SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BẮC NINH	ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM HỌC 2023-2024
ĐỀ CHÍNH THỨC *(Đề thi có 01 trang)*	**Môn thi: Toán** *(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán)* Thời gian làm bài: **150 phút** *(không kể thời gian giao đề)*

Câu 1. (2,0 điểm)

1. Rút gọn biểu thức $P = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}.$

2. Vẽ đường thẳng d là đồ thị hàm số $y = 2x - 4$. Tính khoảng cách từ gốc toạ độ O đến đường thẳng d.

Câu 2. (2,0 điểm)

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 6x + 6y = 2023|xy| \\ x - 2y = 3xy \end{cases}.$

2. Giải phương trình $2x + 3 + \sqrt{4x^2 + 9x + 2} = 2\sqrt{x+2} + \sqrt{4x+1}.$

Câu 3. (3,0 điểm)

1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), có ba góc nhọn, $AB < AC$, hai đường cao BE và CF. Các tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau tại S. Gọi M là giao điểm của BC và SO.

a) Chứng minh rằng tam giác EAB đồng dạng với tam giác MBS, từ đó suy ra tam giác AEM đồng dạng với tam giác ABS.

b) Gọi N là giao điểm của AM và EF, P là giao điểm của SA và BC. Chứng minh rằng NP vuông góc với BC.

2. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Lấy các điểm E,F thuộc cạnh AB (E nằm giữa A,F); G,H thuộc cạnh BC (G nằm giữa B,H); I,J thuộc cạnh CD (I nằm giữa C,J); K,M thuộc cạnh DA (K nằm giữa D,M) sao cho E,F,G,H,I,J,K,M đôi một phân biệt và khác các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$, đồng thời hình đa giác $EFGHIJKM$ có các góc bằng nhau. Chứng minh rằng nếu độ dài các cạnh của hình đa giác $EFGHIJKM$ là các số hữu tỉ (theo đơn vị cm) thì $EF = IJ$.

Câu 4. (1,5 điểm)

Cho các số nguyên dương x,y,z thoả mãn $x^3 + y^3 + z^3 = 18(x+y+z)$.

1. Chứng minh rằng $x+y+z$ chia hết cho 6.

2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F = xyz$.

Câu 5. (1,5 điểm)

1. Cho các số thực dương a,b,c thoả mãn $a+b+c = 3$. Chứng minh rằng

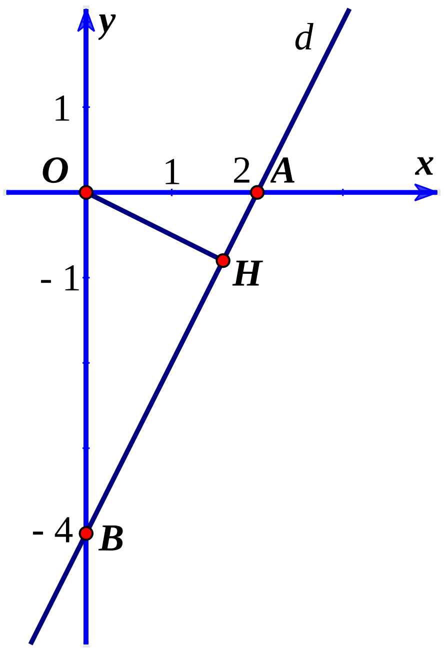
$$\frac{15}{ab+bc+ca} \geq 6 - abc.$$

2. Trên mặt phẳng cho 2008 điểm bất kì sao cho khoảng cách giữa 2 điểm tùy ý luôn lớn hơn 1. Chứng minh rằng mỗi hình tròn có bán kính bằng 1 chỉ chứa không quá 5 điểm trong 2008 điểm đã cho.

====== HẾT ======

Họ và tên thí sinh: ………………………………………………… Số báo danh: ……………

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **BẮC NINH**	**HƯỚNG DẪN CHẤM** **ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN** **NĂM HỌC 2023 - 2024** **Môn: Toán** *(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán)* *(Hướng dẫn chấm có 06 trang)*

<table>
<tr><th>Câu</th><th colspan="2">Đáp án</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td colspan="4">Câu 1. (2,0 điểm)
1. Rút gọn biểu thức $P=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.
2. Vẽ đường thẳng d là đồ thị hàm số $y=2x-4$. Tính khoảng cách từ gốc toạ độ O đến đường thẳng d.</td></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td colspan="2">1. Ta có $P=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td colspan="2">$=\left|\sqrt{2}+1\right|-\left|\sqrt{2}-1\right|=\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1=2.$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">
</td><td>2. Vẽ đường thẳng d là đồ thị hàm số $y=2x-4$.

Đường thẳng d cắt trục Ox tại $A\left(2;0\right)$, cắt trục Oy tại $B\left(0;-4\right)$.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Tính được $OA=2, OB=4$. Gọi H là hình chiếu của O trên AB. Ta có
$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16}\Rightarrow OH=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

Vậy khoảng cách từ gốc toạ độ O đến đường thẳng d là $OH=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td colspan="4">Câu 2. (2,0 điểm)
1. Giải hệ phương trình $\begin{cases}6x+6y=2023\left|xy\right|\\x-2y=3xy\end{cases}$.
2. Giải phương trình $2x+3+\sqrt{4x^2+9x+2}=2\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}$.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">1. Xét hệ phương trình $\begin{cases}6x+6y=2023\left|xy\right|\\x-2y=3xy\end{cases}$ (1).

Nếu $xy>0$ thì (1) $\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{6}{y}+\frac{6}{x}=2023\\\frac{1}{y}-\frac{2}{x}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{y}=\frac{2032}{9}\\\frac{1}{x}=\frac{2005}{18}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{18}{2005}\\y=\frac{9}{2032}\end{cases}$
(thoả mãn $xy>0$).</td><td>0,5</td></tr>
</table>

	Nếu $xy<0$ thì (1) $\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{6}{y}+\dfrac{6}{x}=-2023\\ \dfrac{1}{y}-\dfrac{2}{x}=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{y}=-\dfrac{2014}{9}\\ \dfrac{1}{x}=-\dfrac{2041}{18}\end{cases}$ (loại, vì không thoả mãn $xy<0$). Nếu $xy=0$ thì từ (1) ta tính được $x=y=0$. Vậy hệ phương trình (1) có đúng 2 nghiệm là $(0;0)$ và $\left(\dfrac{18}{2005};\dfrac{9}{2032}\right)$.	0,5
	2. Giải phương trình $2x+3+\sqrt{4x^2+9x+2}=2\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}$ (2). ĐK: $x\ge -\dfrac{1}{4}$. Ta có (2) $\Leftrightarrow 2x+3+\sqrt{(x+2)(4x+1)}=2\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}$.	0,25
	Đặt $t=2\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}$ (với $t\ge\sqrt{7}$) thì $t^2=8x+4\sqrt{(x+2)(4x+1)}+9$ hay $2x+\sqrt{(x+2)(4x+1)}=\dfrac{t^2-9}{4}$. Phương trình (2) trở thành $\dfrac{t^2-9}{4}+3=t$	0,25
	$\Leftrightarrow t^2-4t+3=0 \Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=3$. Kết hợp với điều kiện $t\ge\sqrt{7}$ ta lấy $t=3$.	0,25
	Với $t=3$ thì $2\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}=3 \Leftrightarrow 2x+\sqrt{(x+2)(4x+1)}=0$ $\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)(4x+1)}=-2x \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 0\\ (x+2)(4x+1)=4x^2\end{cases} \Leftrightarrow x=-\dfrac{2}{9}$. Vậy phương trình (2) có nghiệm duy nhất $x=-\dfrac{2}{9}$.	0,25

Câu 3. (3,0 điểm)

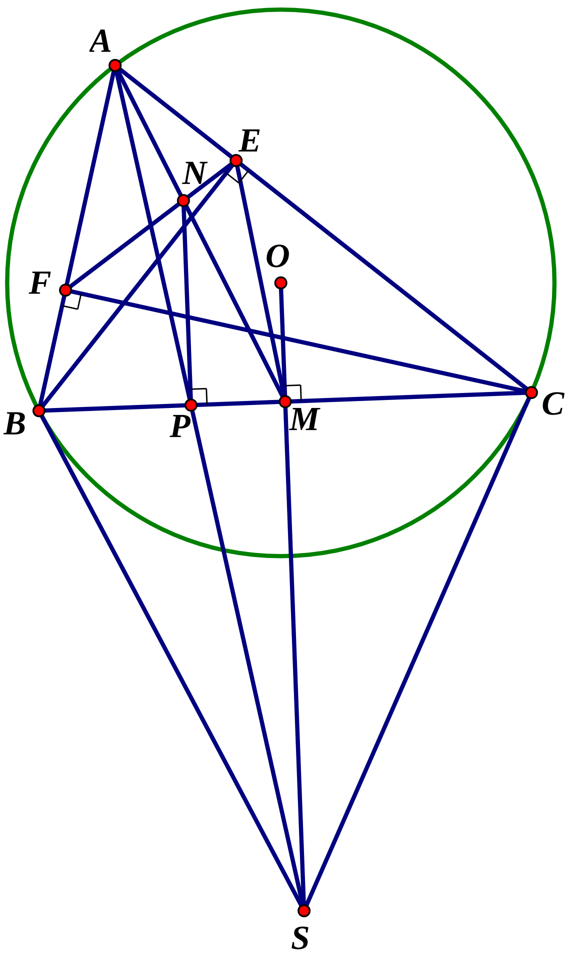
1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), có ba góc nhọn, $AB<AC$, hai đường cao BE và CF. Các tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau tại S. Gọi M là giao điểm của BC và SO.

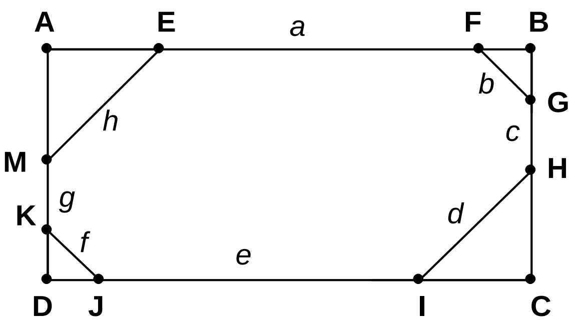
a) Chứng minh rằng ΔEAB đồng dạng với ΔMBS, từ đó suy ra ΔAEM đồng dạng với ΔABS.

b) Gọi N là giao điểm của AM và EF, P là giao điểm của SA và BC. Chứng minh rằng NP vuông góc với BC.

2. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Lấy các điểm E,F thuộc cạnh AB (E nằm giữa A,F); G,H thuộc cạnh BC (G nằm giữa B,H); I,J thuộc cạnh CD (I nằm giữa C,J); K,M thuộc cạnh DA (K nằm giữa D,M) sao cho E,F,G,H,I,J,K,M đôi một phân biệt và khác các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$, đồng thời hình đa giác $EFGHIJKM$ có các góc bằng nhau. Chứng minh rằng nếu độ dài các cạnh của hình đa giác $EFGHIJKM$ là các số hữu tỉ (theo đơn vị cm) thì $EF=IJ$.

	1. Học sinh vẽ đúng hình để làm được ý **a.**	0,25
	a. Ta có $OS\perp BC$ tại trung điểm M của BC. Nên $BEA=SMB=90°$. Mà $BAC=SBC=\dfrac{1}{2}$sđBC. Suy ra ΔEAB đồng dạng với ΔMBS.	0,25

	Hai tam giác EAB, MBS đồng dạng nên $\frac{AB}{AE} = \frac{BS}{BM}$. Tam giác BEC vuông tại E, EM là trung tuyến nên $BM = ME$. Suy ra $\frac{AB}{AE} = \frac{BS}{ME}$ (1).	0,25
	 Tam giác MEC cân tại M nên $MEC = MCE$. Mặt khác $ABS + ACB = 180° =$ $= AEM + MEC =$ $= AEM + ACB$ $\Rightarrow ABS = AEM$ (2). Từ (1), (2) suy ra hai tam giác AEM, ABS đồng dạng.	0,25
	b. Hai tam giác AEM, ABS đồng dạng nên $BAP = EAN$; $AME = ASB$ (3). Mà tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn đường kính BC nên $ABP = AEN$. Suy ra hai tam giác AEN, ABP đồng dạng, dẫn tới $\frac{AN}{AP} = \frac{NE}{BP}$ (4).	0,25
	Ta có $NEM + ABC + ACB = NEM + AEN + MEC = 180°$. Suy ra $NEM = BAC = SBP$ (5). Từ (3) và (5) suy ra hai tam giác EMN, BSP đồng dạng. Do đó $\frac{NE}{BP} = \frac{MN}{PS}$ (6).	0,25
	Từ (4) và (6) suy ra $\frac{AN}{AP} = \frac{NM}{PS} \Rightarrow \frac{AN}{MN} = \frac{AP}{PS} \Rightarrow NP // MS$. Mà $SM \perp BC \Rightarrow NP \perp BC$.	0,5
	2. Gọi $EF = a$; $FG = b$; $GH = c$; $HI = d$; $IJ = e$; $JK = f$; $KM = g$; $ME = h$ (theo đơn vị cm, với a, b, c, d, e, f, g, h là các số hữu tỉ dương). Do các góc của hình bát giác $EFGHIJKM$ bằng nhau nên mỗi góc trong của hình bát giác đó có số đo là $\frac{(8-2).180°}{8} = 135°$.	0,25

		Suy ra mỗi góc ngoài của hình bát giác này là $180° - 135° = 45°$. Do đó các tam giác $MAE;FBG;CIH;$ DKJ là các tam giác vuông cân.	0,25
	Ta có $MA = AE = \frac{h}{\sqrt{2}}$; $BF = BG = \frac{b}{\sqrt{2}}$; $CH = CI = \frac{d}{\sqrt{2}}$; $DK = DJ = \frac{f}{\sqrt{2}}$. Vì $AB = CD$ nên $\frac{h}{\sqrt{2}} + a + \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{f}{\sqrt{2}} + e + \frac{d}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow (e-a)\sqrt{2} = h + b - f - d$.		0,25
	Nếu $e - a \neq 0$ thì $\sqrt{2} = \frac{h+b-f-d}{e-a}$, điều này vô lí, do $\sqrt{2}$ là số vô tỉ, còn $\frac{h+b-f-d}{e-a}$ là số hữu tỉ. Vậy $e - a = 0 \Leftrightarrow e = a$ hay $EF = IJ$ (đpcm).		0,25
Câu 4. (1,5 điểm) Cho các số nguyên dương x,y,z thoả mãn $x^3 + y^3 + z^3 = 18(x+y+z)$. **1.** Chứng minh rằng $x+y+z$ chia hết cho 6. **2.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F = xyz$.			
	1. Từ giả thiết ta có $(x^3 - x) + (y^3 - y) + (z^3 - z) = 17(x+y+z)$.		0,25
	Tích của ba số nguyên liên tiếp luôn chia hết cho 6 nên $x^3 - x = (x-1)x(x+1) \vdots 6$. Tương tự $y^3 - y \vdots 6$, $z^3 - z \vdots 6$. Suy ra $17(x+y+z) \vdots 6$.		0,25
	Mà 17 và 6 nguyên tố cùng nhau nên $x + y + z \vdots 6$.		0,25
	2. Ta có $x+y+z = 6m$, $x^3+y^3+z^3 = 108m$, với $m \in {}^*$. Vì $\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$ nên $\frac{108m}{3} \geq \left(\frac{6m}{3}\right)^3 \Leftrightarrow m^2 \leq \frac{9}{2}$, suy ra $m \leq 2$.		0,25
	Lúc này $F = xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 \leq \left(\frac{12}{3}\right)^3 = 64$ (1). Từ $x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ suy ra $108m - 3F = 6m\left(36m^2 - 3(xy+yz+zx)\right) \Leftrightarrow F = 36m - 6m\left(12m^2 - (xy+yz+zx)\right)$. Do đó $F \vdots 6$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $F \leq 60$ (3).		0,25
	Đẳng thức ở (3) xảy ra, chẳng hạn khi $\begin{cases} x+y+z = 12 \\ 60 = 72 - 12\left(48 - (xy+yz+zx)\right) \\ xyz = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = 12 \\ xy+yz+zx = 47 \\ xyz = 60 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y;z)$ là hoán vị của $(3;4;5)$. Vậy giá trị lớn nhất của F là 60, đạt được chẳng hạn khi $(x;y;z)$ là hoán vị		0,25