ĐẠT ĐIỂM TOÁN THI VÀO 10 TUYỆT ĐỐI – GIẢI BÀI TẬP BẤT ĐẲNG THỨC CO-SI CHI TIẾT

Chuyên đề 5. BẤT ĐẲNG THỨC CÔ-SI

A. Kiến thức cần nhớ

Trong các bài toán về bất đẳng thức và cực trị thì bất đẳng thức Cô-si được ví như viên kim cương bởi tính ưu việt trong việc chứng minh các bất đẳng thức khác cũng như tìm cực trị. Trong chương trình THCS chủ yếu là vận dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm. Do vậy trong chuyên đề này sẽ chỉ nêu ứng dụng trong việc giải các bài toán bằng việc vận dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm.

• Bất đẳng thức Cô-si: cho hai số *x, y* không âm, ta có:

$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ hoặc $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi $x = y$.

Bất đẳng thức Cô-si còn được gọi là bất đẳng thức về trung bình cộng và trung bình nhân (AM-GM).

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với mọi số dương *a, b, c,* ta có:

$$4a+3b+5c \geq 2\left(\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+3\sqrt{ca}\right)$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

(Thi học sinh giỏi Toán 9, tỉnh Gia Lai)

Giải

Tìm cách giải. Nhận thấy vế phải xuất hiện $\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+3\sqrt{ca}$, do vậy rất tự nhiên chúng ta nghĩ tới việc dùng bất đẳng thức Cô-si. Vấn đề còn lại là tách vế trái thành những hạng tử thích hợp nhằm khi vận dụng bất đẳng thức Cô-si thì lần lượt xuất hiện các hạng tử vế phải.

Trình bày lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \quad (1)$$
$$2b+2c \geq 4\sqrt{bc} \quad (2)$$
$$3a+3c \geq 6\sqrt{ca} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) cộng vế với vế ta được:

$$4a+3b+5c \geq 2\left(\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+3\sqrt{ca}\right)$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Ví dụ 2: Cho $S=\sqrt{1.2019}+\sqrt{3.2017}+\sqrt{5.2015}+...+\sqrt{2019.1}.$ So sánh S với 1010^2

Giải

Tìm cách giải. Nhận thấy các hạng tử trong tổng *S*, thì $1+2019=3+2017=...=2019+1$ và bằng $2.1010.$ Nhằm xuất hiện tổng giống nhau đó và cũng liên quan tới số 1010, chúng ta nghĩ tới việc vận dụng bất đẳng thức Cô-si dạng $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$

Trình bày lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có: $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$

Suy ra $S<\frac{1+2019}{2}+\frac{3+2017}{2}+\frac{5+2015}{2}+...+\frac{2019+1}{2}$

$\Leftrightarrow S<1010+1010+1010+...+1010 \Leftrightarrow S<1010^2$

Ví dụ 3: Cho *a, b, c* là các số lớn hơn 1. Chứng minh: $\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{c-1}+\frac{c^2}{a-1}\ge 12$

Giải

Tìm cách giải. Quan sát bất đẳng thức cần chứng minh ta thấy vế phải là tổng ba hạng tử dương có chứa mẫu số, còn vế trái là một số thực. Do vậy chúng ta cần chọn một hạng tử thích hợp để khi vận dụng bất đẳng thức Cô-si khử mẫu các hạng tử vế trái, chẳng hạn:

$\frac{a^2}{b-1}+\alpha\left(b-1\right)\ge 2.\sqrt{\frac{a^2}{b-1}.\alpha\left(b-1\right)}=4a\sqrt{\alpha},$ và

chọn $\alpha=4$!

Trình bày lời giải

Áp dụng bất đẳng thức cô-si; ta có:

$$\frac{a^2}{b-1}+4\left(b-1\right)\ge 2.\sqrt{\frac{a^2}{b-1}.4\left(b-1\right)}=4a\left(1\right)$$
$$\frac{b^2}{c-1}+4\left(c-1\right)\ge 2.\sqrt{\frac{b^2}{c-1}.4\left(c-1\right)}=4b\left(2\right)$$
$$\frac{c^2}{a-1}+4\left(a-1\right)\ge 2.\sqrt{\frac{c^2}{a-1}.4\left(a-1\right)}=4c\left(3\right)$$

Từ (1), (2) và (3) cộng vế với vế ta được:

$$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{c-1}+\frac{c^2}{a-1}+4\left(a+b+c-3\right)\ge 4\left(a+b+c\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{c-1}+\frac{c^2}{a-1}\ge 12$$

Điều phải chứng minh

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} \dfrac{a^2}{b-1} = 4(b-1) \\ \dfrac{b^2}{c-1} = 4(c-1) \\ \dfrac{c^2}{a-1} = 4(a-1) \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 2$

Ví dụ 4: Cho *a, b* là số thực không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 \le 2,$ hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = a\sqrt{3b(a+2b)} + b\sqrt{3a(b+2a)}.$

Giải

Tìm cách giải. Giả thiết là điều kiện liên quan các biến với số mũ 2, còn biểu thức *M* phần biến có chứa căn. Nhằm biến đổi từ biểu thức chứa căn tới biểu thức không có căn và có số mũ 2, chúng ta cần áp dụng bất đẳng thức Cô-si dạng $\sqrt{xy} \le \dfrac{x+y}{2}$ và $xy \le \dfrac{x^2+y^2}{2}$

Trình bày lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\sqrt{3b(a+2b)} \le \frac{3b+a+2b}{2} = \frac{a+5b}{2} (1)$$

$$\sqrt{3a(b+2a)} \le \frac{3a+b+2a}{2} = \frac{5a+b}{2} (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $M \le \dfrac{a(a+5b)}{2} + \dfrac{b(5a+b)}{2}$

$$\Rightarrow M \le \frac{a^2+b^2+10ab}{2} \le \frac{a^2+b^2+5(a^2+b^2)}{2} = 3(a^2+b^2)$$

$$\Rightarrow M \le 3(a^2+b^2) \le 3.2 \Rightarrow M \le 6.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = 1.$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức *M* là 6 khi $a = b = 1.$

Ví dụ 5: Cho hai số thực dương *x, y* thỏa mãn: $\dfrac{4}{x} + \dfrac{5}{y} \ge 23.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$B = 8x + \frac{6}{x} + 18y + \frac{7}{y}$$

Giải

Tìm cách giải. Quan sát cả giả thiết và kết luận, hiển nhiên chúng ta cần tách phần biểu thức B có xuất hiện bộ phận của giả thiết để khai thác. Phần còn lại cứ cùng biến ta nhóm với nhau để vận dụng bất đẳng thức Cô-si.

Trình bày lời giải

Ta có: $B=\left(8x+\frac{2}{x}\right)+\left(18y+\frac{2}{y}\right)+\left(\frac{4}{x}+\frac{5}{y}\right)$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta được:

$8x+\frac{2}{x}\ge 2\sqrt{8x.\frac{2}{x}}=8(1)$

$18y+\frac{2}{y}\ge 2\sqrt{18y.\frac{2}{y}}=12(2)$

Mặt khác từ giả thiết ta có $\frac{4}{x}+\frac{5}{y}\ge 23\ (3)$

Từ (1), (2) và (3) cộng vế với vế ta được:

$B\ge 8+12+23=43$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}8x=\frac{2}{x}\\ 18y=\frac{2}{y}\\ \frac{4}{x}+\frac{5}{y}=23\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2};y=\frac{1}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là 43 khi $x=\frac{1}{2};y=\frac{1}{3}$

Ví dụ 6: Chứng minh rằng: $21\left(a+\frac{1}{b}\right)+3\left(b+\frac{1}{a}\right)\ge 80$ với $a\ge 3;b\ge 3.$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Giải

Tìm cách giải. Thoáng nhìn qua, chúng ta nghĩ ngay tới việc dùng bất đẳng thức Cô-si. Tuy nhiên sẽ là sai lầm nếu chúng ta nhóm và dùng bất đẳng thức Cô-si như sau:

$$21a+\frac{21}{b}+3b+\frac{3}{a}=\left(21a+\frac{3}{a}\right)+\left(\frac{21}{b}+3b\right)\ge 2\sqrt{21a.\frac{3}{a}}+\sqrt{\frac{21}{b}.3b}=12\sqrt{7}$$

Sai lầm thứ nhất là $12\sqrt{7}<80,$ sai lầm thứ hai là không đúng với điều kiện $a\ge 3;b\ge 3.$

Do vậy chúng ta cần tách và chọn các hạng tử thích hợp. Trước hết dự đoán dấu bằng xảy ra trong bất đẳng thức khi $a=3$ và $b=3.$ Sau đó chọn điểm rơi để khử mẫu ở vế trái như sau:

- $ma+\dfrac{3}{a}\geq\sqrt{ma.\dfrac{3}{a}}=2\sqrt{3m},$ xác định m bằng cách cho $ma=\dfrac{3}{a}$ và $a=3$ suy ra $m=\dfrac{1}{3}$. Từ đó ta có cách tách $21a=\dfrac{62a}{3}+\dfrac{a}{3}$
- $nb+\dfrac{21}{b}\geq2\sqrt{nb.\dfrac{21}{b}}=2\sqrt{21n},$ xác định n bằng cách cho $nb=\dfrac{21}{b}$ và $b=3$ suy ra $n=\dfrac{7}{3}$. Từ đó ta có cách tách $3b=\dfrac{2b}{3}+\dfrac{7b}{3}$

Trình bày lời giải

Ta có vế trái $\left(\dfrac{7}{3}b+\dfrac{21}{b}\right)+\left(\dfrac{a}{3}+\dfrac{3}{a}\right)+\dfrac{2}{3}b+\dfrac{62}{3}a$

Áp dụng bất đẳng thức Cô -si, ta có:

$$\frac{7}{3}b+\frac{21}{b}\geq2\sqrt{\frac{7}{3}b.\frac{21}{b}}=14$$
$$\frac{a}{3}+\frac{3}{a}\geq2\sqrt{\frac{a}{3}.\frac{3}{b}}=2$$

Mà $a\geq3;b\geq3$ nên $21\left(a+\dfrac{1}{b}\right)+3\left(b+\dfrac{1}{a}\right)\geq14+2+\dfrac{2}{3}.3+\dfrac{62}{3}.3=80$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=3$

Ví dụ 7: Cho *x; y; z* là các số dương

Chứng minh rằng $\sqrt{\dfrac{x}{y+z}}+\sqrt{\dfrac{y}{z+x}}+\sqrt{\dfrac{z}{x+y}}>2$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si: $x+y+z\geq2\sqrt{x(y+z)}\Rightarrow\dfrac{1}{x(y+z)}\geq\dfrac{2}{x+y+z}$

$$\Rightarrow\sqrt{\frac{x}{y+z}}\geq\frac{2x}{x+y+z}(1)$$

Tương tự ta có: $\sqrt{\dfrac{y}{x+z}}\geq\dfrac{2y}{x+y+z}(2)$

$$\sqrt{\frac{z}{x+y}}\geq\frac{2z}{x+y+z}(3)$$

Từ (1), (2) và (3) cộng vế theo vế, ta được $\sqrt{\dfrac{x}{y+z}}+\sqrt{\dfrac{y}{z+x}}+\sqrt{\dfrac{z}{x+y}}\geq2$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x = y+z \\ y = z+x \\ z = x+y \end{cases}$ cộng lại ta có $x+y+z=0$

Điều này không xảy ra vì $x, y, z > 0$

Ví dụ 8: Cho các số thực *x; y; z* thỏa mãn:

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-z^2} + z\sqrt{1-x^2} = \frac{3}{2}$$

Chứng minh rằng: $x^2+y^2+z^2 = \frac{3}{2}$

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9, tỉnh Hà Tĩnh, năm học 2005 – 2006)

Giải

Tìm cách giải. Bài toán không có bóng dáng của bất đẳng thức hay cực trị đại số. Tuy nhiên quan sát kỹ phần kết luận (các phần biến có mũ 2), phần giả thiết có căn bậc hai và chỉ cần áp dụng bất đẳng thức Cô-si một lần cho mỗi hạng tử cũng xuất hiện phần biến mũ 2. Với suy luận tự nhiên như vậy bất đẳng thức Cô-si cho lời giải đẹp.

Trình bày lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$x\sqrt{1-y^2} \le \frac{x^2+1-y^2}{2} (1)$$

$$y\sqrt{1-z^2} \le \frac{y^2+1-z^2}{2} (2)$$

$$z\sqrt{1-x^2} = \frac{z^2+1-x^2}{2} (3)$$

Từ (1) và (2), (3) cộng vế với vế ta được: $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-z^2} + z\sqrt{1-x^2} \le \frac{3}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x^2 = 1-y^2 (4) \\ y^2 = 1-z^2 (5) \\ z^2 = 1-x^2 (6) \end{cases}$

Từ (4), (5) và (6) cộng vế với vế ta được: $x^2+y^2+z^2 = 3-x^2-z^2-x^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 = \frac{3}{2}$

Điều phải chứng minh

Ví dụ 9: Cho *x; y; z* là những số dương thỏa mãn: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$

Chứng minh rằng: $\sqrt{x+yz} + \sqrt{y+zx} + \sqrt{z+xy} \ge \sqrt{xyz} + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$

Giải

Tìm cách giải. Quan sát điều kiện của biến x, y, z rất tự nhiên chúng ta thấy cần đổi biến bằng cách đặt $a=\frac{1}{x};b=\frac{1}{y};c=\frac{1}{z}\Rightarrow a+b+c=1.$ Khi đó bất đẳng thức có dạng $\sqrt{bc+a}+\sqrt{ac+b}+\sqrt{ab+c}\geq 1+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+\sqrt{ab}.$ Nhận thấy vai trò của *a, b, c* trong bất đẳng thức là như nhau. Mặt khác $bc+a$ là lệch bậc, do vậy sử dụng dụng điều kiện $a+b+c=1$ để đưa vô cùng bậc (gọi là cân bằng bậc). Sau đó dùng bất đẳng thức Cô-si đê đánh giá đưa về hằng đẳng thức.

Trình bày cách giải

Chia hai vế của bất đẳng thức cho $\sqrt{xyz}$, khi đó bất đẳng thức tương đương với:

$$\sqrt{\frac{1}{yz}+\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{1}{xz}+\frac{1}{y}}+\sqrt{\frac{1}{yx}+\frac{1}{z}}\geq 1+\sqrt{\frac{1}{yz}}+\sqrt{\frac{1}{xz}}+\sqrt{\frac{1}{yx}}$$

Đặt $a=\frac{1}{x};b=\frac{1}{y};c=\frac{1}{z}\Rightarrow a+b+c=1.$

Khi đó bất đẳng thức có dạng:

$$\sqrt{bc+a}+\sqrt{ac+b}+\sqrt{ab+c}\geq 1+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+\sqrt{ab}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\begin{aligned} bc+a=bc+a\left(a+b+c\right)&=bc+ab+ac+a^2\\ &\geq bc+2a\sqrt{bc}+a^2 \end{aligned}$$

hay $bc+a\geq\left(\sqrt{bc}+a\right)^2\Rightarrow\sqrt{bc+a}\geq\sqrt{bc}+a\ \ (1)$

Tượng tự ta có:

$$\sqrt{ac+b}\geq\sqrt{ac}+b\ \ (2)$$
$$\sqrt{ba+c}\geq\sqrt{ba}+c\ \ (3)$$

Từ (1); (2) và (3) cộng vế với vế ta có:

$$\sqrt{bc+a}+\sqrt{ac+b}+\sqrt{ab+c}\geq 1+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+\sqrt{ab}.$$

Hay $\sqrt{x+yz}+\sqrt{y+zx}+\sqrt{z+xy}\geq\sqrt{xyz}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$

Dấu bằng khi $x=y=z=3$

C. Bài tập vận dụng

5.1. Cho *a; b; c; d* là các số không âm. Chứng minh rằng:

$$a^8+b^8+2c^4+4d^2\geq 8abcd$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$a^8+b^8\ge 2a^4b^4\,(1)$

$2a^4b^4+2c^4\ge 4a^2b^2c^2\,(2)$

$4a^2b^2c^2+4d^2\ge 8abcd\,(3)$

Từ các bất đẳng thức (1), (2) và (3) cộng vế với vế, ta được:

$a^8+b^8+2c^4+4d^2\ge 8abcd$

Dấu bằng khi $a^2=b^2=c=d$

5.2. Cho *a; b* là các số không âm. Chứng minh rằng:

$$(a+b)^2+\frac{a+b}{2}\ge 2a\sqrt{b}+2b\sqrt{a}$$

(Thi học sinh giỏi Toán, lớp 9, tỉnh Quãng Ngãi, năm học 2011- 2012)

Hướng dẫn giải – đáp số

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$a+b\ge 2\sqrt{ab}$

$$a+b+\frac{1}{2}=a+\frac{1}{4}+b+\frac{1}{4}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

Suy ra $(a+b)\left(a+b+\frac{1}{2}\right)\ge 2\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$

Hay $(a+b)^2+\frac{a+b}{2}\ge 2a\sqrt{b}+2b\sqrt{a}$

Dấu bằng khi $a=b=\frac{1}{4}$

5.3. Chứng minh rằng: $\dfrac{a+b}{\sqrt{a(3a+b)}+\sqrt{b(3b+a)}}\ge\dfrac{1}{2}$ với *a, b* là các số dương.

Hướng dẫn giải – đáp số

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\sqrt{4a(3a+b)}\le\frac{4a+3a+b}{2}\,(1)$$

$$\sqrt{4b(3b+a)}\le\frac{4b+3b+a}{2}\,(2)$$

Từ (1), (2) cộng vế với vế, ta được:

$$\sqrt{4a(3a+b)}+\sqrt{4b(3b+a)}\le 4a+4b$$

$$\Rightarrow\sqrt{a(3a+b)}+\sqrt{b(3b+a)}\le 2a+2b$$

Suy ra $\dfrac{a+b}{\sqrt{a(3a+b)}+\sqrt{b(3b+a)}}\ge\dfrac{a+b}{2a+2b}=\dfrac{1}{2}$

Dấu bằng khi $a=b$

5.4. Cho $S=\frac{1}{\sqrt{1.2019}}+\frac{1}{\sqrt{2.2018}}+...+\frac{1}{\sqrt{k(2019-k+1)}}+...+\frac{1}{\sqrt{2019.1}}$

Hãy so sánh S và $2.\frac{2019}{2020}$

Hướng dẫn giải – đáp số

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si với $x;y>0$ ta có:

$$x+y\geq 2\sqrt{xy}\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{xy}}\geq \frac{2}{x+y}$$

Từ đó suy ra $S>\frac{1}{1+2019}+\frac{1}{2+2018}+...+\frac{1}{k+2019-k+1}+...+\frac{1}{2019+1}$

Hay $S>2.\frac{2019}{2020}$. Điều phải chứng minh

5.5. Cho *a, b, c, d* dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}}+\sqrt{\frac{b}{c+d+a}}+\sqrt{\frac{c}{d+a+b}}+\sqrt{\frac{d}{a+b+c}}>2$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$a+b+c+d\geq 2\sqrt{a(b+c+d)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a(b+c+d)}}\geq \frac{2}{a+b+c+d}\Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c+d}}\geq \frac{2a}{a+b+c+d}(1)$$

Tương tự ta có:

$$\sqrt{\frac{b}{c+d+a}}\geq \frac{2b}{a+b+c+d}(2)$$
$$\sqrt{\frac{c}{d+a+b}}\geq \frac{2c}{a+b+c+d}(3)$$
$$\sqrt{\frac{d}{a+b+c}}\geq \frac{2d}{a+b+c+d}(4)$$

Từ các bất đẳng thức (1), (2), (3) và (4) cộng vế với vế, ta được điều phải chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} a=b+c+d \\ b=a+c+d \\ c=a+b+d \\ d=a+b+c \end{cases}$ cộng lại ta có $a+b+c+d=0$

Điều này không xảy ra vì $a,b,c,d>0$