.

Đổi cận: $x=x_1\Rightarrow t=30$, $x=x_2\Rightarrow t=35$, $x=x_3\Rightarrow t=3$.

Khi đó, $S=\left|\int_{30}^{35}\left(1-\dfrac{1}{t}\right)dt\right|+\left|\int_{35}^{3}\left(1-\dfrac{1}{t}\right)dt\right|=\left|\left(t-\ln|t|\right)\Big|_{30}^{35}\right|+\left|\left(\ln|t|-t\right)\Big|_{3}^{35}\right|$

$=\left|(35-\ln 35)-(30-\ln 30)\right|+\left|(35-\ln 35)-(3-\ln 3)\right|$

$= 5 - \ln 35 + \ln 30 + 32 - \ln 35 + \ln 3 = 37 + \ln\dfrac{90}{1225} \approx 34,39$.

Câu 8: **(MĐ 104-2022)** Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Biết rằng hàm số $g(x) = \ln f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 12$	$\nearrow$	$\ln\dfrac{199}{16}$	$\searrow$	$\ln 4$	$\nearrow$	$+\infty$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(7;8)$. **B.** $(6;7)$. **C.** $(8;9)$. **D.** $(10;11)$.

Lời giải

Chọn A

Từ BBT ta thấy $f(x) \geq 4, \forall x$

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Ta có $f'(x) - g'(x) = f'(x) - \dfrac{f'(x)}{f(x)} = f'(x).\left(1 - \dfrac{1}{f(x)}\right)$

Do

$f(x) \geq 4 \Rightarrow f'(x) - g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow g'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \\ x = x_2 \\ x = x_3 \end{array}\right.$$

$$S = \int_{x_1}^{x_3} \left|f'(x) - g'(x)\right| dx = \int_{x_1}^{x_2} \left|f'(x) - g'(x)\right| dx + \int_{x_2}^{x_3} \left|f'(x) - g'(x)\right| dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left(f'(x) - g'(x)\right) dx - \int_{x_2}^{x_3} \left(f'(x) - g'(x)\right) dx$$

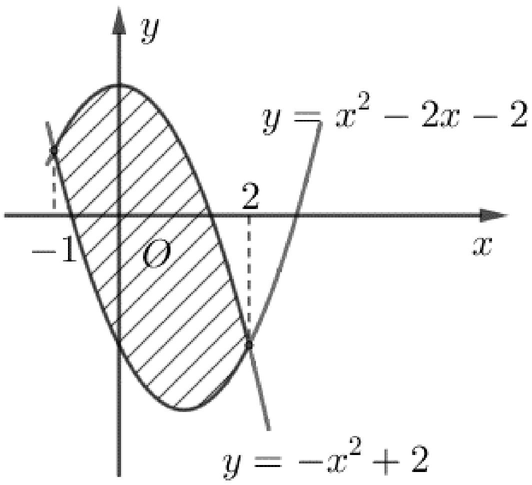
$$= f(x_2) - g(x_2) - f(x_1) + g(x_1) - f(x_3) + g(x_3) + f(x_2) - g(x_2)$$

$$= 2f(x_2) - 2g(x_2) - f(x_1) + g(x_1) - f(x_3) + g(x_3)$$

$$= 2.\frac{199}{16} - 2\ln\frac{199}{16} - 12 + \ln 12 - 4 + \ln 4$$

$$\approx 7,705$$

Câu 9: **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình bên bằng



A. $\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x$. **B.** $\int_{-1}^{2}\left(2x^2-2x-4\right)\mathrm{d}x$.

C. $\int_{-1}^{2}\left(-2x^2-2x+4\right)\mathrm{d}x$. **D.** $\int_{-1}^{2}\left(2x^2+2x-4\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Dựa và hình vẽ ta có diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình bên là:

$$\int_{-1}^{2}\left[\left(-x^2+2\right)-\left(x^2-2x-2\right)\right]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x.$$

Câu 10: **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2x^2$, $y=-1$, $x=0$ và $x=1$ được tính bởi công thức nào sau đây?

A. $S=\pi\int_0^1\left(2x^2+1\right)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int_0^1\left(2x^2-1\right)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int_0^1\left(2x^2+1\right)^2\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int_0^1\left(2x^2+1\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S=\int_0^1\left|2x^2+1\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\left(2x^2+1\right)\mathrm{d}x$ do $2x^2+1>0\ \ \forall x\in[0;1]$.

Câu 11: **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-4$ và $y=2x-4$ bằng

A. 36. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{4\pi}{3}$. **D.** 36π.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là:

$$x^2-4=2x-4\Leftrightarrow x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right..$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho là:

$$S=\int_0^2\left|\left(x^2-4\right)-\left(2x-4\right)\right|\mathrm{d}x=\int_0^2\left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\int_0^2\left(2x-x^2\right)\mathrm{d}x=\left.\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^2=\frac{4}{3}.$$

Câu 12: **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-1$ và $y=x-1$

A. $\frac{\pi}{6}$. **B.** $\frac{13}{6}$. **C.** $\frac{13\pi}{6}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm hai đường là: $x^2-1=x-1\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường là $\int_0^1\left|x^2-x\right|\mathrm{d}x=\frac{1}{6}$.

Câu 13: **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-3$ và $y=x-3$ bằng

A. $\frac{125\pi}{6}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{125}{6}$. **D.** $\frac{\pi}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-3=x-3\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng: $S=\int_0^1\left|\left(x^2-3\right)-\left(x-3\right)\right|dx=\int_0^1\left|x^2-x\right|dx=\frac{1}{6}$.

Câu 14: **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-2$ và $y=3x-2$ bằng

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{9\pi}{2}$. **C.** $\frac{125}{6}$. **D.** $\frac{125\pi}{6}$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm, ta có:

$$x^2-2=3x-2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0.\\x=3.\end{array}\right.$$

Như vậy, diện tích hình phẳng được gới hạn bằng $\int_0^3\left|\left(x^2-2\right)-\left(3x-2\right)\right|dx=\frac{9}{2}$.

Câu 15: **(Mã 102 2018)** Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\pi\int\limits_0^2 2^x\,\mathrm{d}x$ **B.** $S=\int\limits_0^2 2^x\,\mathrm{d}x$ **C.** $S=\pi\int\limits_0^2 2^{2x}\,\mathrm{d}x$ **D.** $S=\int\limits_0^2 2^{2x}\,\mathrm{d}x$

Lời giải

Chọn B

$S=\int\limits_0^2 \left|2^x\right|\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 2^x\,\mathrm{d}x$ (do $2^x>0,\forall x\in[0;2]$).

Câu 16: **(Mã 101 2018)** Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

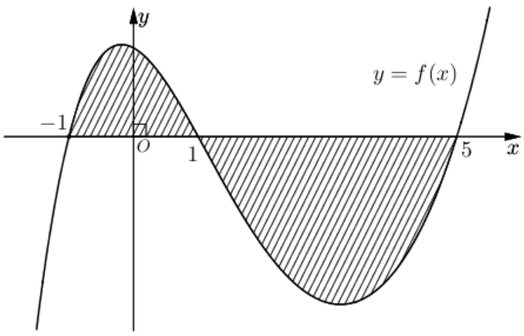
A. $S=\int\limits_0^2 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ **B.** $S=\pi\int\limits_0^2 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ **C.** $S=\pi\int\limits_0^2 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ **D.** $S=\pi\int\limits_0^2 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$

Lời giải

Chọn A

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$ là: $S=\int\limits_0^2 e^x\mathrm{d}x$.

Câu 17: **(Mã 102 - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x), y=0, x=-1$ và $x=5$ (như hình vẽ bên).



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S=-\int\limits_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_1^5 f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int\limits_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_1^5 f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int\limits_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_1^5 f(x)\mathrm{d}x$.

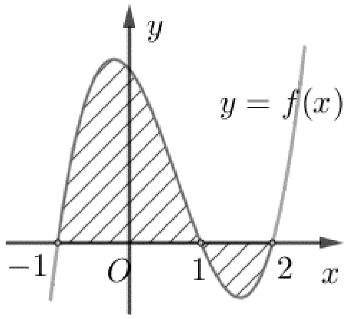
D. $S=-\int\limits_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_1^5 f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $S=\int\limits_{-1}^1 |f(x)|\mathrm{d}x+\int\limits_1^5 |f(x)|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_1^5 f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 18: **(Mã 103 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x), y=0, x=-1, x=2$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{2} f(x)\,dx$. **B.** $S=-\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \int_{1}^{2} f(x)\,dx$.

C. $S=-\int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{2} f(x)\,dx$. **D.** $S=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \int_{1}^{2} f(x)\,dx$.

Lời giải

Chọn D

$$S=\int_{-1}^{2}\left|f(x)\right|dx=\int_{-1}^{1}\left|f(x)\right|dx+\int_{1}^{2}\left|f(x)\right|dx$$

Nhìn hình ta thấy hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn $[-1;1]$ nên $\int_{-1}^{1}\left|f(x)\right|dx=\int_{-1}^{1} f(x)dx$; hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị âm trên đoạn $[1;2]$ nên $\int_{1}^{2}\left|f(x)\right|dx=-\int_{1}^{2} f(x)dx$

Vậy $S=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \int_{1}^{2} f(x)\,dx$

Câu 19: **(Đề Minh Họa 2017)** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và đồ thị hàm số $y=x-x^2$.

A. $\frac{37}{12}$ **B.** $\frac{9}{4}$ **C.** $\frac{81}{12}$ **D.** 13

Lời giải

Chọn A

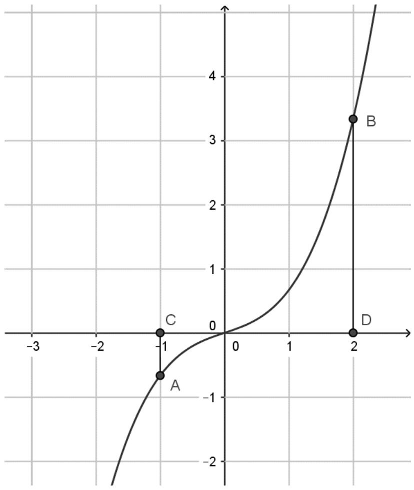
Phương trình hoành độ giao điểm $x^3-x=x-x^2 \Leftrightarrow x^3+x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và đồ thị hàm số $y=x-x^2$ là:

$$S=\int_{-2}^{1}\left|x^3-x-\left(x-x^2\right)\right|dx=\left|\int_{-2}^{0}\left(x^3+x^2-2x\right)dx\right|+\left|\int_{0}^{1}\left(x^3+x^2-2x\right)dx\right|$$

$$=\left|\left.\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right)\right|_{-2}^{0}\right|+\left|\left.\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right)\right|_{0}^{1}\right|=\left|-\left(\frac{16}{4}-\frac{8}{3}-4\right)\right|+\left|\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right)\right|=\frac{37}{12}.$$

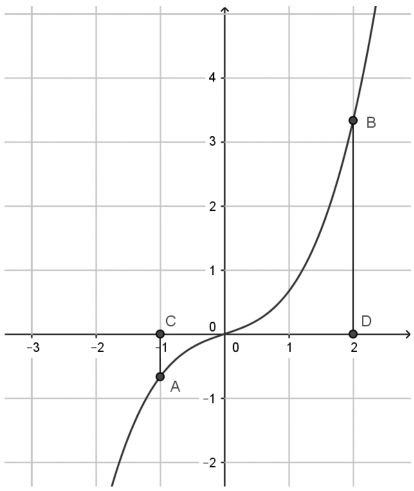
Câu 20: **(Đề Tham Khảo 2017)** Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1$, $x=2$. Đặt $a=\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x$, $b=\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x$, mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $S=b-a$ **B.** $S=b+a$ **C.** $S=-b+a$ **D.** $S=-b-a$

Lời giải

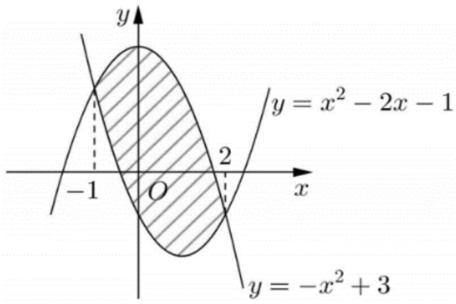
Chọn A



Ta có:

$$S=\int_{-1}^{2}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}|f(x)|\mathrm{d}x=-\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x=-a+b.$$

Câu 21: **(Đề Tham Khảo 2019)** Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int\limits_{-1}^{2}(-2x+2)\,dx$ **B.** $\int\limits_{-1}^{2}(2x-2)\,dx$

C. $\int\limits_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)dx$ **D.** $\int\limits_{-1}^{2}\left(2x^2-2x-4\right)dx$

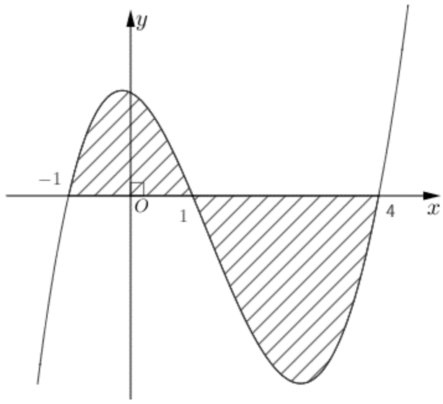
Lời giải

Chọn C

Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là:

$$S=\int\limits_{-1}^{2}\left|\left(-x^2+3\right)-\left(x^2-2x-1\right)\right|dx=\int\limits_{-1}^{2}\left|-2x^2+2x+4\right|dx=\int\limits_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)dx.$$

Câu 22: **(Mã 101 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x), y=0, x=-1$ và $x=4$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S=\int\limits_{-1}^{1}f(x)\mathrm{dx}-\int\limits_{1}^{4}f(x)\mathrm{dx}$. **B.** $S=\int\limits_{-1}^{1}f(x)\mathrm{dx}+\int\limits_{1}^{4}f(x)\mathrm{dx}$.

C. $S=-\int\limits_{-1}^{1}f(x)\mathrm{dx}-\int\limits_{1}^{4}f(x)\mathrm{dx}$. **D.** $S=-\int\limits_{-1}^{1}f(x)\mathrm{dx}+\int\limits_{1}^{4}f(x)\mathrm{dx}$.

Lời giải

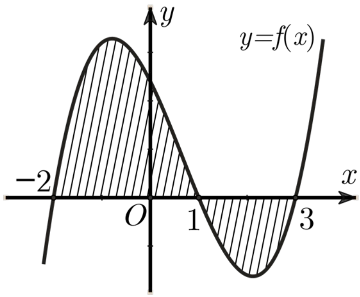
Chọn A

Ta có: hàm số $f(\mathrm{x})\ge 0\,\forall x\in[-1;1]; f(\mathrm{x})\le 0\,\forall x\in[1;4]$, nên:

$S=\int\limits_{-1}^{4}|f(x)|\mathrm{dx}=\int\limits_{-1}^{1}|f(x)|\mathrm{dx}+\int\limits_{1}^{4}|f(x)|\mathrm{dx}=\int\limits_{-1}^{1}f(x)\mathrm{dx}-\int\limits_{1}^{4}f(x)\mathrm{dx}$. Chọn đáp án

B.

Câu 23: **(Mã 104 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi cá đường $y=f(x)$, $y=0$, $x=-2$ và $x=3$ (như hình vẽ). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S=-\int\limits_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x.$ **B.** $S=\int\limits_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x.$

C. $S=-\int\limits_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x.$ **D.** $S=\int\limits_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $S=\int\limits_{-2}^{3} |f(x)|\mathrm{d}x=S=\int\limits_{-2}^{1} |f(x)|\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{3} |f(x)|\mathrm{d}x.$

Do $f(x)\geq 0$ với $\forall x\in[-2;1]$ và $f(x)\leq 0$ với $\forall x\in[1;3]$ nên $S=\int\limits_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x.$

Câu 24: **(Đề Minh Họa 2017)** Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=a, x=b\,(a<b)$, xung quanh trục Ox.

A. $V=\int\limits_{a}^{b} |f(x)|dx$ **B.** $V=\pi\int\limits_{a}^{b} f^2(x)dx$ **C.** $V=\int\limits_{a}^{b} f^2(x)dx$ **D.** $V=\pi\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$

Lời giải

Chọn B

Câu 25: **(Đề Tham Khảo 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b\,(a<b)$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức:

A. $V=\pi^2\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ **B.** $V=\pi\int\limits_{a}^{b} f^2(x)dx$ **C.** $V=2\pi\int\limits_{a}^{b} f^2(x)dx$ **D.** $V=\pi^2\int\limits_{a}^{b} f^2(x)dx$

Lời giải

Chọn B

Câu 26: **(Mã 101 2020 Lần 2)** Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^{3x}$, $y=0$, $x=0$ và $x=1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng:

A. $\pi\int\limits_0^1 e^{3x}dx$. **B.** $\int\limits_0^1 e^{6x}dx$. **C.** $\pi\int\limits_0^1 e^{6x}dx$. **D.** $\int\limits_0^1 e^{3x}dx$.

Lời giải

Chọn C

Ta có thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng:

$\pi\int\limits_0^1 \left(e^{3x}\right)^2 dx = \pi\int\limits_0^1 e^{6x}dx$.

Câu 27: **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^{4x}, y=0, x=0$ và $x=1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

A. $\int\limits_0^1 e^{4x}dx$. **B.** $\pi\int\limits_0^1 e^{8x}dx$. **C.** $\pi\int\limits_0^1 e^{4x}dx$. **D.** $\int\limits_0^1 e^{8x}dx$.

Lời giải

Chọn B

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox là:

$V=\pi\int\limits_0^1 \left(e^{4x}\right)^2 dx = \pi\int\limits_0^1 e^{8x}dx.$

Câu 28: **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^{2x}, y=0, x=0$ và $x=1$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành kho quay D quanh Ox bằng

A. $\pi\int_0^1 e^{4x}dx$. **B.** $\int_0^1 e^{2x}dx$. **C.** $\pi\int_0^1 e^{2x}dx$. **D.** $\int_0^1 e^{4x}dx$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích khối tròn xoay tạo thành kho quay D quanh Ox là $V=\pi\int_0^1\left(e^{2x}\right)^2dx=\pi\int_0^1 e^{4x}dx$.

Câu 29: **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^{x}, y=0, x=0$ và $x=1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

A. $\pi\int\limits_0^1 e^{2x}dx$. **B.** $\pi\int\limits_0^1 e^{x}dx$ **C.** $\int\limits_0^1 e^{x}dx$. **D.** $\int\limits_0^1 e^{2x}dx$.

Lời giải

Chọn A

Câu 30: **(Mã 103 2018)** Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2+3$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)dx$ **B.** $V=\pi\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)dx$

C. $V=\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)^2dx$ **D.** $V=\pi\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)^2dx$

Lời giải

Chọn D

Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox là:

$$V=\pi\int_0^2\left(x^2+3\right)^2dx.$$

Câu 31: **(Mã 105 2017)** Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=\dfrac{\pi\left(e^2+1\right)}{2}$ **B.** $V=\dfrac{e^2-1}{2}$ **C.** $V=\dfrac{\pi e^2}{3}$ **D.** $V=\dfrac{\pi\left(e^2-1\right)}{2}$

Lời giải

Chọn D

$$V=\pi\int_0^1 e^{2x}dx=\pi\left.\frac{e^{2x}}{2}\right|_0^1=\frac{\pi\left(e^2-1\right)}{2}$$

Câu 32: **(Mã 104 2017)** Cho hình phẳng D giới hạn với đường cong $y=\sqrt{x^2+1}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0,x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=2$ **B.** $V=\dfrac{4\pi}{3}$ **C.** $V=2\pi$ **D.** $V=\dfrac{4}{3}$

Lời giải

Chọn B

Thể tích khối tròn xoay được tính theo công thức:

$$V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2dx=\pi\int_0^1\left(x^2+1\right)dx=\pi\left.\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\right|_0^1=\frac{4\pi}{3}.$$

Câu 33: **(Mã 123 2017)** Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0,x=\dfrac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=(\pi+1)\pi$ **B.** $V=\pi-1$ **C.** $V=\pi+1$ **D.** $V=(\pi-1)\pi$

Lời giải

Chọn A

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{2+\cos x}\right)^2dx=\pi\left(2x+\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi(\pi+1).$$

Câu 34: **(Mã 110 2017)** Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=2\pi(\pi+1)$ **B.** $V=2\pi$ **C.** $V=2(\pi+1)$ **D.** $V=2\pi^2$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $V=\pi\int_0^{\pi}\left(\sqrt{2+\sin x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}(2+\sin x)\mathrm{d}x=\pi(2x-\cos x)\Big|_0^{\pi}=2\pi(\pi+1)$.

Câu 35: **(Mã 104 2018)** Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y=x^2+2, y=0, x=1, x=2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\int_1^2\left(x^2+2\right)\mathrm{d}x$ **B.** $V=\pi\int_1^2\left(x^2+2\right)^2\mathrm{d}x$

C. $V=\int_1^2\left(x^2+2\right)^2\mathrm{d}x$ **D.** $V=\pi\int_1^2\left(x^2+2\right)\mathrm{d}x$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $V=\pi\int_1^2\left(x^2+2\right)^2\mathrm{d}x$.

Câu 36: **(Đề Tham Khảo 2017)** Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1\le x\le 3$) thì được thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2-2}$.

A. $V=\frac{124}{3}$ **B.** $V=(32+2\sqrt{15})\pi$ **C.** $V=32+2\sqrt{15}$ **D.** $V=\frac{124\pi}{3}$

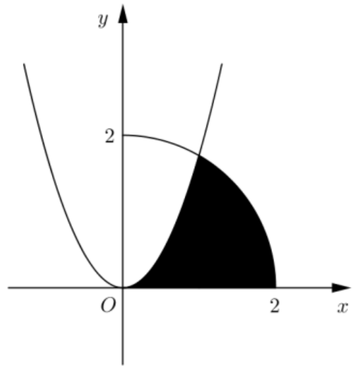
Lời giải

Chọn A

Diện tích thiết diện là: $S(x)=3x.\sqrt{3x^2-2}$

$\Rightarrow$ Thể tích vật thể là: $V=\int_1^3 3x.\sqrt{3x^2-2}dx=\frac{124}{3}$

Câu 37: **(Đề Tham Khảo 2018)** Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $\mathrm{y}=\sqrt{3}\mathrm{x}^2$, cung tròn có phương trình $\mathrm{y}=\sqrt{4-\mathrm{x}^2}$ (với $0\le \mathrm{x}\le 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\dfrac{4\pi+\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\dfrac{4\pi-\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\dfrac{4\pi+2\sqrt{3}-3}{6}$ **D.** $\dfrac{5\sqrt{3}-2\pi}{3}$

Lời giải

Chọn B

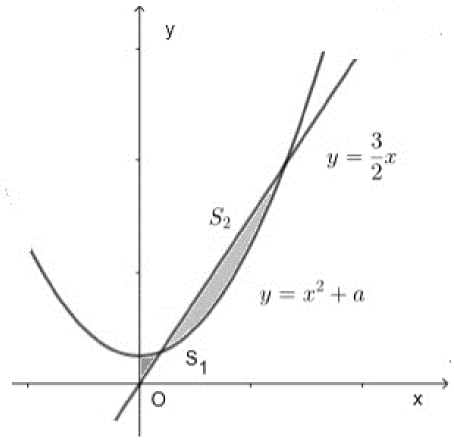
Phương trình hoành độ giao điểm giữa parabol và cung tròn ta được $\sqrt{3}x^2=\sqrt{4-x^2}\Leftrightarrow x=\pm1$ với $0\le x\le 2$ nên ta có $x=1$

Ta có diện tích $S=\int\limits_0^1\sqrt{3}x^2dx+\int\limits_1^2\sqrt{4-x^2}dx=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x^3\Big|_0^1+\int\limits_1^2\sqrt{4-x^2}dx=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\int\limits_1^2\sqrt{4-x^2}dx$

Đặt: $x=2\sin t => dx=2\cos tdt; x=1=>t=\dfrac{\pi}{6}; x=2=>t=\dfrac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow S=\frac{\sqrt{3}}{3}+2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4\pi-\sqrt{3}}{6}$$

Câu 38: **(Mã 104 - 2019)** Cho đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}x$ và parabol $y=x^2+a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 ,S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(0;\dfrac{2}{5}\right)$ **B.** $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{16}\right)$ **C.** $\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{9}{20}\right)$ **D.** $\left(\dfrac{9}{20};\dfrac{1}{2}\right)$

Lời giải

Chọn C

Giải toán:

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2+a=\frac{3}{2}x \Leftrightarrow 2x^2-3x+2a=0$

Để phương trình có 2 nghiệm dương thì $\begin{cases} a>0 \\ \Delta>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ a<\frac{9}{16} \end{cases}$.

Gọi hai nghiệm đó là $0<x_1<x_2$ thì $x_2=\frac{3+\sqrt{9-16a}}{4}$.

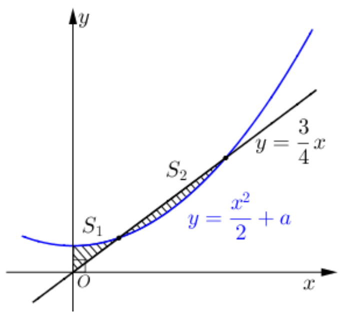
Để $S_1=S_2$ khi và chỉ khi $\int\limits_0^{x_2}\left(x^2+a-\frac{3}{2}x\right)dx=0$

Ta có: $\int\limits_0^{x_2}\left(x^2+a-\frac{3}{2}x\right)\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow \frac{x_2^3}{3}+ax_2-\frac{3}{4}x_2^2=0$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{3+\sqrt{9-16a}}{4}\right)^3}{3}+a\cdot\frac{3+\sqrt{9-16a}}{4}-\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3+\sqrt{9-16a}}{4}\right)^2=0$$

Giải nhanh bằng máy tính cho kết quả $x=0,421875$ thuộc khoảng $\left(\frac{2}{5};\frac{9}{20}\right)$.

Câu 39: **(Mã 102 - 2019)** Cho đường thẳng $y=\frac{3}{4}x$ và parabol $y=\frac{1}{2}x^2+a$, (a là tham số thực dương). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\frac{7}{32};\frac{1}{4}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{4};\frac{9}{32}\right)$. **C.** $\left(\frac{3}{16};\frac{7}{32}\right)$. **D.** $\left(0;\frac{3}{16}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+a=0 \Leftrightarrow 2x^2-3x+4a=0$.

Theo đề bài phương trình có hai nghiệm $0 < x_1 < x_2$ thỏa mãn $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{3}{2} & (*) \\ x_1 x_2 = 2a & (**) \end{cases}$.

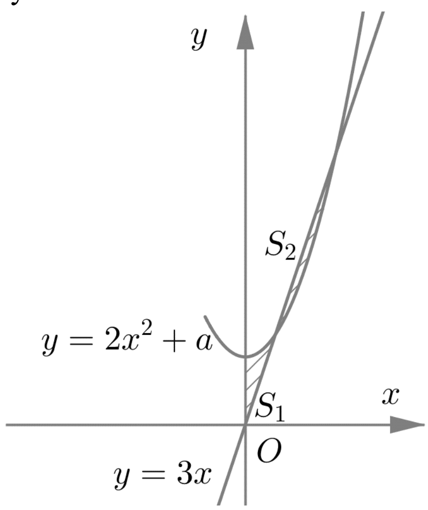
$$S_1 - S_2 = 0 \Leftrightarrow \int_0^{x_1} \left|\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a\right| dx + \int_{x_1}^{x_2} \left|\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a\right| dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^{x_2} \left|\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a\right| dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + ax\right|\Bigg|_0^{x_2} = 0 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{6}x_2^3 - \frac{3}{8}x_2^2 + ax_2\right| = 0 \Rightarrow a = -\frac{x_2^2}{6} + \frac{3x_2}{8} \ (***).$$

Từ $(*) \Rightarrow x_1 = \dfrac{3}{2} - x_2$, thay vào $(**) \Rightarrow \left(\dfrac{3}{2} - x_2\right)x_2 = -\dfrac{x_2^2}{3} + \dfrac{3x_2}{4} \Leftrightarrow \dfrac{2x_2^2}{3} - \dfrac{3x_2}{4} = 0 \Rightarrow x_2 = \dfrac{9}{8}$

$\xrightarrow{(***)} a = \dfrac{27}{128}$. Vậy $a \in \left(\dfrac{3}{16}; \dfrac{7}{32}\right)$.

Câu 40: **(Mã 103 - 2019)** Cho đường thẳng $y = 3x$ và parabol $2x^2 + a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(1; \dfrac{9}{8}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{9}{10}; 1\right)$. **C.** $\left(\dfrac{4}{5}; \dfrac{9}{10}\right)$. **D.** $\left(0; \dfrac{4}{5}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm $2x^2 + a = 3x \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + a = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9 - 8a > 0 \\ \dfrac{a}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \dfrac{9}{8} \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < \frac{9}{8}.$$

Ta được nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 8a}}{4}$.

Ta có $S_1 = S_2 \Leftrightarrow \int\limits_0^{\frac{3-\sqrt{9-8a}}{4}} \left(2x^2 + a - 3x\right)\mathrm{d}x = -\int\limits_{\frac{3-\sqrt{9-8a}}{4}}^{\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}} \left(2x^2 + a - 3x\right)\mathrm{d}x$.

$$\Leftrightarrow \int\limits_0^{\frac{3-\sqrt{9-8a}}{4}} \left(2x^2 + a - 3x\right)\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{3-\sqrt{9-8a}}{4}}^{\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}} \left(2x^2 + a - 3x\right)\mathrm{d}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_0^{\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}} \left(2x^2 - 3x + a\right)\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + ax\right)\Bigg|_0^{\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}} = 0$$

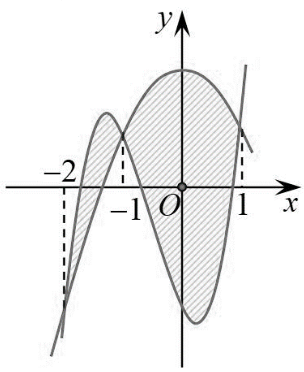
$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)^3 - \frac{2}{3}\left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)^2 + a\left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)\left[\frac{2}{3}\left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right) + a\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{3+\sqrt{9-8a}}{4} = 0 \;\; (vn) \\ \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)^2 - \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right) + a = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right) + a = 0 \xrightarrow[\text{Shift Solve}]{\text{CASIO}} a = \frac{27}{32}$$

Câu 41: **(Mã 102 2018)** Cho hai hàm số $f(x) = ax^2 + bx^2 + cx - 2$ và $g(x) = dx^2 + ex + 2$ (a, b, c, d, $e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2; -1; 1 (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{37}{12}$ **B.** $\frac{37}{6}$ **C.** $\frac{13}{2}$ **D.** $\frac{9}{2}$

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f(x)$ và $g(x)$ là

$ax^3+bx^2+cx-2=dx^2+3x+2 \Leftrightarrow a^3+(b-d)x^2+(c-e)x-4=0.$ $(*)$

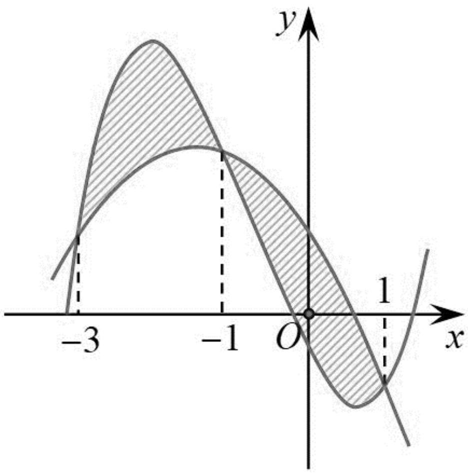
Do đồ thị của hai hàm số cắt nhau tại ba điểm suy ra phương trình $(*)$ có ba nghiệm $x=-2$; $x=-1$; $x=1$. Ta được

$ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-4=k(x+2)(x+1)(x-1).$

Khi đó $-4=-2k \Rightarrow k=2$.

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $\int_{-2}^{1}\left|2(x+2)(x+1)(x-1)\right|dx=\frac{37}{6}$.

Câu 42: **(Mã 101 2018)** Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-\frac{1}{2}$ và $g(x)=dx^2+ex+1$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là -3; -1; 1 (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. 5 **B.** $\frac{9}{2}$ **C.** 8 **D.** 4

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Xét phương trình $ax^3+bx^2+cx-\frac{1}{2}=dx^2+ex+1$ Û $ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-\frac{3}{2}=0$ có 3 nghiệm lần lượt là -3; -1; 1 nên suy ra $\begin{cases}-27a+9(b-d)-3(c-e)-\frac{3}{2}=0\\-a+(b-d)-(c-e)-\frac{3}{2}=0\\a+(b-d)+(c-e)-\frac{3}{2}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b-d=\frac{3}{2}\\a=\frac{1}{2}\\c-e=\frac{-1}{2}\end{cases}$

Vậy $f(x)-g(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$.

Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng

$$S=\int_{-3}^{-1}\left(f(x)-g(x)\right)dx+\int_{-1}^{1}\left(g(x)-f(x)\right)dx$$

$$\Leftrightarrow S=\int_{-3}^{-1}\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)dx-\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)dx=2+2=4.$$

Cách 2:

Ta có: $f(x)-g(x)=a(x+3)(x+1)(x-1)$.

Suy ra $a(x+3)(x+1)(x-1)=ax^3+(b-d)x^2+(c-d)x-\frac{3}{2}$

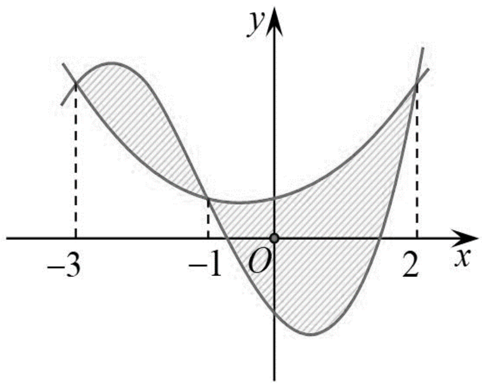
Xét hệ số tự do suy ra: $-3a=-\frac{3}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$.

Do đó: $f(x)-g(x)=\frac{1}{2}(x+3)(x+1)(x-1)$.

Diện tích bằng: $S=\int_{-3}^{-1}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$

$$\Leftrightarrow S=\frac{1}{2}\int_{-3}^{-1}(x+3)(x+1)(x-1)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x+3)(x+1)(x-1)\mathrm{d}x=4.$$

Câu 43: **(Mã 103 2018)** Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-1$ và $g(x)=dx^2+ex+\frac{1}{2}$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt $-3;-1;2$ (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{253}{12}$ **B.** $\frac{125}{12}$ **C.** $\frac{253}{48}$ **D.** $\frac{125}{48}$

Lời giải

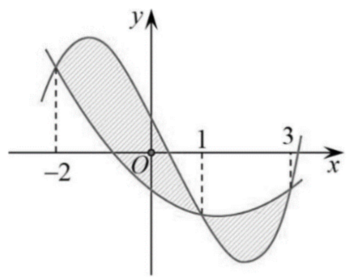
Chọn C

Vì phương trình $f(x)-g(x)=0$ có 3 nghiệm $-3;-1;2$ nên $f\left(x\right)-g\left(x\right)=a\left(x+3\right)\left(x-2\right)\left(x+1\right)$.

So sánh hệ số tự do ta được $-6a=-\dfrac{3}{2}\Rightarrow a=\dfrac{1}{4}$. Do đó $S=\int\limits_{-3}^{2}\left|\dfrac{1}{4}\left(x+3\right)\left(x+1\right)\left(x-2\right)\right|\mathrm{d}x=\dfrac{253}{48}$

.

Câu 44: **(Mã 104 2018)** Cho hai hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+\dfrac{3}{4}$ và $g\left(x\right)=dx^2+ex-\dfrac{3}{4}$, $\left(a,b,c,d,e\in\mathbb{R}\right)$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2; 1; 3 (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. $\dfrac{253}{48}$ **B.** $\dfrac{125}{24}$ **C.** $\dfrac{125}{48}$ **D.** $\dfrac{253}{24}$

Lời giải

Chọn A

Ta có phương trình hoành độ giao điểm là:

$$ax^3+bx^2+cx+\frac{3}{4}=dx^2+ex-\frac{3}{4}\Leftrightarrow ax^3+\left(b-d\right)x^2+\left(c-e\right)x+\frac{3}{2}=0.$$

Đặt $h\left(x\right)=ax^3+\left(b-d\right)x^2+\left(c-e\right)x+\dfrac{3}{2}$

Dựa vào đồ thị ta có $h\left(x\right)=ax^3+\left(b-d\right)x^2+\left(c-e\right)x+\dfrac{3}{2}$ có ba nghiệm là $x=-2$; $x=1;x=3$.

Với $x=-2$ ta có $-8a+4\left(b-d\right)-2\left(c-e\right)=-\dfrac{3}{2}$, $\left(1\right)$.

Với $x=1$ ta có $a+\left(b-d\right)+\left(c-e\right)=-\dfrac{3}{2}$, $\left(2\right)$.

Với $x=3$ ta có $27a+9\left(b-d\right)+3\left(c-e\right)=-\dfrac{3}{2}$, $\left(3\right)$.

Từ $(1),(2)$ và (3) ta có $\begin{cases} -8a+4(b-d)-2(c-e)=-\dfrac{3}{2} \\ a+(b-d)+(c-e)=-\dfrac{3}{2} \\ 27a+9(b-d)+3(c-e)=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{4} \\ b-d=-\dfrac{1}{2} \\ c-e=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$.

Hay ta có

$$S=\int_{-2}^{3}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{-2}^{1}\left|\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}\right|\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}\left|\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}\right|\mathrm{d}x=\frac{63}{16}+\frac{4}{3}=\frac{253}{48}.$$

Câu 45: **(Đề Minh Họa 2017)** Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2(x-1)e^x$, trục tung và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox

A. $V=\left(e^2-5\right)\pi$ **B.** $V=(4-2e)\pi$ **C.** $V=e^2-5$ **D.** $V=4-2e$

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm $2(x-1)e^x=0 \Leftrightarrow x=1$

Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox là:

$V=\pi\int_0^1\left[2(x-1)e^x\right]^2dx=4\pi\int_0^1(x-1)^2e^{2x}dx$. Đặt $\begin{cases} u=(x-1)^2 \\ dv=e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=2(x-1)dx \\ v=\dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow V=4\pi(x-1)^2\left.\frac{e^{2x}}{2}\right|_0^1-4\pi\int_0^1 2(x-1)\frac{e^{2x}}{2}dx=4\pi(x-1)^2\left.\frac{e^{2x}}{2}\right|_0^1-4\pi\int_0^1(x-1)e^{2x}dx$$

Gọi $I_1=\int_0^1(x-1)e^{2x}dx$. Đặt $\begin{cases} u=x-1 \Rightarrow du=dx \\ dv=e^{2x}dx \Rightarrow v=\dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow I_1=4\pi(x-1)\left.\frac{e^{2x}}{2}\right|_0^1-4\pi\int_0^1\frac{e^{2x}}{2}dx=2\pi-\pi e^{2x}\Big|_0^1=2\pi-\pi e^2+\pi=3\pi-\pi e^2$$

Vậy $V=4\pi(x-1)^2\left.\dfrac{e^{2x}}{2}\right|_0^1-I_1=-2\pi-\left(3\pi-\pi e^2\right)=\pi\left(e^2-5\right)$.

Câu 46: **(Mã 103 2018)** Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\dfrac{1}{100}t^2+\dfrac{13}{30}t\,(\mathrm{m/s})$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 10 giây so với A và có gia tốc bằng $a\left(\mathrm{m/s^2}\right)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $15\left(\text{m/s}\right)$ **B.** $9\left(\text{m/s}\right)$ **C.** $42\left(\text{m/s}\right)$ **D.** $25\left(\text{m/s}\right)$

Lời giải

Chọn D

Ta có $v_B\left(t\right)=\int a.\text{dt}=at+C$, $v_B\left(0\right)=0\Rightarrow C=0$ $\Rightarrow v_B\left(t\right)=at$.

Quãng đường chất điểm A đi được trong 25 giây là

$$S_A=\int\limits_0^{25}\left(\frac{1}{100}t^2+\frac{13}{30}t\right)\text{dt}=\left.\left(\frac{1}{300}t^3+\frac{13}{60}t^2\right)\right|_0^{25}=\frac{375}{2}.$$

Quãng đường chất điểm B đi được trong 15 giây là

$$S_B=\int\limits_0^{15}at.\text{dt}=\left.\frac{at^2}{2}\right|_0^{15}=\frac{225a}{2}.$$

Ta có $\frac{375}{2}=\frac{225a}{2}\Leftrightarrow a=\frac{5}{3}$.

Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A là $v_B\left(15\right)=\frac{5}{3}.15=25\left(\text{m/s}\right)$.

Câu 47: **(Mã 104 2018)** Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v\left(t\right)=\frac{1}{120}t^2+\frac{58}{45}t\left(m/s\right)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a\left(m/s^2\right)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $21\left(m/s\right)$ **B.** $25\left(m/s\right)$ **C.** $36\left(m/s\right)$ **D.** $30\left(m/s\right)$

Lời giải

Chọn D

Thời điểm chất điểm B đuổi kịp chất điểm A thì chất điểm B đi được 15 giây, chất điểm A đi được 18 giây.

Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng $v_B\left(t\right)=\int a\text{d}t=at+C$ mà $v_B\left(0\right)=0$ nên $v_B\left(t\right)=at$.

Do từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi chất điểm B đuổi kịp thì quãng đường hai chất điểm đi được bằng nhau. Do đó

$$\int_0^{18}\left(\frac{1}{120}t^2+\frac{58}{45}\right)\text{d}t=\int_0^{15}at\text{d}t\Leftrightarrow 225=a.\frac{225}{2}\Leftrightarrow a=2$$

Vậy, vận tốc của chất điểm B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B\left(t\right)=2.15=30\left(m/s\right)$.

Câu 48: **(Đề Minh Họa 2017)** Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 0,2m **B.** 2m **C.** 10m **D.** 20m

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $-5t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 2.$ Do vậy, kể từ lúc người lái đạp phanh thì sau 2s ô tô dừng hẳn.

Quãng đường ô tô đi được kể từ lúc người lái đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn là

$$s = \int_0^2 (-5t + 10)\,dt = \left(-\frac{5}{2}t^2 + 10t\right)\Big|_0^2 = 10m.$$

Câu 49: **(Mã 102 2018)** Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t\,(m/s)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc a bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a\left(m/s^2\right)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $15(m/s)$ **B.** $20(m/s)$ **C.** $16(m/s)$ **D.** $13(m/s)$

Lời giải

Chọn C

Quãng đường chất điểm A đi từ đầu đến khi B đuổi kịp là $S = \int_0^{15}\left(\frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t\right)dt = 96(m)$.

Vận tốc của chất điểm B là $v_B(t) = \int a\,dt = at + C$.

Tại thời điểm $t = 3$ vật B bắt đầu từ trạng thái nghỉ nên $v_B(3) = 0 \Leftrightarrow C = -3a$.

Lại có quãng đường chất điểm B đi được đến khi gặp A là $S_2 = \int_3^{15}(at - 3a)\,dt = \left(\frac{at^2}{2} - 3at\right)\Big|_3^{15} = 72a(m)$.

Vậy $72a = 96 \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}\left(m/s^2\right)$.

Tại thời điểm đuổi kịp A thì vận tốc của B là $v_B(15) = 16(m/s)$.

Câu 50: **(Mã 101 2018)** Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{180}t^2 + \frac{11}{18}t\,(m/s)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 5 giây so với A và có gia tốc bằng $a\left(m/s^2\right)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $15\left(m/s\right)$ **B.** $10\left(m/s\right)$ **C.** $7\left(m/s\right)$ **D.** $22\left(m/s\right)$

Lời giải

Chọn A

Thời gian tính từ khi A xuất phát đến khi bị B đuổi kịp là 15 giây, suy ra quãng đường đi được tới lúc đó là $\int\limits_0^{15} v(t)\mathrm{d}t = \int\limits_0^{15}\left(\frac{1}{180}t^2+\frac{11}{18}t\right)\mathrm{d}t = \left(\frac{1}{540}t^3+\frac{11}{36}t^2\right)\Bigg|_0^{15} = 75\left(m\right)$.

Vận tốc của chất điểm B là $y\left(t\right)=\int a.\mathrm{d}t = a.t+C$ (C là hằng số); do B xuất phát từ trạng thái nghỉ nên có $y\left(0\right)=0 \Leftrightarrow C=0$;

Quãng đường của B từ khi xuất phát đến khi đuổi kịp A là

$$\int\limits_0^{10} y(t)\mathrm{d}t = 75 \Leftrightarrow \int\limits_0^{10} a.t\mathrm{d}t = 75 \Leftrightarrow \frac{a.t^2}{2}\Bigg|_0^{10} = 75 \Leftrightarrow 50a = 75 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$$

Vậy có $y\left(t\right)=\frac{3t}{2}$; suy ra vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $y\left(10\right)=15\left(m/s\right)$.

Câu 51: **(Mã 105 2017)** Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{2}t^3+6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật đó bắt đầu chuyển động và $s\left(\mathrm{m}\right)$ là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. $18\left(\mathrm{m/s}\right)$ **B.** $108\left(\mathrm{m/s}\right)$ **C.** $64\left(\mathrm{m/s}\right)$ **D.** $24\left(\mathrm{m/s}\right)$

Lời giải

Chọn B

Vận tốc của vật chuyển động là $v=s'=-\frac{3}{2}t^2+12t=f\left(t\right)$

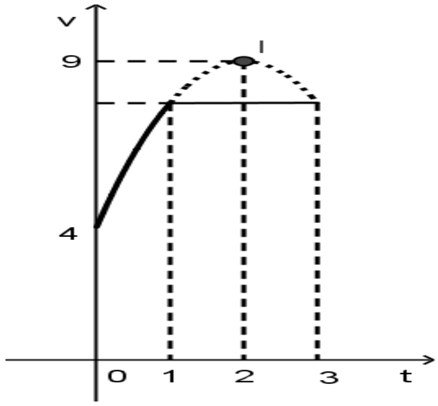
Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(t\right)$ trên đoạn $\left[0;6\right]$

Ta có $f'\left(t\right)=-3t+12 \Rightarrow f'\left(t\right)=0 \Leftrightarrow t=4\in\left[0;6\right]$

$f\left(0\right)=0; f\left(4\right)=24; f\left(6\right)=18$

Vậy vận tốc lớn nhất là $24\left(\mathrm{m/s}\right)$.

Câu 52: **(Mã 123 2017)** Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật chuyển động được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



A. $s = 21,58(km)$ **B.** $s = 23,25(km)$ **C.** $s = 13,83(km)$ **D.** $s = 15,50(km)$

Lời giải

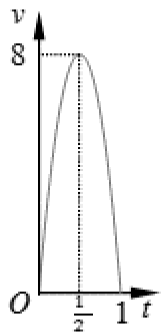
Chọn A

Gọi phương trình của parabol $v = at^2 + bt + c$ ta có hệ như sau: $\begin{cases} c = 4 \\ 4a + 2b + c = 9 \\ -\dfrac{b}{2a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 \\ c = 4 \\ a = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$

Với $t = 1$ ta có $v = \dfrac{31}{4}$.

Vậy quãng đường vật chuyển động được là $s = \int_0^1 \left(-\dfrac{5}{4}t^2 + 5t + 4 \right) dt + \int_1^3 \dfrac{31}{4} dt = \dfrac{259}{12} \approx 21,583$

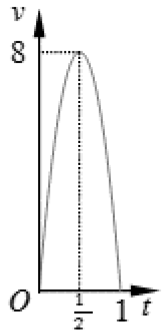
Câu 53: **(Mã 104 2017)** Một người chạy trong thời gian 1 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị là một phần parabol với đỉnh $I\left(\dfrac{1}{2};\ 8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quảng đường s người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi chạy?



A. $s = 2,3$ (km) **B.** $s = 4,5$ (km) **C.** $s = 5,3$ (km) **D.** $s = 4$ (km)

Lời giải

Chọn B



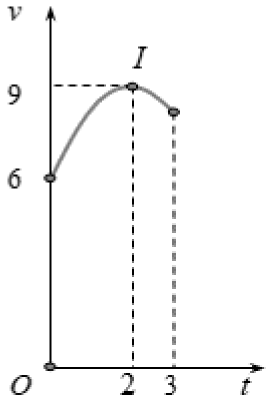
Gọi parabol là $(P): y = ax^2 + bx + c$. Từ hình vẽ ta có (P) đi qua $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 0)$ và điểm $I\left(\frac{1}{2};\ 8\right)$.

Ta có hệ: $\begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -32 \\ b = 32 \\ c = 0 \end{cases}$.

Suy ra $(P): y = -32x^2 + 32x$.

Vậy quảng đường người đó đi được là $s = \int_0^{\frac{3}{4}} \left(-32x^2 + 32x\right) \mathrm{d}x = 4,5$ (km).

Câu 54: **(Mã 110 2017)** Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



A. $s = 25,25(\text{km})$ **B.** $s = 24,25(\text{km})$ **C.** $s = 24,75(\text{km})$ **D.** $s = 26,75(\text{km})$

Lời giải

Chọn C

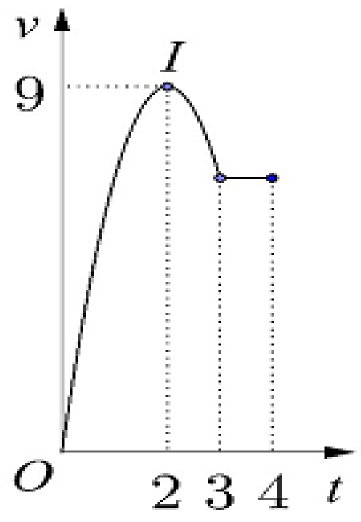
Gọi $v(t)=a.t^2+bt+c$.

Đồ thị $v(t)$ là một phần parabol có đỉnh $I(2;9)$ và đi qua điểm $A(0;6)$ nên

$$\begin{cases}\dfrac{-b}{2a}=2\\ a.2^2+b.2+c=9\\ a.0^2+b.0+c=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{-3}{4}\\ b=3\\ c=6\end{cases}$$. Tìm được $v(t)=-\dfrac{3}{4}t^2+3t+6$

Vậy $S=\int\limits_0^3\left(-\dfrac{3}{4}t^2+3t+6\right)dt=24,75$ (km)

Câu 55: **(Mã 105 2017)** Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó.



A. $s=24$ (km) **B.** $s=28,5$ (km) **C.** $s=27$ (km) **D.** $s=26,5$ (km)

Lời giải

Chọn B

Gọi $(P): y=ax^2+bx+c$.

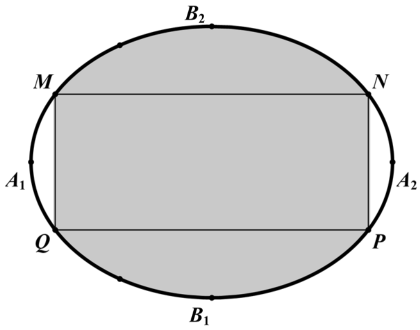
Vì (P) qua $O(0;0)$ và có đỉnh $I(2;9)$ nên dễ tìm được phương trình là $y=\dfrac{-9}{4}x^2+9x$.

Ngoài ra tại $x=3$ ta có $y=\dfrac{27}{4}$

Vậy quãng đường cần tìm là: $S=\int\limits_0^3\left(\dfrac{-9}{4}x^2+9x\right)dx+\int\limits_3^4\dfrac{27}{4}dx=27\ (km)$.

Câu 56: **(Đề Tham Khảo 2019)** Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1,A_2,B_1,B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí để sơn phần tô đậm là 200.000 vnđ/m^2 và phần còn lại

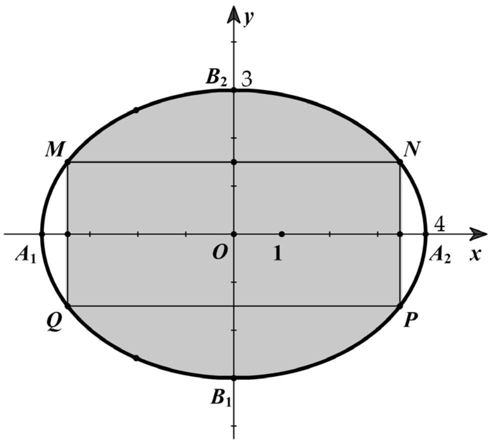
$100.000\ \text{vnđ}/\text{m}^2$. Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8\text{m}$, $B_1B_2 = 6\text{m}$ và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 3\text{m}$?



A. 5.526.000 đồng. **B.** 5.782.000 đồng **C.** 7.322.000 đồng. **D.** 7.213.000 đồng.

Lời giải

Chọn C



Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Với $\begin{cases} A_1A_2 = 8 = 2a \\ B_1B_2 = 6 = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \to (E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow y = \pm\frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$.

Suy ra diên tích của hình elip là $S_{(E)} = \pi a.b = 12\pi\ (\text{m}^2)$.

Vì $MNPQ$ là hình chữ nhật và $MQ = 3 \to M\left(x; \frac{3}{2}\right) \in (E)$

$\Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow x^2 = 12 \to M\left(-2\sqrt{3}; \frac{3}{2}\right); N\left(2\sqrt{3}; \frac{3}{2}\right)$

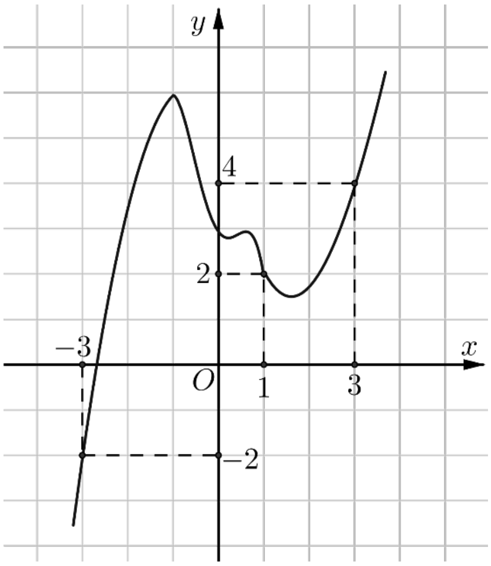
Gọi $S_1; S_2$ lần lượt là diện tích phần bị tô màu và không bị tô màu

Ta có: $S_2 = 4.\frac{3}{4}\int\limits_{2\sqrt{3}}^{4} \sqrt{16 - x^2}\,\text{d}x = 3\int\limits_{2\sqrt{3}}^{4} \sqrt{16 - x^2}\,\text{d}x \xrightarrow{x = 4\sin t} S_2 = 4\pi - 6\sqrt{3}\ (\text{m}^2)$

Suy ra: $S_1 = S_{(E)} - S_2 = 8\pi + 6\sqrt{3}$. Gọi T là tổng chi phí. Khi đó ta có

$T = \left(4\pi - 6\sqrt{3}\right).100 + \left(8\pi + 6\sqrt{3}\right).200 \simeq 7.322.000$ (đồng).

Câu 57: **(Mã 110 B 2017)** Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(1) > g(-3) > g(3)$ **B.** $g(1) > g(3) > g(-3)$

C. $g(3) > g(-3) > g(1)$ **D.** $g(-3) > g(3) > g(1)$

Lời giải

Chọn B

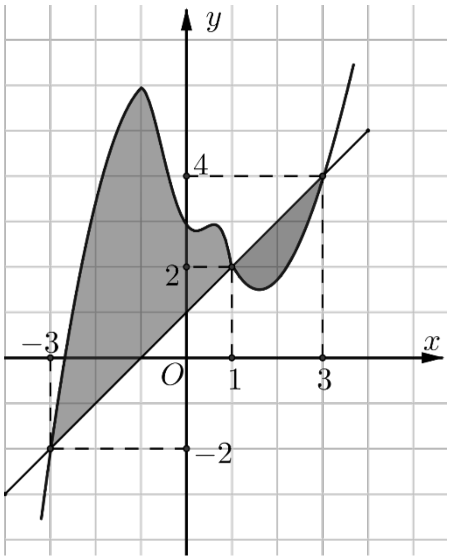
Ta có $g'(x) = 2f'(x) - 2(x+1)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \pm 3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-\infty$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(-3)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$g(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra $g(-3) < g(1)$ và $g(3) < g(1)$. (1)



Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = f'(x),\ y = x+1,\ x=-3,\ x=1$

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = x+1,\ y = f'(x),\ x=1,\ x=3$

Dựa vào hình vẽ, ta thấy: $S_1 > S_2 > 0$.

Suy ra: $S_1 - S_2 > 0$

$$\Rightarrow \int_{-3}^{1}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x - \int_{1}^{3}\left[(x+1)-f'(x)\right]\mathrm{d}x > 0$$

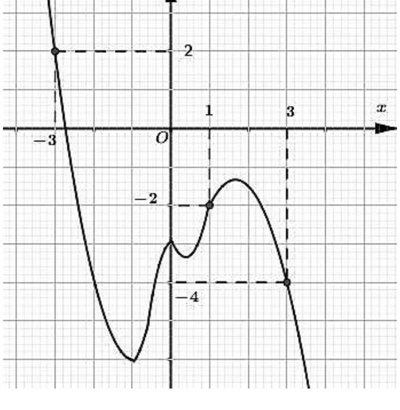
$$\Rightarrow \int_{-3}^{1}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x + \int_{1}^{3}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x > 0$$

$$\Rightarrow \int_{-3}^{3}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x > 0.$$

Khi đó: $g(3)-g(-3)=\int_{-3}^{3}g'(x)\mathrm{d}x = 2\int_{-3}^{3}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x > 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $g(1) > g(3) > g(-3)$.

Câu 58: **(Mã 105 2017)** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị $y=f'(x)$ của hàm số như hình bên. Đặt $g(x)=2f(x)+x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(3)<g(-3)<g(1)$ **B.** $g(1)<g(-3)<g(3)$

C. $g(-3)<g(3)<g(-1)$ **D.** $g(1)<g(3)<g(-3)$

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=2f'(x)+2x \Rightarrow g'(x)=0 \Rightarrow x\in\{-3;1;3\}$.

Từ đồ thị của $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm $g(x)$.

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g(-3)$	$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	$g(3)$	$\searrow$	$-\infty$

Suy ra $g(3)>g(1)$.

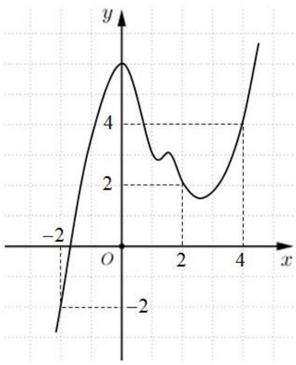
Kết hợp với BBT ta có:

$$\int_{-3}^{1}\left(-g'(x)\right)\mathrm{d}x>\int_{1}^{3}g'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_{1}^{-3}g'(x)\mathrm{d}x>\int_{1}^{3}g'(x)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow g(-3)-g(1)>g(3)-g(1)\Leftrightarrow g(-3)>g(3)$$

Vậy ta có $g(-3)>g(3)>g(1)$.

Câu 59: **(Mã 123 2017)** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $h(x)=2f(x)-x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $h(4)=h(-2)<h(2)$ **B.** $h(2)>h(-2)>h(4)$

C. $h(4)=h(-2)>h(2)$ **D.** $h(2)>h(4)>h(-2)$

Lời giải

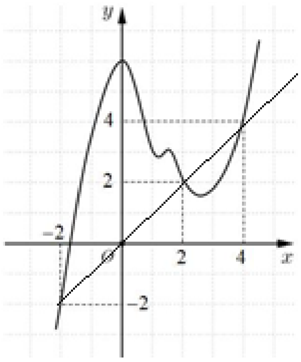
Chọn D

Ta có $h'(x)=2\left[f'(x)-x\right]; h'(x)=0 \Rightarrow x\in\{-2;2;4\}$.

Bảng biến thiên

x		-2		2		4	
$h'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$h(x)$	$\searrow$	$h(-2)$	$\nearrow$	$h(2)$	$\searrow$	$h(4)$	$\nearrow$

Suy ra $h(2)>h(4)$.

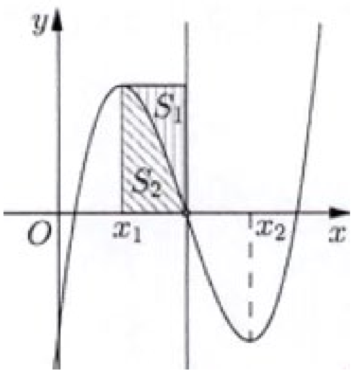


Kết hợp với đồ thị hàm số y=x ta có

$\int_{-2}^{4} h'(x)\mathrm{d}x>0 \Leftrightarrow h(4)-h(-2)>0 \Leftrightarrow h(4)>h(-2)$.

Vậy ta có $h(2)>h(4)>h(-2)$.

Câu 60: **(TK 2020-2021)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2=x_1+2$ và $f(x_1)+f(x_2)=0$. Gọi điểm S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Rõ ràng kết quả bài toán không đổi nếu ta tịnh tiến đồ thị sang trái cho điểm uốn trùng gốc tọa độ O.

Gọi $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ là hàm số khi đó thì dễ thấy $g(x)$ lẻ nên có ngay $b=d=0$ và $g(x)=ax^3+cx$ có hai điểm cực trị tương ứng là $-1,1,$ cũng là nghiệm của $3ax^2+c=0.$

Từ đó dễ dàng có $g(x)=k(x^3-3x)$ với $k>0.$

Xét diện tích hình chữ nhật $S_1+S_2=|(-1)\cdot g(-1)|=2k.$ Ngoài ra,

$$S_2=k\int_{-1}^{0}\left|x^3-3x\right|\mathrm{d}x=\frac{5}{4}k.$$

Vì thế $S_1=2k-\dfrac{5k}{4}=\dfrac{3k}{4}$ và $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{3}{5}.$

Câu 61: **(MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3+ax^2+bx+c$ với a,b,c là các số thực. Biết hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)+f'\left(x\right)+f''\left(x\right)$ có hai giá trị cực trị là -3 và 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)+6}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln 3$. **B.** $\ln 3$. **C.** $\ln 18$. **D.** $2\ln 2$.

Lời giải

Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)+f'\left(x\right)+f''\left(x\right)$

Ta có $g'\left(x\right)=f'\left(x\right)+f''\left(x\right)+f'''\left(x\right)=f'\left(x\right)+f''\left(x\right)+6$.

Theo giả thiết ta có phương trình $g'\left(x\right)=0$ có hai nghiệm m,n và $\begin{cases}g\left(m\right)=-3\\ g\left(n\right)=6\end{cases}$.

Xét phương trình $\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)+6}=1\Rightarrow g\left(x\right)+6-f\left(x\right)=0\Leftrightarrow f'\left(x\right)+f''\left(x\right)+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\ x=n\end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$S=\left|\int_m^n\left(1-\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)+6}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_m^n\frac{g\left(x\right)+6-f\left(x\right)}{g\left(x\right)+6}\mathrm{d}x\right|=\left|\int_m^n\frac{f'\left(x\right)+f''\left(x\right)+6}{g\left(x\right)+6}\mathrm{d}x\right|=\left|\int_m^n\frac{g'\left(x\right)}{g\left(x\right)+6}\mathrm{d}x\right|$$

$$=\left|\ln\left|g\left(x\right)+6\right|\Big|_m^n\right|=\left|\ln\left|g\left(n\right)+6\right|-\ln\left|g\left(m\right)+6\right|\right|=\left|\ln 12-\ln 3\right|=\ln 4=2\ln 2.$$

Câu 62: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3+ax^2+bx+c$ với $a,\ b,\ c$ là các số thực. Biết hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)+f'\left(x\right)+f''\left(x\right)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)+6}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln 3$. **B.** $\ln 2$. **C.** $\ln 15$. **D.** $3\ln 2$.

Lời giải

Ta có: $g\left(x\right)=f\left(x\right)+f'\left(x\right)+f''\left(x\right)\Rightarrow g'\left(x\right)=f'\left(x\right)+f''\left(x\right)+f'''\left(x\right)$.

Lại có $f'''\left(x\right)=6\Rightarrow g'\left(x\right)=f'\left(x\right)+f''\left(x\right)+6$.

Chú ý rằng $g(x)$ là hàm số bậc 3 có hệ số của x^3 là số dương (bằng 1), có hai giá trị cực trị nên $g'(x)$ có hai nghiệm x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) với x_1 là điểm cực đại, x_2 là điểm cực tiểu.

Khi đó từ giả thiết ta có $g(x_1)=3$, $g(x_2)=-5$ và với mọi $x \in (x_1;x_2)$ thì $g'(x)<0$, $g(x)+6>0$. (*)

Phương trình hoành độ giao điểm của các đường $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ là

$$\frac{f(x)}{g(x)+6}=1 \Leftrightarrow g(x)+6-f(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)+f''(x)+6=0 \text{ hay } g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2 \end{array}\right..$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng

$$S=\int_{x_1}^{x_2}\left|1-\frac{f(x)}{g(x)+6}\right|dx=\int_{x_1}^{x_2}\left|\frac{g(x)+6-f(x)}{g(x)+6}\right|dx=\int_{x_1}^{x_2}\left|\frac{g'(x)}{g(x)+6}\right|dx.$$

Sử dụng (*) ta được

$$S=\int_{x_1}^{x_2}\left(-\frac{g'(x)}{g(x)+6}\right)dx=-\ln\left|g(x)+6\right|\Big|_{x_1}^{x_2}=-\ln\frac{g(x_2)+6}{g(x_1)+6}=-\ln\frac{-5+6}{3+6}=2\ln 3.$$

Câu 63: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a,b,c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng

A. $\ln 3$. **B.** $3\ln 2$. **C.** $\ln 10$. **D.** $\ln 7$.

Lời giải

Ta có: $g'(x)=f'(x)+f''(x)+f'''(x)=f'(x)+f''(x)+6$.

Gọi x_1,x_2 $(x_1<x_2)$ là hai điểm cực trị của hàm số $g(x)$.

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ nên $g(x_1)=2, g(x_2)=-5$

Ta có: $\dfrac{f(x)}{g(x)+6}=1 \Leftrightarrow g(x)-f(x)+6=0 \Leftrightarrow f'(x)+f''(x)+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2 \end{array}\right.$

Khi đó diện tích hình phẳng bởi đường $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ là:

$$S=\int_{x_1}^{x_2}\left|\frac{f(x)}{g(x)+6}-1\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{x_1}^{x_2}\frac{f'(x)+f''(x)+6}{g(x)+6}\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}\frac{g'(x)}{g(x)+6}\mathrm{d}x\right|=\left|\ln\left|g(x)+6\right|\Big|_{x_1}^{x_2}\right|=3\ln 2$$

Câu 64: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hai hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+x$ và $g(x)=mx^3+nx^2-2x$ với $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f(x)-g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1,2,3$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng

A. $\frac{32}{3}$. **B.** $\frac{16}{3}$. **C.** $\frac{71}{12}$. **D.** $\frac{71}{6}$.

Lời giải

Vì hàm số $y=f(x)-g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1,2,3$ nên hàm số $y'=f'(x)-g'(x)=4ax^3+3(b-m)x^2+2(c-n)x+3$ có ba nghiệm là $-1,2,3$. Suy ra, tồn tại số thực k để $y'=k(x+1)(x-2)(x-3)$.

Ta có $f'(0)=3$ nên $k=\frac{1}{2}$. Do đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng: $\int_{-1}^{3}|y'(x)|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{3}\left|\frac{1}{2}(x+1)(x-2)(x-3)\right|\mathrm{d}x=\frac{71}{12}$.

Câu 65: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+3x$ và hàm số $g(x)=mx^3+nx^2-x$; với $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f(x)-g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1;2$ và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng

A. $\frac{32}{3}$. **B.** $\frac{71}{9}$. **C.** $\frac{71}{6}$. **D.** $\frac{64}{9}$.

Lời giải

Vì hàm số bậc bốn $y=f(x)-g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1;2$ và 3 nên phương trình hàm số $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt $-1;2$ và 3.

Hay

$$f'(x)-g'(x)=A(x+1)(x-2)(x-3)$$

$$\Leftrightarrow 4ax^3+3(b-m)x^2+2(c-n)x+4=A(x+1)(x-2)(x-3)$$

Đồng nhất thức hệ số tự do ta thấy $4=6A\Leftrightarrow A=\frac{2}{3}$

Công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng

$$S=\int_{-1}^{3}|f'(x)-g'(x)|dx=\int_{-1}^{3}\left|\frac{2}{3}(x+1)(x-2)(x-3)\right|dx$$

$$=\int_{-1}^{2}\left|\frac{2}{3}(x+1)(x-2)(x-3)\right|dx+\int_{2}^{3}\left|\frac{2}{3}(x+1)(x-2)(x-3)\right|dx$$

$$=\left|\int_{-1}^{2}\frac{2}{3}(x+1)(x-2)(x-3)dx\right|+\left|\int_{2}^{3}\frac{2}{3}(x+1)(x-2)(x-3)dx\right|$$

$$= \frac{15}{2} + \frac{7}{18} = \frac{71}{9}$$

CHƯƠNG III — NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN – ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

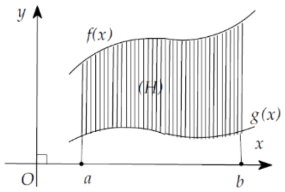
BÀI 3. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

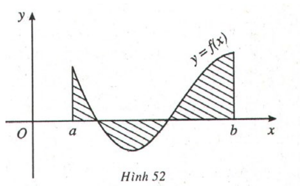
III. HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

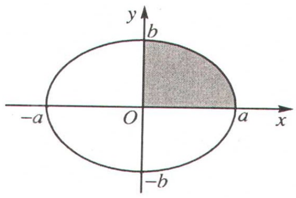
DẠNG 1. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH DIỆN TÍCH

① *Hình phẳng* (H) *giới hạn bởi* $\begin{cases}(C_1): y = f(x)\\(C_2): y = g(x)\\x = a,\ x = b\ (a < b)\end{cases}$ *thì diện tích là* $\boxed{S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x}$.

Hình phẳng (H) *giới hạn bởi* $\begin{cases}(C_1): y = f(x)\\(C_2): Ox: y = 0\\x = a,\ x = b\ (a < b)\end{cases}$ *thì diện tích là* $\boxed{S = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x}$.







$\downarrow$

$\boxed{S_{\text{elip}} = \pi ab.}$

$(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

② ***Hình thức đề thường hay cho***

<u>Hình thức 1</u>: Không cho hình vẽ, cho dạng $(H): \{y = f(x),\ y = g(x),\ x = a,\ x = b\ (a < b)\}$

$\xrightarrow{\text{casio}} \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x =$ *kết quả, so sánh với bốn đáp án.*

<u>Hình thức 2</u>: Không cho hình vẽ, cho dạng $(H): \{y = f(x),\ y = g(x)\}$

Giải $f(x) = g(x)$ *tìm nghiệm* $x_1, \dots, x_i$, *với* x_1 *nhỏ nhất,* x_i *lớn nhất* $\xrightarrow{\text{casio}} \int_{x_1}^{x_i} |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x.$

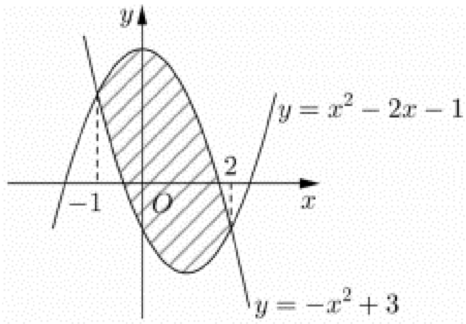
<u>Hình thức 3</u>: Cho hình vẽ, sẽ giải phương trình tìm tọa độ giao điểm , chia từng diện tích nhỏ, xổ hình từ trên xuống, ghi công thức và bấm máy tính.

<u>Hình thức 4</u>: Cho ba hàm trở lên, chẳng hạn $y = f(x),\ y = g(x),\ y = h(x)$ *ta nên vẽ hình.*

Câu 1: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,\ x=b$ được tính theo công thức

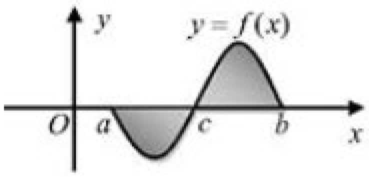
A. $S=\int\limits_a^b\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$. **C.** $S=-\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int\limits_b^a\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$.

Câu 2: Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int\limits_{-1}^{2}\left(2x^2-2x-4\right)\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_{-1}^{2}\left(2x^2+2x-4\right)\mathrm{d}x$. **C.** $\int\limits_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_{-1}^{2}\left(-2x^2-2x+4\right)\mathrm{d}x$.

Câu 3: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, trục hoành, đường thẳng $x=a,x=b$. Hỏi cách tính S nào dưới đây đúng?



A. $S=\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$.

B. $S=\left|\int\limits_a^c f\left(x\right)dx+\int\limits_c^b f\left(x\right)dx\right|$.

C. $S=-\int\limits_a^c f\left(x\right)dx+\int\limits_c^b f\left(x\right)dx$.

D. $S=\int\limits_a^c f\left(x\right)dx+\int\limits_c^b f\left(x\right)dx$.

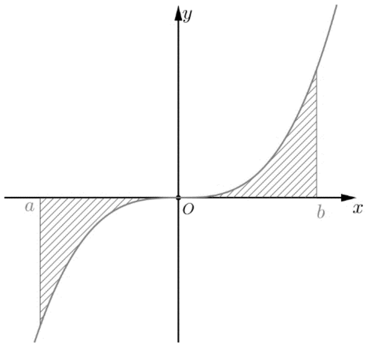
Câu 4: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số: $y=x^3-3x$, $y=x$. Tính S.

A. $S=4$. **B.** $S=8$. **C.** $S=2$. **D.** $S=0$.

Câu 5: Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=3^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\int\limits_0^2 3^x dx$. **B.** $S=\pi\int\limits_0^2 3^{2x} dx$. **C.** $S=\pi\int\limits_0^2 3^x dx$. **D.** $S=\int\limits_0^2 3^{2x} dx$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$. Gọi D là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $\left(C\right):y=f\left(x\right)$, trục hoành, hai đường thẳng $x=a$, $x=b$. Giả sử S_D là diện tích hình phẳng D. đúng trong các phương án A, B, C, D cho dưới đây?



A. $S_D=\int\limits_a^0 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_0^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

B. $S_D=-\int\limits_a^0 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_0^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

C. $S_D=\int\limits_a^0 f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_0^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

D. $S_D=-\int\limits_a^0 f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_0^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Câu 7: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\left(x-2\right)^2-1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1,x=2$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

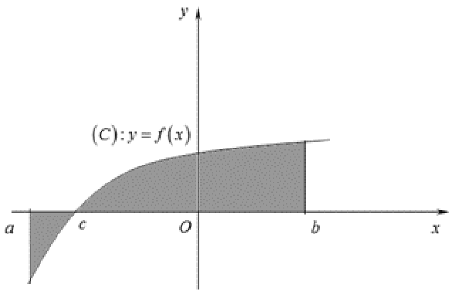
Câu 8: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ và các đường thẳng $x=a$, $x=b$ bằng

A. $\left|\int\limits_a^b\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x\right|$. **B.** $\int\limits_a^b\left|f(x)+g(x)\right|\mathrm{d}x$. **C.** $\int\limits_a^b\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_a^b\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$.

Câu 9: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=4x-x^2$ và trục Ox

A. 11. **B.** $\frac{34}{3}$. **C.** $\frac{31}{3}$. **D.** $\frac{32}{3}$.

Câu 10: Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $\left(a<b\right)$ tính theo công thức nào dưới đây ?



A. $S=\int\limits_a^c f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

C. $S=-\int\limits_a^c f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

D. $S=\left|\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x\right|$.

Câu 11: Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+1,x=-1,x=2$ và trục hoành.

A. $S=6$. **B.** $S=16$. **C.** $S=\frac{13}{6}$. **D.** $S=13$.

Câu 12: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+5$, $y=6x$, $x=0$, $x=1$. Tính S.

A. $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{7}{3}$ **C.** $\frac{8}{3}$ **D.** $\frac{5}{3}$

Câu 13: Gọi diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(C): y=\frac{-3x-1}{x-1}$ và hai trục tọa độ là S. Tính S?

A. $S=1-\ln\frac{4}{3}$ **B.** $S=4\ln\frac{4}{3}$ **C.** $S=4\ln\frac{4}{3}-1$ **D.** $S=\ln\frac{4}{3}-1$

Câu 14: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=x^2; y=0; x=1; x=2$ bằng

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{7}{3}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** 1.

Câu 15: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $(H): y=\frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng

A. $2\ln 2-1$. **B.** $\ln 2+1$. **C.** $\ln 2-1$. **D.** $2\ln 2+1$.

Câu 16: Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{\ln x}{x^2}$, $y=0$, $x=1$, $x=e$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\pi\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$. **C.** $S=\int_1^e \left(\frac{\ln x}{x^2}\right)^2\mathrm{d}x$. **D.** $S=\pi\int_1^e \left(\frac{\ln x}{x^2}\right)^2\mathrm{d}x$

Câu 17: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=-x^2+2x+1$, $y=2x^2-4x+1$ là

A. 8. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 10.

Câu 18: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y=x^2+2x$, $y=x+2$.

A. $\frac{7}{2}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{11}{2}$.

Câu 19: Hình phẳng (H) được giới hạn bởi các đường $y=x^2$, $y=3x-2$. Tính diện tích hình phẳng (H)

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** 1 **D.** $\frac{1}{6}$

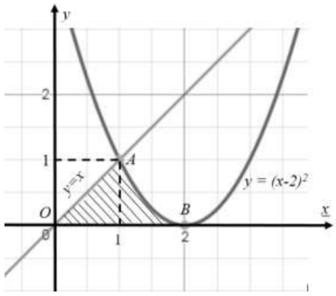
Câu 20: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=\ln x$, $y=1$ và đường thẳng $x=1$ bằng

A. e^2. **B.** $e+2$. **C.** $2e$. **D.** $e-2$.

Câu 21: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=4x-x^2$ và đường thẳng $y=2x$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{20}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{16}{3}$

Câu 22: Tính diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên.

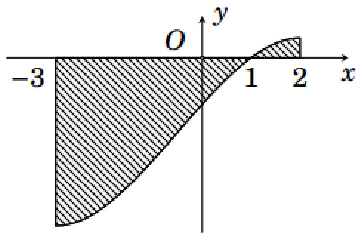


A. $\frac{5}{6}$. **B.** $\frac{5\pi}{6}$. **C.** $\frac{8}{15}$. **D.** $\frac{8\pi}{15}$.

Câu 23: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-2x$, $y=0$, $x=-10$, $x=10$.

A. $S=\frac{2000}{3}$. **B.** $S=2008$. **C.** $S=2000$. **D.** $S=\frac{2008}{3}$.

Câu 24: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-3$, $x=2$. Đặt $a=\int\limits_{-3}^{1} f(x)\mathrm{d}x$, $b=\int\limits_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng.



A. $S=a+b$. **B.** $S=a-b$. **C.** $S=-a-b$. **D.** $S=b-a$.

Câu 25: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$ và đường thẳng $y=2x$ là :

A. $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{5}{3}$ **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** $\frac{23}{15}$

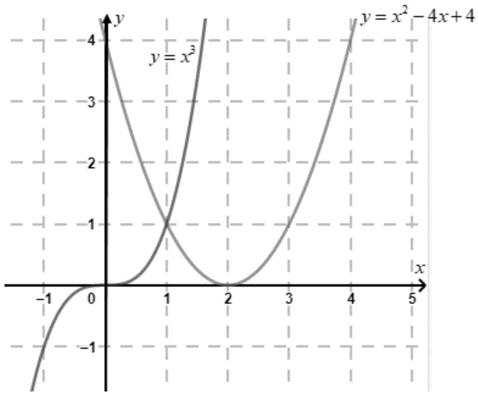
Câu 26: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=-x^2+2x+1$, $y=2x^2-4x+1$ là

A. 8 **B.** 5 **C.** 4 **D.** 10

Câu 27: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S là

A. $S=1+\ln 2$. **B.** $S=2\ln 2-1$. **C.** $S=2\ln 2+1$. **D.** $S=\ln 2-1$.

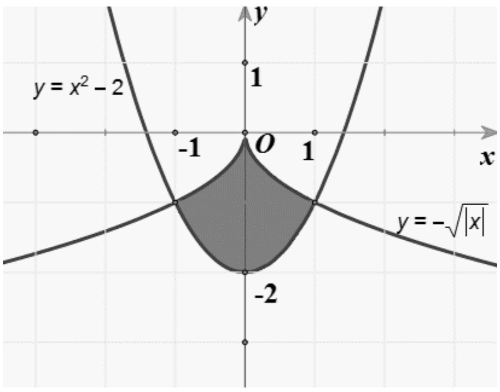
Câu 28: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = x^3$, $y = x^2 - 4x + 4$ và trục Ox được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int\limits_0^2 \left| x^3 - \left(x^2 - 4x + 4\right) \right| \mathrm{d}x$.
B. $-\int\limits_0^1 x^3 \mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \left(x^2 - 4x + 4\right) \mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_0^1 x^3 \mathrm{d}x - \int\limits_1^2 \left(x^2 - 4x + 4\right) \mathrm{d}x$.
D. $\int\limits_0^1 x^3 \mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \left(x^2 - 4x + 4\right) \mathrm{d}x$.

Câu 29: Diện tích phần hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int\limits_{-1}^1 \left(x^2 - 2 + \sqrt{|x|}\right) \mathrm{d}x$.
B. $\int\limits_{-1}^1 \left(x^2 - 2 - \sqrt{|x|}\right) \mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_{-1}^1 \left(-x^2 + 2 + \sqrt{|x|}\right) \mathrm{d}x$.
D. $\int\limits_{-1}^1 \left(-x^2 + 2 - \sqrt{|x|}\right) \mathrm{d}x$.

Câu 30: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x \ln x$, trục hoành và đường thẳng $x = e$ là

A. $\frac{e^2 - 1}{2}$. **B.** $\frac{e^2 + 1}{2}$. **C.** $\frac{e^2 - 1}{4}$. **D.** $\frac{e^2 + 1}{4}$.

Câu 31: Giá trị dương của tham số m sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 2x + 3$ và các đường thẳng $y = 0, x = 0, x = m$ bằng 10 là

A. $m = \frac{7}{2}$. **B.** $m = 5$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 1$.

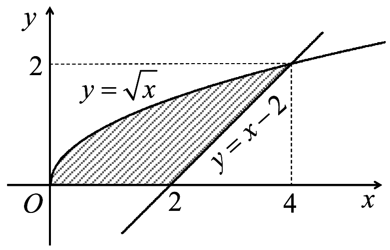
Câu 32: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 7 - 4x^3 \ khi \ 0 \le x \le 1 \\ 4 - x^2 \ khi \ x > 1 \end{cases}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và các đường thẳng $x = 0, x = 3, y = 0$.

A. $\frac{16}{3}$. **B.** $\frac{20}{3}$. **C.** 10. **D.** 9.

Câu 33: Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường cong $y = -x^3 + 12x$ và $y = -x^2$.

A. $S=\dfrac{937}{12}$ **B.** $S=\dfrac{343}{12}$ **C.** $S=\dfrac{793}{4}$ **D.** $S=\dfrac{397}{4}$

Câu 34: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, $y=x-2$ và trục hoành. Diện tích của (H) bằng



A. $\dfrac{7}{3}$. **B.** $\dfrac{8}{3}$. **C.** $\dfrac{10}{3}$. **D.** $\dfrac{16}{3}$.

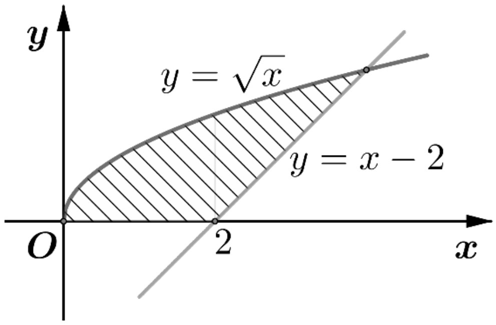
Câu 35: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=x^2+x-1$ và $y=x^4+x-1$ là

A. $\dfrac{8}{15}$. **B.** $\dfrac{7}{15}$. **C.** $\dfrac{2}{5}$. **D.** $\dfrac{4}{15}$.

Câu 36: Gọi S là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(H): y=\dfrac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng

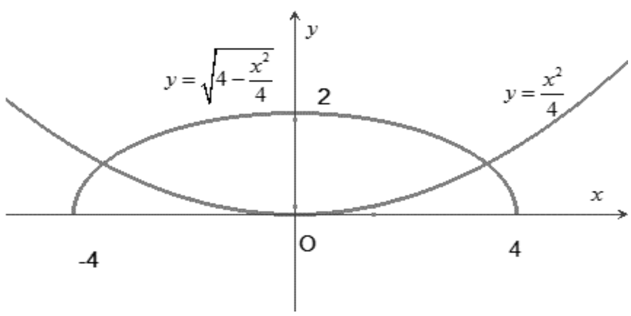
A. $S=\ln 2+1$. **B.** $S=2\ln 2+1$. **C.** $S=\ln 2-1$. **D.** $S=2\ln 2-1$.

Câu 37: Tính diện tích của phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ sau:



A. $\dfrac{10}{3}$. **B.** 4. **C.** $\dfrac{13}{3}$. **D.** $\dfrac{11}{3}$.

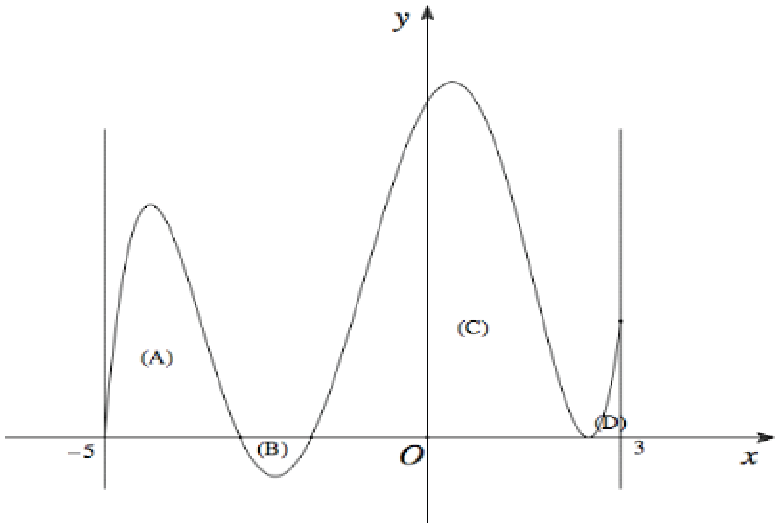
Câu 38: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi parabol $y=\dfrac{x^2}{12}$ và đường cong có phương trình $y=\sqrt{4-\dfrac{x^2}{4}}$



Diện tích hình phẳng (H) bằng:

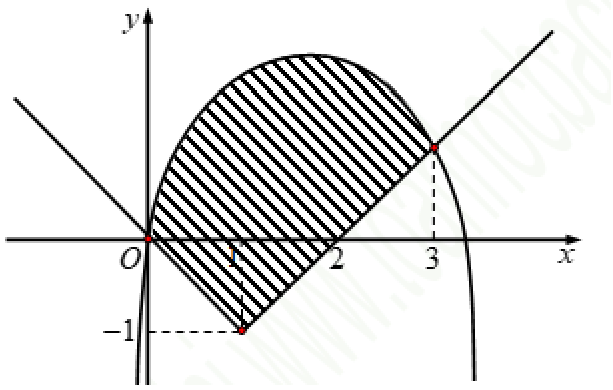
A. $\dfrac{2\left(4\pi+\sqrt{3}\right)}{3}$ **B.** $\dfrac{4\pi+\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\dfrac{4\pi+\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}+\pi}{6}$

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5;3]$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết diện tích của hình phẳng $(A), (B), (C), (D)$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành lần lượt là $6;\ 3;\ 12;\ 2$. Tính tích phân $\int_{-3}^{1}\left[2f(2x+1)+1\right]dx$ bằng



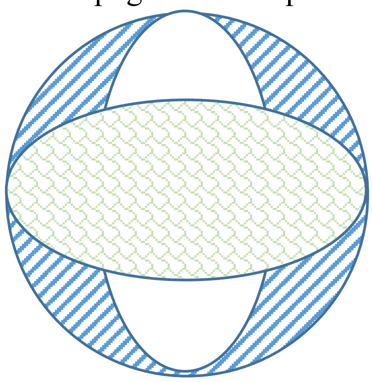
A. 27. **B.** 25. **C.** 17. **D.** 21.

Câu 40: Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ và được giới hạn bởi các đường có phương trình $y = \frac{10}{3}x - x^2$, $y = \begin{cases} -x & \text{khi } x \le 1 \\ x-2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Diện tích của (H) bằng?



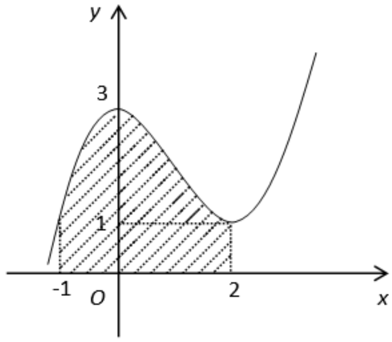
A. $\frac{11}{6}$. **B.** $\frac{13}{2}$. **C.** $\frac{11}{2}$. **D.** $\frac{14}{3}$.

Câu 41: Cho đường tròn có đường kính bằng 4 và 2 Elip lần lượt nhận 2 đường kính vuông góc nhau của đường tròn làm trục lớn, trục bé của mỗi Elip đều bằng 1. Diện tích S phần hình phẳng ở bên trong đường tròn và bên ngoài 2 Elip gần với kết quả nào nhất trong 4 kết quả dưới đây?



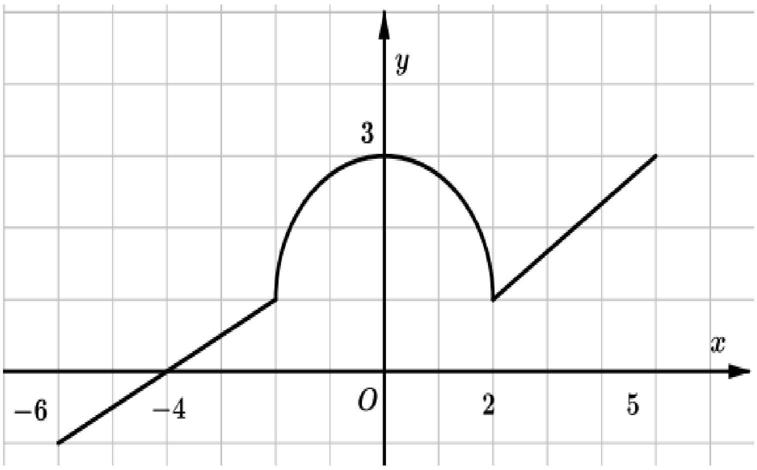
A. $S = 4,8$. **B.** $S = 3,9$. **C.** $S = 3,7$. **D.** $S = 3,4$.

Câu 42: Tính diện tích S của miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ và trục hoành cho trong hình dưới đây.



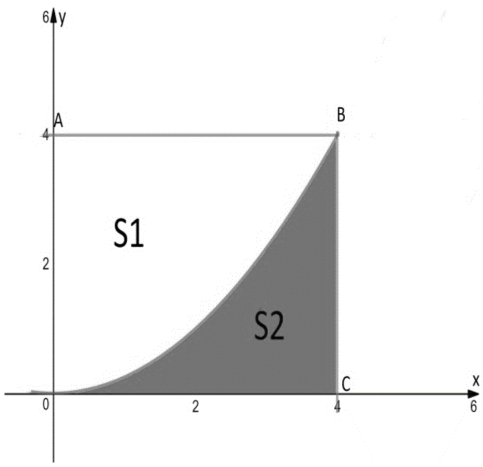
A. $S = \frac{51}{8}$. **B.** $S = \frac{52}{8}$. **C.** $S = \frac{50}{8}$. **D.** $S = \frac{53}{8}$.

Câu 43: Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[-6; 5]$, có đồ thị gồm 2 đoạn thẳng và nửa đường tròn như hình vẽ. Tính giá trị $I = \int_{-6}^{5} [f(x) + 2] dx$.



A. $I = 2\pi + 35$. **B.** $I = 2\pi + 34$. **C.** $I = 2\pi + 33$. **D.** $I = 2\pi + 32$.

Câu 44: Hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (C) có phương trình $y = \frac{1}{4}x^2$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của phần không bị gạch và bị gạch như hình vẽ bên dưới. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



A. $\frac{3}{2}$. **B.** 3.

C. $\frac{1}{2}$. **D.** 2.

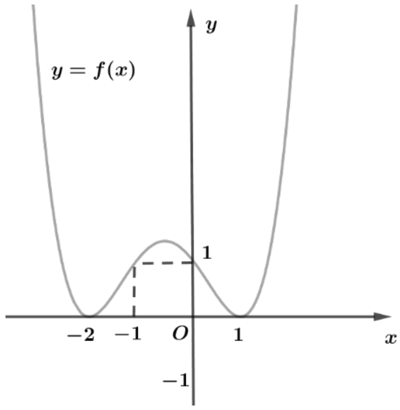
Câu 45: Kí hiệu $S(t)$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x + 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = t$ $(t > 1)$. Tìm t để $S(t) = 10$.

A. $t = 3$. **B.** $t = 4$. **C.** $t = 13$. **D.** $t = 14$.

Câu 46: Cho parabol $(P_1): y = -x^2 + 2x + 3$ cắt trục hoành tại hai điểm A, B và đường thẳng $d: y = a$ $(0 < a < 4)$. Xét parabol (P_2) đi qua A, B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y = a$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và d.Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục hoành. Biết $S_1 = S_2$, tính $T = a^3 - 8a^2 + 48a$.

A. $T = 99$. **B.** $T = 64$. **C.** $T = 32$. **D.** $T = 72$.

Câu 47: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ.



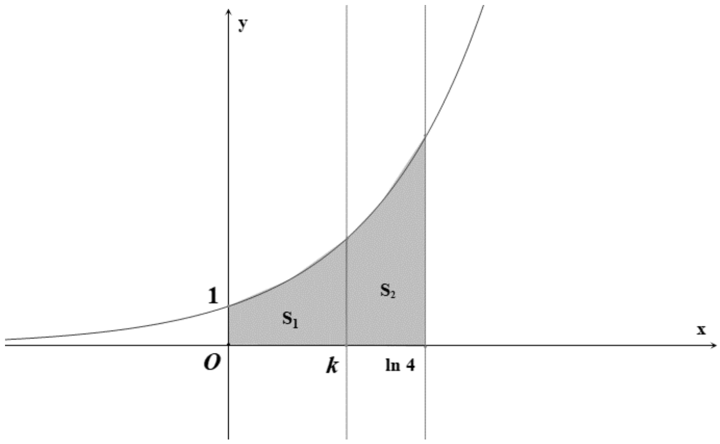
Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x); y = f'(x)$ có diện tích bằng

A. $\frac{127}{40}$. **B.** $\frac{127}{10}$. **C.** $\frac{107}{5}$. **D.** $\frac{13}{5}$.

Câu 48: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $my = x^2$, $mx = y^2$ $(m > 0)$. Tìm giá trị của m để $S = 3$.

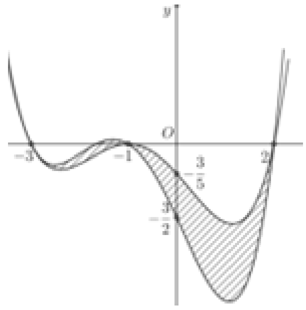
A. $m = 1$ **B.** $m = 2$ **C.** $m = 3$ **D.** $m = 4$

Câu 49: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = \mathrm{e}^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$ $(0 < k < \ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.



A. $k = \frac{4}{3}\ln 2$. **B.** $k = \ln\frac{8}{3}$. **C.** $k = \ln 2$. **D.** $k = \ln 3$.

Câu 50: Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ và $y = g(x)$. Biết rằng đồ thị cảu hai hàm số này cắt nhau tại đúng ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-3; -1; 2$. Diện tích của hình phẳng (H) **gần nhất** với kết quả nào dưới đây?



A. $3{,}11$ **B.** $2{,}45$ **C.** $3{,}21$ **D.** $2{,}95$

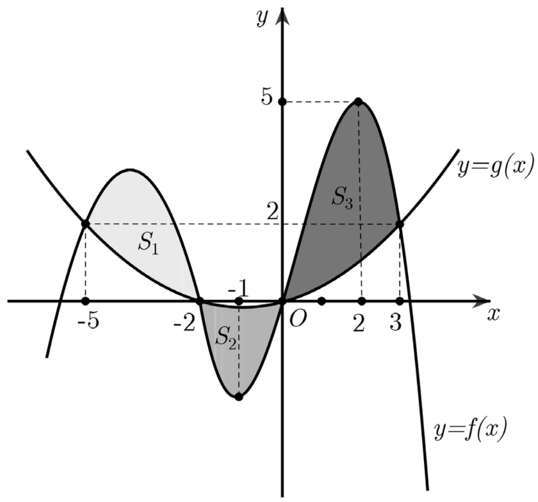
Câu 51: Cho parabol $(P): y = x^2$ và hai điểm A, B thuộc (P) sao cho $AB = 2$. Diện tích lớn nhất của hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB là

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 52: Cho Parabol $(P): y = x^2 + 1$ và đường thẳng $d: y = mx + 2$ với m là tham số. Gọi m_0 là giá trị của m để diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và d là nhỏ nhất. Hỏi m_0 nằm trong khoảng nào?

A. $(-\sqrt{2}; -\frac{1}{2})$. **B.** . **C.** $(-1; \frac{1}{\sqrt{2}})$. **D.** $(\frac{1}{2}; 3)$.

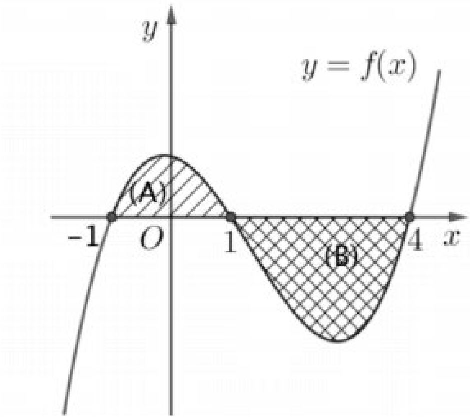
Câu 53: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5; 3]$. Biết rằng diện tích hình phẳng S_1, S_2, S_3 giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và đường parabol $y = g(x) = ax^2 + bx + c$ lần lượt là m, n, p.



Tích phân $\int_{-5}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

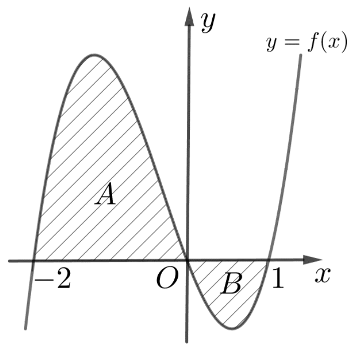
A. $-m + n - p - \frac{208}{45}$. **B.** $m - n + p + \frac{208}{45}$ **C.** $m - n + p - \frac{208}{45}$. **D.** $-m + n - p + \frac{208}{45}$.

Câu 54: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng diện tích các phần $(A), (B)$ lần lượt bằng 3 và 7. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x . f(5\sin x - 1)\,\mathrm{d}x$ bằng



A. $-\frac{4}{5}$ **B.** 2 **C.** $\frac{4}{5}$ **D.** -2

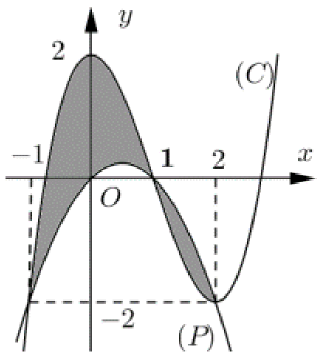
Câu 55: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ và diện tích hai phần A,B lần lượt bằng 11 và 2.



Giá trị của $I=\int\limits_{-1}^{0} f\left(3x+1\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** $\frac{13}{3}$. **C.** 9. **D.** 13.

Câu 56: Hình phẳng $\left(H\right)$ được giới hạn bởi đồ thị $\left(C\right)$ của hàm đa thức bậc ba và parabol $\left(P\right)$ có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần **tô đậm** của hình vẽ có diện tích bằng



A. $\frac{37}{12}$. **B.** $\frac{7}{12}$. **C.** $\frac{11}{12}$. **D.** $\frac{5}{12}$.

Câu 57: Parabol $y=\frac{x^2}{2}$ chia hình tròn có tâm là gốc tọa độ, bán kính bằng $2\sqrt{2}$ thành hai phần có diện tích S_1 và S_2, trong đó $S_1<S_2$. Tìm tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.

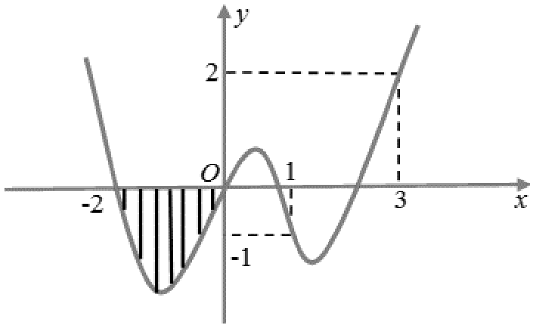
A. $\frac{3\pi+2}{12\pi}$. **B.** $\frac{9\pi-2}{3\pi+2}$. **C.** $\frac{3\pi+2}{9\pi-2}$. **D.** $\frac{3\pi+2}{21\pi-2}$.

Câu 58: Tìm số thực a để hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm $y=\dfrac{x^2+2ax+3a^2}{1+a^6}$ và $y=\dfrac{a^2-ax}{1+a^6}$ có diện tích lớn nhất.

A. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\sqrt[3]{3}$.

Câu 59: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Biết diện tích hình phẳng phần sọc kẻ bằng 3. Tính giá trị của biểu thức:

$$T=\int_1^2 f'(x+1)\,\mathrm{dx}+\int_2^3 f'(x-1)\,\mathrm{dx}+\int_3^4 f(2x-8)\,\mathrm{dx}$$

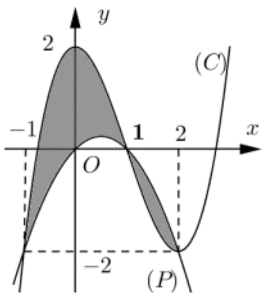


A. $T=\dfrac{9}{2}$. **B.** $T=6$. **C.** $T=0$. **D.** $T=\dfrac{3}{2}$.

Câu 60: Cho hàm số $y=x^4-6x^2+m$ có đồ thị (C_m). Giả sử (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt sao cho hình phẳng giới hạn bởi (C_m) và trục hoành có phần phía trên trục hoành và phần phía dưới trục hoành có diện tích bằng nhau. Khi đó $m=\dfrac{a}{b}$. Giá trị của biểu thức $S=a+b$ là:

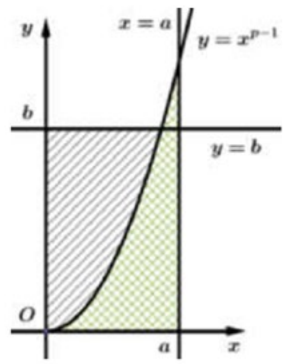
A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 61: Hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số đa thức bậc ba và parabol có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần **tô đậm** như hình vẽ có diện tích bằng



A. $\dfrac{37}{12}$. **B.** $\dfrac{7}{12}$. **C.** $\dfrac{11}{12}$. **D.** $\dfrac{5}{12}$.

Câu 62: Cho các số p,q thỏa mãn các điều kiện: $p>1$, $q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ và các số dương a,b. Xét hàm số: $y=x^{p-1}\ (x>0)$ có đồ thị là (C). Gọi (S_1) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), trục hoành, đường thẳng $x=a$, Gọi (S_2) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), trục tung, đường thẳng $y=b$, Gọi (S) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, trục tung và hai đường thẳng $x=a$, $y=b$. Khi so sánh S_1+S_2 và S ta nhận được bất đẳng thức nào trong các bất đẳng thức dưới đây?



A. $\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\le ab$ **B.** $\frac{a^{p-1}}{p-1}+\frac{b^{q-1}}{q-1}\ge ab$.

C. $\frac{a^{p+1}}{p+1}+\frac{b^{q+1}}{q+1}\le ab$. **D.** $\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\ge ab$.

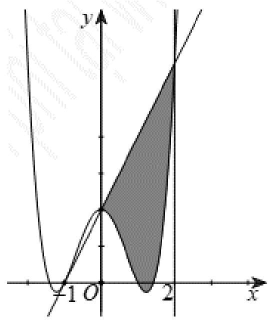
Câu 63: Cho khối trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O;R)$ và $(O';R)$, $OO'=4R$. Trên đường tròn $(O;R)$ lấy hai điểm $A,\ B$ sao cho $AB=a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) đi qua A, B cắt đoạn OO' và tạo với đáy một góc $60°$, (P) cắt khối trụ theo thiết diện là một phần của elip. Diện tích thiết diện đó bằng

A. $\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$. **B.** $\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$. **C.** $\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$. **D.** $\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$.

Câu 64: Cho parabol $(P): y=x^2$ và một đường thẳng d thay đổi cắt (P) tại hai điểm A, B sao cho $AB=2018$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng d. Tìm giá trị lớn nhất S_{max} của S.

A. $S_{max}=\frac{2018^3+1}{6}$. **B.** $S_{max}=\frac{2018^3}{3}$. **C.** $S_{max}=\frac{2018^3-1}{6}$. **D.** $S_{max}=\frac{2018^3}{3}$.

Câu 65: Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị (C), biết rằng (C) đi qua điểm $A(-1;0)$, tiếp tuyến d tại A của (C) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2 và diện tích hình phẳng giới hạn bởi d, đồ thị (C) và hai đường thẳng $x=0$; $x=2$ có diện tích bằng $\frac{28}{5}$.



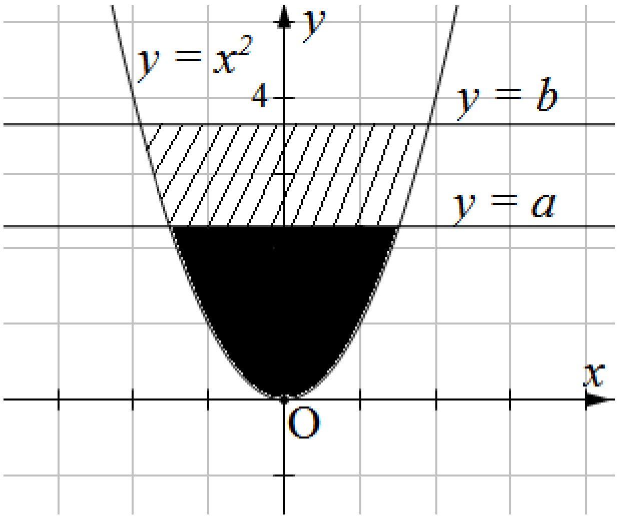
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và hai đường thẳng $x=-1$; $x=0$ có diện tích bằng

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{2}{9}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Câu 66: Đặt S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=4-x^2$, trục hoành và đường thẳng $x=-2$, $x=m$, $(-2<m<2)$. Tìm số giá trị của tham số m để $S=\frac{25}{3}$.

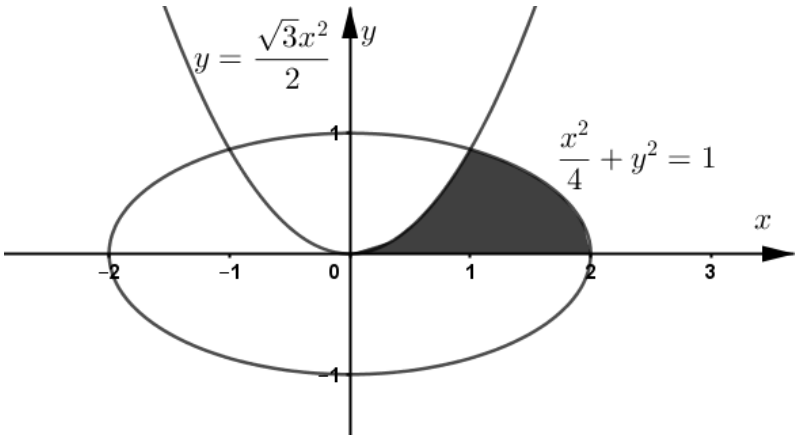
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 67: Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và hai đường thẳng $y = a$, $y = b$ $(0 < a < b)$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y = a$; (S_2) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y = b$. Với điều kiện nào sau đây của a và b thì $S_1 = S_2$?



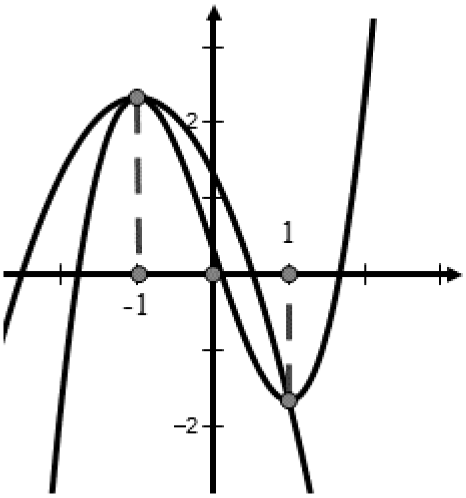
A. $b = \sqrt[3]{4}a$. **B.** $b = \sqrt[3]{2}a$. **C.** $b = \sqrt[3]{3}a$. **D.** $b = \sqrt[3]{6}a$.

Câu 68: Cho hình phẳng giới hạn bởi Elip $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, parabol $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$ và trục hoành có diện tích $T = \frac{a}{b}\pi + \frac{c}{d}\sqrt{3}$. Tính $S = a + b + c + d$.



A. $S = 32$. **B.** $S = 10$. **C.** $S = 15$. **D.** $S = 21$.

Câu 69: Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c\ (a, b, c \in \mathbb{R})$ có đồ thị (C) và $y = mx^2 + nx + p\ (m, n, p \in \mathbb{R})$ có đồ thị (P) như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) có giá trị nằm trong khoảng nào sau đây?

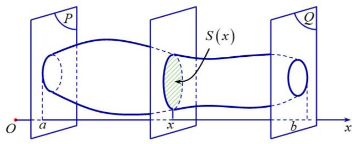


A. $(0;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;4)$.

DẠNG 2. ỨNG DỤNG TICH PHAN DỂ TIM THỂ TICH

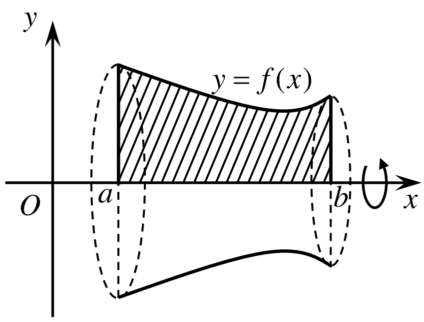
① ***Thể tích vật thể***

Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b, $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a \le x \le b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định: $\boxed{V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x}$.



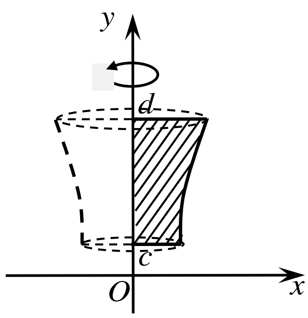
② ***Thể tích khối tròn xoay***

a) *Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox:*



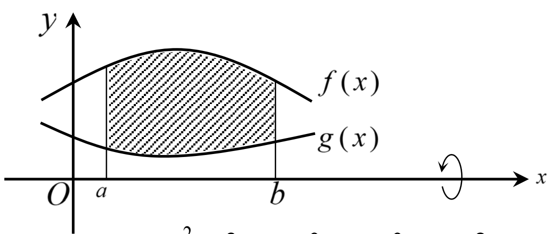
$$\begin{cases} (C): y = f(x) \\ (Ox): y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \qquad \boxed{V_x = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx}$$

b) *Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ quanh trục Oy:*



$$\begin{cases} (C): x = g(y) \\ (Oy): x = 0 \\ y = c \\ y = d \end{cases} \qquad \boxed{V_y = \pi\int_c^d [g(y)]^2\,dy}$$

c) *Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$*



Câu 70: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $V = \pi\int_0^2 (x^2+3)^2\,\mathrm{d}x$. **B.** $V = \int_0^2 (x^2+3)\,\mathrm{d}x$. **C.** $V = \int_0^2 (x^2+3)^2\,\mathrm{d}x$. **D.** $V = \pi\int_0^2 (x^2+3)\,\mathrm{d}x$.

Câu 71: Gọi V là thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sin x$, trục *Ox*, trục *Oy* và đường thẳng $x = \frac{\pi}{2}$, xung quanh trục *Ox*. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ **B.** $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ **C.** $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ **D.** $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

Câu 72: Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x$, trục hoành, đường thẳng $x = 0$ và $x = 1$ quanh trục hoành bằng

A. $\frac{16\pi}{15}$. **B.** $\frac{2\pi}{3}$. **C.** $\frac{4\pi}{3}$. **D.** $\frac{8\pi}{15}$.

Câu 73: Cho miền phẳng (D) giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$, hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành.

A. 3π. **B.** $\frac{3\pi}{2}$. **C.** $\frac{2\pi}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 74: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2$, $y = 0$. Quay (H) quanh trục hoành tạo thành khối tròn xoay có thể tích là

A. $\int_0^2 (2x - x^2) dx$ **B.** $\pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx$ **C.** $\int_0^2 (2x - x^2)^2 dx$ **D.** $\pi \int_0^2 (2x - x^2) dx$

Câu 75: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{\tan x}, y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox. Tính thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra.

A. $\frac{\pi \ln 2}{2}$. **B.** $\frac{\pi \ln 3}{4}$. **C.** $\frac{\pi}{4}$. **D.** $\pi \ln 2$.

Câu 76: Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) xác định bởi các đường $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 3$ quanh trục Ox là

A. $\frac{81\pi}{35}$. **B.** $\frac{81}{35}$. **C.** $\frac{71\pi}{35}$. **D.** $\frac{71}{35}$.

Câu 77: Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parapol : $y = x^2$ và đường thẳng d: $y = 2x$ quay xung quanh trục Ox bằng:

A. $\pi \int_0^2 (2x - x^2) dx$. **B.** $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx$.

C. $\pi \int_0^2 4x^2 dx + \pi \int_0^2 x^4 dx$. **D.** $\pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx$.

Câu 78: Tính thể tích của vật thể tạo nên khi quay quanh trục Ox hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị $(P): y = 2x - x^2$ và trục Ox bằng:

A. $V = \frac{19\pi}{15}$. **B.** $V = \frac{13\pi}{15}$. **C.** $V = \frac{17\pi}{15}$. **D.** $V = \frac{16\pi}{15}$.

Câu 79: Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do quay xung quanh trục hoành một elip có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. V có giá trị gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 550 **B.** 400 **C.** 670 **D.** 335

Câu 80: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$, trục hoành và đường thẳng $x = 1$. Tính thể tích V hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox.

A. $V = \frac{4\pi}{3}$. **B.** $V = \frac{16\pi}{15}$. **C.** $V = \frac{7\pi}{8}$. **D.** $V = \frac{15\pi}{8}$.

Câu 81: Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi hai đường $y = 2(x^2 - 1)$; $y = 1 - x^2$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành do (D) quay quanh trục Ox.

A. $\frac{64\pi}{15}$. **B.** $\frac{32}{15}$. **C.** $\frac{32\pi}{15}$. **D.** $\frac{64}{15}$.

Câu 82: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \tan x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. 5 **B.** $\pi\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$ **C.** $\frac{3\pi}{2}$ **D.** $\pi\left(\frac{1}{2} + \pi\right)$

Câu 83: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x} - 2$, $y = 0$ và $x = 9$ quay xung quanh trục Ox. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành.

A. $V = \frac{7}{6}$. **B.** $V = \frac{5\pi}{6}$. **C.** $V = \frac{7\pi}{11}$. **D.** $V = \frac{11\pi}{6}$.

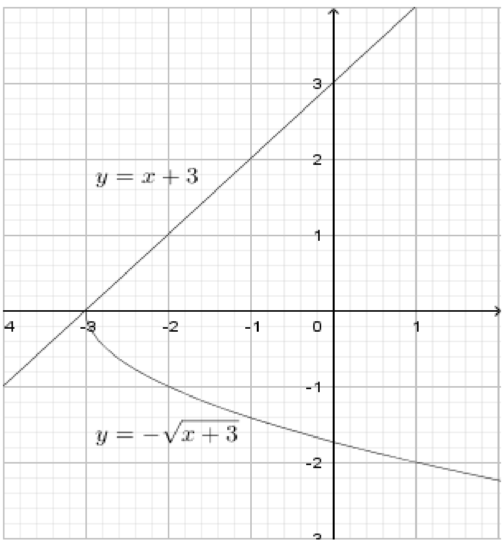
Câu 84: Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình (H) quanh Ox với (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{4x - x^2}$ và trục hoành.

A. $\frac{31\pi}{3}$. **B.** $\frac{32\pi}{3}$. **C.** $\frac{34\pi}{3}$. **D.** $\frac{35\pi}{3}$.

Câu 85: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị $y = 2x - x^2$ và trục hoành. Tính thể tích V vật thể tròn xoay sinh ra khi cho (H) quay quanh Ox.

A. $V = \frac{4}{3}\pi$. **B.** $V = \frac{16}{15}\pi$. **C.** $V = \frac{16}{15}$. **D.** $V = \frac{4}{3}$.

Câu 86: Tính thể tích vật tròn xoay tạo bởi miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x + 3$, $y = -\sqrt{x+3}$, $x = 1$ xoay quanh trục Ox.



A. $\frac{41}{2}\pi$. **B.** $\frac{43}{2}\pi$. **C.** $\frac{41}{3}\pi$. **D.** $\frac{40}{3}\pi$.

Câu 87: Ký hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = \sqrt{x}.e^{x^2}$, trục hoành, đường thẳng $x = 1$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục hoành.

A. $V = e^2 - 1$. **B.** $V = \pi\left(e^2 - 1\right)$. **C.** $V = \frac{1}{4}\pi e^2 - 1$. **D.** $V = \frac{1}{4}\pi\left(e^2 - 1\right)$.

Câu 88: Cho vật thể (T) giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 0; x = 2$. Cắt vật thể (T) bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x\left(0 \le x \le 2\right)$ ta thu được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $(x+1)e^x$. Thể tích vật thể (T) bằng

A. $\frac{\pi\left(13e^4 - 1\right)}{4}$. **B.** $\frac{13e^4 - 1}{4}$. **C.** $2e^2$. **D.** $2\pi e^2$.

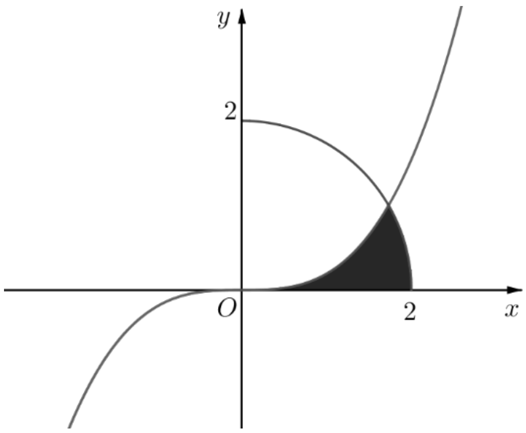
Câu 89: Cho hai mặt cầu $(S_1),(S_2)$ có cùng bán kính $R = 3$ thỏa mãn tính chất tâm của (S_1) thuộc (S_2) và ngược lại. Tính thể tích V phần chung của hai khối cầu tạo bởi $(S_1),(S_2)$.

A. $V = \frac{45\pi}{8}$. **B.** $V = \frac{45\pi}{4}$. **C.** $V = \frac{45}{4}$. **D.** $V = \frac{45}{8}$.

Câu 90: Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = |x|$ và $y = x^2$ quay quanh trục tung tạo nên một vật thể tròn xoay có thể tích bằng

A. $\frac{\pi}{6}$. **B.** $\frac{\pi}{3}$. **C.** $\frac{2\pi}{15}$. **D.** $\frac{4\pi}{15}$.

Câu 91: Cho hình (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{3}}{9}x^3$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4 - x^2}$.



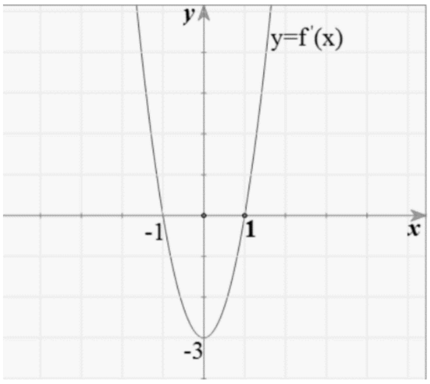
Biết thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành là $V = \left(-\frac{a}{b}\sqrt{3} + \frac{c}{d}\right)\pi$, trong đó $a,b,c,d \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính $P = a + b + c + d$.

A. $P = 52$. **B.** $P = 40$. **C.** $P = 46$. **D.** $P = 34$.

Câu 92: Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{m^2 - x^2}$ (m là tham số khác 0) và trục hoành. Khi (H) quay xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích V. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $V < 1000\pi$.

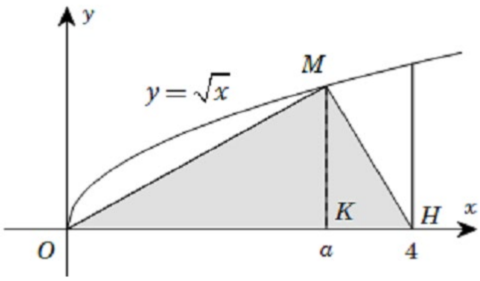
A. 18. **B.** 20. **C.** 19. **D.** 21.

Câu 93: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d,\left(a,b,c,d\in\mathbb{R},a\neq 0\right)$ có đồ thị $\left(C\right)$. Biết rằng đồ thị $\left(C\right)$ tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ cho bởi hình vẽ dưới đây. Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị $\left(C\right)$ và trục hoành khi quay xung quanh trục Ox.



A. $\dfrac{725}{35}\pi$. **B.** $\dfrac{1}{35}\pi$. **C.** 6π. **D.** đáp án khác.

Câu 94: Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, $y=0$ và $x=4$ quanh trục Ox. Đường thẳng $x=a\left(0<a<4\right)$ cắt đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ tại M. Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox. Biết rằng $V=2V_1$. Khi đó



A. $a=2$. **B.** $a=2\sqrt{2}$.

C. $a=\dfrac{5}{2}$. **D.** $a=3$.

Câu 95: Cho hình phẳng $\left(D\right)$ giới hạn bởi các đường $y=x-\pi$, $y=\sin x$ và $x=0$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do $\left(D\right)$ quay quanh trục hoành và $V=p\pi^4,\left(p\in\mathbb{Q}\right)$. Giá trị của $24p$ bằng

A. 8. **B.** 4. **C.** 24. **D.** 12.

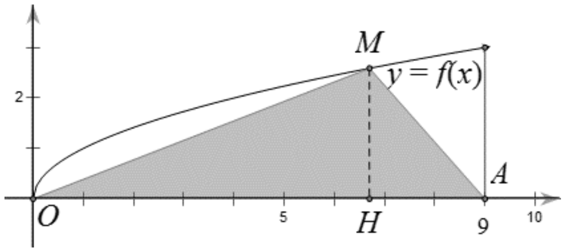
Câu 96: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, $\left(H_1\right):\begin{cases}y=\dfrac{x^2}{4}\\ y=-\dfrac{x^2}{4}\\ x=-4,x=4\end{cases}$, $\left(H_2\right):\begin{cases}x^2+y^2\leq 16\\ x^2+\left(y-2\right)^2\geq 4\\ x^2+\left(y+2\right)^2\geq 4\end{cases}$. Cho $\left(H_1\right),\left(H_2\right)$ xoay quanh trục Oy ta được các vật thể có thể tích lần lượt V_1,V_2. Đẳng thức nào sau đây đúng.

A. $V_1=V_2$. **B.** $V_1=\dfrac{1}{2}V_2$. **C.** $V_1=2V_2$. **D.** $V_1=\dfrac{3}{2}V_2$.

Câu 97: Cho hình thang $ABCD$ có AB song song CD và $AB=AD=BC=a$, $CD=2a$. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình thang $ABCD$ quanh trục là đường thẳng AB.

A. $\dfrac{5}{4}\pi a^3$. **B.** $\dfrac{5}{2}\pi a^3$. **C.** $\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3}\pi a^3$. **D.** πa^3.

Câu 98: Cho đồ thị $(C): y = f(x) = \sqrt{x}$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), đường thẳng $x = 9$ và trục Ox. Cho điểm M thuộc đồ thị (C) và điểm $A(9;0)$. Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay khi cho (H) quay quanh trục Ox, V_2 là thể tích khối tròn xoay khi cho tam giác AOM quay quanh trục Ox. Biết rằng $V_1 = 2V_2$. Tính diện tích S phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đường thẳng OM.



A. $S = 3$. **B.** $S = \frac{27\sqrt{3}}{16}$. **C.** $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $S = \frac{4}{3}$.

CHƯƠNG III

NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

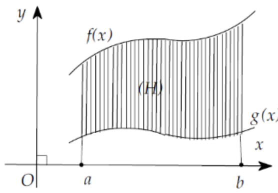
BÀI 3. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

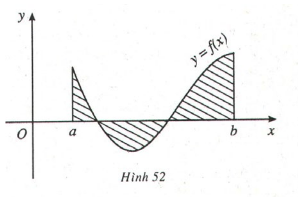
III. HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

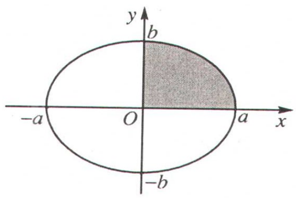
DẠNG 1. ỨNG DỤNG TICH PHAN DỂ TIM DIỆN TICH

① *Hình phẳng* (H) *giới hạn bởi* $\begin{cases}(C_1): y = f(x)\\ (C_2): y = g(x)\\ x = a,\ x = b\ (a < b)\end{cases}$ *thì diện tích là* $\boxed{S = \int_a^b \left|f(x) - g(x)\right| \mathrm{d}x}$.

Hình phẳng (H) *giới hạn bởi* $\begin{cases}(C_1): y = f(x)\\ (C_2): Ox: y = 0\\ x = a,\ x = b\ (a < b)\end{cases}$ *thì diện tích là* $\boxed{S = \int_a^b \left|f(x)\right| \mathrm{d}x}$.







$\boxed{S_{\text{elip}} = \pi ab.}$

$(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

② ***Hình thức đề thường hay cho***

Hình thức 1: Không cho hình vẽ, cho dạng $(H): \{y = f(x),\ y = g(x),\ x = a,\ x = b\ (a < b)\}$

$\xrightarrow{\text{casio}} \int_a^b \left|f(x) - g(x)\right| \mathrm{d}x =$ *kết quả, so sánh với bốn đáp án.*

Hình thức 2: Không cho hình vẽ, cho dạng $(H): \{y = f(x),\ y = g(x)\}$

Giải $f(x) = g(x)$ *tìm nghiệm* $x_1, ..., x_i$, *với* x_1 *nhỏ nhất,* x_i *lớn nhất* $\xrightarrow{\text{casio}} \int_{x_1}^{x_i} \left|f(x) - g(x)\right| \mathrm{d}x.$

Hình thức 3: Cho hình vẽ, sẽ giải phương trình tìm tọa độ giao điểm , chia từng diện tích nhỏ, xổ hình từ trên xuống, ghi công thức và bấm máy tính.

Hình thức 4: Cho ba hàm trở lên, chẳng hạn $y = f(x),\ y = g(x),\ y = h(x)$ *ta nên vẽ hình.*

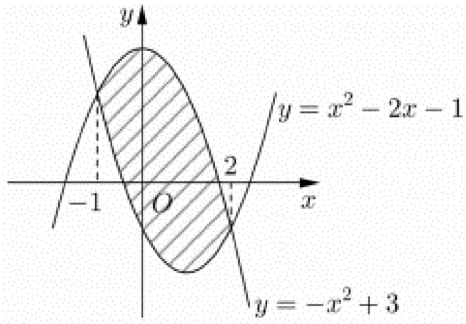
Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a,\ x = b$ được tính theo công thức

A. $S = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$. **B.** $S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. **C.** $S = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $S = \int_b^a |f(x)|\mathrm{d}x$.

Lời giải

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a,\ x = b$ được tính bởi công thức: $S = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

Câu 2: Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^{2}(2x^2 - 2x - 4)\mathrm{d}x$. **B.** $\int_{-1}^{2}(2x^2 + 2x - 4)\mathrm{d}x$.

C. $\int_{-1}^{2}(-2x^2 + 2x + 4)\mathrm{d}x$. **D.** $\int_{-1}^{2}(-2x^2 - 2x + 4)\mathrm{d}x$.

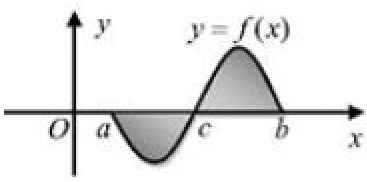
Lời giải

Từ đồ thị ta thấy $-x^2 + 3 \ge x^2 - 2x - 1,\ \forall x \in [-1;2]$.

Vậy diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là

$$S = \int_{-1}^{2}\left[(-x^2 + 3) - (x^2 - 2x - 1)\right]\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2}(-2x^2 + 2x + 4)\mathrm{d}x.$$

Câu 3: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x = a, x = b$. Hỏi cách tính S nào dưới đây đúng?



A. $S = \int_a^b f(x)dx$. **B.** $S = \left|\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\right|$.

C. $S = -\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. **D.** $S = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Lời giải.

Chọn B

Câu 4: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số: $y=x^3-3x$, $y=x$. Tính S.

A. $S=4$. **B.** $S=8$. **C.** $S=2$. **D.** $S=0$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là $x^3-3x=x \Leftrightarrow x^3-4x=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Vậy $S=\left|\int\limits_{-2}^{0}\left(x^3-4x\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_{0}^{2}\left(x^3-4x\right)\mathrm{d}x\right|=4+4=8$.

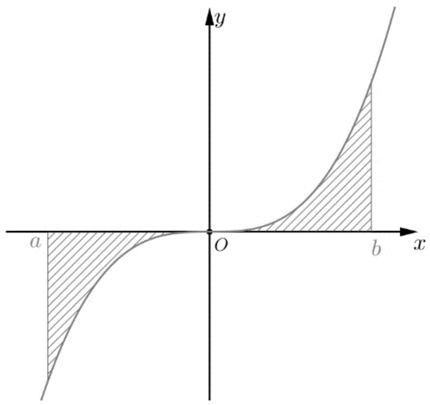
Câu 5: Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=3^x$, $y=0, x=0, x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\int\limits_0^2 3^x dx$. **B.** $S=\pi\int\limits_0^2 3^{2x} dx$. **C.** $S=\pi\int\limits_0^2 3^x dx$. **D.** $S=\int\limits_0^2 3^{2x} dx$.

Lời giải

Diện tích hình phẳng đã cho được tính bởi công thức $S=\int\limits_0^2 3^x dx$

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y=f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x=a$, $x=b$. Giả sử S_D là diện tích hình phẳng D. đúng trong các phương án A, B, C, D cho dưới đây?



A. $S_D=\int\limits_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^b f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $S_D=-\int\limits_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^b f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S_D=\int\limits_a^0 f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_0^b f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $S_D=-\int\limits_a^0 f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_0^b f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Ta có $S_D=\int\limits_a^b |f(x)|\mathrm{d}x=\int\limits_a^0 |f(x)|\mathrm{d}x+\int\limits_0^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

Vì $f(x)\le 0, \forall x\in[a;0], f(x)\ge 0, \forall x\in[0;b]$ nên:

$$S_D = \int_a^0 \left(-f\left(x\right)\right)\mathrm{d}x + \int_0^b f\left(x\right)\mathrm{d}x = -\int_a^0 f\left(x\right)\mathrm{d}x + \int_0^b f\left(x\right)\mathrm{d}x.$$

Câu 7: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \left(x-2\right)^2 - 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Ta có: $S = \int_1^2 \left|\left(x-2\right)^2 - 1\right|\mathrm{d}x = \int_1^2 \left|x^2 - 4x + 3\right|\mathrm{d}x = \left|\int_1^2 \left(x^2 - 4x + 3\right)\mathrm{d}x\right| = \frac{2}{3}$.

Câu 8: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ bằng

A. $\left|\int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]\mathrm{d}x\right|$. **B.** $\int_a^b \left|f(x) + g(x)\right|\mathrm{d}x$. **C.** $\int_a^b \left|f(x) - g(x)\right|\mathrm{d}x$. **D.** $\int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]\mathrm{d}x$.

Lời giải

Theo lý thuyết thì diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ được tính theo công thức $S = \int_a^b \left|f\left(x\right) - g\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$.

Câu 9: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 4x - x^2$ và trục Ox

A. 11. **B.** $\frac{34}{3}$. **C.** $\frac{31}{3}$. **D.** $\frac{32}{3}$.

Lời giải

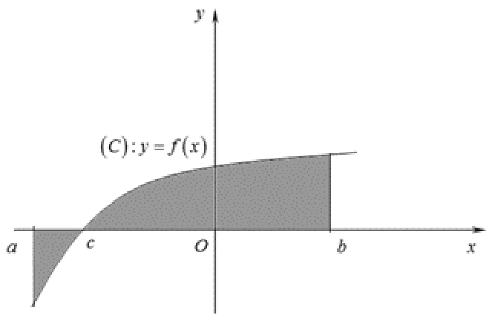
Chọn D

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 4x - x^2$ và trục Ox.

Xét phương trình $4x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$.

Ta có $S = \int_0^4 \left|4x - x^2\right|dx = \left|\int_0^4 (4x - x^2)dx\right| = \left|(2x^2 - \frac{x^3}{3})\Big|_0^4\right| = \frac{32}{3}$.

Câu 10: Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $\left(a < b\right)$ tính theo công thức nào dưới đây ?



A. $S=\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=-\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S=\left|\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải

Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ là $S=\int\limits_a^b |f(x)|\mathrm{d}x=\int\limits_a^c |f(x)|\mathrm{d}x+\int\limits_c^b |f(x)|\mathrm{d}x=-\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 11: Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+1, x=-1, x=2$ và trục hoành.

A. $S=6$. **B.** $S=16$. **C.** $S=\frac{13}{6}$. **D.** $S=13$.

Lời giải

Ta có: $S=\int\limits_{-1}^{2}|x^2+1|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2}(x^2+1)\mathrm{d}x=6$.

Câu 12: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+5$, $y=6x$, $x=0$, $x=1$. Tính S.

A. $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{7}{3}$ **C.** $\frac{8}{3}$ **D.** $\frac{5}{3}$

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2+5=6x \Leftrightarrow x=5; x=1$.

Diện tích hình phẳng cần tìm: $S=\int\limits_0^1 |x^2-6x+5|\mathrm{d}x=\frac{7}{3}$.

Câu 13: Gọi diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(C): y=\frac{-3x-1}{x-1}$ và hai trục tọa độ là S. Tính S?

A. $S=1-\ln\frac{4}{3}$ **B.** $S=4\ln\frac{4}{3}$ **C.** $S=4\ln\frac{4}{3}-1$ **D.** $S=\ln\frac{4}{3}-1$

Lời giải

Chọn C

Hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành là nghiệm của phương trình $\frac{-3x-1}{x-1}=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$.

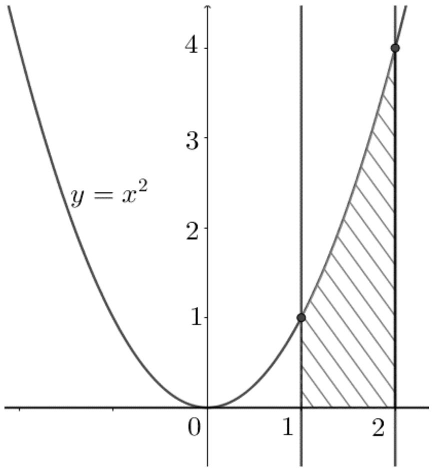
Do đó diện tích hình phẳng là

$$S=\left|\int_{-\frac{1}{3}}^{0}\frac{-3x-1}{x-1}\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{-\frac{1}{3}}^{0}\left(3+\frac{4}{x-1}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\left(3x+4\ln|x-1|\right)\right|_{-\frac{1}{3}}^{0}=4\ln\frac{4}{3}-1.$$

Câu 14: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=x^2; y=0; x=1; x=2$ bằng

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{7}{3}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** 1.

Lời giải



Ta có $S=\int_1^2\left|x^2\right|dx=\int_1^2 x^2dx=\frac{7}{3}$.

Câu 15: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $(H): y=\frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng

A. $2\ln 2-1$. **B.** $\ln 2+1$. **C.** $\ln 2-1$. **D.** $2\ln 2+1$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (H) và trục hoành $\frac{x-1}{x+1}=0 \Leftrightarrow x=1$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (H) và các trục tọa độ là

$$S=\int_0^1\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{-x+1}{x+1}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(-1+\frac{2}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\left(-x+2\ln|x+1|\right)\Big|_0^1=2\ln 2-1.$$

Câu 16: Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{\ln x}{x^2}$, $y=0$, $x=1$, $x=e$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\pi\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$. **C.** $S=\int_1^e\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)^2\mathrm{d}x$. **D.** $S=\pi\int_1^e\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)^2\mathrm{d}x$

Lời giải

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi miền D gồm các đường $y=\frac{\ln x}{x^2}$, $y=0$, $x=1$, $x=e$ là:

$$S=\int_1^e\left|\frac{\ln x}{x^2}\right|\mathrm{d}x=\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x \text{ vì } \frac{\ln x}{x^2}>0,\ \forall x\in(1;e).$$

Câu 17: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=-x^2+2x+1$, $y=2x^2-4x+1$ là

A. 8. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 10.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm là $-x^2+2x+1=2x^2-4x+1\Leftrightarrow 3x^2-6x=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng là $S=\left|\int_0^2\left[\left(2x^2-4x+1\right)-\left(-x^2+2x+1\right)\right]dx\right|$

$$=\left|\int_0^2\left(3x^2-6x\right)dx\right|=\left|\left(x^3-3x^2\right)\Big|_0^2\right|=4.$$

Câu 18: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y=x^2+2x$, $y=x+2$.

A. $\frac{7}{2}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{11}{2}$.

Lời giải

Xét phương trình: $x^2+2x=x+2\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=1\end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị là:

$$S=\int_{-2}^1\left|x^2+x-2\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{-2}^1\left(x^2+x-2\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_{-2}^1\right|=\left|-\frac{7}{6}-\frac{10}{3}\right|=\frac{9}{2}.$$

Câu 19: Hình phẳng (H) được giới hạn bởi các đường $y=x^2$, $y=3x-2$. Tính diện tích hình phẳng (H)

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** 1 **D.** $\frac{1}{6}$

Lời giải

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là nghiệm của phương trình:

$$x^2=3x-2\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right..$$

Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường là:

$$S=\int_1^2\left|x^2-(3x-2)\right|dx=\left|\int_1^2\left(x^2-3x+2\right)dx\right|=\frac{1}{6}.$$

Câu 20: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=\ln x$, $y=1$ và đường thẳng $x=1$ bằng

A. e^2. **B.** $e+2$. **C.** $2e$. **D.** $e-2$.

Lời giải

Ta có $\ln x-1=0 \Leftrightarrow x=e$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=\ln x$, $y=1$ và đường thẳng $x=1$ là:

$$S=\int_1^e\left|\ln x-1\right|dx=\left|\int_1^e(\ln x-1)\,dx\right|=\left|x(\ln x-1)\Big|_1^e-\int_1^e dx\right|=\left|1-x\Big|_1^e\right|=\left|1-(e-1)\right|=\left|2-e\right|=e-2$$

Câu 21: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=4x-x^2$ và đường thẳng $y=2x$ bằng

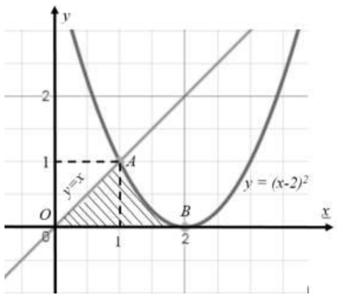
A. 4. **B.** $\dfrac{20}{3}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{16}{3}$

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm $4x-x^2=2x \Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Khi đó diện tích hình phẳng cần tìm là $S=\int_0^2\left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\int_0^2\left(2x-x^2\right)\mathrm{d}x=\left(x^2-\dfrac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\dfrac{4}{3}$.

Câu 22: Tính diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên.



A. $\dfrac{5}{6}$. **B.** $\dfrac{5\pi}{6}$. **C.** $\dfrac{8}{15}$. **D.** $\dfrac{8\pi}{15}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x=(x-2)^2 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$$

Dựa vào đồ thị, khi đó diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S=\int_0^1 x\,dx+\int_1^2(x-2)^2\,dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

Vậy $S=\dfrac{5}{6}$.

Câu 23: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-2x$, $y=0$, $x=-10$, $x=10$.

A. $S=\dfrac{2000}{3}$. **B.** $S=2008$. **C.** $S=2000$. **D.** $S=\dfrac{2008}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $(C): y = x^2 - 2x$ và $(d): y = 0$ là:

$$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

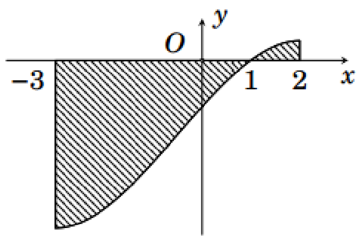
Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
VT		$+$	0	$-$	0	$+$	

Diện tích cần tìm: $S = \int\limits_{-10}^{10} \left|x^2 - 2x\right| \mathrm{d}x = \int\limits_{-10}^{0} \left(x^2 - 2x\right) \mathrm{d}x - \int\limits_{0}^{2} \left(x^2 - 2x\right) \mathrm{d}x + \int\limits_{2}^{10} \left(x^2 - 2x\right) \mathrm{d}x$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_{-10}^{0} - \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_{0}^{2} + \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_{2}^{10} = \frac{1300}{3} + \frac{4}{3} + \frac{704}{3} = \frac{2008}{3}.$$

Câu 24: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -3$, $x = 2$. Đặt $a = \int\limits_{-3}^{1} f(x) \mathrm{d}x$, $b = \int\limits_{1}^{2} f(x) \mathrm{d}x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng.



A. $S = a + b$. **B.** $S = a - b$. **C.** $S = -a - b$. **D.** $S = b - a$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $S = \int\limits_{-3}^{2} \left|f(x)\right| \mathrm{d}x = \int\limits_{-3}^{1} \left|f(x)\right| \mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} \left|f(x)\right| \mathrm{d}x = -\int\limits_{-3}^{1} f(x) \mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} f(x) \mathrm{d}x = -a + b$.

Câu 25: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $y = 2x$ là :

A. $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{5}{3}$ **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** $\frac{23}{15}$

Lờigiải

Chọn A

Xét phương trình $x^2 = x \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $y = 2x$ là :

$$S = \int\limits_{0}^{1} \left|x^2 - x\right| dx = \left|\int\limits_{0}^{1} \left(x^2 - x\right) dx\right| = \frac{4}{3}$$

Câu 26: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=-x^2+2x+1$, $y=2x^2-4x+1$ là

A. 8 **B.** 5 **C.** 4 **D.** 10

Lời giải

Phương trình hoành đồ giao điểm hai đồ thị hàm số $y=-x^2+2x+1$, $y=2x^2-4x+1$ là:

$$-x^2+2x+1=2x^2-4x+1 \Leftrightarrow 3x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right..$$

Diện tích hình phẳng đã cho là $\int_0^2 \left|3x^2-6x\right| dx=\int_0^2 \left(6x-3x^2\right) dx=\left(3x^2-x^3\right)\Big|_0^2=4$.

Câu 27: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S là

A. $S=1+\ln 2$. **B.** $S=2\ln 2-1$. **C.** $S=2\ln 2+1$. **D.** $S=\ln 2-1$.

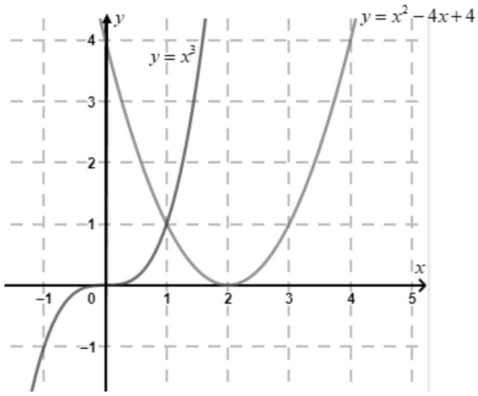
Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số đã cho và trục hoành:

$\dfrac{x-1}{x+1}=0 \Leftrightarrow x=1$.

Khi đó $S=\int\limits_0^1 \left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| \mathrm{d}x=\left|\int\limits_0^1 \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) \mathrm{d}x\right|=\left|\int\limits_0^1 \left(1-\dfrac{2}{x+1}\right) \mathrm{d}x\right|=\left|\left(x-2\ln|x+1|\right)\Big|_0^1\right|=2\ln 2-1$.

Câu 28: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=x^3$, $y=x^2-4x+4$ và trục Ox được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int\limits_0^2 \left|x^3-\left(x^2-4x+4\right)\right| \mathrm{d}x$. **B.** $-\int\limits_0^1 x^3 \mathrm{d}x+\int\limits_1^2 \left(x^2-4x+4\right) \mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_0^1 x^3 \mathrm{d}x-\int\limits_1^2 \left(x^2-4x+4\right) \mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_0^1 x^3 \mathrm{d}x+\int\limits_1^2 \left(x^2-4x+4\right) \mathrm{d}x$.

Lời giải

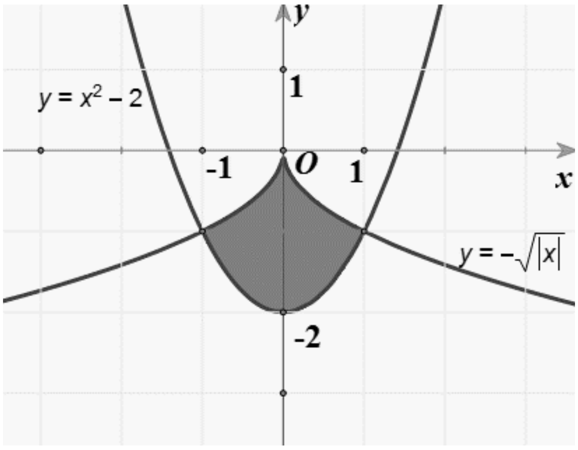
Dựa vào hình vẽ ta thấy hình phẳng cần tính diện tích gồm 2 phần:

Phần 1: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3$, trục Ox, $x=0$, $x=1$.

Phần 2: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-4x+4$, trục Ox, $x=1$, $x=2$.

Do đó diện tích cần tính là $S=\int_0^1\left|x^3\right|dx+\int_1^2\left|x^2-4x+4\right|dx=\int_0^1 x^3dx+\int_1^2\left(x^2-4x+4\right)dx$.

Câu 29: Diện tích phần hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^{1}\left(x^2-2+\sqrt{|x|}\right)dx$. **B.** $\int_{-1}^{1}\left(x^2-2-\sqrt{|x|}\right)dx$.

C. $\int_{-1}^{1}\left(-x^2+2+\sqrt{|x|}\right)dx$. **D.** $\int_{-1}^{1}\left(-x^2+2-\sqrt{|x|}\right)dx$.

Lời giải

Diện tích hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên là:

$\int_{-1}^{1}\left|x^2-2-\left(-\sqrt{|x|}\right)\right|dx=\int_{-1}^{1}\left(-\sqrt{|x|}-x^2+2\right)dx$.

Câu 30: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=x\ln x$, trục hoành và đường thẳng $x=e$ là

A. $\frac{e^2-1}{2}$. **B.** $\frac{e^2+1}{2}$. **C.** $\frac{e^2-1}{4}$. **D.** $\frac{e^2+1}{4}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ của đường cong $y=x\ln x$ và trục hoành là

$$x\ln x=0\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ \ln x=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=x\ln x$, trục hoành và đường thẳng $x=e$ là $S=\int_1^e\left|x\ln x\right|dx=\int_1^e x\ln x\,dx$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=xdx\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}du=\frac{1}{x}dx\\ v=\frac{x^2}{2}\end{cases}$. Suy ra $S=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e xdx=\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big|_1^e=\frac{e^2+1}{4}$.

Câu 31: Giá trị dương của tham số m sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=2x+3$ và các đường thẳng $y=0,x=0,x=m$ bằng 10 là

A. $m=\frac{7}{2}$. **B.** $m=5$. **C.** $m=2$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Vì $m>0$ nên $2x+3>0,\forall x\in[0;m]$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2x+3$ và các đường thẳng $y=0,x=0,x=m$ là:

$$S=\int_0^m(2x+3).\mathrm{d}x=\left(x^2+3x\right)\Big|_0^m=m^2+3m.$$

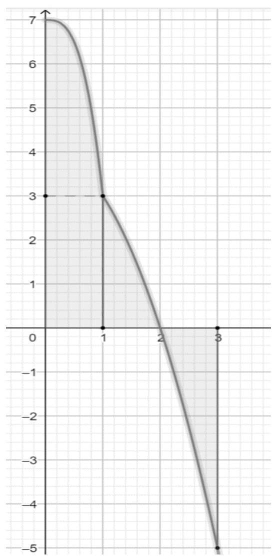
Theo giả thiết ta có:

$$S=10\Leftrightarrow m^2+3m=10\Leftrightarrow m^2+3m-10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-5\end{array}\right.\Leftrightarrow m=2\ (\text{do } m>0).$$

Câu 32: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}7-4x^3 & khi\ 0\le x\le 1\\ 4-x^2 & khi\ x>1\end{cases}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và các đường thẳng $x=0,x=3,y=0$.

A. $\frac{16}{3}$. **B.** $\frac{20}{3}$. **C.** 10. **D.** 9.

Lời giải



$$S=\int_0^1\left(7-4x^3\right)dx+\int_1^2\left(4-x^2\right)dx+\int_2^3\left(x^2-4\right)dx$$

$$=\left(7x-x^4\right)\Big|_0^1+\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2+\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)\Big|_2^3=6+4-\frac{7}{3}-3-\frac{8}{3}+8=10.$$

Câu 33: Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường cong $y=-x^3+12x$ và $y=-x^2$.

A. $S=\dfrac{937}{12}$ **B.** $S=\dfrac{343}{12}$ **C.** $S=\dfrac{793}{4}$ **D.** $S=\dfrac{397}{4}$

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm 2 đường cong:

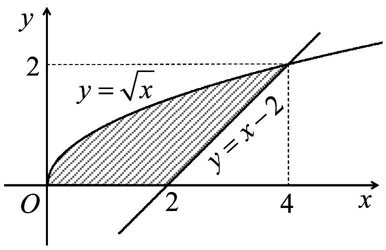
$$-x^3+12x=-x^2 \Leftrightarrow x(x^2-x-12)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-3 \\ x=4 \end{array}\right..$$

$\Rightarrow$ Diện tích cần tìm là: $S=\int\limits_{-3}^{4}\left|x^3-x^2-12x\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-3}^{0}\left|x^3-x^2-12x\right|\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{4}\left|x^3-x^2-12x\right|\mathrm{d}x$

$$=\left|\int\limits_{-3}^{0}\left(x^3-x^2-12x\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_{0}^{4}\left(x^3-x^2-12x\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-6x^2\right)\Bigg|_{-3}^{0}\right|+\left|\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-6x^2\right)\Bigg|_{0}^{4}\right|$$

$$=\left|\frac{-99}{4}\right|+\left|\frac{-160}{3}\right|=\frac{937}{12}.$$

Câu 34: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, $y=x-2$ và trục hoành. Diện tích của (H) bằng



A. $\dfrac{7}{3}$. **B.** $\dfrac{8}{3}$. **C.** $\dfrac{10}{3}$. **D.** $\dfrac{16}{3}$.

Lời giải

Xét các hình phẳng $(H_1):\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=0 \\ x=0,\ x=4 \end{cases}$ và $(H_2):\begin{cases} y=x-2 \\ y=0 \\ x=2,\ x=4 \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} (H)=(H_1)\setminus(H_2) \\ (H)\cup(H_2)=(H_1) \end{cases}$.

Do đó $S(H)=S(H_1)-S(H_2)=\int\limits_0^4\sqrt{x}\mathrm{d}x-\int\limits_2^4(x-2)\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^4-\left(\dfrac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_2^4=\dfrac{16}{3}-2=\dfrac{10}{3}$

Cách khác: Ta có $(H):\begin{cases} x=y^2 \\ x=y+2 \\ y=0,\ y=2 \end{cases}$. Suy ra $S(H)=\int\limits_0^2\left|y^2-(y+2)\right|\mathrm{d}y=\dfrac{10}{3}$.

Câu 35: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=x^2+x-1$ và $y=x^4+x-1$ là

A. $\frac{8}{15}$. **B.** $\frac{7}{15}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{4}{15}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của $y = x^2 + x - 1$ và $y = x^4 + x - 1$ là

$$x^2 + x - 1 = x^4 + x - 1 \Leftrightarrow x^2 - x^4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right. .$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_{-1}^{1} \left|x^2 - x^4\right| \mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \left|x^2 - x^4\right| \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \left|x^2 - x^4\right| \mathrm{d}x$

$$= \left|\int_{-1}^{0} \left(x^2 - x^4\right) \mathrm{d}x\right| + \left|\int_{0}^{1} \left(x^2 - x^4\right) \mathrm{d}x\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{0}\right| + \left|\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_{0}^{1}\right| = \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{4}{15}.$$

Câu 36: Gọi S là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(H): y = \frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng

A. $S = \ln 2 + 1$. **B.** $S = 2\ln 2 + 1$. **C.** $S = \ln 2 - 1$. **D.** $S = 2\ln 2 - 1$.

Lời giải

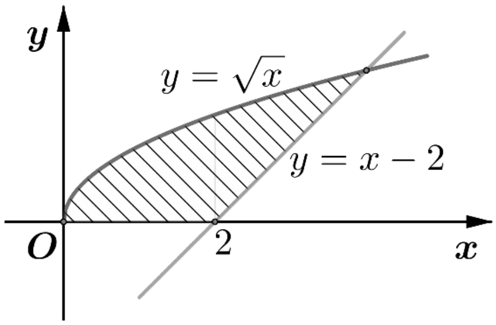
Phương trình trục (Ox) và (Oy) lần lượt là $y = 0$ và $x = 0$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hàm số (H) và trục Ox: $\frac{x-1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Ta có: $S = \int_{0}^{1} \left|\frac{x-1}{x+1}\right| \mathrm{d}x$. Vì $\frac{x-1}{x+1} \le 0,\ \forall x \in [0;1]$ nên diện tích cần tìm là:

$$S = -\int_{0}^{1} \frac{x-1}{x+1} \mathrm{d}x = \int_{0}^{1} \left(-1 + \frac{2}{x+1}\right) \mathrm{d}x = \left(-x + 2\ln|x+1|\right)\Big|_{0}^{1} = 2\ln 2 - 1.$$

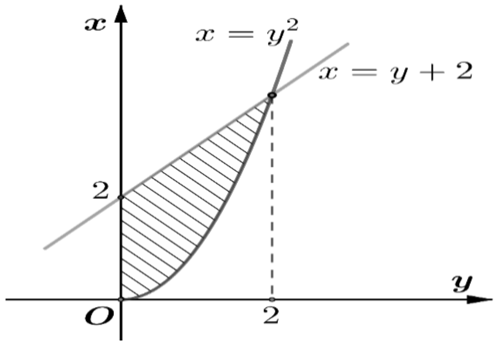
Câu 37: Tính diện tích của phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ sau:



A. $\frac{10}{3}$. **B.** 4. **C.** $\frac{13}{3}$. **D.** $\frac{11}{3}$.

Lời giải

Cách 1: Coi x là hàm số theo biến số y.



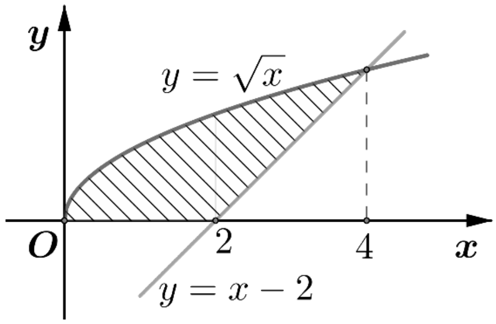
Hình phẳng đã cho giới hạn bởi các đường:

$x = y^2$; $x = y + 2$; $y = 0$.

Ta có: $y^2 = y + 2 \Leftrightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} y = -1 & (loai) \\ y = 2 & (t/m) \end{array}\right.$

Diện tích của hình phẳng cần tìm là $S = \int_0^2 \left|y + 2 - y^2\right| \mathrm{d}y = \int_0^2 \left(y + 2 - y^2\right) \mathrm{d}y = \frac{10}{3}$

Cách 2:

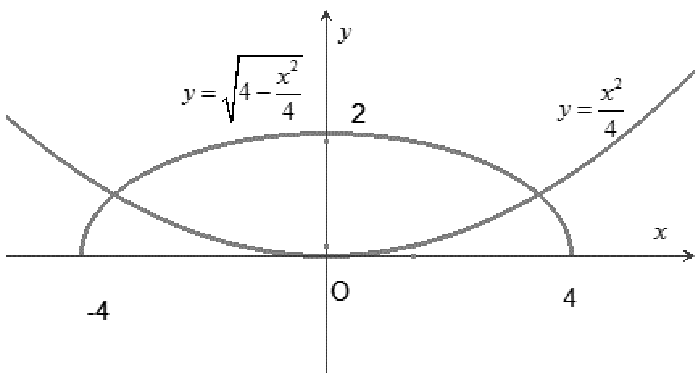


Phương trình hoành độ giao điểm của các đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$:

$\sqrt{x} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$

Diện tích của hình phẳng cần tìm là $S = \int_0^4 \sqrt{x}\, \mathrm{d}x - \int_2^4 (x-2)\, \mathrm{d}x = \frac{10}{3}$

Câu 38: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi parabol $y = \frac{x^2}{12}$ và đường cong có phương trình $y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$



Diện tích hình phẳng (H) bằng:

A. $\dfrac{2\left(4\pi+\sqrt{3}\right)}{3}$ **B.** $\dfrac{4\pi+\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\dfrac{4\pi+\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}+\pi}{6}$

Lời giải

Xét phương trình $\dfrac{x^2}{12}=\sqrt{4-\dfrac{x^2}{4}} \Leftrightarrow \dfrac{x^4}{144}=4-\dfrac{x^2}{4} \Leftrightarrow \dfrac{x^4}{144}+\dfrac{x^2}{4}-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{12} \\ x=-\sqrt{12}\end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng (H) bằng:

$$S=\int_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}}\left(\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}-\frac{x^2}{12}\right)\mathrm{d}x=2\int_0^{\sqrt{12}}\left(\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}-\frac{x^2}{12}\right)\mathrm{d}x=2\int_0^{\sqrt{12}}\left(\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}\right)\mathrm{d}x-2\int_0^{\sqrt{12}}\frac{x^2}{12}\mathrm{d}x$$

Xét $I_1=\int_0^{\sqrt{12}}\left(\sqrt{4-\dfrac{x^2}{4}}\right)\mathrm{d}x$

Đặt $x=4\sin t \Rightarrow dx=4\cos x dx$

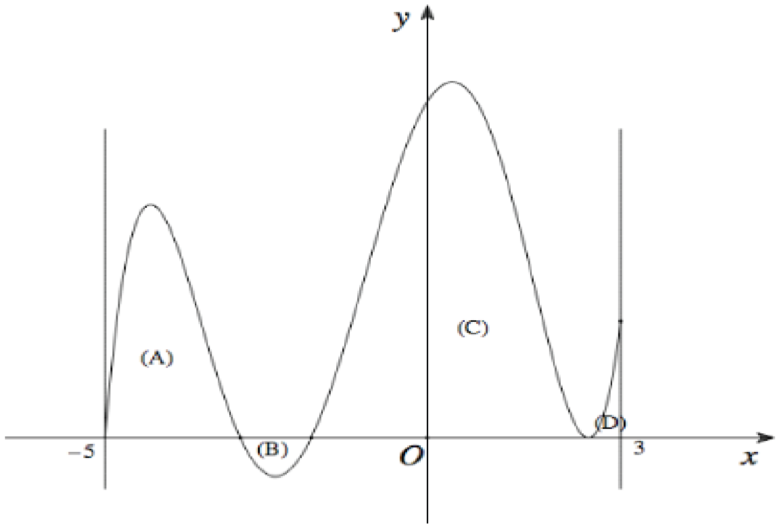
Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0;\ x=\sqrt{12}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{3}$

$$I_1=8\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 t\mathrm{d}t=4\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}$$

Xét $I_2=\int_0^{\sqrt{12}}\dfrac{x^2}{12}\mathrm{d}x=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Vậy $S=2I_1-2I_2=\dfrac{2\left(4\pi+\sqrt{3}\right)}{3}$

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5;3]$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết diện tích của hình phẳng $(A),(B),(C),(D)$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành lần lượt là $6;\ 3;\ 12;\ 2$. Tính tích phân $\int_{-3}^{1}\left[2f(2x+1)+1\right]dx$ bằng



A. 27. **B.** 25. **C.** 17. **D.** 21.

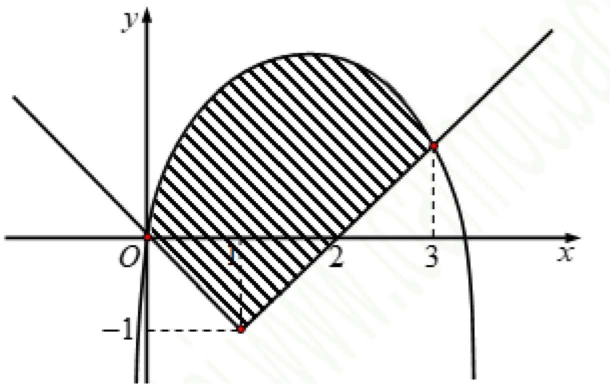
Hướng dẫn giải

Ta có $\int_{-3}^{1}\left[2f(2x+1)+1\right]dx=2\int_{-3}^{1}f(2x+1)dx+x\Big|_{-3}^{1}=\int_{-5}^{3}f(x)dx+4$

Mà $\int_{-5}^{3}f(x)dx=S_{(A)}-S_{(B)}+S_{(C)}+S_{(D)}=6-3+12+2=17$

Vậy $\int_{-3}^{1}\left[2f(2x+1)+1\right]dx=21$

Câu 40: Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ và được giới hạn bởi các đường có phương trình $y=\frac{10}{3}x-x^2$, $y=\begin{cases}-x & \text{khi } x\le 1\\ x-2 & \text{khi } x>1\end{cases}$. Diện tích của (H) bằng?



A. $\frac{11}{6}$. **B.** $\frac{13}{2}$. **C.** $\frac{11}{2}$. **D.** $\frac{14}{3}$.

Lời giải

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=-x$ và $y=x-2$ là: $-x=x-2\Leftrightarrow x=1$.

Diện tích hình phẳng cần tính là:

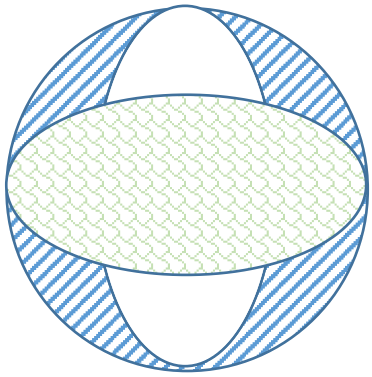
$$S=\int_0^1\left(\frac{10}{3}x-x^2+x\right)\mathrm{d}x+\int_1^3\left(\frac{10}{3}x-x^2-x+2\right)\mathrm{d}x.$$

$$\Leftrightarrow S=\int_0^1\left(\frac{13}{3}x-x^2\right)\mathrm{d}x+\int_1^3\left(\frac{7}{3}x-x^2+2\right)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow S=\int_0^1\left(\frac{13}{3}x-x^2\right)\mathrm{d}x+\int_1^3\left(\frac{7}{3}x-x^2+2\right)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow S=\left(\frac{13}{6}x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1+\left(\frac{7}{6}x^2-\frac{x^3}{3}+2x\right)\Bigg|_1^3=\frac{13}{2}.$$

Câu 41: Cho đường tròn có đường kính bằng 4 và 2 Elip lần lượt nhận 2 đường kính vuông góc nhau của đường tròn làm trục lớn, trục bé của mỗi Elip đều bằng 1. Diện tích S phần hình phẳng ở bên trong đường tròn và bên ngoài 2 Elip gần với kết quả nào nhất trong 4 kết quả dưới đây?



A. $S=4,8$. **B.** $S=3,9$. **C.** $S=3,7$. **D.** $S=3,4$.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

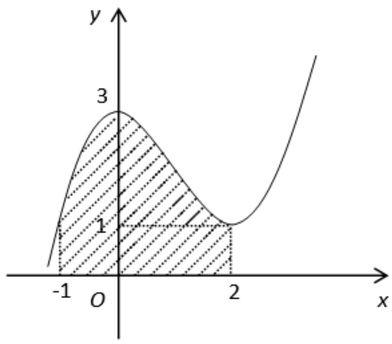
Hai Elip lần lượt có phương trình: $\left(E_1\right):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ và $\left(E_2\right):\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1$

Tọa độ giao điểm của hai Elip trong góc phần tư thứ nhất là nghiệm phương trình:

$$x^2+\frac{1-\frac{x^2}{4}}{4}=1\Leftrightarrow x^2=\frac{4}{5}\Rightarrow x=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Diện tích hình phẳng cần tìm: $S=\pi.2^2-\pi.2.1-4\int_0^{\frac{2\sqrt{5}}{5}}\left(2\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)dx=3,71$

Câu 42: Tính diện tích S của miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+c$, các đường thẳng $x=1$, $x=2$ và trục hoành cho trong hình dưới đây.



A. $S=\frac{51}{8}$. **B.** $S=\frac{52}{8}$. **C.** $S=\frac{50}{8}$. **D.** $S=\frac{53}{8}$.

Lời giải

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+c$, các đường thẳng $x=-1$, $x=2$ và trục hoành được chia thành hai phần:

□ Miền D_1 là hình chữ nhật có hai kích thước lần lượt là 1 và $3 \Rightarrow S_1=3$.

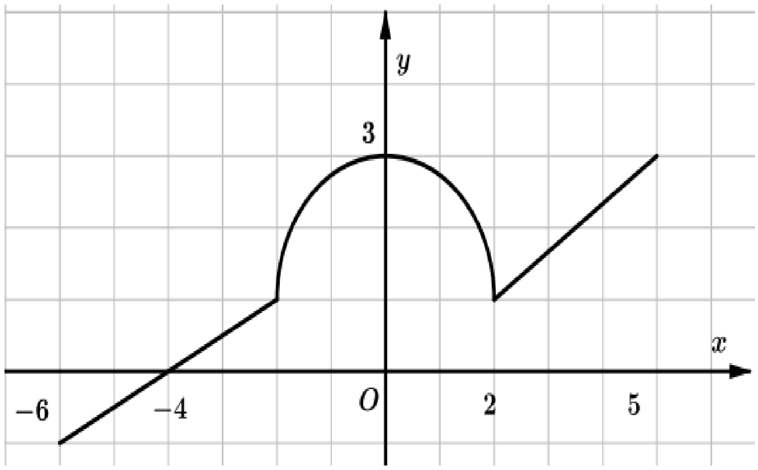
□ Miền D_2 gồm: $\begin{cases} f(x)=ax^3+bx^2+c \\ y=1 \\ x=-1; x=2 \end{cases}$.

Dễ thấy (C) đi qua 3 điểm $A(-1;1)$, $B(0;3)$, $C(2;1)$ nên đồ thị (C) có phương trình $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+3$.

$\Rightarrow S_2=\int_{-1}^{2}\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+3-1\right)dx=\frac{27}{8}$.

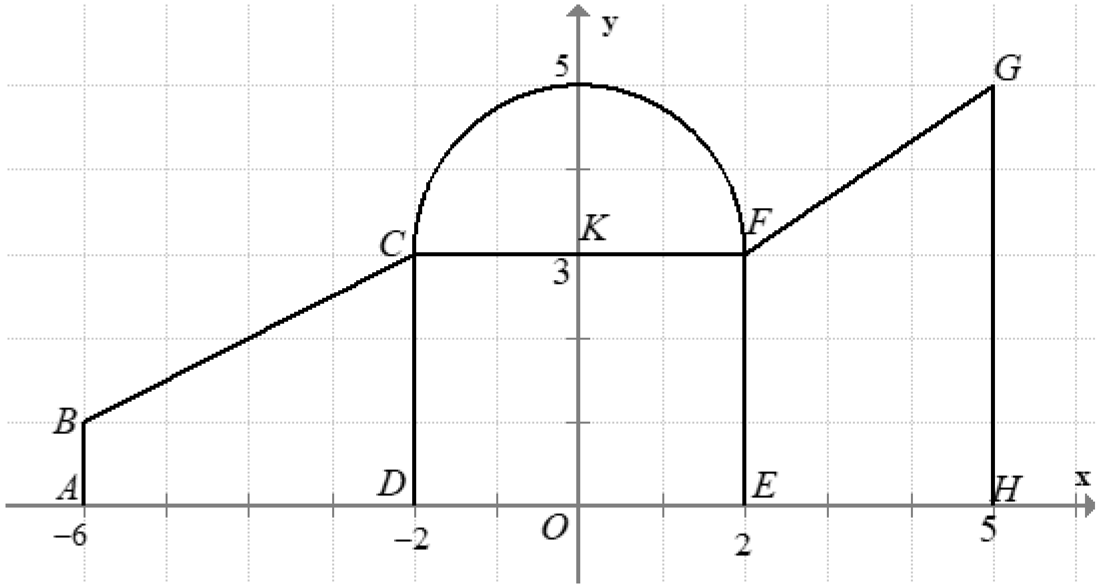
Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $S=S_1+S_2=\frac{51}{8}$.

Câu 43: Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[-6;5]$, có đồ thị gồm 2 đoạn thẳng và nửa đường tròn như hình vẽ. Tính giá trị $I=\int_{-6}^{5}\left[f(x)+2\right]dx$.



A. $I=2\pi+35$. **B.** $I=2\pi+34$. **C.** $I=2\pi+33$. **D.** $I=2\pi+32$.

Lời giải



$I=\int_{-6}^{5}\left[f\left(x\right)+2\right]\mathrm{d}x=\int_{-6}^{5}g\left(x\right)\mathrm{d}x$ với $g\left(x\right)=f\left(x\right)+2$ có đồ thị như hình vẽ.

Có $I=S_1+S_2+S_3+S_4$ trong đó:

S_1 là diện tích hình thang vuông $ABCD$ $\Rightarrow S_1=\dfrac{\left(AB+CD\right).AD}{2}=\dfrac{\left(1+3\right).4}{2}=8$,

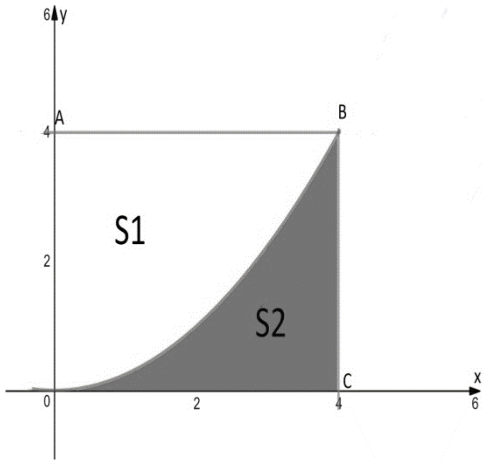
S_2 là diện tích hình chữ nhật $CDEF$ $\Rightarrow S_2=3.4=12$,

S_3 là diện tích hình tròn tâm I, bán kính $R=2$ $\Rightarrow S_3=\dfrac{\pi.2^2}{2}=2\pi$,

S_4 là diện tích hình thang vuông $EFGH$ $\Rightarrow S_4=\dfrac{\left(EF+GH\right).EH}{2}=\dfrac{\left(5+3\right).3}{2}=12$.

Suy ra $I=8+12+2\pi+12=2\pi+32$.

Câu 44: Hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong $\left(C\right)$ có phương trình $y=\dfrac{1}{4}x^2$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của phần không bị gạch và bị gạch như hình vẽ bên dưới. Tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$ bằng



A. $\frac{3}{2}$. **B.** 3. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Ta có diện tích hình vuông $OABC$ là 16 và bằng S_1+S_2.

$$S_2=\int_0^4\frac{1}{4}x^2\mathrm{d}x=\left.\frac{x^3}{12}\right|_0^4=\frac{16}{3}\Rightarrow\frac{S_1}{S_2}=\frac{16-S_2}{S_2}=\frac{16-\frac{16}{3}}{\frac{16}{3}}=2$$

Câu 45: Kí hiệu $S(t)$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2x+1$, $y=0$, $x=1$, $x=t$ $(t>1)$. Tìm t để $S(t)=10$.

A. $t=3$. **B.** $t=4$. **C.** $t=13$. **D.** $t=14$.

Lời giải

Cách 1. Ta có: $S(t)=\int_1^t|2x+1|\,\mathrm{d}x=\int_1^t(2x+1)\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $S(t)=\left.(x^2+x)\right|_1^t=t^2+t-2$.

Do đó $S(t)=10\Leftrightarrow t^2+t-2=10\Leftrightarrow t^2+t-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=-4\ (L)\end{array}\right.$.

Vậy $t=3$.

Cách 2. Hình phẳng đã cho là hình thang có đáy nhỏ bằng $y(1)=3$, đáy lớn bằng $y(t)=2t+1$ và chiều cao bằng $t-1$.

Ta có $\frac{(3+2t+1)(t-1)}{2}=10\Leftrightarrow 2t^2+2t-24=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=-4\end{array}\right.$. Vì $t>1$ nên $t=3$

Do đó chọn đáp án **A.**

Câu 46: Cho parabol $(P_1): y=-x^2+2x+3$ cắt trục hoành tại hai điểm A,B và đường thẳng $d: y=a$ $(0<a<4)$. Xét parabol (P_2) đi qua A,B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y=a$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và d .Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục hoành. Biết $S_1 = S_2$, tính $T = a^3 - 8a^2 + 48a$.

A. $T = 99$. **B.** $T = 64$. **C.** $T = 32$. **D.** $T = 72$.

Lời giải

Để việc tính toán trở nên đơn giản, ta tịnh tiến hai parabol sang trái một đơn vị.

Khi đó, phương trình các parabol mới là $(P_1): y = -x^2 + 4$, $(P_2): y = -\frac{a}{4}x^2 + a$.

Gọi A, B là các giao điểm của (P_1) và trục $Ox \Rightarrow A(-2;0), B(2;0) \Rightarrow AB = 4$.

Gọi A, B là giao điểm của (P_1) và đường thẳng $d \Rightarrow M\left(-\sqrt{4-a};a\right), N\left(\sqrt{4-a};a\right)$.

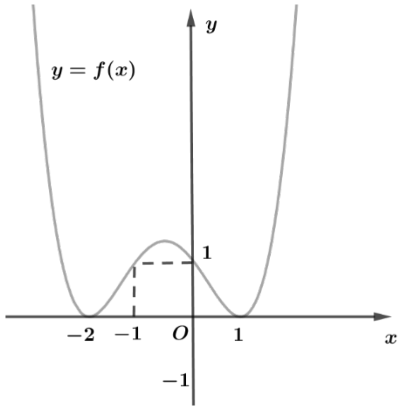
Ta có $S_1 = 2\int\limits_a^4 \sqrt{4-y}.dy = -\frac{4}{3}\left((4-y)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_a^4 = \frac{4}{3}(4-a)\sqrt{4-a}$

$S_2 = 2\int\limits_a^2 \left(-\frac{a}{4}x^2 + a\right).dx = 2\left(-\frac{ax^3}{12} + ax\right)\Big|_0^2 = \frac{8a}{3}$.

Theo giả thiết $S_1 = S_2 \Rightarrow \frac{4}{3}(4-a)\sqrt{4-a} = \frac{8a}{3} \Leftrightarrow (4-a)^3 = 4a^2 \Leftrightarrow a^3 - 8a^2 + 48a = 64$

Vậy $T = 64$.

Câu 47: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ.



Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x); y = f'(x)$ có diện tích bằng

A. $\frac{127}{40}$. **B.** $\frac{127}{10}$. **C.** $\frac{107}{5}$. **D.** $\frac{13}{5}$.

Lời giải

Hàm số đã cho có dạng $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \Rightarrow f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$.

Từ giả thiết đồ thị hàm số đã cho ta thấy đồ thị hàm số đi qua các điểm $(-2;0)$, $(-1;1)$, $(0;1)$, $(1;0)$ và có hai điểm cực tiểu là $(1;0)$, $(-2;0)$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(-2) = 0 \\ f(1) = 0 \\ f'(-2) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e = 1 \\ a+b+c+d = -1 \\ 16a-8b+4c-2d = -1 \\ -32a+12b-4c+d = 0 \\ 4a+3b+2c+d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e = 1 \\ a = \dfrac{1}{4} \\ b = \dfrac{1}{2} \\ c = \dfrac{-3}{4} \\ d = -1 \end{cases}.$$

Do đó $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2-x+1 \Rightarrow f'(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x-1$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $f(x)=f'(x)$.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{1}{2}x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-1 \\ x=1 \\ x=4 \end{array}\right..$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x); y=f'(x)$ là

$$S=\int_{-2}^{4}\left|f(x)-f'(x)\right|dx$$

Vì biểu thức $f(x)-f'(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{1}{2}x+2$ không đổi đấu trên các khoảng $(-2;-1)$, $(-1;1)$, nên ta có

$$S=\left|\int_{-2}^{-1}\left[f(x)-f'(x)\right]dx\right|+\left|\int_{-1}^{1}\left[f(x)-f'(x)\right]dx\right|+\left|\int_{1}^{4}\left[f(x)-f'(x)\right]dx\right|=\frac{107}{5}(dvdt).$$

Câu 48: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $my=x^2$, $mx=y^2$ $(m>0)$. Tìm giá trị của m để $S=3$.

A. $m=1$ **B.** $m=2$ **C.** $m=3$ **D.** $m=4$

Lời giải

Chọn C

Tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} my=x^2 & (1) \\ mx=y^2 & (2) \end{cases}$

Thế vào ta được: $mx=\left(\dfrac{x^2}{m}\right)^2 \Leftrightarrow m^3x-x^4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=m>0 \end{array}\right.$

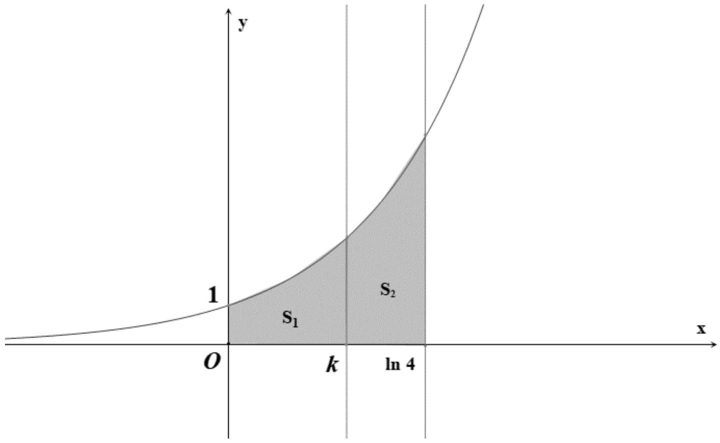
Vì $y=\dfrac{x^2}{m}>0$ nên $mx=y^2 \xleftrightarrow{y>0} y=\sqrt{mx}$

Khi đó diện tích hình phẳng cần tìm là: $S=\displaystyle\int_0^m\left|\sqrt{mx}-\frac{x^2}{m}\right|dx=\left|\int_0^m\left(\sqrt{mx}-\frac{x^2}{m}\right)dx\right|$

$$=\left|\left(\frac{2\sqrt{m}}{3}.x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3m}\right)\Bigg|_0^m\right|=\left|\frac{1}{3}m^2\right|=\frac{1}{3}m^2$$

Yêu cầu bài toán $S=3\Leftrightarrow\frac{1}{3}m^2=3\Leftrightarrow m^2=9\xleftrightarrow{m>0}m=3$

Câu 49: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=\ln 4$. Đường thẳng $x=k$ $(0<k<\ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1=2S_2$.



A. $k=\frac{4}{3}\ln 2$. **B.** $k=\ln\frac{8}{3}$. **C.** $k=\ln 2$. **D.** $k=\ln 3$.

Lời giải

Diện tích hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=\ln 4$ là

$$S=\int_0^{\ln 4}e^x\mathrm{d}x=e^x\Big|_0^{\ln 4}=e^{\ln 4}-e^0=4-1=3.$$

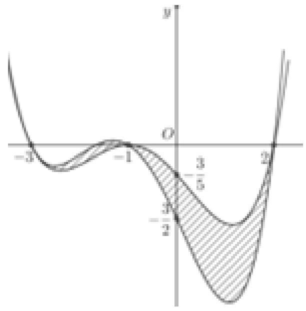
Ta có $S=S_1+S_2=S_1+\frac{1}{2}S_1=\frac{3}{2}S_1$. Suy ra $S_1=\frac{2S}{3}=\frac{2.3}{3}=2$.

Vì S_1 là phần diện tích được giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=k$ nên

$$2=S_1=\int_0^k e^x\mathrm{d}x=e^x\Big|_0^k=e^k-e^0=e^k-1.$$

Do đó $e^k=3\Leftrightarrow k=\ln 3$.

Câu 50: Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ và $y=g(x)$. Biết rằng đồ thị cảu hai hàm số này cắt nhau tại đúng ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-3;-1;2$. Diện tích của hình phẳng (H) **gần nhất** với kết quả nào dưới đây?



A. 3,11 **B.** 2,45 **C.** 3,21 **D.** 2,95

Lời giải

Chọn A

$f(x)-g(x)=a(x+3)(x+1)(x-2)=(ax+3a)(x^2-x-2)=ax^3-ax^2-2ax+3ax^2-3ax-6a$

$=ax^3+2ax^2-5ax-6a$

$f(0)-g(0)=-6a$, quan sát hình vẽ ta có $f(0)-g(0)=-\frac{3}{5}+\frac{3}{2}=\frac{9}{10}$

Nên $-6a=\frac{9}{10}\Rightarrow a=\frac{-3}{20}$ $S=\int_{-3}^{2}\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_{-3}^{2}\left|\frac{-3}{20}(x+3)(x+1)(x-2)\right|dx=\frac{253}{80}=3.1625$

Câu 51: Cho parabol $(P):y=x^2$ và hai điểm A,B thuộc (P) sao cho $AB=2$. Diện tích lớn nhất của hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB là

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Gọi phương trình đường thẳng AB là: $y=ax+b\ \ (a,b\in\mathbb{R})$

Phương trình giao điểm của AB và (P) là: $x^2-ax-b=0$

Để có 2 điểm A,B thì $a^2+4b>0$. khi đó: $\begin{cases}A(x_1;ax_1+b)\\B(x_2;ax_2+b)\\x_1+x_2=a\\x_1x_2=-b\end{cases}$

Nên $AB=2\Leftrightarrow\sqrt{(a^2+1)}\left|x_2-x_1\right|=2$

Giả sử $x_2>x_1$ ta có $\left|x_2-x_1\right|=\frac{2}{\sqrt{(a^2+1)}}\le 2$

Mặt khác: $\left|x_2-x_1\right|=\sqrt{(x_2+x_1)^2-4x_1x_2}=\sqrt{a^2+4b}$

Khi đó $S=\int_{x_1}^{x_2}ax+b-x^2\mathrm{d}x=\frac{a}{2}(x_2^2-x_1^2)+b(x_2-x_1)-\frac{1}{3}(x_2^3-x_1^3)$

$$=\left(x_2-x_1\right)\left[\frac{a}{2}\left(x_2+x_1\right)+b-\frac{1}{3}\left(x_2^2+x_1x_2+x_1^2\right)\right]$$

$$=\left(x_2-x_1\right)\left[\frac{a}{2}.a+b-\frac{1}{3}\left(a^2+b\right)\right]=\left(x_2-x_1\right)\left[\frac{a^2}{b}+\frac{2b}{3}\right]=\frac{a^2+4b}{6}\left(x_2-x_1\right)=\frac{\left(x_2-x_1\right)^3}{6}\le\frac{8}{6}=\frac{4}{3}.$$

Suy ra: $S_{max}=\frac{4}{3}$ khi $\begin{cases}a=0\\x_2-x_1=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_1=x_2=1\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}A(1;1)\\B(-1;1)\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}A(-1;1)\\B(1;1)\end{cases}$.

Câu 52: Cho Parabol $(P): y=x^2+1$ và đường thẳng $d: y=mx+2$ với m là tham số. Gọi m_0 là giá trị của m để diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và d là nhỏ nhất. Hỏi m_0 nằm trong khoảng nào?

A. $(-\sqrt{2};-\frac{1}{2})$. **B.** . **C.** $(-1;\frac{1}{\sqrt{2}})$. **D.** $(\frac{1}{2};3)$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ của (P) và d là $x^2-mx-1=0\ (1)$.

Dễ thấy (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt. Gọi $a, b\ (a<b)$ là các nghiệm của (1) thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và d là

$$S=\int_a^b\left|x^2-mx-1\right|dx=\left|\int_a^b\left(x^2-mx-1\right)dx\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}-\frac{mx^2}{2}-x\right)\Big|_a^b\right|$$

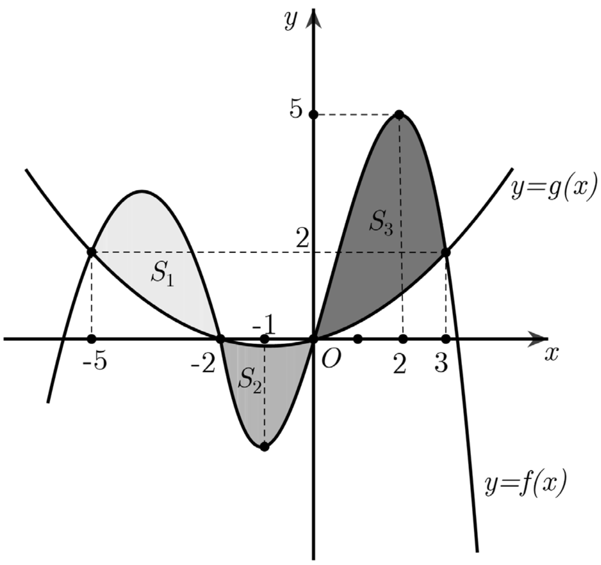
$$=\left|\frac{b^3-a^3}{3}-\frac{m(b^2-a^2)}{2}-(b-a)\right|=|b-a|.\left|\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{m(b+a)}{2}-1\right|$$

$$=\sqrt{(b+a)^2-4ab}.\left|\frac{(b+a)^2-ab}{3}-\frac{m(b+a)}{2}-1\right|$$

Mà $a+b=m,\ ab=-1$ nên $S=\sqrt{m^2+4}.\left(\frac{m^2}{6}+\frac{2}{3}\right)\ge\frac{4}{3}$.

Do đó $\min S=\frac{4}{3}$ khi $m=0$.

Câu 53: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5;3]$. Biết rằng diện tích hình phẳng S_1, S_2, S_3 giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và đường parabol $y=g(x)=ax^2+bx+c$ lần lượt là m,n,p.



Tích phân $\int\limits_{-5}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $-m+n-p-\dfrac{208}{45}$. **B.** $m-n+p+\dfrac{208}{45}$ **C.** $m-n+p-\dfrac{208}{45}$. **D.** $-m+n-p+\dfrac{208}{45}$.

Lời giải

Chọn B

$$S_1=\int\limits_{-5}^{-2}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-5}^{-2}f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{-5}^{-2}g(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_{-5}^{-2}f(x)\,\mathrm{d}x=S_1+\int\limits_{-5}^{-2}g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

$$S_2=\int\limits_{-2}^{0}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{0}g(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{-2}^{0}f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_{-2}^{0}f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{0}g(x)\,\mathrm{d}x-S_2\,.$$

$$S_3=\int\limits_{-5}^{-2}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{0}^{3}g(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_{0}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x=S_1+\int\limits_{0}^{3}g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Do vậy: $\int\limits_{-5}^{3} f(x)dx=S_1-S_2+S_3+\int\limits_{-5}^{3} g(x)dx.$

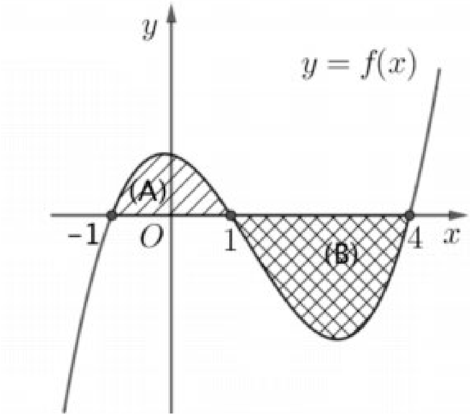
Từ đồ thị ta thấy $\int\limits_{-5}^{3} g(x)dx$ là số dương. Mà 4 đáp án chỉ có B là phù hợp, nên ta **Chọn B**

Chú ý: Có thể tính $\int\limits_{-5}^{3} g(x)dx$ như sau:

Từ đồ thị hàm số $y=g(x)$ ta thấy nó đi qua các điểm $(-5;2)$, $(-2;0)$, $(0;0)$ nên ta có:

$$\begin{cases}25a-5b+c=2\\ 4a-2b+c=0\\ c=0\end{cases} \Rightarrow a=\frac{2}{15},\ b=\frac{4}{15},\ c=0.\ \text{Do đó: } \int\limits_{-5}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-5}^{3}\left(\frac{2}{15}x^2+\frac{4}{15}x\right)\mathrm{d}x=\frac{208}{45}\,.$$

Câu 54: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng diện tích các phần $(A),(B)$ lần lượt bằng 3 và 7. Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.f(5\sin x-1)\mathrm{d}x$ bằng



A. $-\frac{4}{5}$ **B.** 2 **C.** $\frac{4}{5}$ **D.** -2

Lời giải

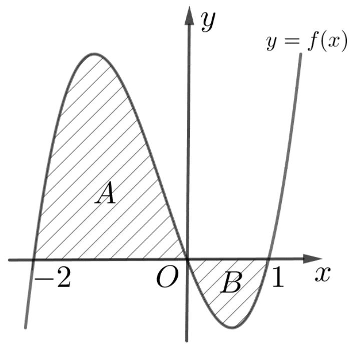
Chọn A

Theo giả thiết ta có $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=3$ và $\int\limits_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x=-7$ suy ra $\int\limits_{-1}^{4} f(x)\mathrm{d}x=-4$.

Đặt $t=5\sin x-1 \Rightarrow \mathrm{d}t=5\cos x\,\mathrm{d}x$.

Khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.f(5\sin x-1)\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\int\limits_{-1}^{4} f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{5}\int\limits_{-1}^{4} f(x)\mathrm{d}x=-\frac{4}{5}$.

Câu 55: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ và diện tích hai phần A,B lần lượt bằng 11 và 2.



Giá trị của $I=\int\limits_{-1}^{0} f(3x+1)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** $\frac{13}{3}$. **C.** 9. **D.** 13.

Lời giải

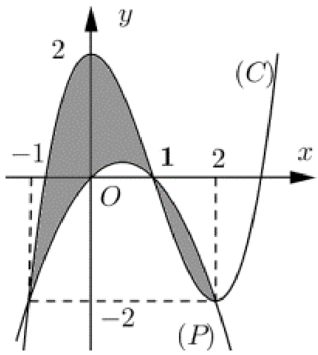
Chọn A

+) Xét $I = \int_{-1}^{0} f(3x+1)\mathrm{d}x$, đặt $(3x+1) = t \Rightarrow dt = 3dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{3}$

+) Đổi cận $\begin{cases} x = -1 \Rightarrow t = -2 \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow I = \frac{1}{3}\int_{-2}^{1} f(t)\mathrm{dt} = \frac{1}{3}\left[\int_{-2}^{0} f(t)\mathrm{dt} + \int_{0}^{1} f(t)\mathrm{dt}\right] = \frac{1}{3}(S_A - S_B) = \frac{1}{3}(11-2) = 3$

Câu 56: Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm đa thức bậc ba và parabol (P) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần **tô đậm** của hình vẽ có diện tích bằng



A. $\frac{37}{12}$. **B.** $\frac{7}{12}$. **C.** $\frac{11}{12}$. **D.** $\frac{5}{12}$.

Lời giải

Cách 1:

Gọi hàm số bậc ba là $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Đồ thị (C) đi qua các điểm $(1;0),(2;-2)$ và đạt cực trị tại $x = 0; x = 2$ nên ta có hệ sau :

$$\begin{cases} 0 = a+b+c+d \\ -2 = 8a+4b+2c+d \\ 0 = c \\ 0 = 12a+4b+c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases}.$$

Suy ra hàm số bậc ba là $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Gọi hàm bậc hai là $y = mx^2 + nx + p$. Đồ thị (P) đi qua các điểm $(1;0)$, $(2;-2)$, $(-1;-2)$ nên ta có hệ sau :

$$\begin{cases} 0 = m+n+p \\ -2 = 4m+2n+p \\ -2 = m-n+p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = 1 \\ p = 0 \end{cases}.$$

Suy ra hàm số bậc hai là $y = -x^2 + x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (P) là :

$$x^3-3x^2+2=-x^2+x \Leftrightarrow x^3-2x^2-x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right. .$$

Vậy diện tích phần tô đậm là : $S=\int_{-1}^{2}\left|\left(x^3-2x^2-x+2\right)\right|dx$.

$$S=\left|\int_{-1}^{1}\left(x^3-2x^2-x+2\right)dx\right|+\left|\int_{1}^{2}\left(x^3-2x^2-x+2\right)dx\right|=\frac{8}{3}+\frac{5}{12}=\frac{37}{12}.$$

<u>Cách 2</u>:

Vì đồ thị hàm bậc ba và đồ thị hàm bậc hai cắt trục tung tại các điểm có tung độ lần lượt là $y=2, y=0$ nên ta xét hai hàm số là $y=ax^3+bx^2+cx+2$, $y=mx^2+nx$.

* Vì đồ thị hai hàm số cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt là $x=-1; x=1; x=2$ nên ta có phương trình hoành độ giao điểm:

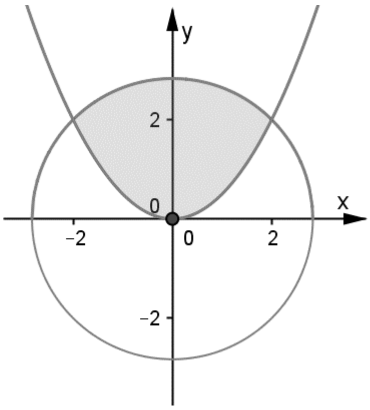
$ax^3+bx^2+cx+2=mx^2+nx \Leftrightarrow a(x+1)(x-1)(x-2)=0$. Với $x=0$ ta được $2a=2 \rightarrow a=1$.

*Vậy diện tích phần tô đậm là: $S=\int_{-1}^{2}\left|(x+1)(x-1)(x-2)\right|dx=\frac{37}{12}$.

Câu 57: Parabol $y=\frac{x^2}{2}$ chia hình tròn có tâm là gốc tọa độ, bán kính bằng $2\sqrt{2}$ thành hai phần có diện tích S_1 và S_2, trong đó $S_1<S_2$. Tìm tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.

A. $\frac{3\pi+2}{12\pi}$. **B.** $\frac{9\pi-2}{3\pi+2}$. **<u>C.</u>** $\frac{3\pi+2}{9\pi-2}$. **D.** $\frac{3\pi+2}{21\pi-2}$.

Lời giải



Diện tích hình tròn là $S=\pi R^2=8\pi$.

Phương trình đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=2\sqrt{2}$ là $x^2+y^2=8$.

Hoành độ giao điểm của Parabol và đường tròn là nghiệm của phương trình $x^2+\frac{x^4}{4}=8$

$\Leftrightarrow x^4+4x^2-32=0 \Leftrightarrow \left(x^2+8\right)\left(x^2-4\right)=0 \Leftrightarrow x^2-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Phương trình nửa phía trên trục Ox của đường tròn là: $y=\sqrt{8-x^2}$.

Diện tích miền giới hạn bởi Parabol và nửa phía trên trục Ox của đường tròn là:

$$\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{x^2}{2}\right)dx=\int_{-2}^{2}\sqrt{8-x^2}dx-\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}x^2dx$$

Ta có $\int_{-2}^{2}x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-2}^{2}=\frac{16}{3}$.

$$I=\int_{-2}^{2}\sqrt{8-x^2}dx$$

Đặt $x=2\sqrt{2}\sin t \quad \left(t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right) \Rightarrow dx=2\sqrt{2}\cos t dt$

+) $x=-2 \Rightarrow t=-\frac{\pi}{4}$

+) $x=2 \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$.

$$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{8-8\sin^2 t}.2\sqrt{2}\cos t dt=8\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t dt=4\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\cos 2t\right)dt=4\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\cos 2t\right)dt$$

$$=4\left.\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\right|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=2\pi+4.$$

Vậy $\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{x^2}{2}\right)dx=2\pi+\frac{4}{3}$.

Diện tích phần còn lại là $8\pi-\left(2\pi+\frac{4}{3}\right)=6\pi-\frac{4}{3}$.

Vậy $S_1=2\pi+\frac{4}{3};\ S_2=6\pi-\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi+2}{9\pi-2}$

Câu 58: Tìm số thực a để hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm $y=\frac{x^2+2ax+3a^2}{1+a^6}$ và $y=\frac{a^2-ax}{1+a^6}$ có diện tích lớn nhất.

A. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\sqrt[3]{3}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là:

$$\frac{x^2+2ax+3a^2}{1+a^6}=\frac{a^2-ax}{1+a^6}\Leftrightarrow x^2+3ax+2a^2=0\Leftrightarrow (x+a)(x+2a)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-a\\x=-2a\end{array}\right.$$

□□Nếu $a=0$ thì diện tích hình phẳng $S=0$.

+ Nếu $a>0$ thì $S=\int\limits_{-2a}^{-a}\left|\frac{x^2+3ax+2a^2}{1+a^6}\right|\mathrm{d}x=-\int\limits_{-2a}^{-a}\frac{x^2+3ax+2a^2}{1+a^6}\mathrm{d}x=\frac{1}{6}.\frac{a^3}{1+a^6}$.

+ Nếu $a<0$ thì $S=\int\limits_{-a}^{-2a}\left|\frac{x^2+3ax+2a^2}{1+a^6}\right|\mathrm{d}x=-\int\limits_{-a}^{-2a}\frac{x^2+3ax+2a^2}{1+a^6}\mathrm{d}x=-\frac{1}{6}.\frac{a^3}{1+a^6}$.

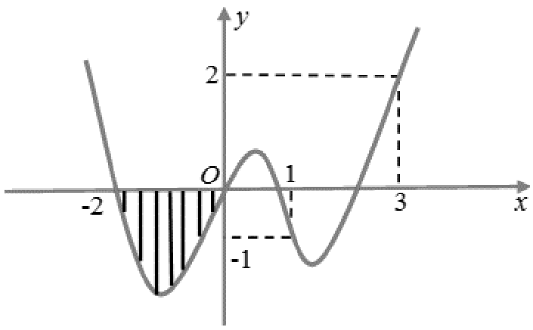
Do đó, với $a\neq 0$ thì $S=\frac{1}{6}.\frac{|a|^3}{1+|a|^6}\leq\frac{1}{6}.\frac{|a|^3}{2|a|^3}=\frac{1}{12}$.

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $|a|^3=1\Leftrightarrow a=\pm 1$.

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai hàm đã cho có diện tích lớn nhất khi $a=1$.

Câu 59: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Biết diện tích hình phẳng phần sọc kẻ bằng 3. Tính giá trị của biểu thức:

$$T=\int\limits_1^2 f'(x+1)\mathrm{d}x+\int\limits_2^3 f'(x-1)\mathrm{d}x+\int\limits_3^4 f(2x-8)\mathrm{d}x$$



A. $T=\frac{9}{2}$. **B.** $T=6$. **C.** $T=0$. **D.** $T=\frac{3}{2}$.

Lời giải

□ Diện tích phần kẻ sọc là: $S=\int\limits_{-2}^{0}|f(x)|\mathrm{d}x=3$.

Vì $f(x)\leq 0\ \ \forall x\in[-2;0]\Rightarrow 3=\int\limits_{-2}^{0}|f(x)|\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{0}[-f(x)]\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int\limits_{-2}^{0}f(x)\mathrm{d}x=-3$.

□ Tính $I=\int\limits_3^4 f(2x-8)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=2x-8\Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$; $x=3\Rightarrow t=-2$; $x=4\Rightarrow t=0$.

Suy ra: $I = \int_{-2}^{0} f(t).\frac{1}{2}\mathrm{dt} = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{dx} = -\frac{3}{2}$.

□ Vậy $T = \int_{1}^{2} f'(x+1)\mathrm{dx} + \int_{2}^{3} f'(x-1)\mathrm{dx} + \int_{3}^{4} f(2x-8)\mathrm{dx}$

$= f(x+1)\Big|_1^2 + f(x-1)\Big|_2^3 + I = f(3) - f(2) + f(2) - f(1) - \frac{3}{2} = 2 - (-1) - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$.

Câu 60: Cho hàm số $y = x^4 - 6x^2 + m$ có đồ thị (C_m). Giả sử (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt sao cho hình phẳng giới hạn bởi (C_m) và trục hoành có phần phía trên trục hoành và phần phía dưới trục hoành có diện tích bằng nhau. Khi đó $m = \frac{a}{b}$. Giá trị của biểu thức $S = a + b$ là:

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - 6x^2 + m = 0$ (1).

Đặt $t = x^2$ $(t \ge 0)$ (1) trở thành $t^2 - 6t + m = 0$ (2).

(C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt thì phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt hay phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (-3)^2 - m > 0 \\ P = m > 0 \\ S = 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 9$ $(*)$.

Gọi t_1, t_2 $(0 < t_1 < t_2)$ là hai nghiệm của phương trình (2). Lúc đó phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt theo thứ tự tăng dần là: $x_1 = -\sqrt{t_2}$; $x_2 = -\sqrt{t_1}$; $x_3 = \sqrt{t_1}$; $x_4 = \sqrt{t_2}$.

Do tính đối xứng của đồ thị (C_m) nên có $\int_{0}^{x_3}(x^4 - 6x^2 + m)\mathrm{dx} = \int_{x_3}^{x_4}(-x^4 + 6x^2 - m)\mathrm{dx}$

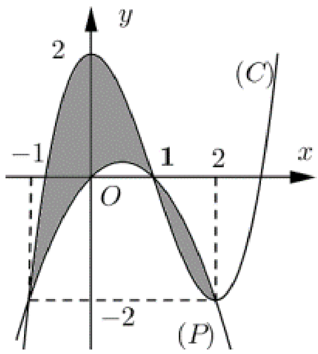
$\Rightarrow \frac{x_4^5}{5} - 2x_4^3 + mx_4 = 0 \Leftrightarrow x_4^5 - 10x_4^3 + 5mx_4 = 0$.

Từ đó có x_4 là nghiệm của hệ phương trình: $\Leftrightarrow \begin{cases} x_4^4 - 6x_4^2 + m = 0 & (3) \\ x_4^4 - 10x_4^2 + 5m = 0 & (4) \end{cases}$

Lấy $(3) - (4) \Rightarrow x_4^2 = m$, thay $x_4^2 = m$ vào (3) có: $m^2 - 5m = 0 \Rightarrow m = 0 \vee m = 5$.

Đối chiếu điều kiện $(*)$ ta có $m = 5 \Rightarrow a = 5$ và $b = 1$. Vậy $S = 6$.

Câu 61: Hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số đa thức bậc ba và parabol có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần **tô đậm** như hình vẽ có diện tích bằng



A. $\dfrac{37}{12}$. **B.** $\dfrac{7}{12}$. **C.** $\dfrac{11}{12}$. **D.** $\dfrac{5}{12}$.

Lời giải

Chọn A

+) Gọi $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a \neq 0)$

Do (C) cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng 2 nên $d = 2$

(C) đi qua 3 điểm $A(-1;-2)$, $B(1;0)$ và $C(2;-2)$ nên ta được hệ phương trình

$\begin{cases} -a+b-c=-4 \\ a+b+c=-2 \\ 4a+2b+c=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=0 \end{cases}$. Do đó $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$

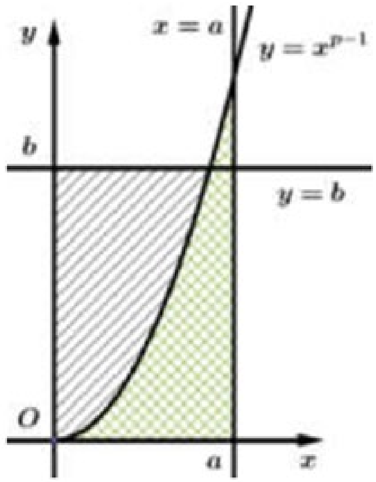
+) Gọi $(P): y = mx^2 + nx + r\,(m \neq 0)$

Do (P) đi qua 3 điểm $a(-1;-2)$, $O(0;0)$ và $C(2;-2)$ nên ta được

$\begin{cases} m-n+r=-2 \\ r=0 \\ 4m+2n+r=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ r=0 \\ n=1 \end{cases}$. Do đó $(P): y = -x^2 + x$

Vậy $S_{(H)} = \int_{-1}^{2} \left| x^3 - 2x^2 - x + 2 \right| dx \overset{MTCT}{=} \dfrac{37}{12}$

Câu 62: Cho các số p, q thỏa mãn các điều kiện**:** $p > 1$, $q > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ và các số dương a, b. Xét hàm số**:** $y = x^{p-1}\,(x > 0)$ có đồ thị là (C). Gọi (S_1) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), trục hoành, đường thẳng $x = a$, Gọi (S_2) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), trục tung, đường thẳng $y = b$, Gọi (S) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, trục tung và hai đường thẳng $x = a$, $y = b$. Khi so sánh $S_1 + S_2$ và S ta nhận được bất đẳng thức nào trong các bất đẳng thức dưới đây?



A. $\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\le ab$ **B.** $\frac{a^{p-1}}{p-1}+\frac{b^{q-1}}{q-1}\ge ab$. **C.** $\frac{a^{p+1}}{p+1}+\frac{b^{q+1}}{q+1}\le ab$. **D.** $\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\ge ab$.

Lời giải

Ta có: $S\le S_1+S_2$.

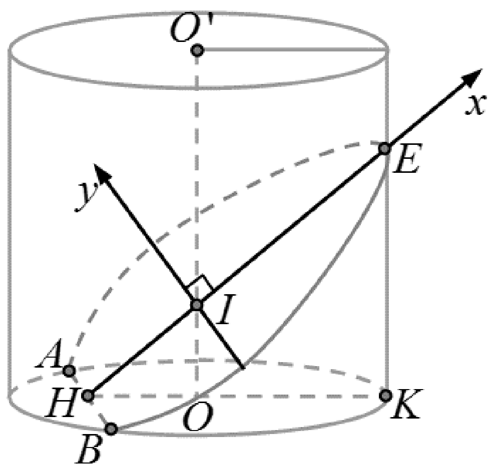
$$S_1=\int_0^a\left(x^{p-1}\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{x^p}{p}\right)\right|_0^a=\frac{a^p}{p};\ S_2=\int_0^b\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right)\mathrm{d}y=\left.\left(\frac{y^{\frac{1}{p-1}+1}}{\frac{1}{p-1}+1}\right)\right|_0^b=\left.\left(\frac{y^q}{q}\right)\right|_0^b=\frac{b^q}{q}.$$

Vì: $\frac{1}{p-1}+1=\frac{p}{p-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{p}}=\frac{1}{\frac{1}{q}}=q$. Vậy $\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\ge ab$.

Câu 63: Cho khối trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O;R)$ và $(O';R)$, $OO'=4R$. Trên đường tròn $(O;R)$ lấy hai điểm A, B sao cho $AB=a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) đi qua A, B cắt đoạn OO' và tạo với đáy một góc $60°$, (P) cắt khối trụ theo thiết diện là một phần của elip. Diện tích thiết diện đó bằng

A. $\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$. **B.** $\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$. **C.** $\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$. **D.** $\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$.

Lời giải



Cách 1: Gọi $I,\ H,\ K,\ E$ là các điểm như hình vẽ.

* Ta có: $\widehat{IHO}=60°$

$OH^2=OB^2-BH^2=R^2-\dfrac{3R^2}{4}=\dfrac{R^2}{4}\Rightarrow OH=\dfrac{R}{2}\Rightarrow OI=OH.\tan 60°=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$,

$IH=\dfrac{OH}{\cos 60°}=R$, $\Delta IOH\sim\Delta EKH$ nên ta có: $\dfrac{IE}{IH}=\dfrac{OK}{OH}=2\Rightarrow IE=2R$.

* Chọn hệ trục tọa độ Ixy như hình vẽ ta có elip (E) có bán trục lớn là $a=IE=2R$ và (E) đi qua $A\left(-R;\dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right)$ nên (E) có phương trình là $(E):\dfrac{x^2}{4R^2}+\dfrac{y^2}{R^2}=1$.

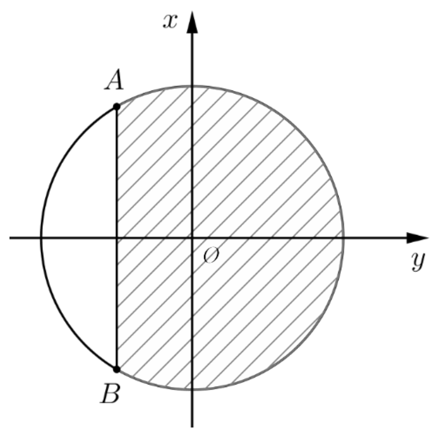
* Diện tích của thiết diện là $S=2\int_{-R}^{2R}R\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4R^2}}\mathrm{d}x=2R\int_{-R}^{2R}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4R^2}}\mathrm{d}x$

* Xét tích phân: $I=\int_{-R}^{2R}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4R^2}}\mathrm{d}x$, đặt $x=2R.\sin t;\ t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ ta được

$$I=\frac{R}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\frac{R}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)R\Rightarrow S=\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2.$$

Cách 2: $\cos\widehat{AOB}=\dfrac{OA^2+OB^2-AB^2}{2.OA.OB}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{AOB}=120°\Rightarrow OH=\dfrac{R}{2}.$

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ



$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn đáy là $x^2+y^2=R^2\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$.

Hình chiếu của phần elip xuống đáy là miền sọc xanh như hình vẽ.

Ta có $S=2\int_{-\frac{R}{2}}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$. Đặt $x=R.\sin t\Rightarrow S=\left(\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$.

Gọi diện tích phần elip cần tính là S'.

Theo công thức hình chiếu, ta có $S' = \dfrac{S}{\cos 60°} = 2S = \left(\dfrac{4\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$.

Câu 64: Cho parabol $(P): y = x^2$ và một đường thẳng d thay đổi cắt (P) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 2018$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng d. Tìm giá trị lớn nhất S_{max} của S.

A. $S_{max} = \dfrac{2018^3+1}{6}$. **B.** $S_{max} = \dfrac{2018^3}{3}$. **C.** $S_{max} = \dfrac{2018^3-1}{6}$. **D.** $S_{max} = \dfrac{2018^3}{3}$.

Lời giải

Giả sử $A(a;a^2)$; $B(b;b^2)(b > a)$ sao cho $AB = 2018$.

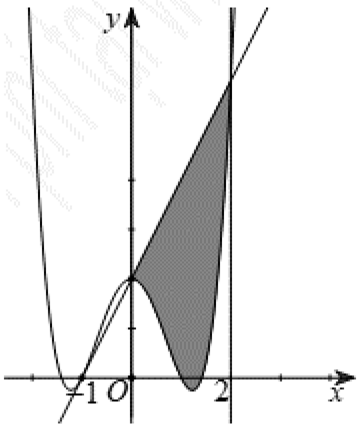
Phương trình đường thẳng d là: $y = (a+b)x - ab$. Khi đó

$$S = \int_a^b \left|(a+b)x - ab - x^2\right| dx = \int_a^b \left((a+b)x - ab - x^2\right) dx = \frac{1}{6}(b-a)^3.$$

Vì $AB = 2018 \Leftrightarrow (b-a)^2 + (b^2-a^2)^2 = 2018^2 \Leftrightarrow (b-a)^2\left(1+(b+a)^2\right) = 2018^2$.

$\Rightarrow (b-a)^2 \le 2018^2 \Rightarrow |b-a| = b-a \le 2018 \Rightarrow S \le \dfrac{2018^3}{6}$. Vậy $S_{\max} = \dfrac{2018^3}{6}$ khi $a = -1009$ và $b = 1009$.

Câu 65: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị (C), biết rằng (C) đi qua điểm $A(-1;0)$, tiếp tuyến d tại A của (C) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2 và diện tích hình phẳng giới hạn bởi d, đồ thị (C) và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 2$ có diện tích bằng $\dfrac{28}{5}$.



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và hai đường thẳng $x = -1$; $x = 0$ có diện tích bằng

A. $\dfrac{2}{5}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{2}{9}$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải

Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx \Rightarrow d: y = (-4a-2b)(x+1)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $(-4a-2b)(x+1) = ax^4 + bx^2 + c\ (1)$.

Phương trình (1) phải cho 2 nghiệm là $x=0$, $x=2$.

$$\Rightarrow \begin{cases} -4a-2b=c \\ -12a-6b=16a+4b+c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4a-2b-c=0\,(2) \\ 28a+10b+c=0\,(3) \end{cases}.$$

Mặt khác, diện tích phần tô màu là $\dfrac{28}{5}=\displaystyle\int_0^2\left[(-4a-2b)(x+1)-ax^4-bx^2-c\right]\mathrm{d}x$

$$\Leftrightarrow \frac{28}{5}=4(-4a-2b)-\frac{32}{5}a-\frac{8}{3}b-2c \Leftrightarrow \frac{112}{5}a+\frac{32}{3}b+2c=-\frac{28}{5}\,(4).$$

Giải hệ 3 phương trình (2), (3) và (4) ta được $a=1$, $b=-3$, $c=2$.

Khi đó, $(C): y=x^4-3x^2+2$, $d: y=2(x+1)$.

Diện tích cần tìm là $S=\displaystyle\int_{-1}^{0}\left[x^4-3x^2+2-2(x+1)\right]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\left(x^4-3x^2-2x\right)dx=\frac{1}{5}$.

Câu 66: Đặt S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=4-x^2$, trục hoành và đường thẳng $x=-2$, $x=m$, $(-2<m<2)$. Tìm số giá trị của tham số m để $S=\dfrac{25}{3}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $S=\displaystyle\int_{-2}^{m}\left|4-x^2\right|\mathrm{d}x=\frac{25}{3}$.

Phương trình $4-x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

Bài ra $-2<m<2$ nên trên $(-2;m)$ thì $4-x^2=0$ vô nghiệm.

$$\int_{-2}^{m}\left|4-x^2\right|\mathrm{d}x=\frac{25}{3} \Leftrightarrow \left|\int_{-2}^{m}\left(4-x^2\right)\mathrm{d}x\right|=\frac{25}{3} \Leftrightarrow \left|\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{m}\right|=\frac{25}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left|\left(4m-\frac{m^3}{3}\right)-\left(-8+\frac{8}{3}\right)\right|=\frac{25}{3} \Leftrightarrow \left|4m-\frac{m^3}{3}+\frac{16}{3}\right|=\frac{25}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4m-\dfrac{m^3}{3}+\dfrac{16}{3}=\dfrac{25}{3} \\ 4m-\dfrac{m^3}{3}+\dfrac{16}{3}=-\dfrac{25}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{3}m^3-4m+3=0 \\ \dfrac{1}{3}m^3-4m-\dfrac{41}{3}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^3-12m+9=0 \\ m^3-12m-41=0 \end{array}\right. \,(1)$$

Xét hàm số $f(m)=m^3-12m$, với $m\in(-2;2)$ có

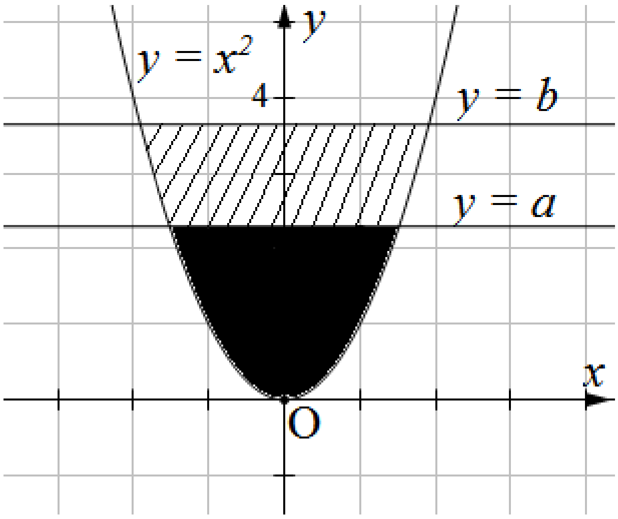
$$f'(m)=3m^2-12=3\left(m^2-4\right)<0,\ \forall m\in(-2;2).$$

Do đó $f(m)$ nghịch biến trên $(-2;2) \Rightarrow f(m)<f(-2)=16 \Rightarrow m^3-12m-41<0$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow m^3-12m+9=0 \Leftrightarrow (m-3)\left(m^2+3m-3\right)=0 \Rightarrow m=\dfrac{\sqrt{21}-3}{2}$ thỏa mãn.

Vậy chỉ có $m=\dfrac{\sqrt{21}-3}{2}$ thỏa mãn bài toán.

Câu 67: Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y=x^2$ và hai đường thẳng $y=a$, $y=b$ $(0<a<b)$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y=a$; (S_2) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y=b$. Với điều kiện nào sau đây của a và b thì $S_1=S_2$?



A. $b=\sqrt[3]{4}a$. **B.** $b=\sqrt[3]{2}a$. **C.** $b=\sqrt[3]{3}a$. **D.** $b=\sqrt[3]{6}a$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $(P): y=x^2$ với đường thẳng $y=b$ là

$x^2=b \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{b}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $(P): y=x^2$ với đường thẳng $y=a$ là

$x^2=a \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{a}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $y=b$ là

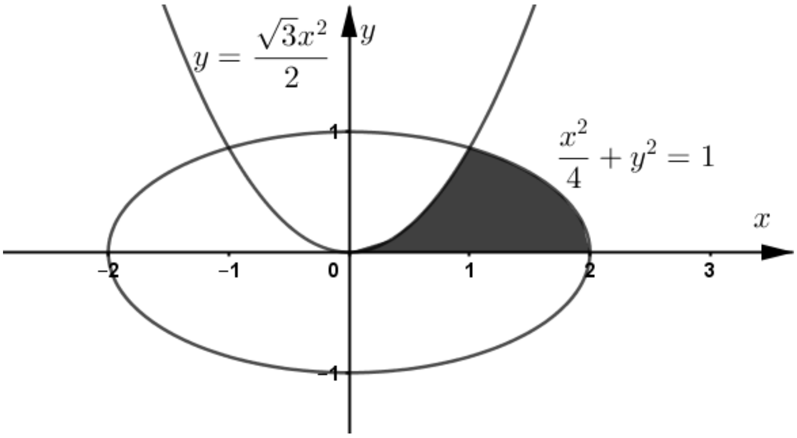
$$S=2\int_0^{\sqrt{b}}\left(b-x^2\right)\mathrm{d}x=2\left(bx-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{b}}=2\left(b\sqrt{b}-\frac{b\sqrt{b}}{3}\right)=\frac{4b\sqrt{b}}{3}.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $y=a$ là

$$S_1=2\int_0^{\sqrt{a}}\left(a-x^2\right)\mathrm{d}x=2\left(ax-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{a}}=2\left(a\sqrt{a}-\frac{a\sqrt{a}}{3}\right)=\frac{4a\sqrt{a}}{3}.$$

Do đó $S=2S_1 \Leftrightarrow \dfrac{4b\sqrt{b}}{3}=2.\dfrac{4a\sqrt{a}}{3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{b}\right)^3=2\left(\sqrt{a}\right)^3 \Leftrightarrow \sqrt{b}=\sqrt[3]{2}\sqrt{a} \Leftrightarrow b=\sqrt[3]{4}a$.

Câu 68: Cho hình phẳng giới hạn bởi Elip $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$, parabol $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2$ và trục hoành có diện tích $T=\dfrac{a}{b}\pi+\dfrac{c}{d}\sqrt{3}$. Tính $S=a+b+c+d$.



A. $S=32$. **B.** $S=10$. **C.** $S=15$. **D.** $S=21$.

Lời giải

Ta có: $\frac{x^2}{4}+y^2=1 \Rightarrow y=\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$

Hoành độ giao điểm $y=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$ và parabol $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2$ là

$\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 \Rightarrow 3x^4+x^2-4=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=1$

Vậy $T=\int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{2}x^2dx+\int_1^2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx$

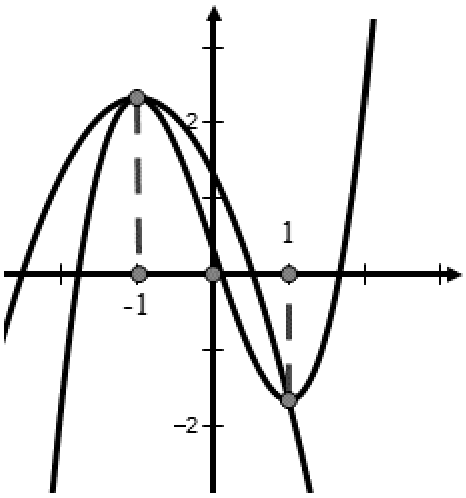
Mà $\int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{2}x^2dx=\left.\frac{\sqrt{3}x^3}{6}\right|_0^1=\frac{\sqrt{3}}{6}$

Ta có: $I=\int_1^2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx=\frac{1}{2}\int_1^2\sqrt{4-x^2}dx$. Đặt $x=2\cos t$ ta có:

$\int_1^2\sqrt{4-x^2}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^0\sqrt{4\sin^2 t}.(-2\sin t)dt=4\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 t dt=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 2t)dt=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Do đó $T=\frac{1}{3}.\pi+\frac{-1}{12}.\sqrt{3}$ nên $S=15$

Câu 69: Cho hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c\ (a,b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị (C) và $y=mx^2+nx+p\ (m,n,p\in\mathbb{R})$ có đồ thị (P) như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) có giá trị nằm trong khoảng nào sau đây?



A. $(0;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;4)$.

Lời giải

Căn cứ đồ thị ta thấy

+ Hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực trị tại $x = \pm 1$ nên ta có

$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y'(-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + 3 = 0 \\ -2a + b + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -3 \end{cases}.$$

+ Hàm số $y = mx^2 + nx + p$ đạt cực đại tại $x = -1$ và (P) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ $x = \pm 1$ nên ta có

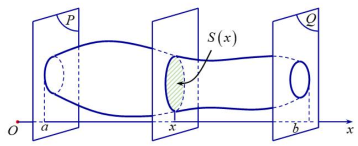
$$\begin{cases} -2m + n = 0 \\ 1 + a + b + c = m + n + p \\ -1 + a - b + c = m - n + p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -2 \\ m = -1 \\ p - c = 1 \end{cases}$$

Suy ra $S = \int_{-1}^{1} \left(mx^2 + nx + p - x^3 - ax^2 - bx - x \right) dx = \int_{-1}^{1} \left(-x^3 - x^2 + x + 1 \right) dx = \frac{4}{3} \in (1;2)$

DẠNG 2. ỨNG DỤNG TICH PHAN DỂ TIM THỂ TICH

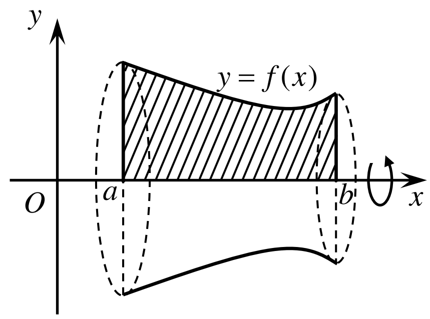
① ***Thể tích vật thể***

Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b, $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a \le x \le b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định: $\boxed{V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x}$.



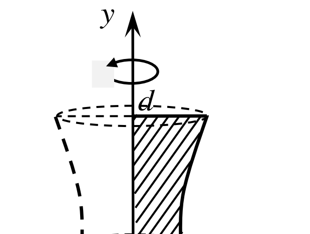
② ***Thể tích khối tròn xoay***

a) *Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox:*



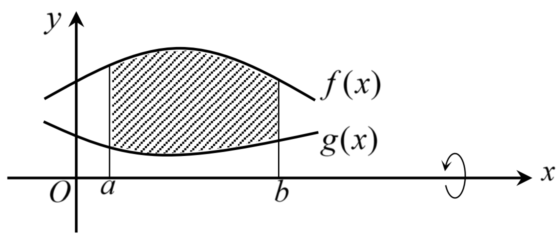
$$\begin{cases} (C): y = f(x) \\ (Ox): y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \qquad \boxed{V_x = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx}$$

b) *Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ quanh trục Oy:*



$$\begin{cases} (C): x = g(y) \\ (Oy): x = 0 \\ y = c \\ y = d \end{cases} \qquad \boxed{V_y = \pi \int_c^d \left[g(y)\right]^2 dy}$$

c) *Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$*

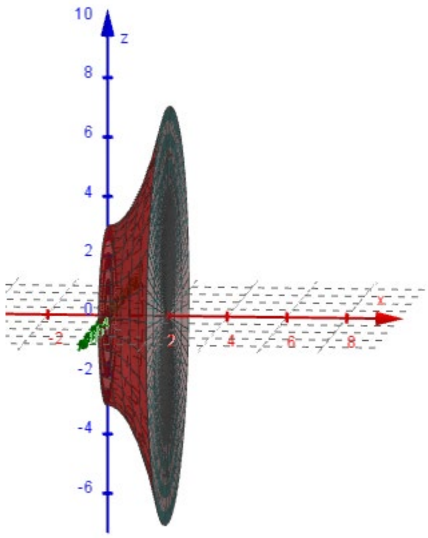


Câu 70: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 2$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $V = \pi\int\limits_0^2 \left(x^2+3\right)^2 \mathrm{d}x$. **B.** $V = \int\limits_0^2 \left(x^2+3\right) \mathrm{d}x$.

C. $V = \int\limits_0^2 \left(x^2+3\right)^2 \mathrm{d}x$. **D.** $V = \pi\int\limits_0^2 \left(x^2+3\right) \mathrm{d}x$.

Lời giải



Thể tích của vật thể được tạo nên là $V = \pi\int\limits_0^2 \left(x^2+3\right)^2 \mathrm{d}x$.

Câu 71: Gọi V là thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sin x$, trục Ox, trục Oy và đường thẳng $x = \frac{\pi}{2}$, xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ **B.** $V = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ **C.** $V = \pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ **D.** $V = \pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

Lời giải

Công thức tính: $V = \pi\int\limits_a^b f^2(x) dx$

Câu 72: Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x$, trục hoành, đường thẳng $x = 0$ và $x = 1$ quanh trục hoành bằng

A. $\frac{16\pi}{15}$. **B.** $\frac{2\pi}{3}$. **C.** $\frac{4\pi}{3}$. **D.** $\frac{8\pi}{15}$.

Lời giải

Ta có $V = \pi\int\limits_0^1 \left(x^2-2x\right)^2 \mathrm{d}x = \pi\int\limits_0^1 \left(x^4 - 4x^3 + 4x^2\right)\mathrm{d}x = \pi.\left(\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \pi.\left(\frac{1}{5} - 1 + \frac{4}{3}\right) = \frac{8\pi}{15}$.

Câu 73: Cho miền phẳng (D) giới hạn bởi $y=\sqrt{x}$, hai đường thẳng $x=1$, $x=2$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành.

A. 3π. **B.** $\frac{3\pi}{2}$. **C.** $\frac{2\pi}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$V=\pi\int_1^2 x dx = \frac{\pi x^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{3\pi}{2}$.

Câu 74: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=2x-x^2$, $y=0$. Quay (H) quanh trục hoành tạo thành khối tròn xoay có thể tích là

A. $\int_0^2 (2x-x^2)dx$ **B.** $\pi\int_0^2 (2x-x^2)^2 dx$ **C.** $\int_0^2 (2x-x^2)^2 dx$ **D.** $\pi\int_0^2 (2x-x^2)dx$

Lời giải

Chọn B

Theo công thức ta chọn $V=\pi\int_0^2 (2x-x^2)^2 dx$

Câu 75: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{\tan x}, y=0, x=0, x=\frac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox. Tính thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra.

A. $\frac{\pi \ln 2}{2}$. **B.** $\frac{\pi \ln 3}{4}$

C. $\frac{\pi}{4}$. **D.** $\pi \ln 2$.

Lời giải

Thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra là

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{\tan x}\right)^2 .dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x.dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{cosx}.dx=-\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(cosx)}{cosx}$$

$$=-\pi\left(\ln|cosx|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\pi\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi\ln 2}{2}.$$

Câu 76: Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) xác định bởi các đường $y=\frac{1}{3}x^3-x^2$, $y=0$, $x=0$ và $x=3$ quanh trục Ox là

A. $\frac{81\pi}{35}$. **B.** $\frac{81}{35}$. **C.** $\frac{71\pi}{35}$. **D.** $\frac{71}{35}$.

Lời giải

Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox là :

$$V=\pi\int_0^3\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^3\left(\frac{1}{9}x^6-\frac{2}{3}x^5+x^4\right)\mathrm{d}x=\frac{81\pi}{35}.$$

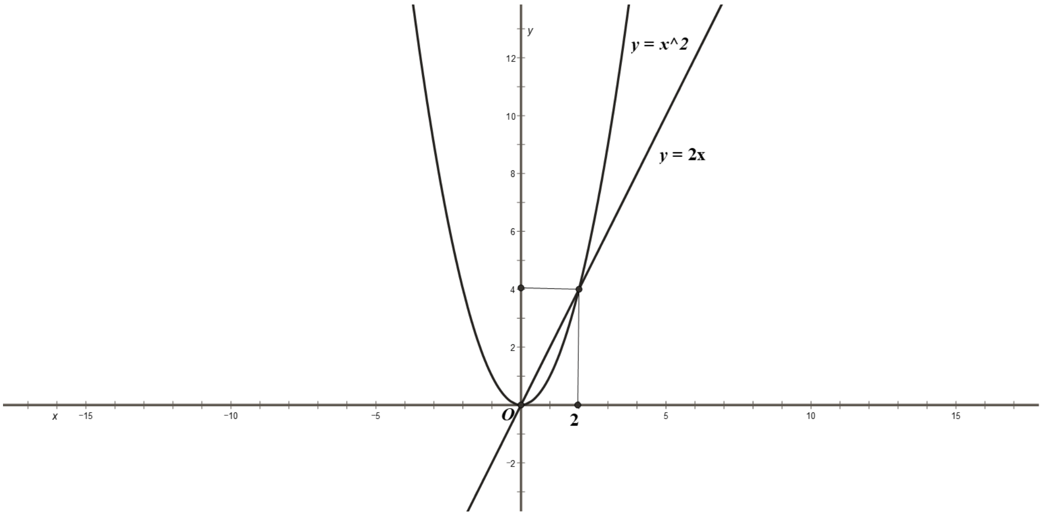
Vậy thể tích khối tròn xoay cần tính là : $V=\frac{81\pi}{35}$.

Câu 77: Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parapol : $y=x^2$ và đường thẳng d: $y=2x$ quay xung quanh trục Ox bằng:

A. $\pi\int_0^2(2x-x^2)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\pi\int_0^2(x^2-2x)^2\,\mathrm{d}x$.

C. $\pi\int_0^2 4x^2\,\mathrm{d}x+\pi\int_0^2 x^4\,\mathrm{d}x$. **<u>D</u>.** $\pi\int_0^2 4x^2\,\mathrm{d}x-\pi\int_0^2 x^4\,\mathrm{d}x$.

Lời giải



Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị: $x^2=2x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Ta có: $V_{Ox}=\pi\int_0^2(2x)^2\mathrm{d}x-\pi\int_0^2(x^2)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^2 4x^2\mathrm{d}x-\pi\int_0^2 x^4\mathrm{d}x$

Câu 78: Tính thể tích của vật thể tạo nên khi quay quanh trục Ox hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị $(P): y=2x-x^2$ và trục Ox bằng:

A. $V=\frac{19\pi}{15}$. **B.** $V=\frac{13\pi}{15}$. **C.** $V=\frac{17\pi}{15}$. **<u>D</u>.** $V=\frac{16\pi}{15}$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và trục Ox :

$$2x-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right..$$

Khi đó:

$$V=\pi\int_0^2\left(2x-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^2\left(4x^2-4x^3+x^4\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{4}{3}x^3-x^4+\frac{1}{5}x^5\right)\Bigg|_0^2=\frac{16}{15}\pi.$$

Câu 79: Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do quay xung quanh trục hoành một elip có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. V có giá trị gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 550 **B.** 400 **C.** 670 **D.** 335

Lời giải

Chọn D

Quay elip đã cho xung quanh trục hoành chính là quay hình phẳng:

$$H=\left\{y=4\sqrt{1-\frac{x^2}{25}},y=0,x=-5,x=5\right\}.$$

Vậy thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi H khi quay xung quanh trục hoành là:

$$V=\pi\int_{-5}^{5}\left(16-\frac{16x^2}{25}\right)dx=\pi\left(16x-\frac{16x^3}{75}\right)\Bigg|_{-5}^{5}=\frac{320\pi}{3}\simeq 335,1$$

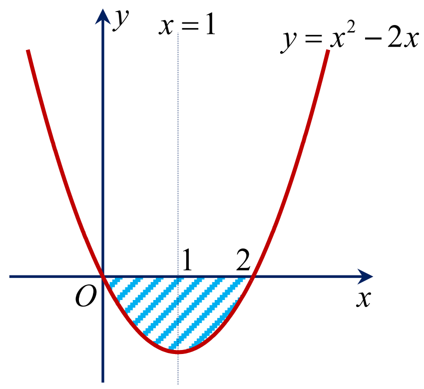
Câu 80: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2-2x$, trục hoành và đường thẳng $x=1$. Tính thể tích V hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox.

A. $V=\frac{4\pi}{3}$. **B.** $V=\frac{16\pi}{15}$. **C.** $V=\frac{7\pi}{8}$. **D.** $V=\frac{15\pi}{8}$.

Lời giải

Chọn B

Theo đề, ta có hình vẽ sau:



Nhận xét: Khi nhìn vào hình vẽ. Đường thẳng $x=1$ chia hình phẳng giới hạn bởi đường $y=x^2-2x$ và trục hoành làm 2 phần. Dễ thấy lúc này hình phẳng (H) không thể xác định vì phần hình giới hạn bởi $x=0$ đến $x=1$ và $x=1$ đến $x=2$ chưa rõ ràng.

Nếu xét phần tròn xoay khi xoay hình phẳng quanh trục Ox khi $x=0$ đến $x=2$ thì không có đáp án trong bài, đồng thời đề cho thêm đường thẳng $x=1$ là không cần thiết.

Do đó để bài toán có đáp án và rõ ràng hơn ta điều chỉnh đề như sau:

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đường $y = x^2 - 2x$, trục hoành. Tính thể tích V hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox.

Hình phẳng (H) giới hạn bởi $\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = 0 \end{cases}$.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của $y = x^2 - 2x$ và $y = 0$ là:

$$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

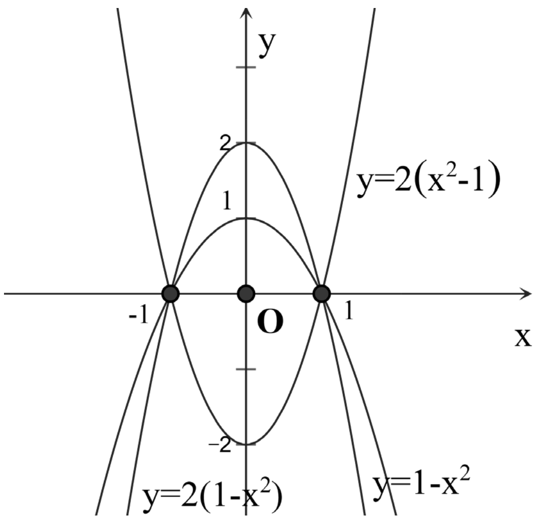
Khi đó thể tích V hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox là:

$$V_{Ox} = \pi\int_0^2 \left(x^2 - 2x\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{16\pi}{15}.$$

Câu 81: Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi hai đường $y = 2\left(x^2 - 1\right)$; $y = 1 - x^2$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành do (D) quay quanh trục Ox.

A. $\frac{64\pi}{15}$. **B.** $\frac{32}{15}$. **C.** $\frac{32\pi}{15}$. **D.** $\frac{64}{15}$.

Lời giải



Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y = 2\left(x^2 - 1\right)$ và $y = 1 - x^2$ là

$2\left(x^2 - 1\right) = 1 - x^2 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Lấy đối xứng đồ thị hàm số $y = 2\left(x^2 - 1\right)$ qua trục Ox ta được đồ thị hàm số $y = 2\left(1 - x^2\right)$.

Ta có $2\left(1 - x^2\right) \geq 1 - x^2, \forall x \in [-1;1]$. Suy ra thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V = \pi\int_{-1}^{1} \left[2\left(x^2 - 1\right)\right]^2 dx = \frac{64\pi}{15}.$$

Câu 82: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \tan x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. 5 **B.** $\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$ **C.** $\frac{3\pi}{2}$ **D.** $\pi\left(\frac{1}{2}+\pi\right)$

Lời giải

Chọn B

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\mathrm{d}(\tan x)=\pi\int_0^1\frac{t^2}{t^2+1}dt=\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

Câu 83: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}-2$, $y=0$ và $x=9$ quay xung quanh trục Ox. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành.

A. $V=\frac{7}{6}$. **B.** $V=\frac{5\pi}{6}$. **C.** $V=\frac{7\pi}{11}$. **D.** $V=\frac{11\pi}{6}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}-2$ và trục hoành: $\sqrt{x}-2=0$ $\Leftrightarrow \sqrt{x}=2 \Leftrightarrow x=4$.

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành là:

$$V=\pi\int_4^9\left(\sqrt{x}-2\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_4^9\left(x-4\sqrt{x}+4\right)\mathrm{d}x=\pi\left.\left(\frac{x^2}{2}-\frac{8x\sqrt{x}}{3}+4x\right)\right|_4^9$$

$$=\pi\left(\frac{81}{2}-72+36\right)-\pi\left(\frac{16}{2}-\frac{64}{3}+16\right)=\frac{11\pi}{6}.$$

Câu 84: Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình (H) quanh Ox với (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{4x-x^2}$ và trục hoành.

A. $\frac{31\pi}{3}$. **B.** $\frac{32\pi}{3}$. **C.** $\frac{34\pi}{3}$. **D.** $\frac{35\pi}{3}$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $4x-x^2\ge 0\Leftrightarrow 0\le x\le 4$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\sqrt{4x-x^2}$ và trục hoành

$$\sqrt{4x-x^2}=0\Leftrightarrow 4x-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=4\end{array}\right..$$

Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình (H) quanh Ox là :

$$V=\pi\int_0^4\left(\sqrt{4x-x^2}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^4\left(4x-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{32}{3}\pi.$$

Vậy thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình (H) quanh Ox là $\frac{32}{3}\pi$.

Câu 85: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị $y=2x-x^2$ và trục hoành. Tính thể tích V vật thể tròn xoay sinh ra khi cho (H) quay quanh Ox.

A. $V=\frac{4}{3}\pi$. **B.** $V=\frac{16}{15}\pi$. **C.** $V=\frac{16}{15}$. **D.** $V=\frac{4}{3}$.

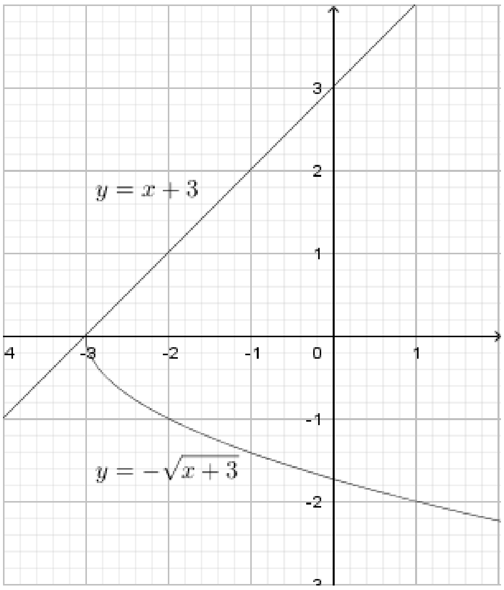
Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (H) với trục hoành: $2x-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=2 \\ x_2=0 \end{array}\right.$.

Vậy thể tích khối tròn xoay sinh ra do (H) quay quanh Ox là:

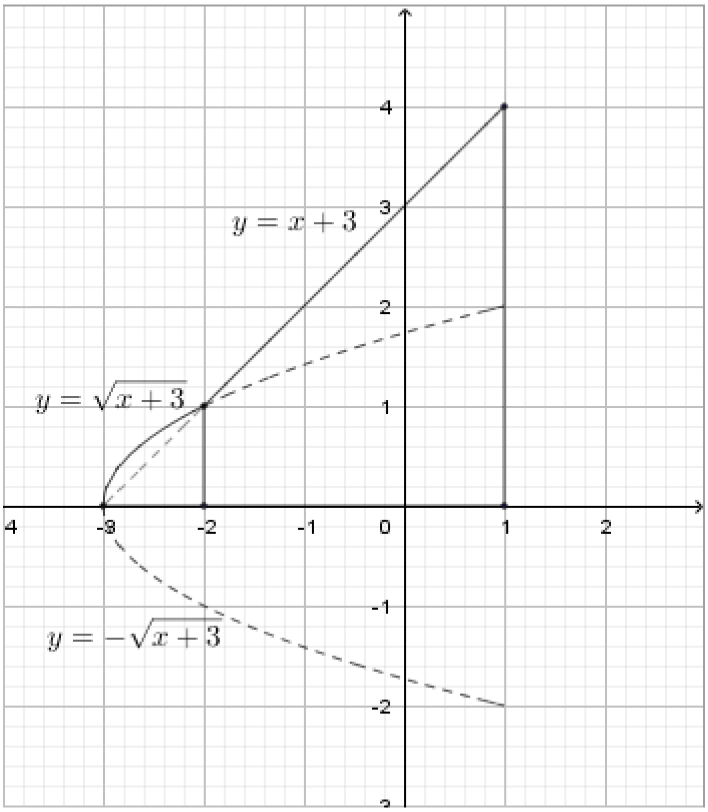
$$V=\pi\int_0^2\left(2x-x^2\right)^2.\mathrm{d}x=\pi\int_0^2\left(4x^2-4x^3+x^4\right).\mathrm{d}x=\pi.\left(\frac{4}{3}x^3-x^4+\frac{x^5}{5}\Big|_0^2\right)=\frac{16}{15}\pi.$$

Câu 86: Tính thể tích vật tròn xoay tạo bởi miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x+3$, $y=-\sqrt{x+3}$, $x=1$ xoay quanh trục Ox.



A. $\frac{41}{2}\pi$. **B.** $\frac{43}{2}\pi$. **C.** $\frac{41}{3}\pi$. **D.** $\frac{40}{3}\pi$.

Lời giải



Xét phương trình $x+3=-\sqrt{x+3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+3}=0\\ \sqrt{x+3}=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow x=-3$.

Xét hình (H) giới bởi đồ thị các hàm số $y=\sqrt{x+3}$ $(-3\le x\le -2)$, $y=x+3$ $(-2\le x\le 1)$, $y=0$ và $x=1$.

Thể tích vật thể tròn xoay cần tìm chính bằng thể tích của vật thể tròn xoay thu được khi quay quanh hình (H) quanh trục Ox. Do đó

$$V=\pi\int_{-3}^{-2}\left[\sqrt{x+3}^2\right]\mathrm{d}x+\pi\int_{-2}^{1}(x+3)^2\,\mathrm{d}x=\frac{43\pi}{2}.$$

Câu 87: Ký hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)=\sqrt{x}.e^{x^2}$, trục hoành, đường thẳng $x=1$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục hoành.

A. $V=e^2-1$. **B.** $V=\pi\left(e^2-1\right)$. **C.** $V=\frac{1}{4}\pi e^2-1$. **D.** $V=\frac{1}{4}\pi\left(e^2-1\right)$.

Lời giải

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành là nghiệm của phương trình $\sqrt{x}.e^{x^2}=0 \Leftrightarrow x=0$.

Khi đó thể tích của khối tròn xoay được tạo thành là:

$$V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x}.e^{x^2}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^1 xe^{2x^2}\mathrm{d}x=\pi\frac{1}{4}\int_0^1 e^{2x^2}\mathrm{d}(2x^2)=\pi\frac{1}{4}e^{2x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{4}\pi(e^2-1).$$

Câu 88: Cho vật thể (T) giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0; x=2$. Cắt vật thể (T) bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x(0\le x\le 2)$ ta thu được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $(x+1)e^x$. Thể tích vật thể (T) bằng

A. $\dfrac{\pi(13e^4-1)}{4}$. **B.** $\dfrac{13e^4-1}{4}$. **C.** $2e^2$. **D.** $2\pi e^2$.

Lời giải

Diện tích thiết diện là $S(x)=(x+1)^2e^{2x}$.

Thể tích của vật thể (T) là $V=\int_0^2 S(x)dx=\int_0^2 (x+1)^2e^{2x}dx$.

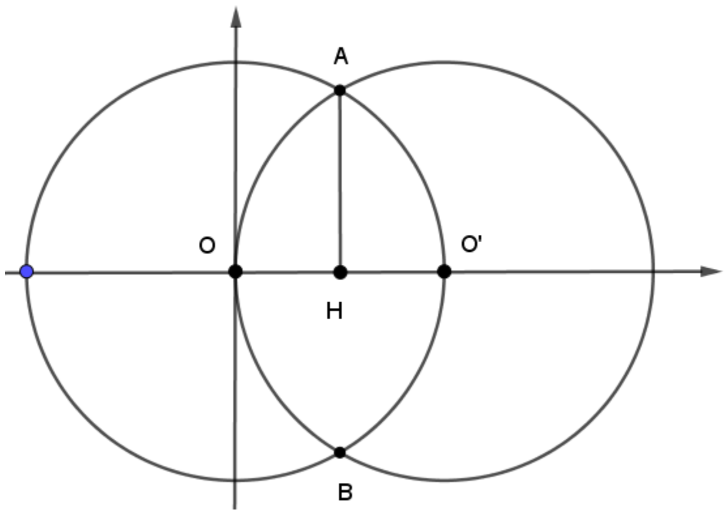
$$V=\frac{1}{2}(x+1)^2e^{2x}\Big|_0^2-\int_0^2(x+1)e^{2x}dx=\frac{9e^4-1}{2}-\left(\frac{x+1}{2}e^{2x}\Big|_0^2-\frac{1}{2}\int_0^2 e^{2x}dx\right)$$

$$=\frac{9e^4-1}{2}-\frac{3e^4-1}{2}+\frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^2=3e^4+\frac{1}{4}e^4-\frac{1}{4}=\frac{13e^4-1}{4}.$$

Câu 89: Cho hai mặt cầu $(S_1),(S_2)$ có cùng bán kính $R=3$ thỏa mãn tính chất tâm của (S_1) thuộc (S_2) và ngược lại. Tính thể tích V phần chung của hai khối cầu tạo bởi $(S_1),(S_2)$.

A. $V=\dfrac{45\pi}{8}$. **B.** $V=\dfrac{45\pi}{4}$. **C.** $V=\dfrac{45}{4}$. **D.** $V=\dfrac{45}{8}$.

Lời giải



Phần chung của hai khối cầu tạo bởi $(S_1),(S_2)$ là một khối tròn xoay, tương đương phần hình phẳng OAO' quay quanh trục OO' hay bằng hai lần phần mặt phẳng tạo bởi AHO' quay quanh trục OO'.

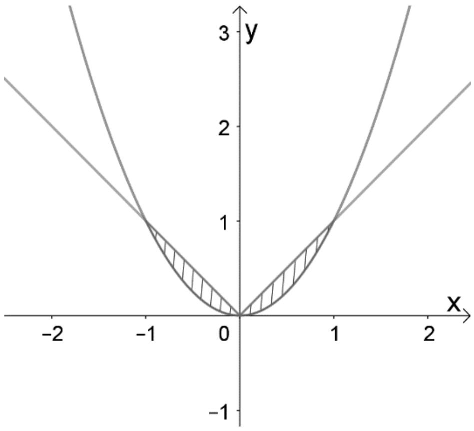
Đặt hệ trục như hình khi đó phương trình đường tròn (O) là $x^2+y^2=9\Rightarrow y=\sqrt{9-x^2}$, điểm H có hoành độ bằng $\dfrac{3}{2}$; O' có hoành độ là 3 nên thể tích :

$$V=\pi\int_{\frac{3}{2}}^{3}\left(\sqrt{9-x^2}\right)^2dx==\pi\int_{\frac{3}{2}}^{3}\left(9-x^2\right)dx=\frac{45}{8}\pi.$$

Câu 90: Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y=|x|$ và $y=x^2$ quay quanh trục tung tạo nên một vật thể tròn xoay có thể tích bằng

A. $\frac{\pi}{6}$. **B.** $\frac{\pi}{3}$. **C.** $\frac{2\pi}{15}$. **D.** $\frac{4\pi}{15}$.

Lời giải



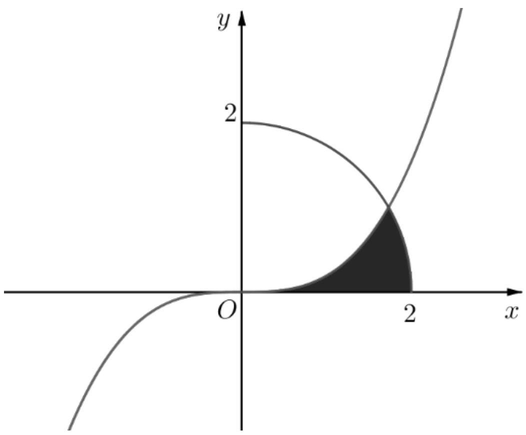
Phương trình hoành độ giao điểm $|x|=x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\ \Rightarrow y=0\\x=\pm1\Rightarrow y=1\end{array}\right.$.

Ta có đồ thị hai hàm số $y=|x|$ và $y=x^2$ đều đối xứng qua Oy nên hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y=|x|$ và $y=x^2$ quay quanh trục tung tạo nên một vật thể tròn xoay có thể tích bằng thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $x=y$ và $x=\sqrt{y}$ quay xung quanh trục Oy.

Thể tích vật thể tròn xoay cần tìm là:

$$V=\pi\int_0^1\left|y-y^2\right|\mathrm{d}y=\pi\int_0^1\left(y-y^2\right)\mathrm{d}y=\pi.\left(\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}.$$

Câu 91: Cho hình (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{3}}{9}x^3$, cung tròn có phương trình $y=\sqrt{4-x^2}$.



Biết thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành là $V=\left(-\frac{a}{b}\sqrt{3}+\frac{c}{d}\right)\pi$

, trong đó $a,b,c,d\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính $P=a+b+c+d$.

A. $P=52$. **B.** $P=40$. **C.** $P=46$. **D.** $P=34$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{\sqrt{3}}{9}x^3=\sqrt{4-x^2}\Leftrightarrow x=\sqrt{3}$

$$V=\pi\left[\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{9}x^3\right)^2\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{3}}^2\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2\mathrm{d}x\right]$$

$$=\pi\left[\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{27}x^6\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{3}}^2\left(4-x^2\right)\mathrm{d}x\right]$$

$$=\pi\left[\frac{1}{27}.\frac{x^7}{7}\Big|_0^{\sqrt{3}}+\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{\sqrt{3}}^2\right]$$

$$=\left(-\frac{20\sqrt{3}}{7}+\frac{16}{3}\right)\pi.$$

$\Rightarrow a=20,b=7,c=16,d=3$

$\Rightarrow P=a+b+c+d=46$.

Câu 92: Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{m^2-x^2}$ (m là tham số khác 0) và trục hoành. Khi (H) quay xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích V. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $V<1000\pi$.

A. 18. **B.** 20. **C.** 19. **D.** 21.

Lời giải

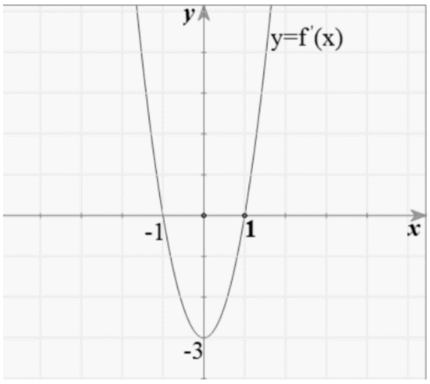
Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong và trục hoành là: $\sqrt{m^2-x^2}=0\Leftrightarrow x=\pm m$

Thể tích vật thể tròn xoay cần tính là: $V=\pi\int_{-|m|}^{|m|}(m^2-x^2)dx=\pi(m^2x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_{-|m|}^{|m|}=\frac{4\pi m^2|m|}{3}$

Ta có: $V<1000\pi\Leftrightarrow\frac{4\pi m^2|m|}{3}<1000\pi\Leftrightarrow|m|^3<750\Leftrightarrow-\sqrt[3]{750}<m<\sqrt[3]{750}$.

Ta có $\sqrt[3]{750}\simeq 9,08$ và $m\neq 0$. Vậy có 18 giá trị nguyên của m.

Câu 93: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,(a,b,c,d\in\mathbb{R},a\neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây. Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành khi quay xung quanh trục Ox.



A. $\frac{725}{35}\pi$. **B.** $\frac{1}{35}\pi$. **C.** 6π. **D.** đáp án khác.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x) \Rightarrow f'(x) = 3(x^2 - 1)$.

Khi đó $f(x) = \int f'(x)dx = x^3 - 3x + C$.

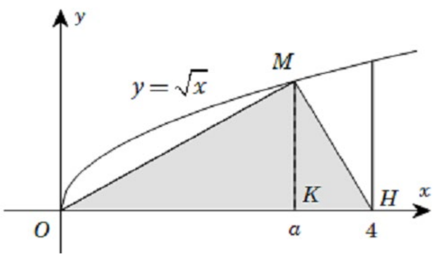
Điều kiện đồ thị hàm số $f(x)$ tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ là:

$\begin{cases} f(x) = 4 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x + C = 4 \\ 3(x^2 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ C = 2 \end{cases}$ suy ra $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2 (C)$.

$+(C) \cap Ox \Rightarrow$ hoành độ giao điểm là $x = -2; x = 1$.

+Khi đó $V = \pi \int_{-2}^{1} (x^3 - 3x^2 + 2)^2 dx = \frac{729}{35}\pi$.

Câu 94: Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ và $x = 4$ quanh trục Ox. Đường thẳng $x = a$ $(0 < a < 4)$ cắt đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ tại M. Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox. Biết rằng $V = 2V_1$. Khi đó



A. $a = 2$. **B.** $a = 2\sqrt{2}$. **C.** $a = \frac{5}{2}$. **D.** $a = 3$.

Lời giải

Ta có: $V=\pi\int\limits_0^4 xdx=\pi\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^4=8\pi$. Mà $V=2V_1\Rightarrow V_1=4\pi$.

Gọi K là hình chiếu của M trên Ox $\Rightarrow OK=a, KH=4-a, MK=\sqrt{a}$.

Khi xoay tam giác OMH quanh Ox ta được khối tròn xoay là sự lắp ghép của hai khối nón sinh bởi các tam giác OMK, MHK, hai khối nón đó có cùng mặt đáy và có tổng chiều cao là $OH=4$ nên thể tích của khối tròn xoay đó là $V_1=\frac{1}{3}.\pi.4.\left(\sqrt{a}\right)^2=\frac{4\pi a}{3}$, từ đó suy ra $a=3$.

Câu 95: Cho hình phẳng (D) giới hạn bởi các đường $y=x-\pi$, $y=\sin x$ và $x=0$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do (D) quay quanh trục hoành và $V=p\pi^4$, $(p\in\mathbb{Q})$. Giá trị của $24p$ bằng

A. 8. **B.** 4. **C.** 24. **D.** 12.

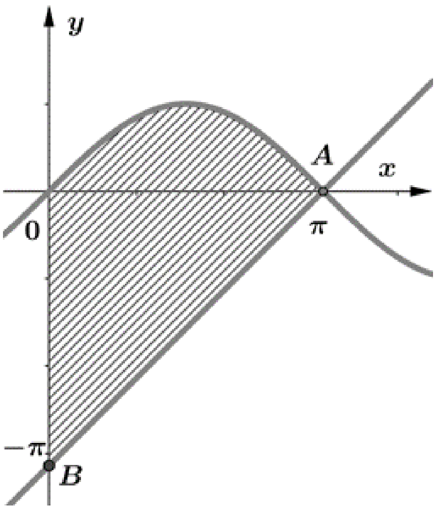
Lời giải

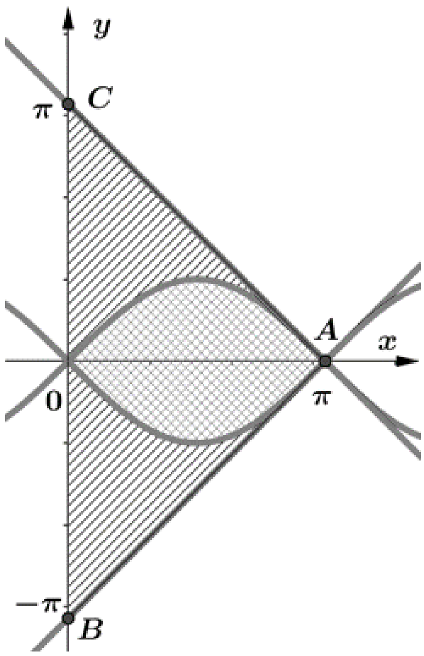
Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=x-\pi$ và $y=\sin x$:

$x-\pi=\sin x \Leftrightarrow x-\pi-\sin x=0\ (1)$. Ta thấy $x=\pi$ là một nghiệm của phương trình (1).

Xét hàm số $f(x)=x-\pi-\sin x\Rightarrow f'(x)=1-cosx\ge 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $x=\pi$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x)=0$.





Cách 1:

Xét hàm số $g(x)=\pi-x-\sin x,\ x\in(0;\pi)$.

$g'(x)=-1-cosx<0,\ \forall x\in(0;\pi)$, suy ra hàm số $g(x)=\pi-x-\sin x$ nghịch biến trên $(0;\pi)$.

$\forall x \in (0;\pi): g(x) > g(\pi) \Rightarrow \pi - x - \sin x > \pi - \pi - \sin \pi = 0 \Rightarrow \pi - x > \sin x \ (2)$.

Do đó thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành là thể tích của khối nón khi quay tam giác vuông OAB quanh trục hoành.

$V = \frac{1}{3}.\pi.OB^2.OA = \frac{1}{3}\pi.\pi^2.\pi = \frac{1}{3}\pi^4 \Rightarrow p = \frac{1}{3}$. Vậy $24p = 24.\frac{1}{3} = 8$.

<u>Cách 2:</u> Từ (2) ta có $V = \pi\int\limits_0^{\pi}(x-\pi)^2\mathrm{d}x = \pi\int\limits_0^{\pi}(x-\pi)^2\mathrm{d}(x-\pi)$

$= \pi.\left.\frac{(x-\pi)^3}{3}\right|_0^{\pi} = \frac{\pi^4}{3} \Rightarrow p = \frac{1}{3}$.

Vậy $24p = 24.\frac{1}{3} = 8$.

Câu 96: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, $(H_1): \begin{cases} y = \frac{x^2}{4} \\ y = -\frac{x^2}{4} \\ x = -4, x = 4 \end{cases}$, $(H_2): \begin{cases} x^2 + y^2 \le 16 \\ x^2 + (y-2)^2 \ge 4 \\ x^2 + (y+2)^2 \ge 4 \end{cases}$. Cho $(H_1), (H_2)$ xoay quanh trục Oy ta được các vật thể có thể tích lần lượt V_1, V_2. Đẳng thức nào sau đây đúng.

A. $V_1 = V_2$. **B.** $V_1 = \frac{1}{2}V_2$. **C.** $V_1 = 2V_2$. **<u>D</u>.** $V_1 = \frac{3}{2}V_2$.

Lời giải

Ta có $V_1 = 8.(\pi.4^2) - 2\left(\pi\int\limits_0^4 \left(\sqrt{4y}\right)^2 dy\right) = 96\pi$

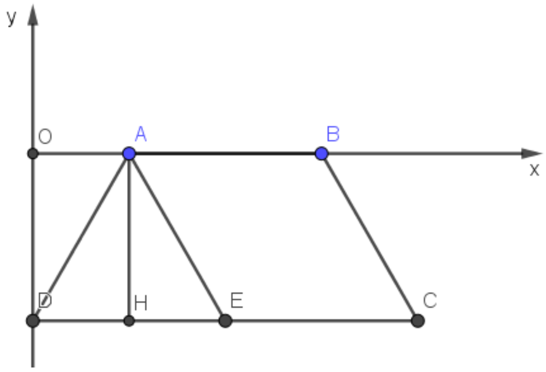
$V_2 = \frac{4\pi.4^3}{3} - 2\frac{4\pi.2^3}{3} = 64\pi$

Suy ra $V_1 = \frac{3}{2}V_2$

Câu 97: Cho hình thang $ABCD$ có AB song song CD và $AB = AD = BC = a$, $CD = 2a$. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình thang $ABCD$ quanh trục là đường thẳng AB.

<u>A</u>. $\frac{5}{4}\pi a^3$. **B.** $\frac{5}{2}\pi a^3$. **C.** $\frac{3-2\sqrt{2}}{3}\pi a^3$. **D.** πa^3.

Lời giải



Dễ thấy $ABCE$ là hình bình hành nên $AE = BC = a$. Vậy ADE là tam giác đều.

Có $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Có phương trình $CD: y = -\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $x_D = 0, x_C = 2a$; $A\left(\frac{a}{2};0\right)$

.

Phương trình $AD: y = \sqrt{3}x - \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

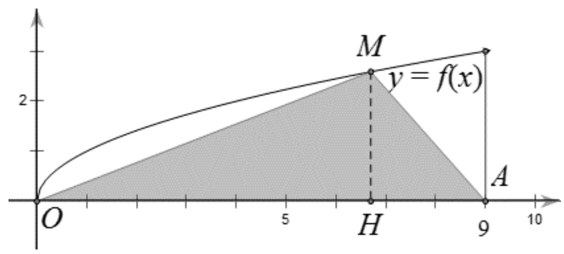
Vậy $V = \pi\int_0^{2a}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\pi\int_0^{\frac{a}{2}}\left(\sqrt{3}x - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3\pi a^2}{4}.2a - 2\pi\int_0^{\frac{a}{2}}\left(3x^2 - 3ax + \frac{3a^2}{4}\right)$

$\frac{3\pi a^3}{2} - 2\pi\left(x^3 - \frac{3a}{2}x^2 + \frac{3a^2}{4}x\right)\Big|_0^{\frac{a}{2}} = \frac{3\pi a^3}{2} - 2\pi.\frac{a^3}{8} = \frac{5}{4}\pi a^3$.

Cách 2: Thể tích khối tròn xoay được tạo ra theo đề bài là thể tích khối trụ có chiều cao $2a$ bán kính đáy bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ trừ đi thể tích hai khối nón cùng có chiều cao $\frac{a}{2}$ bán kính đáy $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy

$V = \pi.\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 2a - 2.\frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2.\frac{a}{2} = \frac{5}{4}\pi a^3$

Câu 98: Cho đồ thị $(C): y = f(x) = \sqrt{x}$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), đường thẳng $x = 9$ và trục Ox. Cho điểm M thuộc đồ thị (C) và điểm $A(9;0)$. Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay khi cho (H) quay quanh trục Ox, V_2 là thể tích khối tròn xoay khi cho tam giác AOM quay quanh trục Ox. Biết rằng $V_1 = 2V_2$. Tính diện tích S phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đường thẳng OM.



A. $S = 3$. **B.** $S = \dfrac{27\sqrt{3}}{16}$. **C.** $S = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $S = \dfrac{4}{3}$.

Lời giải

Ta có $V_1 = \pi\int_0^9 \left(\sqrt{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \dfrac{81\pi}{2}$.

Gọi H là hình chiếu của M lên trục Ox, đặt $OH = m$, ta có $M\left(m;\sqrt{m}\right)$, $MH = \sqrt{m}$ và $AH = 9 - m$.

Suy ra $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi.MH^2.OH + \dfrac{1}{3}\pi.MH^2.AH = \dfrac{1}{3}\pi.MH^2.OA = 3m\pi$.

Theo giả thiết, ta có $V_1 = 2V_2$ nên $\dfrac{81\pi}{2} = 6m\pi \Leftrightarrow m = \dfrac{27}{4}$. Do đó $M\left(\dfrac{27}{4};\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Từ đó ta có phương trình đường thẳng OM là $y = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}x$.

Diện tích S phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đường thẳng OM là

$$S = \int_0^{\frac{27}{4}} \left(\sqrt{x} - \frac{2\sqrt{3}}{9}x\right)\mathrm{d}x = \left.\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{\sqrt{3}}{9}x^2\right)\right|_0^{\frac{27}{4}} = \frac{27\sqrt{3}}{16}.$$

CHƯƠNG III

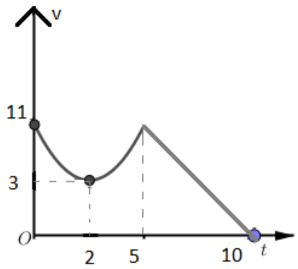
NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

BÀI 3. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

MỨC ĐỘ VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

Câu 1: Chất điểm chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)(m/s)$ có dạng đường Parapol khi $0 \le t \le 5(s)$ và $v(t)$ có dạng đường thẳng khi $5 \le t \le 10(s)$.Cho đỉnh Parapol là $I(2,3)$. Hỏi quãng đường đi được chất điểm trong thời gian $0 \le t \le 10(s)$ là bao nhiêu mét?



A. $\frac{181}{2}$. **B.** 90. **C.** 92. **D.** $\frac{545}{6}$.

Câu 2: Một ô tô đang chạy với tốc độ $20(m/s)$ thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét (m)?

A. 20 m. **B.** 30 m. **C.** 10 m. **D.** 40 m.

Câu 3: Một ô tô đang chạy với vận tốc là 12 (m/s) thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -6t + 12$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến lúc ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

A. $8m$. **B.** $12m$. **C.** $15m$. **D.** $10m$.

Câu 4: Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc 15m/s thì người lái xe hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -3t + 15(\text{m/s})$, trong đó t . Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được bao nhiêu mét?

A. 38m. **B.** 37,2m. **C.** 37,5m. **D.** 37m.

Câu 5: Một chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -10t + 20$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 5 m **B.** 20 m **C.** 40 m **D.** 10 m

Câu 6: Một ô tô đang chạy với vận tốc $10m/s$ thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-2t+10(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Tính quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng.

A. $55m$. **B.** $25m$. **C.** $50m$. **D.** $16m$.

Câu 7: Một chất điểm bắt đầu chuyển động thẳng đều với vận tốc v_0, sau 6 giây chuyển động thì gặp chướng ngại vật nên bắt đầu giảm tốc độ với vận tốc chuyển động $v(t)=-\dfrac{5}{2}t+a\ (m/s),\ (t\geq 6)$ cho đến khi dừng hẳn. Biết rằng kể từ lúc chuyển động đến lúc dừng thì chất điểm đi được quãng đường là 80m. Tìm v_0.

A. $v_0=35m/s$. **B.** $v_0=25m/s$. **C.** $v_0=10m/s$. **D.** $v_0=20m/s$.

Câu 8: Một ô tô chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t)=7t\ \ (\text{m/s})$. Đi được $5\ (\text{s})$ người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-35\ \ (\text{m/s}^2)$. Tính quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn?

A. 87.5 mét. **B.** 96.5 mét. **C.** 102.5 mét. **D.** 105 mét.

Câu 9: Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0=15\,\text{m/s}$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=t^2+4t\ (\text{m/s}^2)$. Tính quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

A. $70,25$ m. **B.** $68,25$ m. **C.** $67,25$ m. **D.** $69,75$ m.

Câu 10: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t)=10+t+9t^2-t^3$ trong đó s tính bằng mét, t tính bằng giây. Thời gian để vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất là

A. $t=6(\text{s})$. **B.** $t=3(\text{s})$. **C.** $t=2(\text{s})$. **D.** $t=5(\text{s})$.

Câu 11: Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t)=7t\ \ (\text{m/s})$. Đi được 5s, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-70\ \ (\text{m/s}^2)$. Tính quãng đường S đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

A. $S=96,25\ \ (\text{m})$. **B.** $S=87,5\ \ (\text{m})$. **C.** $S=94\ \ (\text{m})$. **D.** $S=95,7\ \ (\text{m})$.

Câu 12: Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t)=2t\ (\text{m/s})$. Đi được 12 giây, người lái xe gặp chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-12(\text{m/s}^2)$. Tính quãng đường $s(\text{m})$ đi được của ôtô từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi dừng hẳn?

A. $s=168(\text{m})$. **B.** $s=166(\text{m})$. **C.** $s=144(\text{m})$. **D.** $s=152(\text{m})$.

Câu 13: Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu $1\,\text{m}$. Một ô tô A đang chạy với vận tốc $16\,\text{m/s}$ bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A(t)=16-4t$, thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để có 2 ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

A. 33. **B.** 12. **C.** 31. **D.** 32.

Câu 14: Một vật chuyển động với vận tốc $10\,\text{m/s}$ thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian là $a(t)=t^2+3t$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 6 giây kể từ khi vật bắt đầu tăng tốc.

A. 136m. **B.** 126m. **C.** 276m. **D.** 216m.

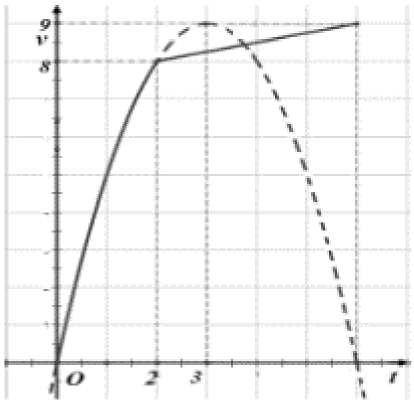
Câu 15: Một chiếc máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t)=t^2+10t\ \ (m/s)$ với t là thời gian được tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc $200(m/s)$ thì rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

A. $\dfrac{2500}{3}(m)$. **B.** $2000(m)$. **C.** $500(m)$. **D.** $\dfrac{4000}{3}(m)$.

Câu 16: Một ôtô đang dừng và bắt đầu chuyển động theo một đường thẳng với gia tốc $a(t)=6-2t\ \left(m/s^2\right)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc ôtô bắt đầu chuyển động. Hỏi quảng đường ôtô đi được từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi vận tốc của ôtô đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu mét?

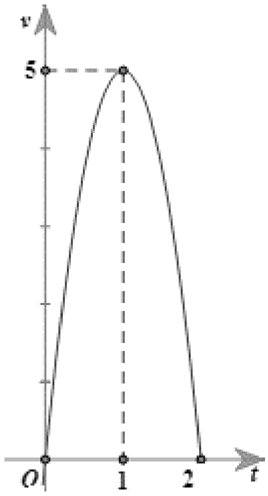
A. $18m$. **B.** $36m$. **C.** $22,5m$. **D.** $6,75m$.

Câu 17: Một vật chuyển động trong 6 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị như hình bên dưới. Trong khoảng thời gian 2 giờ từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị là một phần đường Parabol có đỉnh $I(3;9)$ và có trục đối xứng song song với trục tung. Khoảng thời gian còn lại, đồ thị vận tốc là một đường thẳng có hệ số góc bằng $\dfrac{1}{4}$. Tính quảng đường s mà vật di chuyển được trong 6 giờ?



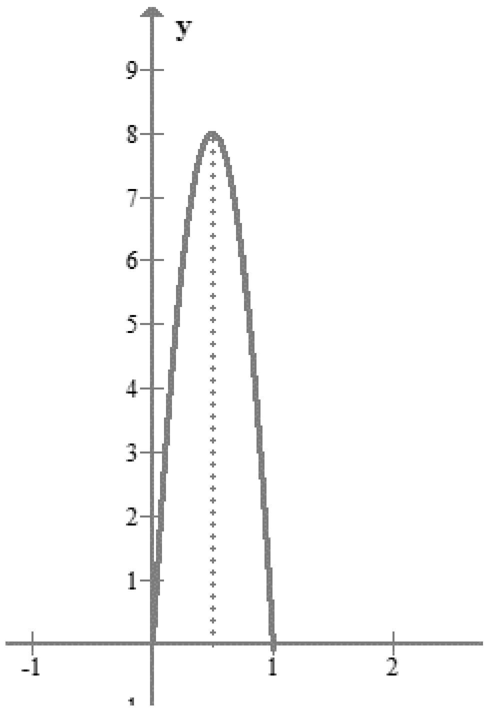
A. $\dfrac{130}{3}(km)$. **B.** $9(km)$. **C.** $40(km)$. **D.** $\dfrac{134}{3}(km)$.

Câu 18: Một người chạy trong 2 giờ, vận tốc v phụ thuộc vào thời gian t có đồ thị là 1 phần của đường Parabol với đỉnh $I(1;5)$ và trục đối xứng song song với trục tung Ov như hình vẽ. Tính quảng đường S người đó chạy được trong 1 giờ 30 phút kể từ lúc bắt đầu chạy .



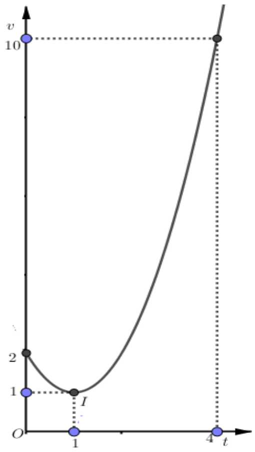
A. $2{,}11\,\text{km}$. **B.** $6{,}67\,\text{km}$. **C.** $5{,}63\ \text{km}$. **D.** $5{,}63\,\text{km}$.

Câu 19: Một người chạy trong thời gian 1 giờ, với vận tốc $v\ (\text{km/h})$ phụ thuộc vào thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị là một phần của parabol có đỉnh $I\left(\frac{1}{2};8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình vẽ. Tính quãng đường S người đó chạy được trong thời gian 45 phút, kể từ khi bắt đầu chạy.



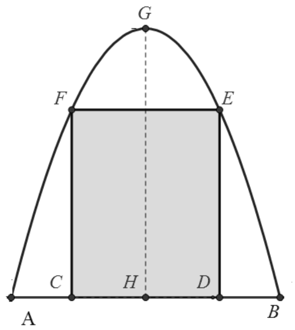
A. $5{,}3\ (\text{km})$. **B.** $4{,}5\ (\text{km})$. **C.** $4\ (\text{km})$. **D.** $2{,}3\ (\text{km})$.

Câu 20: Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/ h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;1)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.



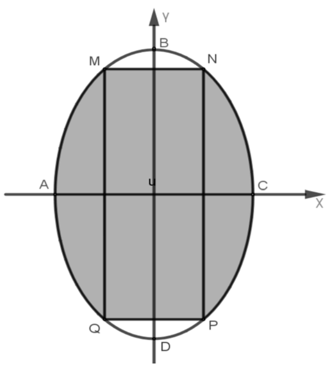
A. $s=6$ (km). **B.** $s=8$ (km). **C.** $s=\dfrac{40}{3}$ (km). **D.** $s=\dfrac{46}{3}$ (km).

Câu 21: Một cái cổng hình Parabol như hình vẽ sau. Chiều cao $GH=4m$, chiều rộng $AB=4m$, $AC=BD=0,9m$. Chủ nhà làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là 1200000 đồng$/m^2$, còn các phần để trắng làm xiên hoa có giá là 900000 đồng$/m^2$. Hỏi tổng số tiền để làm hai phần nói trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?



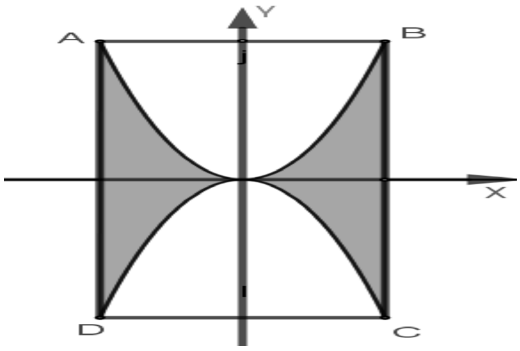
A. 11445000 đồng. **B.** 4077000 đồng. **C.** 7368000 đồng. **D.** 11370000 đồng.

Câu 22: Một biển quảng cáo với 4 đỉnh A,B,C,D như hình vẽ. Biết chi phí để sơn phần tô đậm là $200.000(\text{đ}/\text{m}^2)$ sơn phần còn lại là $100.000\text{đ}/\text{m}^2$. Cho $AC=8m; BD=10m; MN=4m$ Hỏi số tiền sơn gần với số tiền nào sau đây:



A. $12204000đ$. **B.** $14207000đ$. **C.** $11503000đ$. **D.** $10894000đ$.

Câu 23: Một họa tiết hình cánh bướm như hình vẽ bên.



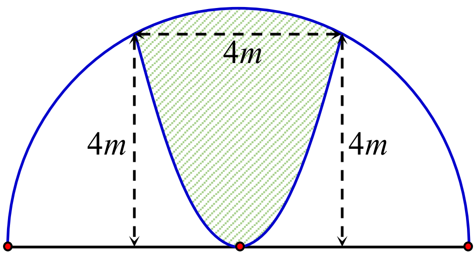
Phần tô đậm được đính đá với giá thành

500.000đ/m^2. Phần còn lại được tô màu với giá thành $250.000đ/m^2$.

Cho $AB = 4dm; BC = 8dm.$ Hỏi để trang trí 1000 họa tiết như vậy cần số tiền gần nhất với số nào sau đây.

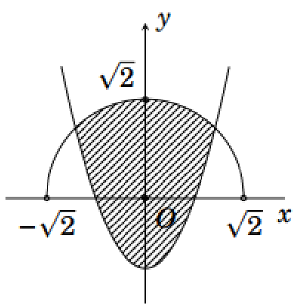
A. $105660667đ$. **B.** $106666667đ$. **C.** $107665667đ$. **D.** $108665667đ$.

Câu 24: Một khuôn viên dạng nửa hình tròn, trên đó người thiết kế phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm và có trục đối xứng vuông góc với đường kính của nửa hình tròn, hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn và cách nhau một khoảng bằng $4(m)$. Phần còn lại của khuôn viên dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước cho như hình vẽ, chi phí để trồng hoa và cỏ Nhật Bản tương ứng là 150.000 đồng/m^2 và 100.000 đồng/m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng hoa và trồng cỏ Nhật Bản trong khuôn viên đó?



A. 3.738.574 . **B.** 1.948.000 . **C.** 3.926.990 . **D.** 4.115.408 .

Câu 25: Người ta cần trồng một vườn hoa Cẩm Tú Cầu . Biết rằng phần gạch chéo là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = 2x^2 - 1$ và nửa trên của đường tròn có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng $\sqrt{2}(m)$ Tính số tiền tối thiểu để trồng xong vườn hoa Cẩm Tú Cầu biết rằng để trồng mỗi m^2 hoa cần ít nhất là 250000 đồng.



A. $\frac{3\pi - 2}{6} \times 250000$. **B.** $\frac{3\pi + 10}{6} \times 250000$. **C.** $\frac{3\pi + 10}{3} \times 250000$. **D.** $\frac{3\pi + 2}{6} \times 250000$

Câu 26: Nhà trường dự định làm một vườn hoa dạng elip được chia ra làm bốn phần bởi hai đường parabol có chung đỉnh, đối xứng với nhau qua trục của elip như hình vẽ bên. Biết độ dài trục lớn, trục nhỏ của elip lần lượt là 8 m và 4 m, F_1, F_2 là hai tiêu điểm của elip. Phần A, B dùng để trồng hoa, phần C, D dùng để trồng cỏ. Kinh phí để trồng mỗi mét vuông hoa và cỏ lần lượt là 250.000 đ và 150.000 đ. Tính tổng tiền để hoàn thành vườn hoa trên .

A. $5.676.000$ đ. **B.** $4.766.000$ đ. **C.** $4.656.000$ đ. **D.** $5.455.000$ đ.

Câu 27: Người ta xây một sân khấu với mặt sân có dạng hợp của hai hình tròn giao nhau. Bán kính của hai của hai hình tròn là 20 mét và 15 mét. Khoảng cách giữa hai tâm của hai hình tròn là 30 mét. Chi phí làm mỗi mét vuông phân giao nhau của hai hình tròn là 300 ngàn đồng và chi phí làm mỗi mét vuông phần còn lại là 100 ngàn đồng. Hỏi số tiền làm mặt sân của sân khấu gần với số nào trong các số dưới đây?

A. 202 triệu đồng. **B.** 208 triệu đồng. **C.** 218 triệu đồng. **D.** 200 triệu đồng.

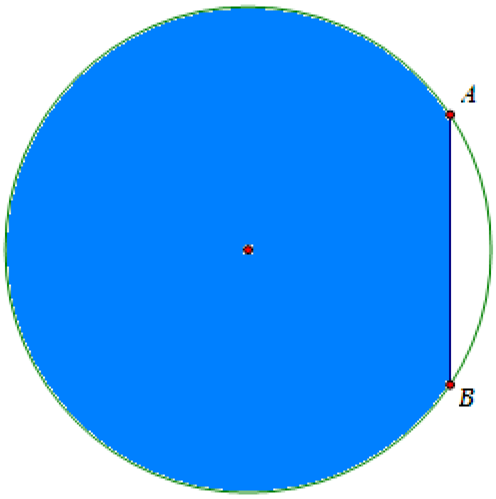
Câu 28: Người ta xây một sân khấu với sân có dạng của hai hình tròn giao nhau. Bán kính của hai hình tròn là 20 m và 15 m. Khoảng cách giữa hai tâm của hai hình tròn là 30 m. Chi phí làm mỗi mét vuông phần giao nhau của hai hình tròn là 300 nghìn đồng và chi phí làm mỗi mét vuông phần còn lại là 100 nghìn đồng. Hỏi số tiền làm mặt sân khấu gần với số nào nhất trong các số dưới đây?

A. 218 triệu đồng. **B.** 202 triệu đồng. **C.** 200 triệu đồng. **D.** 218 triệu đồng.

Câu 29: Bác Năm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là $2,25$ mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy số tiền bác Năm phải trả là:

A. 33750000 đồng. **B.** 3750000 đồng. **C.** 12750000 đồng. **D.** 6750000 đồng.

Câu 30: Một người có miếng đất hình tròn có bán kính bằng 5 m. Người này tính trồng cây trên mảnh đất đó, biết mỗi mét vuông trồng cây thu hoạch được 100 nghìn. Tuy nhiên cần có 1 khoảng trống để dựng 1 cái chòi và để đồ dùng nên người này bớt lại 1 phần đất nhỏ không trồng cây , trong đó $AB = 6m$. Hỏi khi thu hoạch cây thì người này thu được bao nhiêu tiền ?

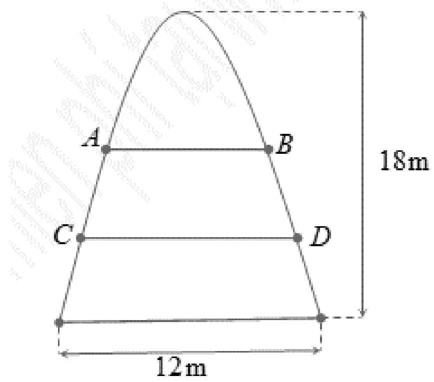


A. 3722 nghìn đồng. **D.** 7445 nghìn đồng. **C.** 7446 nghìn đồng. **B.** 3723 nghìn đồng.

Câu 31: Một mảnh vườn hình elip có trục lớn bằng $100(\text{m})$ và trục nhỏ bằng $80(\text{m})$ được chia làm hai phần bởi một đoạn thẳng nối hai đỉnh liên tiếp của elip. Phần nhỏ hơn trồng cây con và phần lớn hơn trồng rau. Biết lợi nhuận thu được là 2000 mỗi m^2 trồng cây con và 4000 mỗi m^2 trồng rau. Hỏi thu nhập của cả mảnh vườn là bao nhiêu? .

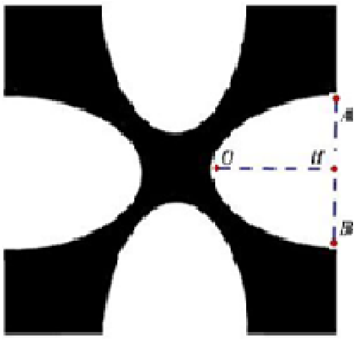
A. 31904000. **B.** 23991000. **C.** 10566000. **D.** 17635000.

Câu 32: Một cổng chào có dạng hình Parabol chiều cao 18 m, chiều rộng chân đế 12 m. Người ta căng hai sợi dây trang trí AB, CD nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi Parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau. Tỉ số $\dfrac{AB}{CD}$ bằng



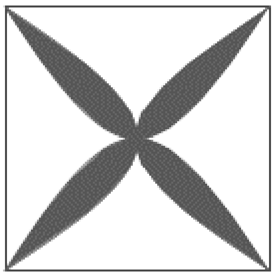
A. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\dfrac{4}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **D.** $\dfrac{3}{1+2\sqrt{2}}$.

Câu 33: Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB = 5$ cm, $OH = 4$ cm. Tính diện tích bề mặt hoa văn đó.



A. $\dfrac{160}{3}\text{cm}^2$. **B.** $\dfrac{140}{3}\text{cm}^2$. **C.** $\dfrac{14}{3}\text{cm}^2$. **D.** 50 cm^2.

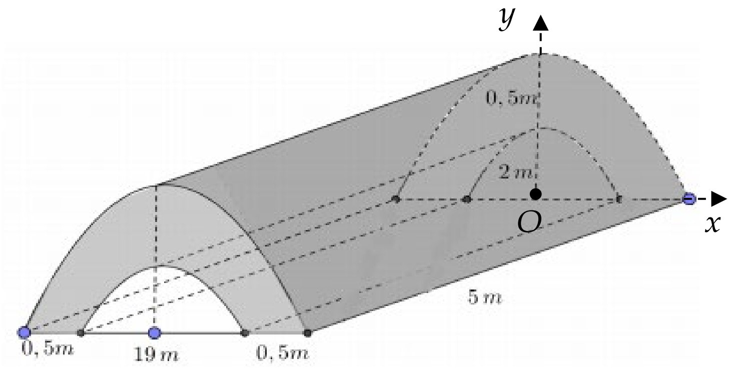
Câu 34: Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa.



Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng

A. $800\,\text{cm}^2$. **B.** $\dfrac{800}{3}\text{cm}^2$. **C.** $\dfrac{400}{3}\text{cm}^2$. **D.** $250\,\text{cm}^2$.

Câu 35: Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã Y có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu. .

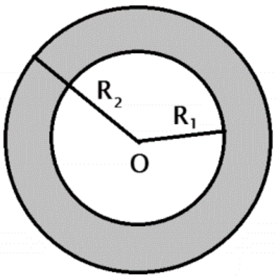


A. $19\,\text{m}^3$. **B.** $21\,\text{m}^3$. **C.** $18\,\text{m}^3$. **D.** $40\,\text{m}^3$.

Câu 36: Để kỷ niệm ngày 26-3. Chi đoàn 12A dự định dựng một lều trại có dạng parabol, với kích thước: nền trại là một hình chữ nhật có chiều rộng là 3 mét, chiều sâu là 6 mét, đỉnh của parabol cách mặt đất là 3 mét. Hãy tính thể tích phần không gian phía bên trong trại để lớp 12A cử số lượng người tham dự trại cho phù hợp.

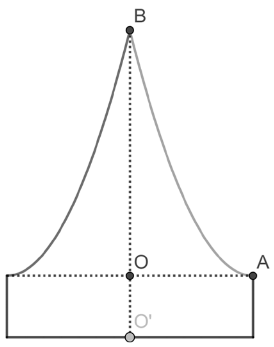
A. $30\,m^3$ **B.** $36\,m^3$ **C.** $40\,m^3$ **D.** $41\,m^3$

Câu 37: Săm lốp xe ô tô khi bơm căng đặt nằm trên mặt phẳng nằm ngang có hình chiếu bằng như hình vẽ với bán kính đường tròn nhỏ $R_1 = 20cm$, bán kính đường tròn lớn $R_2 = 30cm$ và mặt cắt khi cắt bởi mặt phẳng đi qua trục, vuông góc mặt phẳng nằm ngang là hai đường tròn. Bỏ qua độ dày vỏ săm. Tính thể tích không khí được chứa bên trong săm.



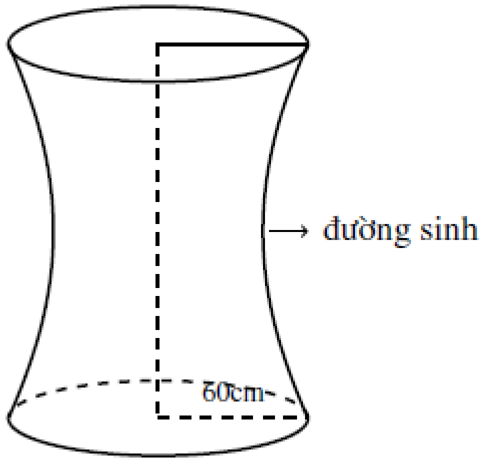
A. $1250\pi^2 cm^3$. **B.** $1400\pi^2 cm^3$. **C.** $2500\pi^2 cm^3$. **D.** $600\pi^2 cm^3$.

Câu 38: Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn An đã làm một chiếc mũ "cách điệu" cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO' = 5$ cm, $OA = 10$ cm, $OB = 20$ cm, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm A. Thể tích của chiếc mũ bằng



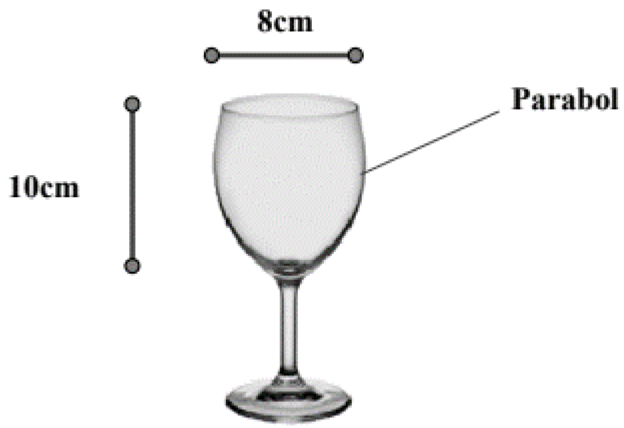
A. $\dfrac{2750\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right)$ **B.** $\dfrac{2500\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right)$ **C.** $\dfrac{2050\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right)$ **D.** $\dfrac{2250\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right)$

Câu 39: Cho chiếc trống như hình vẽ, có đường sinh là nửa elip được cắt bởi trục lớn với độ dài trục lớn bằng 80 cm, độ dài trục bé bằng 60 cm và đáy trống là hình tròn có bán kính bằng 60 cm. Tính thể tích V của chiếc trống .



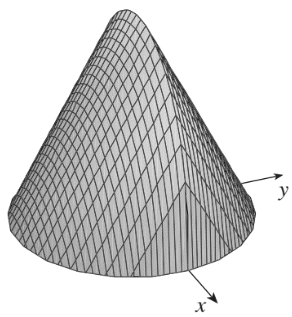
A. $V = 344963\,\text{cm}^3$ **B.** $V = 344964\,\text{cm}^3$ **C.** $V = 208347\,\text{cm}^3$ **D.** $V = 208346\,\text{cm}^3$

Câu 40: Một cốc rượu có hình dạng tròn xoay và kích thước như hình vẽ, thiết diện dọc của cốc là một đường Parabol. Tính thể tích tối đa mà cốc có thể chứa được



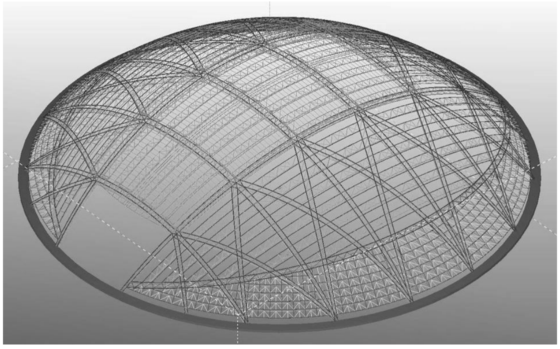
A. $V \approx 320cm^3$. **B.** $V \approx 1005,31cm^3$. **C.** $V \approx 251,33cm^3$. **D.** $V \approx 502,65cm^3$.

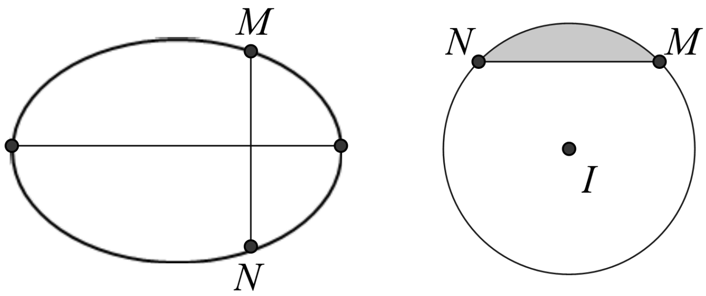
Câu 41: Cho vật thể đáy là hình tròn có bán kính bằng 1. Khi cắt vật thể bằng mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\left(-1 \le x \le 1\right)$ thì được thiết diện là một tam giác đều. Thể tích V của vật thể đó là



A. $V = \sqrt{3}$. **B.** $V = 3\sqrt{3}$. **C.** $V = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V = \pi$.

Câu 42: Sân vận động Sport Hub là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức tại Singapore năm 2015. Nền sân là một elip $\left(E\right)$ có trục lớn dài $150m$, trục bé dài $90m$. Nếu cắt sân vận động theo một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của (E) và cắt elip ở M, N thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm I với MN là một dây cung và góc $\widehat{MIN} = 90^0$. Để lắp máy điều hòa không khí thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu là mái không đáng kể. Hỏi thể tích xấp xỉ bao nhiêu?





Hình 3

A. $57793m^3$. **B.** $115586m^3$. **C.** $32162m^3$. **D.** $101793m^3$.

Câu 43: Một cái thùng đựng dầu có thiết diện ngang là một đường elip có trục lớn bằng 1m, trục bé bằng $0{,}8\text{m}$, chiều dài bằng 3m. Được đặt sao cho trục bé nằm theo phương thẳng đứng. Biết chiều cao của dầu hiện có trong thùng là $0{,}6\text{m}$. Tính thể tích V của dầu có trong thùng.

A. $V = 1{,}52\text{m}^3$. **B.** $V = 1{,}31\text{m}^3$. **C.** $V = 1{,}27\text{m}^3$. **D.** $V = 1{,}19\text{m}^3$.

Câu 44: Người ta thay nước mới cho một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có độ sâu là 280 cm. Giả sử $h(t)$ là chiều cao của mực nước bơm được tại thời điểm t giây, biết rằng tốc độ tăng của chiều cao mực nước tại giây thứ t là $h'(t) = \dfrac{1}{500}\sqrt[3]{t+3}$ và lúc đầu hồ bơi không có nước. Hỏi sau bao lâu thì bơm được số nước bằng $\dfrac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi ?

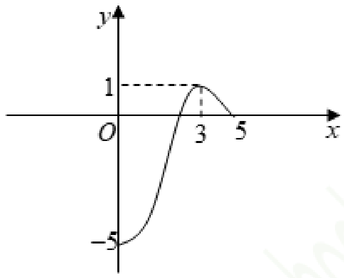
A. 2 giờ 36 giây. **B.** 2 giờ 34 giây. **C.** 2 giờ 35 giây. **D.** 2 giờ 36 giây.

Câu 45: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 6at^2 + 2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là

$90m^3$, sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là $504m^3$. Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 9 giây.

A. $1458m^3$. **B.** $600m^3$. **C.** $2200m^3$. **D.** $4200m^3$.

Câu 46: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;5]$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[0;5]$ được cho như hình bên.

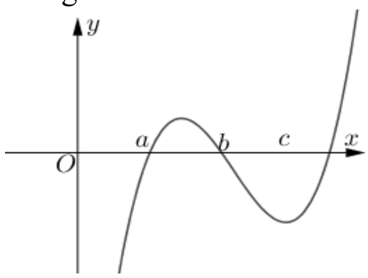


Tìm mệnh đề đúng

A. $f(0) = f(5) < f(3)$. **B.** $f(3) < f(0) = f(5)$.

C. $f(3) < f(0) < f(5)$. **D.** $f(3) < f(5) < f(0)$.

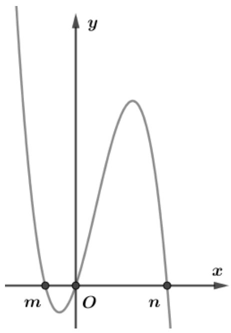
Câu 47: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a < b < c$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



A. $f(b) > f(a) > f(c)$. **B.** $f(a) > f(b) > f(c)$.

C. $f(c) > f(a) > f(b)$. **D.** $f(c) > f(b) > f(a)$.

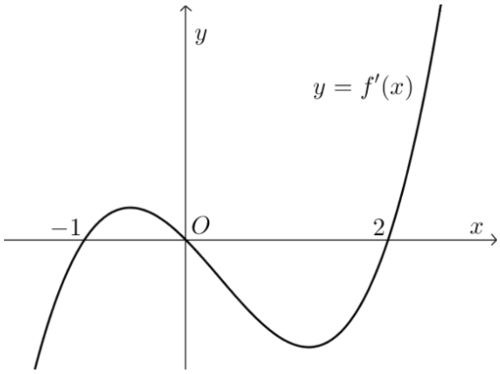
Câu 48: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn, có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi

A. $f(0) < 0 < f(m)$. **B.** $f(0) > 0$. **C.** $f(m) < 0 < f(n)$. **D.** $f(0) < 0 < f(n)$.

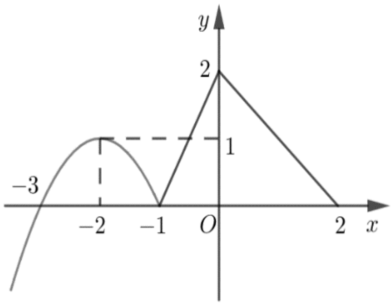
Câu 49: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình bên dưới. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $f(0) > f(2) > f(-1)$. **B.** $f(0) > f(-1) > f(2)$.

C. $f(2) > f(0) > f(-1)$. **D.** $f(-1) > f(0) > f(2)$.

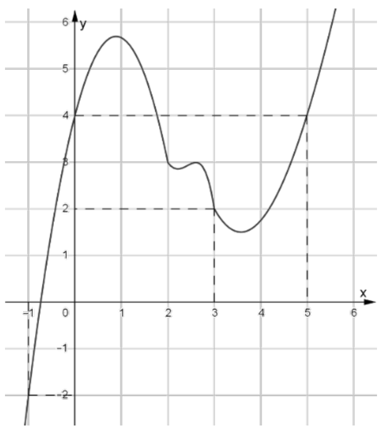
Câu 50: Cho hàm số $f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[-3;2]$ như hình vẽ



Biết $f(-3) = 0$, giá trị của $f(-1) + f(1)$ bằng

A. $\frac{23}{6}$ **B.** $\frac{31}{6}$ **C.** $\frac{35}{3}$ **D.** $\frac{9}{2}$

Câu 51: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x-1)^2$.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

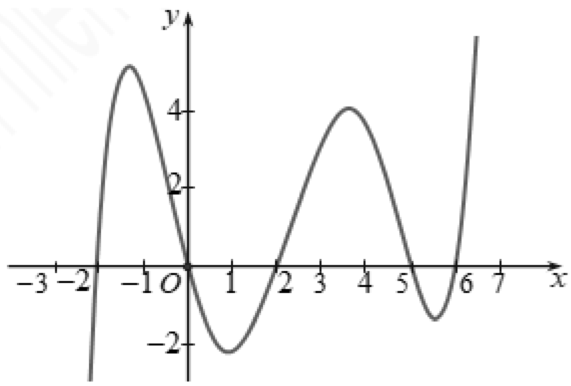
A. $g(-1) < g(3) < g(5)$. **B.** $g(-1) < g(5) < g(3)$.

C. $g(5) < g(-1) < g(3)$. **D.** $g(3) < g(5) < g(-1)$.

Câu 52: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ có đồ thị là (C). Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tính giá trị $H = f(4) - f(2)$?

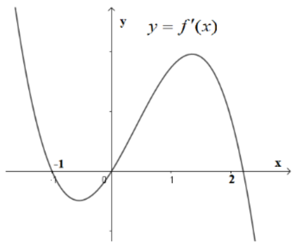
A. $H = 45$. **B.** $H = 64$. **C.** $H = 51$. **D.** $H = 58$.

Câu 53: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $M = \max\limits_{[-2;6]} f(x)$, $m = \min\limits_{[-2;6]} f(x)$, $T = M + m$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



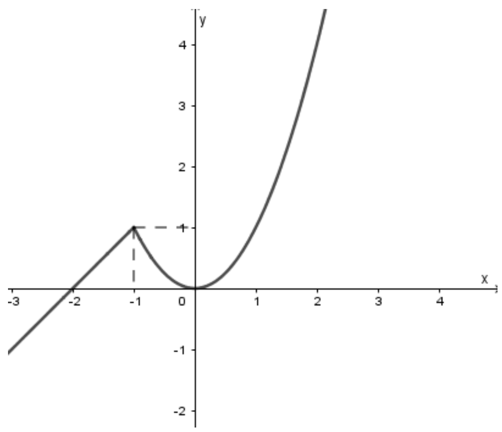
A. $T = f(0) + f(-2)$. **B.** $T = f(5) + f(-2)$. **C.** $T = f(5) + f(6)$. **D.** $T = f(0) + f(2)$.

Câu 54: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?



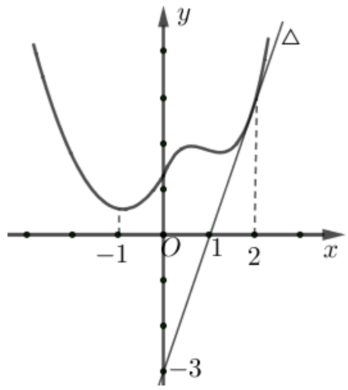
A. $a + c > 0$. **B.** $a + b + c + d < 0$. **C.** $a + c < b + d$. **D.** $b + d - c > 0$.

Câu 55: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị gồm một phần đường thẳng và một phần parabol có đỉnh là gốc tọa độ O như hình vẽ. Giá trị của $\int_{-3}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ bằng



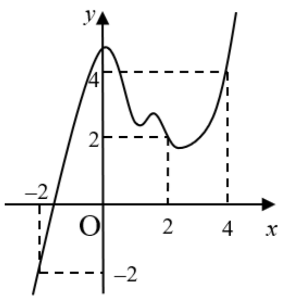
A. $\dfrac{26}{3}$. **B.** $\dfrac{38}{3}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{28}{3}$.

Câu 56: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm đến cấp 2 trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-1$, có đồ thị như hình vẽ và đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $x=2$. Tính $\int\limits_1^4 f''(x-2)\mathrm{d}x$



A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

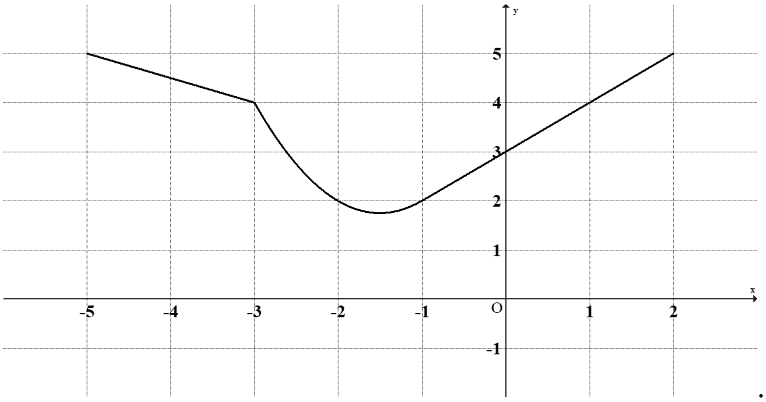
Câu 57: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Giá trị của biểu thức $I=\int\limits_0^4 f'(x-2)\mathrm{d}x+\int\limits_0^2 f'(x+2)\mathrm{d}x$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 10.

Câu 58: Cho hàm số $f(x)$ liên tục có đồ thị như hình bên dưới.



Biết $F'(x)=f(x),\forall x\in[-5;2]$ và $\int_{-3}^{-1}f(x)\mathrm{d}x=\frac{14}{3}$. Tính $F(2)-F(-5)$

A. $\frac{-145}{6}$. **B.** $\frac{-89}{6}$. **C.** $\frac{145}{6}$. **D.** $\frac{89}{6}$.

CHƯƠNG III

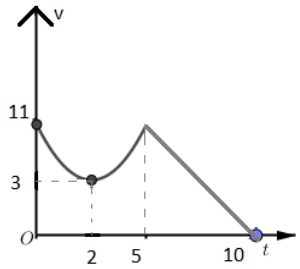
NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN – ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

BÀI 3. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

MỨC ĐỘ VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

Câu 1: Chất điểm chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)(m/s)$ có dạng đường Parapol khi $0 \le t \le 5(s)$ và $v(t)$ có dạng đường thẳng khi $5 \le t \le 10(s)$.Cho đỉnh Parapol là $I(2,3)$. Hỏi quãng đường đi được chất điểm trong thời gian $0 \le t \le 10(s)$ là bao nhiêu mét?



A. $\frac{181}{2}$. **B.** 90. **C.** 92. **D.** $\frac{545}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi Parapol $(P): y = ax^2 + bx + c$ khi $0 \le t \le 5(s)$

Do $(P): y = ax^2 + bx + c$ đi qua $I(3;2); A(0;11)$ nên

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 3 \\ c = 11 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -8 \\ c = 11 \end{cases}.$$

Khi đó quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $0 \le t \le 5(s)$ là $S = \int_0^5 (2x^2 - 8x + 11)dx = \frac{115}{3}(m)$

Ta có $f(5) = 21$

Gọi $d: y = ax + b$ khi $5 \le t \le 10(s)$ do d đi qua điểm $B(5;21)$ và $C(10;0)$ nên:

$\begin{cases}5a+b=11\\10a+b=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-\dfrac{21}{5}\\b=42\end{cases}.$

Khi đó quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $5\le t\le 10(s)$ là $S=\int\limits_5^{10}\left(-\dfrac{26}{5}x+52\right)dx=\dfrac{105}{2}(m)$

Quãng đường đi được chất điểm trong thời gian $0\le t\le 10(s)$ là $S=\dfrac{115}{3}+\dfrac{105}{2}=\dfrac{545}{6}$.

Câu 2: Một ô tô đang chạy với tốc độ $20(m/s)$ thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+20(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét (m)?

A. 20 m. **B.** 30 m. **C.** 10 m. **D.** 40 m.

Lời giải

Khi ô tô dừng hẳn thì: $v(t)=0 \Leftrightarrow -5t+20=0 \Leftrightarrow t=4(s)$.

Vậy từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được: $s=\int\limits_0^4(-5t+20)dt=40(m)$.

Câu 3: Một ô tô đang chạy với vận tốc là 12 (m/s) thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-6t+12\ (m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến lúc ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

A. $8m$. **B.** $12m$. **C.** $15m$. **D.** $10m$.

Lời giải

Lấy mốc thời gian $(t=0)$ là lúc đạp phanh.

Khi ô tô dừng hẳn thì vận tốc $v(t)=0$, tức là $v(t)=-6t+12=0 \Leftrightarrow t=2$.

Vậy từ lúc đạp phanh đến lúc ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được quãng đường là

$$\int\limits_0^2(-6t+12)\mathrm{d}t=\left(-3t^2+12t\right)\Big|_0^2=12\ (m).$$

Câu 4: Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc 15m/s thì người lái xe hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-3t+15(\text{m/s})$, trong đó t . Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được bao nhiêu mét?

A. 38m. **B.** 37,2m. **C.** 37,5m. **D.** 37m.

Lời giải

Chọn C

Khi xe dừng hẳn thì $v(t)=0 \Rightarrow t=5$.

Khi đó quảng đường xe đi được tính từ lúc bắt đầu hãm phanh đến khi dừng hẳn là:

$$S=\int_0^5(-3t+15)\mathrm{d}t=\left(-\frac{3t^2}{2}+15t\right)\Big|_0^5=37{,}5\,\mathrm{m}$$

Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 5: động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-10t+20$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 5 m **B.** 20 m **C.** 40 m **D.** 10 m

Lời giải

Chọn B

Lúc bắt đầu đạp phanh, ô tô có vận tốc $20\,m/s \Rightarrow v(t_0)=-10t_0+20=20 \Leftrightarrow t_0=0$

Ô tô dừng hẳn khi đó vận tốc $v(t_1)=0 \Leftrightarrow 20-10t_1=0 \Leftrightarrow t_1=2$.

Do đó ô tô di chuyển được thêm là: $\int_0^2(20-10t)dt=(20t-5t^2)\Big|_0^2=20(m)$

Câu 6: Một ô tô đang chạy với vận tốc $10m/s$ thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-2t+10(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Tính quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng.

A. $55m$. **B.** $25m$. **C.** $50m$. **D.** $16m$.

Lời giải

Ta có $-2t+10=0 \Leftrightarrow t=5 \Rightarrow$ Thời gian tính từ lúc bắt đầu đạp phanh đến khi dừng hẳn là 5 giây. Vậy trong 8 giây cuối cùng thì có 3 giây ô tô chuyển động với vận tốc $10m/s$ và 5 giây chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-2t+10(m/s)$.

Khi đó quãng đường ô tô di chuyển là $S=3.10+\int_0^5(-2t+10)dt=30+25=55m$.

Câu 7: Một chất điểm bắt đầu chuyển động thẳng đều với vận tốc v_0, sau 6 giây chuyển động thì gặp chướng ngại vật nên bắt đầu giảm tốc độ với vận tốc chuyển động $v(t)=-\frac{5}{2}t+a\ (m/s),\ (t\ge 6)$ cho đến khi dừng hẳn. Biết rằng kể từ lúc chuyển động đến lúc dừng thì chất điểm đi được quãng đường là 80m. Tìm v_0.

A. $v_0=35m/s$. **B.** $v_0=25m/s$. **C.** $v_0=10m/s$. **D.** $v_0=20m/s$.

Lời giải

- Tại thời điểm $t=6$ vật đang chuyển động với vận tốc v_0 nên có $v(6)=v_0$

$\Leftrightarrow -\frac{5}{2}.6+a=v_0 \Leftrightarrow a=v_0+15$, suy ra $v(t)=-\frac{5}{2}t+v_0+15$.

- Gọi k là thời điểm vật dừng hẳn, vậy ta có $v(k)=0 \Leftrightarrow k=\frac{2}{5}.(v_0+15) \Leftrightarrow k=\frac{2v_0}{5}+6$.

- Tổng quãng đường vật đi được là $80=6.v_0+\int\limits_6^k\left(-\frac{5}{2}t+v_0+15\right)dt$

$$\Leftrightarrow 80=6.v_0+\left.\left(-\frac{5}{4}t^2+v_0.t+15t\right)\right|_6^k$$

$$\Leftrightarrow 80=6.v_0-\frac{5}{4}(k^2-6^2)+v_0.(k-6)+15(k-6)$$

$$\Leftrightarrow 80=6.v_0-\frac{5}{4}\left(\frac{4(v_0)^2}{25}+\frac{24v_0}{5}\right)+v_0.\frac{2v_0}{5}+15.\frac{2v_0}{5}$$

$$\Leftrightarrow (v_0)^2+36.v_0-400=0$$

$$\Leftrightarrow v_0=10$$

Câu 8: Một ô tô chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t)=7t\ \ (\text{m/s})$. Đi được $5\ (\text{s})$ người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-35\ \ (\text{m/s}^2)$. Tính quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn?

A. 87.5 mét. **B.** 96.5 mét. **C.** 102.5 mét. **D.** 105 mét.

Lời giải

Quãng đường ô tô đi được trong $5\ (\text{s})$ đầu là $s_1=\int\limits_0^5 7t\text{d}t=7\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^5=87,5$.

Phương trình vận tốc của ô tô khi người lái xe phát hiện chướng ngại vật là $v_{(2)}(t)=35-35t$.

Khi xe dừng lại hẳn thì $v_{(2)}(t)=0 \Leftrightarrow 35-35t=0 \Leftrightarrow t=1$.

Quãng đường ô tô đi được từ khi phanh gấp đến khi dừng lại hẳn là $s_2=\int\limits_0^1(35-35t)\text{d}t$

$$=\left.\left(35t-35\frac{t^2}{2}\right)\right|_0^1=17.5 .$$

Vậy quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn là $s=s_1+s_2=87.5+17.5=105$.

Câu 9: Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0=15\text{ m/s}$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=t^2+4t\ (\text{m/s}^2)$. Tính quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

A. $70,25\text{ m}$. **B.** $68,25\text{ m}$. **C.** $67,25\text{ m}$. **D.** $69,75\text{ m}$.

Lời giải

$$a(t)=t^2+4t \Rightarrow v(t)=\int a(t)\text{d}t=\frac{t^3}{3}+2t^2+C\ \ (C\in\mathbb{R}).$$

Mà $v(0)=C=15 \Rightarrow v(t)=\frac{t^3}{3}+2t^2+15$.

Vậy $S=\int_0^3\left(\frac{t^3}{3}+2t^2+15\right)dt=69,75$ m.

Câu 10: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t)=10+t+9t^2-t^3$ trong đó s tính bằng mét, t tính bằng giây. Thời gian để vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất là

A. $t=6(s)$. **B.** $t=3(s)$. **C.** $t=2(s)$. **D.** $t=5(s)$.

Lời giải

$v(t)=s'(t)=-3t^2+18t+1$.

Dễ thấy hàm số $v(t)$ là hàm bậc hai có đồ thị dạng parabol với hệ số $a=-3<0$.

Do đó v_{max} đạt tại đỉnh $I(3;28)$ của parabol.

Vậy Thời gian để vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất $t=3(s)$.

Câu 11: Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t)=7t$ (m/s). Đi được $5s$, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-70$ (m/s^2). Tính quãng đường S đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

A. $S=96,25$ (m). **B.** $S=87,5$ (m). **C.** $S=94$ (m). **D.** $S=95,7$ (m).

Lời giải

Chọn gốc thời gian là lúc ô tô bắt đầu đi. Sau $5s$ ô tô đạt vận tốc là $v(5)=35(m/s)$.

Sau khi phanh vận tốc ô tô là $v(t)=35-70(t-5)$.

Ô tô dừng tại thời điểm $t=5,5s$.

Quãng đường ô tô đi được là $S=\int_0^5 7t\,dt+\int_5^{5,5}\left[35-70(t-5)\right]dt=96,25(m)$.

Câu 12: Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t)=2t$ (m/s). Đi được 12 giây, người lái xe gặp chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-12(m/s^2)$. Tính quãng đường $s(m)$ đi được của ôtô từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi dừng hẳn?

A. $s=168(m)$. **B.** $s=166(m)$. **C.** $s=144(m)$. **D.** $s=152(m)$.

Lời giải

□Giai đoạn 1: Xe bắt đầu chuyển động đến khi gặp chướng ngại vật.
Quãng đường xe đi được là:

$S_1=\int_0^{12}v_1(t)dt=\int_0^{12}2t\,dt=t^2\Big|_0^{12}=144(m)$.

□ Giai đoạn 2: Xe gặp chướng ngại vật đến khi dừng hẳn.
Ôtô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v_2(t)=\int a\,dt=-12t+c$.

Vận tốc của xe khi gặp chướng ngại vật là: $v_2(0)=v_1(12)=2.12=24(\text{m/s})$.

$\Rightarrow -12.0+c=24 \Rightarrow c=24 \Rightarrow v_2(t)=-12t+24$.

Thời gian khi xe gặp chướng ngại vật đến khi xe dừng hẳn là nghiệm phương trình:

$-12t+24=0 \Leftrightarrow t=2$.

Khi đó, quãng đường xe đi được là:

$S_2=\int\limits_0^2 v_2(t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^2(-12t+24)\,\mathrm{d}t=\left(-6t^2+24t\right)\Big|_0^2=24(\text{m})$.

Vậy tổng quãng đường xe đi được là: $S=S_1+S_2=168(\text{m})$.

Câu 13: Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu $1\,\text{m}$. Một ô tô A đang chạy với vận tốc $16\,\text{m/s}$ bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A(t)=16-4t$, thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để có 2 ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

A. 33. **B.** 12. **C.** 31. **D.** 32.

Lời giải

Ta có: $v_A(0)=16\,\text{m/s}$.

Khi xe A dừng hẳn: $v_A(t)=0 \Leftrightarrow t=4\,\text{s}$.

Quãng đường từ lúc xe A hãm phanh đến lúc dừng hẳn là $s=\int\limits_0^4(16-4t)\,\mathrm{d}t=32\,\text{m}$.

Do các xe phải cách nhau tối thiểu $1\,\text{m}$ để đảm bảo an toàn nên khi dừng lại ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là $33\,\text{m}$.

Câu 14: Một vật chuyển động với vận tốc $10\,\text{m/s}$ thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian là $a(t)=t^2+3t$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 6 giây kể từ khi vật bắt đầu tăng tốc.

A. 136m. **B.** 126m. **C.** 276m. **D.** 216m.

Lời giải

Ta có $v(0)=10\,\text{m/s}$ và $v(t)=\int\limits_0^t a(t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^t\left(t^2+3t\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}\right)\Big|_0^t=\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2$.

Quãng đường vật đi được là $S=\int\limits_0^6 v(t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^6\left(\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{1}{12}t^4+\frac{1}{2}t^3\right)\Big|_0^6=216\,\text{m}$.

Câu 15: Một chiếc máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t)=t^2+10t\ (m/s)$ với t là thời gian được tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc $200(m/s)$ thì rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

A. $\frac{2500}{3}(m)$. **B.** $2000(m)$. **C.** $500(m)$. **D.** $\frac{4000}{3}(m)$.

Lời giải

Thời điểm máy bay đạt vận tốc $200(m/s)$ là $v(t)=200 \Leftrightarrow t^2+10t=200 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=10 \\ t=-20 \end{array}\right. \Leftrightarrow t=10$

Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

$s=\int\limits_0^{10}\left(t^2+10t\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{t^3}{3}+5t\right)\Bigg|_0^{10}=\frac{2500}{3}(m)$.

Câu 16: Một ôtô đang dừng và bắt đầu chuyển động theo một đường thẳng với gia tốc $a(t)=6-2t\ \left(m/s^2\right)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc ôtô bắt đầu chuyển động. Hỏi quảng đường ôtô đi được từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi vận tốc của ôtô đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu mét?

A. $18m$. **B.** $36m$. **C.** $22,5m$. **D.** $6,75m$.

Lời giải

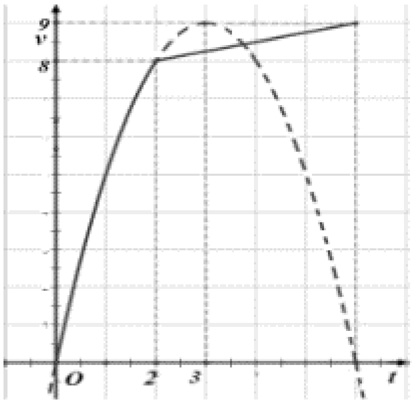
$a(t)=6-2t\ \left(m/s^2\right) \Rightarrow v(t)=\int(6-2t)dt=6t-t^2+C$

Xe dừng và bắt đầu chuyển động nên khi $t=0$ thì $v=0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow v(t)=6t-t^2$.

$v(t)=6t-t^2$ là hàm số bậc 2 nên đạt GTLN khi $t=-\frac{b}{2a}=3\ (s)$

Quảng đường xe đi trong 3 giây đầu là: $S=\int\limits_0^3\left(6t-t^2\right)dt=18m$.

Câu 17: Một vật chuyển động trong 6 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị như hình bên dưới. Trong khoảng thời gian 2 giờ từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị là một phần đường Parabol có đỉnh $I(3;9)$ và có trục đối xứng song song với trục tung. Khoảng thời gian còn lại, đồ thị vận tốc là một đường thẳng có hệ số góc bằng $\frac{1}{4}$. Tính quảng đường s mà vật di chuyển được trong 6 giờ?



A. $\frac{130}{3}(km)$. **B.** $9(km)$. **C.** $40(km)$. **D.** $\frac{134}{3}(km)$.

Lời giải

Chọn A

+ Vì Parabol đi qua O và có tọa độ đỉnh $I(3;9)$ nên thiết lập được phương trình Parabol là $(P): y = v(t) = -t^2 + 6t; \forall t \in [0;2]$

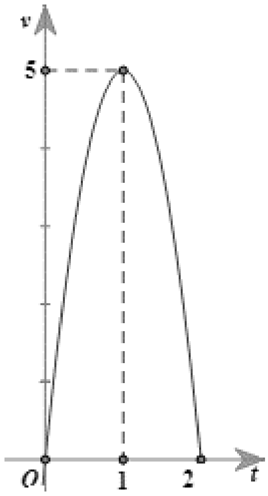
+ Sau 2 giờ đầu thì hàm vận tốc có dạng là hàm bậc nhất $y = \frac{1}{4}t + m$, dựa trên đồ thị ta thấy đi qua điểm có tọa độ $(6;9)$ nên thế vào hàm số và tìm được $m = \frac{15}{2}$.

Nên hàm vận tốc từ giờ thứ 2 đến giờ thứ 6 là $y = \frac{1}{4}t + \frac{15}{2}; \forall t \in [2;6]$

+ Quảng đường vật đi được bằng tổng đoạn đường 2 giờ đầu và đoạn đường 4 giờ sau.

$$S = S_1 + S_2 = \int_0^2 \left(-t^2 + 6t\right)dt + \int_2^6 \left(\frac{1}{4}t + \frac{15}{2}\right)dt = \frac{130}{3}(km)$$

Câu 18: Một người chạy trong 2 giờ, vận tốc v phụ thuộc vào thời gian t có đồ thị là 1 phần của đường Parabol với đỉnh $I(1;5)$ và trục đối xứng song song với trục tung Ov như hình vẽ. Tính quảng đường S người đó chạy được trong 1 giờ 30 phút kể từ lúc bắt đầu chạy .



A. $2{,}11\,\text{km}$. **B.** $6{,}67\,\text{km}$. **C.** $5{,}63$ km. **D.** $5{,}63\,\text{km}$.

Lời giải

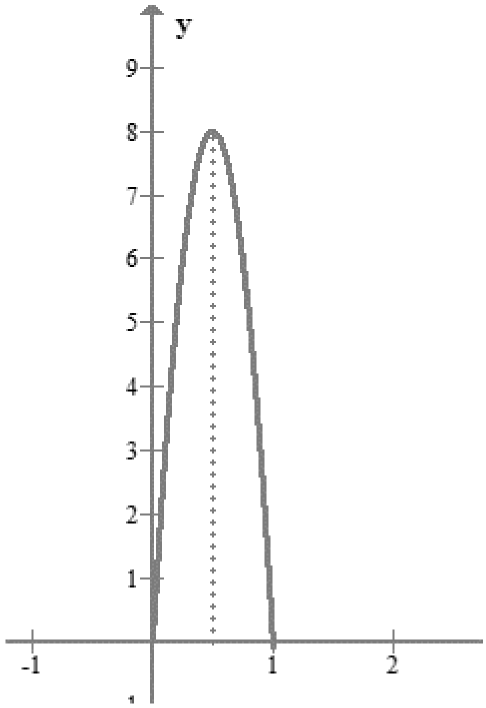
Ta có 1 giờ 30 phút = 1,5 giờ $\Rightarrow S = \int_0^{1,5} v(t)\mathrm{d}t$.

Đồ thị $v = v(t)$ đi qua gốc tọa độ nên $v(t)$ có dạng $v(t) = at^2 + bt$.

Đồ thị $v = v(t)$ có đỉnh là I nên $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 1 \\ a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 10 \end{cases} \Rightarrow v(t) = -5t^2 + 10t$

$$S = \int_0^{1,5} \left(-5t^2 + 10t\right)\mathrm{d}t = \frac{45}{8} \approx 5{,}63.$$

Câu 19: Một người chạy trong thời gian 1 giờ, với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị là một phần của parabol có đỉnh $I\left(\frac{1}{2};8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình vẽ. Tính quãng đường S người đó chạy được trong thời gian 45 phút, kể từ khi bắt đầu chạy.



A. $5{,}3\ (\text{km})$. **B.** $4{,}5\ (\text{km})$. **C.** $4\ (\text{km})$. **D.** $2{,}3\ (\text{km})$.

Lời giải

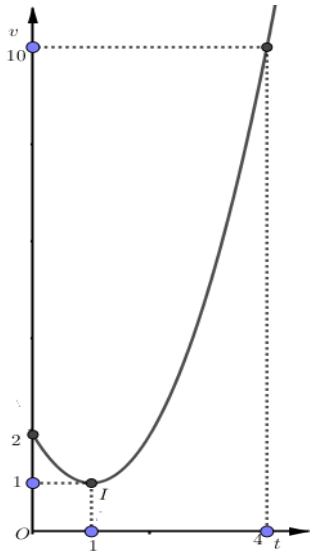
Trước hết ta tìm công thức biểu thị vận tốc theo thời gian, giả sử $v(t)=at^2+bt+c$.

Khi đó dựa vào hình vẽ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} c=0 \\ a\left(\frac{1}{2}\right)^2+b\left(\frac{1}{2}\right)+c=8 \\ a+b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-32 \\ b=32 \\ c=0 \end{cases}.$$

Do đó quãng đường người đó đi được sau 45 phút là $S=\int\limits_0^{\frac{45}{60}}\left(32t-32t^2\right)dt=4{,}5\ (\text{km})$.

Câu 20: Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/ h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;1)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.



A. $s=6$ (km). **B.** $s=8$ (km). **C.** $s=\dfrac{40}{3}$ (km). **D.** $s=\dfrac{46}{3}$ (km).

Lời giải

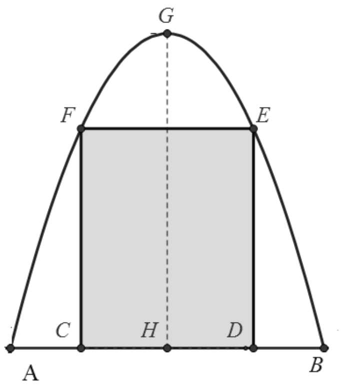
Hàm biểu diễn vận tốc có dạng $v(t)=at^2+bt+c$. Dựa vào đồ thị ta có:

$$\begin{cases} c=2 \\ \dfrac{-b}{2a}=1 \\ a+b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=2 \end{cases} \Leftrightarrow v(t)=t^2-2t+2.$$

Với $t=4 \Rightarrow v(4)=10$.

Từ đó $s=\int\limits_0^4 (t^2-2t+2)dt=\dfrac{40}{3}(km)$.

Câu 21: Một cái cổng hình Parabol như hình vẽ sau. Chiều cao $GH=4m$, chiều rộng $AB=4m$, $AC=BD=0,9m$. Chủ nhà làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là 1200000 đồng$/m^2$, còn các phần để trắng làm xiên hoa có giá là 900000 đồng$/m^2$. Hỏi tổng số tiền để làm hai phần nói trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?

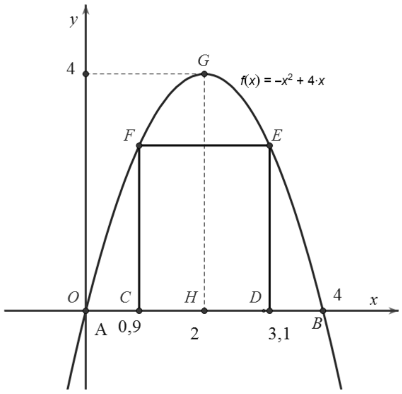


A. 11445000 đồng. **B.** 4077000 đồng. **C.** 7368000 đồng. **D.** 11370000 đồng.

Lời giải

Chọn A

Gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho AB trùng Ox, A trùng O khi đó parabol có đỉnh $G(2;4)$ và đi qua gốc tọa độ.



Giả sử phương trình của parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

Vì parabol có đỉnh là $G(2;4)$ và đi qua điểm $O(0;0)$ nên ta có $\begin{cases} c = 0 \\ -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ a.2^2 + b.2 + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 0 \end{cases}$.

Suy ra phương trình parabol là $y = f(x) = -x^2 + 4x$.

Diện tích của cả cổng là $S = \int\limits_0^4 \left(-x^2 + 4x\right) \mathrm{d}x = \left(-\dfrac{x^3}{3} + 2x^2\right)\Big|_0^4 = \dfrac{32}{3}\left(\mathrm{m}^2\right)$.

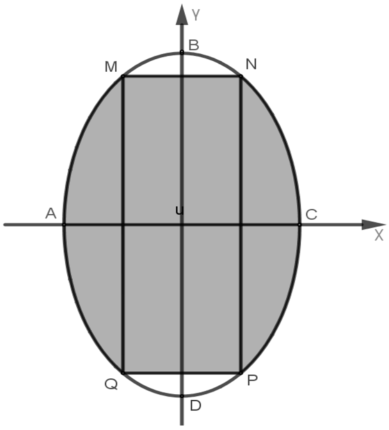
Mặt khác chiều cao $CF = DE = f(0,9) = 2,79(\mathrm{m})$; $CD = 4 - 2.0,9 = 2,2\ (\mathrm{m})$.

Diện tích hai cánh cổng là $S_{CDEF} = CD.CF = 6,138\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Diện tích phần xiên hoa là $S_{xh} = S - S_{CDEF} = \dfrac{32}{3} - 6,14 = \dfrac{6793}{1500}\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Vậy tổng số tiền để làm cổng là $6,138.1200000 + \dfrac{6793}{1500}.900000 = 11441400$ đồng.

Câu 22: Một biển quảng cáo với 4 đỉnh A, B, C, D như hình vẽ. Biết chi phí để sơn phần tô đậm là $200.000(\text{đ}/\mathrm{m}^2)$ sơn phần còn lại là $100.000\text{đ}/\mathrm{m}^2$. Cho $AC = 8m; BD = 10m; MN = 4m$ Hỏi số tiền sơn gần với số tiền nào sau đây:



A. $12204000đ$. **B.** $14207000đ$. **C.** $11503000đ$. **D.** $10894000đ$.

Lời giải

elip có phương trình là: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$. Vì $MN=4\Rightarrow x_N=2\Rightarrow\left[\begin{array}{l} y_N=\frac{5\sqrt{3}}{2} \\ y_N=\frac{-5\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$

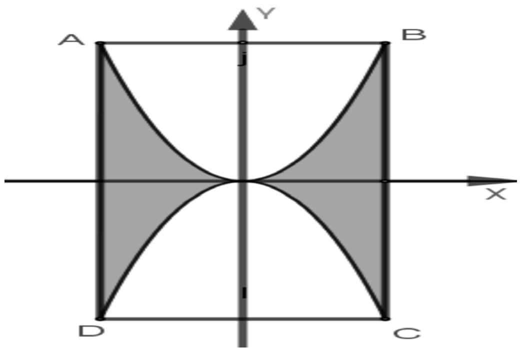
Diện tích phần tô đậm là $S_1=2\int\limits_{\frac{-5\sqrt{3}}{2}}^{\frac{5\sqrt{3}}{2}}\frac{4}{5}\sqrt{25-y^2}dy\approx 59,21\quad(m^2)$

Diện tích elip là $S=\pi.4.5=20\pi\quad(m^2)$

Diện tích phần trắng là $S_2=S-S_1\approx 3,622\quad(m^2)$

Tổng chi phí trang chí là: $T=59,21.200000+3,622.100000=12204200đ$.

Câu 23: Một họa tiết hình cánh bướm như hình vẽ bên.



Phần tô đậm được đính đá với giá thành

500.000đ/m^2. Phần còn lại được tô màu với giá thành $250.000đ/m^2$.

Cho $AB=4dm; BC=8dm.$ Hỏi để trang trí 1000 họa tiết như vậy cần số tiền gần nhất với số nào sau đây.

A. $105660667đ$. **B.** $106666667đ$. **C.** $107665667đ$. **D.** $108665667đ$.

Lời giải

Vì $AB = 4dm; BC = 8dm. \Rightarrow A(-2;4)$, B(2;4), C(2;−4), D(−2;−4).

parabol là: $y = x^2$ hoặc $y = -x^2$

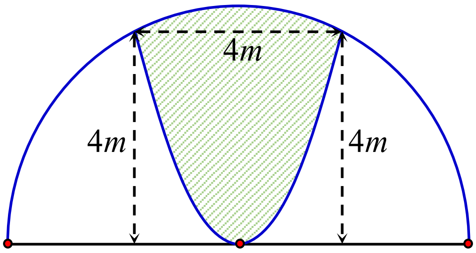
Diện tích phần tô đậm là $S_1 = 4\int_0^2 x^2 dx = \frac{32}{3} \quad (dm^2)$

Diện tích hình chữ nhật là $S = 4.8 = 32 \quad (m^2)$

Diện tích phần trắng là $S_2 = S - S_1 = 32 - \frac{32}{3} = \frac{64}{3} \quad (dm^2)$

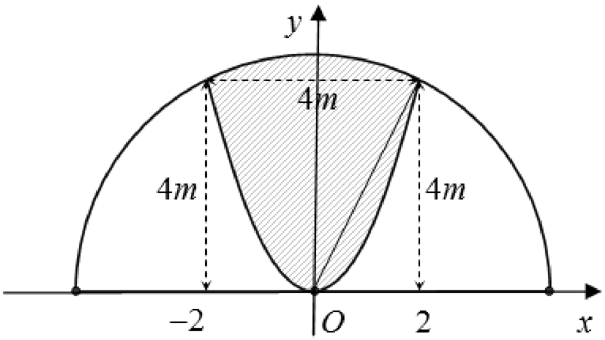
Tổng chi phí trang chí là: $T = \left(\frac{32}{3}.5000 + \frac{64}{3}.2500\right).1000 \approx 106666667đ$

Câu 24: Một khuôn viên dạng nửa hình tròn, trên đó người thiết kế phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm và có trục đối xứng vuông góc với đường kính của nửa hình tròn, hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn và cách nhau một khoảng bằng $4(m)$. Phần còn lại của khuôn viên dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước cho như hình vẽ, chi phí để trồng hoa và cỏ Nhật Bản tương ứng là 150.000 đồng/m^2 và 100.000 đồng/m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng hoa và trồng cỏ Nhật Bản trong khuôn viên đó?



A. 3.738.574 . **B.** 1.948.000 . **C.** 3.926.990 . **D.** 4.115.408 .

Lời giải



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ, ta có bán kính của đường tròn là $R = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$.

Phương trình của nửa đường tròn (C) là: $x^2 + y^2 = 20, y \ge 0 \Rightarrow y = \sqrt{20 - x^2}$.

Parabol (P) có đỉnh $O(0;0)$ và đi qua điểm $(2;4)$ nên có phương trình: $y = x^2$.

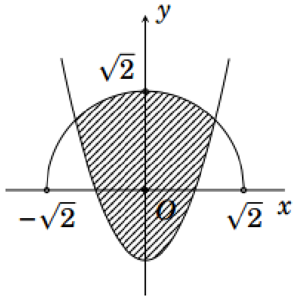
Diện tích phần tô màu là: $S_1 = \int_{-2}^{2}\left[\sqrt{20 - x^2} - x^2\right]dx \approx 11,94 \ (m^2)$.

Diện tích phần không tô màu là: $S_2 = \frac{1}{2}.\pi.\left(2\sqrt{5}\right)^2 - S_1 \approx 10\pi - 11,94 \ (m^2)$.

Số tiền để trồng hoa và trồng cỏ Nhật Bản trong khuôn viên đó là:

$150000.11,94+100000.(10\pi-11,94)\approx 3.738.593$.

Câu 25: Người ta cần trồng một vườn hoa Cẩm Tú Cầu . Biết rằng phần gạch chéo là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=2x^2-1$ và nửa trên của đường tròn có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng $\sqrt{2}\,(m)$ Tính số tiền tối thiểu để trồng xong vườn hoa Cẩm Tú Cầu biết rằng để trồng mỗi m^2 hoa cần ít nhất là 250000 đồng.



A. $\frac{3\pi-2}{6}\times 250000$. **B.** $\frac{3\pi+10}{6}\times 250000$. **C.** $\frac{3\pi+10}{3}\times 250000$. **D.** $\frac{3\pi+2}{6}\times 250000$

Lời giải

Chọn B

Ta có phương trình đường tròn tâm gốc tọa độ và bán kính bằng $\sqrt{2}\,(m)$ $x^2+y^2=2$.

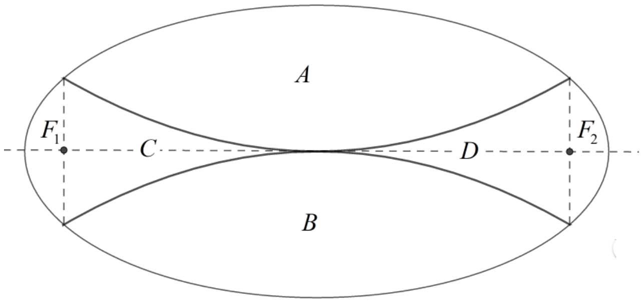
Tọa độ giao điểm của Parabol và đường tròn là nghiệm hệ $\begin{cases} y=\sqrt{2-x^2} \\ y=2x^2-1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, y=1 \\ x=1, y=1 \end{array}\right.$

Diện tích vườn hoa là $S=\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{2-x^2}-2x^2+1\right)\mathrm{d}x=\frac{3\pi+10}{6}$.

số tiền tối thiểu để trồng xong vườn hoa Cẩm Tú Cầu là $\frac{3\pi+10}{6}\times 250000$.

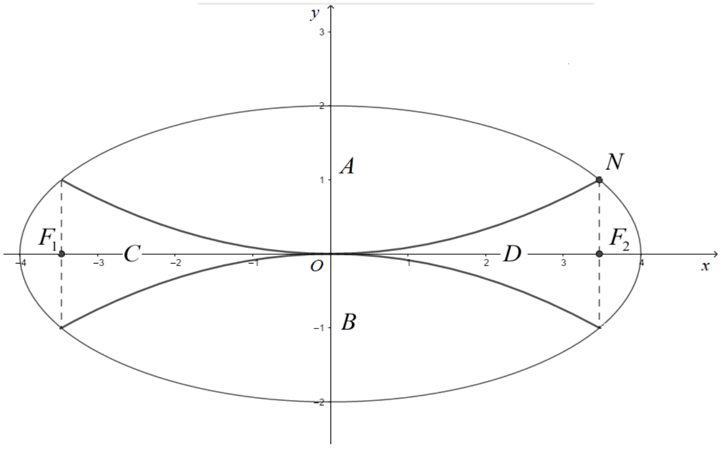
Câu 26: Nhà trường dự định làm một vườn hoa dạng elip được chia ra làm bốn phần bởi hai đường parabol có chung đỉnh, đối xứng với nhau qua trục của elip như hình vẽ bên. Biết độ dài trục lớn, trục nhỏ của elip lần lượt là 8 m và 4 m, F_1, F_2 là hai tiêu điểm của elip. Phần A, B dùng để trồng hoa, phần C, D dùng để trồng cỏ. Kinh phí để trồng mỗi mét vuông hoa và cỏ lần lượt là 250.000 đ và 150.000 đ. Tính tổng tiền để hoàn thành vườn hoa trên .

A. 5.676.000 đ. **B.** 4.766.000 đ. **C.** 4.656.000 đ. **D.** 5.455.000 đ.



Lời giải

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Do elip có độ dài trục lớn $2a=8 \Leftrightarrow a=4$, độ dài trục nhỏ $2b=4 \Leftrightarrow b=2$.

Diện tích của (E) là: $S_{(E)}=\pi ab=8\pi$.

Phương trình chính tắc (E) là: $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$. Suy ra $y=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{16-x^2}$.

Ta có $c=\sqrt{a^2-b^2}=2\sqrt{3} \Rightarrow F_2\left(2\sqrt{3};\ 0\right)$.

Do N và F_2 có cùng hoành độ $\Rightarrow N\left(2\sqrt{3};\ 1\right)$.

Gọi $(P): y=kx^2$ là parabol nằm ở phía trên trục Ox.

Do $N\in(P)$ ta có $1=k\left(2\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow k=\dfrac{1}{12}$. Suy ra $(P): y=\dfrac{1}{12}x^2$.

Diện tích phần A là $S_A=\displaystyle\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}-\frac{1}{12}x^2\right)\mathrm{d}x=2\int_0^{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}-\frac{1}{12}x^2\right)\mathrm{d}x$

$=\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}}\sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{6}\int_0^{2\sqrt{3}}x^2\mathrm{d}x$.

* Xét $I_1=\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}}\sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x$. Đặt $x=4\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x=4\cos t\mathrm{d}t$.

Đổi cận:

x	0	$2\sqrt{3}$
t	0	$\dfrac{\pi}{3}$

Khi đó $I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{16-16\sin^2 t}.4\cos t\mathrm{d}t=16\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 t\mathrm{d}t=8\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=8\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}$

$=8\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

* Ta có $I_2=\dfrac{1}{6}\int\limits_0^{2\sqrt{3}}x^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{18}x^3\Big|_0^{2\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra: $S_A=I_1-I_2=\dfrac{8\pi+2\sqrt{3}}{3}\Rightarrow S_A+S_B=2S_A=\dfrac{16\pi+4\sqrt{3}}{3}$.

Tổng diện tích phần C, D là: $S_C+S_D=S_{(E)}-\left(S_A+S_B\right)=\dfrac{8\pi-4\sqrt{3}}{3}$.

Khi đó tổng số tiền để hoàn thành vườn hoa trên là:
$\dfrac{16\pi+4\sqrt{3}}{3}.250000+\dfrac{8\pi-4\sqrt{3}}{3}.150000\approx 5676000$ đ.

Câu 27: Người ta xây một sân khấu với mặt sân có dạng hợp của hai hình tròn giao nhau. Bán kính của hai của hai hình tròn là 20 mét và 15 mét. Khoảng cách giữa hai tâm của hai hình tròn là 30 mét. Chi phí làm mỗi mét vuông phần giao nhau của hai hình tròn là 300 ngàn đồng và chi phí làm mỗi mét vuông phần còn lại là 100 ngàn đồng. Hỏi số tiền làm mặt sân của sân khấu gần với số nào trong các số dưới đây?

A. 202 triệu đồng. **B.** 208 triệu đồng. **C.** 218 triệu đồng. **D.** 200 triệu đồng.

Lời giải.

Gọi O, I lần lượt là tâm của các đường tròn bán kính bằng 20 mét và bán kính bằng 15 mét. Gắn hệ trục Oxy như hình vẽ, vì $OI=30$ mét nên $I\left(0;\,30\right)$. Phương trình hai đường tròn lần lượt là

$x^2+y^2=20^2$ và $x^2+\left(y-30\right)^2=15^2$. Gọi $A,\,B$ là các giao điểm của hai đường tròn đó.

Tọa độ $A,\,B$ là nghiệm của hệ $\begin{cases}x^2+y^2=20^2\\x^2+\left(y-30\right)^2=15^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm\dfrac{5\sqrt{455}}{12}\\y=\dfrac{215}{12}\end{cases}$.

Tổng diện tích hai đường tròn là $\pi\left(20^2+15^2\right)=625\pi$.

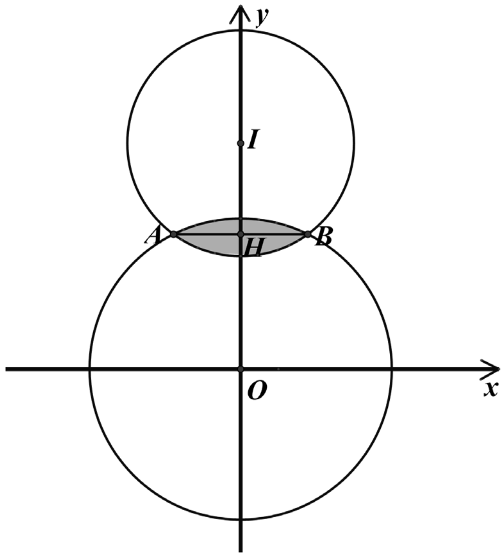
Phần giao của hai hình tròn chính là phần hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị
$y=30-\sqrt{15^2-x^2}$ và $y=\sqrt{20^2-x^2}$. Do đó diện tích phần giao giữa hai hình tròn là

$$S=\int\limits_{-\frac{5\sqrt{455}}{12}}^{\frac{5\sqrt{455}}{12}}\left(\sqrt{20^2-x^2}+\sqrt{15^2-x^2}-30\right)\mathrm{d}x\approx 60,2546\ .$$

Số tiền để làm phần giao giữa hai hình tròn là $300.000\,\text{x}\,60,2546\approx 18.076.386$.

Số tiền để làm phần còn lại là $100.000\,\text{x}\ \left(625\pi-2\,\text{x}\,60,2546\right)=184.299.220$.

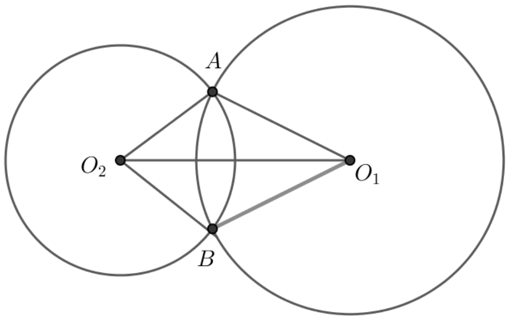
Vậy tổng số tiền làm sân khấu là $184.299.220+18.076.386 \approx 202.375.606$.



Câu 28: Người ta xây một sân khấu với sân có dạng của hai hình tròn giao nhau. Bán kính của hai hình tròn là 20 m và 15 m. Khoảng cách giữa hai tâm của hai hình tròn là 30 m. Chi phí làm mỗi mét vuông phần giao nhau của hai hình tròn là 300 nghìn đồng và chi phí làm mỗi mét vuông phần còn lại là 100 nghìn đồng. Hỏi số tiền làm mặt sân khấu gần với số nào nhất trong các số dưới đây?

A. 218 triệu đồng. **B.** 202 triệu đồng. **C.** 200 triệu đồng. **D.** 218 triệu đồng.

Lời giải



Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm của hai đường tròn bán kính 20 m và 15 m. A, B là hai giao điểm của hai đường tròn.

Ta có $O_1A = O_1B = 20$ m; $O_2A = O_2B = 15$ m; $O_1O_2 = 30$ m.

$$\cos \widehat{BO_1O_2} = \frac{O_1B^2 + O_1O_2{}^2 - O_2B^2}{2O_1B.O_1O_2} = \frac{43}{48} \Rightarrow \widehat{BO_1O_2} \approx 26°23'.$$

Theo tính chất hai đường tròn cắt nhau ta có O_1O_2 là tia phân giác $\widehat{AO_1B}$

$\Rightarrow \widehat{AO_1B} = 2\widehat{O_2O_1B} = 52,77°$.

Suy ra diện tích hình quạt tròn O_1AB là $S_{O_1AB} = \pi.20^2.\dfrac{52,77}{360} \approx 184,2\left(\mathrm{m}^2\right)$.

$S_{\Delta O_1AB} = \frac{1}{2} O_1A.O_1B.\sin \widehat{AO_1B} \approx 159,2 \left(\mathrm{m}^2\right)$.

Gọi S_1 là diện tích hình giới hạn bởi dây AB và cung $\overset{\frown}{AmB}$ trong đường tròn $\left(O_1\right)$.

$\Rightarrow S_1 = S_{O_1AB} - S_{\Delta O_1AB} = 25 \left(\mathrm{m}^2\right)$.

Chứng minh tương tự ta được diện tích hình giới hạn bởi dây AB và cung $\overset{\frown}{AmB}$ trong đường tròn $\left(O_2\right)$ là $S_2 \approx 35 \left(\mathrm{m}^2\right)$.

Suy ra diện tích phần giao nhau là $S = S_1 + S_2 = 60 \left(\mathrm{m}^2\right)$.

$\Rightarrow$ Chi phí làm sân khấu phần giao nhau $60.300\,000 = 18\,000\,000$.

Tổng diện tích của hai hình tròn là $S' = \pi 20^2 + \pi 15^2 \approx 1963 \left(\mathrm{m}^2\right)$.

Diện tích phần không giao nhau là $S' - S = 1903 \left(\mathrm{m}^2\right)$.

$\Rightarrow$ Chi phí làm sân khấu phần không giao nhau $1903.100\,000 = 190\,300\,000$.

Số tiền làm mặt sân là $18\,000\,000 + 190\,000\,000 = 208\,300\,000$

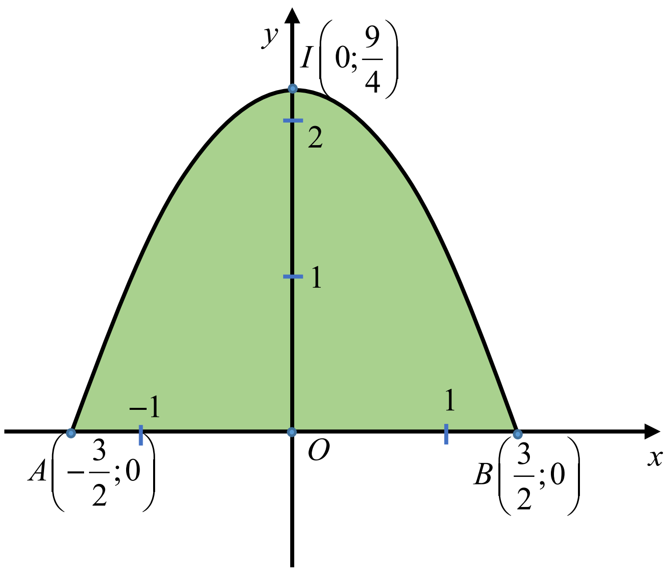
$= 208,3$.

Câu 29: Bác Năm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là $2,25$ mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy số tiền bác Năm phải trả là:

A. 33750000 đồng. **B.** 3750000 đồng. **C.** 12750000 đồng. **D.** 6750000 đồng.

Lời giải

Gọi phương trình parabol $\left(P\right): y = ax^2 + bx + c$. Do tính đối xứng của parabol nên ta có thể chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho $\left(P\right)$ có đỉnh $I \in Oy$.



Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{9}{4}=c,\left(I\in(P)\right) \\ \frac{9}{4}a-\frac{3}{2}b+c=0\left(A\in(P)\right) \\ \frac{9}{4}a+\frac{3}{2}b+c=0\left(B\in(P)\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=\frac{9}{4} \\ a=-1 \\ b=0 \end{cases}$.

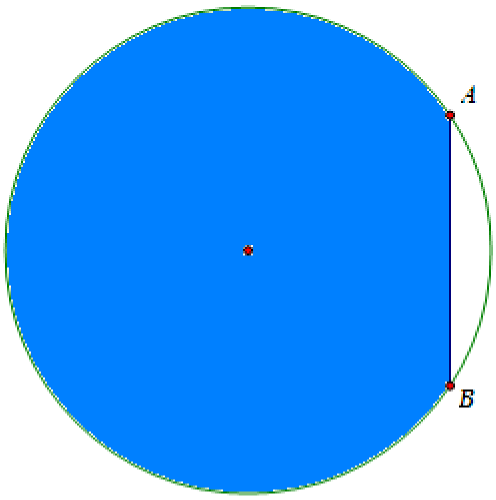
Vậy $(P): y=-x^2+\frac{9}{4}$.

Dựa vào đồ thị, diện tích cửa parabol là:

$$S=\int_{\frac{-3}{2}}^{\frac{3}{2}}\left(-x^2+\frac{9}{4}\right)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{3}{2}}\left(-x^2+\frac{9}{4}\right)\mathrm{d}x=2\left(\frac{-x^3}{3}+\frac{9}{4}x\right)\Bigg|_0^{\frac{9}{4}}=\frac{9}{2}\mathrm{m}^2.$$

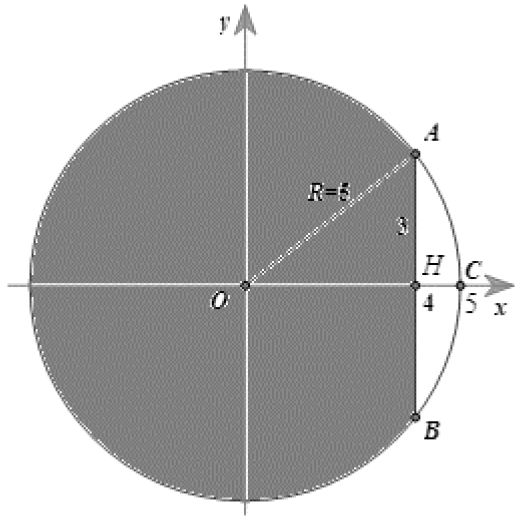
Số tiền phải trả là: $\frac{9}{2}.1500000=6750000$ đồng.

Câu 30: Một người có miếng đất hình tròn có bán kính bằng 5 m. Người này tính trồng cây trên mảnh đất đó, biết mỗi mét vuông trồng cây thu hoạch được 100 nghìn. Tuy nhiên cần có 1 khoảng trống để dựng 1 cái chòi và để đồ dùng nên người này bớt lại 1 phần đất nhỏ không trồng cây , trong đó $AB=6m$. Hỏi khi thu hoạch cây thì người này thu được bao nhiêu tiền ?



A. 3722 nghìn đồng. **D.** 7445 nghìn đồng. **C.** 7446 nghìn đồng. **B.** 3723 nghìn đồng.

Lời giải



Diện tích miếng đất là $S_1 = \pi R^2 = 25\pi$.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Ta có phương trình của đường tròn biên là $x^2 + y^2 = 25$.

$R = 5, AH = 3 \Rightarrow OH = 4$.

$\Rightarrow$ Phương trình của cung tròn nhỏ $\overset{\frown}{AC}$ là $y = \sqrt{25 - x^2}$, với $4 \le x \le 5$.

$\Rightarrow$ Diện tích phần đất trống là $S_2 = 2\int_4^5 \sqrt{25 - x^2}dx$.

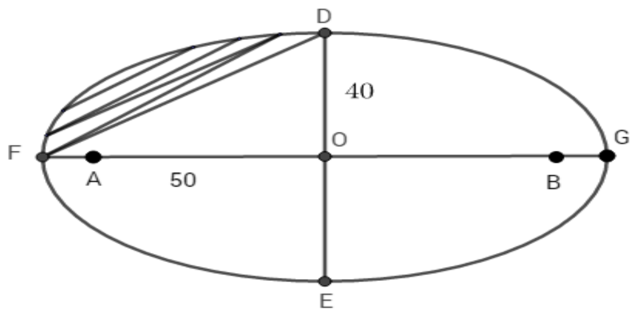
$\Rightarrow$ Diện tích phần đất trồng cây là $S = S_1 - S_2 = 25\pi - 2\int_4^5 \sqrt{25 - x^2}dx$.

$\Rightarrow$ Số tiền thu được là $T = 100S = 100(25\pi - 2\int_4^5 \sqrt{25 - x^2}dx) \approx 7445$.

Câu 31: Một mảnh vườn hình elip có trục lớn bằng $100(\text{m})$ và trục nhỏ bằng $80(\text{m})$ được chia làm hai phần bởi một đoạn thẳng nối hai đỉnh liên tiếp của elip. Phần nhỏ hơn trồng cây con và phần lớn hơn trồng rau. Biết lợi nhuận thu được là 2000 mỗi m^2 trồng cây con và 4000 mỗi m^2 trồng rau. Hỏi thu nhập của cả mảnh vườn là bao nhiêu? .

A. 31904000. **B.** 23991000. **C.** 10566000. **D.** 17635000.

Lời giải



Gọi phương trình của elip là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

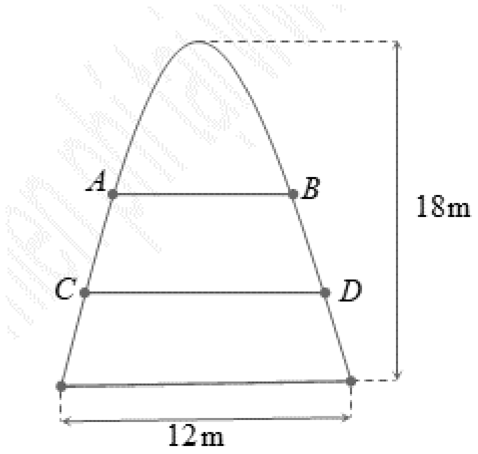
Theo giả thiết, ta có $2a = 100 \Rightarrow a = 50$; $2b = 80 \Rightarrow b = 40$.

Diện tích phần trồng cây con bằng $\frac{1}{4}$ diện tích của elip trừ đi diện tích tam giác DOF. Do đó diện tích phần trồng cây con là $S_1 = \frac{\pi ab}{4} - \frac{ab}{2}\ \left(\mathrm{m}^2\right)$.

Diện tích phần trồng rau bằng $\frac{3}{4}$ diện tích elip cộng với diện tích tam giác DOF. Do đó diện tích phần trồng rau là $S_2 = \frac{3\pi ab}{4} + \frac{ab}{2}\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Thu nhập của cả mảnh vườn là $\left(\frac{\pi ab}{4} - \frac{ab}{2}\right)\cdot 2000 + \left(\frac{3\pi ab}{4} + \frac{ab}{2}\right)\cdot 4000 \approx 23991000$.

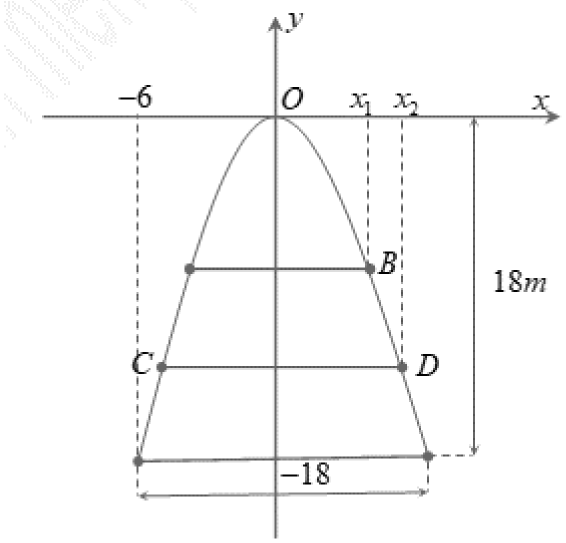
Câu 32: Một cổng chào có dạng hình Parabol chiều cao $18\ \mathrm{m}$, chiều rộng chân đế $12\ \mathrm{m}$. Người ta căng hai sợi dây trang trí AB, CD nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi Parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau. Tỉ số $\frac{AB}{CD}$ bằng



A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.　　**B.** $\frac{4}{5}$.　　**C.** $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.　　**D.** $\frac{3}{1+2\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Phương trình Parabol có dạng $y = a.x^2$ (P).

(P) đi qua điểm có tọa độ $(-6;-18)$ suy ra: $-18 = a.(-6)^2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow (P): y = -\frac{1}{2}x^2$.

Từ hình vẽ ta có: $\frac{AB}{CD} = \frac{x_1}{x_2}$.

Diện tích hình phẳng giới bạn bởi Parabol và đường thẳng $AB: y = -\frac{1}{2}x_1^2$ là

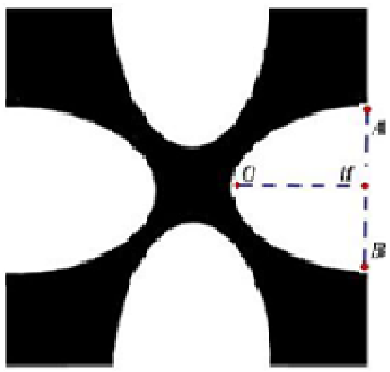
$$S_1 = 2\int_0^{x_1}\left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_1^2\right)\right]dx = 2\left(-\frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x_1^2x\right)\Bigg|_0^{x_1} = \frac{2}{3}x_1^3.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và đường thẳng CD $y = -\frac{1}{2}x_2^2$ là

$$S_2 = 2\int_0^{x_2}\left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_2^2\right)\right]dx = 2\left(-\frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x_2^2x\right)\Bigg|_0^{x_2} = \frac{2}{3}x_2^3$$

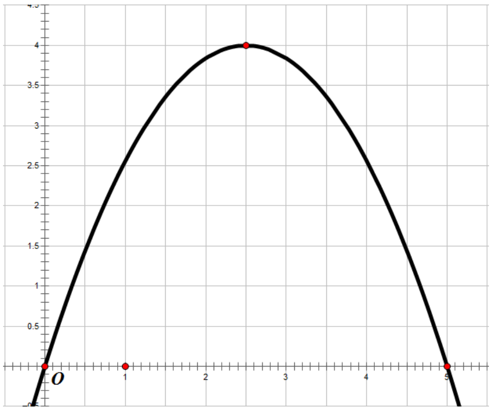
Từ giả thiết suy ra $S_2 = 2S_1 \Leftrightarrow x_2^3 = 2x_1^3 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Vậy $\frac{AB}{CD} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Câu 33: Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB = 5$ cm, $OH = 4$ cm. Tính diện tích bề mặt hoa văn đó.



A. $\frac{160}{3}\text{cm}^2$. **B.** $\frac{140}{3}\text{cm}^2$. **C.** $\frac{14}{3}\text{cm}^2$. **D.** $50\ \text{cm}^2$.

Lời giải



Đưa parabol vào hệ trục Oxy ta tìm được phương trình là: $(P): y = -\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x$.

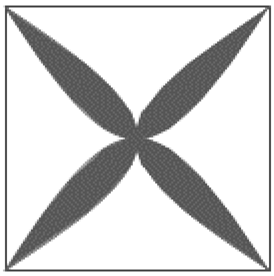
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P): y = -\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 5$ là: $S = \int_0^5 \left(-\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x\right)\text{d}x = \frac{40}{3}$.

Tổng diện tích phần bị khoét đi: $S_1 = 4S = \frac{160}{3}\ \text{cm}^2$.

Diện tích của hình vuông là: $S_{hv} = 100\ \text{cm}^2$.

Vậy diện tích bề mặt hoa văn là: $S_2 = S_{hv} - S_1 = 100 - \frac{160}{3} = \frac{140}{3}\ \text{cm}^2$.

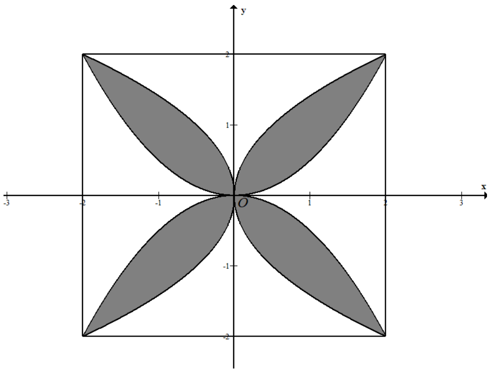
Câu 34: Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa .



Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng

A. 800cm^2. **B.** $\frac{800}{3}\text{cm}^2$. **C.** $\frac{400}{3}\text{cm}^2$. **D.** 250cm^2.

Lời giải



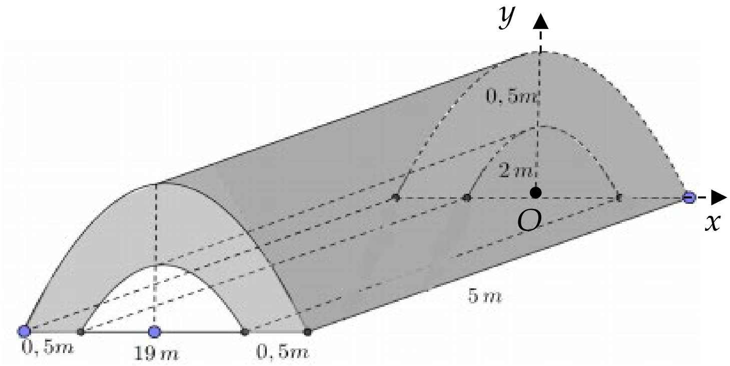
Chọn hệ tọa độ như hình vẽ , các cánh hoa tạo bởi các đường parabol có phương trình $y=\frac{x^2}{2}$, $y=-\frac{x^2}{2}, x=-\frac{y^2}{2}, x=\frac{y^2}{2}$.

Diện tích một cánh hoa bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=\frac{x^2}{2}, y=\sqrt{2x}$ và hai đường thẳng $x=0; x=2$.

Do đó diện tích một cánh hoa bằng

$$\int_0^2\left(\sqrt{2x}-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{(2x)^3}-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^2=\frac{4}{3}\left(\mathrm{dm}^2\right)=\frac{400}{3}\left(\mathrm{cm}^2\right)=\frac{4}{3}\left(\mathrm{dm}^2\right)=\frac{400}{3}\left(\mathrm{cm}^2\right).$$

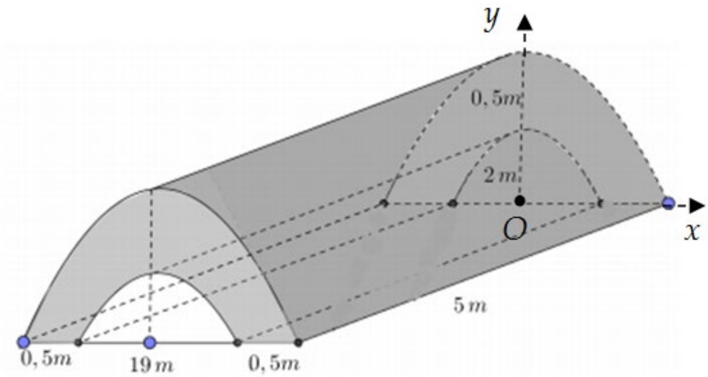
Câu 35: Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã Y có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu. .



A. $19\,\mathrm{m}^3$. **B.** $21\,\mathrm{m}^3$. **C.** $18\,\mathrm{m}^3$. **D.** $40\,\mathrm{m}^3$.

Lời giải

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



.

Gọi $(P_1): y = a_1x^2 + b_1$ là Parabol đi qua hai điểm $A\left(\frac{19}{2};0\right), B(0;2)$

Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 0 = a.\left(\frac{19}{2}\right)^2 + 2 \\ 2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{8}{361} \\ b_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow (P_1): y = -\frac{8}{361}x^2 + 2$.

Gọi $(P_2): y = a_2x^2 + b_2$ là Parabol đi qua hai điểm $C(10;0), D\left(0;\frac{5}{2}\right)$

Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 0 = a_2.(10)^2 + \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} = b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = -\frac{1}{40} \\ b_2 = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow (P_2): y = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}$.

Ta có thể tích của bê tông là: $V = 5.2\left[\int_0^{10}\left(-\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}\right)\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{19}{2}}\left(-\frac{8}{361}x^2 + 2\right)\mathrm{d}x\right] = 40\,\mathrm{m}^3$.

Câu 36: Để kỷ niệm ngày 26-3. Chi đoàn 12A dự định dựng một lều trại có dạng parabol, với kích thước: nền trại là một hình chữ nhật có chiều rộng là 3 mét, chiều sâu là 6 mét, đỉnh của parabol cách mặt đất là 3 mét. Hãy tính thể tích phần không gian phía bên trong trại để lớp 12A cử số lượng người tham dự trại cho phù hợp.

A. $30\,m^3$ **B.** $36\,m^3$ **C.** $40\,m^3$ **D.** $41\,m^3$

Lời giải

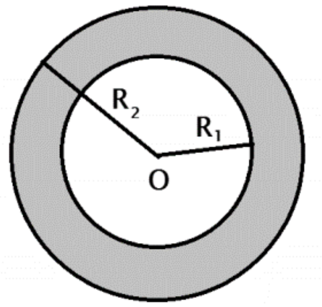
Chọn B

Giả sử nền trại là hình chữ nhật ABCD có AB = 3 mét, BC = 6 mét, đỉnh của parabol là I. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho: O là trung điểm của cạnh AB, A, B và I, phương trình của parabol có dạng $y = ax^2 + b, a \neq 0$. Do I, A, B thuộc nên ta có $y = -\frac{4}{3}x^2 + 3$

Vậy thể tích phần không gian phía trong trại là

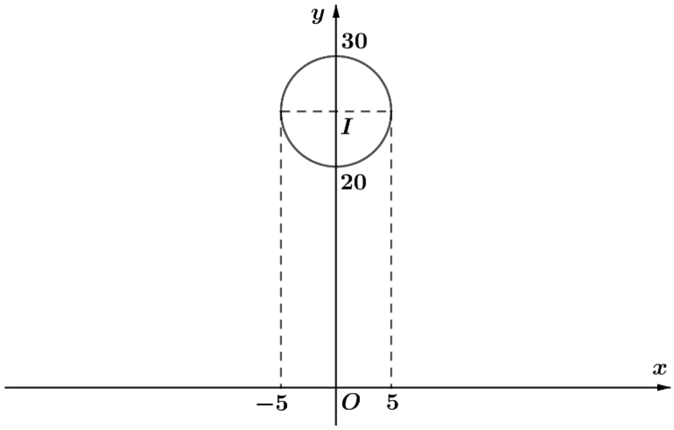
$$V = 6.2\int_0^{\frac{3}{2}}(-\frac{4}{3}x^2 + 3)dx = 36$$

Câu 37: Săm lốp xe ô tô khi bơm căng đặt nằm trên mặt phẳng nằm ngang có hình chiếu bằng như hình vẽ với bán kính đường tròn nhỏ $R_1 = 20cm$, bán kính đường tròn lớn $R_2 = 30cm$ và mặt cắt khi cắt bởi mặt phẳng đi qua trục, vuông góc mặt phẳng nằm ngang là hai đường tròn. Bỏ qua độ dày vỏ săm. Tính thể tích không khí được chứa bên trong săm.



A. $1250\pi^2 cm^3$. **B.** $1400\pi^2 cm^3$. **C.** $2500\pi^2 cm^3$. **D.** $600\pi^2 cm^3$.

Lời giải



Thể tích săm xe bằng thể tích của khối tròn xoay sinh bởi hình tròn tâm $I(0;25)$ bán kính bằng 5 quay quanh trục Ox.

Ta có phương trình đường tròn là $x^2+(y-25)^2=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=25+\sqrt{25-x^2} \\ y=25-\sqrt{25-x^2} \end{array}\right., x\in[-5;5]$.

Vậy $V=\pi.\left[\int\limits_{-5}^{5}\left(25+\sqrt{25-x^2}\right)^2\mathrm{d}x-\int\limits_{-5}^{5}\left(25-\sqrt{25-x^2}\right)^2\mathrm{d}x\right]=100\pi.\int\limits_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\mathrm{d}x$.

Ta có $\int\limits_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\mathrm{d}x$ là diện tích nửa hình tròn tâm $O(0;0)$, bán kính bằng 5

$\Rightarrow \int\limits_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.\pi.5^2=\frac{25\pi}{2}$.

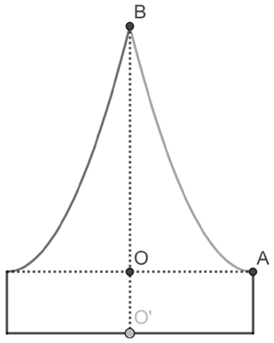
Suy ra $V=100\pi.\int\limits_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\mathrm{d}x=100\pi.\frac{25\pi}{2}=1250\pi^2 cm^3$

<u>**Chú ý:**</u> Có thể bấm máy tích phân, ta được

$V=\pi\left[\int\limits_{-5}^{5}\left(25+\sqrt{25-x^2}\right)^2\mathrm{d}x-\int\limits_{-5}^{5}\left(25-\sqrt{25-x^2}\right)^2\mathrm{d}x\right]\approx 3927\pi cm^3$.

Kiểm tra các đáp án ta chọn đáp án **A.**

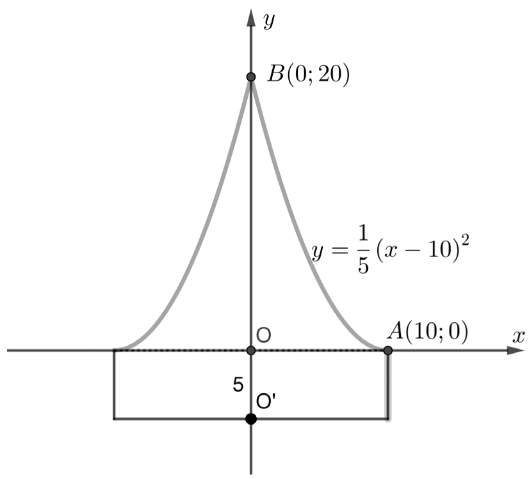
Câu 38: Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn An đã làm một chiếc mũ "cách điệu" cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO'=5$ cm, $OA=10$ cm, $OB=20$ cm, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm A. Thể tích của chiếc mũ bằng



A. $\frac{2750\pi}{3}\ \left(\text{cm}^3\right)$ **B.** $\frac{2500\pi}{3}\ \left(\text{cm}^3\right)$ **C.** $\frac{2050\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right)$ **D.** $\frac{2250\pi}{3}\ \left(\text{cm}^3\right)$

Lời giải

Chọn B



Ta gọi thể tích của chiếc mũ là V.

Thể tích của khối trụ có bán kính đáy bằng $OA = 10$ cm và đường cao $OO' = 5$ cm là V_1.

Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong AB và hai trục tọa độ quanh trục Oy là V_2.

Ta có $V = V_1 + V_2$

$V_1 = 5.10^2\pi = 500\pi\ \left(\text{cm}^3\right)$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Do parabol có đỉnh A nên nó có phương trình dạng $(P): y = a(x-10)^2$.

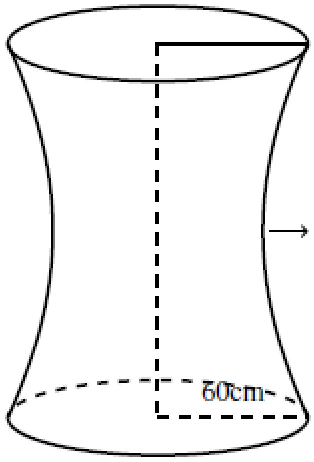
Vì (P) qua điểm $B(0;20)$ nên $a = \frac{1}{5}$.

Do đó, $(P): y = \frac{1}{5}(x-10)^2$. Từ đó suy ra $x = 10 - \sqrt{5y}$.

Suy ra $V_2 = \pi\int\limits_0^{20}\left(10-\sqrt{5y}\right)^2 \text{dy} = \pi\left(3000 - \frac{8000}{3}\right) = \frac{1000}{3}\pi\ \left(\text{cm}^3\right)$.

Do đó $V = V_1 + V_2 = \frac{1000}{3}\pi + 500\pi = \frac{2500}{3}\pi \ \left(\text{cm}^3\right)$.

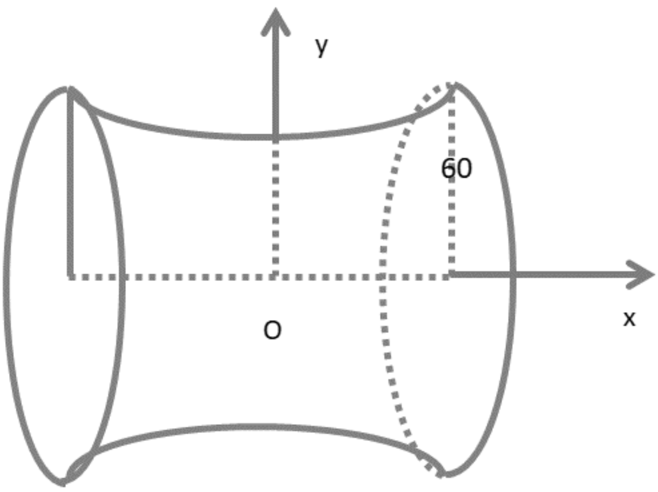
Câu 39: Cho chiếc trống như hình vẽ, có đường sinh là nửa elip được cắt bởi trục lớn với độ dài trục lớn bằng 80 cm, độ dài trục bé bằng 60 cm và đáy trống là hình tròn có bán kính bằng 60 cm. Tính thể tích V của chiếc trống .



A. $V = 344963\,\text{cm}^3$ **B.** $V = 344964\,\text{cm}^3$ **C.** $V = 208347\,\text{cm}^3$ **D.** $V = 208346\,\text{cm}^3$

Lời giải

Đặt hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ .

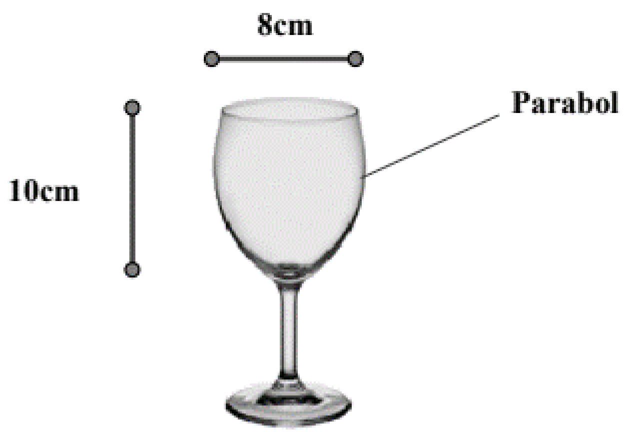


Gọi (E) là elip có phương trình $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ thì ảnh của (E) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}(0;6)$ là elip (E') có phương trình $\frac{x^2}{16} + \frac{(y-6)^2}{9} = 1$.

Suy ra, phương trình của đường sinh là: $y = 6 - \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$.

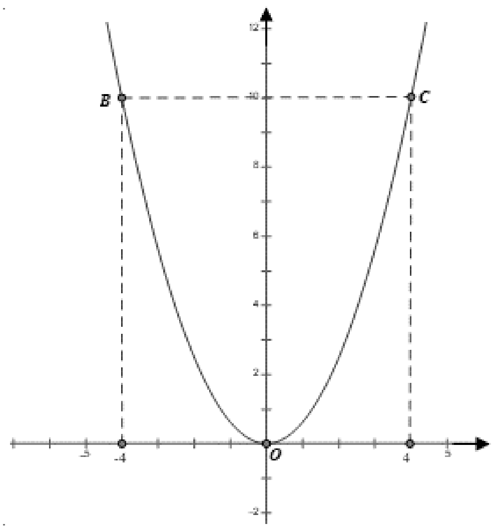
Do đó, thể tích của chiếc trống là: $V = \pi\int\limits_{-4}^{4}\left(6 - \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}\right)^2 \text{d}x \approx 344{,}964 \ \left(\text{dm}^3\right)$.

Câu 40: Một cốc rượu có hình dạng tròn xoay và kích thước như hình vẽ, thiết diện dọc của cốc là một đường Parabol. Tính thể tích tối đa mà cốc có thể chứa được



A. $V \approx 320cm^3$. **B.** $V \approx 1005,31cm^3$. **C.** $V \approx 251,33cm^3$. **D.** $V \approx 502,65cm^3$.

Lời giải

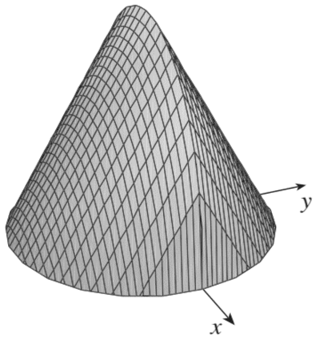


Parabol có phương trình $y = \frac{5}{8}x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{8}{5}y$

Thể tích tối đa cốc:

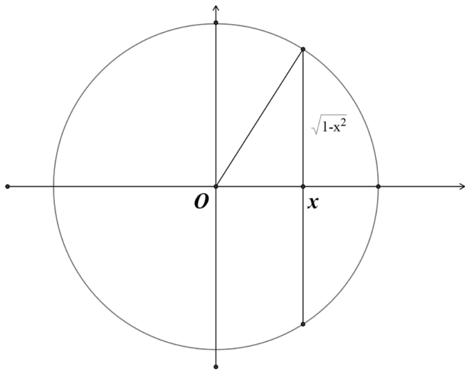
$V = \pi \int_0^{10} \left(\frac{8}{5}y \right) . dy \approx 251,33$.

Câu 41: Cho vật thể đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 . Khi cắt vật thể bằng mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x \left(-1 \le x \le 1 \right)$ thì được thiết diện là một tam giác đều. Thể tích V của vật thể đó là



A. $V=\sqrt{3}$. **B.** $V=3\sqrt{3}$. **C.** $V=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V=\pi$.

Lời giải



Do vật thể có đáy là đường tròn và khi cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox được thiết diện là tam giác đều do đó vật thể đối xứng qua mặt phẳng vuông góc với trục Oy tại điểm O.

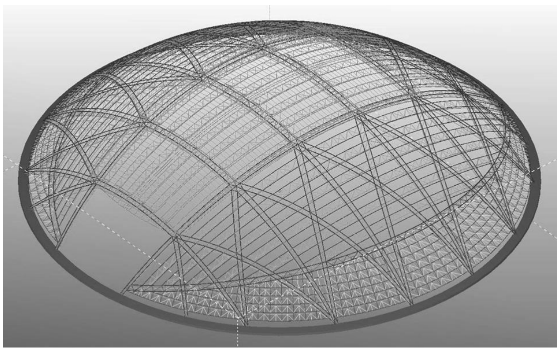
Cạnh của tam giác đều thiết diện là: $a=2\sqrt{1-x^2}$.

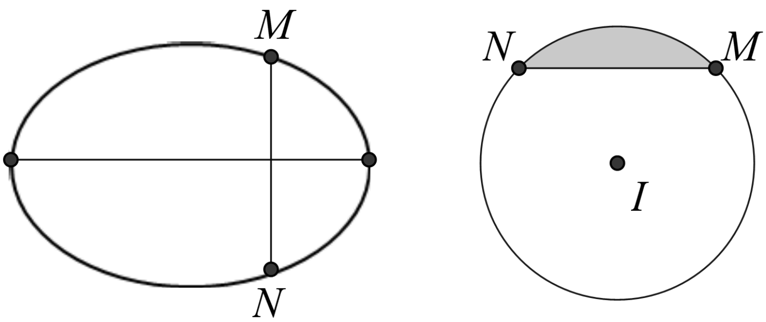
Diện tích tam giác thiết diện là: $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\left(1-x^2\right)\sqrt{3}$.

Thể tích khối cần tìm là:

$$V=2\int_0^1 Sdx=2\int_0^1\sqrt{3}\left(1-x^2\right)=2\sqrt{3}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 42: Sân vận động Sport Hub là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức tại Singapore năm 2015. Nền sân là một elip (E) có trục lớn dài $150m$, trục bé dài $90m$. Nếu cắt sân vận động theo một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của (E) và cắt elip ở M,N thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm I với MN là một dây cung và góc $\widehat{MIN}=90^0$. Để lắp máy điều hòa không khí thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu là mái không đáng kể. Hỏi thể tích xấp xỉ bao nhiêu?

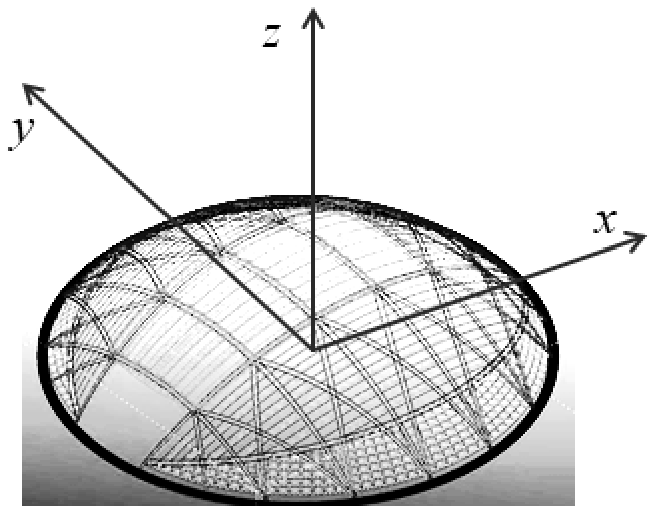


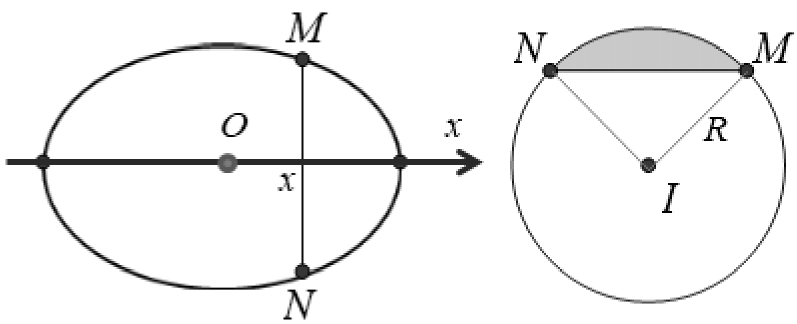


Hình 3

A. $57793m^3$. **B.** $115586m^3$. **C.** $32162m^3$. **D.** $101793m^3$.

Lời giải





Chọn hệ trục như hình vẽ

Ta cần tìm diện tích của $S(x)$ thiết diện.

Gọi $d(O,MN)=x$

$(E):\dfrac{x^2}{75^2}+\dfrac{y^2}{45^2}=1.$

Lúc đó $MN=2y=2\sqrt{45^2\left(1-\dfrac{x^2}{75^2}\right)}=90\sqrt{1-\dfrac{x^2}{75^2}}$

$\Rightarrow R=\dfrac{MN}{\sqrt{2}}=\dfrac{90}{\sqrt{2}}.\sqrt{1-\dfrac{x^2}{75^2}}\Rightarrow R^2=\dfrac{90^2}{2}.\left(1-\dfrac{x^2}{75^2}\right)$

$S(x)=\frac{1}{4}\pi R^2-\frac{1}{2}R^2=\left(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\right)R^2=(\pi-2)\frac{2025}{2}.\left(1-\frac{x^2}{75^2}\right).$

Thể tích khoảng không cần tìm là

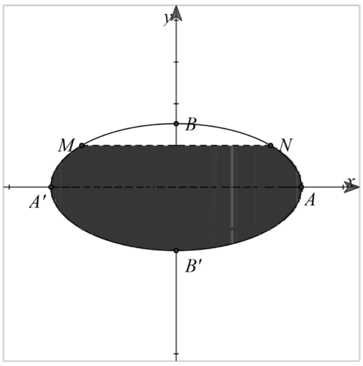
$V=\int_{-75}^{75}(\pi-2)\frac{2025}{2}.\left(1-\frac{x^2}{75^2}\right)\approx 115586m^3.$

Câu 43: Một cái thùng đựng dầu có thiết diện ngang là một đường elip có trục lớn bằng 1m, trục bé bằng $0{,}8\text{m}$, chiều dài bằng 3m. Được đặt sao cho trục bé nằm theo phương thẳng đứng. Biết chiều cao của dầu hiện có trong thùng là $0{,}6\text{m}$. Tính thể tích V của dầu có trong thùng.

A. $V=1{,}52\text{m}^3$. **B.** $V=1{,}31\text{m}^3$. **C.** $V=1{,}27\text{m}^3$. **D.** $V=1{,}19\text{m}^3$.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Theo đề bài ta có phương trình của Elip là $\frac{x^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{\frac{4}{25}}=1$.

Gọi M, N lần lượt là giao điểm của dầu với elip.

Gọi S_1 là diện tích của Elip ta có $S_1=\pi ab=\pi\frac{1}{2}.\frac{2}{5}=\frac{\pi}{5}$.

Gọi S_2 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi Elip và đường thẳng MN.

Theo đề bài chiều cao của dầu hiện có trong thùng là $0{,}6\text{m}$ nên ta có phương trình của đường thẳng MN là $y=\frac{1}{5}$.

Mặt khác từ phương trình $\frac{x^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{\frac{4}{25}}=1$ ta có $y=\frac{4}{5}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}$.

Do đường thẳng $y=\frac{1}{5}$ cắt Elip tại hai điểm M, N có hoành độ lần lượt là $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ và $\frac{\sqrt{3}}{4}$ nên

$S_2=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\left(\frac{4}{5}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}-\frac{1}{5}\right)\text{d}x=\frac{4}{5}\int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\,\text{d}x-\frac{\sqrt{3}}{10}.$

Tính $I = \int\limits_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}\,dx$.

Đặt $x = \frac{1}{2}\sin t \Rightarrow dx = \frac{1}{2}\cos t dt$.

Đổi cận: Khi $x = \frac{-\sqrt{3}}{4}$ thì $t = -\frac{\pi}{3}$; Khi $x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ thì $t = \frac{\pi}{3}$.

$$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\cos^2 t dt = \frac{1}{8}\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(1 + \cos 2t\right) dt = \frac{1}{8}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Vậy $S_2 = \frac{4}{5}\frac{1}{8}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{10} = \frac{\pi}{15} - \frac{\sqrt{3}}{20}$.

Thể tích của dầu trong thùng là $V = \left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{15} + \frac{\sqrt{3}}{20}\right).3 = 1,52$.

Câu 44: Người ta thay nước mới cho một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có độ sâu là 280 cm. Giả sử $h(t)$ là chiều cao của mực nước bơm được tại thời điểm t giây, biết rằng tốc độ tăng của chiều cao mực nước tại giây thứ t là $h'(t) = \frac{1}{500}\sqrt[3]{t+3}$ và lúc đầu hồ bơi không có nước. Hỏi sau bao lâu thì bơm được số nước bằng $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi ?

A. 2 giờ 36 giây. **B.** 2 giờ 34 giây. **C.** 2 giờ 35 giây. **D.** 2 giờ 36 giây.

Lời giải

Gọi x là thời điểm bơm được số nước bằng $\frac{3}{4}$ độ sâu của bể (x tính bằng giây).

Ta có: $\int\limits_0^x \frac{1}{500}\sqrt[3]{t+3}dt = 210 \Rightarrow \frac{3}{4}(t+3)^{\frac{4}{3}}\Big|_0^x = 105000 \Rightarrow (x+3)\sqrt[3]{x+3} - 3\sqrt[3]{3} = 140000$

$\Rightarrow \sqrt[3]{(x+3)^4} = 3\sqrt[3]{3} + 140000 \Rightarrow x + 3 = \sqrt[4]{\left(3\sqrt[3]{3} + 140000\right)^3} \Rightarrow x = \sqrt[4]{\left(3\sqrt[3]{3} + 140000\right)^3} - 3$

$\Rightarrow x \approx 7234,8256$.

Câu 45: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 6at^2 + 2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là $90m^3$, sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là $504m^3$. Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 9 giây.

A. $1458m^3$. **B.** $600m^3$. **C.** $2200m^3$. **D.** $4200m^3$.

Lời giải

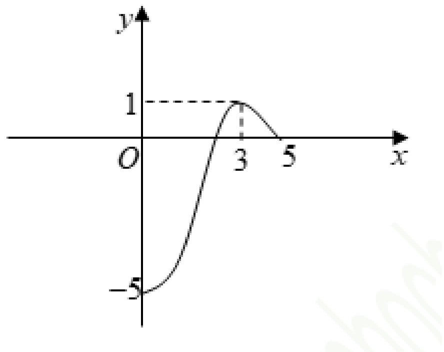
$$\int\limits_0^3 \left(6at^2 + 2bt\right)dt = 90 \Leftrightarrow \left(2at^3 + bt^2\right)\Big|_0^3 = 90 \Leftrightarrow 54a + 9b = 90$$

$\int_0^6 \left(6at^2+2bt\right)\mathrm{d}t=504 \Leftrightarrow \left(2at^3+bt^2\right)\Big|_0^6=504 \Leftrightarrow 432a+36b=504$

Từ , $\Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2}{3} \\ b=6 \end{cases}$. Sau khi bơm 9 giây thì thể tích nước trong bể là:

$V=\int_0^9 \left(4t^2+12t\right)\mathrm{d}t=\left(\dfrac{4}{3}t^3+6t^2\right)\Big|_0^9=1458\left(m^3\right)$.

Câu 46: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[0;5\right]$ và đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ trên đoạn $\left[0;5\right]$ được cho như hình bên.



Tìm mệnh đề đúng

A. $f\left(0\right)=f\left(5\right)<f\left(3\right)$.

B. $f\left(3\right)<f\left(0\right)=f\left(5\right)$.

C. $f\left(3\right)<f\left(0\right)<f\left(5\right)$.

D. $f\left(3\right)<f\left(5\right)<f\left(0\right)$.

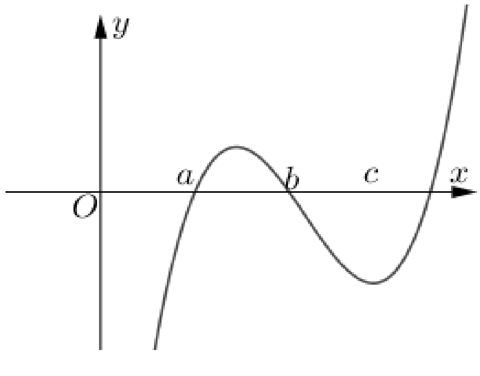
Lời giải

Ta có $\int_3^5 f'\left(x\right)\mathrm{d}x=f\left(5\right)-f\left(3\right)>0$, do đó $f\left(5\right)>f\left(3\right)$.

$\int_0^3 f'\left(x\right)\mathrm{d}x=f\left(3\right)-f\left(0\right)<0$, do đó $f\left(3\right)<f\left(0\right)$

$\int_0^5 f'\left(x\right)\mathrm{d}x=f\left(5\right)-f\left(0\right)<0$, do đó $f\left(5\right)<f\left(0\right)$

Câu 47: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị $y=f'\left(x\right)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a<b<c$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



A. $f(b) > f(a) > f(c)$. **B.** $f(a) > f(b) > f(c)$.

C. $f(c) > f(a) > f(b)$. **D.** $f(c) > f(b) > f(a)$.

Lời giải

Chọn A

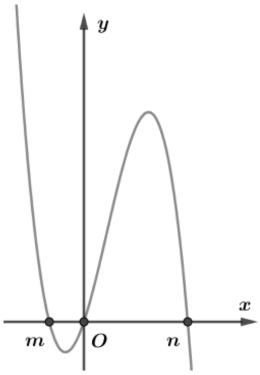
Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\searrow$		$f(a)$	$\nearrow$	$f(b)$	$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$	

Ta có $S_1 = \int\limits_a^b |f'(x)|dx = \int\limits_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$, $S_2 = \int\limits_b^c |f'(x)|dx = -\int\limits_b^c f'(x)dx = f(b) - f(c)$.

Vì $\begin{cases} S_1 < S_2 \Leftrightarrow f(b) - f(a) < f(b) - f(c) \Leftrightarrow f(c) < f(a) \\ \int\limits_a^b f'(x)dx > 0 \Leftrightarrow f(b) > f(a) \end{cases} \Rightarrow f(c) < f(a) < f(b)$

Câu 48: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn, có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi

A. $f(0) < 0 < f(m)$. **B.** $f(0) > 0$. **C.** $f(m) < 0 < f(n)$. **D.** $f(0) < 0 < f(n)$.

Lời giải

Chọn A

Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = m \\ x = n \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		m		0		n		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(m)$	↘	$f(0)$	↗	$f(n)$	↘	$-\infty$

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $y=f'(x)$; $Ox;x=m;Oy$

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $y=f'(x);Oy;x=n$

Từ hình vẽ ta thấy $S_2>S_1$

$$\Leftrightarrow \int_0^n |f'(x)|dx > \int_m^0 |f'(x)|dx$$

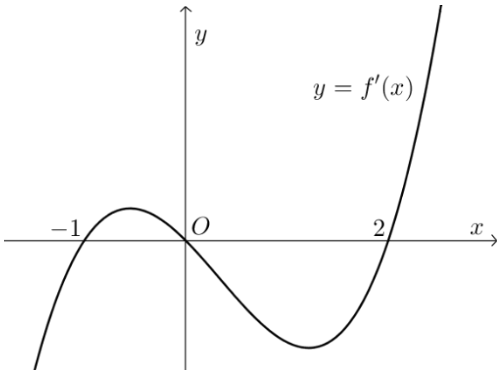
$$\Leftrightarrow \int_0^n f'(x)dx > \int_m^0 -f'(x)dx$$

$$\Leftrightarrow f(n)-f(0) > -[f(0)-f(m)]$$

$$\Leftrightarrow f(n)>f(m).$$

Từ bảng biến thiên kết hợp với điều kiện $f(n)>f(m)$ ta thấy để phương trình $f(x)=0$ có 4 nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow f(0)<0<f(m)$.

Câu 49: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình bên dưới. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $f(0)>f(2)>f(-1)$.

<u>B</u>. $f(0)>f(-1)>f(2)$.

C. $f(2)>f(0)>f(-1)$.

D. $f(-1)>f(0)>f(2)$.

Lời giải

Theo đồ thị, ta có:

$$f(0)-f(-1)=\int_{-1}^0 f'(x)\mathrm{d}x>0$$

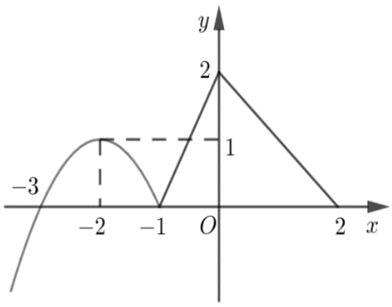
$$\Rightarrow f(0)>f(-1)\ (1),$$

$$f(2)-f(-1)=\int_{-1}^{2} f'(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0} f'(x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{2} f'(x)\,\mathrm{d}x<0$$

$\Rightarrow f(-1)>f(2)\ (2)$.

Từ (1) và $(2)\Rightarrow f(0)>f(-1)>f(2)$.

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên $[-3;2]$ như hình vẽ



Biết $f(-3)=0$, giá trị của $f(-1)+f(1)$ bằng

A. $\frac{23}{6}$ **B.** $\frac{31}{6}$ **C.** $\frac{35}{3}$ **D.** $\frac{9}{2}$

Lời giải

Chọn B

Parabol $y=ax^2+bx+c$ có đỉnh $I(-2;1)$ và đi qua điểm $(-3;0)$ nên ta có

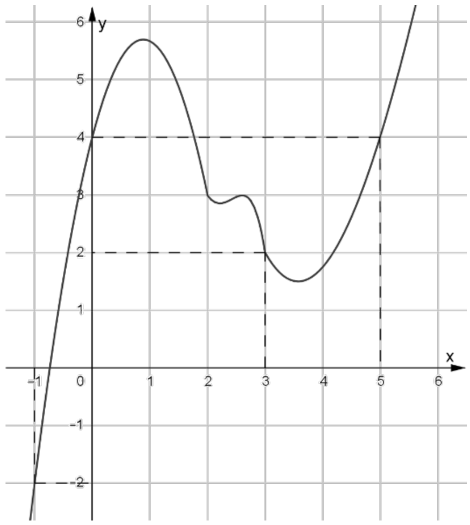
$$\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=-2\\ 4a-2b+c=1\\ 9a-3b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=-4\\ c=-3\end{cases}\Rightarrow y=-x^2-4x-3.$$

Do $f(-3)=0$ nên $f(-1)+f(1)=[f(1)-f(0)]+[f(0)-f(-1)]+2[f(-1)-f(-3)]$

$$=\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0} f'(x)\mathrm{d}x+2\int_{-3}^{-1}\left(-x^2-4x-3\right)\mathrm{d}x=S_1+S_2+2\int_{-3}^{-1}\left(-x^2-4x-3\right)\mathrm{d}x=1+\frac{3}{2}+\frac{8}{3}=\frac{31}{6}.$$

Với S_1, S_2 lần lượt là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=-1, x=0$ và $x=0, x=1$. Dễ thấy $S_1=1$; $S_2=\frac{3}{2}$.

Câu 51: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x)=2f(x)-(x-1)^2$.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $g(-1)<g(3)<g(5)$.
B. $g(-1)<g(5)<g(3)$.
C. $g(5)<g(-1)<g(3)$.
D. $g(3)<g(5)<g(-1)$.

Lời giải

Ta có $g'(x)=2\left[f'(x)-(x-1)\right]$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x-1$.

Dựa vào đồ thị ta có các nghiệm sau: $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \\ x=5 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		5		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$g(-1)$	$\nearrow$	$g(3)$	$\searrow$	$g(5)$	$\nearrow$	

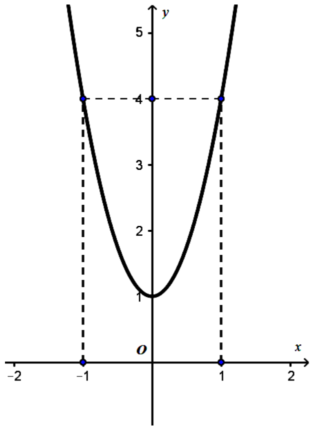
Ngoài ra dựa vào đồ thị ta có $\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{3} g'(x)\mathrm{d}x > -\frac{1}{2}\int\limits_{3}^{5} g'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow g(x)\Big|_{-1}^{3} > -g(x)\Big|_{3}^{5}$

$\Leftrightarrow g(3)-g(-1)>g(3)-g(5) \Leftrightarrow g(5)>g(-1)$.

Vậy $g(3)>g(5)>g(-1)$.

Câu 52: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R}, a\neq 0)$ có đồ thị là (C). Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tính giá trị $H=f(4)-f(2)$?

A. $H=45$. **B.** $H=64$. **C.** $H=51$. **D.** $H=58$.



Lời giải

Theo bài ra $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ \left(a,b,c,d\in\mathbb{R},a\neq 0\right)$ do đó $y=f'(x)$ là hàm bậc hai có dạng $y=f'(x)=a'x^2+b'x+c'$.

Dựa vào đồ thị ta có: $\begin{cases}c'=1\\a'-b'+c'=4\\a'+b'+c'=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a'=3\\b'=0\\c'=1\end{cases}\Rightarrow y=f'(x)=3x^2+1$.

Gọi S là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x)$, trục Ox, $x=4$, $x=2$.

Ta có $S=\int_2^4\left(3x^2+1\right)\mathrm{dx}=58$.

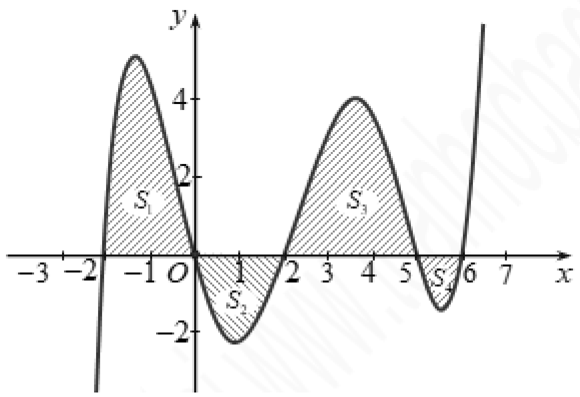
Lại có: $S=\int_2^4 f'(x)\mathrm{dx}=f(x)\Big|_2^4=f(4)-f(2)$.

Do đó: $H=f(4)-f(2)=58$.

Câu 53: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $M=\max\limits_{[-2;6]}f(x)$, $m=\min\limits_{[-2;6]}f(x)$, $T=M+m$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $T=f(0)+f(-2)$. **B.** $T=f(5)+f(-2)$.
C. $T=f(5)+f(6)$. **D.** $T=f(0)+f(2)$.

Lời giải



Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 lần lượt là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$ với và trục hoành.

Quan sát hình vẽ, ta có

◈ $\int_{-2}^{0} f'(x)\,\mathrm{d}x > \int_{0}^{2} -f'(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x)\Big|_{-2}^{0} > f(x)\Big|_{2}^{0}$

$\Leftrightarrow f(0) - f(-2) > f(0) - f(2) \Leftrightarrow f(-2) < f(2)$

◈ $\int_{0}^{2} -f'(x)\,\mathrm{d}x < \int_{2}^{5} f'(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x)\Big|_{2}^{0} < f(x)\Big|_{2}^{5}$

$\Leftrightarrow f(0) - f(2) < f(5) - f(2) \Leftrightarrow f(0) < f(5)$

◈ $\int_{2}^{5} f'(x)\,\mathrm{d}x > \int_{5}^{6} -f'(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x)\Big|_{2}^{5} > f(x)\Big|_{6}^{5}$

$\Leftrightarrow f(5) - f(2) > f(5) - f(6) \Leftrightarrow f(2) < f(6)$

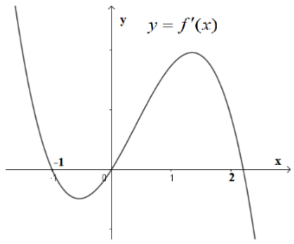
Ta có bảng biến thiên

x	-2		0		2		5		6
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$f(-2)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(5)$	$\searrow$	$f(6)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $M = \max\limits_{[-2;6]} f(x) = f(5)$ và $m = \min\limits_{[-2;6]} f(x) = f(-2)$

Khi đó $T = f(5) + f(-2)$.

Câu 54: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?



A. $a+c>0$. **B.** $a+b+c+d<0$. **C.** $a+c<b+d$. **D.** $b+d-c>0$.

Lời giải

Chọn A

Theo đồ thị ta có $f'(0)=0 \Leftrightarrow d=0$ và hệ số $a<0$.

Xét $\int\limits_{-1}^{0} f'(x)dx = f(x)\big|_{-1}^{0} = -a+b-c+d$, mà $\int\limits_{-1}^{0} f'(x)dx<0$ nên ta có $-a+b-c+d<0$

Hay $a+c>b+d$. Do đó ta loại **C.**

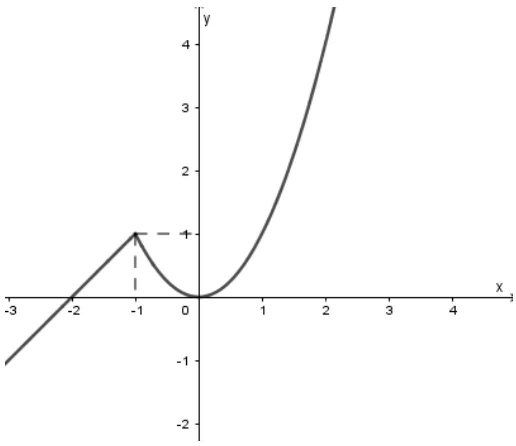
Thay $d=0$ ta có $a>b-c$, vì $a<0$ nên $b-c<0$. Loại **D.**

Xét $\int\limits_{0}^{1} f'(x)dx = f(x)\big|_{0}^{1} = a+b+c+d$, mà $\int\limits_{0}^{1} f'(x)dx>0$ nên ta có $a+b+c+d>0$.

Do đó ta loại **B.**

Từ ta có $-a-b-c-d<0$ cộng từng vế với ta có $a+c>0$

Câu 55: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị gồm một phần đường thẳng và một phần parabol có đỉnh là gốc tọa độ O như hình vẽ. Giá trị của $\int_{-3}^{3} f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng



A. $\frac{26}{3}$. **B.** $\frac{38}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{28}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có, phương trình đường thẳng có dạng $y=ax+b$.

Từ hình vẽ, ta thấy đường thẳng đi qua hai điểm $A\left(-2;0\right), B\left(-1;1\right)$.

Suy ra, ta có hệ phương trình $\begin{cases}-2a+b=0\\-a+b=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=2\end{cases} \Rightarrow y=x+2$.

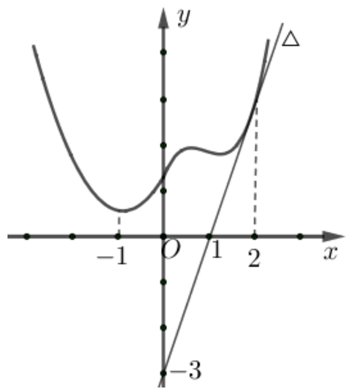
Ta có, phương trình parabol có dạng $y=ax^2,\ a\neq 0$.

Từ hình vẽ, ta thấy parabol đi qua điểm $B(-1;1) \Rightarrow y=x^2$.

Do đó, hàm số $y=f(x)=\begin{cases}x+2,\ x\leq -1\\x^2 \quad ,x\geq -1\end{cases}$.

Vậy, $\int_{-3}^{3} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-3}^{-1}(x+2)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{3}x^2\mathrm{d}x=\left.\dfrac{(x+2)^2}{2}\right|_{-3}^{-1}+\left.\dfrac{x^3}{3}\right|_{-1}^{3}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}+9+\dfrac{1}{3}=\dfrac{28}{3}$.

Câu 56: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm đến cấp 2 trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-1$, có đồ thị như hình vẽ và đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $x=2$. Tính $\int\limits_1^4 f''(x-2)\mathrm{d}x$



A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

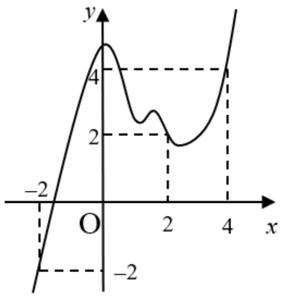
Chọn C

Dễ thấy đường thẳng Δ đi qua các điểm $(0;-3)$ và $(1;0)$ nên $\Delta: y=3x-3$ suy ra hệ số góc của Δ là $k=3 \Rightarrow f'(2)=3$.

Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-1$ suy ra $f'(-1)=0$.

Vậy $\int\limits_1^4 f''(x-2)\mathrm{d}x=\left.f'(x-2)\right|_1^4=f'(2)-f'(-1)=3-0=3$.

Câu 57: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Giá trị của biểu thức $I=\int_0^4 f'(x-2)dx+\int_0^2 f'(x+2)\,dx$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 10.

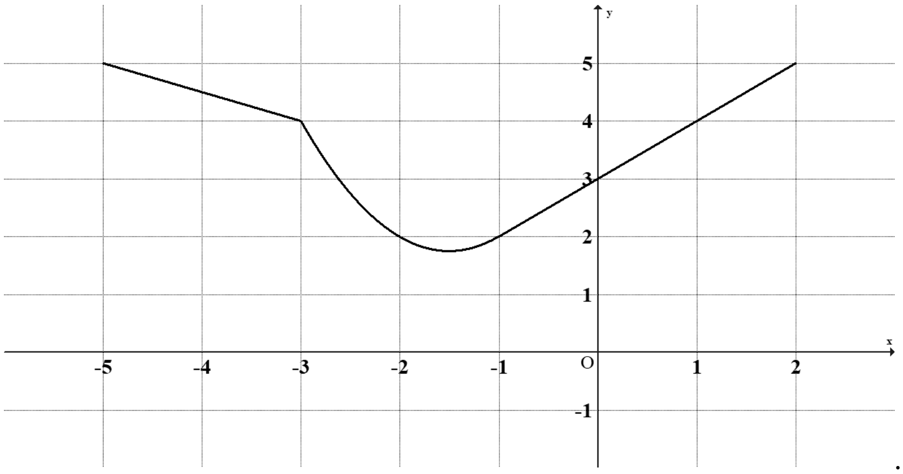
Lời giải

Chọn C

Xét $I=\int_0^4 f'(x-2)dx+\int_0^2 f'(x+2)\,dx=\int_0^4 f'(x-2)d(x-2)+\int_0^2 f'(x+2)\,d(x+2)$

$$=f(x-2)\Big|_0^4+f(x+2)\Big|_0^2=\left[f(2)-f(-2)\right]+\left[f(4)-f(2)\right]=f(4)-f(-2)=4-(-2)=6.$$

Câu 58: Cho hàm số $f(x)$ liên tục có đồ thị như hình bên dưới.



Biết $F'(x)=f(x),\forall x\in[-5;2]$ và $\int_{-3}^{-1} f(x)\,dx=\frac{14}{3}$. Tính $F(2)-F(-5)$

A. $\frac{-145}{6}$. **B.** $\frac{-89}{6}$. **C.** $\frac{145}{6}$. **D.** $\frac{89}{6}$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta nhận thấy, đồ thị hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên đoạn $[-5;2]$được xây dựng bởi ba hàm số $f(x)=\begin{cases} f_1(x)\text{khi}-5\le x<-3 \\ f_2(x)\text{khi}-3\le x\le -1 \\ f_3(x)\text{khi}-1<x\le 2\end{cases}$. Trong đó:.

$f_1(x)$ là đường thẳng qua hai điểm $(-5;5)$ và $(-3;4)$ có phương trình: $f_1(x)=\dfrac{-x+5}{2}$.

$f_2(x)$ có đồ thị là một đường cong nối từ điểm $(-3;4)$ đến điểm $(-1;2)$.

$f_3(x)$ là đường thẳng qua hai điểm $(-1;2)$ và $(0;3)$ có phương trình $f_3(x)=x+3$.

Vậy: $F(2)-F(-5)=\int\limits_{-5}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-5}^{-3}f_1(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{-3}^{-1}f_2(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{2}f_3(x)\mathrm{d}x$.

$=\int\limits_{-5}^{-3}\dfrac{-x+5}{2}\mathrm{d}x+\int\limits_{-3}^{-1}f_2(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{2}(x+3)\mathrm{d}x==9+\dfrac{14}{3}+\dfrac{21}{2}=\dfrac{145}{6}$.